

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
PRODUÇÃO

MODELOS DINÂMICOS E CONTROLE ÓTIMO EM  
EDUCAÇÃO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UFPE  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
POR

PEDRO LEON BARBOSA GOMES

Orientador: Fernando Menezes Campello de Souza, PhD.

RECIFE, FEVEREIRO/2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Gomes, Pedro Leon Barbosa

Modelos dinâmicos e controle ótimo em  
educação / Pedro Leon Barbosa Gomes. – Recife : O  
Autor, 2006.

x, 121 folhas : il., fig., tab.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal  
de Pernambuco. CTG. Engenharia de Produção, 2006.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Engenharia de produção – Modelos dinâmicos  
– Educação. 2. Sistema educacional – Modelo  
comportamental para o aluno. 3. Educação – Efeitos  
no crescimento econômico – Controle ótimo. I. Título.

658.5 : 37  
658.5

CDU (2.ed.)  
CDD (22.ed.)

UFPE  
BC2006-334



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA  
DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO DE

**PEDRO LEON BARBOSA GOMES**

***“Modelos Dinâmicos e Controle Ótimo em Educação”***

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PESQUISA OPERACIONAL

A comissão examinadora, composta pelos professores abaixo, sob a presidência do primeiro, considera o candidato PEDRO LEON BARBOSA GOMES **APROVADO**.

Recife, 23 de fevereiro de 2006.

Prof. FERNANDO MENEZES CAMPELLO DE SOUZA, PhD (UFPE)

Prof. LUCIANO NADLER LINS, Doutor (UFPE)

Prof. ALEXANDRE STAMFORD DA SILVA, Doutor (UFPE)

*“Dedico esta dissertação a minha família e aos meus amigos.”*

# RESUMO

Estuda-se a dinâmica do sistema educacional. Após algumas considerações sobre o capital humano, apresenta-se primeiramente um modelo dinâmico comportamental de um aluno dentro do sistema ensino-aprendizagem, que representa padrões de comportamento possíveis e permite uma análise da dinâmica própria do aluno. Foca-se numa proposta de um modelo e a tradução de suas variáveis e parâmetros no contexto educacional, dando interpretações consistentes com o processo motivacional em educação. Analisa-se a influência do sistema educacional na economia, formulando-se o problema como um de controle ótimo, sugerindo-se políticas educacionais ótimas. As principais ferramentas usadas são equações diferenciais e técnicas de otimização. Os resultados encontrados representam políticas pedagógicas educacionais e políticas de investimento no setor educacional.

# ABSTRACT

One studies the educational system dynamics. After some considerations about the concept of human capital, a behavioral dynamical model of student in a teaching-learning system is introduced, which represents the possible behavioral patterns, and allows an analysis of the student internal dynamics. The focus is on a proposed model and the translation of its variables and parameters into the educational context, giving interpretations consistent with the motivational process in education. The influence of the educational system in the economy is analysed via an optimal control formulation of the problem, from which optimal educational policies are suggested. The main tools used are differential equations and optimization techniques. The results obtained represent pedagogical and educational policies, and also investment policies for the educational sector.

# AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu orientador Prof. Fernando Campello, pelo grande apoio e contribuições significativas que deu a longo do trabalho. A oportunidade que me deu de participar do grupo de Engenharia de Sistemas, como seu orientando, foi sem dúvida, de importância fundamental na minha formação.

Aos meus amigos e colegas do grupo de pesquisa, com quem convivi, que contribuíram de uma forma ou de outra para a conclusão do trabalho. Agradeço especialmente a André Leite Wanderley, Luís Henrique de Santana, Diogo Carvalho Bezerra e Luciano Nadler Lins, pelos quais tenho grande apreço e admiração.

A todos os amigos e colegas que me acompanharam nas disciplinas do mestrado, pela convivência fraterna e momentos de descontração.

À minha família pelo apoio que me deu durante o mestrado, sem o qual não teria sido possível realizá-lo. Pelo encorajamento aos meus ideais e presença constante nos momentos mais difíceis da minha vida.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	O Problema . . . . .	1
1.2	Diagnóstico . . . . .	1
1.2.1	A Importância do Assunto . . . . .	1
1.2.2	Antecedentes . . . . .	2
1.2.3	O <i>Status Quo</i> . . . . .	2
1.2.4	Pontos a Destacar . . . . .	3
1.2.5	Pontos a Ponderar . . . . .	3
1.3	Justificativa . . . . .	3
1.4	Objetivos . . . . .	3
1.4.1	Objetivos Gerais . . . . .	3
1.4.2	Objetivos Específicos . . . . .	4
1.5	Metodologia . . . . .	4
1.5.1	Introdução . . . . .	4
1.5.2	Modelo Comportamental . . . . .	5
1.5.3	Modelo Macroeconômico . . . . .	5
1.6	Organização . . . . .	6
<b>2</b>	<b>MOTIVAÇÃO E MODELOS COMPORTAMENTAIS</b>	<b>7</b>
2.1	Introdução . . . . .	7
2.2	Modelos Comportamentais . . . . .	9
2.2.1	Instabilidade em Profissões Criativas . . . . .	9
2.2.2	Comportamento de um Aluno . . . . .	11

2.2.3	Modelo Dinâmico do Comportamento Individual . . . . .	16
<b>3</b>	<b>O CAPITAL HUMANO</b>	<b>22</b>
3.1	Introdução . . . . .	22
3.2	Definindo o Capital Humano . . . . .	23
3.3	A Importância do Capital Humano . . . . .	27
3.4	A Ligação do Capital Humano com Outras Formas de Capital . . . . .	28
3.4.1	Capital Humano e Capital Natural . . . . .	29
3.4.2	Comparação Entre Capital Humano e Capital Físico . . . . .	29
3.4.3	A Formação do Capital Humano . . . . .	35
3.4.4	Os Retornos do Investimento em Educação . . . . .	36
3.4.5	O Financiamento da Educação . . . . .	43
3.5	O Capital Humano nas Organizações . . . . .	46
3.6	Medição do Capital Humano . . . . .	47
3.7	Alguns Dados Referentes ao Crescimento Econômico no Mundo . . . . .	48
3.8	Uma Visão Econômica do Capital Humano . . . . .	52
3.9	Modelos Econômicos com Capital Humano . . . . .	53
3.9.1	O Modelo de Romer . . . . .	54
3.9.2	O Modelo de Solow com Capital Humano . . . . .	55
<b>4</b>	<b>MODELO COMPORTAMENTAL PARA UM ALUNO</b>	<b>59</b>
4.1	Introdução . . . . .	59
4.2	As Variáveis e os Parâmetros do Modelo . . . . .	60
4.2.1	Processos Relevantes . . . . .	61
4.2.2	A Função de Produção . . . . .	63
4.3	O Modelo . . . . .	66
4.3.1	Hipóteses . . . . .	66
4.3.2	O Sistema de Equações . . . . .	67
4.4	Resultados . . . . .	70
4.4.1	Pontos de Equilíbrio . . . . .	70
4.4.2	Estudo Analítico no Plano de Fase . . . . .	72

4.5	Discussão . . . . .	75
<b>5</b>	<b>CONTROLE ÓTIMO EM EDUCAÇÃO</b>	<b>82</b>
5.1	Introdução . . . . .	82
5.2	Descrição do Modelo e Hipóteses . . . . .	83
5.2.1	Setores da Economia . . . . .	83
5.2.2	Dinâmica da Força de Trabalho . . . . .	85
5.2.3	Dinâmica da Força de Trabalho Educacional . . . . .	85
5.2.4	Equações das Identidades do Investimento . . . . .	90
5.2.5	Identidade da Renda . . . . .	90
5.2.6	Funcional Objetivo . . . . .	91
5.3	Análise do Modelo . . . . .	92
5.3.1	Resultados . . . . .	96
5.4	Discussão . . . . .	98
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES</b>	<b>105</b>
6.1	Modelo Comportamental . . . . .	105
6.1.1	Conclusões . . . . .	105
6.1.2	Comentários e Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	106
6.2	Modelo Econômico . . . . .	107
6.2.1	Conclusões . . . . .	107
6.2.2	Comentários e Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	108
<b>A</b>	<b>Apêndice</b>	<b>110</b>
A.1	Aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin . . . . .	110
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>118</b>

# Lista de Figuras

3.1	Renda individual versus nível de instrução. . . . .	37
4.1	Gráfico da função de produção. . . . .	65
4.2	Construção das trajetórias do plano de fase. . . . .	74
4.3	Simulação 1. . . . .	76
4.4	Simulação 2. . . . .	76
4.5	Simulação 3. . . . .	77
4.6	Simulação 4. . . . .	77
4.7	Simulação 5. . . . .	78
4.8	Simulação 6. . . . .	78
4.9	Simulação 7. . . . .	79
4.10	Simulação 8. . . . .	79
5.1	Política de alocação de cientistas e professores. . . . .	87

# Lista de Tabelas

2.1	Designação comportamental do aluno. . . . .	13
3.1	Relação entre renda individual média e nível de instrução. . . . .	37
3.2	Relação entre renda e nível de instrução. . . . .	38
3.3	Cursos técnicos. O retorno dos cursos técnicos é rápido. . . . .	38
3.4	O retorno dos cursos de graduação. . . . .	39
3.5	O retorno dos cursos de MBA. . . . .	40
3.6	Categorização das variáveis. . . . .	49
3.7	PNBCAP96 por ALFAB95. . . . .	49
3.8	PNBCAP96 por ESUNIT95. . . . .	50
3.9	PNBCAP96 por PRIMTOT. . . . .	50
3.10	PNBCAP96 por ALDOC95. . . . .	50
3.11	PNBCAP96 por LIVROS. . . . .	50
3.12	CRESCPNB por ALFAB95. . . . .	50
3.13	CRESCPNB por ESUNIT95. . . . .	51
3.14	CRESCPNB por PRIMTOT. . . . .	51
3.15	CRESCPNB por LIVROS. . . . .	51
3.16	CRESCPNB por ALDOC95. . . . .	51
3.17	Valores-p para os testes com o PNB. . . . .	51
3.18	Valores-p para os testes com o CRESCPNB. . . . .	52
4.1	Tabela da simulação 1. . . . .	76
4.2	Tabela da simulação 2. . . . .	77
4.3	Tabela da simulação 3. . . . .	77

4.4	Tabela da simulação 5. . . . .	78
4.5	Tabela da simulação 6. . . . .	78
4.6	Tabela da simulação 7. . . . .	79

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 O Problema

Muito do que alguns podem chamar de consumo, na verdade, constitui investimento em capital humano. Gastos diretos com educação, saúde e imigração interna para tirar proveito de melhores oportunidades de trabalho são exemplos claros. Ganhos financeiros resultantes de anos de educação formal ou treinamentos no trabalho também o são (Schultz, 1961).

A questão central discutida em cada país industrializado é a forma de agir na educação e programas de treinamento para melhorar a formação da força de trabalho. Como investir em educação de forma que a economia prospere?

## 1.2 Diagnóstico

### 1.2.1 A Importância do Assunto

Há um consenso nos ambientes econômicos e políticos de que maiores índices de educação e treinamento profissional são fundamentais para se atingir o sucesso econômico. Resumidamente, o argumento toma o seguinte caminho: tem havido uma intensificação na competição internacional provocada pela integração da economia mundial e pelas modernas tecnologias que são notadamente baseadas em conhecimento. Ou seja, economias intensivas no uso de habilidades conceituais. Isso tem provocado uma mudança das antigas formas de produção, especialmente aquelas baseadas em tecnologias de produção em massa, que têm se tornado comparativamente ineficientes quando confrontadas com formas mais recentes. Estas duas forças de integração global e mudança tecnológica têm dado à educação e formas de treinamento e aquisição de conhecimento e habilidades, uma importância fundamental no processo competitivo (Asthon, 1997).

Tem-se, então, que dentre os diversos fatores que tornam evidentes a importância do estudo e análise do sistema educacional está a necessidade de desenvolvimento de tecno-

logias, que é altamente relevante do ponto de vista do desenvolvimento econômico. O progresso tecnológico é tido atualmente como um dos principais fatores do desenvolvimento econômico. Para que isso ocorra é necessário uma educação de qualidade. Não há desenvolvimento econômico ou qualidade de vida, sob qualquer aspecto, sem educação de qualidade.

### 1.2.2 Antecedentes

Uma abordagem recente da aplicação de modelos matemáticos baseados em sistemas dinâmicos no contexto educacional pode ser encontrada em Teixeira (1998). Nesse trabalho o autor propõe um modelo dinâmico estocástico para a gestão do sistema ensino-aprendizagem.

Vários trabalhos sobre crescimento econômico levam em consideração o efeito do capital humano no crescimento econômico (Romer, 2001; Becker, 2005; Chen, 2005; Jones, 1998). Normalmente se modela o efeito do capital humano tratando-o como conhecimento e habilidades já incorporadas no ser humano, considerando essa influência como um fator que afeta a eficiência da força de trabalho.

### 1.2.3 O *Status Quo*

Apesar de ter havido mudanças nas políticas educacionais brasileiras nos últimos tempos, o país continua a dar vexame, quando se trata de ensinar. Esses resultados podem ser vistos em pesquisas recentes realizadas por entidades como a Unesco, por exemplo. Volta e meia o fracasso da educação no Brasil retorna às manchetes. Esses dados são preocupantes, mas não são incompreensíveis. Eles apenas refletem a incapacidade do governo de oferecer educação fundamental de qualidade para a maioria das pessoas. Isso é fruto de um imenso atraso e falta de preocupação histórica com a educação (Dreyer, 2003). E mais ainda, a população não desenvolve o hábito da leitura, o que reflete uma questão cultural do povo brasileiro que sempre espera que o governo resolva todos os problemas educacionais.

### 1.2.4 Pontos a Destacar

Os profissionais que tratam do problema em sua maioria não possuem formação adequada para resolvê-lo de maneira eficaz. A forma mais consistente seria uma abordagem sob a ótica da Engenharia de Sistemas (Campello de Souza, 2004), tratando da escolha e planejamento de políticas educacionais, o que exige capacitação de alto nível, na estruturação e administração do processo.

### 1.2.5 Pontos a Ponderar

1. Hoje, o Brasil já possui uma rede escolar abrangente, com exceção do ensino infantil;
2. Existem experiências bem sucedidas de ensino, mas poucas vezes elas são generalizadas ou mesmo recebem continuidade;
3. Muitos programas educacionais lançados são pontuais e de pouca abrangência.

## 1.3 Justificativa

São muitos os problemas envolvidos com o sistema educacional. Propõe-se um modelo que pode ser empregado na análise do comportamento individual de um aluno no sistema educacional auxiliando na elaboração de um processo pedagógico para cada aluno que possa ser representado pelo modelo. No contexto macroeconômico, a metodologia científica pretendida aqui pode salientar aspectos não evidentes no processo de crescimento econômico influenciados pela educação, bem como mostrar resultados importantes para o processo de planejamento político do sistema educacional.

## 1.4 Objetivos

### 1.4.1 Objetivos Gerais

1. Formulação de um modelo dinâmico de comportamento de um aluno no ambiente educacional;

2. Formulação de um modelo de crescimento econômico ótimo incorporando aspectos relacionados ao sistema educacional, tomando como base modelos dinâmicos macroeconômicos.

### 1.4.2 Objetivos Específicos

1. A abordagem sistêmica da questão motivacional em sistemas educacionais usando um modelo dinâmico comportamental;
2. Interpretar os parâmetros do modelo educacional obtido, verificando como eles se associam ao comportamento do aluno;
3. Determinar as condições de equilíbrio e estabilidade relacionadas aos parâmetros do modelo encontrado;
4. Estabelecer políticas de planejamento para o sistema educacional;
5. Fornecer bases científicas para a discussão de questões envolvidas no contexto educacional relacionadas com aspectos econômicos.

## 1.5 Metodologia

### 1.5.1 Introdução

O estudo apresentado consiste em uma abordagem por dois pontos de vista diferentes relacionados com educação. Primeiro avalia-se o processo educacional mais diretamente sobre o aluno, com um modelo comportamental baseado no trabalho de Lins (2004) . Em seguida apresenta-se uma proposta e análise de um modelo que trate da economia da educação. Pode-se ver claramente que o estudo consiste de uma abordagem interdisciplinar onde a principal ferramenta matemática utilizada é a Teoria de Sistemas Dinâmicos, que tem como objetivo descrever as propriedades gerais nas alterações de sistemas, especificadas por variáveis que interagem conforme princípios ou regras (Strogatz, 1994). Geralmente estas alterações possuem o tempo como variável independente, tornando possível conhecer os estados de um determinado sistema pelos valores assumidos pelas variáveis

em cada instante. As trajetórias temporais das variáveis no tempo traduzem o comportamento do sistema, resultante das interações entre as suas variáveis. Vários conceitos como trajetórias, oscilações, estado de equilíbrio, perturbações, estabilidade, não linearidade, plano de fase, etc, são utilizados ao longo do trabalho. Referências importantes aqui são Strogatz (1994), Elgerd (1967), Dorf(1973) .

### 1.5.2 Modelo Comportamental

O modelo comportamental consiste na utilização de conceitos matemáticos e ferramentas analíticas de análise de sistemas dinâmicos (Strogatz, 1994), no estudo do comportamento de um aluno dentro do sistema educacional de ensino frente às situações impostas nesse ambiente. Toma-se como referência para modelos comportamentais os trabalhos de Lins (2004), Rinaldi (2000), Teixeira (1998).

A elaboração de um tal modelo tem como ponto de partida o estudo dos conceitos e processos relevantes da dinâmica comportamental bem como da teoria matemática aplicada à modelagem e análise do sistema. Pretende-se dar uma abordagem sistêmica ao problema em questão identificando o aluno como elemento fundamental no sistema educacional.

O modelo apresentado aqui traz aspectos do modelo dinâmico de comportamento humano de Lins(2004), no sentido que também representa um modelo situacional onde o aluno é visto como um indivíduo dentro do ambiente de ensino, e é exigido que ele tome ações em resposta a situações impostas pelo ambiente. A principal diferença é na função de produção do modelo que apresenta outro formato.

### 1.5.3 Modelo Macroeconômico

Pretende-se com esse modelo, evidenciar aspectos do sistema educacional relacionados com o crescimento econômico, dando uma abordagem de controle ótimo (Intriligator, 1971; Chiang, 1992).

Apresenta-se um modelo que pretende destacar o setor educacional da função de produção agregada da economia, de forma a poder tratar mais detalhadamente de aspectos desse setor. O modelo representa uma economia de dois setores onde a produção de um

setor funciona como insumo produtivo para a produção final da economia. Pode ser visto como uma realimentação interna no sistema. Considera-se que o setor educacional possui dinâmica de alocação da força de trabalho educacional dada por um sistema de equações diferenciais. O modelo é determinístico e as variáveis são contínuas no tempo.

## 1.6 Organização

No capítulo 2 apresenta-se uma contextualização dos modelos comportamentais educacional e situacional que serviram de base para desenvolvimento do modelo apresentado no capítulo 4.

O capítulo 3 traz uma apresentação dos principais conceitos e características do capital humano, comentando sobre as formas de estimação e diversas grandezas relacionadas, trazendo ainda a apresentação de alguns modelos de crescimento econômico encontrados na literatura.

O capítulo 4 apresenta um modelo comportamental que procura refletir o comportamento de um aluno em termos de variáveis associadas com processos internos que ocorrem quando o aluno se encontra diante de uma situação imposta pelo ambiente educacional.

