

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE UM ELEMENTO DE CASCA
TRIANGULAR C^0 PARA APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE
CONTATO-IMPACTO

Carlos Eduardo da Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
CIVIL.

Aprovada por:

Prof. José Luis Drummond Alves, D.Sc.

Prof. Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, D.Sc.

Prof. Elson Magalhães Toledo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MAIO DE 2005

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

SILVA, CARLOS EDUARDO DA

Implementação Computacional de um Elemento de Casca Triangular C^0 para Aplicações de Contato-Impacto [Rio de Janeiro] 2005

XI, 87 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 2005)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Análise Transiente
2. Cascas C^0
3. Contato-Impacto

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

*“O mundo não está ameaçado pelas pessoas más,
mas sim por aquelas que permitem a maldade”.*

Albert Einstein

*Aos meus Pais
Geraldo Francisco da Silva e Sirley da Glória Silva*

Agradecimentos

O meu principal agradecimento vai para os meus Pais que sem dúvida nunca pouparam qualquer esforço para que eu pudesse trilhar até aqui. Quero agradecer também à minha família e em particular às minhas irmãs que compartilharam, mesmo distantes, os momentos difíceis que enfrentei aqui no rio. Agradeço à minha namorada Andreza Moraes que foi uma pessoa que esteve sempre ao meu lado e que foi importantíssima nas horas boas e difíceis. Quero registrar aqui o meu apreço pelo meu amigo/irmão Cassiano por me abrigar em sua casa no momento que cheguei aqui no rio.

Não posso deixar aqui de registrar toda a minha gratidão aos meus amigos professores do NUMEC/UFJF, cito-os: Luis Paulo, Elson Toledo, Afonso Lemonge e Flávio Barbosa. Essas pessoas foram, sem dúvida alguma, imprescindíveis para que um dia eu viesse a almejar estar aqui fazendo mestrado na COPPE.

Finalmente comecei a agradecer às pessoas que estiveram ao meu lado aqui na COPPE. O primeiro em ordem de importância é o meu Orientador Prof. José Alves, devido à tamanha identificação pessoal com esse cara é quase impossível expressar meu agradecimento, mas de qualquer maneira registro aqui que eu não estaria ainda na COPPE se não fosse o seu incentivo e amparo. É isso aí Zé a esperança está na luta! Quero registrar o meu respeito e gratidão pelos Prof. Alvaro Coutinho, Prof. Roberto Fernandes e Prof. Fernando Ribeiro que sempre se dispuseram a ajudar-me durante a realização deste trabalho. Também quero agradecer ao Prof. Luiz Landau por ter manifestado interesse em apoiar a continuação deste trabalho no LAMCE.

Por fim, agradeço ao corpo técnico e administrativo do LAMCE por ter disponibi-

lizado espaço físico e suporte computacional e ao NACAD/UFRJ, CESUP/UFRGS e LNCC/MCT pelo tempo de máquina cedido para a realização dos experimentos, respectivamente, nas plataformas Cray SV1, Cray T94 e SUN FIRE 6800.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc)

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE UM ELEMENTO DE CASCA
TRIANGULAR C^0 PARA APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE
CONTATO-IMPACTO

Carlos Eduardo da Silva

Maio/2005

Orientador: José Luis Drummond Alves

Programa: Engenharia Civil

Estruturas laminares são freqüentemente encontradas nos mais diversos tipos de indústrias. Podendo-se citar: indústria automotiva, para produção de carrocerias de veículos; indústria aeroespacial, no projeto de fuselagens de aeronaves; indústria naval, no projeto de cascos de navios. O presente trabalho apresenta a implementação computacional de um elemento finito de casca triangular, de continuidade C^0 , destinado à simulação de estruturas laminares sujeitas a transientes de curta duração. O elemento inclui o comportamento não-linear físico (modelo elasto-plástico perfeito utilizando o critério de von Mises) e não-linear geométrico com a formulação corotacional. A integração no tempo das equações resultantes do processo de discretização temporal emprega o operador de diferenças centrais de modo explícito. Para validar a implementação foram analisados exemplos típicos da literatura.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

COMPUTATIONAL IMPLEMENTATION OF THE TRIANGULAR C^0 SHELL
ELEMENT FOR APPLICATIONS IN CONTACT-IMPACT PROBLEMS

Carlos Eduardo da Silva

May/2005

Advisor: José Luis Drummond Alves

Department: Civil Engineering

Lamina structures are frequently found in many industrial applications such as: automotive, in manufacture of vehicles; aerospace, in airplanes fuselage design; naval, in ships hull design. The present work shows a computational implementation of a C^0 shell finite element to model laminar structures in nonlinear short transient analyses, considering an elastic-plastic model under von Mises criterion to account material behavior and corotational formulation to account geometric behavior. The explicit central difference operator is used for time integration of the governing momentum equations. Typical benchmarks are analyzed to verify the implementation.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Estado-da-Arte da Engenharia Computacional	2
1.2	Motivação	3
1.3	Objetivos	4
1.4	Revisão da Literatura	5
1.4.1	Descrição de Alguns Elementos Triangulares de Casca	7
1.5	Organização do Texto	10
2	Formulação Corotacional do Contínuo	11
2.1	Descrição do Movimento de um Corpo	12
2.2	Gradiente de Deformação	13
2.3	Descrição do Movimento de Corpo Rígido	17
2.3.1	Transformação de Coordenadas e Tensor Rotação	18
2.4	Gradiente de Deformação Corotacional	20
2.5	Medidas de Deformações	21
2.5.1	Tensor de Green-Lagrange	22
2.5.2	Tensor Taxa de Deformação	22
2.5.3	Tensor Taxa de Deformação Corotacional	24
2.5.4	Tensor de Almansi	25
2.6	Medidas Objetivas de Taxas de Tensão	26
2.6.1	Tensor Taxa de Jaumann - Taxa Corotacional	26
2.6.2	Tensor Taxa de Green-Nagdhi	27
2.6.3	Tensor Taxa de Truesdell	27
2.7	Modelos Constitutivos	28

2.7.1	Modelo de Material Elástico de Cauchy	28
2.7.2	Modelo de Material Elástico de Kirchhoff	29
2.7.3	Modelo de Material Hipoelástico	30
2.7.4	Modelo de Material Hipoelasto-Plástico	30
3	Elemento Triangular de Casca C^0	34
3.1	Hipóteses da Formulação do Elemento	35
3.2	Geometria	36
3.3	Descrição Cinemática	41
3.4	Equações Constitutivas	43
3.5	Matriz de Massa	45
4	Implementação Computacional	47
4.1	Equação Governante do Problema	47
4.2	Avaliação das Forças Internas	49
4.3	Integração das Equações de Movimento	55
4.4	Integração das Equações Constitutivas	57
4.4.1	Critério de Escoamento de von Mises	58
4.4.2	Atualização do Estado de Tensões	59
5	Aplicações Numéricas	61
5.1	Placa Quadrada	61
5.2	Placa Circular	63
5.3	Painel Cilíndrico	65
5.4	Calota Abatida	68
5.5	Contato-Impacto (Pipe-Whip)	72
5.6	Explosão no Casco de um Submarino	76
6	Conclusões	81

Lista de Figuras

1.1	Simulação computacional e real de impacto.	2
2.1	Configurações indeformada e deformada de um corpo.	12
2.2	Configurações indeformada e deformada de um segmento $d\mathbf{X}$	14
2.3	Movimento de corpo rígido.	18
2.4	Rotação de corpo rígido.	18
2.5	Configuração corotacional.	20
2.6	Espaço de funções de escoamento.	32
2.7	Componentes de deformação para uma lei associativa.	33
3.1	Teoria de Mindlin.	35
3.2	Sistema de coordenadas do elemento.	36
3.3	Sistema de coordenadas local, material $\bar{\mathbf{e}}_i$ e corotacional $\hat{\mathbf{e}}_i$ do elemento.	38
3.4	Detalhe de construção do sistema corotacional $\hat{\mathbf{e}}_i$ do elemento.	38
3.5	Esquema de definição das lâminas de integração.	43
4.1	Algoritmo para avaliar as forças internas	54
4.2	Algoritmo de integração no tempo	57
5.1	Dados físicos e geométricos da placa.	62
5.2	Campo de deslocamento $t = 1.14 \times 10^{-2}$ (fator de escala da deformada 5)	62
5.3	História de deslocamento do nó central da placa.	62
5.4	Dados físicos e geométricos da placa circular.	63
5.5	Discretização de 1/4 da placa circular.	63
5.6	Campo de deslocamento (fator de escala da deformada 10)	64
5.7	História de deslocamento do nó central da placa.	65

5.8	Dados geométricos e malha 1/2 de domínio discretizado.	66
5.9	Histórias de deslocamentos do painel.	66
5.10	Campo de deslocamento (fator de escala da deformada 1.0).	67
5.11	Dados físicos e geométricos da calota.	68
5.12	Malha estruturada por blocos(384 elementos triangulares).	68
5.13	Malha não-estruturada (996 elementos triangulares).	69
5.14	Malha estruturada por blocos (12288 elementos quadriláteros (Silva, 2003)).	69
5.15	Campo de deslocamentos malha elemento triangular estruturada por blocos.	70
5.16	Campo de deslocamentos malha triangular não estruturada.	70
5.17	Campo de deslocamentos malha de elementos quadriláteros estruturados por blocos.	71
5.18	Histórias de deslocamentos para o centro da calota.	71
5.19	Dados físicos e geométricos do problema (Pipe-Whip).	72
5.20	Detalhe das <i>Pinball</i> e <i>splitting pinball</i> - Malha Triangular.	73
5.21	Detalhe das <i>Pinball</i> e <i>splitting pinball</i> - Malha Híbrida.	73
5.22	Campo de deslocamento - Malha Triangular.	74
5.23	Campo de deslocamento - Malha Híbrida.	74
5.24	Campo de deslocamento - Malha Triangular e Híbrida..	75
5.25	Histórias de deslocamentos para o ponto a A.	75
5.26	Detalhes da malha do submarino (33685 nós e 67366 elementos).	77
5.27	Campo de deslocamentos.	78
5.28	Campo de velocidades e detalhes das ondas de choque (O-C).	79

Capítulo 1

Introdução

A Engenharia Computacional é uma das áreas da engenharia que mais se desenvolveram nas últimas décadas; com o auxílio de ferramentas computacionais de alto desempenho aliada ao avanço científico de métodos numéricos a engenharia computacional vem sendo responsável por estudar, prever e resolver inúmeros problemas de interesse da sociedade.

A predição de eventos, incluindo o comportamento de aeronaves, automóveis, veículos espaciais; a simulação de fenômenos climáticos e meteorológicos, dispersão de poluentes em bacias hidrográficas; a simulação de fenômenos biológicos, desenvolvimento de sistemas biomecânicos; são alguns exemplos de aplicações que ilustram a importância da engenharia computacional.

O crescente desenvolvimento dos métodos numéricos tem permitindo que a engenharia computacional simule, através de modelos computacionais, problemas cada vez mais detalhados e realísticos, podendo-se destacar os seguintes métodos: Método dos Elementos Finitos (MEF), Método dos Elementos de Contorno (MEC), Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Discretos (MED).

A fiel idealização de modelos computacionais é um dos grandes desafios da engenharia computacional. A utilização de experimentos, em laboratório em escala real ou reduzida, torna-se indispensável para calibrar os modelos computacionais, evidenciando assim uma

dependência sadia entre os modelos computacionais e os experimentais.

1.1 Estado-da-Arte da Engenharia Computacional

A figura 1.1 representa uma confrontação entre os resultados experimentais e computacionais de uma colisão de um automóvel incluindo carroceria, partes mecânicas e passageiros. A modelagem computacional neste caso envolve áreas de conhecimento de biomecânica, para representar a estrutura do passageiro; de ciência dos materiais, para representar o comportamento mecânico dos materiais envolvidos no modelo; engenharia estrutural, para representar o resistência dos materiais sujeitos ao carregamento; dentre outras áreas.



Figura 1.1: Simulação computacional e real de impacto.

Segundo Oden (2002) a confiabilidade de uma simulação computacional depende de três fatores básicos:

1. Do objetivo da simulação;
2. Do modelo matemático a ser utilizado para descrever o fenômeno físico de interesse;
3. Da precisão que o modelo matemático será resolvido.

O modelo matemático é uma abstração de um evento natural caracterizado por hipóteses, relações matemáticas e leis constitutivas. Após a construção do modelo matemático busca-se a sua solução via procedimentos numéricos ou analíticos. A escolha de um modelo matemático é, inquestionavelmente, a parte mais importante na elaboração de uma simulação computacional, ([Oden, 2002](#)).

Após obtida a solução do modelo matemático torna-se necessário avaliar a sua resposta sob dois importantes aspectos que são: a verificação e a validação do modelo. A verificação trata-se de um procedimento que avalia se o modelo computacional, obtido por uma discretização do modelo matemático, e a sua implementação podem ser utilizados para representar fielmente o evento com uma precisão suficiente. A validação trata-se de avaliar se modelo matemático é uma representação suficientemente precisa do evento físico, ([Babuska e Oden, 2004](#)).

1.2 Motivação

A principal motivação deste trabalho foi desenvolver uma ferramenta de baixo custo computacional para realizar simulações em grande escala. Dentro deste contexto, buscou-se dar continuidade aos trabalhos de [Alves \(1991\)](#), [Quaranta \(2002\)](#) e [Silva \(2003\)](#), todos eles desenvolvidos no Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ. Estes trabalhos desenvolveram estratégias e ferramentas de implementação computacional destinadas à análise não-linear transiente em mecânica do contínuo via MEF. Problemas que demandem esse tipo de análise são encontrados em diversos ramos de atividades, por exemplo: a indústria automotiva, para predição do comportamento de carrocerias de automóveis sob colisões; indústria aeroespacial, que tem interesse em simular impacto de aeronaves com obstáculos, simular o efeito de fadiga de elementos estruturais sob carregamentos periódicos; indústria offshore, para análise de segurança de estruturas sob efeitos de cargas acidentais, como explosões por exemplo.

1.3 Objetivos

A idealização de estruturas de cascas propiciaram um notável avanço na engenharia. São inúmeras as circunstâncias em que a utilização de elementos estruturais formados por cascas proporcionam soluções com excelente relação custo/benefício. A seguir são apresentadas algumas aplicações de cascas.

Arquitetura e Edificação: O desenvolvimento de estruturas de alvenaria em forma de abóbodas na Idade Média já tornara as construções mais espaciais. Com o advento do concreto de alto desempenho essas estruturas foram ainda mais utilizadas para construção de grandes coberturas. Outra concepção estrutural bastante recente são as tenso-estruturas que são cascas onde o comportamento de flexão é desprezado.

Engenharia Nuclear e Petroquímica: As estruturas formadas por cascas são muito comuns em concepções estruturais de projetos das indústrias nuclear e petroquímica. Os vasos de pressão e linhas de transporte de fluidos são alguns exemplos dessas estruturas.

Engenharia Automotiva: Outra aplicação das cascas é encontrada na conformação de chapas de metais utilizadas para fabricação de carrocerias de automóveis, estrutura e monobloco.

Inúmeros outros exemplos podem ainda serem citados, por exemplo: Cascos de navios, submarinos e fuselagens de aeronaves.

Dentro deste contexto, o objetivo deste trabalho é apresentar uma implementação computacional de um elemento finito de casca triangular de continuidade C^0 . A implementação realizada buscou incorporar estratégias de implementação adequadas à plataformas dotadas de processamento vetorial/paralelo. Este elemento destina-se à simulação de estruturas laminares sujeitas à grandes deslocamentos e grandes deformações com rotações finitas.

Técnicas abordadas e desenvolvidas em [Quaranta \(2002\)](#) são utilizadas para simular problemas de contato-impacto em estruturas laminares discretizadas com o elemento implementado.

Análises de exemplos extensivamente abordados na literatura são apresentadas para avaliar a implementação realizada.

1.4 Revisão da Literatura

Modelagem de estruturas laminares de natureza não-lineares em regime transiente vem sendo nas últimas décadas uma das principais demandas para o método dos elementos finitos.

As estruturas laminares formadas por geometrias curvas são chamadas de cascas. As cascas podem ser representadas, fisicamente, através de um acoplamento de comportamentos de membrana e flexão. Este acoplamento é uma das principais dificuldades encontradas nas formulações de elementos de cascas, ([Stolarski et al., 1995](#)).

Basicamente os elementos de casca podem ser formulados a partir de duas teorias: A teoria de Kirchhoff, conhecida como teoria clássica de placas, e a teoria de Reissner-Mindlin. A teoria de Reissner-Mindlin tem duas vantagens atrativas em relação a teoria clássica. A primeira vantagem caracteriza-se pela melhor representação das deformações de cisalhamento. A outra vantagem está relacionada ao fato de que a teoria de Reissner-Mindlin requer somente continuidade C^0 para o campo de deslocamentos, enquanto que a formulação variacional da teoria de Kirchhoff requer continuidade C^1 para os deslocamentos, acarretando em dificuldades para construção de funções de interpolação, ([Hughes, 2000](#)). A teoria de Reissner-Mindlin pode ser interpretada como uma formulação penalizada da teoria de Kirchhoff para cascas finas, onde penalização é a rigidez de cisalhamento da casca que normalmente é muito maior que a rigidez à flexão, ([Loula et al., 1989](#)).

As hipóteses cinemáticas assumidas para a teoria de Kirchhoff consideram que as se-

ções transversais permanecem retas e normais à superfície média do elemento. Para a teoria de Reissner-Mindlin as seções transversais destes elementos permanecem planas, mas não necessariamente normais à superfície média do elemento. Resultados experimentais confirmam que as hipóteses de Kirchhoff são boas representações do comportamento de cascas delgadas. Para cascas espessas a teoria de Reissner-Mindlin é melhor indicada, (Belytschko et al., 2000). Na teoria de Reissner-Mindlin o campo de deformações de cisalhamento é constante ao longo da espessura; para a teoria clássica este campo é nulo.

Os elementos C^0 são propensos ao aparecimento dos travamentos de cisalhamento e de membrana. O fenômeno de travamento de cisalhamento torna-se mais proeminente nas cascas espessas e ocorre devido a uma possível rotação relativa da seção transversal em relação à superfície média do elemento, (Belytschko et al., 2000). Este travamento é dado por uma rigidez excessiva de cisalhamento que pode ocorrer inclusive em casos de flexão pura, (Stolarski et al., 1995), evidenciando uma grave inconsistência física.

O travamento de membrana pode ocorrer em ambas as teorias. Este fenômeno é responsável pelo aparecimento de deformações extensionais excessivas. A origem deste travamento está na incapacidade da interpolação do campo de deslocamento representar modos ausentes de deformações de membrana. O tratamento das inconsistências geradas por esses dois fenômenos de travamento, via técnicas de integração reduzida, é apresentado nos trabalhos de (Hughes et al., 1978; Stolarski e Belytschko, 1982).

Os elementos formulados com técnicas de integração reduzida dotados de somente um ponto de integração têm sido bastante atrativos para análise de problemas não-lineares em regime transiente, pois os elementos de alta ordem, quadráticos por exemplo, perdem suas propriedades de convergirem mais rapidamente, frente aos elementos de baixa ordem, para problemas de soluções não suaves.

Implementações de elementos com um ponto de integração e que utilizam algoritmos explícitos de integração no tempo são bastante robustas para aplicações industriais de

grande escala, em particular para simulações de contato-impacto sob altas velocidades. Elementos quadriláteros baseados nestas formulações podem ser encontrados nos trabalhos de Hughes e Liu (1981), Belytschko et al. (1984a), Belytschko et al. (1992), Belytschko e Leviathan (1994a), Belytschko e Leviathan (1994b), Zhu e Zacharia (1996), Silva (1997) e Silva (2003).

Estimulados por demandas de problemas não-lineares com geometrias complexas Belytschko et al. (1984b) e Kennedy et al. (1986) apresentam uma implementação de elementos triangulares de continuidade C^0 .

Os elementos de casca triangulares de baixa ordem exibem baixas taxas de convergência; entretanto, estratégias computacionais podem melhorar seu desempenho, (Carpenter et al., 1986b). Computar corretamente os modos de corpo rígido do elemento é a principal estratégia para melhorar a taxa de convergência desses elementos. Uma maneira bastante eficaz de incorporar corretamente estes modos de corpo rígido é utilizar uma formulação corotacional para representar o comportamento não-linear geométrico dos elementos, (Belytschko et al., 1984a; Stolarski et al., 1995; Crisfield, 1997).

1.4.1 Descrição de Alguns Elementos Triangulares de Casca

Os elementos triangulares são bastante atrativos para confecção de modelos computacionais adaptativos, (Boisse et al., 1992). Outra importante vantagem dos elementos triangulares lineares é a necessidade de apenas um ponto de integração das funções de interpolação tornando-os bastante econômico computacionalmente.

O trabalho de Clough e Johnson (1968) apresentou um dos primeiros elementos triangulares de casca. Esse elemento possui 15 graus de liberdade, sendo duas rotações e três translações nodais. O campo de deslocamento utilizado assume uma variação linear para as translações de membrana, e uma variação cúbica para os deslocamentos de placa. A formulação desse elemento destina-se a análise linear estática de cascas e apresentou

resultados bastante satisfatórios para alguns tipos de estruturas. Entretanto, para estruturas com curvatura acentuada o elemento mostrou-se ineficaz.