O capítulo 5 apresenta um modelo de crescimento econômico que procura mostrar relações entre variáveis que representam grandezas importantes do setor educacional e variáveis econômicas, de forma a tentar apresentar uma interligação entre estas variáveis no curso ótimo de crescimento econômico.

Finalmente, o capítulo 6 mostra as conclusões gerais referentes a cada modelo e alguns comentários mais gerais.

# 2 MOTIVAÇÃO E MODELOS COMPORTAMENTAIS

## 2.1 Introdução

O estudo da motivação tem por objeto a complexa questão da natureza humana quanto aos mecanismos subjacentes ao comportamento humano, no intuito de entender, prever e até de modificá-lo (Lins, 2004).

A motivação pode ser vista como um fator interno ao comportamento do indivíduo, que não é diretamente observável mas pode ser inferido por vários canais de comunicação do ser humano. Embora o fator que incita uma pessoa à ação seja intrínseco ele pode ser influenciado pelo ambiente externo.

Os trabalhos descritivos conceituais relacionados à motivação concentram seu foco sobre o conceito de motivação, não incluindo efeitos inerentes à personalidade humana, deixando claro uma das limitações dos modelos motivacionais: a falta de explicação para o funcionamento em conjunto de vários aspectos do comportamento humano (Lins, 2004).

Muitos trabalhos apontam que a função motivacional do ser humano está intrinsecamente ligada à noção de tempo, ou seja, sofre alteração com a variável tempo, impondo o emprego de técnicas de modelagem que considere análises temporais nos estudos. Pode-se então pensar nas possibilidades irrestritas do uso de metodologias provenientes de sistemas dinâmicos e equações diferenciais que encontram campo de aplicação nesta classe específica de problemas, podendo ser das mais úteis ferramentas matemáticas nos trabalhos de modelagem sobre comportamento organizacional (Lins, 2004).

O processo motivacional se inicia com uma pressão ou força gerada por algo intrínseco ao indivíduo, a necessidade, a qual varia de acordo com os efeitos resultantes de sua interação com o meio ambiente externo e processos internos ao indivíduo. Essa pressão é percebida e captada pelos canais de comunicação que o ser humano dispõe e em seguida é interpretada por suas estruturas sensitivas. Essa nova informação provoca uma energia

potencial de reação, que incentiva o indivíduo a executar alguma ação no ambiente, no intuito de controlá-lo. Essa energia acumulada leva a uma reação da pessoa no sentido de restabelecer o equilíbrio antes existente. Mas essa reação nem sempre é direcionada exclusivamente à sua própria necessidade tendo efeito sobre outras necessidades que podem pertencer ao próprio indivíduo ou não. Na medida que uma necessidade é saciada outras necessidades tornam-se mais importantes, dando continuidade ao processo descrito.

Apresentam-se a seguir algumas definições comuns em estudos envolvendo motivação. Os conceitos podem ser encontrados em Hersey e Blanchard (1986) e Lins (2004).

- **Objetivo:** são as recompensas ou incentivos esperados resultantes de uma atividade ou trabalho;
- **Comportamento:** conjunto de impulsos orientados para a consecução de objetivos;
- **Motivo:** chamados muitas vezes de necessidades, compreendem os desejos oriundos de um indivíduo e são voltados para um objetivo;
- **Intensidade motivo:** a força que uma determinada necessidade apresenta frente às demais que estão concorrendo pelo comportamento em um determinado instante;
- **Situação Motivadora:** é uma condição onde estão presentes uma atividade, um motivo e um objetivo influenciando o comportamento de uma pessoa;
- **Expectativa:** probabilidade percebida de satisfazer uma determinada necessidade com base em experiências vividas;
- **Disponibilidade:** limitações impostas pelo ambiente à consecução dos objetivos, conforme percebida pelos indivíduos;
- **Personalidade:** padrões comportamentais formados por hábitos acumulados ao longo da vida.

Estes conceitos serão usados no restante do capítulo e no capítulo 4, não exatamente da forma como estão apresentados aqui, mas seu conhecimento facilita a compreensão dos modelos e suas interpretações.

A proposta é apresentar um modelo que forneça um maior entendimento sobre o funcionamento dos mecanismos reguladores do comportamento humano em um sistemas produtivos, estendendo o conceito de sistema produtivos para dentro do ambiente educacional.

## 2.2 Modelos Comportamentais

Apresenta-se seguir alguns modelos dinâmicos desenvolvidos no âmbito organizacional. Dois desses trabalhos são referência básica do modelo apresentado no capítulo 4.

### 2.2.1 Instabilidade em Profissões Criativas

O trabalho trata das instabilidades observadas nas taxas de produtividade de indivíduos criativos. Muitos cientistas alteram períodos de alta produtividade com períodos de baixa produtividade. Atualmente a flexibilidade e a criatividade são condições determinantes de uma boa performance em uma grande variedade de profissões. Observações de padrões produtivos como este sugerem que a produção de um indivíduo tem basicamente uma origem endógena e é caracterizada por processos dinâmicos cíclicos ou estacionários. Alguns aspectos demonstram, por outro lado, que tal característica cíclica ou estacionária não se apresenta de forma simples, por algumas razões, dentre as quais (Rinaldi, 2000):

1. Maior experiência e aprendizado conduzem ao aumento da habilidade produtiva, enquanto que maior idade cronológica conduz à redução da mesma, mostrando que o sistema tem parâmetros variantes no tempo e estados dinâmicos;
2. Na hipótese da produção individual ser constante, sua produção se aproximaria de um valor também constante, ou de um ciclo. Se a convergência de um sistema dinâmico de parâmetros fixos for suficientemente lenta, observa-se não um atrator, mas um transitório conduzindo o processo;
3. A produção da criatividade individual é certamente influenciada por eventos aleatórios externos ao processo, que podem direcioná-la para longe do atrator.

Com estas considerações, estudos sobre a evolução da produtividade média dos indivíduos vêm filtrando as flutuações observadas durante o tempo de vida dos mesmos, de modo a considerar a habilidade produtiva apenas com respeito ao aprendizado e à idade. Rinaldi (2000) propõe uma conjectura, na forma de um modelo mínimo de parâmetros constantes, que pode explicar por que alguns indivíduos apresentam caracteristicamente, aumentos e diminuições de desempenho recorrentes. E afirma que a dinâmica de profissões criativas pode ser estabelecida pela interação entre duas variáveis de estado: a satisfação  $S$  e a criatividade  $C$ , que mede a fluência com que novas idéias são concebidas, e portanto, novos resultados são alcançados.

O modelo é composto de duas equações diferenciais especificando as interações entre as duas variáveis de estado, ambas positivas, onde  $S = 0$  corresponde a uma total “dissatisfação” e  $C = 0$  corresponde a uma total inércia ou catatonia.

A evolução temporal das duas variáveis deriva de um balanço entre duas contribuições opostas, uma negativa  $O$  pela redução da condição do estado devido à dinâmica própria, e outra positiva  $R$  pelo aumento da condição do estado. As equações são:

$$\begin{cases} \dot{S} = -O_S(t) + R_S(t) = -aS(t) + f(C(t)) \\ \dot{C} = -O_C(t) + R_C(t) = -bC(t) + g(\dot{S}(t)) \end{cases}$$

onde:

- $a$ : coeficiente de esquecimento da satisfação e o inverso  $1/a$  é a constante de tempo;
- $b$ : coeficiente de esquecimento da criatividade e o inverso  $1/b$  é a constante de tempo;
- $f(C)$ : função diferenciável da criatividade, denominada taxa de realização, satisfazendo a:

$$f(0) = 0, f'(C) > 0, f''(C) < 0, \text{ e } \lim_{C \rightarrow \infty} f(C) = f_{max};$$

- $g(\dot{S})$ : função diferenciável da variação da satisfação, denominada de motivação, com as seguintes propriedades:  $0 < g(\dot{S}) < g_{max}$ ,  $g'(\dot{S}) > 0$ ,  $g''(\dot{S}) > 0$  se  $\dot{S} > 0$  e  $g''(\dot{S}) < 0$  se  $\dot{S} < 0$ , e também,  $\lim_{\dot{S} \rightarrow -\infty} g(\dot{S}) = g_{min} = 0$  e  $\lim_{\dot{S} \rightarrow +\infty} g(\dot{S}) = g_{max}$ .

O modelo apresenta um único ponto de equilíbrio, que é,

$$(\bar{S}, \bar{C}) = \left( \frac{\bar{f}}{a}, \frac{\bar{g}}{b} \right).$$

onde  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$  são os valores de  $f$  e  $g$  no equilíbrio. Este ponto é estável se,

$$\bar{f}'\bar{g}' < a + b.$$

As principais conclusões tiradas no trabalho foram:

- Indivíduos com alto coeficiente de esquecimento devem apresentar desempenho constante;
- Indivíduos com baixos coeficientes de esquecimento  $a$  e  $b$  induzem a instabilidade do ponto de equilíbrio, e portanto apresentam produtividades oscilatórias;
- Pessoas que prontamente reagem a desvios pequenos de satisfação do estado estacionário têm um desempenho flutuante;
- Satisfação no ponto de equilíbrio é proporcional à taxa de produção;
- Profissões consideradas criativas estão sempre associadas à instabilidades;
- A criatividade é estimulada também pelo nível de satisfação e não pelas suas variabilidades;
- A análise de regimes cíclicos deve apresentar muito mais dificuldades.

## 2.2.2 Comportamento de um Aluno

O modelo mostrado aqui foi usado em Teixeira (1998), tendo sido elaborado por Otto J. M. Smith, da universidade da Califórnia, em Berkeley e apresentado em Dorf (1973). É um modelo com *feedback* que representa o controle de um aluno sobre suas próprias notas. O aluno é o elemento fundamental do sistema educacional, seja em termos de suas aspirações e expectativas, seja em termos de suas aptidões e atitudes.

A abordagem focaliza aptidão e competência, além de restringir a análise para a tomada de ação individual, evitando as complicações relacionadas ao comportamento de grupo. O enfoque é quanto ao rendimento do aluno, representando a atitude que ele adota na situação. A existência da aptidão reflete claramente no ganho dessa performance.

Nesse modelo havia a preocupação em proceder à avaliação e interação no desempenho do aluno de acordo com a posição em que o aluno se encontrava em relação aos outros alunos. Uma das conclusões resultou na necessidade do agrupamento dos alunos segundo suas dinâmicas específicas de aprendizagem, para que o processo pedagógico ocorra de modo otimizado.

No início foi feita uma coleta de dados acerca dos estudantes, tais como sexo, idade, série escolar, QI, quantidade de estudo e leitura, estratégias de estudo, situação familiar e nível de instrução dos pais, para posterior submissão a um estudo estatístico. Tornou-se necessário usar algumas medidas básicas adotadas por B. Campello de Souza (Teixeira, 1998):

A partir dos resultados da análise estatística, todas as variáveis foram matematicamente condensadas em quatro categorias: Inteligência & Comportamento, Ambiente Cultural e de Origem, Comportamentos Culturais e Preferências Acadêmicas. Finalmente, a partir das quatro categorias foram criadas duas dimensões: Aptidão (Inteligência & Comportamento, Ambiente Cultural e de Origem) e Atitude (Comportamentos Culturais e Preferências Acadêmicas).

Com base nestas dimensões foram definidos quatro tipos de estudantes: Apolo, Hermes, Ares e Dionísio, discriminados a seguir.

- **Apolo:** Alta Aptidão e Alta Atitude: são alunos intelectualmente muito capazes, com grande facilidade para o pensamento acadêmico e que, simultaneamente, têm estímulo para as atividades culturais, adotando bons hábitos de estudo e leitura.
- **Hermes:** Alta Aptidão e Baixa Atitude: são alunos intelectualmente muito capazes, com grande facilidade para o pensamento acadêmico, porém desinteressados no estudo e com hábitos que não contribuem para

um bom rendimento escolar.

- **Ares:** Baixa Aptidão e Alta Atitude: são alunos com níveis normais de intelecto acadêmico, porém com bons hábitos de estudo, necessitando desenvolver sua base e aprimorar o raciocínio formal.
- **Dionísio:** Baixa Aptidão e Baixa Atitude: possuem talentos associados principalmente a atividades extra-escolares, sendo sua inteligência acadêmica normal, mas com hábitos e motivações negativas com relação ao estudo.

A partir das definições acima tentou-se determinar valores associados a cada característica, de modo a verificar quais seriam os fatores principais e estimar quais os ganhos específicos que cada componente do sistema poderia dar para melhorar o desempenho do sistema educacional. O modelo apresenta variáveis com valores distintos, porém, basicamente, em cada bloco tem-se uma constante de tempo ( $\delta$ ) e um ganho ( $K$ ) associados ao sistema (Teixeira, 1998).

A partir dessa idéia de resumir todas as variáveis coletadas e analisadas em quatro grupos distintos (quatro *clusters*), obteve-se uma maneira de interagir com estes grupos. A tabela abaixo mostra os grupos:

Tabela 2.1: Designação comportamental do aluno.

Designação	Aptidão	Atitude
Apolo	Alta	Alta
Hermes	Alta	Baixa
Ares	Baixa	Alta
Dionísio	Baixa	Baixa

As variáveis que compõem o modelo são:

- $T_A$ : tempo disponível do aluno;
- $T_X$ : tempo alocado para os estudos;
- $T_e$ : tempo para atividades extra-curriculares;

- $D$ : perturbações;
- $N$ : nota;
- $x_1$ : saída do bloco aptidão;
- $x_2$ : saída do bloco atitude;

e os parâmetros:

- $K_1$ : representa um aspecto da aptidão; é o ganho da aptidão. Para um mesmo tempo alocado aos estudos, quanto maior for o  $K_1$  do aluno maior será o seu “rendimento” escolar;
- $\delta_1$ : é a constante de tempo da aptidão; representa o tempo (não necessariamente newtoniano) que o aluno leva para atingir 63,2% do seu rendimento final;
- $K_2$ : representa um aspecto da atitude; é o ganho da atitude. Para uma mesma nota nos exames, quanto maior for o  $K_2$  do aluno, maior será o tempo que ele alocará para atividades extra-curriculares.
- $\delta_2$ : é a constante de tempo da atitude; representa o tempo (não necessariamente newtoniano) que o aluno leva para atingir 63,2% do tempo a ser alocado para atividades extra-curriculares.

Com base nas variáveis e parâmetros identificados, as equações diferenciais do modelo puderam ser formuladas:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{x_1}{\delta_1} + \frac{K_1}{\delta_1}T_X = -\frac{x_1}{\delta_1} + \frac{K_1}{\delta_1}(T_a - T_e) \\ \dot{x}_2 = -\frac{x_2}{\delta_2} + \frac{K_2}{\delta_2}T_X = -\frac{x_2}{\delta_2} + \frac{K_2}{\delta_2}(x_1 - D) \end{cases} \quad (2.2.1)$$

e ainda

$$N(s) = x_1 - D(s).$$

Se o aluno apresentar um desempenho ruim, ou seja, uma nota baixa, ele diminui o tempo para atividades extra-curriculares aumentando o tempo para estudos, o que

vai tender a provocar um aumento na sua nota. Sabe-se que a nota tem um efeito na auto-estima e na autoconfiança do aluno. Como o desempenho é proporcional a  $K_1$  e inversamente proporcional a  $\delta_1$ , se se pretende aumentar o desempenho do bloco de aptidão, deve-se aumentar o valor de  $K_1$  ou diminuir o valor do  $\delta_1$ . O  $K_1$  dosa a quantidade de matéria que vai ser assimilada pelo aluno, para um dado tempo alocado aos estudos. Com relação ao tempo, o aluno pode apresentar grande facilidade de aprendizagem em determinado assunto ( $\delta_1$  pequeno), assimilando o conteúdo em pouco tempo, ou então, apresentar dificuldades no aprendizado, que no modelo é representado por uma constante de tempo grande.

No caso da atitude, a partir de uma dada nota, o aluno auto-avaliar-se-á e tomará uma atitude. Os parâmetros da atitude do aluno são  $K_2$  e  $\delta_2$ . Um  $\delta_2$  pequeno significa uma reação rápida; caso contrário ter-se-á uma reação lenta. No caso da atitude, o bom é que  $K_2$  seja pequeno e  $\delta_2$  seja grande. Isto significa que ocorrendo um aumento na nota, o aluno vai demorar mais para alocar um tempo menor às atividades extracurriculares. Tem-se o tempo disponível do aluno, o tempo para atividades extracurriculares e o tempo para estudos, conforme as definições. Deve-se considerar o tempo para estudo como um tempo útil, de forma que não basta somente ter muito tempo disponível, e sim, que neste tempo disponível o aluno seja bem assessorado e direcionado para determinadas atividades. Neste momento, o tempo considerado é o tempo hábil ou equivalente, diferente do tempo newtoniano, isto é, cronológico. Na verdade, denomina-se tempo útil como sendo aquele bem aproveitado no que diz respeito ao aprendizado. Quando o aluno possui uma infra-estrutura adequada e uma orientação didática sólida, uma hora de estudo, com certeza, render-lhe-á um aproveitamento substancial, enquanto que, outro aluno, sem determinado aparato, não o conseguiria. Dessa forma, esta auto-avaliação é o feedback do aluno. O principal efeito do *feedback* no sistema é controlar e eliminar os efeitos produzidos pela perturbação, de forma que sua otimização reduz a sensibilidade à variação dos parâmetros do sistema e às perturbações.

Na verdade, a realimentação de um sistema faz a comparação entre a saída esperada e a saída obtida, com a finalidade de compensar as perturbações inerentes ao sistema e, assim, otimizá-lo. Analisando-se os parâmetros  $K_1$  e  $\delta_1$  (aptidão) e  $K_2$  e  $\delta_2$  (atitude),

pode-se concluir que existe a possibilidade de variação nestes parâmetros, isto é, o aluno pode apresentar alta ou baixa aptidão e atitude, e, a partir daí, têm-se os quatro casos possíveis indicados. O entendimento das implicações da dinâmica do sistema de equações diferenciais pode ser também seguido pelo raciocínio do próprio Teixeira:

Imagine-se, por exemplo, que o aluno recebe uma determinada nota e a partir desta nota toma uma atitude no sentido de melhorar seu desempenho, o que significa alocar menos horas para lazer por unidade de nota que obteve, e demorar para fazer isso; ou seja, começar a estudar por mais tempo. E ao mesmo tempo, este aluno tem facilidade em absorver conhecimentos e apresenta boa motivação, portanto segundo divisão proposta, apresentando alta aptidão e alta atitude. Logo, este aluno, devidamente assessorado, apresentará o melhor resultado possível. Em contra partida, tem-se o aluno que a partir da nota recebida, não apresenta entusiasmo para tomar uma atitude de forma a melhorar o seu desempenho e, por outro lado, tenha dificuldades cognitivas, isto é, baixo  $K_1$  e alto  $\delta_1$ , e portanto não apresentará um desempenho considerável. Ou seja, para um aluno de alto  $K_2$  e baixo  $\delta_2$ , uma nota pequena implicará num grande tempo dedicado ao lazer (Teixeira, 1998).

### 2.2.3 Modelo Dinâmico do Comportamento Individual

Esse modelo é a principal referência do trabalho apresentado no capítulo 4. Vários conceitos, definições e hipóteses apresentados no trabalho original de Lins (2004), são usados aqui de forma direta, ou serviram como base para os pontos considerados.

Conceitos importantes para a compreensão do fenômeno comportamental nas organizações são os de indivíduo e situação. Um processo motivacional geralmente é específico para a tripla ( $S; L; l$ ), onde  $S$  é a situação, a requisição de interação com o ambiente circundante,  $L$  é o líder, aquele que pretende exercer influência no processo, e  $l$  é o liderado ou indivíduo. A autonomia característica das pessoas aparece quando o processo ocorre sem a figura de agentes externos, ou seja, do líder. Ainda se pode destacar o caso em que o líder adota um estilo autônomo de liderança, configurando-se um desprezível envolvimento deste na tarefa a ser realizada pelo liderado. Portanto, existe também um

sistema onde o elemento de liderança não está presente, permitindo uma representação para o par indissociável ( $S;l$ ). Não há, portanto, como desassociar o indivíduo da situação, podendo, para simplificar, ser considerada uma situação invariante, mas nunca inexistente. Van Geert (1998) também enfatiza essa união entre sujeito e ambiente nas teorias voltadas ao desenvolvimento.

Como o modelo proposto é específico para o par ( $S;l$ ), ele faz parte das chamadas teorias situacionais. Quando se altera o indivíduo ou a situação, os valores dos parâmetros do problema podem ou não se manter os mesmos. Os parâmetros não representam uma medida de características apenas individuais ou apenas situacionais, mas sim de ambos simultaneamente. No entanto, essa consideração não se estende para as variáveis que compõem o modelo, exigindo uma análise adequada a cada caso, a ser feita mais adiante.

Uma situação aparece geralmente sob a forma de requisição de ação, com a finalidade de exercer controles ou alterações tanto no indivíduo como no ambiente. Em organizações de trabalho a situação consiste no trabalho ou tarefa a ser realizada. A situação desta forma se confunde com o próprio ambiente no qual o indivíduo está inserido, determinando os tipos de troca de interação tanto os permissíveis quanto os exigidos. Cada situação determina um conjunto de parâmetros relativos a um indivíduo que nela participa.

Quando não é destacado no processo, o líder é visto como uma parte do ambiente em volta do subordinado que, para atender aos próprios anseios, depende de que as ações de seus liderados estejam orientadas para um objetivo comum aos dois. Sendo assim, a necessidade no liderado é afetada pela necessidade do líder, cuja ação resulta também em benefícios desejados pelo próprio líder, mesmo que pertencentes a indivíduos distintos.

O sistema de trocas entre indivíduos, como por exemplo, de favores, de bens ou de sentimentos, constitui o caminho para a satisfação das próprias necessidades por intermédio da satisfação das necessidades alheias. A ocorrência da troca depende do valor que cada um dá aos objetos da troca. É possível assim verificar que as necessidades nos seres humanos são geralmente interdependentes. Se por exemplo, a necessidade do líder não afetar uma necessidade do liderado, este poderá não esboçar nenhuma reação no sentido de tomar uma ação que seja satisfatório para ambos.

Quando se considera alguém como presente em uma situação, significa que deverá

haver uma interação com o ambiente para que nele seja produzida alguma transformação. A intenção é obter uma resposta favorável a si próprio, ou seja, que lhe traga a melhor consequência possível. Essa troca de ações pode se dar tanto de modo ativo, quando o indivíduo inicia uma ação sobre o meio, ou de modo passivo, no caso em que o meio exerce uma ação no indivíduo. Em muitos casos, uma ação tomada não se limitará a apenas fornecer recompensas exclusivamente ao indivíduo, acabando por exercer uma perturbação também no ambiente, tanto positiva como negativa.

### **Variáveis do Modelo**

Apresentam-se a seguir algumas das variáveis do modelo e algumas interpretações. Todas as definições que se seguem podem ser encontradas com maiores detalhes em Lins (2004).

### **A Produção**

Entende-se por produção o conjunto de ações tomadas com uma finalidade específica. A produção está assim mais associada ao esforço empregado do que com os resultados provenientes desse esforço, aos quais não está condicionada. Diferencia-se também do conceito de produtividade, razão entre resultados e o uso de recursos, por não ser uma medida de eficiência do trabalho humano, mas uma medida do esforço na consecução de objetivos a partir deste trabalho.

As ações produzidas por um indivíduo são uma interferência no meio circundante com o objetivo de mudar a trajetória dos vários elementos que compõem o meio. Essa mudança no ambiente proporciona uma resposta em sentido contrário com um impacto na dinâmica interna do indivíduo. Caso não houvesse essa reação do ambiente, desfazer-se-ia toda a lógica dos motivos na realização da ação.

A ação tomada é função de um processo seletivo entre opções e alternativas identificadas e disponíveis de perturbação no meio. Ela deve dar em troca algum bem, seja ele intrínseco ou extrínseco, que trabalha no intuito de eliminar ou reduzir o mal estar provocado pela necessidade. A expectativa é de que essa ação realmente traga uma redução do nível de ansiedade produzida pela vontade. Caso contrário essa ação perde seu

valor frente ao indivíduo. A ação não recompensadora passa então a se tornar inútil e indesejável frente à pessoa. Entretanto, não há garantias de que a ação realmente traga os bens almejados, nem que essa interferência não produza danos a outras necessidades. A escolha de qual ação será tomada dentre várias alternativas disponíveis é um problema a ser abordado em um modelo de decisão à parte do modelo dinâmico. Considera-se que no período de tempo válido para a modelagem, a escolha da ação não é alterada.

### **A Necessidade**

As necessidades são consideradas como algo incômodo e prejudicial ao bem estar do homem, capaz de gerar um desconforto pessoal. As teorias homeostáticas do comportamento humano propõem que as ações dos indivíduos são forçadas por impulsos causados pelas necessidades. Esses impulsos são também denominados de vontade, desejo, que- rença, ansiedade. As ações do indivíduo estariam direcionadas a re-estabelecer a sensação de conforto interno existente antes do aparecimento da necessidade.

Uma perturbação surgida a partir da interação do indivíduo com o ambiente provoca uma conturbação à organização inicial do organismo. Existe a possibilidade que essa perturbação cause o surgimento de uma nova reordenação dos componentes do organismo, conduzindo este a uma ordenação diferente da anterior, ou mesmo a um ponto de ameaçar alguma das interligações críticas para o sustento da vida. Na primeira hipótese, o bem-estar proporcionado por essa nova configuração será diferente da anterior, para melhor ou para pior, dependendo se os bens foram recebidos em excesso, em falta ou em quantidade adequada. O impulso só aparece quando é produzida uma tensão na direção de um dos extremos: a carência ou o exagero. Pode-se identificar portanto um ponto ideal de operação em que o bem-estar é maximizado, onde a necessidade assume um valor mínimo.

### **A Vontade**

A energia ou impulso gerado pela necessidade é observada pela vontade do indivíduo em agir. Então a necessidade motiva o indivíduo por meio de uma tensão aplicada. Quando um indivíduo tem uma vontade expressa de fazer algo, subentende-se que existe uma necessidade por trás motivando este indivíduo. O desejo não está, portanto, em

realizar a ação, mas nas recompensas provenientes da ação. O nível de compensação da necessidade fornecido pelas recompensas é único para esta necessidade, mas isso não significa que mais de uma necessidade não possa ser atendida, ou melhor, afetada por uma ação. Primariamente, define-se a vontade como sendo o resultado de tensões geradas no indivíduo. Também é vista como a disposição em tomar uma ação que aumente o nível de conforto. Este elemento é relativo ao ímpeto à ação produzido pela necessidade. Vários termos são usados para descrever a energização do comportamento voltada à ação, e a aplicação varia conforme a intensidade, a orientação, a finalidade, entre outros. Essa energização é armazenada em forma de vontade orientada à satisfação da necessidade.

### **A Competência**

Mesmo estando motivado, executar ou não uma tarefa dependerá das competências que o indivíduo dispõe exigidas pela atividade. Por competência entende-se todas as capacidades necessárias à tarefa, tais como as habilidades, o conhecimento, entre outros domínios da competência. Não basta apenas querer (vontade) fazer, é preciso também poder (competência) fazer.

As competências são reconhecidas e selecionadas pelo intelecto, que avalia a adequação de uma competência quanto à importância frente à ação a ser tomada. O desenvolvimento de competências faz parte do ajustamento do homem ao meio circundante.

Quanto mais ajustado ao ambiente ele estiver, ou seja, quanto mais competente para aquele ambiente ele for, mais fácil será para o mesmo realizar as ações recompensadoras para as próprias necessidades. Como a competência tem a ver com a facilidade de interação ativa com um determinado ambiente, pode acontecer de uma mesma competência, vital para alguns ambientes, ser de extrema inutilidade em outros.

### **O Modelo Dinâmico**

O ser humano contém vários subsistemas comportamentais, cada um orientado a um objetivo, que possuem a capacidade de governar o comportamento individual em um determinado instante. Em cada subsistema comportamental estão presentes um conjunto de variáveis associadas a um mesmo objetivo, estando interrelacionadas entre si e com o am-

biente circundante. Os objetivos, que orientam os subsistemas comportamentais, podem ser discretizados, e por conseqüência os subsistemas também. Subsistemas comportamentais que apresentem valores muito inferiores a outros existentes podem ser desprezados do sistema total, e fazem parte de um conjunto de subsistemas comportamentais não básicos.

Os demais subsistemas comportamentais que apresentem valores significativos fazem parte do conjunto dos subsistemas comportamentais básicos, por serem fortes determinantes do comportamento no momento específico.

O modelo não linear que representa a atuação de um subsistema comportamental regulando o comportamento humano é dado por:

$$\begin{cases} \dot{N} = aN - ihCD \\ \dot{D} = -dD + gN \\ \dot{C} = -cC + bD + jhCD \end{cases} \quad (2.2.2)$$

onde:

- $N$ : Necessidade;
- $D$ : Disposição (Vontade);
- $C$ : Competência (Capacidade).

Os parâmetros representam processos que afetam a dinâmica do sistema no ciclo durante a modelagem. Não serão utilizados todos os parâmetros presentes no sistema acima. Os que serão usados, serão explicitados e definidos no capítulo 4.

Esse modelo apresenta dois pontos de equilíbrio no espaço das variáveis  $(N; C; D)$ . Um deles é a origem do sistema de coordenadas, que é um ponto instável, com essa instabilidade ocorrendo no sentido da necessidade. E o outro ponto ocorre no primeiro quadrante, sendo esse um ponto estável.

Os pontos de equilíbrio são importantes por permitirem uma situação em que o indivíduo estará com um padrão de comportamento previsível quanto a os valores da necessidade que permita um acompanhamento mais confiável (Lins, 2004).

## 3 O CAPITAL HUMANO

### 3.1 Introdução

A importância do capital humano como fonte do progresso e crescimento econômico já é há muito tempo reconhecida na literatura econômica. Adam Smith foi o primeiro economista clássico a incluir o capital humano na sua definição de capital. Ele incluiu no estoque de capital de uma nação as habilidades e talentos adquiridas pelos seus habitantes, pois habilidades humanas incrementam o bem estar social da mesma forma que incrementam o bem estar de cada indivíduo separadamente. O conceito de capital humano foi esquecido pelos economistas até o seu renascimento no início dos anos 60 com os trabalhos de Gary Becker; Theodore W. Schultz e J. Mincer. Esses economistas retomaram este conceito reafirmando sua ligação com o crescimento econômico e enfatizando sua importância na explicação das diferenças de renda. Um modelo apropriado que incorporava o capital humano como um fator de crescimento econômico foi proposto por Paul Romer e Robert Lucas e pelos novos modelos de crescimento endógeno. Estes estimularam o interesse dos economistas pelo capital humano como um fator determinante do crescimento econômico. Em alguns desses modelos, o capital humano induz o crescimento atuando sobre o crescimento tecnológico e aumentando a produtividade da força de trabalho. Por exemplo, um grande estoque de capital humano permite um país menos desenvolvido convergir mais rápido para o nível de renda de países desenvolvidos por meio da captação de tecnologia internacional ou capacidade de desenvolver tecnologia semelhante baseada nela (Laroche, 1999).

O aparecimento da teoria endógena do crescimento veio no mesmo momento em que as mudanças tecnológicas estão continuamente modificando as operações de produção. Estas mudanças juntamente com a globalização dos mercados, estão transformando países industrializados em economias que conduzem a produção do conhecimento. Esse deslocamento de economias baseadas em recursos para economias baseadas em conhecimento tem colocado o capital humano como um dos principais temas das políticas econômicas públi-

cas. No entanto, medidas de investimento existentes não permitem que os planejadores de políticas públicas compreendam completamente as implicações do capital humano na performance da economia e no avanço tecnológico. Sendo assim, torna-se essencial definir formas para medir o capital humano, e que sua especificação em modelos de crescimento econômico reflita suas características mais importantes.

Dessa forma tenta-se analisar de perto as interações entre capital humano, políticas de investimento e crescimento, em uma economia baseada em conhecimento.

## 3.2 Definindo o Capital Humano

O capital é tipicamente definido como bens de produção usados na produção de outros bens e serviços. Na teoria neoclássica da firma, o capital é um dos fatores de produção e representa o estoque de investimento prévio feito na economia, o qual por sua vez, requer a substituição do consumo atual pelo consumo futuro. Os agentes econômicos adicionam parte do produto ao estoque de capital pela redução do consumo, esperando aumentar o consumo futuro (Laroche, 1999).

Já o capital humano é definido como o direcionamento de investimento em atividades relacionadas com educação, saúde, treinamento no trabalho, e outras atividades que desenvolvam a produtividade de um indivíduo no mercado de trabalho. Pode-se ainda definir capital humano como o conjunto das habilidades inatas, do conhecimento e das ferramentas que os indivíduos adquirem ao longo de sua vida. Alguns autores incluem na definição do capital as habilidades inatas dos indivíduos, representando o potencial intrínseco que estes possuem para a aquisição de conhecimento e novas ferramentas de trabalho. Podem ser consideradas como as capacidades físicas, intelectuais e psicológicas que os indivíduos possuem no momento em que nascem (Laroche, 1999). Habilidades adquiridas com o tempo representam uma atualização desse potencial e um acréscimo de novas habilidades, na maioria das vezes requerendo um grande esforço pessoal e custos financeiros. As formas através das quais o trabalhador tem acesso a esse conhecimento são bastante variadas, como por exemplo, transferência internacional de conhecimento por meios de comunicação e divulgação específicos como revistas científicas, contatos pessoais, experiência profissional, treinamentos no trabalho, educação formal e outras atividades sociais.

Uma vez que o conhecimento que um indivíduo adquire ao longo de sua vida depende em parte da sua capacidade inicial, o potencial do indivíduo é um aspecto importante no conceito de capital humano.

Laroche (1999) sugere cinco aspectos para uma definição ampla de capital humano, que são discutidos a seguir.

Primeiramente, capital humano é um bem não comercializável. Seja inato ou adquirido, habilidade ou conhecimento, ele é parte do ser humano, não pode ser transferido de uma pessoa para outra da mesma forma que um bem tangível.

Segundo, os indivíduos nem sempre controlam os meios através dos quais eles adquirem capital humano nem a velocidade com que isso ocorre. Quando crianças, eles não tomam decisões racionais sobre suas necessidades em capital humano, nem são capazes de alcançar todo o potencial de suas habilidades inatas. Conseqüentemente, durante os primeiros anos de vida, decisões que dizem respeito a investimentos em educação e saúde não são tomadas pelos próprios indivíduos, mas pelos familiares, professores, entidades governamentais, e pela sociedade como um todo através das instituições de ensino. À medida que os indivíduos se tornam capazes de tomar suas próprias decisões, eles passam a administrar o processo decisório de investimento em capital humano. Mesmo assim, a influência dos parentes e do ambiente onde os indivíduos estão inseridos é fundamental para esse processo, pois investimentos futuros em capital humano dependem fortemente dos investimentos feitos até o momento presente.

Terceiro, o capital humano tem aspectos qualitativos da mesma forma que aspectos quantitativos. Ou seja a qualidade do processo pelo qual o indivíduo obteve o conhecimento e os valores ao longo da vida também é importante. O investimento em capital humano não é homogêneo na sua qualidade.

Quarto, o capital humano obtido pode ser específico ou de aplicabilidade mais geral. Sob esse aspecto entende-se por capital humano geral, o conhecimento e as habilidades que são passíveis de uso em uma variedade maior de atividades e podem ser transferidos de um indivíduo para outro sem grande perda de valor. E é específico se ele pode ser usado em apenas um número pequeno de atividades e o fim da atividade a que ele se destinava, seja por perda das relações de empregabilidade entre a firma e trabalhador ou outro motivo

qualquer, implica numa perda considerável de valor que só pode ser recuperada com novos investimentos e novos custos.

Finalmente, a definição de capital humano também considera a noção de efeitos de externalidade. Estes efeitos representam transbordamentos dos benefícios da educação. Esse transbordamento leva em conta a influencia que os indivíduos têm na produtividade dos outros e no capital físico, da mesma forma que indivíduos serão mais produtivos, qualquer que seja seu nível de conhecimento, em um ambiente onde as pessoas têm um grau elevado de conhecimento. O capital humano também gera o que pode ser chamado de externalidades sociais. Estas externalidades representam transbordamentos dos benefícios de se obter esse conhecimento, que são captados por outras pessoas. Incluem, dentre outras coisas, um aumento na utilidade por se viver em uma sociedade, liberdade de expressão e de pensamento, uma grande variedade de expressões literárias e meios de comunicação, possibilidade de indivíduos viverem em uma sociedade cujos membros compartilham objetivos comuns. As ações para objetivos comuns, por sua vez, realça a confiança mútua entre indivíduos e aproxima as instituições sociais. O conjunto de todas estas externalidades é denominado de capital social.

Para a maioria das pessoas a palavra capital traz a idéia de conta bancária, ações na bolsa de valores, imóveis, etc. Todas estas são formas de capital no sentido que são recursos pessoais que geram renda e outros retornos ao longo do tempo. Mas essas formas tangíveis de capital não são as únicas. Anos de escolaridade, cursos de especialização, gastos com cuidados médicos ou palestras sobre bons modos e virtudes da honestidade são também formas de capital. Isso por que elas levam a um aumento na renda individual, no estado de saúde, ou dão às pessoas bons hábitos que serão úteis durante toda a vida delas. Por isso os economistas se referem a gastos com educação, treinamento, saúde, e assim por diante, como investimento em capital humano. Uma vez que os investimentos em educação têm efeitos no estado de saúde, ajuste do trabalhador ao mercado de trabalho, convívio social, etc, a prioridade dos investimentos deve ser no setor educacional. São chamados de capital humano por que as pessoas não podem ser separadas do seu conhecimento, habilidades, saúde ou valores da mesma forma que podem ser separadas dos seus bens e ativos financeiros.

Educação e saúde são as formas mais importantes de investimento em capital humano. Muitos estudos mostram que a conclusão do ensino médio e curso universitário nos Estados Unidos aumentam bastante a renda individual dos habitantes, mesmo descontando os gastos diretos ou indiretos com a educação ou considerando o fato que pessoas com maior nível de escolaridade tendem a ter um maior QI e parentes mais ricos e educados. Evidências similares são disponíveis atualmente para longos períodos de tempo e para outros países com diferentes culturas e sistemas econômicos. Os ganhos de indivíduos mais instruídos são quase sempre acima da média, e mais ainda, esses ganhos são geralmente maiores em países menos desenvolvidos (Becker, 2005).