[Belytschko et al. \(1984b\)](#) apresentam um elemento de placa triangular C^0 com um ponto de quadratura baseado na teoria de Mindlin. A principal contribuição deste trabalho foi a decomposição dos deslocamentos em modos de flexão e de cisalhamento que estão associados às parcelas de energias de flexão e de cisalhamento, respectivamente. A taxa de convergência desse elemento é da ordem de h^2 . Em problemas com superfície dotada de curvatura irregular esse elemento apresentou-se mais eficiente quando comparado com o elemento quadrilátero com um ponto de quadratura desenvolvido no trabalho de [Belytschko et al. \(1981\)](#). As aplicações contidas nesse trabalho são voltadas para problemas estáticos lineares.

Um elemento triangular de casca C^0 para análise não-linear transiente explícita com grandes deformações foi apresentado por [Kennedy et al. \(1986\)](#). Esse elemento utilizou uma formulação corotacional para contemplar o comportamento não-linear geométrico da estrutura. Nessa formulação os autores utilizaram o critério de escoamento de Ilyushin para a lei constitutiva do elemento. Neste trabalho são apresentados alguns estudos quanto ao passo de tempo crítico para garantir a estabilidade no algoritmo de integração no tempo. Outra contribuição deste trabalho foi apresentar fatores de cisalhamentos, desenvolvidos em [Carpenter et al. \(1986a\)](#), para tratar o problema de travamento de cisalhamento.

Duas formulações para descrever o comportamento de membrana são apresentados no trabalho de [Carpenter et al. \(1986b\)](#). A primeira trata-se de um esquema de projeção de deformações de membrana. Esse esquema elimina os deslocamentos de corpo rígido utilizando uma descrição corotacional para os deslocamentos. A segunda baseia-se na utilização de um campo linear para representar os deslocamentos de membrana, que é governado pelas rotações normais ao plano do elemento.

Hsiao (1987) apresenta uma formulação para problemas não lineares, utilizando um elemento triangular desenvolvido por Bathe e Ho (1981). A formulação é baseada em uma descrição lagrangeana atualizada que utiliza um método incremental-iterativo combinado com um controle de comprimento de arco do procedimento de integração das equações de equilíbrio. Esse elemento considera para o campo de deslocamento três translações e três rotações, sendo duas no plano do elemento e outra normal ao elemento.

Um procedimento para evitar o travamento de cisalhamento baseado no conceito de sólido degenerado é apresentado por Boisse e Gellin (1994). Esse trabalho teve como principal motivação a simulação de conformação de metais, bastante comum na indústria automotiva.

Uma formulação mista que modifica a energia potencial do elemento é apresentada por Bucalem e Nóbrega (2000). Nesse trabalho é formulado um elemento triangular quadrático também baseado na teoria de sólido degenerado.

Um estudo sobre como evitar o travamento de membrana e de cisalhamento utilizando-se modelos discretos de placas, baseados na teoria de Mindlin, é apresentado no trabalho de Sydenstricker e Landau (2000), que também discute a relação entre o grau de refinamento da malha e o fenômeno de travamento de membrana.

Argyris et al. (2003) apresentam um procedimento implícito para representar problemas não-lineares dependentes do tempo. Duas formulações para construção da matriz de massa discreta do elemento são apresentadas. Este trabalho também formula uma matriz de massa consistente que inclui as inércias de rotação e de translação. Além disso, as deformações de cisalhamento transversal são consideradas afim de evitar-se o fenômeno de travamento de cisalhamento.

1.5 Organização do Texto

O capítulo 2 apresenta uma descrição da formulação corotacional do contínuo. Além disso, algumas medidas de deformações e de tensões são apresentadas e discutidas nesse capítulo. Alguns modelos constitutivos, em particular o modelo de material hipoelasto-plástico empregado na formulação do elemento deste trabalho, também são apresentados.

As hipóteses assumidas na formulação do elemento e todos os seus detalhes, sistemas de coordenadas e descrição cinemática, por exemplo, estão contidos no capítulo 3.

O capítulo 4 apresenta os procedimentos e estratégias computacionais da implementação. Os algoritmos de integração no tempo e das equações constitutivas também são discutidos.

Resultados de alguns exemplos de aplicações que avaliam a eficiência do elemento são apresentados no capítulo 5.

Por fim, no capítulo 6 são discutidos alguns tópicos da implementação e são apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Formulação Corotacional do Contínuo

Neste capítulo serão abordados procedimentos da descrição cinemática do contínuo via uma descrição corotacional. O uso desta descrição torna-se indispensável para descrever as relações cinemáticas de corpos orientados, cascas e vigas por exemplo, ([Belytschko et al., 2000](#)). Na descrição corotacional do contínuo o sistema de referência acompanha o corpo durante seu movimento, ou seja, o sistema de referência desloca-se e deforma-se com o corpo. Em um procedimento incremental este sistema é atualizado de maneira a computar giros e deslocamentos de corpo rígido, distorções e deslocamentos decorrentes de um campo de deformações atuante no corpo. O movimento de um corpo, quando descrito por uma formulação corotacional, é separado em três configurações: uma configuração inicial, uma configuração intermediária chamada de corotacional e uma configuração final. A configuração intermediária representa o mesmo estado extensional e tensional da configuração inicial, ou seja, o campo de deslocamento que leva a configuração inicial na configuração corotacional é um campo de deslocamento de corpo rígido; identificar e computar corretamente esse deslocamento de corpo rígido é uma etapa crucial na formulação corotacional, ([Belytschko e Hsieh, 1973](#)).

2.1 Descrição do Movimento de um Corpo

Um corpo contínuo é configurado por um conjunto de infinitas partículas. Uma premissa necessária para que este corpo seja contínuo é que a posição das partículas possa ser descrita por funções contínuas em um determinado instante. O movimento de um corpo dito como contínuo é caracterizado por uma sequência de configurações durante um intervalo de tempo t ; a rigor, essas sequências devem ser suficientemente suaves a ponto de não permitirem qualquer falha geométrica do corpo.

Considere um corpo em um estado inicial indeformado, conforme Figura 2.1. O domínio do corpo para a configuração inicial é dado por Ω_0 .

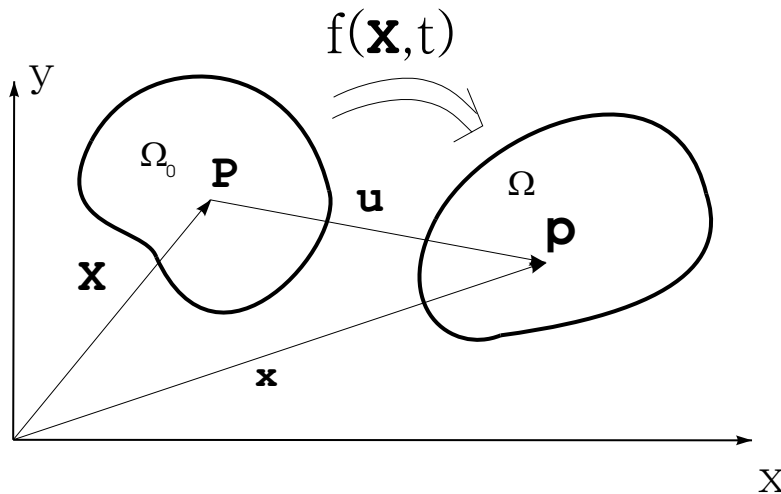


Figura 2.1: Configurações indeformada e deformada de um corpo.

A posição de uma determinada partícula \mathbf{P} , na configuração inicial deste corpo, pode ser representada por um vetor posição \mathbf{X} ;

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3) \quad (2.1)$$

as coordenadas X_i são chamadas de coordenadas materiais ou Lagrangeanas.

O movimento que expressa a passagem da configuração Ω_0 para a configuração corrente Ω , ilustrado na Figura 2.1, pode ser descrito por

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = f(\mathbf{X}, t) \quad (2.2)$$

onde a função $f(\mathbf{X}, t)$ mapeia a configuração de referência (inicial) na configuração corrente. As coordenadas x_i são conhecidas por coordenadas espaciais ou eulerianas. Esta função assume como hipóteses a condição de ser continuamente diferenciável, responsável por garantir suavidade no campo de deformações; a condição de ser bijetora, que garante a impenetrabilidade do material e uma última condição que garanta conservação de massa do material.

2.2 Gradiente de Deformação

Considerando uma base ortonormal \mathbf{e}_i , os vetores posição (2.1) e (2.2) podem ser escritos, respectivamente, por:

$$\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i \quad (2.3)$$

e

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i \quad (2.4)$$

O vetor

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.5)$$

é chamado de vetor deslocamento e as funções $u_i = u_i(\mathbf{X}, t)$ são as componentes de deslocamentos referidos à base \mathbf{e}_i .

O movimento representado pela equação (2.2) pode ser acompanhado de uma mudança

de forma da geometria. Esta mudança caracteriza a presença de um campo de deformação atuante no corpo.

Sejam dS e ds os comprimentos de uma determinada fibra nas configurações inicial e final, respectivamente.

Esses segmentos podem ser escritos, conforme a Figura 2.2, por:

$$\overline{PP'}^2 = dS^2 \equiv d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.6)$$

e

$$\overline{pp'}^2 = ds^2 \equiv d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.7)$$

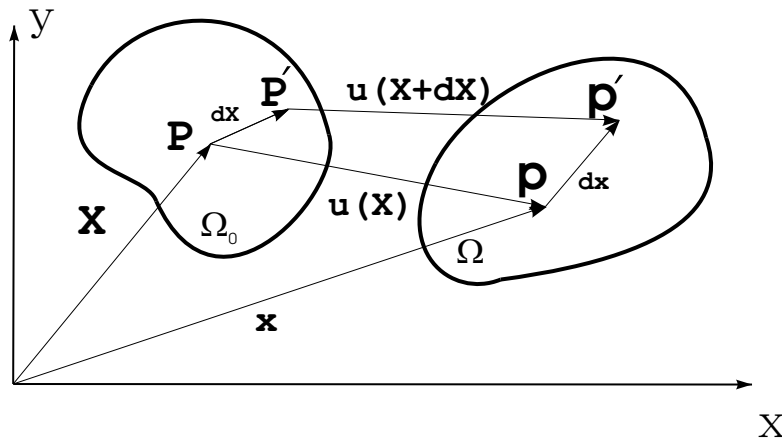


Figura 2.2: Configurações indeformada e deformada de um segmento $d\mathbf{X}$.

A relação entre os quadrados dos comprimentos da fibra nas duas configurações pode ser dada por:

$$ds^2 - dS^2 \quad (2.8)$$

Se $ds^2 - dS^2 = 0$ em todo o corpo então o movimento é um movimento de corpo rígido, ou seja, ausente de um campo de deformação; por outro lado, se a relação $ds^2 - dS^2 \neq 0$,

então, o corpo está sob um campo de deformação.

A posição do ponto P' pode ser dada, por:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X} + d\mathbf{X} \quad (2.9)$$

e sua respectiva posição na configuração final é dada por:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + d\mathbf{x} \quad (2.10)$$

Logo, o deslocamento sofrido por este ponto pode ser escrito, segundo a equação (2.5), como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} + d\mathbf{x} - (\mathbf{X} + d\mathbf{X}) \quad (2.11)$$

isolando $d\mathbf{x}$ e reagrupando os termos, tem-se:

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - (\mathbf{x} - \mathbf{X}) \quad (2.12)$$

Substituindo (2.5) em (2.12)

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \quad (2.13)$$

As duas últimas parcelas da Equação (2.13) podem ser interpretadas como sendo o gradiente de deslocamento ¹ aplicado em $d\mathbf{X}$.

Então:

$${}^1d\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \mathbf{a}(\mathbf{r}) \equiv (\nabla \otimes \mathbf{a})d\mathbf{r}$$

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + (\nabla\mathbf{u})d\mathbf{X} \quad (2.14)$$

A Equação (2.14) pode ser escrita como:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.15)$$

onde \mathbf{F} , chamado de gradiente de deformação, pode ser expresso por:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} \quad (2.16)$$

A Equação (2.16) exprime o gradiente de deformação em função do gradiente do campo de deslocamento. Porém, é bastante usual, conforme (Malvern, 1969; Belytschko et al., 2000; Oden, 1972), exprimir o gradiente de deformação por:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_{\mathbf{x}} \quad (2.17)$$

O gradiente de deformação possibilita mapear um segmento infinitesimal, na configuração de referência, $d\mathbf{X}$, no seu correspondente, $d\mathbf{x}$ na configuração corrente. Este mapeamento trata-se de uma transformação linear, ou seja, o gradiente de deformação é um tensor de segunda ordem.

Utilizando-se notação indicial pode-se demonstrar que as relações (2.16) e (2.17) são equivalentes.

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.18)$$

Usando a equação (2.1), tem-se:

$$F_{ij} = \frac{\partial(X_i + u_i)}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial X_i}{\partial X_j} \quad (2.19)$$

sabendo-se que $\frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \delta_{ij}$, então:

$$F_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \delta_{ij} \quad (2.20)$$

que, finalmente, pode ser escrito como:

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{I} \quad (2.21)$$

O tensor gradiente de deformação, embora esteja intimamente ligado ao campo de deformação de um corpo, não é nulo para um movimento ausente de deformação, evidenciando-se assim ser inconveniente o seu uso como uma medida de deformação. Entretanto, medidas de deformação podem ser criadas a partir do gradiente de deformação de modo a contornar este problema.

2.3 Descrição do Movimento de Corpo Rígido

Um importante procedimento necessário na descrição corotacional é a determinação das rotações de corpo rígido.

Um movimento de corpo rígido, ilustrado na Figura 2.3, consiste de uma translação e uma rotação em torno de um ponto fixo e pode ser escrito como

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{R}(t) \mathbf{X} + \mathbf{x}_T(t) \quad (2.22)$$

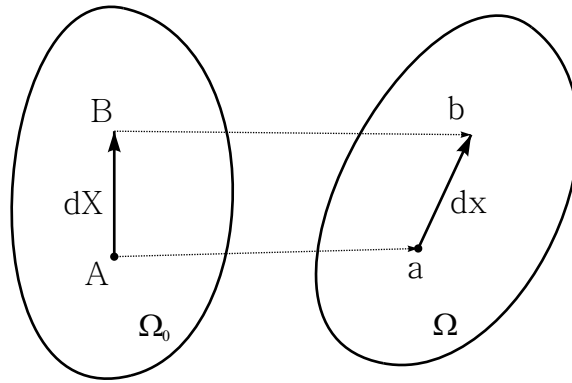


Figura 2.3: Movimento de corpo rígido.

onde o tensor $\mathbf{R}(t)$ é o tensor rotação. Este tensor tem uma importante propriedade dada pela sua ortogonalidade, ou seja, a sua inversa é dada pela sua transposta;

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (2.23)$$

2.3.1 Transformação de Coordenadas e Tensor Rotação

Uma transformação de coordenadas, em duas dimensões, é ilustrada na Figura 2.4.

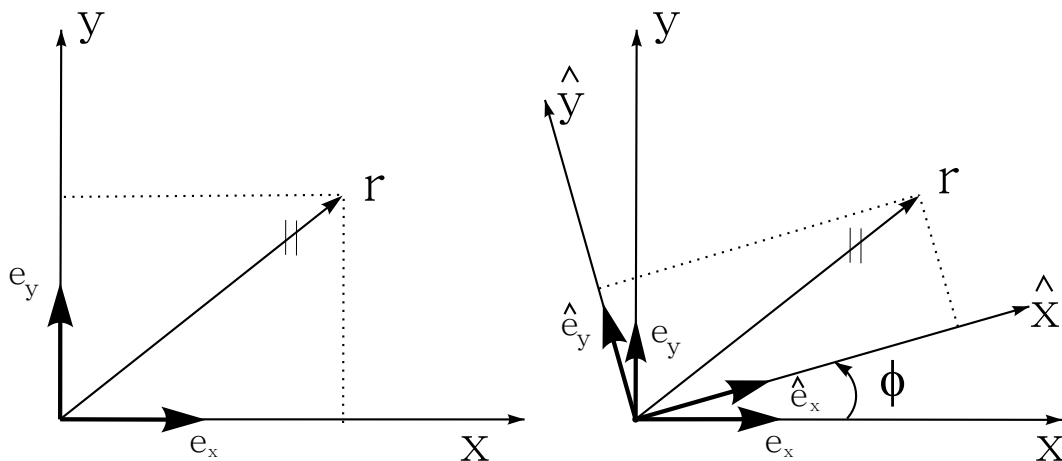


Figura 2.4: Rotação de corpo rígido.

A Figura 2.4 ilustra o vetor \mathbf{r} representado nas bases ortogonais \mathbf{e}_i e $\hat{\mathbf{e}}_i$, respectivamente. A ortogonalidade dessas bases é expressa por:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \quad (2.24)$$

onde δ_{ij} é o *delta de Kronecker*.

Visto que um vetor \mathbf{v} qualquer é independente do sistema ao qual esteja representado, embora suas componentes sejam dependentes do sistema ao qual esteja referido, logo o vetor \mathbf{r} pode ser escrito como,

$$\mathbf{r} = r_i \mathbf{e}_i = \hat{r}_i \hat{\mathbf{e}}_i. \quad (2.25)$$

Realizando o produto escalar de (2.25) com \mathbf{e}_j

$$r_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \hat{r}_i \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.26)$$

e usando a equação (2.24), obtém-se a seguinte expressão

$$r_j = \mathbf{e}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \hat{r}_i. \quad (2.27)$$

ou na forma tensorial

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_i \hat{r}_i \quad (2.28)$$

onde \otimes representa um produto tensorial.

A Equação (2.28) pode ser vista como uma transformação linear ortogonal, e pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{r}}. \quad (2.29)$$

Pré-multiplicando ambos os lados por \mathbf{R}^T e usando (2.23), tem-se, finalmente

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{R}^T \mathbf{r}. \quad (2.30)$$

2.4 Gradiente de Deformação Corotacional

O gradiente de deformação corotacional mapeia uma partícula na configuração corotacional em sua respectiva configuração deformada. A configuração corotacional $\hat{\Omega}$ difere-se da configuração inicial Ω_0 somente de um giro e um deslocamento de corpo rígido. A Figura (2.5) ilustra essas configurações.

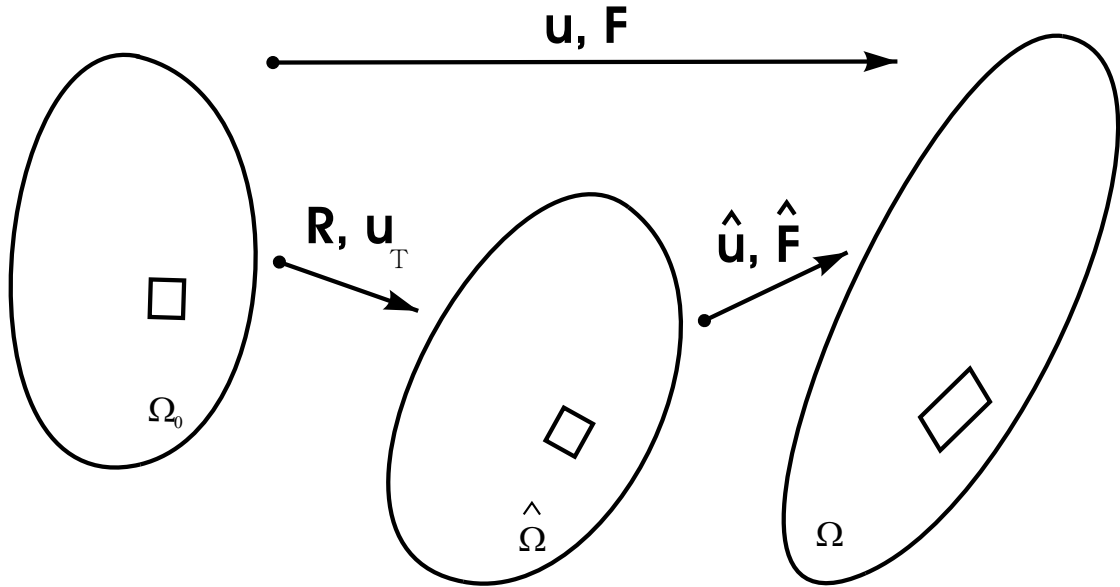


Figura 2.5: Configuração corotacional.

Utilizando-se os procedimentos representados pelas Equações (2.9)-(2.16), o gradiente de deformação corotacional $\hat{\mathbf{F}}$ pode ser escrito como:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{I} + \hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}} \quad (2.31)$$

onde o operador gradiente $\hat{\nabla}$ refere-se a configuração corotacional $\hat{\Omega}$. O campo de des-

locamento $\hat{\mathbf{u}}$, ilustrado na Figura (2.5), refere-se a passagem do corpo da configuração corotacional para a configuração final.

2.5 Medidas de Deformações

A descrição da deformação e a sua medida são partes essenciais da mecânica do contínuo não linear. Dois enfoques podem ser usados para descrever o movimento de um corpo, seja este movimento composto de deformações ou movimentos de corpo rígido.

No primeiro enfoque as variáveis cinemáticas são descritas em relação ao referencial material, ou seja, as variáveis independentes são as partículas do material referidas à configuração inicial e o tempo. Este tipo de descrição é conhecida como descrição Lagrangeana.

O segundo enfoque considera como variáveis independentes a posição da partícula no instante de tempo corrente e o tempo. Essa descrição, conhecida como descrição Euleriana, é muito utilizada em mecânica dos fluidos, pois fixa a atenção sobre uma determinada região do espaço ao invés de fixar-se sobre um determinado volume de material, como é o caso da descrição Lagrangeana.

Outras descrições podem ser obtidas como combinações dessas duas, por exemplo: descrição Lagrangeana atualizada, descrição Corotacional e Lagrangeana Euleriana arbitrária.

As medidas de deformações podem ser avaliadas, basicamente, por medidas de deformações totais (tensor de Green-Lagrange e tensor de Almansi) e medidas de taxas de deformações (tensor taxa de deformação).

Uma importante propriedade comum à essas medidas consiste em todas elas serem identicamente nulas para um movimento de corpo rígido.

2.5.1 Tensor de Green-Lagrange

O tensor de Green-Lagrange (\mathbf{E}) é definido como sendo a variação do quadrado de um segmento, na configuração material, $d\mathbf{X}$. Esta variação pode ser escrita como

$$ds^2 - dS^2 = 2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X}, \quad (2.32)$$

ou

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = 2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X}, \quad (2.33)$$

onde o tensor de Green-Lagrange é definido por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.34)$$

em coordenadas cartesianas e em função dos deslocamentos, pode-se escrever:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (2.35)$$

2.5.2 Tensor Taxa de Deformação

O tensor taxa de deformação (\mathbf{D}) também conhecido como velocidade de deformação é uma importante medida de deformação para problemas que envolvam viscosidade e plasticidade, (Malvern, 1969). Essa medida corresponde à parcela simétrica do gradiente de velocidade \mathbf{L} , na descrição Euleriana, que é dado por:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.36)$$

e pode ser escrito como a soma de um tensor simétrico e um antimétrico

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (2.37)$$

A taxa de deformação é dada por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (2.38)$$

ou

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.39)$$

A parte antimétrica do gradiente de velocidade define a taxa de rotação ou tensor *Spin*, que pode ser expressa por:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.40)$$

As medidas (2.39) e (2.40) permitem, quando utilizadas conjuntamente, descrever um comportamento não-linear geométrico, embora suas componentes relacionem-se linearmente com as velocidades. Esta característica, juntamente com o fato de que a rotação do corpo, seja ela de corpo rígido ou não, ser medida diretamente do tensor \mathbf{W} , tornam essas medidas bastante atrativas para problemas que envolvam ciclos, expressos por taxas, em regime linear de deformação.

A taxa de deformação e a taxa de Green-Lagrange relacionam-se por:

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.41)$$

A Equação (2.41) evidencia que sob pequenas deformações as duas taxas se aproximam; por outro lado, se as componentes de deformações são grandes as duas medidas diferem completamente uma da outra. Uma comparação direta entre as duas taxas fica comprometida, uma vez que, elas se relacionam, respectivamente, com as descrições Euleriana e Lagrangeana.

Uma importante propriedade da taxa de deformação é dada por sua invariância no tempo com relação ao seu referencial, (Malvern, 1969). Esta propriedade, também conhecida por objetividade, pode ser expressa por:

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R} \quad (2.42)$$

2.5.3 Tensor Taxa de Deformação Corrotacional

O gradiente de velocidade na descrição corrotacional é dado por:

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{v}} \quad (2.43)$$

e assim como em (2.37) pode ser escrito por:

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{W}} \quad (2.44)$$

O tensor taxa de deformação na descrição corrotacional é dado por:

$$\hat{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) \quad (2.45)$$

O tensor taxa de deformação corotacional pode ser escrito a partir do tensor taxa de deformação na descrição Euleriana, como:

$$\hat{\mathbf{D}} = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R} \quad (2.46)$$

2.5.4 Tensor de Almansi

As componentes do tensor de Green-Lagrange (\mathbf{E}) podem ser expressas em termos da configuração deformada através da seguinte expressão

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.47)$$

Substituindo a Equação (2.47) em (2.35) pode-se definir o seguinte tensor, conhecido como tensor de Almansi (\mathbf{E}^*),

$$E_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (2.48)$$

A taxa do tensor de Almansi pode ser expressa por:

$$\dot{\mathbf{E}}^* = \mathbf{D} - \left(\mathbf{E}^* \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{E}^* \right) \quad (2.49)$$

A Equação (2.49) ilustra a diferença entre os tensores $\dot{\mathbf{E}}^*$ e \mathbf{D} , mesmo os dois estando referidos a descrição espacial. A aplicabilidade dos dois tensores está intimamente ligada a ordem de grandeza das deformações para um incremento de deformação. Estando um problema sujeito a pequenos incrementos de deformações a taxa de deformação torna-se

mais atrativa, pois suas componentes são formadas por relações lineares de deslocamentos, algo que não ocorre na taxa de Almansi, tornando-a inconveniente neste caso.

2.6 Medidas Objetivas de Taxas de Tensão

Uma importante propriedade para construir modelos constitutivos não-lineares é dada pela idéia de indiferença referencial das grandezas tensoriais utilizadas na descrição do campo de tensões de um determinado corpo. O princípio de material indiferente de referencial, conhecida também por objetividade, exige que as equações constitutivas expressem o mesmo campo de tensões para quaisquer sistemas de referência, (Oden, 1972). Essas taxas podem ser elaboradas tanto a partir do tensor de Cauchy quanto do tensor de Kirchhoff.

2.6.1 Tensor Taxa de Jaumann - Taxa Corotacional

O tensor de Cauchy é uma medida objetiva de tensão, entretanto, a sua taxa não preserva esta propriedade. Uma variante de correções da taxa de Cauchy pode ser obtida via parcelas de rotações oriundas do tensor Spin (2.40). Esta correção é a taxa de Jaumann que pode ser dada por:

$$\sigma^{\nabla J} = \dot{\sigma} - \mathbf{W}\sigma - \sigma\mathbf{W}^T \quad (2.50)$$

Um procedimento que explicita a objetividade da taxa de Jaumann pode ser encontrado no trabalho de Alves (1991), que utiliza a taxa de Jaumann para problemas axissimétricos. A taxa de Jaumann embora seja computacionalmente pouco onerosa, pois suas parcelas de rotação são obtidas diretamente do tensor Spin, traz consigo o inconveniente de acumular resíduos de deformações espúrias para ciclos fechados de deformações, (Kojic e Bathe, 1987); outro inconveniente é o seu comportamento oscilatório em ciclos de cisalhamento puro, (Atluri, 1984).

2.6.2 Tensor Taxa de Green-Nagdhi

Outra taxa objetiva criada a partir do tensor de Cauchy é dada pela taxa de Green-Nagdhi que pode ser expressa por:

$$\sigma^{GN} = \dot{\sigma} - \mathbf{\Omega}\sigma - \sigma\mathbf{\Omega}^T \quad (2.51)$$

onde:

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad (2.52)$$

A utilização da taxa de Green-Nagdhi é conveniente para problemas que contemplem o fenômeno de endurecimento nas suas relações constitutivas; entretanto, devido a necessidade de uma decomposição polar para obter o tensor rotação, o emprego desta taxa depende um maior esforço computacional quando comparada à taxa de Jaumann.

2.6.3 Tensor Taxa de Truesdell

A taxa de Truesdell é dada por:

$$\sigma^{\mathcal{T}} = \dot{\sigma} + \text{div}(\mathbf{v})\sigma - \mathbf{L}\sigma - \sigma\mathbf{L}^T \quad (2.53)$$

A taxa de Truesdell para um movimento de corpo rígido pode ser dada por:

$$\sigma^{\mathcal{T}} = \dot{\sigma} - \mathbf{W}\sigma - \sigma\mathbf{W}^T \quad (2.54)$$

A Equação (2.54) evidencia que, quando ausentes de deformação, que as taxas de Jaumann e Truesdell são equivalentes.

2.7 Modelos Constitutivos

Nas seções anteriores foram descritas algumas medidas de tensões e deformações para descrição cinemática e cinética do contínuo, porém não foi mencionada nenhuma relação entre estas grandezas. As propriedades físicas macroscópicas dos materiais podem ser inseridas, em um dado modelo matemático, através das relações constitutivas. Estas relações exprimem o comportamento de um corpo, composto de um determinado material, sob a ação de um determinado estado tensional ou extensional.

Existem inúmeras possibilidades de se relacionarem tensões com deformações e por essa razão torna-se conveniente assumir modelos que tratam os materiais de duas maneiras somente, que são: materiais em que as tensões se relacionam com as deformações totais e materiais que relacionam as tensões com taxas de deformações.

2.7.1 Modelo de Material Elástico de Cauchy

O material elástico de Cauchy não depende da história de seu movimento, ou seja, a resposta de um material de Cauchy depende somente do campo de deformações em sua configuração corrente. A relação constitutiva de um material elástico de Cauchy pode ser dada por, (Belytschko et al., 2000):

$$\sigma = \mathcal{G}(\mathbf{F}) \quad (2.55)$$

onde \mathcal{G} é uma função que exprime o campo de tensões através do gradiente de deformação medido na configuração corrente.

Duas importantes propriedades deste material podem ser mencionadas aqui; a primeira é dada pela sua objetividade e a segunda refere-se ao fato de seu campo de tensões ser independente do caminho de deformação. Entretanto as parcelas de energia do material

podem não ser.

2.7.2 Modelo de Material Elástico de Kirchhoff

Problemas com grandes rotações e pequenas deformações são propícios a serem representados pelo modelo de material de Kirchhoff. Este modelo utiliza a medida de tensão de Kirchhoff que refere-se à configuração indeformada e se relaciona com a tensão de Cauchy por:

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T \quad (2.56)$$

onde:

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad (2.57)$$

e

$$J = \text{Det}(\mathbf{F}). \quad (2.58)$$

A medida (S) é conhecida como segundo tensor de Piola-Kirchhoff.

Logo a lei elástica do material de Kirchhoff é dada por:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \mathbf{E} \quad (2.59)$$

onde \mathbf{C} é tensor de quarta ordem que exprime as propriedades elásticas do material e \mathbf{E} é o tensor de Green-Lagrange (2.34).

Esta medida de tensão é idêntica à medida de Cauchy para um movimento isocórico,

(Belytschko et al., 2000). Igualmente à tensão de Cauchy, a tensão de Kirchhoff é também objetiva, entretanto a sua taxa não é objetiva assim como ocorre também para a taxa de Cauchy.

2.7.3 Modelo de Material Hipoelástico

A lei constitutiva de um material hipoelástico relaciona taxas objetivas de deformações com taxas objetivas de tensões. O comportamento de um material hipoelástico pode representar, principalmente, a resposta elástica de materiais elasto-plásticos sob pequenas deformações e que tenham pequenos efeitos dissipativos.

A forma geral de uma lei hipoelástica pode ser expressa por:

$$\sigma^\nabla = \mathbf{C} \mathbf{D} \quad (2.60)$$

A lei (2.60) assume que os incrementos de deformações e de tensões sejam lineares e recuperem-se linearmente sob um estado de descarregamento. Entretanto, para ciclos fechados de grandes deformações a energia não é necessariamente conservada e o trabalho produzido não é nulo. Este fenômeno evidencia um inconveniente ao uso da lei hipoelástica.

O procedimento de integração das equações constitutivas de um material hipoelástico permite admitir a lei de decomposição aditiva, (Simo e Hughes, 1998), que é extensamente utilizada em modelos de plasticidade que não dependam da história de deformações.

2.7.4 Modelo de Material Hipoelasto-Plástico

A utilização de modelos hipoelasto-plásticos é bastante usual quando a parcela de deformação elástica é pequena em relação a parcela plástica. O balanço de energia para esse modelo não é completamente satisfeito para ciclos fechados de deformações, entretanto, nos casos em que as deformações elásticas são pequenas esse balanço de energia é satisfeito de forma bastante precisa, (Belytschko et al., 2000). Neste tipo de modelo o tensor taxa de deformação (2.39) pode ser decomposto em parcelas elástica e plástica:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (2.61)$$

essa expressão é conhecida como lei de decomposição aditiva, que assume como hipótese principal que as deformações elásticas sejam pequenas.

O modelo constitutivo expresso em forma de taxa pode ser escrito por:

$$\sigma^{\nabla J} = \mathbf{C} (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) \quad (2.62)$$

onde $\sigma^{\nabla J}$ é a taxa de Jaumann (2.50).

A parcela de taxa de deformação plástica é dada por:

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \mathbf{r} (\sigma, \mathbf{q}) \quad (2.63)$$

onde $\dot{\lambda}$ é a taxa de fluxo plástico e $\mathbf{r} (\sigma, \mathbf{q})$ é o vetor direção de fluxo plástico que pode ser expresso por:

$$\mathbf{r} = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \quad (2.64)$$

onde ψ é o potencial de fluxo plástico. A grandeza \mathbf{q} está relacionada ao fenômeno físico de endurecimento do material.

O espaço de tensões admissíveis (\mathbf{E}_σ) é dado por:

$$\mathbf{E}_\sigma = \{f \in \mathbf{R} | f (\sigma, \mathbf{q}) \leq 0\} \quad (2.65)$$

onde a função $f (\sigma, \mathbf{q})$ é conhecida como condição de escoamento. A Figura (2.6) ilustra o domínio e os estados admissíveis do espaço (\mathbf{E}_σ).

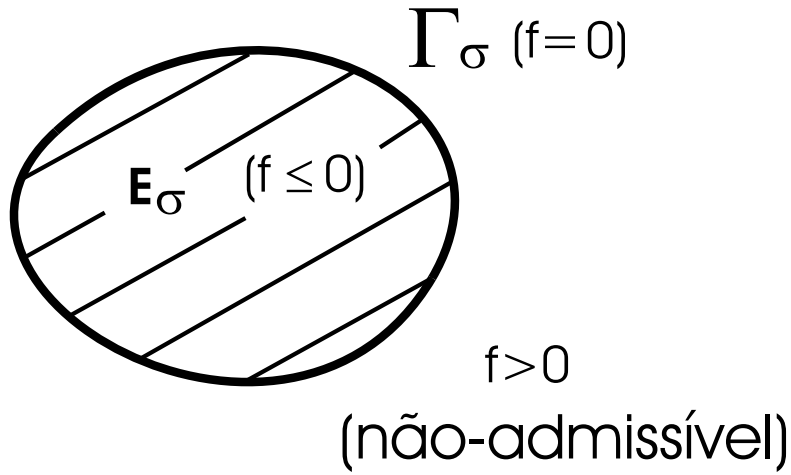


Figura 2.6: Espaço de funções de escoamento.

As condições de carregamento e descarregamento, também denominadas de condições de complementaridade de *Kuhn-Tucker* são dadas por:

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \dot{\lambda} f = 0 \quad (2.66)$$

Durante o carregamento em regime plástico ($\dot{\lambda} > 0$) o campo de tensões deve permanecer na superfície de escoamento ($f = 0$). Este fenômeno pode ser expresso por:

$$\dot{\lambda} \dot{f} = 0 \quad (2.67)$$

esta expressão é conhecida como condição de persistência.

As possíveis situações referentes às condições (2.66) e (2.67) são dadas por:

$$f < 0 \iff (\sigma, \mathbf{q}) \in \Omega(\mathbf{E}_\sigma) \implies \dot{\lambda} = 0 \quad (\text{elástico}) \quad (2.68)$$

$$f = 0 \iff (\sigma, \mathbf{q}) \in \Gamma(\mathbf{E}_\sigma) \left\{ \begin{array}{l} f < 0 \implies \dot{\lambda} = 0 \text{ (descarregamento elástico)} \\ f = 0 \quad e \quad \dot{\lambda} = 0 \text{ (carregamento neutro)} \\ f = 0 \quad e \quad \dot{\lambda} > 0 \text{ (carregamento plástico)} \end{array} \right\} \quad (2.69)$$

A condição 2.67, para um carregamento em regime plástico, pode ser dada por:

$$\dot{f} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.70)$$

onde a parcela $\partial f / \partial \sigma$ indica a direção normal à superfície de escoamento, conforme ilustra a figura 2.7. Se o potencial de fluxo plástico for a própria função de escoamento o modelo constitutivo é dito associativo. A lei associativa para superfícies de escoamentos convexas garante, quando o endurecimento é caracterizado por deformações positivas, modelos constitutivos estáveis para pequenas deformações, (Belytschko et al., 2000).

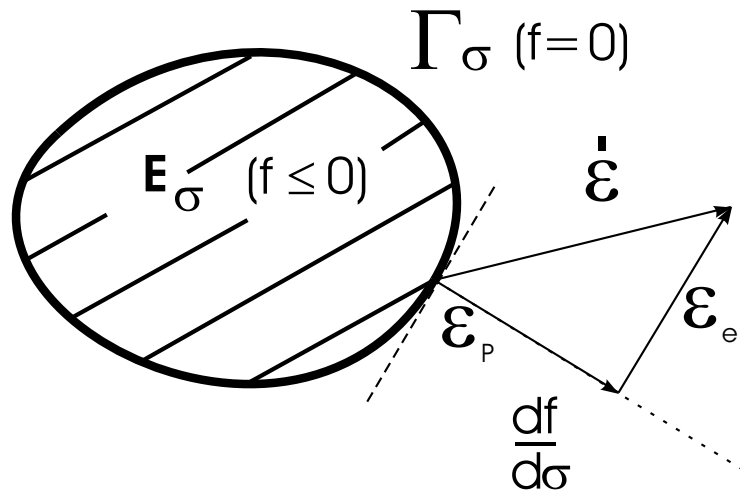


Figura 2.7: Componentes de deformação para uma lei associativa.

Capítulo 3

Elemento Triangular de Casca C^0

A formulação do elemento, aqui apresentada, foi realizada com o objetivo de extrair-se o maior proveito possível das características das aplicações às quais o elemento destina-se, ou seja, buscou-se utilizar procedimentos numéricos propícios a serem usados para reproduzirem fenômenos físicos de curta duração. Esses procedimentos baseiam-se na classe de métodos explícitos para análise não-linear de estruturas.

Utilizou-se uma descrição corotacional para representar o comportamento não-linear do elemento. Nessa descrição as relações cinemáticas e cinéticas são tratadas em forma de taxas objetivas de deformação e tensão, tornando-as basicamente lineares e evitando-se complexidades provenientes do comportamento não-linear do elemento. O uso da descrição corotacional credencia o elemento a tratar problemas com grandes rotações de corpo rígido e grandes deformações extensionais. O comportamento físico do elemento inclui o modelo elasto-plástico de von Mises com endurecimento isotrópico. A integração das equações constitutivas do elemento é realizada por meio de lâminas ao longo da espessura, conforme apresentado por [Hughes \(2000\)](#).

Dois procedimentos foram incluídos na formulação para evitar-se o surgimento de deformações espúrias de cisalhamento, que são responsáveis pelo aparecimento de travamento de cisalhamento. O primeiro procedimento baseia-se na eliminação da parcela de rotação de corpo rígido do campo de deslocamento do elemento. O segundo trata-se da utilização de fatores de flexibilidade responsáveis pela correção da parcela de energia

excessiva de deformação de cisalhamento que são comuns em elementos de baixa ordem.

A integração no tempo das equações resultantes do processo de discretização temporal emprega o operador de diferenças centrais de modo explícito. Com intuito de evitar-se a solução de um sistema de equações de movimento, empregou-se uma matriz de massa discreta para o elemento. Essa matriz apresenta um artifício para computar a inércia rotacional referentes aos graus de liberdade de rotação do elemento.

3.1 Hipóteses da Formulação do Elemento

A formulação do elemento assume as hipóteses da teoria de Mindlin, ou seja, as seções transversais permanecem planas, mas não necessariamente normais à superfície, conforme a figura 3.1.

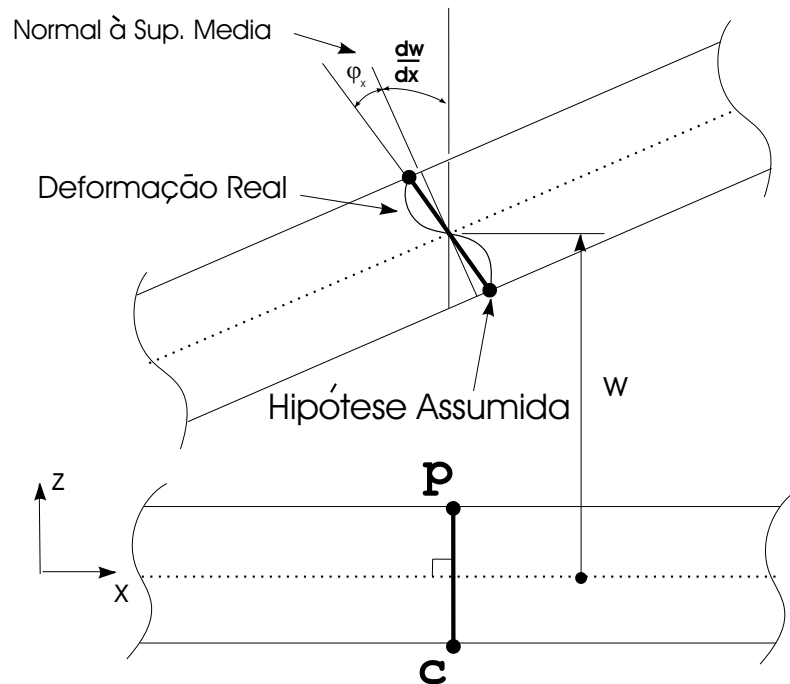


Figura 3.1: Teoria de Mindlin.

A teoria de Mindlin impõe que o segmento de reta CP ao longo da espessura da casca, gire conforme uma rotação de corpo rígido. Esta teoria trata o campo de deslocamento independente das rotações; além disso a teoria de Mindlin considera a parcela de rotação devido ao cisalhamento (ϕ_s), conforme ilustra a Figura 3.1. Assume-se que a deflexão W

seja pequena, quando comparada com as dimensões da estrutura, para um dado passo de tempo do procedimento de integração das equações de movimento.

Uma importante propriedade da teoria Mindlin é a consideração de um estado plano de tensões ao longo da espessura do elemento, ou seja, ($\sigma_z = 0$).