Claro que educação formal não é o único meio de investir em capital humano educacional. Trabalhadores também aprendem e são muitas vezes treinados fora das escolas, principalmente nos empregos. Mesmo os profissionais graduados não estão completamente preparados para atender ao mercado de trabalho, e são inseridos nesse meio por intermédio de programas de treinamento formais e informais. Não que isto represente, necessariamente, uma deficiência do setor educacional. Muitas vezes estes programas de treinamento se destinam a fornecer ao profissional, habilidades e conhecimentos específicos para um determinado ramo de atuação, ou dar uma visão global dos empreendimentos da empresa, em virtude dos cargos ele pode vir a assumir. O curso de graduação seria um pré-requisito para a carreira, mas o treinamento se soma a esses conhecimentos, dando uma formação profissional mais sólida ao trabalhador. O tempo gasto nesses tipos de treinamento pode variar bastante, representando uma importante fonte de capacitação responsável em grande parte pelo aumento da renda dos trabalhadores.

Vale salientar que nenhuma discussão que diga respeito ao capital humano pode desconsiderar a influência das famílias na captação e consolidação do conhecimento, das habilidades, dos valores e hábitos das crianças. Os parentes exercem grande influência no processo educacional, da mesma forma que na formação do caráter, opção por costumes e muitas outras características da vida de uma criança.

A atitude da família parece ter uma relação muito forte com a renda, a educação e ocupação dos filhos e outros parentes. Mesmo assim é surpreendente que a relação entre a renda dos pais e dos filhos não seja muito forte enquanto que a relação entre os anos de

escolaridade dos pais e dos filhos seja significativa (Becker, 2005).

### 3.3 A Importância do Capital Humano

O investimento em capital humano representa uma forma pela qual os indivíduos podem investir neles mesmos expandindo a gama de oportunidades profissionais disponíveis para eles. Sendo portanto uma forma de os indivíduos aumentarem o seu bem-estar. Esse conhecimento e habilidades que possuem valor econômico são em grande parte produto do investimento, e combinados com outras formas de investimento em capital humano, são determinantes para a superioridade produtiva dos países mais desenvolvidos (Schultz, 1961).

Existem alguns aspectos chave que precisam ser mantidos pelas nações que pretendem sobreviver no sistema político econômico internacional, e um deles é o capital humano. Há uma forte correlação positiva entre o capital humano da população (o conjunto de habilidades que tornam o indivíduo mais importante na estrutura de mercado) e performance positiva social ou econômica das nações. Por isso algumas das principais questões das nações em desenvolvimento dizem respeito a como definir, cultivar e sustentar o capital humano necessário para o desenvolvimento (Diasmer, 2004).

O mercado de trabalho moderno, que valoriza o domínio de ferramentas gerenciais, tecnologia de automatização, etc., tem uma grande demanda por força de trabalho com adequados níveis educacionais, principalmente nos países em desenvolvimento. O baixo custo da força de trabalho não é mais um fator essencial para atrair investimentos. À medida que a diferença entre os custos da força de trabalho e dos equipamentos se tornam menos importantes nas decisões de alocação de recursos intensivos em tecnologia, o capital humano da força de trabalho se torna de importância cada vez maior (Diasmer, 2004).

O crescimento contínuo da renda *per capita* em muitos países durante o século 19 e 20 é devido em parte ao desenvolvimento científico e tecnológico que aumenta a produtividade da força de trabalho e outros insumos produtivos. E também à crescente dependência da indústria por tecnologia e conhecimento avançado, tornou maior a demanda por educação, conhecimento técnico, treinamento profissional e outras formas de capital humano.

É claro que os novos avanços tecnológicos são de pequeno valor para países que não

possuem uma força de trabalho preparada para usa-los. O crescimento econômico depende muito da interação entre geração de conhecimento e capital humano, que é o motivo pelo qual a maior procura por educação e treinamento tem acompanhado os avanços tecnológicos em todos os países que têm alcançado um crescimento econômico significativo (Becker, 2005).

Fenômenos do crescimento econômico fora dos padrões como o Japão, Taiwan, e outras economias do continente asiático em décadas recentes ilustram a importância do capital humano para o crescimento. Com a falta de recursos naturais eles importam quase toda a energia que consomem, além de sofrer discriminação contra seus produtos de exportação pelo oeste. Estes países chamados de tigres asiáticos cresceram rapidamente se utilizando de uma força de trabalho esforçada, bem treinada, e possuidora de um padrão educacional elevado (Becker, 2005).

Uma força de trabalho detentora de capital humano atrai e encoraja o crescimento. Uma população adequadamente educada também deixa um efeito duradouro, economicamente com uma base de impostos maior e socialmente com um crescente envolvimento político. Então, investimento em capital humano deve ser parte de qualquer política econômica de desenvolvimento (Diasmer, 2004).

### 3.4 A Ligação do Capital Humano com Outras Formas de Capital

Tanto o capital humano quanto outras formas de capital melhoram a capacidade produtiva da sociedade. Além de melhorar a forma como as pessoas usam os recursos disponíveis a elas. Se existe uma criatura muito improdutiva, é um homem sem ferramentas e sem conhecimento. Exemplos históricos mostram mesmo que sem o capital humano, o capital não humano poderia não existir. O caso da roda, *e.g.*, é emblemático. O homem verificou que um objeto arredondado rolando pelo chão encontrava muito menos dificuldade, menos atrito, e exigia muito menos potência para movê-lo, quando comparado a um objeto com uma superfície de contato plana sendo arrastado.

### 3.4.1 Capital Humano e Capital Natural

O capital natural, definido como sendo formado pelos recursos naturais e o ecossistema mundial, e o capital humano, definido para incluir educação e saúde, estão ligados. Liste-se a seguir exemplos do impacto direto do capital humano no capital natural considerando apenas o capital humano educacional (Sharpe, 2001):

- Uma população com alto nível de conhecimento e habilidades pode expandir o capital natural a partir do descobrimento de novas reservas, explorando mais eficientemente as já existentes usando novas técnicas, e desenvolvendo substitutos para as reservas não renováveis;
- Uma população com alto nível de conhecimento e habilidades possui capacidade para desenvolver tecnologias e para lidar com problemas que ameaçam o ecossistema mundial;
- Mais ainda, a acumulação de capital humano provoca um crescimento na renda nacional, que fornece os meios para lidar com problemas ambientais, mesmo que a tecnologia não seja a mais adequada.

Pense-se, por exemplo, no caso específico de acumulação de capital humano educacional na área de energia solar como substituto para fontes convencionais de energia, tais como combustíveis fósseis. Esse investimento em educação e geração de conhecimento pode tornar essa forma de energia mais eficiente e reduzir o uso de combustíveis fósseis, contribuindo para a redução da emissão de dióxido de carbono e conseqüentemente para o aquecimento global (Sharpe, 2001).

### 3.4.2 Comparação Entre Capital Humano e Capital Físico

O capital humano é freqüentemente tratado em economia de forma similar ao capital físico. Aqui tenta-se evidenciar as diferenças entre capital humano e capital físico que são relevantes em políticas econômicas de economias baseadas em conhecimento. Capital humano e capital físico diferem com respeito a direitos de propriedade, acumulação, retornos, financiamento e potencial de comercialização<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Traduzido do termo *Marketability*

## Direitos de propriedade e potencial de comercialização

O capital físico é tangível, representa algo que pode ser facilmente visto ou tocado. Isso inclui maquinaria, fábricas, processos patenteados, matéria prima, inventários de produtores ou negociantes, meios de transporte e comunicação. Mais ainda, o capital físico pode ser facilmente vendido ou transferido de uma pessoa para outra. Como já foi dito antes, o capital humano não pode ser separado do ser humano, e os benefícios de adquiri-lo e mantê-lo são restritos ao indivíduo que o possui. Ao contrário do capital físico, o estoque de capital humano não é comercializável, apenas os serviços que resultam da sua utilização são bens negociáveis. Um contra-exemplo é a negociação de passes de jogadores de futebol.

## Acumulação

A acumulação de capital em dado período, independente da sua forma, pode ser definida como a diferença entre a produção de capital adicional e a depreciação do capital já existente. Entretanto, o processo pelo qual o capital humano e o capital físico são acumulados diferem com relação às tomadas de decisão, taxas de depreciação e tecnologia usada para a produção de cada tipo de capital.

1. O processo decisório na produção e acumulação de capital humano e capital físico envolvem decisões sob incerteza para indivíduos e para as firmas. Enquanto as decisões sobre capital físico são normalmente tomadas por investidores e administradores, a produção de capital humano envolvem decisões de diferentes agentes (que incluem educadores, parentes, etc) com respeito a vida de um indivíduo em particular. Essa dependência das decisões resulta do fato de que todo investimento em capital humano cresce com base no estoque de capital humano já existente. Ou seja, o investimento em educação depende fortemente do investimento feito até o momento, seja pelo montante ou pela qualidade do investimento. Se as habilidades de um indivíduo não foram adequadamente desenvolvidas na infância, então esse indivíduo pode encontrar sérias dificuldades para acumular capital humano durante a idade adulta (Laroche, 1999).

2. A acumulação de capital humano e de capital físico possuem importantes similaridades: para ambos os processos é necessário tempo e consumo correspondente a esse tempo para que haja crescimento na produção e do consumo futuros. A acumulação de capital humano porém apresenta um aspecto social que é bem menos presente na acumulação de capital físico. O capital humano é produzido e acumulado pelas interações com outros indivíduos e idéias, fazendo desse processo uma atividade social (Laroche, 1999). Essa característica inerente ao capital humano implica que o processo por meio do qual ele é produzido e acumulado é mais intensivo em mão-de-obra do que as atividades para acumulação de capital físico. Além disso, uma vez que o capital humano é formado pelas interações entre seres humanos, ele é sujeito a externalidades, que por sua vez, podem alterar drasticamente o processo de aprendizado e acumulação. Essa dimensão social do capital humano possui implicações importantes para políticas públicas relacionadas com instituições tais como famílias e outras organizações sociais.

Da mesma maneira que o capital não humano, o capital humano exige um longo período de “construção”. No caso do capital humano, esse período é, tipicamente, muito mais longo. Onze anos é o período mínimo para se completar o ensino fundamental e o ensino médio, ou técnico. Some-se a isso mais quatro, cinco ou seis anos para um curso superior. Tem-se portanto, no mínimo, uns quinze anos. A competitividade existente hoje no mercado de trabalho exige uma formação no nível de pós-graduação. Tem-se então mais um ano, para o caso de uma especialização, mais dois anos para um mestrado e mais quatro anos para um doutorado. Se o curso de graduação for de quatro anos e não se fizer nenhuma especialização, ter-se-á um total de pelo menos 21 anos na “construção” desse capital humano, se se quiser atingir o doutorado (o mestrado é mandatório para se iniciar um programa de doutorado). Uma seqüência mais “completa”, levará uns 24 anos. É esta longa gestação, associada ao longo período de retorno, que torna a taxa de juros um fator importante na análise da dinâmica do crescimento do capital humano de uma nação.

O capital humano e capital físico também diferem fortemente com relação a mobilidade. Uma vez que o estoque de capital humano é não negociável, sua mobilidade

depende da capacidade do detentor desse capital em se movimentar e se adaptar a mudanças, bem como restrições sob a movimentação nacional e internacional de mão-de-obra.

O capital físico tende a estar concentrado em bens e serviços que são negociáveis, tais como bens de manufatura. Capital humano é usado mais em indústrias tais como as do setor público e nas indústrias de serviços, que negociam menos nos mercados mundiais. Então o processo pelo qual a sociedade adquire capital humano e capital físico difere com respeito à intensidade, mobilidade e especialização (Laroche, 1999).

3. O tempo provoca a depreciação do capital físico tanto quanto do capital humano. O capital humano também se deprecia à medida que é consumido ou utilizado. O capital humano também se deteriora quando ele é usado de forma errada ou não é usado, uma vez que a inatividade danifica as habilidades adquiridas pelos indivíduos ao longo da vida. Entretanto, esse processo pode ser parcialmente revertido, quando o capital humano é novamente colocado em uso.

Da perspectiva do investidor, o capital humano deprecia-se acentuadamente no momento da aposentadoria e é reduzido a zero com a morte do indivíduo. Entretanto, pela perspectiva da sociedade, a morte do indivíduo que investiu em capital humano não representa uma perda total daquele capital na medida que parte do seu conhecimento pode ter sido transmitido para outras gerações pelo convívio social e pela produção de bens, serviços e idéias anteriores a morte do indivíduo. O que ressalta a importância de escrever e deixar registrado o conhecimento adquirido ao longo da vida.

Essa característica não se aplica ao capital físico uma vez que é sempre possível vender ou transferir capital físico de uma pessoa para outra. Quer dizer, o indivíduo pode morrer, mas os bens que ele adquiriu ou construiu são passados para outras pessoas ou instituições. Já o conhecimento adquirido por ele não pode, a menos que ele deixe registrado o que aprendeu, seja impresso ou na memória das pessoas.

Então, como já foi dito, ambos os tipos de capital tendem a se depreciar e a depreciação mais definitiva para o capital humano é, naturalmente, o envelhecimento

e a conseqüente saída de cena. Entretanto, note-se que a idade cronológica para se considerar o fenômeno do “tornar-se velho” vem progressivamente aumentando, haja vista os avanços da medicina e as recomendações para que o indivíduo trabalhe até, se possível, o final da vida. Há todo um ciclo que deve ser levado em conta. Existe, entretanto, um tipo de depreciação que começa a operar assim que se aprende alguma coisa. Trata-se do esquecimento. Ele opera, inclusive, num prazo relativamente curto.

A depreciação do capital humano ocorre também devido à obsolescência. A todo instante novos conhecimentos são produzidos, o que reduz o valor do conhecimento existente. Basta olhar-se para o vertiginoso avanço da eletrônica, com seus computadores e sistemas automáticos. A maneira de se fazer as coisas vem mudando com uma velocidade cada vez maior. A obsolescência faz com que seja necessário para a maioria das pessoas continuar estudando até o fim de suas vidas. Um professor universitário, por exemplo, precisa gastar uns 20 a 25% do seu tempo aprendendo e se atualizando.

### **Financiamento**

Investidores estão mais interessados em emprestar dinheiro para investimento em capital físico do que em capital humano pois esse tipo de capital é comercializável dando garantia ao investimento. Capital físico pode ser facilmente apoderado, vendido, dividido em sociedade, transferido por herança. Enquanto que o capital humano é intangível e não pode ser desassociado do seu detentor. Isso torna o financiamento privado para aquisição de capital humano difícil de ser obtido. Essas falhas do mercado para financiamento privado do capital humano combinado com as restrições de liquidez resultantes das desigualdades de renda e uma baixa propensão para financiamento dos investimentos educacionais levam a um baixo estoque de capital humano da população. Para reduzir esses efeitos da desigualdade na renda, falhas no mercado de financiamento e suas conseqüências para o desenvolvimento, o governo estabelece programas para financiamento do investimento em capital humano. Por exemplo, os governos financiam investimentos em educação por meio de taxas de matrícula mais baixa, empréstimos e bolsas de estudo.

O financiamento educacional pode ser visto sob três pontos de vista: por um lado, quem paga pela educação coletivamente é o estado que gerência e controla o sistema educacional como um todo e incentiva o processo por meio de programas de financiamento, etc. Por outro tem-se que uma geração, que são os pais dos indivíduos, paga pela seguinte. E tem-se ainda um pagamento imediato representado pelos gastos do indivíduo diretamente envolvido no processo educacional.

## **Retornos**

Os retornos decorrentes dos investimentos em capital humano e capital físico tendem a ocorrer de forma diferente. Quando indivíduos investem em capital físico eles aceitam os retornos determinados pelo mercado e não podem influenciá-los. Já o capital humano tem uma perspectiva de longo prazo que garante bons retornos para investidores jovens, por que eles possuem um horizonte mais longo durante o qual podem colher os benefícios do investimento em educação. Além disso o investimento prévio traz retornos por facilitar o aprendizado futuro e conseqüentemente o investimento futuro.

Dada essa característica de longo prazo e a ausência de mercados para o estoque de capital humano, indivíduos que investem nesse capital terão como retorno os ganhos decorrentes dos serviços gerados pelo uso desse capital. Como uma conseqüência, os retornos do investimento em capital humano são mais variáveis entre os investidores do que os retornos em capital físico. Variáveis no sentido que apresentam uma maior variância entre os indivíduos, sendo menos previsíveis.

Sendo assim, conclui-se que ambos os capitais se pagam depois de um longo período de tempo. De fato, note-se que, para a maioria das pessoas, o retorno do investimento em educação leva de 30 a 40 anos ou mais. Um indivíduo começa a estudar, por exemplo, com três ou quatro anos de idade. Se tudo der certo, ele conclui um curso superior com 23 ou 24 anos de idade. Apenas em casos raros é que, diga-se, em cerca de cinco anos a sua produção vai compensar todo o investimento educacional. Na maioria dos casos, tipicamente, demora muito mais. Uma das conseqüências desse longo período de retorno é que ele introduz uma grande quantidade de incerteza no processo. Uma questão que naturalmente atormenta os alunos de qualquer área é se o emprego para o qual ele está

se preparando estará disponível quando ele se formar. Pior ainda se se pensar em 20 anos mais à frente. Há pois, que se pensar em um programa contínuo de educação, ao longo da vida; a chamada *educação continuada*. Quando se está no ensino fundamental ou no ensino médio, é praticamente impossível predizer que tipo de emprego ou ocupação virá. Pode-se inclusive ter a expectativa, mais realista, pelo menos numa economia mais dinâmica, de que se vai mudar de emprego ou ocupação várias vezes ao longo da vida. Advém daí a vantagem de se fazer um curso superior, onde se vai adquirir novos *skills*<sup>2</sup> que facilitarão o aprendizado para encarar novos empregos e se adaptar melhor aos novos ambientes.

Outra conseqüência desse longo período de retorno é a necessidade de descontar os futuros retornos. Assim, um real que se vai ganhar daqui a 40 anos, descontado (de volta para hoje) a uma taxa de juros de 6% ao ano vale menos do que 10 centavos hoje. Este raciocínio permite que se tenha uma idéia da dificuldade de um jovem, por exemplo, ou um pai ou mãe de família, em decidir-se por um retorno bem no futuro, haja vista a sua demanda, no presente, pelos seus recursos, para adquirir alimentos, roupas, um carro, viajar, etc.

A seguir comenta-se cada um desses tópicos de forma mais detalhada focando mais no aspecto educacional, com alguns dados.

### 3.4.3 A Formação do Capital Humano

O capital humano resulta, na sua maior parte, da educação formal fornecida por colégios, escolas técnicas e vocacionais, faculdades e universidades. Não é necessário que toda a escolaridade seja proveniente desse arranjo. Muito do aprendizado ocorre no trabalho (emprego), seja em programas dirigidos para este fim, seja por intermédio do que se chama *learning by doing* (fazendo e aprendendo).

Em alguns casos tem-se o chamado *self-made man*, mas é mais raro. Não obstante toda a crítica aos sistemas tradicionais, que operam dentro do esquema *magister-discipulus*, é realmente muito raro o indivíduo que possa dominar uma área ou corpo de conhecimento

---

<sup>2</sup>Essa palavra, em inglês, é a que expressa melhor o conceito que se quer explicitar aqui. Em português não há uma tradução direta e exata. No contexto de educação a melhor substituição seria *competências*. Ela inclui aspectos semânticos de habilidade, jeito, perícia, traquejo, experiência, destreza e expertise.

por ele mesmo; o autodidata. A esmagadora maioria das pessoas requer alguém que diga o que elas devem estudar, o que é importante estudar, como estudar, etc. Esta é a função mais valiosa de um professor.

Emerge do processo educacional, naturalmente, dois tipos de retorno: o pessoal e o social.

### 3.4.4 Os Retornos do Investimento em Educação

Embora se saiba que os retornos do investimento em educação se refletem em mais do que simplesmente nos retornos monetários, é fundamental que se tenha uma medida dos custos e dos retornos do investimento em capital humano ou educacional. Se se puder ter uma certeza de que educação é de fato, sob a ótica estritamente monetária, um bom investimento, então poder-se-á estar certo de que será um investimento ainda melhor em termos não monetários. Os dados de pesquisas já permitem que se enxergue alguma coisa nessa direção (Silva, 2004).

#### O Retorno Pessoal da Educação

Distingue-se dois componentes do retorno pessoal da educação: os monetários e os não monetários. Os ganhos monetários referem-se ao aumento do poder aquisitivo que pode-se obter com anos adicionais de escolaridade. A figura 3.1 mostra os resultados de algumas pesquisas realizadas pelo grupo de engenharia de sistemas, na cidade do Recife (Souza, 2004). A base de dados levantada teve como critério de amostragem a condição de que os indivíduos devem possuir um carro ou viver na mesma casa com alguém que possua um carro. Os dados não representam a distribuição de renda da população do Recife como um todo, mas mesmo assim indicam que existe uma relação da renda com a educação.

A tabela 3.1 seguinte mostra uma estatística descritiva com média da renda e desvio padrão para cada categoria associada a uma faixa do nível de instrução.

Como pode ser notado pelo gráfico, a renda individual aumenta com o aumento do nível de instrução. A linha indica uma tendência exponencial nesse crescimento. Este poder aquisitivo aumentado decorre em grande parte de um ou ambos dos fatores:

- Um aumento na capacidade produtiva do indivíduo;

Tabela 3.1: Relação entre renda individual média e nível de instrução.

Nível de Instrução (Categoria)	Média	Desvio Padrão
1º Grau Menor (1)	833, 3333	662, 2662
1º Grau Maior (2)	1050, 926	1177, 951
2º Grau (3)	1110, 068	1445, 684
Curso Técnico (4)	1564, 655	1547, 129
Curso Superior (5)	2503, 546	2197, 718
Especialização (6)	3758, 427	2574, 032
Mestrado (7)	4475, 410	3149, 638
Doutorado (8)	4767, 857	3210, 175

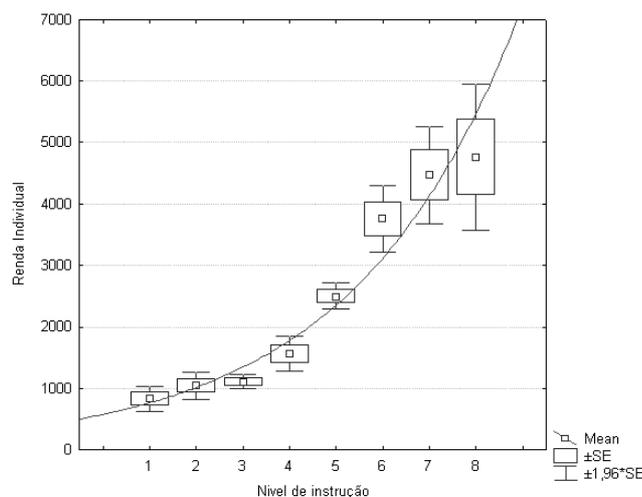


Figura 3.1: Renda individual versus nível de instrução.

- A capacidade de conceber e produzir novos bens ou serviços que são mais valorizados pela sociedade.

Outros estudos desenvolvidos pela Casa de Passagem do Recife, com participação da Vade Mecum Consultoria mostram mais resultados nesse sentido. A amostra usada era de 1635 pessoas jovens representantes de populações de baixa renda no Recife. Todos os indivíduos estudaram em escolas públicas. Apenas 16% dos indivíduos tinham um emprego formal. A idade média era de 15,9 anos ( $\pm 2,57$ ) e o atraso na escolaridade,  $\pm 3,7$  anos ( $+ - 2,43$ ). Os resultados na tabela abaixo mostram a renda média pela escolaridade:

Há que se decidir cuidadosamente o investimento na formação. Ninguém deve se deixar enganar por qualquer curso que seja oferecido, seja de graduação ou MBA, ou outro qualquer. É preciso se informar sobre todos os aspectos antes de se tomar uma

Tabela 3.2: Relação entre renda e nível de instrução.

Nível de Instrução	Renda em R\$
1º Grau Menor	101
1º Grau Maior	119
2º Grau	172

decisão e ir em frente. Daniela D' Ambrosio, na Revista MeuDinheiroOnline (Quinta-feira, 27 de setembro de 2001 – 21h54) (Até que ponto vale a pena investir uma fortuna num diploma), diz que:

*“Com a ilusão de conseguir um lugar garantido no mercado de trabalho, muita gente paga qualquer preço para encher o currículo de títulos.”*

A autora tece considerações interessantes sobre o assunto, relata alguns casos e apresenta umas tabelas, reproduzidas a seguir nas tabelas 3.3, 3.4, 3.5, apenas para dar uma idéia das grandezas envolvidas. Segundo ela, o valor gasto no curso garante um retorno mais lento ou mais rápido de acordo com o total investido e o salário estimado após o término do curso.

Tabela 3.3: Cursos técnicos. O retorno dos cursos técnicos é rápido.

Curso	Preço Total do Curso (1) (em R\$)	Salário Inicial (2) (em R\$ por mês)	Salários Necessários para Pagar o Curso
<i>Design</i> de Interiores	3.740 (837 horas)	800	4,7
Enfermagem	4.200 (1815 horas)	1.000	4,2
Gestão Ambiental	4.050 (360 horas)	700	5,7
Gestão de Serviços de Saúde	3.406 (900 horas)	900	4,7
Hemoterapia	3.825 (1.300 horas)	1.200	3,2
Hotelaria	4.140 (1.048 horas)	900	4,6
Informática	3.910 (1.000 horas)	1.200	3,2
Moda	3.600 (800 horas)	800	4,5
Segurança do Trabalho	4.400 (1.200 horas)	1.200	4,2
Turismo	3.600 (1.024 horas)	1.000	3,6

(1) Cursos oferecidos pelo SENAC. O preço pode variar conforme a cidade e as vagas disponíveis.

(2) Salário médio inicial recebido pelos profissionais ao final do curso técnico, segundo o SENAC.

A contribuição da educação para o aumento da produtividade parece vir, pelo menos em parte, de um incremento na habilidade de organizar e usar recursos eficientemente,

Tabela 3.4: O retorno dos cursos de graduação.

Curso	Instituição	Preço Total do Curso (em R\$)	Salário Inicial (1) (em R\$ por mês)	Salários Necessários para Pagar o Curso
Administração	Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)	49.968 (quatro anos)	1.500	33,3
Arquitetura	PUC – Campinas	58.890 (cinco anos)	1.700	34,6
Direito	PUC – SP	42.600 (cinco anos)	1.200	35,5
Engenharia	Fac. Engenharia Industrial (FEI)	40.440 (cinco anos)	1.700	23,7
Hotelaria	Faap – SP	48.000 (quatro anos)	1.100	43,6
Jornalismo	Cásper Líbero (SP)	20688 (quatro anos)	1.500	13,7
Medicina	Santa Casa (SP)	108.000 (seis anos)	1.500	72,0
Odontologia	PUC – RS	66.630 (cinco anos)	1.200	55,5
Psicologia	PUC – SP	48.540 (cinco anos)	800	60,7
Publicidade	ESPM (SP)	38.880 (quatro anos)	1.000	38,8

(1) Valor pago no mercado, segundo a edição 2001 do *Guia do Estudante* da Editora Abril.

principalmente um recurso extremamente escasso que é o tempo. Ninguém mais do que o estudante sabe apreciar a importância do tempo. Com duas provas pela frente e um trabalho de fim de disciplina para entregar, ele é forçado a fazer valer cada minuto. Pelo menos do ponto de vista do estudante, a experiência adquirida em alocar eficientemente o tempo é uma das vantagens mais importantes de uma educação superior, da vida numa faculdade ou universidade. A educação também melhora a produtividade por habilitar o indivíduo a aceitar mais prontamente as novas tecnologias que vão aparecendo e usá-las mais efetivamente. Observa-se, na visão do autor, que as pessoas mais educadas, com mais formação, possuem uma maior capacidade para o autodidatismo e para adaptar-se

Tabela 3.5: O retorno dos cursos de MBA.

Curso	Investimento Total no Curso (em R\$)	Salário Inicial (1) (em R\$ por mês)	Salários Necessários para Pagar o Curso
Harvard Business School (EUA)	482.500 (2)	13.000	37,1
Columbia University (EUA)	410.000 (2)	10.000	41,0
London Business School	355.000 (2)	9.000	39,6
Insead (França)	252.500 (2)	9.000	39,4
IMD (Suiça)	277.500 (2)	7.500	37,0
University of Texas (EUA)	297.500 (2)	7.000	42,5
FGV (SP)	49.128	7.000	7,0
Fundação Dom Cabral (MG)	19.800	6.500	3,0
ITA/ESPM (SP)	31.200	6.500	4,8
Coppead/UFRJ (RJ)	18.400	6.500	2,8

(1) Salário médio recebido pelos profissionais no Brasil ao final do MBA, segundo a estimativa de *headhunters*.

(2) Valor total do curso de dois anos fornecido pelas faculdades com o dólar cotado a R\$ 2,50. Inclui passagem, moradia, alimentação e despesas com livros.

a novas situações. Esta característica é particularmente importante quando se trata de tecnologia que requer *skills* novos, ou diferentes.

Comparando-se os produtos de uma sociedade moderna, industrializada e avançada, que tem uma alta proporção de indivíduos educados, com os de uma sociedade tradicional, fica fácil de enxergar o efeito da educação nos tipos de bens e serviços que são produzidos. Os produtos de uma sociedade tradicional, atrasada, tende a ser limitada a um estreito conjunto de itens de baixa qualidade, a maioria dos quais pode ser enquadrada na categoria de necessidades. Os produtos de uma sociedade com um maior índice de educação são de uma qualidade mais alta, e são muito mais diversificados. Para um indivíduo educado, o mundo seria mesmo muito insípido se a educação resultasse apenas numa maior produção de bens tradicionais, como alimento, roupas e abrigo. Os retornos monetários, portanto, de uma educação adicional, advêm, pelos menos parcialmente, de uma incrementada habilidade em conceber e produzir bens e serviços novos e diferentes que são demandados por uma sociedade mais produtiva.

Existem, é claro, as exceções. Trata-se de indivíduos que abandonaram muito cedo os estudos e fizeram fortuna na vida. Mas não são mais do que isso: exceções. Quando se olha para o conjunto dos indivíduos, a devastadora maioria tem rendas que são função, essencialmente, do seu nível de instrução, com visto na figura 3.1. No Brasil, pelo menos, um indivíduo que não tem a educação básica, dificilmente rompe a barreira da pobreza.

Os retornos não monetários são valorados, pela maioria das pessoas, mais do que os ganhos monetários. Os retornos não monetários devidos à educação incluem:

- A utilidade (no sentido de (Von Neumann, 1944)) ou satisfação que uma pessoa auferir durante o período em que está estudando;
- O fluxo de longo prazo da satisfação aumentada que resulta durante a sua vida por causa da experiência educacional.

Poucos estudantes têm boas lembranças de provas e deveres de casa, mas a maioria deriva alguma satisfação por estar num ambiente educacional. As amizades sólidas que são construídas, as festas, os namoros, os eventos esportivos, os bons livros que são lidos, as trocas de experiências e mesmo o prazer de aprender, tudo isso dá uma satisfação imediata que não é medida em termos monetários. Esses retornos não monetários, no entanto, não ficam circunscritos ao período em que se esteve no ambiente educacional. Muitas das amizades que começaram nesse ambiente, duram por toda a vida. Muitas cara-metades são encontradas nesse ambiente. É o chamado *currículo invisível*. Facilitando uma percepção e um maior entendimento do mundo ao redor dele, a educação melhora sem dúvida a qualidade de vida do indivíduo. As escolhas tornam-se mais ponderadas e deliberadas, de base racional, e não por superstições ou medos. Pode-se dizer que os indivíduos passam a ter uma vida com mais sentido; com mais felicidade. Essas conseqüências podem ser medidas pela função utilidade de von Neumann e Morgenstern.

### **O Retorno Social da Educação**

Não é apenas o indivíduo que realiza os retornos de um investimento em educação. A sociedade como um todo também ganha. Estes ganhos são chamados, pelos economistas, de *retornos sociais* ou *externalidades*, *i.e.*, os benefícios que são externos ao indivíduo que recebe a educação.

No nível da família, o nível de instrução dos pais, especialmente o da mãe, tem alguns efeitos benéficos para as crianças. Esses efeitos incluem o alargamento da base cultural e a ampliação das oportunidades.

- Os filhos de pais com nível superior tendem, com mais verossimilhança, a ir para uma universidade, ou faculdade, do que aqueles cujos pais foram educados apenas até o ensino básico, ou mesmo até o ensino médio.
- Parece haver uma tendência no sentido de que pelo menos parte do conhecimento ganho pelos pais durante os seus anos de curso superior sejam transmitidos aos seus filhos.
- Crianças que desenvolveram uma apreciação a respeito da importância do conhecimento ganharam muito.

Pode-se argüir que, na comunidade como um todo, a instrução de indivíduos torna a comunidade, para todo mundo, um lugar melhor para se viver. Diminui, por exemplo, as chances de assalto, ou outros desvios de conduta social, em comunidades onde a grande maioria tem um alto nível de instrução (e conseqüentemente um alto nível de afluência). O nível de renda pode ser o fator importante nesta diferença, mas o fato de que a instrução propicia uma melhor renda é conhecido.

Um aumento do nível de instrução faz as pessoas suspeitarem menos umas das outras. A convivência, inerente aos círculos dos mais instruídos, com pessoas de diferentes *backgrounds* e gostos, faz com que os indivíduos sejam um pouco mais tolerantes com aqueles que possam ser diferentes num ou noutro aspecto.

Existe uma grande variedade de tipos de instrução e é natural esperar graus diversos de retorno social. Pode-se pensar, *e.g.*, que uma educação que desenvolva apenas *skills* técnicos, como, *e.g.*, programar um computador, calcular uma estrutura, ou reparar um osso quebrado, beneficiará primariamente a pessoa que recebe a instrução, pois será ela quem vai receber uma remuneração maior que pode advir da venda de serviços que exigem esses *skills*. Note-se, entretanto, que o indivíduo que compra esses bens ou serviços tornados possíveis pela educação, também se beneficia. Por outro lado, os benefícios sociais da educação podem ser maiores naquelas áreas de instrução que propiciam um maior

entendimento a respeito das pessoas e da sociedade, como as ciências sociais e humanas.

A magnitude do retorno social da educação de indivíduos é um ponto importante, pois leva diretamente à questão do financiamento da educação. Se os retornos sociais são importantes para a sociedade, então esta deve pagar pelo menos uma parcela do custo de educar um indivíduo (todos os indivíduos!); é o caso do ensino público em todos os níveis: básico, médio ou técnico e superior. Há que se ter uma visão crítica de como “funciona” o ensino público brasileiro. O que se tem visto é que, tipicamente, o ambiente do ensino público é palco de greves, atividades políticas espúrias, sindicalismos, etc., na maioria dos casos causando prejuízos individuais e sociais. Trata-se aqui de ajustar os interesses dos agentes econômicos envolvidos. Ora, se a sociedade recebe algum benefício, por causa da educação de um indivíduo, acima daquele recebido por este, ela terá que pagar parte das despesas educacionais do indivíduo para que este esteja disposto a investir um ótimo nele mesmo, sob o ponto de vista da sociedade. Por outro lado, se o indivíduo recebe todos os benefícios da sua educação, então este indivíduo deverá estar disposto a comprar a quantidade que forneça um retorno igual ao dos outros investimentos que ele poderia fazer.

Para se entender melhor essa questão do financiamento, é mister compreender-se um pouco a respeito da questão dos custos da educação. Uma referência, para o caso do ensino superior, é Sales (1995).

Tenha-se em mente que custos não significa preços ou dispêndios. É preciso não confundir as coisas. Trata-se de um conceito técnico preciso. Não faz nenhum sentido simplesmente dividir-se o gasto total pelo número de alunos de uma instituição.

### 3.4.5 O Financiamento da Educação

Na maior parte dos países, uma fatia substancial dos gastos com educação é assumida pelo governo; *i.e.*, pelos impostos pagos pelo povo. A razão para isto deve-se à uma característica especial do serviço de educação; da função de produção educacional: as pessoas que comprem este serviço, ou seja, os estudantes, têm tido pouca, ou nenhuma, oportunidade de ganhar e poupar o suficiente para pagar por ele. Daí a importância da taxa de juros nos modelos econômicos dinâmicos. Poder-se-ia argumentar que atividades

de produção de alimentos infantis ou o serviço de pediatras, também apresentam essa característica, embora os seus benefícios tendam a ser mais certos e imediatos do que os retornos da educação. O que se está fazendo, pois, quando se usa os impostos (públicos) para financiar uma grande parte dos gastos em educação, é espalhar esses gastos ao longo de várias gerações, ao invés de concentrá-lo em uma ou duas gerações, isto é, nos pais dos estudantes e nos estudantes eles mesmos.

Uma alternativa ao ensino público e gratuito seria que os próprios pais ou famílias pagassem pela educação dos seus filhos. Na classe alta e na classe média alta isto é feito freqüentemente. Para a vasta maioria da população brasileira, no entanto, o gasto para adquirir 16 a 18 anos de educação para os seus filhos é proibitivo. O que provavelmente acontece é que os filhos de pais pobres se vêem condenados a uma vida de pobreza devido à incapacidade de comprar um meio de escapar dessa situação por intermédio da educação.

Uma segunda alternativa seria que os estudantes pudessem pedir emprestado o dinheiro necessário. No Brasil, existe o crédito educativo financiado pelo governo para o curso superior, mas num montante global muito pequeno, quando comparado ao que seria uma verdadeira solução. No setor de empréstimos privados não se conhece um tal sistema. Ademais, os alunos provavelmente estariam mais dispostos a endividar-se por, diga-se, um automóvel, do que por entrar num curso superior, ou mesmo técnico. Talvez porque um automóvel forneça uma imediata e mais certa satisfação à uma função utilidade, e no caso da educação, os retornos são incertos e distantes no tempo. Um banco prefere, provavelmente, emprestar dinheiro a alguém que queira comprar um carro ou uma casa, do que a um aluno que queira comprar uma educação. Se o indivíduo não puder pagar, o banco pode sempre reaver o bem, enquanto que no caso educacional isso não é possível. Poder-se-ia pensar, talvez, em meios legais para tornar esse sistema mais atrativo para os bancos (sem envolver diretamente garantias do governo, é claro).

De uma forma ou de outra vê-se que, se a comunidade deseja ver seus filhos adquirirem educação, não se pode prescindir de um substancial aporte de recursos governamentais, isto é, recursos provenientes de impostos pagos pelo povo. Há que se trabalhar bem, então, essa questão. A forma como essa participação do poder público vem acontecendo no Brasil é, para ser politicamente correto, desastrosa. Uma solução poderia ser a entrega

de vales para os alunos, que então escolheriam as suas escolas e instituições de ensino. Ter-se-ia portanto uma competitividade entre as escolas. O perigo são as “moedas paralelas”; a comercialização ilegal, como no caso de vales transporte e vales refeição. A moderna tecnologia digital poderia contribuir nesse sentido.