3.2 Geometria

A definição da geometria do elemento é descrita através de um mapeamento isoparamétrico com funções de forma lineares. A figura 3.2 ilustra os sistemas de coordenadas e interpolação da geometria.

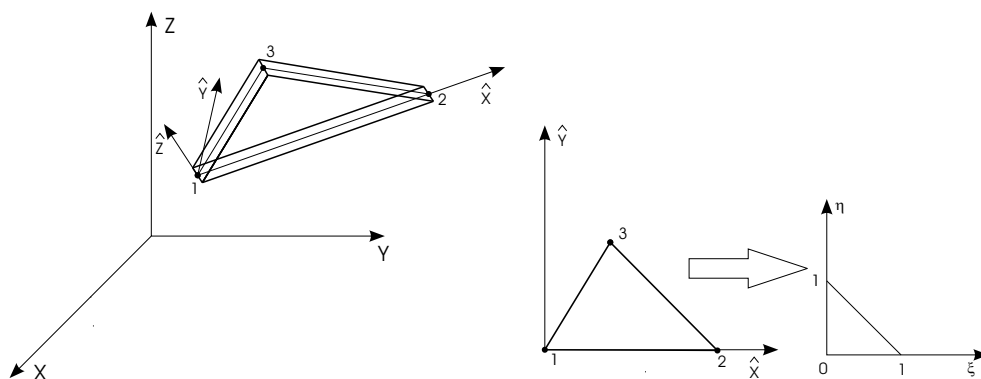


Figura 3.2: Sistema de coordenadas do elemento.

Define-se o sistema de coordenadas locais a partir da geometria do elemento segundo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{r}_{13}}{\|\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{r}_{13}\|} \\
 \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{r}_{12}}{\|\mathbf{r}_{12}\|} \\
 \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i$. As coordenadas nodais \mathbf{X}_i no sistema global são dadas por:

$$\mathbf{X}_i = \left\{ \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} \right\}_{i=1,2,3} \quad (3.2)$$

Através do sistema de coordenadas local, pode-se definir a matriz rotação deste sistema por:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

A construção do sistema local (3.1) refere-se somente a informações geométricas dos lados 1-2 e 1-3, ou seja, não considera o giro devido ao campo de deformações computado no baricentro do elemento. Esse giro define um sistema de coordenadas material $\bar{\mathbf{e}}_i$ do elemento. O sistema co-rotacional do elemento é construído computando um giro relativo entre o sistema local e material do elemento.

A Figura 3.3 ilustra o sistema corotacional para uma configuração indeformada e os sistemas local, material e co-rotacional do elemento para uma configuração deformada.

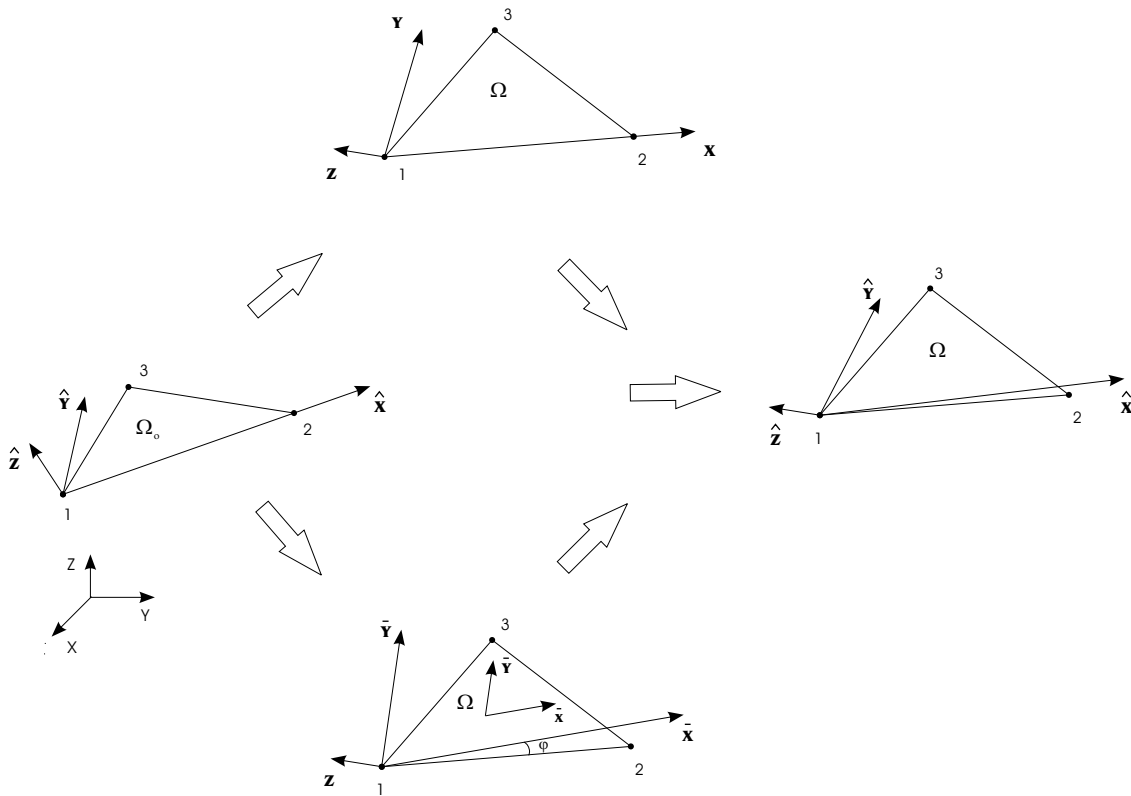


Figura 3.3: Sistema de coordenadas local, material $\bar{\mathbf{e}}_i$ e corotacional $\hat{\mathbf{e}}_i$ do elemento.

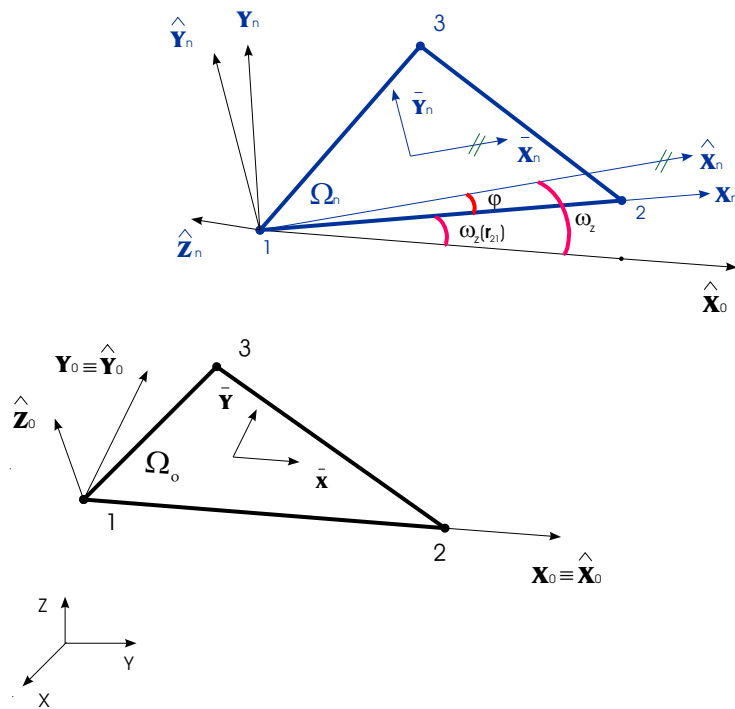


Figura 3.4: Detalhe de construção do sistema corotacional $\hat{\mathbf{e}}_i$ do elemento.

A taxa da defasagem $\dot{\phi}$ pode ser obtida, conforme ilustra a Figura 3.4, através de:

$$\dot{\phi} = \hat{\omega}_z - \hat{\omega}_z(\mathbf{r}_{21}) \quad (3.4)$$

onde $\hat{\omega}_z(\mathbf{r}_{21})$ é o giro relativo do lado 1-2 do elemento:

$$\hat{\omega}_z(\mathbf{r}_{21}) = \frac{(\hat{v}_{y2} - \hat{v}_{y1})}{|\mathbf{r}_{21}|} \quad (3.5)$$

A taxa de giro, *spin* (Malvern, 1969), do material é:

$$\hat{\omega}_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}_y}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial \hat{y}} \right) \quad (3.6)$$

Os cossenos diretores entre a configuração local e material podem ser computados através de uma série trigonométrica dada por:

$$\begin{aligned} \cos(\phi^{n+1}) &= \cos(\phi^n) - \Delta\phi \sin(\phi^n) - \frac{1}{2}\Delta\phi^2 \cos(\phi^n) \\ \sin(\phi^{n+1}) &= \sin(\phi^n) + \Delta\phi \cos(\phi^n) - \frac{1}{2}\Delta\phi^2 \sin(\phi^n) \\ \Delta\phi &= \dot{\phi}^{n+\frac{1}{2}} \Delta t \end{aligned} \quad (3.7)$$

Os cossenos diretores (3.7) são normalizados por:

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\cos^2(\phi^{n+1}) + \sin^2(\phi^{n+1})} \\ \cos(\phi^{n+1}) &\leftarrow \frac{\cos(\phi^{n+1})}{s} \\ \sin(\phi^{n+1}) &\leftarrow \frac{\sin(\phi^{n+1})}{s} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Finalmente, tem-se a transformação entre o sistema global e o sistema co-rotacional dada por:

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \cos(\phi^{n+1}) & \sin(\phi^{n+1}) & 0 \\ -\sin(\phi^{n+1}) & \cos(\phi^{n+1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{R} \quad (3.9)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{X} \quad (3.10)$$

As coordenadas nodais no sistema co-rotacional $\hat{\mathbf{x}}_I$ podem ser expressas através da equação (3.10). Um ponto no interior do elemento tem suas coordenadas nodais interpoladas por:

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{I=1}^3 N_I(\xi, \eta) \hat{\mathbf{x}}_I \quad (3.11)$$

As funções de interpolação N_I são;

$$N_1(\xi, \eta) = \xi \quad N_2(\xi, \eta) = \eta \quad N_3(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (3.12)$$

3.3 Descrição Cinemática

O campo de velocidades para um ponto da casca, segundo a teoria de Mindlin, apresentado por (Belytschko et al., 1984a), é dado por;

$$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{v}}^m - \hat{z}\hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.13)$$

onde, $\hat{\mathbf{v}}^m$ são as velocidades na superfície média da casca e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é o vetor de velocidades angulares.

A Equação (3.13) desenvolvida para as velocidades nodais $\hat{\mathbf{v}}_I$ resulta em:

$$\hat{\mathbf{v}}_I = \begin{Bmatrix} \hat{v}_{xI}^m + \hat{z}\hat{\theta}_{yI} \\ \hat{v}_{yI}^m - \hat{z}\hat{\theta}_{xI} \\ \hat{v}_{zI}^m \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

O campo de velocidades (3.13) sob hipóteses de comportamento não-linear geométrico será tratado através de uma descrição corotacional das variáveis cinemáticas do elemento.

A medida de deformação aqui considerada é expressa pelo tensor taxa de deformação na descrição corotacional (Belytschko et al., 2000):

$$\hat{\mathbf{D}}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{v}_i}{\partial \hat{x}_j} + \frac{\partial \hat{v}_j}{\partial \hat{x}_i} \right) \quad (3.15)$$

As taxas de deformações do elemento são encontradas substituindo a equação (3.14) em (3.15).

$$\begin{aligned}
\hat{d}_x &= \frac{\partial \hat{v}_x^m}{\partial \hat{x}} + \hat{z} \frac{\partial \hat{\theta}_y}{\partial \hat{x}}, & \hat{d}_y &= \frac{\partial \hat{v}_y^m}{\partial \hat{y}} - \hat{z} \frac{\partial \hat{\theta}_x}{\partial \hat{y}}, & 2\hat{d}_{xy} &= \frac{\partial \hat{v}_x^m}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}_y^m}{\partial \hat{x}} + \hat{z} \left(\frac{\partial \hat{\theta}_y}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{\theta}_x}{\partial \hat{y}} \right) \\
2\hat{d}_{xz} &= \frac{\partial \hat{v}_z^m}{\partial \hat{x}} + \hat{\theta}_y, & 2\hat{d}_{yz} &= \frac{\partial \hat{v}_z^m}{\partial \hat{y}} - \hat{\theta}_x
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Vale observar nas equações (3.16) que as componentes de deformação \hat{d}_{xz} e \hat{d}_{yz} são constantes na espessura do elemento. Por esse motivo surge um modo de energia nula no elemento, ou seja, uma possível rotação das faces superior e inferior em relação à superfície média. Entretanto, esse comportamento comprometedor desaparece para qualquer malha com dois ou mais elementos, (Belytschko et al., 1984b).

Para evitar-se o surgimento do travamento de cisalhamento deve-se eliminar as parcelas de corpo rígido das rotações contidas na equação (3.16), segundo:

$$\hat{\theta}^{def} = \hat{\theta} - \hat{\theta}^{rig} \tag{3.17}$$

Uma forma de medir as rotações que geram as deformações espúrias de cisalhamento é dada por Kennedy et al. (1986) conforme as seguintes relações:

$$\hat{\theta}_x^{rig} = \frac{1}{\hat{x}_2 \hat{y}_3} [(\hat{v}_{z3} - \hat{v}_{z1}) \hat{x}_2 - (\hat{v}_{z2} - \hat{v}_{z1}) \hat{x}_3] \tag{3.18}$$

$$\hat{\theta}_y^{rig} = \frac{1}{\hat{x}_2} (\hat{v}_{z1} - \hat{v}_{z2}) \tag{3.19}$$

3.4 Equações Constitutivas

As relações constitutivas adotadas são consideradas por meio de um comportamento hipoplasto-plástico do material com critério de escoamento de von Mises. O esquema de integração do processo não-linear é realizado via o emprego de taxas objetivas de tensão, ou seja, taxas que preservam o estado tensional para um movimento de corpo rígido. Utilizou-se a taxa de tensão de Cauchy na descrição corotacional que é equivalente à taxa *Jaumann*, conforme será visto adiante. A taxa de *Jaumann* é conveniente por não necessitar de uma decomposição polar para o cálculo da matriz de rotação, pois sua parcela de rotação é obtida de forma direta através do tensor *spin* (3.6). Um procedimento para problemas axisimétricos utilizando a taxa de *Jaumann* pode ser encontrado em (Alves, 1991). A integração é feita por meio de lâminas conforme a Fig. 3.5.

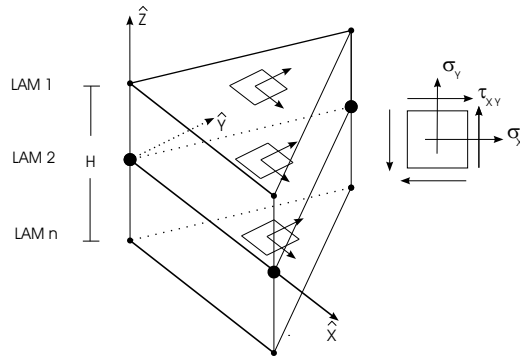


Figura 3.5: Esquema de definição das lâminas de integração.

A lei constitutiva (2.62) pode ser expressa por parcelas de tensões no plano do elemento ($\sigma_m^{\nabla J}$) e por tensões de cisalhamento ($\sigma_s^{\nabla J}$) na espessura do elemento, ou seja:

$$\sigma_m^{\nabla J} = \{\sigma_x^{\nabla J}, \sigma_y^{\nabla J}, \sigma_{xy}^{\nabla J}\} \tag{3.20}$$

e

$$\sigma_s^{\nabla J} = \{\sigma_{xz}^{\nabla J}, \sigma_{yz}^{\nabla J}\} \tag{3.21}$$

A relação constitutiva do material pode então ser expressa por:

$$\sigma_m^{\nabla J} = \mathbf{C}_m (\mathbf{D}_m - \mathbf{D}_m^p) \quad (3.22)$$

e pela lei elástica

$$\sigma_s^{\nabla J} = \mathbf{C}_s (\mathbf{D}_s) \quad (3.23)$$

onde

$$\mathbf{C}_m = \frac{E}{1-\nu} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

e

$$\mathbf{C}_s = \frac{E}{1-\nu} \kappa \cdot c_s \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

onde E e ν são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, respectivamente.

Os fatores κ e c_s que aparecem na equação (3.25) são fatores de correção da energia de deformação de cisalhamento. O coeficiente κ é $5/6$ segundo [Hughes \(2000\)](#). Já o coeficiente c_s , desenvolvido em [Carpenter et al. \(1986a\)](#), é dado por:

$$c_s = \frac{1}{1 + \bar{c}} \quad (3.26)$$

onde

$$\bar{c} = \frac{2(1+\nu)h^2}{\kappa L^2}. \quad (3.27)$$

Aqui h é a espessura do elemento e o comprimento característico L é dado por:

$$L = \frac{2A_e}{\max(l_1, l_2, l_3)}, \quad (3.28)$$

onde A_e e l_i são a área e os lados do elemento, respectivamente.

3.5 Matriz de Massa

A matriz de massa discreta do elemento utilizada sofre uma correção referente aos graus de liberdade de rotação tornando-se uma matriz massa escalonada obtida pela regra da quadratura de Lobatto, procedimento esse desenvolvido por [Hughes \(2000\)](#).

A matriz de massa M_e do elemento é separada em duas parcelas m^{desl} e m^{rot} , referentes aos graus de liberdade de deslocamento e rotação, respectivamente. Essas parcelas devem ser normalizadas segundo:

$$\tilde{M}^{desl} = \sum_{I=1}^3 m_i^{desl} \quad (3.29)$$

$$\tilde{M}^{rot} = \sum_{I=1}^3 m_i^{rot} \quad (3.30)$$

$$m_i^{desl} \leftarrow \left(\frac{M_e}{\tilde{M}^{desl}} \right) m_i^{desl} \quad (3.31)$$

$$m_i^{rot} \leftarrow \left(\frac{M_e}{\tilde{M}^{rot}} \right) m_i^{rot} \quad (3.32)$$

A parcela m^{rot} deve ser ajustada por um fator referente à inércia rotacional do elemento da seguinte maneira:

$$\alpha = \frac{h^2}{12} \quad (3.33)$$

$$m^{rot} \leftarrow \max \left\{ \alpha, \frac{A}{8} \right\} m_i^{rot} \quad (3.34)$$

Capítulo 4

Implementação Computacional

Neste capítulo serão apresentados os procedimentos utilizados para aproximar o campo das variáveis cinemáticas do elemento, assim como da avaliação das forças internas. Aspectos da implementação das forças internas, da integração temporal e da avaliação da plasticidade do elemento também são apresentados.

4.1 Equação Governante do Problema

A condição necessária e suficiente que garanta os princípios de conservação de energia que regem um problema da mecânica do contínuo é a existência de um campo tensorial σ dado por, (Holzapfel, 2000):

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \sigma(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} \quad \forall \quad \Omega \times]0, T[\quad (4.1)$$

onde \mathbf{t} é o vetor tensão de Cauchy (força por unidade de superfície definida na configuração deformada) e \mathbf{n} o vetor unitário normal à essa superfície.

Integrando ambos os lados da equação 4.1 no contorno e usando o teorema da divergência tem-se:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds = \int_{\partial\Omega} \sigma(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} ds = \int_{\Omega} \text{div} \sigma(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} ds \quad (4.2)$$

Usando a relação acima na seguinte equação de conservação de quantidade de movimento linear

$$\int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{v}} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} ds + \int_{\Omega} \mathbf{b} d\Omega \quad (4.3)$$

pode-se chegar à seguinte equação:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \frac{dv_i}{dt} \quad (4.4)$$

que é conhecida como equação de movimento que estabelece o equilíbrio dinâmico de um corpo.

A forma fraca ou formulação variacional da equação (4.4) é dada por:

$$\int_{\Omega} \delta v_i \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i \right) d\Omega = 0 \quad (4.5)$$

onde \mathbf{b} são as componentes de forças de volume.

O desenvolvimento da equação (4.5) resulta no princípio das potências virtuais [Malvern \(1969\)](#) que é uma variante dos princípio dos trabalhos virtuais, e pode ser expresso:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega - \int_{\Omega} \delta v_i \rho b_i d\Omega - \int_{\Gamma} \delta v_i \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta v_i \rho \dot{v}_i d\Omega = 0 \quad (4.6)$$

onde Ω e Γ são, respectivamente, o domínio e o contorno da casca ainda não discretizada.

A primeira parcela da equação (4.6) pode ser interpretada como

$$\delta P^{int} = \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega = \int_{\Omega} \delta L_{ij} \sigma_{ji} = \int_{\Omega} \delta D_{ij} \sigma_{ji} \quad (4.7)$$

Essa expressão é conhecida como a potência virtual interna integrada no domínio. As segunda e a terceira parcelas de (4.6) são potências virtuais externas e a última trata-se da potência cinética interna.

4.2 Avaliação das Forças Internas

As forças internas dos elementos são definidas por:

$$\delta P^{int} = \delta v_{iI} f_{iI}^{int} = \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega = \delta v_{iI} \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega \quad (4.8)$$

portanto

$$f_{iI}^{int} = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega \quad (4.9)$$

onde $I = 1...3$ para o elemento triangular.

O campo de velocidades lineares e angulares na superfície média do elemento é aproximado, via uma formulação típica de elementos finitos, por:

$$\hat{\mathbf{v}}^m = \sum_{I=1}^3 N_I(\xi, \eta) \hat{\mathbf{v}}_I \quad (4.10)$$

$$\hat{\theta} = \sum_{I=1}^3 N_I(\xi, \eta) \hat{\theta}_I \quad (4.11)$$

Substituindo as aproximações (4.10) e (4.11) em (3.16);

$$\hat{d} = \hat{d}^m - \hat{z}\hat{k} \quad (4.12)$$

$$\hat{d} = \mathbf{B}^m \hat{\mathbf{v}} - \hat{z} \mathbf{B}^f \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.13)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{d}_x^m \\ \hat{d}_y^m \\ 2\hat{d}_{xy}^m \end{Bmatrix} = \frac{1}{\hat{x}_2 \hat{y}_3} \begin{pmatrix} -\hat{y}_3 & 0 & \hat{y}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{x}_3 - \hat{x}_2 & 0 & -\hat{x}_3 & 0 & \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 - \hat{x}_2 & -\hat{y}_3 & -\hat{x}_3 & \hat{y}_3 & \hat{x}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_{x1} \\ \hat{v}_{y1} \\ \hat{v}_{x2} \\ \hat{v}_{y2} \\ \hat{v}_{x3} \\ \hat{v}_{y3} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{k}_x \\ \hat{k}_y \\ 2\hat{k}_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{-1}{\hat{x}_2 \hat{y}_3} \begin{pmatrix} 0 & -\hat{y}_3 & 0 & \hat{y}_3 & 0 & 0 \\ \hat{x}_2 - \hat{x}_3 & 0 & \hat{x}_3 & 0 & -\hat{x}_2 & 0 \\ \hat{y}_3 & \hat{x}_3 - \hat{x}_2 & -\hat{y}_3 & -\hat{x}_3 & 0 & \hat{x}_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\theta}_{x1} \\ \hat{\theta}_{y1} \\ \hat{\theta}_{x2} \\ \hat{\theta}_{y2} \\ \hat{\theta}_{x3} \\ \hat{\theta}_{y3} \end{Bmatrix}^{def} \quad (4.15)$$

$$\hat{d}^s = \mathbf{B}^s \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (4.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 2\hat{d}_{xz} \\ 2\hat{d}_{yz} \end{array} \right\} = \mathbf{B}^s \left\{ \begin{array}{c} \hat{\theta}_{x1} \\ \hat{\theta}_{y1} \\ \hat{\theta}_{x2} \\ \hat{\theta}_{y2} \\ \hat{\theta}_{x3} \\ \hat{\theta}_{y3} \end{array} \right\}^{def} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{B}^s = \frac{1}{6\hat{x}_2\hat{y}_3} \quad (4.18)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} -\hat{y}_3 & \hat{y}_3(2\hat{x}_2 + \hat{x}_3) & \hat{y}_3^2 & \hat{y}_3(3\hat{x}_2 - \hat{x}_3) & 0 & \hat{x}_2\hat{y}_3 \\ \hat{y}_3(\hat{x}_3 - 2\hat{x}_2) & \hat{x}_2^2 - \hat{x}_3^2 & -\hat{y}_3(\hat{x}_2 + \hat{x}_3) & \hat{x}_3(\hat{x}_3 - 2\hat{x}_2) & -3\hat{x}_2\hat{x}_3 & \hat{x}_2(2\hat{x}_3 - \hat{x}_2) \end{array} \right)$$

As equações (4.14), (4.15) e (4.18) explicitam os operadores diferenciais de membrana, flexão e cisalhamento, respectivamente.

A forma semi-discreta da equação (4.4) é dada por:

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{int} \quad (4.19)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa diagonal discreta e as forças internas podem ser dadas por:

$$\begin{pmatrix} \hat{F}_{x1} \\ \hat{F}_{y1} \\ \hat{F}_{x2} \\ \hat{F}_{y2} \\ \hat{F}_{x3} \\ \hat{F}_{y3} \end{pmatrix} = A_e (\mathbf{B}^m)^T \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{M}_{x1} \\ \hat{M}_{y1} \\ \hat{M}_{x2} \\ \hat{M}_{y2} \\ \hat{M}_{x3} \\ \hat{M}_{y3} \end{pmatrix} = A_e (\mathbf{B}^f)^T \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{pmatrix}^{def} + A_e (\mathbf{B}^s)^T \begin{pmatrix} n_{xz} \\ n_{yz} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

onde A_e é a área do elemento. As componentes das forças resultantes são dadas por:

$$n_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}_{ij} d\hat{z} \quad (4.22)$$

$$m_{ij} = - \int_{-h/2}^{h/2} \hat{z} \hat{\sigma}_{ij} d\hat{z} \quad (4.23)$$

Essas integrais serão avaliadas segundo uma regra de Simpson com 3 ou 5 pontos de in-

tegração ao longo da espessura. Esses pontos caracterizam as lâminas de integração.

As equações (4.20) e (4.21) referem-se ao sistema corotacional do elemento, portanto deve-se fazer a transformação inversa deste sistema para o sistema global, segundo:

$$\mathbf{F}_e^{int} = \hat{\mathbf{R}}^T \hat{\mathbf{F}}_e^{int} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{F}^{int} = \mathbf{A}_{e=1}^{NE} \mathbf{F}_e^{int} \quad (4.25)$$

onde \mathbf{A} é o operador *assembly* definido em Hughes (2000) e NE é o numero total de elementos. O algoritmo da Fig. 4.1 apresenta a avaliação das forças internas.

Loop nos Elementos

Monta sistema local (e_i)

Monta sistema corotacional (\hat{e}_i)

Transforma coordenadas $\hat{x} = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{X}$

Transforma velocidades $\hat{v} = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{V}$

Calcula operadores diferenciais

Calcula taxas de deformação

Calcula deformações nas lâminas

Fim do Loop nos Elementos

Loop nas Lâminas

Avalia tensões nas lâminas (EPT) von Mises (4.49)

Fim do Loop nas Lâminas

Loop nos Elementos

Calcula esforços por lâminas

Integra os esforços ao longo da espessura

Monta forças internas no sistema corotacional

Transforma forças internas para sistema global $\mathbf{F}^{int} = \hat{\mathbf{R}}^T \hat{\mathbf{f}}$

Fim do Loop nos Elementos

Figura 4.1: Algoritmo para avaliar as forças internas

4.3 Integração das Equações de Movimento

A Equação (4.19) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{int}) \quad (4.26)$$

Usando a matriz de massa na sua forma diagonal pode-se reescrever em notação indicial a equação (4.26) como:

$$a_i = \delta_{ij} \frac{1}{M_{ij}} (F_i^{ext} - F_i^{int}) \quad (4.27)$$

ou ainda

$$a_i = \frac{1}{M_{ii}} (F_i^{ext} - F_i^{int}) \quad (4.28)$$

Utilizando um procedimento de marcha no tempo baseado no operador de diferença central pode-se escrever a discretização temporal da equação 4.28 por:

$$\mathbf{a}^n = \frac{1}{\mathbf{M}} (\mathbf{F}^{ext,n} - \mathbf{F}^{int,n}) \quad (4.29)$$

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = \mathbf{v}^{n-1/2} + \Delta t \mathbf{a}^n \quad (4.30)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{v}^{n+1/2} \quad (4.31)$$

A discretização temporal da equação (4.19) é realizada através de um operador de diferenças centrais de modo explícito. Este procedimento de integração é condicionalmente estável e a condição suficiente para garantir a sua estabilidade é dada pelo limite de Courant, (Alves, 1991), segundo:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}} \quad (4.32)$$

$$\Delta t \leq \frac{L_s}{c} \quad (4.33)$$

onde L_s e c são, respectivamente, o comprimento característico e a velocidade de propagação da onda dilatacional no meio, respectivamente, que são dados por:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}} \quad (4.34)$$

$$L_s = \frac{2A_e}{\max(l_1, l_2, l_3)} \quad (4.35)$$

onde, l_i são os comprimentos dos lados do elemento. O algoritmo resultante do procedimento de integração no tempo encontra-se na Fig. 4.2.

Condições iniciais

$$u^0 = u(0), v^{1/2} = v(0), n = 0$$

Avalia Matriz de Massa

$$\mathbf{M} = A_{e=1}^{NE} M_e$$

Inverte Matriz de Massa

$$M_{ii}^{-1} = \frac{1}{M_{ii}}$$

Loop no tempo (n =1 até n° de passos)

Avalia Forças Externas $\mathbf{F}^{ext,n}$

Avalia Forças Internas $\mathbf{F}^{int,n}$, (4.1)

Computa Acelerações $\mathbf{a}^n = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}^{ext,n} - \mathbf{F}^{int,n})$

Atualiza Velocidades $\mathbf{v}^{n+1/2} = \mathbf{v}^{n-1/2} + \Delta t \mathbf{a}^n$

Atualiza Deslocamentos $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{v}^{n+1/2}$

Fim do Loop no Tempo

Figura 4.2: Algoritmo de integração no tempo

4.4 Integração das Equações Constitutivas

As equações constitutivas do elemento obedecem o critério de escoamento de von Mises que é bastante utilizada para representar o comportamento de metais. Utilizou-se um procedimento subincremental, fundamentado no algoritmo Euler pra frente '*Euler forward*', para atualizar o campo de tensões do elemento (Owen e Hinton, 1980; Alves, 1991). A relação constitutiva inclui em sua idealização a hipótese de grandes deformações e grandes rotações via a utilização de taxas objetivas de deformação e de tensão ambas descritas na configuração corrotacional.

4.4.1 Critério de Escoamento de von Mises

O critério de von Mises assume que o escoamento plástico pode ocorrer somente quando o segundo invariante do tensor desviatório de tensão \mathbf{J}'_2 atinge o valor crítico κ^2 . Logo, para o caso de estado plano de tensão, tem-se:

$$\mathbf{J}'_2 - \kappa^2 = 0 \quad (\text{regime plástico}) \quad (4.36)$$

e

$$\mathbf{J}'_2 < \kappa^2 \quad (\text{regime elástico}) \quad (4.37)$$

Em termos das tensões principais a equação (4.36) é:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 3\kappa^2 \quad (4.38)$$

Para determinar a constante κ adota-se o estado de tração simples, ou seja:

$$\sigma_1 = \sigma_Y \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (4.39)$$

onde σ_Y é a tensão de escoamento do material. Logo substituindo (4.39) em (4.38) tem-se:

$$\kappa = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \quad (4.40)$$

4.4.2 Atualização do Estado de Tensões

O estado de tensões do elemento é atualizado segundo

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta t \dot{\sigma}_{n+1/2} \quad (4.41)$$

A taxa de tensão $\dot{\sigma}_{n+1/2}$ quando descrita na configuração deformada (tensão de Cauchy) não tem sua objetividade garantida, (Belytschko et al., 2000), tornando necessária sua correção via, por exemplo, a taxa de Jaumann (2.50). Então a taxa de Cauchy é dada por:

$$\dot{\sigma}_{n+1/2} = \sigma_{n+1/2}^{\nabla J} + \mathbf{W}_{n+1/2} \cdot \sigma_n - \sigma_n \cdot \mathbf{W}_{n+1/2} \quad (4.42)$$

onde

$$\sigma_{n+1/2}^{\nabla J} = \mathbf{C}(\mathbf{D}_{n+1/2} - \mathbf{D}_{n+1/2}^p) \quad (4.43)$$

Na Equação (4.43) ambas as medidas de tensão e deformação são objetivas.

As Equações (4.41), (4.42) e (4.43) estão descritas na configuração deformada, entretanto essas relações podem ser descritas propositadamente na descrição corotacional, haja visto que a correção (4.42) é dispensável quando a taxa de Cauchy é descrita na configuração corotacional, conforme verifica-se adiante.

A tensão de Cauchy na configuração corotacional é dada por:

$$\hat{\sigma} = \mathbf{R}^T \sigma \mathbf{R} \quad (4.44)$$

e sua taxa

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}^T \sigma \mathbf{R}}{dt} = \dot{\mathbf{R}}^T \sigma \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \dot{\sigma} \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \sigma \dot{\mathbf{R}} \quad (4.45)$$

mas na configuração corotacional $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ e $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{W}$, logo:

$$\dot{\hat{\sigma}} = \mathbf{W}^T \sigma + \dot{\sigma} + \sigma \mathbf{W} \quad (4.46)$$

Substituindo (4.42) em (4.46) tem-se:

$$\dot{\hat{\sigma}} = \mathbf{W}^T \sigma + \sigma \mathbf{W} + (\sigma^{\nabla J} + \mathbf{W} \sigma - \sigma \mathbf{W}) \quad (4.47)$$

Sabendo-se que o tensor spin \mathbf{W} é antissimétrico ($\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}$) pode-se concluir que:

$$\dot{\hat{\sigma}} = \sigma^{\nabla J} \quad (4.48)$$

provando assim que a taxa do tensor de Cauchy descrita na configuração corotacional é objetiva. Esta taxa é também conhecida como a derivada de Lie da tensão de Cauchy, (Marsden e Hughes, 1994) . Logo a Equação (4.41) pode ser escrita como:

$$\hat{\sigma}_{n+1} = \hat{\sigma}_n + \Delta t \dot{\hat{\sigma}}_{n+1/2} \quad (4.49)$$

onde

$$\dot{\hat{\sigma}}_{n+1/2} = \mathbf{C}(\hat{D}_{n+1/2} - \hat{D}_{n+1/2}^p) \quad (4.50)$$

Capítulo 5

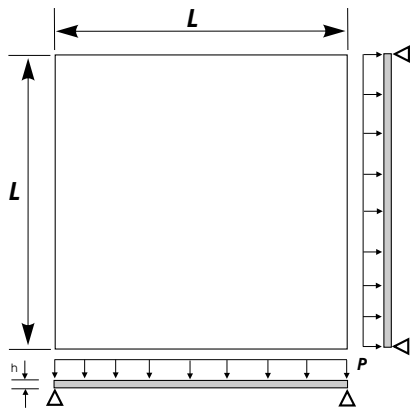
Aplicações Numéricas

Para avaliar a implementação do elemento são apresentados resultados que ilustram seu comportamento sob efeitos de grandes deslocamentos e grandes deformações. Inicialmente avaliou-se o desempenho do elemento em duas estruturas de placa quadrada e circular, respectivamente. O terceiro exemplo estudado trata-se de um painel cilíndrico, que verifica o comportamento do elemento para estruturas com apenas uma curvatura. O problema da calota abatida avalia o elemento para uma lei constitutiva elasto-plástica com endurecimento isotrópico. Além disso, este problema avalia o comportamento do elemento para estruturas com dupla curvatura. O quinto exemplo refere-se à uma aplicação de contato-impacto (*Pipe-Whip*). Por fim apresenta-se uma simulação em grande escala de um submarino sob condições iniciais que representam uma explosão em seu casco.

O elemento implementado é referenciado nos exemplos a seguir pela sigla *pt* e os elementos *BWC* e *BLT* foram implementados por [Silva \(2003\)](#).

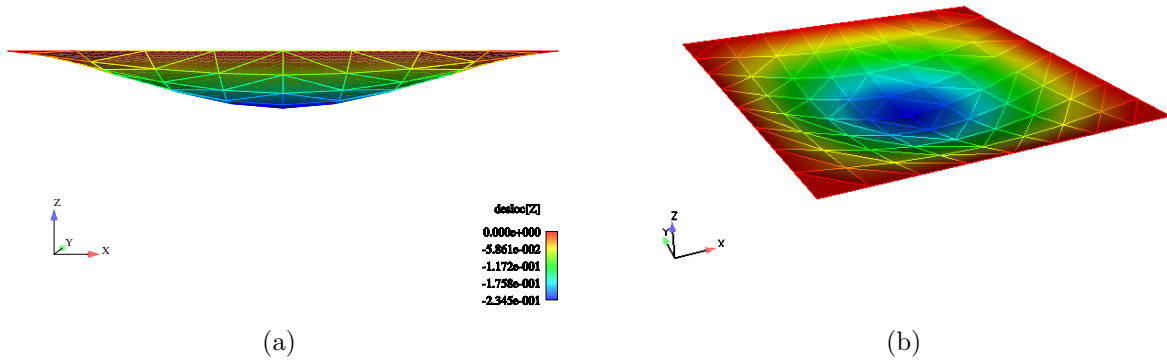
5.1 Placa Quadrada

Esta aplicação trata-se de uma placa sob um carregamento uniforme aplicado perpendicularmente ao seu plano, conforme ilustra a Figura 5.1. Somente 1/4 do modelo foi discretizado com um total de 25 nós e 32 elementos. Para avaliar o seu comportamento não-linear físico utilizou-se 5 lâminas de integração ao longo da espessura.



Dados do Problema	
Comprimento	$L = 10$
Espessura	$h = 0.50$
Módulo de elasticidade	$E_p = 1 \times 10 + 7$
Massa específica	$\rho = 2.588 \times 10 - 4$
Poisson	$\nu = 0.3$
Tensão de escoamento	$\sigma_Y = 30000.0$
Carga de pressão	$P = 300.0$
Passo de tempo	$\Delta t = 1 \times 10 - 6$

Figura 5.1: Dados físicos e geométricos da placa.



(a)

(b)

Figura 5.2: Campo de deslocamento $t = 1.14 \times 10 - 2$ (fator de escala da deformada 5)

O gráfico 5.3 ilustra a boa performance do elemento implementado *pt* quando comparado com o elemento quadrilátero implementado por Silva (2003).

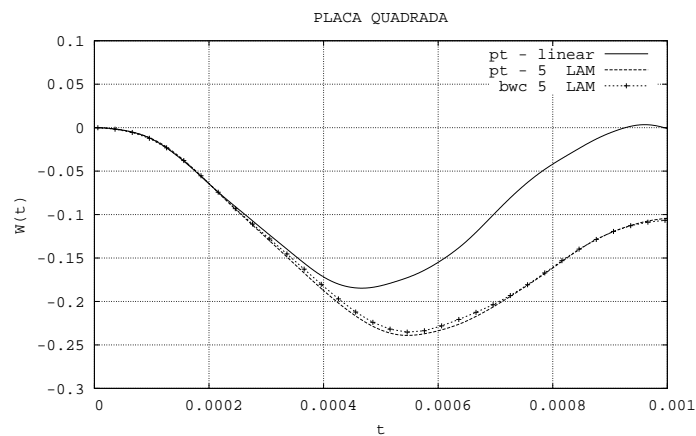


Figura 5.3: História de deslocamento do nó central da placa.

5.2 Placa Circular

Neste exemplo analisa-se uma placa circular sob um comportamento elástico-linear. O carregamento é composto de uma carga pontual aplicado no centro da placa, conforme ilustra a Figura 5.5. Somente 1/4 do modelo foi discretizado com um total de 61 nós e 96 elementos.

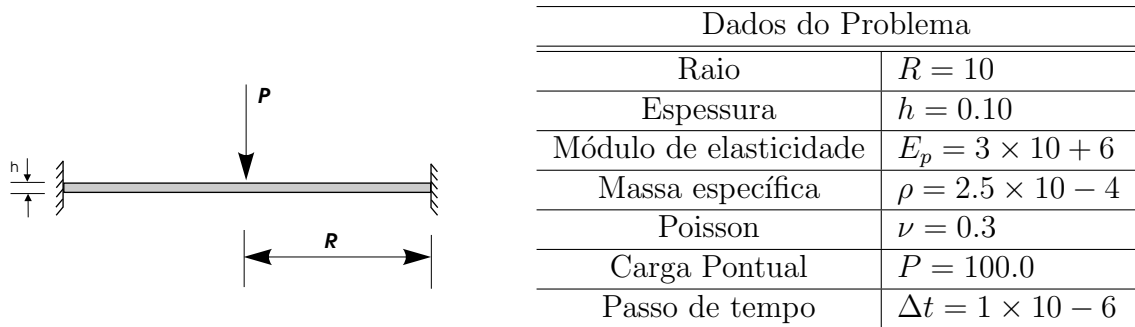


Figura 5.4: Dados físicos e geométricos da placa circular.