### As Despesas Pessoais da Educação

Como disse o economista Milton Friedman, *“There is no such a thing as a free lunch”*. Com a educação não é diferente. De fato, a educação torna-se cada vez mais dispendiosa; cara, como o sabe todo estudante e pai de família. As principais despesas com educação incluem:

1. Custos de oportunidade (o que se deixou de ganhar, *e.g.*, num emprego, enquanto se está estudando);
2. Matrículas, anuidades e mensalidades;
3. Livros e materiais escolares.

Nos países mais desenvolvidos, o custo de oportunidade é desprezível para um aluno no equivalente ao ensino básico ou início do ensino médio. No Brasil este custo não é desprezível, principalmente nas comunidades mais carentes. No meio rural ele é bem grande. Depois do ensino médio, mesmo nos países mais avançados, esse custo, quando o aluno entra num cursos superior, começa a ter impacto.

Mesmo que o aluno não sinta diretamente um aperto financeiro no que diz respeito a esses custos de oportunidade, eles devem ser levados em consideração quando se tem que decidir até que ponto se vai continuar no sistema educacional. Na verdade trata-se apenas de decidir a trajetória no sistema ao longo da vida, pois estudar sempre é preciso.

Matrículas e mensalidades são bem conhecidas, mas esse tipo de despesa não para por aí. Há que se considerar itens como morada, transporte, alimentação, etc., embora estes itens estejam presentes mesmo que o indivíduo não esteja no sistema educacional. Mas há diferenças de valores. A vida estudantil é, em geral, mais frugal.

## As Despesas Públicas da Educação

Do ponto de vista da sociedade como um todo, todas as despesas privadas com educação consideradas na seção anterior, devem, naturalmente, ser uma parte da despesa educacional total que a sociedade deve sustentar. A operação de colégios e instituições de ensino superior, financiadas, em parte, pelas mensalidades (quando não totalmente, no caso do ensino público), a produção de livros e materiais escolares, e a perda de ganhos durante os anos escolares, tudo isso envolve o uso de recursos que poderiam ser usados para se produzir outras coisas, se não fossem usados para produzir educação.

Mesmo nas instituições privadas americanas, por exemplo, as anuidades nem de longe cobrem as despesas operacionais de uma instituição. Nos Estados Unidos há uma grande variação nos valores das anuidades, mas o governo sempre entra com recursos. Existem também as doações e outras fontes de financiamento (serviços, etc.). O fato é que o custo de um estudante é sempre bem maior do que aquilo que ele paga. Educação é um bem muito caro. Mais caro ainda, para a sociedade, é viver sem ela.

## 3.5 O Capital Humano nas Organizações

O patrimônio de uma empresa compreende muito mais do que os ativos financeiros palpáveis, tais como imóveis, fábricas, equipamentos, capital físico, etc. Os verdadeiros agentes de uma empresa são as pessoas que trabalham nela e o conhecimento que elas possuem. Todos os ativos de uma organização são resultado de ações humanas, sejam estes ativos tangíveis ou intangíveis. Em última instância, todos dependem das pessoas para continuar a existir (Sveiby, 1997).

A competição e a evolução tecnológica tornaram o conhecimento e o tempo importantes diferenciais competitivos para as empresas. Hoje, com o desenvolvimento acelerado da tecnologia da informação, o processo de busca e disseminação do conhecimento nas organizações ficou extremamente facilitado. Com a velocidade e a interatividade da internet, o conhecimento pode ser adquirido e disseminado com mais facilidade. Basta que se promova um ambiente positivo que todos se sintam motivados a aprender e a multiplicar seu conhecimento. A base de desenvolvimento desse processo de busca pelo conhecimento

tem a formação do capital humano como fator determinante (Terra, 2000).

Essa facilidade de se adquirir conhecimento gera a necessidade de um gerenciamento maior por parte das empresas, no sentido de aliar a busca de conhecimento à busca de resultados. O conhecimento adquirido deve ser revertido em produtividade, qualidade e soluções inovadoras, para assim se constituir em um diferencial competitivo sustentável.

Nas organizações deve-se ver o conhecimento como uma ferramenta para obtenção de resultados a curto, e principalmente a longo prazo. E, portanto, o capital humano dos funcionários da empresa pode ser um fator determinante que leve uma empresa a se sobressair diante das suas concorrentes, conquistando importantes fatias de mercado.

### 3.6 Medição do Capital Humano

Uma vez que o capital humano é cada vez mais reconhecido pelos economistas e formuladores de políticas econômicas como um recurso chave para as economias modernas baseadas em conhecimento, torna-se essencial poder medir o estoque existente de capital humano bem como sua contribuição para o crescimento econômico. Entretanto, essas medidas são impedidas pela falta de habilidade dos clientes públicos em mensurar o investimento e a poupança, e em classificar gastos governamentais no contexto de uma economia baseada em conhecimento (Laroche, 1999).

Claramente, medidas de capital humano precisam levar em consideração aspectos mais amplos do que apenas a educação formal, tais como investimento em saúde, educação doméstica, música, etc. Mas, como a educação permanece no centro da formação do capital humano, uma medição do capital humano precisa partir de uma medição dos investimentos em educação.

Não é difícil estimar os custos com educação consistindo dos serviços de professores, administradores, bibliotecários, manutenção do setor educacional, e interesse no capital incorporado no setor educacional. Certamente é bem mais complicado se medir outro componente do custo total, os gastos dos estudantes, que com certeza é um componente de grande peso (Schultz, 1961). Sendo assim, a abordagem mais comum é aquela baseada no custo, que consiste em somar gastos diretos com escola e universidade, somando ainda os custos de oportunidade de estudantes matriculados na escola. Esse processo fornece

uma medida do fluxo de recursos investidos no setor educacional, que pode ser bastante útil para análises custo/benefício. Entretanto, a abordagem baseada em custo ignora o período intermediário entre a aplicação dos investimentos educacionais e o momento em que emerge o capital humano incorporado no estudante graduado das instituições educacionais (Laroche, 1999).

Com uma abordagem baseada na renda, o investimento em educação é definido como um incremento nos recursos humanos (ou o valor atual da renda da vida) resultante de um incremento no capital humano. Essa abordagem capta os benefícios do investimento em capital humano refletidos em transações no mercado de trabalho. Uma abordagem baseada em renda é preferível a uma abordagem baseada em custo desde que ela torne a metodologia de cálculo do capital humano e do capital físico comparável com as revisões das contas públicas.

Apesar de o capital humano englobar mais do que educação, dados referentes a educação são os que estão mais acessíveis. Estes dados podem ser obtidos como parte do *censu* populacional, e podem ser complementados por, dentre outras coisas, dados referentes à escolaridade, como os referentes a matrículas. Estas medidas servirão como base para o desenvolvimento e reestruturação das contas públicas.

### 3.7 Alguns Dados Referentes ao Crescimento Econômico no Mundo

Mostra-se a seguir alguns resultados de análises estatísticas de dados relacionando crescimento econômico e educação, para vários países do mundo. A base de dados usada é composta de 217 países, com diversos dados referentes a saúde, educação, crescimento, populacional, empregabilidade, etc. (Fonte: Publifolha (1999) ). Dentre estes dados foram selecionados aqueles que se referiam ao setor educacional e crescimento econômico de forma a procurar padrões que sugiram alguma relação entre estas variáveis. Abaixo identificam-se estas variáveis e seus significados:

1. *ALFAB95*: Taxa total de alfabetização em 1995;

2. *ALDOC95*: Relação de alunos por docente primário em 1995;
3. *ESUNIT95*: Relação entre o número total de estudantes matriculados e a população em idade escolar no período 1990 – 1995;
4. *PRIMTOT*: Taxa de matrícula primária total no período de 1990 – 1995;
5. *LIVROS*: Títulos publicados por cada 1000 habitantes no período de 1992 – 1994;
6. *CRESCPNB*: Crescimento do produto nacional bruto em 1995 – 1996;
7. *PNBCAP96*: Produto nacional bruto (em US\$) *per capita* em 1996.

Os dados serão analisados relacionando-se o crescimento do PNB e o PNB com as variáveis do setor educacional. Como os dados não estavam completos para todos os países na base de dados, então estes foram categorizados de forma que se tivesse aproximadamente o mesmo número de observações em cada categoria. A tabela 3.7 seguintes mostram os dados e as faixas dos valores das variáveis que delimitam as categorias.

Tabela 3.6: Categorização das variáveis.

Variável	Categoria 1	Categoria 2	Categoria 3
ALFAB95	0 a 67,5	67,5 a 92,2	92,2 a 100
ESUNIT95	0 a 9	9 a 28	28 a 103
PRIMTOT	0 a 88	88 a 103	103 a 149
LIVROS	0 a 8	8 a 48	48 a 537
ALDOC95	0 a 20	20 a 32	32 a 70
PNBCAP96	0 a 650	650 a 3000	3000 a 44350
CRESCPNB	-3 a 1,19	1,19 a 4	4 a 13

Tabela 3.7: PNBCAP96 por ALFAB95.

ALFAB95	PNBCap96 (Cat.1)	PNBCap96 (Cat.2)	PNBCap96 (Cat.3)
Cat.1	32	6	2
Cat.2	6	20	10
Cat.3	6	14	15

Tabela 3.8: PNBCAP96 por ESUNIT95.

ESUNIT95	PNBCap96 (Cat.1)	PNBCap96 (Cat.2)	PNBCap96 (Cat.3)
Cat.1	26	8	2
Cat.2	6	18	9
Cat.3	1	9	31

Tabela 3.9: PNBCAP96 por PRIMTOT.

PRIMTOT	PNBCap96 (Cat.1)	PNBCap96 (Cat.2)	PNBCap96 (Cat.3)
Cat.1	27	13	2
Cat.2	8	11	24
Cat.3	9	16	14

Tabela 3.10: PNBCAP96 por ALDOC95.

ALDOC95	PNBCap96 (Cat.1)	PNBCap96 (Cat.2)	PNBCap96 (Cat.3)
Cat.1	2	12	28
Cat.2	7	18	9
Cat.3	26	9	2

Tabela 3.11: PNBCAP96 por LIVROS.

LIVROS	PNBCap96 (Cat.1)	PNBCap96 (Cat.2)	PNBCap96 (Cat.3)
Cat.1	12	13	2
Cat.2	2	11	9
Cat.3	0	3	21

Tabela 3.12: CRESCPNB por ALFAB95.

ALFAB95	CRESCPNB (Cat.1)	CRESCPNB (Cat.2)	CRESCPNB (Cat.3)
Cat.1	11	16	14
Cat.2	14	10	11
Cat.3	10	12	11

Nas tabelas *RC* geradas, como algumas das células contém menos de 5 observações usou-se o teste exato de Fisher para associações entre as variáveis de educação e as variáveis econômicas. Os *p-value's* dos testes que envolvem o PNB foram todos próximos

Tabela 3.13: CRESCPNB por ESUNIT95.

ESUNIT95	CRESCPNB (Cat.1)	CRESCPNB (Cat.2)	CRESCPNB (Cat.3)
Cat.1	11	11	14
Cat.2	13	5	14
Cat.3	13	16	8

Tabela 3.14: CRESCPNB por PRIMTOT.

PRIMTOT	CRESCPNB (Cat.1)	CRESCPNB (Cat.2)	CRESCPNB (Cat.3)
Cat.1	17	13	10
Cat.2	11	16	15
Cat.3	11	13	16

Tabela 3.15: CRESCPNB por LIVROS.

LIVROS	CRESCPNB (Cat.1)	CRESCPNB (Cat.2)	CRESCPNB (Cat.3)
Cat.1	6	7	13
Cat.2	11	6	6
Cat.3	7	11	5

Tabela 3.16: CRESCPNB por ALDOC95.

ALDOC95	CRESCPNB (Cat.1)	CRESCPNB (Cat.2)	CRESCPNB (Cat.3)
Cat.1	12	16	10
Cat.2	13	9	12
Cat.3	8	13	16

de zero, como mostrado na tabela 3.17, deixando clara a associação das variáveis educacionais com o PNB. Já os testes envolvendo crescimento do PNB tiveram o resultado mostrado na tabela 3.18.

Tabela 3.17: Valores-p para os testes com o PNB.

Variável	Valor-p
ALFAB95	0,000000
ESUNIT95	0,000000
PRIMTOT	0,000000
ALDOC95	0,000000
LIVROS	0,000000

Tabela 3.18: Valores-p para os testes com o CRESCPNB.

Variável	Valor-p
ALFAB95	0,806463
ESUNIT95	0,099713
PRIMTOT	0,459350
ALDOC95	0,123512
LIVROS	0,353921

Então, na relação com o crescimento do PNB, apenas o *ESUNIT95* apresentou uma associação cujo teste mostrou haver uma significância marginal.

Conclui-se que há associação entre o PNB da economia e a educação, apesar das análises não indicarem qual o tipo de relação.

### 3.8 Uma Visão Econômica do Capital Humano

De uma maneira geral, o capital é um *input* durável (prédios, maquinaria, equipamentos, etc.) no processo econômico, que contribui para a produção de bens e serviços. Na *rationale* econômica, o valor presente do seu fluxo de retornos deve ser maior do que o seu preço de compra, de forma que se tenha uma contribuição líquida positiva ao *output* total. Os *inputs* de capital são, via de regra, dispendiosos.

Não obstante a relutância de muitos, a questão da educação e da formação, ou seja, do capital humano, pode, e deve, ser tratada dentro da *rationale* econômica. Essa relutância tem a mesma natureza daquela que argüi que o trabalho, os serviços de seres humanos, não deve ser tratado como um *input* de produção, sujeito à análise econômica. Essa ideologia, que cada vez mais vai ficando para trás, como um engano histórico, leva muitos indivíduos (hoje em dia muito menos, em termos relativos) a afirmar que é desumano pensar em meninos e meninas aprendendo a ler, escrever, contar e dominar um *métier*, ou em rapazes e moças adquirindo um conhecimento de matemática, engenharia, economia, história, informática, medicina, etc., como um processo que resulta na formação de capital. Isto seria uma “maquinação” dos “imperialistas”, ou “capitalistas”, ou “burgueses”.

É óbvio que se deve considerar os aspectos psicológicos, sociológicos, humanitários, antropológicos, etc. dos seres humanos. Não há nada de desumano em estudar-se lo-

gicamente, matematicamente, esses assuntos. Aliás, as disciplinas já se dividem assim. Economia do trabalho, economia da educação, planejamento estratégico, sociodinâmica, jurimetria, criminalística quantitativa, etc., já estão nos *curricula* há muito tempo. São justamente os estudos e pesquisas nessas disciplinas que permitem que se leve em conta, de forma explícita e não ideológica, ou populista, proselitista, a especificidade do ser humano, quando comparados aos *inputs* não humanos, tais como máquinas, ferramentas e matérias primas. É pois o fato de se identificar o capital humano como uma área separada de estudo que denota a sua unicidade. Muitos textos de economia abordam essas questões. Entre eles pode-se citar Peterson (1977), Mansfield (1974), Romer (2001), Jones (1998).

A educação tem outro efeito benéfico; outra externalidade. Ela propicia o desenvolvimento tecnológico, que por sua vez, alavanca o progresso de uma economia. É preciso compreender melhor essas interrelações.

### 3.9 Modelos Econômicos com Capital Humano

Os modelos apresentados nesta seção podem ser encontrados em Romer (2001), Jones (1998), Romer (1990). Nestes modelos e em outros modelos referentes a crescimento econômico, as análises são motivadas por dois problemas: o crescimento ao longo do tempo nos padrões de vida, e as discrepâncias entre o desenvolvimento econômico de países ao redor do mundo, ou seja, as diferenças de renda *per capita*; sendo este último o principal objetivo dos estudos sobre crescimento econômico.

O ponto de partida dos modelos envolvendo desenvolvimento tecnológico e setores de pesquisa e desenvolvimento é o reconhecimento de que o capital físico não constitui a única forma de capital: para determinar até que ponto as diferenças de capital são determinantes nas diferenças de *renda per capita*, é necessário considerar o capital humano. O desenvolvimento de novas idéias parece ser a razão central para que os padrões de desenvolvimento e produção no mundo sejam bem superiores do que eram nos séculos anteriores (Romer, 2001).

### 3.9.1 O Modelo de Romer

O modelo (Romer, 2001) envolve quatro variáveis: trabalho( $L$ ), capital( $K$ ), tecnologia( $A$ ) e renda( $Y$ ). O modelo é desenvolvido em tempo contínuo. Consideram-se dois setores da economia, um setor de produção de bens onde é gerada a renda  $Y$ , e um setor de pesquisa e desenvolvimento onde são produzidas unidades adicionais ao estoque de conhecimento. Uma fração  $a_L$  da força de trabalho é usada no setor de  $P\&D$  enquanto que  $1 - a_L$  é usada no setor de produção de bens. Similarmente, uma fração  $a_K$  do estoque de capital é usada no setor de  $P\&D$  enquanto que o resto é usada no setor de produção bens. Ambos  $a_L$  e  $a_K$  são constantes e determinados exógenamente. Como o uso de uma idéia ou conhecimento sobre um determinado assunto não impede seu uso em outro local, ambos os setores usam todo o estoque de conhecimento,  $A$ . A quantidade de renda produzida no tempo  $t$  seria dada por:

$$Y(t) = [(1 - a_K)K(t)]^\alpha [A(t)(1 - a_L)L(t)]^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.9.1)$$

Note que esta equação apresenta retornos constantes de escala para o capital e a força de trabalho: para uma dada tecnologia, dobrando-se os insumos, dobra-se o produto (renda).

A produção de novas idéias depende das quantidades de capital e trabalho destinados à pesquisa e do progresso tecnológico. Dadas as hipóteses da função *Cobb-Douglas* generalizada tem-se,

$$\dot{A}(t) = B[a_K K(t)]^\beta [a_L L(t)]^\gamma A(t)^\theta \quad (3.9.2)$$

com  $B > 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\gamma \geq 0$ , onde  $B$  é um parâmetro de deslocamento e o  $\theta$  pode ser positivo ou negativo. Vê-se então que esta função de produção para o conhecimento não supõe retornos constantes de escala para o capital e o trabalho.

O parâmetro  $\theta$  reflete o efeito do estoque conhecimento existente no sucesso do setor de  $P\&D$ . Esse efeito pode ser operado nos dois sentidos. De um lado, descobertas anteriores podem facilitar desenvolvimento de novas idéias e novas descobertas. Nesse caso, tem-se um  $\theta$  positivo. Por outro lado, as descobertas mais simples podem ser feitas primeiro. Nesse caso, é mais difícil fazer novas descobertas, e então o  $\theta$  é negativo. Por causa desses

diferentes efeitos, não são feitas restrições aos valores de  $\theta$ .

A taxa de poupança é assumida constante, da mesma forma que no modelo de Solow. Para simplificar o modelo assume-se que não há depreciação:

$$\dot{K}(t) = sY(t). \quad (3.9.3)$$

Trata-se o crescimento populacional como sendo externo ao modelo:

$$\dot{L}(t) = nL(t). \quad (3.9.4)$$

Para a análise do modelo, são considerados diferentes valores dos parâmetros.

O modelo leva a conclusão de que a taxa de crescimento de longo prazo da renda *per capita* é uma função crescente da taxa de crescimento da população  $n$ . Certamente, um crescimento populacional positivo é necessário para que se verifique um crescimento sustentado na renda *per capita*. Este resultado poderia representar um problema do modelo uma vez que, tipicamente, em países com uma maior taxa de crescimento populacional, a taxa de crescimento da renda *per capita* não é maior. Mas pode-se pensar que  $A$  representa conhecimento possível de ser usado em qualquer lugar do mundo. Dessa forma, o modelo leva a concluir que um maior crescimento da população mundial gera um aumento na renda.