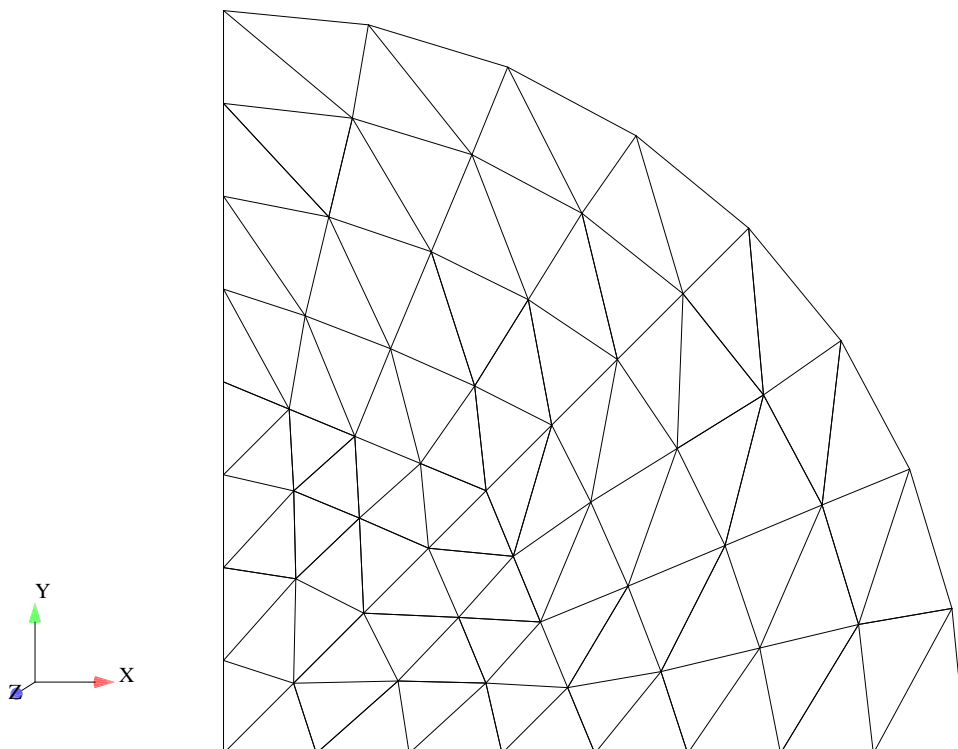
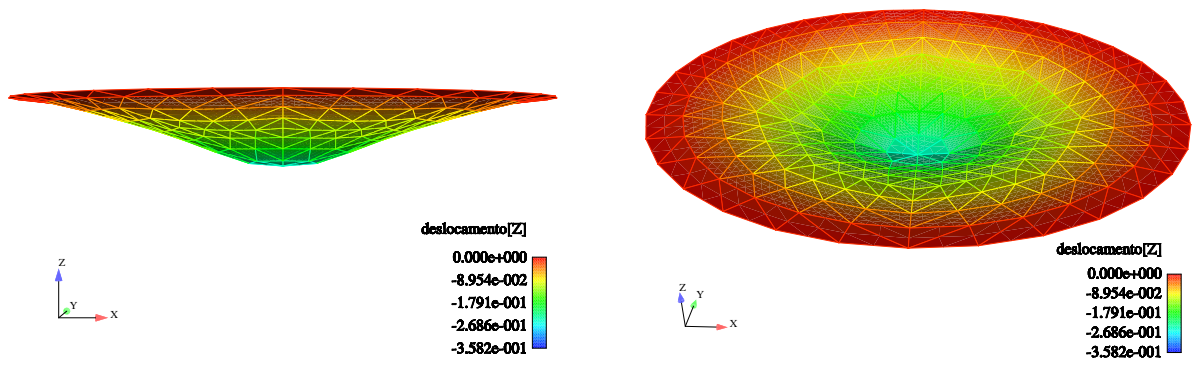


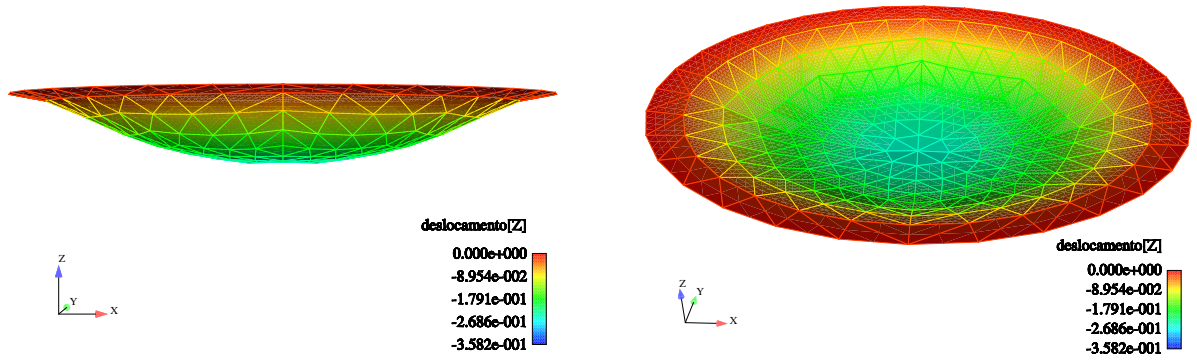
Figura 5.5: Discretização de 1/4 da placa circular.

Os resultados contidos na Fig. 5.6 ilustram boa concordância quando comparados



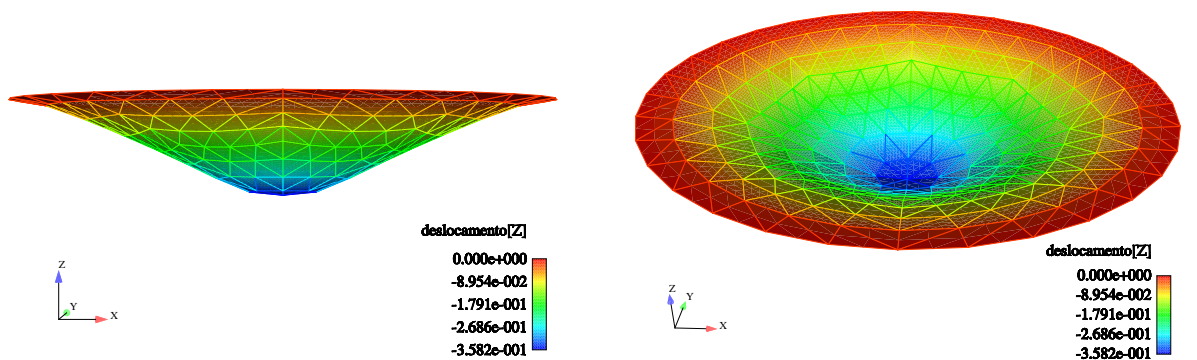
(a) 2×10^{-3}

(b) 2×10^{-3}



(c) 3×10^{-3}

(d) 3×10^{-3}



(e) 4×10^{-3}

(f) 4×10^{-3}

Figura 5.6: Campo de deslocamento (fator de escala da deformada 10)

qualitativamente com as referências [Silva \(2003\)](#). A avaliação quantitativa deste problema pode ser verificada na Fig. [5.7](#).

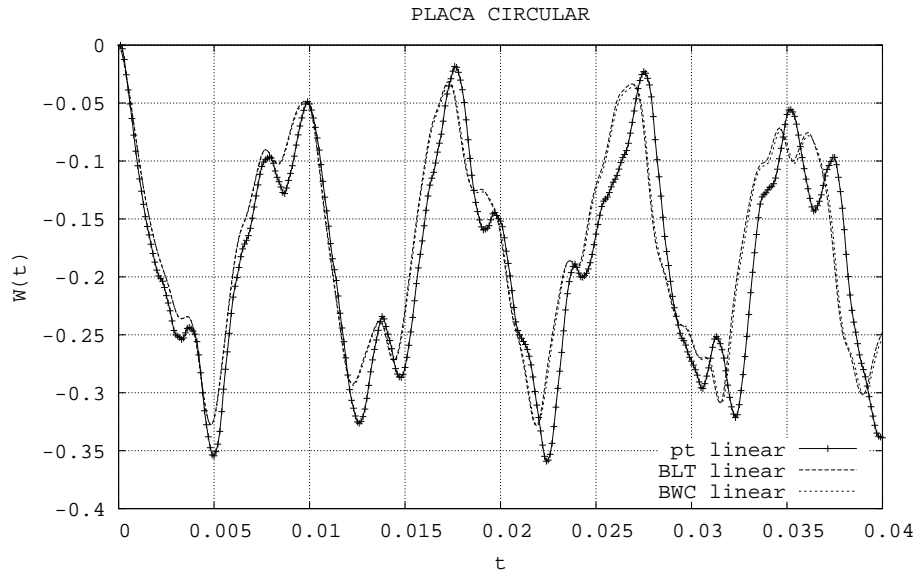


Figura 5.7: História de deslocamento do nó central da placa.

5.3 Painel Cilíndrico

Este exemplo trata-se de uma estrutura laminar sob condições iniciais que simulam uma explosão na região RE do painel. A condição inicial é apresentada através de um campo de velocidades radiais ($V_r = 5650$) aplicada na região RE , (Belytschko et al., 1984a). As condições de contorno do problema prescrevem deslocamentos que caracterizam as extremidades (bordo circular) simplesmente apoiadas e as laterais (bordo reto) engastadas. A estrutura tem seu comportamento físico regido pelas seguintes propriedades: módulo de elasticidade $E = 10.5 \times 10^6$, coeficiente de poisson $\nu = 0.33$, tensão de escoamento $\sigma_y = 4.4 \times 10^4$, massa específica $\rho = 2.5 \times 10^{-4}$. A discretização do painel possui 1024 elementos dispostos como $(16 \times 32 \times 2)$ totalizando 2975 graus de liberdade. Foi adotado um passo de tempo $dt = 4.50 \times 10^{-7}$ que é um pouco menor que o passo crítico ($dtc = 4.53 \times 10^{-7}$), calculado pela Eq. 4.33. Ressalta-se que somente metade da estrutura foi discretizada. Utilizou-se fator de escala 1.0 para visualizar as configurações deformadas.

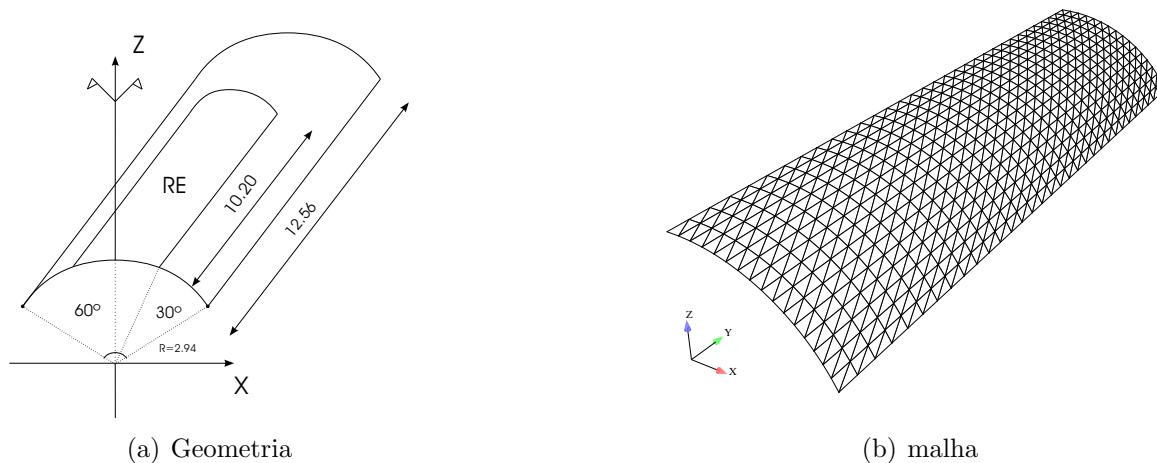


Figura 5.8: Dados geométricos e malha 1/2 de domínio discretizado.

Para verificar quantitativamente os resultados da análise, a história do deslocamento vertical do nó ($y = 9.42$) e ($y = 6.28$) são apresentados. As curvas pt e bq são do presente trabalho e [Silva \(2003\)](#), respectivamente. O resultado bq apresentado corresponde ao elemento denominado de $BWCTOT$ com parâmetro de $hourglass = 0.01$. A malha referente ao trabalho [Silva \(2003\)](#) tem a mesma topologia e grau de refinamento contidos na Fig. 5.8, conseqüentemente o mesmo número de nós e equações embora com a metade de elementos.

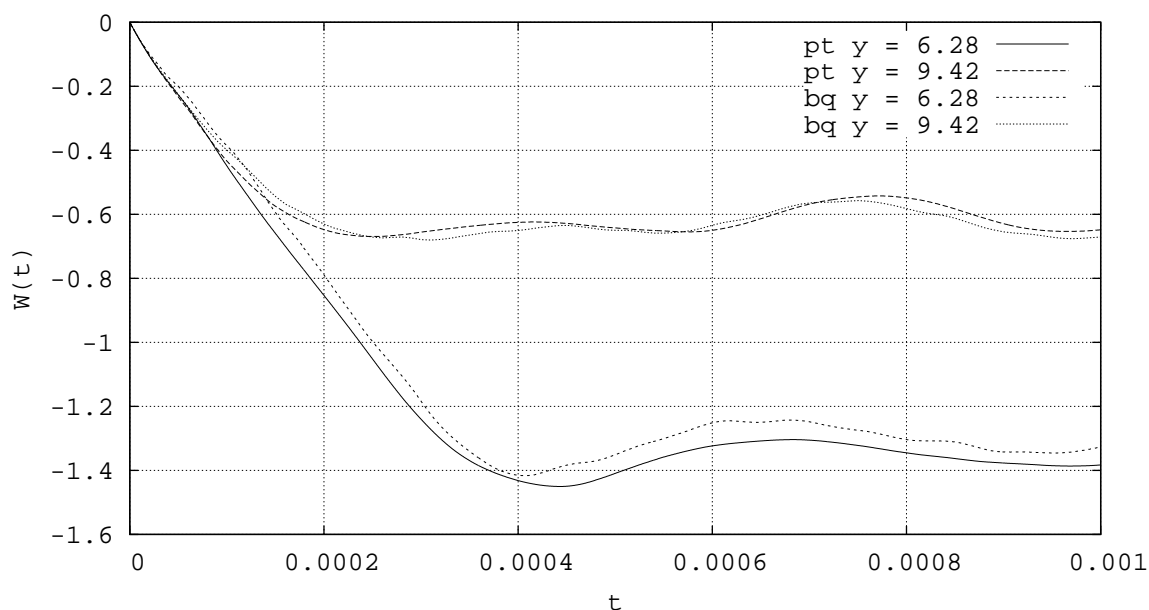


Figura 5.9: Histórias de deslocamentos do painel.

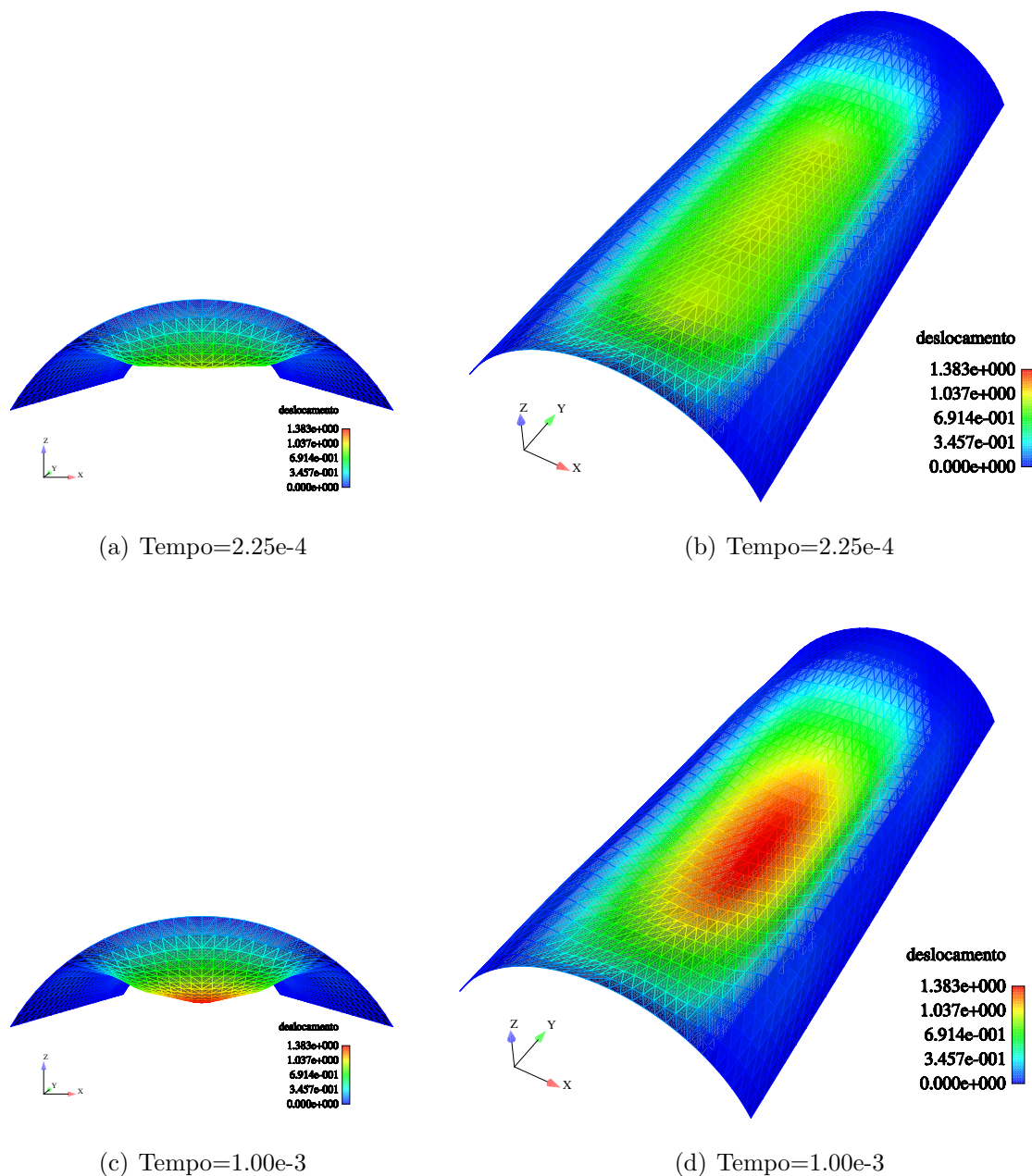
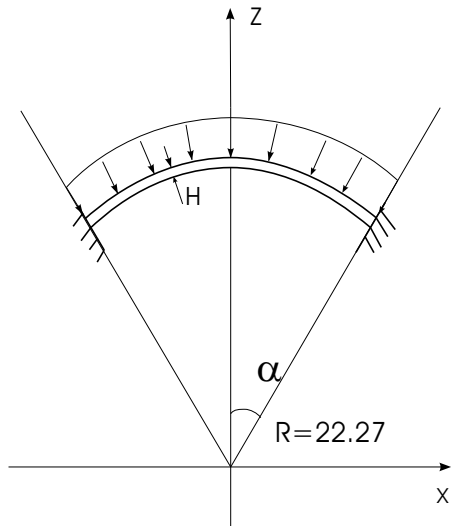


Figura 5.10: Campo de deslocamento (fator de escala da deformada 1.0).

Os resultados quantitativos contidos na Fig. 5.9 ilustram o bom desempenho do elemento quando comparado ao elemento quadrilátero implementado em Silva (2003). O campo de deformações ilustrado na Fig. 5.10 evidencia a aplicabilidade do elemento em problemas com grandes deformações.

5.4 Calota Abatida

O modelo de uma calota abatida, aqui proposto, permite verificar o comportamento do elemento para estruturas com dupla curvatura. As condições de contorno prescrevem o bordo engastado. O carregamento da estrutura é composto por uma carga radial distribuída sobre a calota, a geometria e dados físicos são apresentados na Fig. 5.11.



Dados do Problema	
Espessura	$t = 0.41$
Ângulo	$\alpha = 26.27^\circ$
Módulo de elasticidade	$E = 10.5 \times 10 + 6$
Massa específica	$\rho = 2.45 \times 10 - 4$
Poisson	$\nu = 0.3$
Tensão de escoamento	$\sigma_y = 24000.0$
Módulo Plástico	$E_p = 0.21 \times 10 + 6$
Carga de pressão	$P = 6000.0$
Passo de tempo	$\Delta t = 6 \times 10 - 8$

Figura 5.11: Dados físicos e geométricos da calota.

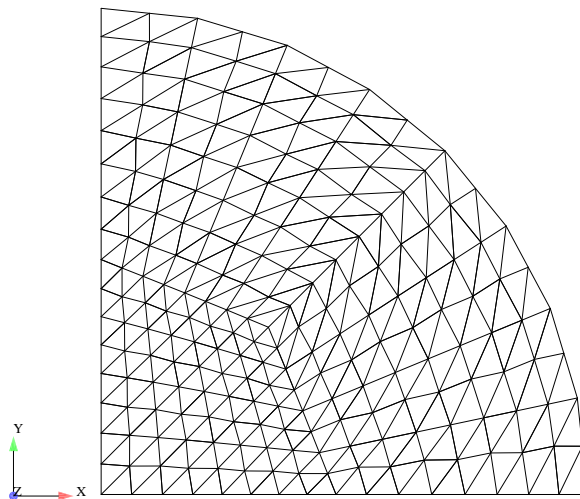


Figura 5.12: Malha estruturada por blocos(384 elementos triangulares).

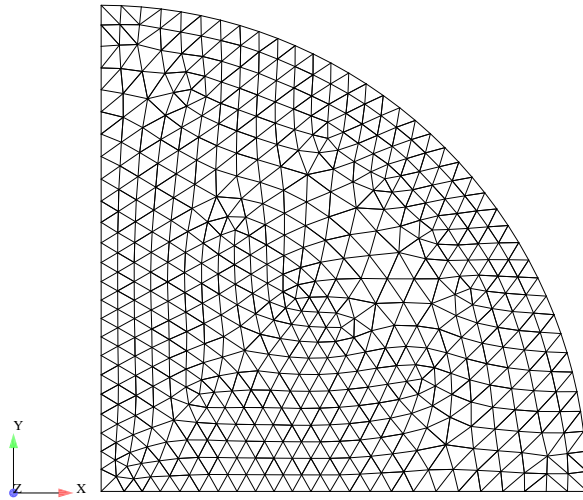


Figura 5.13: Malha não-estruturada (996 elementos triangulares).

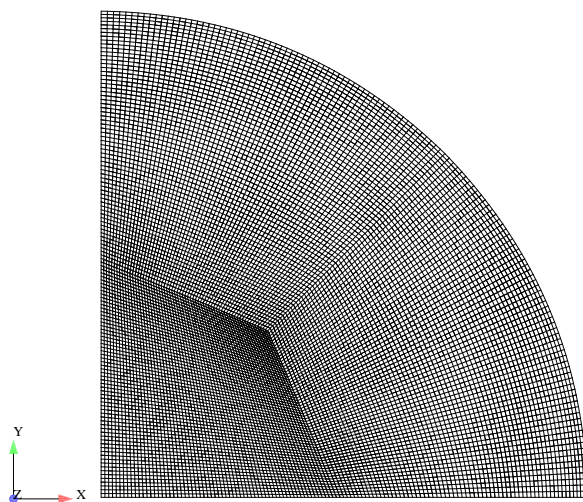


Figura 5.14: Malha estruturada por blocos (12288 elementos quadriláteros (Silva, 2003)).

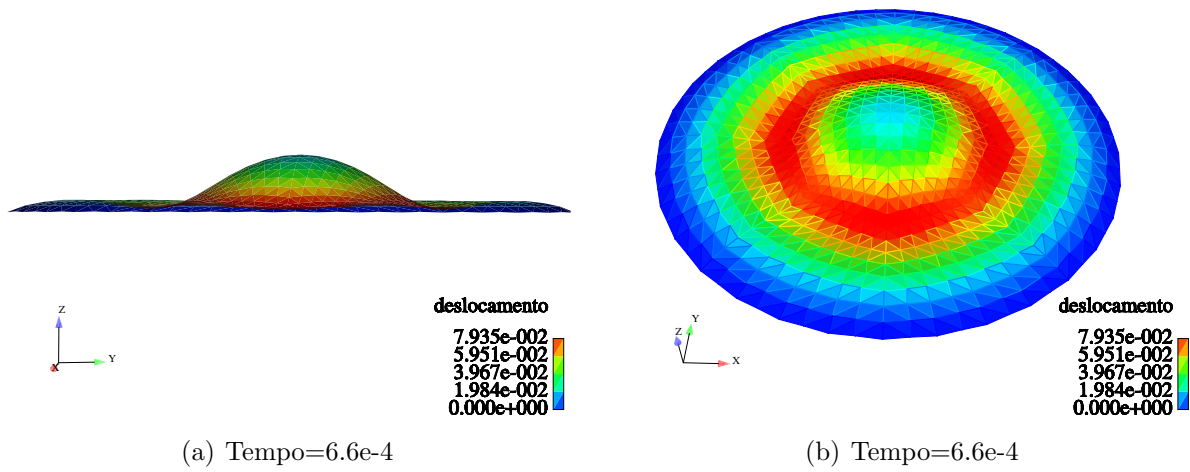


Figura 5.15: Campo de deslocamentos malha elemento triangular estruturada por blocos.

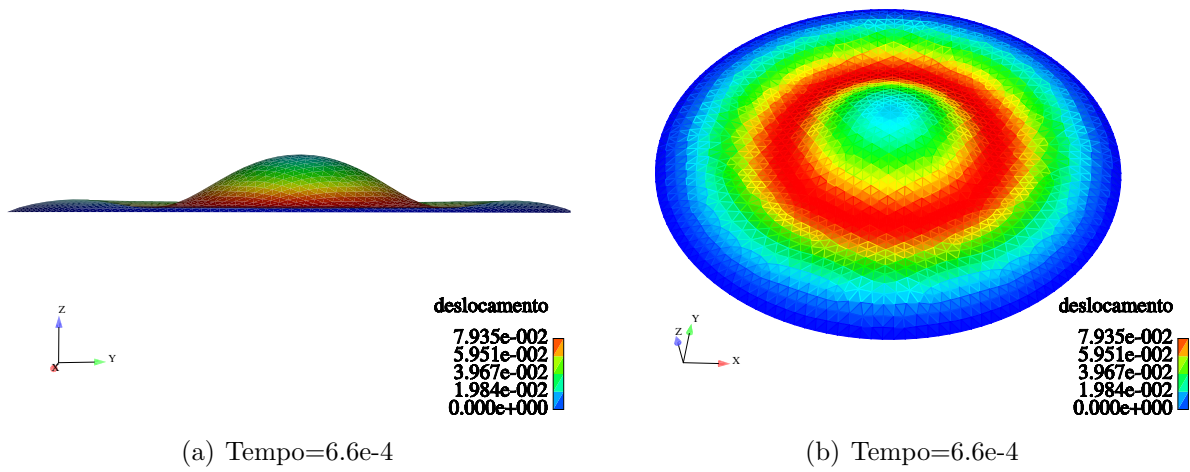


Figura 5.16: Campo de deslocamentos malha triangular não estruturada.

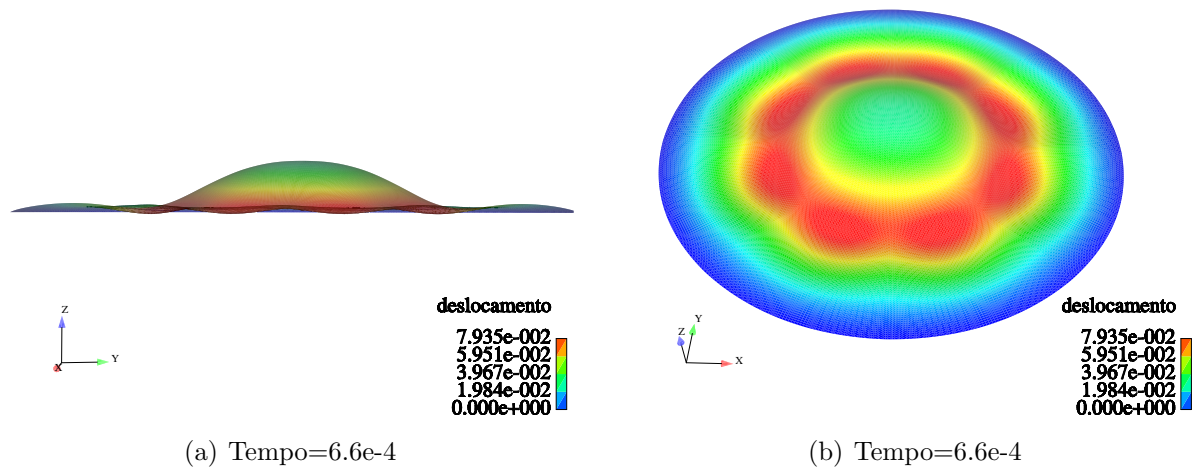


Figura 5.17: Campo de deslocamentos malha de elementos quadriláteros estruturados por blocos.

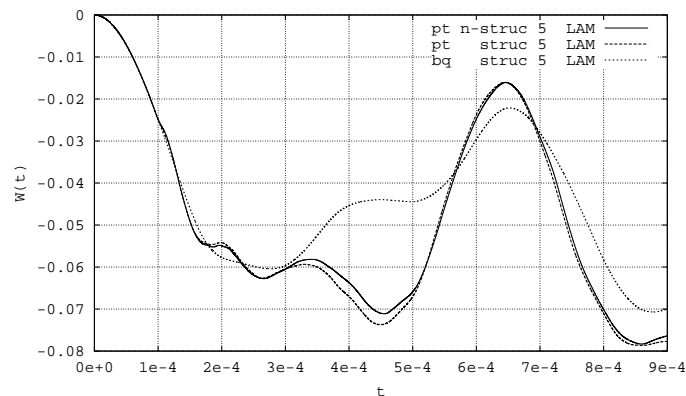
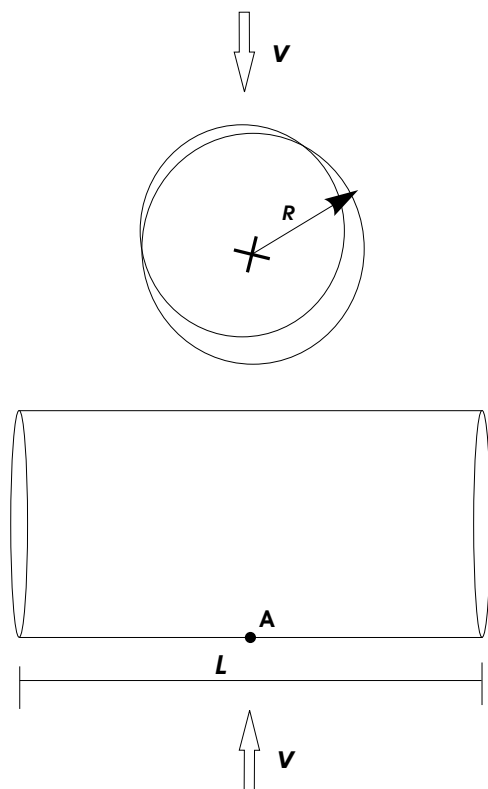


Figura 5.18: Histórias de deslocamentos para o centro da calota.

Comparando-se globalmente os resultados contidos nas figuras 5.15, 5.16 e 5.17 percebe-se que somente a malha não-estruturada representa corretamente o comportamento axisimétrico esperado. O gráfico 5.18 quando comparado com (Belytschko et al., 1984a; Alves, 1991) evidencia que o resultado do elemento triangular melhor se aproxima dessas referências.

5.5 Contato-Impacto (Pipe-Whip)

Neste exemplo é avaliado o desempenho do elemento em problemas de contato-impacto que neste caso consiste na colisão entre dois tubos, este problema é conhecido na literatura por *Pipe-Whip*, (Belytschko e Yeh, 1993; Quaranta, 2002; Silva et al., 2004b). A malha triangular tem 384 elementos e 229 nós e a malha híbrida é formada por 288 elementos (96 quadriláteros e 112 triangulares) e 229 nós. Os dados geométricos e físicos são ilustrados na Fig. 5.19.



Dados do Problema	
Comprimento	$L = 0.46$
Espessura	$t = 0.006$
Raio	$R = 0.1$
Módulo de elasticidade	$E = 2.5 \times 10 + 10$
Massa específica	$\rho = 7640$
Poisson	$\nu = 0.3$
Tensão de escoamento	$\sigma_Y = 1.0 \times 10 + 8$
Módulo Plástico	$E_p = 2.3 \times 10 + 8$
Velocidade Inicial	$V = 35.0$
Passo de tempo	$\Delta t = 7 \times 10 - 6$

Figura 5.19: Dados físicos e geométricos do problema (Pipe-Whip).

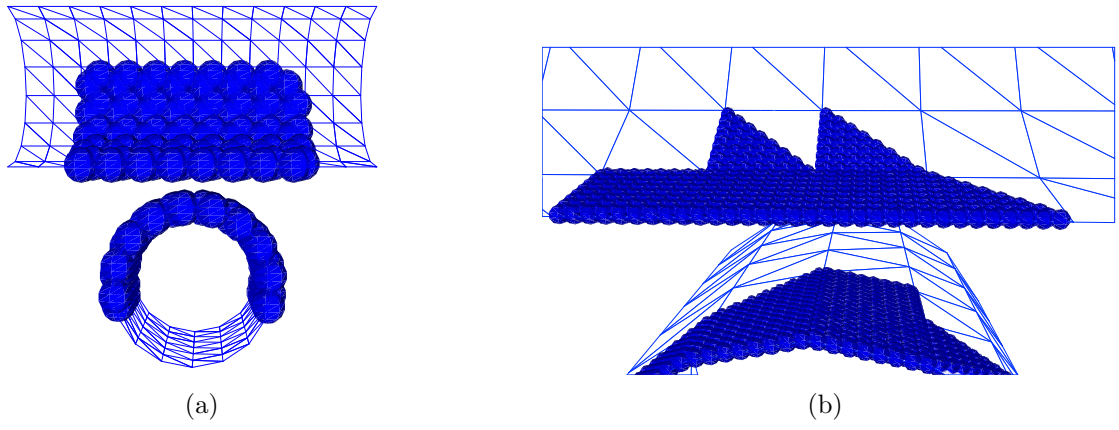


Figura 5.20: Detalhe das *Pinball* e *splitting pinball* - Malha Triangular.

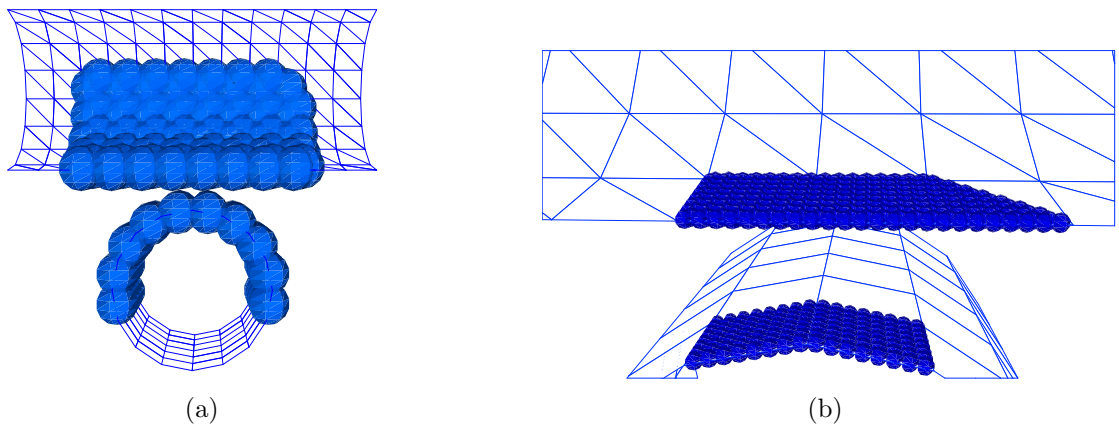


Figura 5.21: Detalhe das *Pinball* e *splitting pinball* - Malha Híbrida.

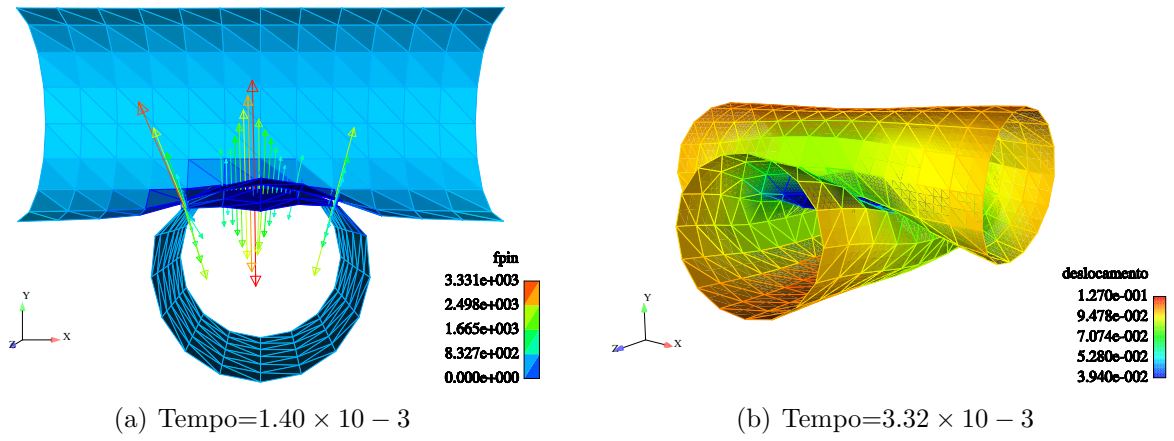


Figura 5.22: Campo de deslocamento - Malha Triangular.

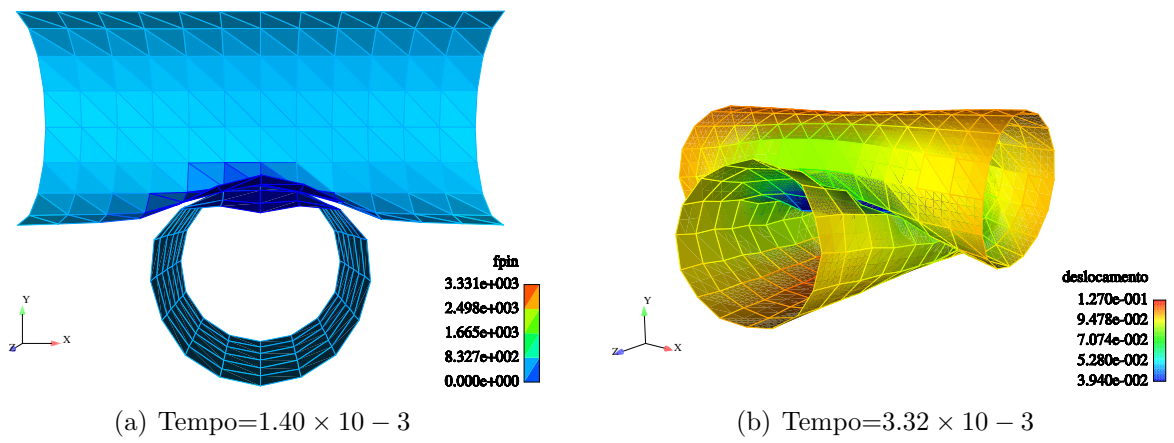


Figura 5.23: Campo de deslocamento - Malha Híbrida.

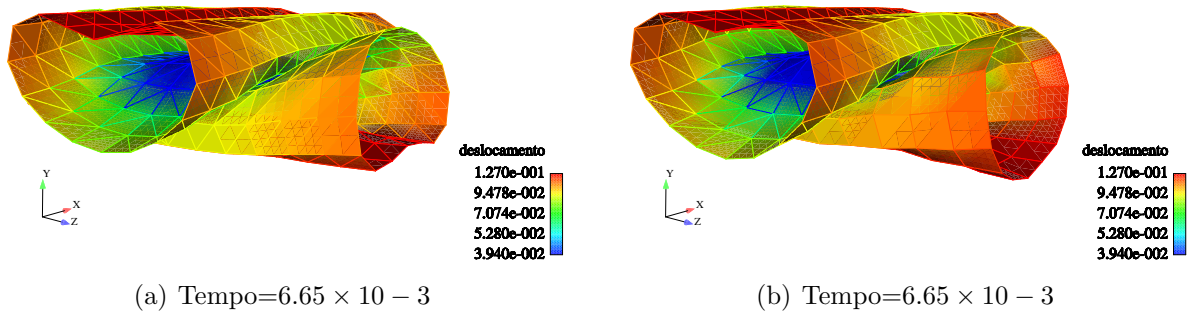


Figura 5.24: Campo de deslocamento - Malha Triangular e Híbrida..

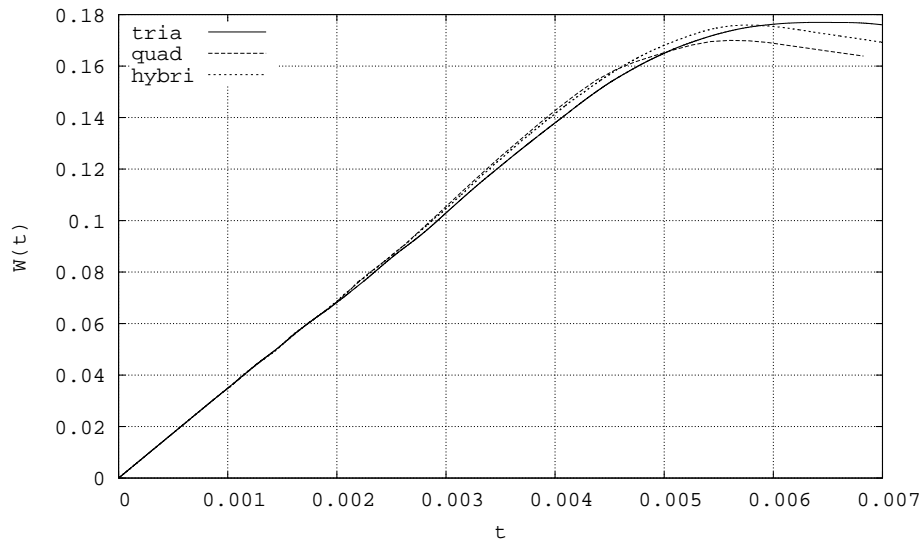


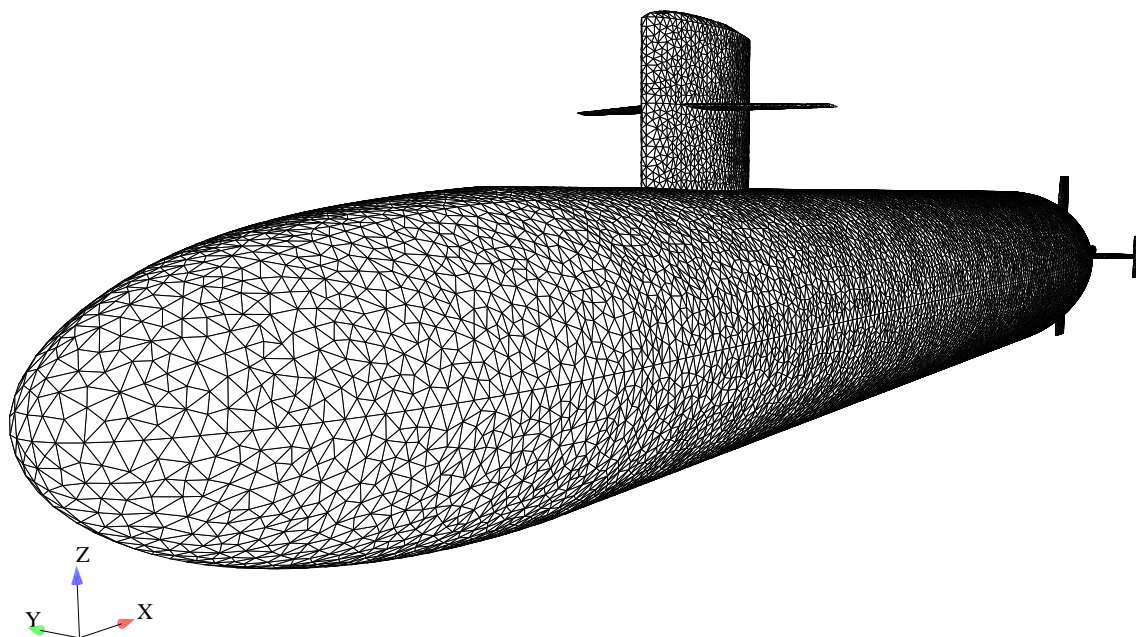
Figura 5.25: Histórias de deslocamentos para o ponto a A.