Tem-se ainda que, apesar de o crescimento populacional afetar o crescimento econômico de longo prazo, o efeito de um aumento na força de trabalho dedicada a  $P\&D$ ,  $a_L$ , pode ser positivo ou negativo, dependendo do valor do parâmetro  $\theta + \beta$  ser maior ou menor que um.

### 3.9.2 O Modelo de Solow com Capital Humano

Esse modelo pode ser encontrado em Jones (1998), Romer (2001).

Apesar de a aquisição de capital humano por um trabalhador requerer aprendizado, neste modelo há uma distinção conceitual clara entre capital humano e “conhecimento abstrato”. Capital humano consiste nas habilidades, conhecimento adquirido por um trabalhador individual. Então, como um bem econômico convencional, ele é rival e excludível.

O fato de que os esforços de um engenheiro estão sendo plenamente colocados em uma determinada atividade, impossibilita o uso das habilidades desse engenheiro em outra atividade. Já o “conhecimento abstrato” representa as idéias e conhecimento existentes que podem ser adquiridos e usados. Se um algoritmo está sendo usado para um determinado fim, de forma alguma isso impossibilita o seu uso para outra finalidade.

O modelo é apresentado em tempo contínuo. A produção no tempo  $t$  dada por,

$$Y(t) = K(t)^\alpha [A(t)H(t)]^{1-\alpha}. \quad (3.9.5)$$

As variáveis  $Y$ ,  $K$ , e  $A$  possuem as mesmas interpretações do modelo de Solow:  $Y$  é a produção da economia,  $K$  é o capital, e  $A$  é a efetividade da força de trabalho. É a tecnologia que permite que uma mesma quantidade de trabalhadores produzam mais que uma força de trabalho menos desenvolvida. A variável  $H$  é o montante de serviços produtivos gerados pelos trabalhadores. Ou seja, o total de contribuições dos trabalhadores com diferentes níveis de instrução para a produção. Isso entretanto inclui contribuições do trabalho puro (ou seja, *skills* com os quais os indivíduos são dotados), e contribuições do capital humano (habilidades adquiridas). As dinâmicas de  $K$  e  $A$  são as mesmas do modelo de Solow. Uma fração  $s$  da renda é poupada e o capital se deprecia a uma taxa determinada externamente  $\mu$ . Então,

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \mu K(t). \quad (3.9.6)$$

O progresso tecnológico ocorre a uma taxa externa  $g$ :

$$\dot{A}(t) = gA(t). \quad (3.9.7)$$

O modelo se desenvolve em torno de suas hipóteses sobre como o capital humano  $H$  é determinado. Paralelamente ao tratamento do capital físico, o modelo toma a alocação de recursos para a acumulação de capital humano como sendo dada externamente. Apesar disso o modelo considera o montante do capital humano gerado para uma dada quantidade de recursos destinados à acumulação de capital humano. Ou seja, o modelo supõe

uma função de produção para o capital humano, assumindo que a quantidade de capital humano que cada trabalhador adquire depende apenas do número de anos de educação que ele obtém. Isso equivale a assumir que o único insumo para a função de produção do capital humano é o tempo de estudo.

Dessa forma o modelo também admite que os trabalhadores possuem o mesmo tempo de estudo, denotado por  $E$ . Mostra-se aqui o caso onde  $E$  é constante no tempo. Então,

$$H(t) = L(t)G(E), \quad (3.9.8)$$

onde  $L$  é o número de trabalhadores e  $G(\cdot)$  é uma função que dá o capital humano por trabalhador como uma função dos anos de educação por trabalhador. Da mesma forma que no modelo clássico de Solow, a população cresce a uma taxa constante  $n$  (pelo menos quando  $E$  é constante):

$$\dot{L}(t) = nL(t). \quad (3.9.9)$$

É razoável assumir que quanto mais educação um trabalhador possui, mais capital humano ele deve ter acumulado. Ou seja, assume-se que  $\dot{G} > 0$ . Mas não há motivos para assumir que  $\ddot{G} < 0$ . À medida que os indivíduos acumulam mais capital humano, suas habilidades em adquirir cada vez mais este capital se tornam maiores.

Evidências microeconomicas sugerem que com uma aproximação razoável, cada ano adicional no nível educacional aumenta o salário do trabalhador de um percentual fixo. Se o salário do trabalhador reflete os serviços que ele prestou, isso implica que  $\dot{G}(\cdot)$  é crescente (que é constatado na pesquisa mostrada no tópico 3.4.4). Especificamente admite-se que  $G(\cdot)$  assume a forma,

$$G(E) = e^{E\phi}, \text{ com } \phi > 0, \quad (3.9.10)$$

onde tomou-se  $G(0) = 1$ .

Na análise do modelo segue-se identificando a variável  $k$  como sendo o capital por

unidade efetiva de trabalho, aqui considerada como sendo  $A.G(E)$ . Isto é, define-se,

$$k = \frac{K}{A.G(E).L} \quad (3.9.11)$$

e a dinâmica do modelo torna-se igual a do modelo clássico de Solow.

Uma das implicações desse modelo é que a renda por trabalhador é igual à renda por trabalhador efetivo  $y$  vezes a efetividade da força de trabalho  $A.G(E)$ . Então,

$$\frac{Y}{L} = AG(E)y. \quad (3.9.12)$$

A trajetória de  $AG(E)$  não é afetada por variações na taxa de poupança:  $A$  cresce a uma taxa exógena  $g$ , e  $G(E)$  é constante. Então o impacto de uma mudança na renda por trabalhador é determinada completamente pelo impacto na trajetória de  $y$ .

Pode-se também descrever os efeitos de longo prazo de uma alteração nos anos de escolaridade,  $E$ . Uma vez que  $E$  não entra na equação  $\dot{k}$ , o valor de  $k$  no caminho de crescimento balanceado não muda, então, da mesma forma,  $y$ , no caminho do crescimento balanceado, não muda. Assim, uma vez que a renda por trabalhador,  $Y/L$ , é dada por  $AG(E)y$ , segue-se que um aumento em  $E$  provoca um aumento correspondente na renda por trabalhador na mesma proporção que em  $G(E)$ .

O modelo gera ainda duas implicações importantes que dizem respeito às diferenças de renda entre países. Primeiro, o modelo identifica uma fonte potencial causadora dessas diferenças: elas podem ser geradas por diferenças em capital humano da mesma forma que em capital físico. Segundo, dadas as hipóteses sob a forma como o capital humano é acumulado, o modelo implica que a existência do capital humano não leva a mudanças nas conclusões do modelo de Solow sobre a acumulação de capital físico. Ou seja, mudanças na taxa de poupança provocam os mesmos efeitos que causam no modelo clássico de Solow.

Referente aos dois modelos, e a outros que tratam de tecnologia (Jones, 1998), a principal conclusão é a mesma do modelo clássico de Solow: o motor do crescimento econômico é o progresso tecnológico.

# 4 MODELO COMPORTAMENTAL PARA UM ALUNO

## 4.1 Introdução

O investimento em capital humano, principalmente em educação, é tido atualmente como o melhor caminho para redução do desemprego e desigualdades de renda, além de promover a produtividade e o crescimento econômico. Há um crescente acordo interdisciplinar sobre a importância da educação durante os primeiros anos de vida para o desenvolvimento emocional, social, e desenvolvimento das habilidades intelectuais de uma criança (Jerôme-Forget, 1997). Esse processo se estende também durante toda a infância até a idade adulta. Os meios através dos quais se deve atuar no aluno são determinantes para formação do capital humano. É nesse contexto que se encaixa o modelo apresentado aqui. Por meio de uma abordagem motivacional tenta-se contribuir para formação das habilidades do aluno, agindo dentro ambiente de ensino.

Apresenta-se um modelo dinâmico de equações diferenciais para o estudo do comportamento de um aluno dentro do sistema educacional de ensino. Esse modelo representa uma ampliação do modelo proposto por O.J.M. Smith e implementado por Teixeira (1998), apresentado e mostrado no capítulo 2.

As abordagens clássicas de estudo para o fenômeno comportamental humano tipicamente apresentam um caráter descritivo e qualitativo (Lins, 2004). A abordagem matemática baseada na teoria dos sistemas dinâmicos mostra-se adequada uma vez que pode levar em consideração vários aspectos do comportamento do aluno, no que diz respeito ao processo educacional, incluindo efeitos inerentes ao comportamento e ainda o seu funcionamento em conjunto. O objetivo é obter previsões mais precisas sobre a conduta de um aluno, bem como desenvolver técnicas de controle sobre ela.

O modelo engloba muitos aspectos do modelo comportamental desenvolvido por Nadler Lins (2004), no sentido que também representa um modelo situacional onde o aluno é

visto como um indivíduo dentro do ambiente de ensino, onde é exigido que ele tome ações em resposta a situações impostas por este ambiente; além de apresentar mesmas interpretações para as variáveis e alguns parâmetros. Modela-se a situação que o aluno enfrenta e o processo que se segue da reação dele como sendo um processo de produção. A principal diferença dos dois modelos é na função de produção que apresenta outro formato; e o fato de a dinâmica ser estudada em termos de apenas duas variáveis envolvidas no processo. Apesar de só considerar duas variáveis o modelo apresenta interpretações para possíveis padrões comportamentais diferentes, devido à não-linearidade da nova função de produção, que leva ao aparecimento de três pontos de equilíbrio.

## 4.2 As Variáveis e os Parâmetros do Modelo

Por ser o processo motivacional variante no tempo, a análise do fenômeno comportamental exige aplicação de abordagens que considerem variações temporais. A modelagem por sistemas dinâmicos permite acompanhar processos de mudança sem desprezar eventos passados e estabelecer previsões de eventos futuros dentro de graus de confiança mensuráveis (Lins, 2004).

São diversas as variáveis existentes em um processo comportamental e dificilmente uma é independente das demais. Entretanto algumas delas apresentam taxas de variação no tempo mais elevada com relação às demais, de modo que, para curtos espaços de tempo, algumas variáveis podem ser consideradas constantes. Poderia ser o caso em que a dependência dinâmica seria desprezada. Essas variáveis estão associadas tanto à personalidade do indivíduo quanto à natureza da situação (Lins, 2004).

Um sistema que reproduza a dinâmica motivacional deve ter o foco no objetivo principal, que é o bem estar dos indivíduos. Esse bem estar é conseguido por um estado em que todas as necessidades se encontram em níveis suportáveis ou aceitáveis. Manter um ser humano em um estado de equilíbrio destas forças internas significa uma segurança de que tal objetivo seria alcançado.

Um processo motivacional pode ser compreendido como um sistema composto de vários subsistemas semelhantes e interdependentes, cada um representado por um conjunto de variáveis ( $N, C, D$ ) e as funções que as relacionam, onde:

- $N$  (Necessidade): Elemento gerador de desconforto pessoal;
- $D$  (Disposição): Disposição em tomar uma ação que aumente o nível de conforto. Este elemento é relativo ao ímpeto à ação produzido pela necessidade;
- $C$  (Competência): Conjunto de capacidades necessárias à realização de uma ação. Pode ser de naturezas diversas tais como conhecimentos, habilidades, emoções, entre outros domínios da personalidade.

Um aluno juntamente com uma situação dentro do ambiente educacional ativa um conjunto desses subsistemas. Não quer dizer que todos os subsistemas serão ativados, nem que os que sejam ativados serão ativados todos ao mesmo tempo. As inter-relações internas e externas podem ser expressas pelo sistema completo de equações diferenciais composto por todos os subsistemas comportamentais atuantes:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{N}} = F_{\mathbf{N}}(\mathbf{N}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)) \\ \dot{\mathbf{D}} = F_{\mathbf{D}}(\mathbf{N}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)) \\ \dot{\mathbf{C}} = F_{\mathbf{C}}(\mathbf{N}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)) \end{cases} \quad (4.2.1)$$

onde  $F_X$  denota a influência do conjunto das variáveis do processo motivacional com a dinâmica da variável  $X$  (Lins, 2004).

### 4.2.1 Processos Relevantes

O modelo considera certos processos decorrentes das interconexões internas e externas a um dado subsistema comportamental que afetam a dinâmica das variáveis comportamentais. Os processos são inseridos no modelo por meio dos coeficientes das variáveis nas equações. Os parâmetros mostrados aqui são os mesmos do modelo de Nadler Lins (2004). Apenas o último parâmetro definido não constava naquele modelo.

Um dos processos que se desenvolve na dinâmica comportamental é o atrofamento das capacidades, que representa a perda progressiva de determinada competência pela baixa ocorrência de situações que precisem de capacidades específicas. Ou seja, é a perda da

competência por não usá-la. Os atrofiamentos podem ser de naturezas diversas dependendo das competências aos quais se referem. Por exemplo, informações adquiridas e armazenadas na memória precisam ser “refrescadas” periodicamente para que não sejam perdidas. No caso específico de um aluno, é necessário que ele revise os assuntos e utilize as ferramentas adquiridas para manter na memória o que foi aprendido. Assim:

**Definição 4.2.1 ATROFIAMENTO (c)** – *Tendência à perda progressiva de uma competência.*

Outro termo agregado ao modelo refere-se ao sistema de aprendizagem, que influencia a dinâmica das duas variáveis do modelo por meio da execução da ação recompensadora, caracterizando o aprendizado pela prática.

Na dinâmica da competência o aprendizado tem como objetivo aumentar alguma competência potencial, como por exemplo, ferramentas matemáticas para resolução de problemas de alta complexidade. O aprendizado também tem o papel de compensar a perda natural de alguma capacidade devido ao atrofiamento. Então:

**Definição 4.2.2 LEARNING-BY-DOING (j)** – *É o aprimoramento da competência por meio da prática da ação recompensadora exigida pela situação.*

Pode-se dizer que esse parâmetro representa o aprimoramento pelo qual o aluno passa quando usa as ferramentas adquiridas no processo educacional. Podendo ser ferramentas matemáticas, de leitura, medição, etc.

Vale salientar que apesar de ter o mesmo nome que a função *learning-by-doing* de Arrow, esse parâmetro não guarda nenhuma relação analítica com ela.

Tem-se ainda a letargia como sendo um processo intrínseco aos indivíduos no qual se perde a vontade de realizar uma dada tarefa recompensadora na falta de algo que a justifique. A existência de um valor positivo de letargia assegura que um indivíduo não continue agindo e acabe entrando na situação de saturação por obter recompensas em excesso. O exagero da saturação também não traz bem estar ao indivíduo.

**Definição 4.2.3 LETARGIA (d)** – *Tendência à redução da vontade na ausência de estímulos que a justifiquem.*

A letargia garante que o aluno não insistirá em obter recompensas para uma necessidade que não existe, assegurando que tensões produzidas nele só o estimulem quando uma necessidade percebida o estiver afetando.

Por fim tem-se um processo que reflete o crescente estímulo do aluno por uma atividade recompensadora, gerado pelo simples fato de realizá-la. A influencia desse processo de auto-excitação se torna maior quanto mais produtivo o aluno for para uma atividade específica. O aluno sente-se empolgado com os bons resultados. Para este processo temos o seguinte parâmetro:

**Definição 4.2.4 EXCITAÇÃO ( $e$ )** – *Tendência ao crescimento da disposição (vontade) para realização de uma tarefa devido ao desempenho produtivo experimentado.*

O processo motivacional se inicia por meio da necessidade, que gera a disposição em se tomar uma ação levando o indivíduo a selecionar as capacidades que mais se aplicam aos objetivos para uma dada situação, além de fazer com que o indivíduo adquira novas competências. Ou seja, quando o indivíduo tem uma vontade específica de fazer algo, subentende-se que existe uma necessidade por trás motivando este indivíduo. No modelo de Lins(2004), o parâmetro que relacionava a necessidade com a respectiva taxa de variação era a susceptibilidade ( $a$ ). E o parâmetro que relacionava a necessidade com a disposição era a sensibilidade ( $g$ ). No modelo apresentado aqui ocorre uma redução da ordem do sistema, com a retirada da variável necessidade e conseqüentemente os parâmetros associados a essa variável no sistema 2.2.2. No lugar dos parâmetros susceptibilidade e sensibilidade, aparece o novo parâmetro chamado de excitação ( $e$ ). Esse parâmetro resume os dois anteriores.

## 4.2.2 A Função de Produção

Um dos elementos indispensáveis às modelagens de sistemas produtivos são as funções que fazem a ligação entre as entradas e saídas desse processo. Estas funções determinam características do produto, que podem ser bens ou serviços, de acordo com o que é fornecido como recurso, que pode ser tanto um recurso transformador quanto um recurso transformado (Slack, 1996). A escolha das variáveis que compõem a função de produção dependem de cada situação ou do foco de interesse no fenômeno produtivo.

No modelo de Nadler Lins (2004) essa função era resultado do produto entre a capacidade e a disposição. Aqui ela é modelada também por uma função não-linear, mas com a seguinte expressão:

$$P(C(t), D(t)) = h \left( 1 - \frac{1}{C(t)D(t) + 1} \right) \quad (4.2.2)$$

onde as variáveis  $C(t)$  e  $D(t)$  representam competência e disposição. Defini-se também:

**Definição 4.2.5 CORAGEM (h)** – *Representa a coragem, iniciativa necessária para a execução da ação, se rendendo ao ímpeto gerado pela necessidade.*

O modelo assume ainda que  $C(t) \geq 0$ ,  $D(t) \geq 0$ .

Pode-se ver que a função não possui retornos de escala. A Figura 4.1 mostra o gráfico da função. Essa função indica que na ausência de qualquer outro tipo de impedimento, a vontade e a capacidade de realizar a ação são elementos suficientes para que essa ação seja tomada. Querer (vontade) e poder (capacidade) é fazer (produção). Uma característica de um modelo motivacional está na dissociação do aumento da produção das pessoas com a exigência da adição de mais unidades às já existentes, ou seja, produzir mais sem a inserção de novos indivíduos. Em confronto com esta abordagem quantitativa dos recursos humanos, na motivação ocorre uma mudança qualitativa nesses recursos em termos do que uma mesma quantidade de pessoas consegue produzir. Porém, esta visão não é impeditiva para a utilização de uma abordagem quantitativa. Assim toda ação ou produção deve ser conseqüência da interação conjunta da competência e da vontade (Lins, 2004). Isso implica que ambas não são apenas condição suficientes, mas também necessárias para ação. Hersey e Blanchard (1986) indicam também estes dois elementos sob os nomes de capacidade e vontade. Uma característica importante do comportamento individual que essa função consegue representar é a limitação de desempenho de um indivíduo. Segundo a expressão 4.2.2 a produtividade do indivíduo não cresce indefinidamente, sempre se aproximando de um valor limite. Para um período curto de tempo esse valor é dado pelo parâmetro  $h$ , uma vez que o termo entre parênteses na expressão 4.2.2 é sempre menor que 1. Quanto maior a iniciativa, atitude do aluno frente a uma determinada tarefa, maior o nível de produtividade que ele pode alcançar. Após um processo de amadurecimento o

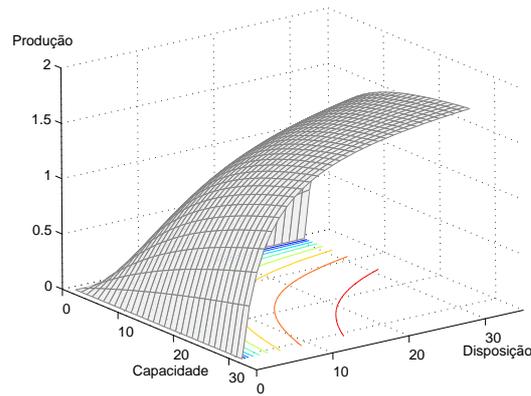


Figura 4.1: Gráfico da função de produção.

valor de  $h$  pode variar de forma que o aluno possa apresentar um maior ou menor valor de produtividade. Também uma mudança nas condições ambientais podem levar a uma alteração nos valores para os parâmetros gerando um novo valor de  $h$  para uma dada situação. O que ocorre é que quanto maiores os acréscimos na capacidade e competência, mais próximo ele fica de um valor ideal de produção. No caso de um aluno isso poderia ser entendido com uma analogia com as notas. Um acréscimo na nota de 2 para 5, por exemplo, é mais fácil de se obter, em termos de esforço e dedicação, do que um acréscimo de 9 para 10.