O gráfico 5.25 ilustra uma boa conformação dos resultados para as diferentes malhas adotadas, assinalando um bom desempenho em casos que contenham malhas híbridas em sua discretização. As configurações deformadas 5.22, 5.23 e 5.24 apresentam o desempenho sob grandes rotações e grandes deslocamentos.

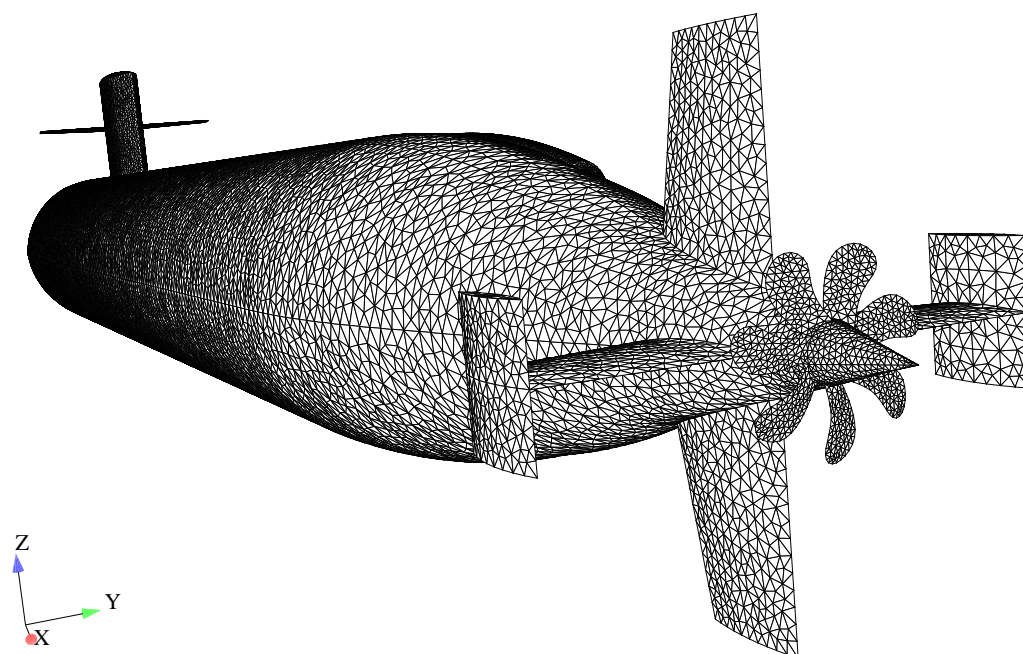
5.6 Explosão no Casco de um Submarino

Este exemplo ilustra a simulação de um submarino (Classe Los Angeles) sob um carregamento inicial composto por um campo de velocidade radial de 509km/h aplicado lateralmente ao casco, este efeito aproxima-se de uma explosão. Este exemplo foi avaliado com 5 lâminas de integração ao longo da espessura.

Dados do Problema	
Comprimento	$L = 105.00$
Espessura	$t = 0.0508$
Diâmetro Máximo	$D = 10.0$
Módulo de elasticidade	$E = 210 \times 10 + 9$
Massa específica	$\rho = 8500$
Poisson	$\nu = 0.3$
Tensão de escoamento	$\sigma_Y = 440.0 \times 10 + 6$
Velocidade Inicial	$V_r = 141.40$
Passo de tempo	$\Delta t = 2 \times 10 - 6$
Número de Nós	33685
Número de elementos	67366
Número de Lâminas (EPT)	336830

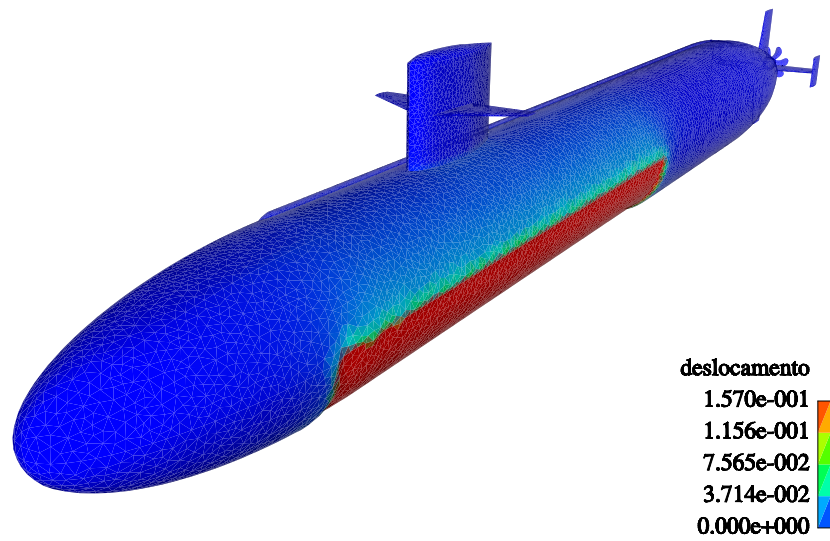


(a)

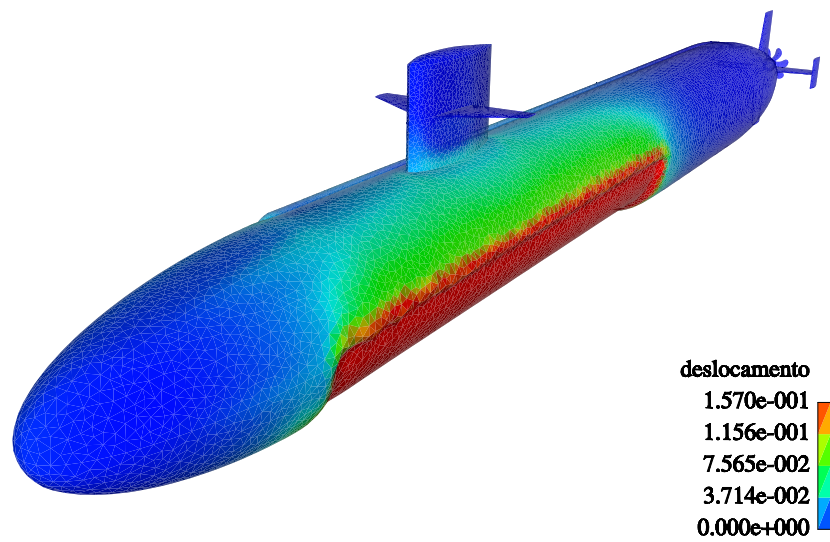


(b)

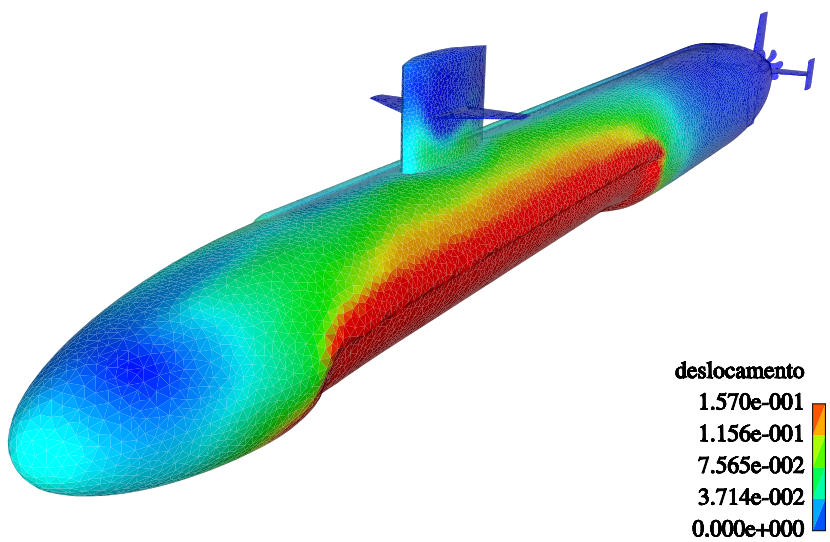
Figura 5.26: Detalhes da malha do submarino (33685 nós e 67366 elementos).



(a) Tempo= $4.02e-4$

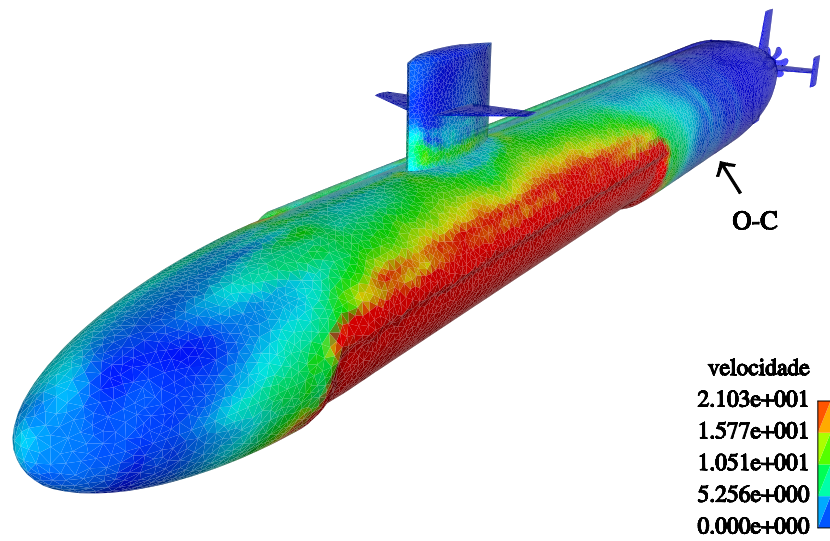


(b) Tempo= $1.00e-3$

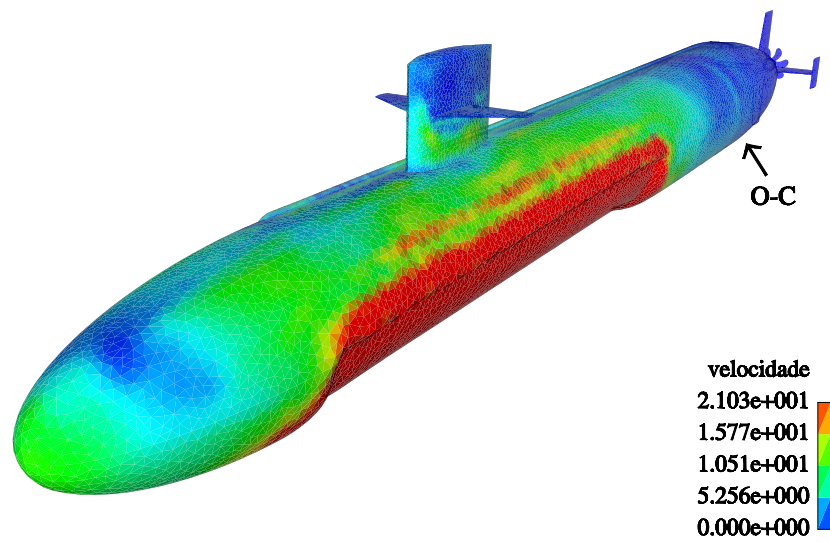


(c) Tempo= $1.80e-3$

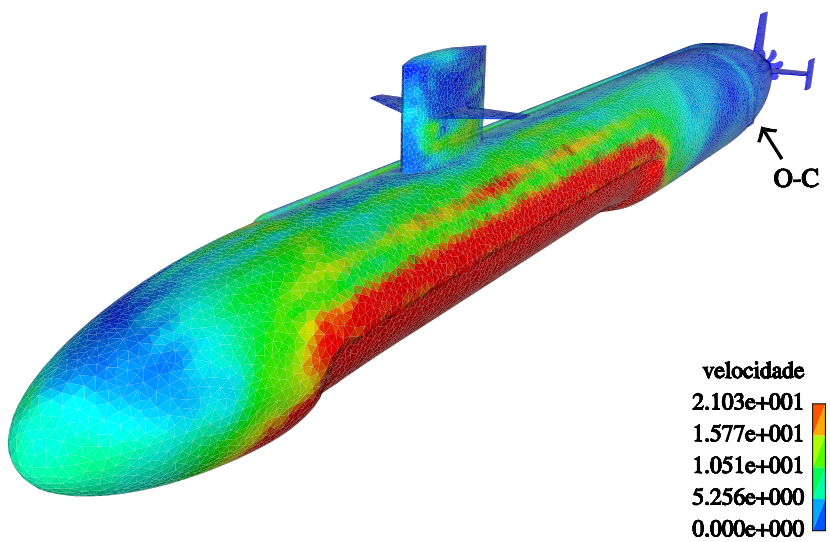
Figura 5.27: Campo de deslocamentos.



(a) Tempo=8.02e-4



(b) Tempo=1.40e-3



(c) Tempo=1.80e-3

Figura 5.28: Campo de velocidades e detalhes das ondas de choque (O-C).

Este exemplo é caracterizado por altas taxas de deformações referentes à condição inicial imposta evidenciando a robustez do elemento em problemas de transientes de curta duração. Uma importante propriedade do elemento, verificada neste, problema foi a capacidade de simular o efeito de propagação de ondas de choque ao longo do casco do submarino.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho foram apresentados os aspectos relevantes da implementação computacional de um elemento de casca para problemas não-lineares em regime transiente.

Com relação ao problema do painel cilíndrico, primeiro exemplo estudado, pode-se perceber que os resultados foram bastante satisfatórios quando comparados com o elemento quadrilátero desenvolvido em [Belytschko et al. \(1984a\)](#); [Silva \(2003\)](#). Este exemplo avaliou o desempenho do elemento para grandes deslocamentos e deformações, assegurando, assim, confiabilidade no uso deste elemento para estes tipos de problemas.

Para o exemplo da calota, o elemento também ofereceu resultados satisfatórios, porém neste exemplo, em particular, deve-se salientar que o emprego da malha estruturada por blocos, que não preserva simetria axissimétrica, leva a resultados pouco satisfatórios, tanto do ponto de vista qualitativo quanto quantitativo. Esse exemplo é melhor representado por malhas uniformes e não estruturadas e que preservem a simetria, neste caso malhas com elementos triangulares se adaptam melhor do que malhas com elementos quadriláteros.

Uma característica importante desta implementação foi contemplar o comportamento dos modos de instabilidade presentes, por exemplo do painel cilíndrico. Os resultados do problema de contato-impacto evidenciam o bom desempenho do elemento quando comparado com [Belytschko e Yeh \(1993\)](#).

A simulação do comportamento estrutural do submarino assinala a aplicabilidade do elemento em aplicações em grande escala.

Sugestões para trabalhos futuros:

- Incorporação na formulação do elemento de leis constitutivas que contemplem problemas de hiperelasticidade;
- Interação do elemento com formulações discretas, método dos elementos discretos, por exemplo;
- Inclusão de formulações ALE para contemplar problemas de interação fluido-estrutura, por exemplo o problema do *AIRBAG*;
- Análise de desempenho computacional dos algoritmos implementados.

Bibliografia

- Alves, J. L. D., 1991. *Análise Transiente de Grandes Deformações em Computadores de Arquitetura Vetorial/Paralela*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Argyris, J., Papadrakakis, M., Mouroutis, Z. S., 2003. Nonlinear Dynamic Analysis of Shells with the Triangular Element TRIC. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, pp. 3005–3038.
- Atluri, S. N., 1984. On Constitutive Relations at Finite Strain: Hypoelasticity and Elastoplasticity with Isotropic or Kinematic Hardening. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 43, pp. 137–171.
- Babuska, I. Oden, J. T., 2004. Verification and Validation in Computational Engineering and Science: Basic Concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, pp. 4057–4066.
- Bathe, K. J. Ho, L. W., 1981. A Simple and Effective Element for Analysis of General Shell Structures. *Computers and Structures*, vol. 13, pp. 673–681.
- Belytschko, T. Hsieh, B. J., 1973. Nonlinear Transient Finite Element Analysis with Convected Coordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, pp. 255–271.
- Belytschko, T. Leviathan, I., 1994a. Physical Stabilization of the 4-Node Shell Element with One Point Quadrature. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 113, pp. 321–350.
- Belytschko, T. Leviathan, I., 1994b. Projection Schemes for One-Point Quadrature Shell

- Elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 115, pp. 227–286.
- Belytschko, T., Lin, J. I., Tsay, C. S., 1984a. Explicit Algorithms for the Dynamics of Shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 42, pp. 225–251.
- Belytschko, T., Liu, W. K., Moran, B., 2000. *Nonlinear Finite Element for Continua and Structures*. John Wiley.
- Belytschko, T., Stolarski, H., Carpenter, N., 1984b. A C^0 Triangular Plate Element with One-Point Quadrature. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, pp. 787–802.
- Belytschko, T., Tsay, C. S., Liu, W. K., 1981. A stabilization Matrix for the Bilinear Mindlin Plate Element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 29, pp. 313–327.
- Belytschko, T., Wong, B. L., Chiang, H. Y., 1992. Advances in One-Point Quadrature Shell Elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 96, pp. 93–107.
- Belytschko, T., Yeh, I. S., 1993. The Splitting Pinball Method for Contact-Impact Problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 105, pp. 375–393.
- Boisse, P., Daniels, J. L., Gelin, J. C., 1992. A Simple Isoparametric Tree-Node Shell Finite Element. *Computers and Structures*, vol. 44, pp. 1263–1273.
- Boisse, P., Gellin, J. L. D. J. C., 1994. A C^0 Three-Node Shell Elements for Non-Linear Structural Analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, pp. 2339–2364.
- Bucalem, M. L., Nóbrega, S. H. S., 2000. A Mixed Formulation for General Triangular Isoparametric Shell Elements Based on the Degenerated Solid Approach. *Computers and Structures*, vol. 78, pp. 35–44.
- Carpenter, N., Belytschko, T., Stolarski, H., 1986a. Locking and Shear Scaling Factors in C^0 Bending Elements. *Computers and Structures*, vol. 22, pp. 39–52.

- Carpenter, N., Stolarski, H., Belytschko, T., 1986b. Improvements in 3-Node Triangular Shell Elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, pp. 1643–1667.
- Clough, R. W. Johnson, C. P., 1968. A finite Element Approximation For the Analysis of Thin Shells. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 4, pp. 43–60.
- Crisfield, M. A., 1997. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. John Wiley.
- Holzapfel, G. A., 2000. *Nonlinear Solid Mechanics*. John Wiley.
- Hsiao, K. M., 1987. Nonlinear Analysis of General Shell Structures by Flat Triangular Shell Element. *Computers and Structures*, vol. 25, pp. 665–675.
- Hughes, T. J. R., 2000. *The Finite Element Method, Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover. New York.
- Hughes, T. J. R., Cohen, M., Haroun, M., 1978. Reduced and Selective Integrations Techniques in the Finite Element Analysis of Plates. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 46, pp. 203–222.
- Hughes, T. J. R. Liu, W. K., 1981. Nonlinear Finite Element Analysis of Shells: Parte I. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 26, pp. 331–362.
- Kennedy, J. M., Belytschko, T., Lin, J. I., 1986. Recent Developments in Finite Element Techniques and Their Applications to Reactor Structures. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 97, pp. 1–24.
- Kojic, M. Bathe, K. J., 1987. Studies of Finite Element Procedures - Stress Solutions of a Closed Elastic Strain Path with Stretching and Shearing Using the Updated Lagrangian Jaumann Formulations. *Computers and Structures*, vol. 26, pp. 175–179.
- Loula, A. F. D., Miranda, I., Hughes, T. J. R., Franca, L. P., 1989. On Mixed Finite Element Methods for Axisymmetric Shell Analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 72, pp. 201–231.

- Malvern, L. E., 1969. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall.
- Marsden, J. E. Hughes, T. J. R., 1994. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover. New York.
- Oden, J. T., 1972. *Finite Elements of Nonlinear Continua*. McGraw-Hill. New York.
- Oden, J. T., 2002. The Promise of Computational Engineering and Science: Will it be Kept? *IACM EXPRESSIONS*, vol. 12, pp. 12–15.
- Owen, D. R. J. Hinton, E., 1980. *Finite Element in Plasticity, Theory and Practice*. Pineridge Press. Swansea.
- Quaranta, F., 2002. *Modelagem de Problemas de Contato-Impacto Empregando Formulações Penalizadas do Método dos Elementos Finitos*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Silva, C. E., Alves, J. L. D., Toledo, E. M., 2004a. Computational Implementation of the triangular C0 Shell Element. In *XXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. Recife, PE, Brasil.
- Silva, C. E., Silva, E. F., Quaranta, F., Alves, J. L. D., 2004b. Using C0 Triangular and Quadrilateral Shell Elements for Modelling Contact-Impact Problems. In *XXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. Recife, PE, Brasil.
- Silva, E. F., 1997. *Implementação Computacional do Elemento de Casca na Formulação Co-rotacional em Regime Transiente*. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Silva, E. F., 2003. *Implementação Computacional do Elemento Quadrilátero de Casca Bilinear com Formulação Co-rotacional para Análise Transiente de Estruturas Laminares*. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- Simo, J. C. Hughes, T. J. R., 1998. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag. New York.

- Stolarski, H. Belytschko, T., 1982. Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 49, pp. 172–177.
- Stolarski, H., Belytschko, T., Lee, S. H., 1995. A review of Shell Finite Elements and Corotational Theories. *Computational Mechanics Advances, An oficial publication of the International Association for Computational Mechanics (IACM)*, vol. 2, pp. 125–212.
- Sydenstricker, R. M. Landau, L., 2000. A Study of Some Triangular Discrete Reissner-Mindlin Plate and Shell Elements. *Computers and Structures*, vol. 78, pp. 21–33.
- Zhu, Y. Zacharia, T., 1996. A New One-Point Quadrature, Quadrilateral Shell Element with Drilling Degrees of Freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 136, pp. 165–203.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)