Pelo gráfico pode-se ver que a função também reflete a dependência do crescimento da produção com o valor das variáveis  $C(t)$  e  $D(t)$ , mostrando que para alunos com baixos valores dessas variáveis, a taxa de crescimento da produção é baixa, como pode ser visto na parte onde o gráfico tem uma região convexa. À medida que  $C$  e  $D$  crescem o gráfico entra numa região côncava onde a taxa de crescimento da produção se torna maior. Quando um estudante enfrenta uma situação (por exemplo, o contato com um assunto novo em uma disciplina nunca vista por ele) para a qual ele possui baixos valores de competência e disposição, inicialmente ele encontra muitas dificuldades, só apresentando resultados melhores e mais freqüentes após algum tempo de exposição à situação.

Se o aluno já possui um valor não nulo para alguma das variáveis, e a outra variável parte de um valor muito próximo de zero, a mudança de concavidade da superfície ocorre mais rápido do que partindo da origem. Essa mudança torna-se mais rápida e mais

acentuada quanto maior for o valor da variável não nula.

## 4.3 O Modelo

A dinâmica das variáveis  $C$  e  $D$  será representada por um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares de primeira ordem.

### 4.3.1 Hipóteses

O modelo apresentado é do tipo determinístico, representando o comportamento do aluno ao longo de um intervalo contínuo de tempo. O mesmo vale para as demais variáveis, parâmetros e funções do modelo.

O intervalo de tempo para medição das variáveis e parâmetros é relativamente curto, e depende do intervalo máximo no qual a variabilidade dos parâmetros pode ser desprezada. Então os parâmetros do modelo na verdade são variáveis com variabilidade muito pequena. sendo assim, o modelo pode ser visto como sendo de parâmetros fixos durante o intervalo de modelagem.

O modelo comportamental considera um único estudante em uma situação determinada. Então a figura do líder ou não está presente ou é parte integrante do ambiente, sendo um dos fatores determinantes da situação. Esse líder pode representar qualquer figura importante no processo educacional, que interfere diretamente no aluno de forma a controlar a dinâmica do aprendizado. Pode ser um familiar, um professor, um amigo, etc. Os parâmetros são reflexo tanto do estudante quanto do ambiente, e portanto, caso algum deles se modifique os parâmetros também irão se modificar. Ou seja, após o período válido estes parâmetros podem ter sofrido variação significativa em decorrência da dinâmica completa do sistema no período.

O ciclo dinâmico de comportamento ocorre posteriormente ao processo decisório de escolha de uma das ações recompensadoras disponíveis ao aluno. Durante o período de tempo da modelagem é considerado que uma alternativa de ação já foi escolhida e não será modificada.

O sistema possui três variáveis: capacidade, disposição e produção, onde a produção

é dependente das outras duas, que por sua vez estão em dependência dinâmica entre si uma vez que o sistema é acoplado.

Como qualquer outro ser humano um aluno possui vários subsistemas comportamentais, com seus respectivos objetivos, que possuem capacidade de governar o comportamento individual em um dado instante. Cada subsistema possui um conjunto de variáveis associadas a um mesmo objetivo. Estes objetivos podem ser discretizados, sendo possível fazer o mesmo com os respectivos subsistemas. Os subsistemas cujos valores das variáveis são muito menores que os das variáveis de outros subsistemas tornam-se desprezíveis, comparativamente. Esses subsistemas de maior influência são fortes determinantes do comportamento do aluno num momento específico, e permanece assim até que o valor da necessidade de outro subsistema comportamental supere a necessidade dele.

### 4.3.2 O Sistema de Equações

O modelo consiste de um sistema de duas equações diferenciais, nas variáveis competência ( $C(t)$ ) e disposição ( $D(t)$ ), que representam a dinâmica de um processo motivacional levando em conta apenas a competência e disposição do aluno para realizar uma ação em resposta a uma requisição por parte do ambiente. O ambiente é considerado como sendo o sistema educacional, envolvendo as entidades que fazem parte do processo educacional, como os pais do aluno, professores, etc. A requisição de ação vem por meio de uma situação vivida pelo aluno onde é preciso que ele execute uma ação de forma a suprir uma necessidade própria. Cada situação determina um conjunto de valores para os parâmetros relativos a um aluno envolvido.

Supõem-se que em um dado instante algum dos subsistemas comportamentais possui os valores de suas variáveis muito superiores às demais de tal forma que o efeito provocado por todos os outros subsistemas podem ser desprezados. Isso permite uma abordagem mais simples e bastante usada para sistemas da grande complexidade, onde divide-se o sistema nos subsistemas menores que o compõem e analisa-se estas partes mais simples. É uma abordagem típica da Engenharia de Sistemas (Campello de Souza, 2004). Tem-se

então:

$$\begin{cases} \dot{D} = F_D(C, D) \\ \dot{C} = F_C(C, D) \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Especificando as funções  $F_C$  e  $F_D$  em termos dos parâmetros e variáveis do modelo temos:

$$\begin{cases} \dot{D} = -dD + eh \left(1 - \frac{1}{CD + 1}\right) \\ \dot{C} = -cC + jh \left(1 - \frac{1}{CD + 1}\right) \\ C(0) = C_0, D(0) = D_0 \end{cases} \quad (4.3.2)$$

as duas variáveis são funções do tempo. Onde  $C(t) \geq 0$  e  $D(t) \geq 0$ . As condições iniciais serão omitidas daqui pra frente.

Um vez que o modelo acima não tem a necessidade, a geração de disposição para ação, ou seja, a tensão ou vontade para agir, aparece no indivíduo por meio do parâmetro  $e$ . O indivíduo deve ter algum valor não nulo inicial de capacidade e disposição, para que através de  $e$ , a produção aumente a taxa de crescimento da disposição. então o processo motivacional não se dá pela necessidade e sim pela produção. Lembrando que a produção não é interpretada como produto e sim como ações no objetivo. Para produzir basta que ele tenha capacidade e disposição.

Para que os sinais das equações do sistema tenham significado, tem-se por hipótese que  $c, d, e, j, h > 0$ . Assume-se também como hipótese que os parâmetros sejam independentes entre si.

Apesar das unidades de medida para as variáveis e parâmetros não terem sido determinadas isso não traz dificuldades para o entendimento dos mesmos nem implica que não possam ser determinados. O importante é saber o papel de cada um desses elementos no processo motivacional.

A equação afirma que na ausência de qualquer motivação, isto é,  $D(t) = 0, \forall t$ , a capacidade (técnica) de realizar tarefas vai diminuindo até desaparecer. Para uma dada condição inicial  $C(0) > 0$ , a solução da primeira equação diferencial será

$$C(t) = C(0)e^{-ct}.$$

Um raciocínio semelhante pode ser feito com a segunda equação, supondo-se  $C(t) = 0$ .

Note-se que o sistema só evolui para algum dos seus pontos de equilíbrio não nulos, se houver algum valor não nulo para ambas as variáveis, competência e disposição. Isto fará com que no instante  $t = 0^+$  tenha-se  $D(0^+) > 0$  e  $C(0^+) > 0$ . A partir daí, a evolução de  $\dot{C}$  e  $\dot{D}$  dependerá dos parâmetros do sistema. O que vai acontecer é que o sistema evoluirá para um de seus três pontos de equilíbrio, isto é, um ponto  $(C(\infty), D(\infty))$  onde

$$\dot{C} = \dot{D} = 0.$$

Se não houvesse nenhum acoplamento entre  $C$  e  $D$ , isto é, se  $j = e = 0$ , o sistema dinâmico seria descrito por:

$$\dot{C} = -cC$$

$$\dot{D} = -dD$$

cuja solução seria dada por

$$C(t) = C(0)e^{-ct}; \quad D(t) = D(0)e^{-dt}.$$

Para qualquer ponto  $(C(t), D(t))$  onde uma das coordenadas é nula, ou seja, para algum ponto inicial sobre um dos eixos do sistema de coordenadas  $C \times D$  o sistema irá evoluir para a origem, que caracteriza um estado de produção nula. Indicando que mesmo que o indivíduo esteja disposto a realizar uma tarefa é preciso que ele possua um mínimo de capacidade nessa atividade. Como o modelo mostrará em uma análise posterior, dependendo dos valores dos parâmetros pode ocorrer ainda que o indivíduo não consiga ter um desempenho que possa suprir suas necessidades, mesmo com valores não nulos de  $C$  e  $D$ , levando-o novamente para a origem do sistema. A influência do valor presente de cada variável na sua taxa de variação e na taxa de variação da outra variável são ponderadas pelos parâmetros do modelo. Por exemplo, a taxa de variação da competência recebe uma componente negativa da competência através do  $c$  (atrofiamento) e uma componente positiva devido à produção individual, através do parâmetro  $j$  (*learning-by-doing*), que representa a potencialização da competência pelo processo de aprendizagem.

O raciocínio com a segunda equação diferencial, que expressa a taxa de variação no tempo da vontade de realizar tarefas, é inteiramente similar, haja vista a simetria estrutural do sistema.

## 4.4 Resultados

Vários sistemas de equações não-lineares podem ser linearizados se a atenção for limitada à pequenas variações das variáveis do sistema. Ou seja, se ocorrerem apenas pequenas perturbações em torno de um estado de referência. Usualmente essa não é uma hipótese muito restritiva, tornando este um método de vasta aplicabilidade (Elgerd, 1967).

Os resultados foram obtidos a partir das equações diferenciais do sistema 4.3.2.

### 4.4.1 Pontos de Equilíbrio

Os pontos de equilíbrio serão aqueles pontos de coordenadas  $(C_e, D_e)$  tais que  $\dot{C} = \dot{D} = 0$ . Ter-se-á então:

$$-cC + jh \left( 1 - \frac{1}{CD + 1} \right) = 0 \quad (4.4.1)$$

$$-dD + eh \left( 1 - \frac{1}{CD + 1} \right) = 0 \quad (4.4.2)$$

Um ponto de equilíbrio imediato para este sistema é  $D_e(t) = C_e(t) = 0$ .

Da equação 4.4.1, obtém-se a seguinte expressão para  $D$ :

$$D_e = \frac{c}{hj - cC_e} \quad (4.4.3)$$

Procedendo da mesma forma com a equação 4.4.2 encontra-se:

$$C_e = \frac{d}{eh - dD_e} \quad (4.4.4)$$

e substituindo-se a expressão 4.4.3 nessa equação vem:

$$C_e = \frac{d}{eh - d \left( \frac{c}{jh - cC_e} \right)}$$

$$cC_e^2 - hjC_e + \frac{dj}{e} = 0. \quad (4.4.5)$$

Então os pontos de equilíbrio possuem coordenada C dada por:

$$C_{e1} = \frac{hj + \sqrt{h^2j^2 - 4 \cdot \frac{cdj}{e}}}{2c} \quad (4.4.6)$$

$$C_{e2} = \frac{hj - \sqrt{h^2j^2 - 4 \cdot \frac{cdj}{e}}}{2c} \quad (4.4.7)$$

de onde tem-se que os pontos  $C_{e1}$  e  $C_{e2}$  serão valores reais sempre que

$$h^2j^2 - \frac{4cdj}{e} > 0. \quad (4.4.8)$$

Da equação 4.4.3, as coordenadas de D nos pontos de equilíbrio são dadas por:

$$D_{ei} = \frac{c}{jh - cC_{ei}}, \text{ para } i=1,2. \quad (4.4.9)$$

O que resulta em:

$$D_{e1} = \frac{2c}{hj - \sqrt{h^2j^2 - 4 \cdot \frac{cdj}{e}}} \quad (4.4.10)$$

$$D_{e2} = \frac{2c}{hj + \sqrt{h^2j^2 - 4 \cdot \frac{cdj}{e}}}. \quad (4.4.11)$$

Então tem-se três pontos de equilíbrio:

1. Ponto de equilíbrio 1 :

$$P_{e1} = (C_{e1}, D_{e1})$$

2. Ponto de equilíbrio 2 :

$$P_{e2} = (C_{e2}, D_{e2})$$

3. Ponto de equilíbrio 3 :

$$P_{e3} = (0, 0)$$

Uma vez que os parâmetros são todos positivos,

$$hj > \sqrt{h^2j^2 - \frac{4cdj}{e}}$$

então os pontos de equilíbrio sempre se encontram no primeiro quadrante do plano de fase.

#### 4.4.2 Estudo Analítico no Plano de Fase

Analise-se inicialmente a natureza dos pontos de equilíbrio. O jacobiano do sistema em um ponto  $(C(t), D(t))$  qualquer é dado por,

$$J = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

onde os parâmetros  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  e  $\alpha_4$  são dados por:

$$\alpha_1 = \frac{\partial F_C}{\partial C} = -c + \frac{hjD}{(CD+1)^2} \quad (4.4.12)$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial F_C}{\partial D} = \frac{hjC}{(CD+1)^2} \quad (4.4.13)$$

$$\alpha_3 = \frac{\partial F_D}{\partial C} = \frac{ehD}{(CD+1)^2} \quad (4.4.14)$$

$$\alpha_4 = \frac{\partial F_D}{\partial D} = -d + \frac{ehC}{(CD+1)^2} \quad (4.4.15)$$

Em cada ponto de equilíbrio determina-se o jacobiano do sistema em torno do ponto estudado substituindo os valores de  $C_e$  e  $D_e$  deste ponto na matriz  $J^* = A$ . Em seguida

observam-se os autovalores da equação característica dada por

$$|A - sI| = 0.$$

Para o ponto de equilíbrio 3,  $P_{e3} = (0, 0)$ , tem-se:

$$J^* = \begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

que fornece como equação característica

$$(s + c) \cdot (s + d) = 0,$$

dando dois autovalores reais e negativos, significando que este ponto de equilíbrio se comporta como um nó estável.

Para o ponto de equilíbrio 1 as expressões dos termos da equação característica são muito complicadas para tirar conclusões com relação à estabilidade local, por esse método, apenas em termos dos parâmetros originais  $c, d, e, h$  e  $j$ . O mesmo ocorre para o ponto de equilíbrio 2. Mas é possível usar um método gráfico para determinar o comportamento das trajetórias no plano de fase em torno de cada ponto de equilíbrio (Strogatz, 1994).

## Construção do Plano de Fase

Inicialmente identificam-se as curvas no plano  $C \times D$  onde o campo vetorial é vertical,  $\dot{C} = 0$ , e onde é horizontal,  $\dot{D} = 0$ . Estas curvas são dadas pelas equações 4.4.3 e 4.4.4, que podem ser colocadas no formato:

$$\begin{aligned} \dot{C} = 0 &\implies D = \frac{1}{\frac{hj}{c} - C} \\ \dot{D} = 0 &\implies C = \frac{1}{\frac{eh}{d} - D} \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

e portanto são duas hipérbolas. Os pontos onde elas se cruzam são os pontos de equilíbrio. Analisando o comportamento dessas curvas temos:

$$\lim_{C \rightarrow \frac{hj}{c}^-} D = \infty \tag{4.4.17}$$

$$\lim_{C \rightarrow 0^+} D = \frac{c}{hj} \tag{4.4.18}$$

$$\lim_{D \rightarrow \frac{eh}{d}^-} C = \infty \tag{4.4.19}$$

$$\lim_{D \rightarrow 0^+} C = \frac{d}{eh} \tag{4.4.20}$$

O comportamento dos vetores nas regiões determinadas por estas curvas pode ser obtido pelos sinais de  $\dot{C}$  e  $\dot{D}$  em cada região. Por exemplo, na região entre as curvas temos  $\dot{C} > 0$  e  $\dot{D} > 0$ , então as setas apontam para cima e para a direita como mostrado na Figura 4.2. Seguindo o procedimento descrito para as outras regiões, vê-se que todos os vetores em torno do ponto de equilíbrio 1 apontam para ele indicando que este é um nó estável. Da mesma forma pode-se identificar o ponto de equilíbrio 2 como sendo um ponto de sela, e a origem um nó estável. Esta última conclusão concorda com o resultado do método de linearização.

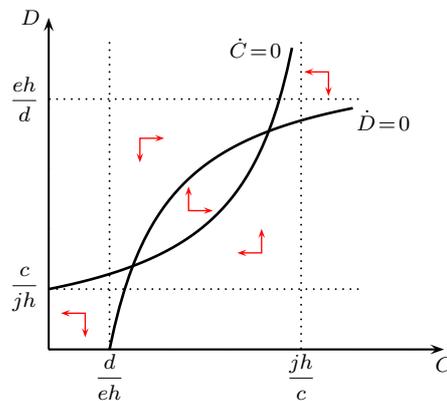


Figura 4.2: Construção das trajetórias do plano de fase.

## 4.5 Discussão

Colocando a expressão 4.4.8 em outro formato tem-se que,

$$h > 2\sqrt{\frac{cd}{ej}} \quad (4.5.1)$$

é a condição sobre a coragem para se ter um ponto de equilíbrio estável não nulo no primeiro quadrante. Então a coragem possui uma cota inferior para seja possível um equilíbrio positivo. Ou seja, a produção exige um valor mínimo de coragem por parte do aluno.

Pelo gráfico do plano de fase determinado na seção anterior pode-se ver que quando há três pontos de equilíbrio para o sistema, o plano fica dividido em duas regiões onde o aluno apresenta uma evolução diferente na dinâmica comportamental. Há uma separatriz no plano determinada pelo ramo estável do ponto de sela, que leva à formação de duas regiões do plano de fase (“bacias de atração”) onde as trajetórias tendem para pontos diferentes.

Dependendo da situação e do aluno, os valores gerados para os parâmetros do sistema podem determinar um caso onde ele se encontra numa região na qual sua capacidade e sua disposição evoluem para um estado que proporciona uma produção nula. É a região do plano em que as variáveis tendem para o ponto  $(C(t), D(t)) = (0, 0)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Isso pode ser provocado, por exemplo, devido à restrições impostas pelo meio à consecução dos objetivos para a produção, levando o aluno a uma situação de frustração onde ele tende a ter um desempenho cada vez pior.

Quando se identifica uma situação como esta, pode-se agir no processo educacional efetuando algum tipo de controle que altere o estado inicial ou os parâmetros do sistema para aquele dado aluno, levando-o a um outro nível de maturidade, com novos parâmetros, a partir do qual ele possa atingir um estado de produção estável, dado pelo ponto de equilíbrio 1. Essa mudança de comportamento também pode ser fruto de uma alteração nas condições do ambiente, que determinam uma nova situação sem a interferência direta de algum agente externo. Assim, nessa nova configuração o aluno possui valores iniciais de capacidade e disposição tais que a dinâmica do processo educacional se desenvolve na

região da bacia de atração do ponto de equilíbrio 1.

A condição sob os parâmetros do modelo, que determina esta configuração do plano com dois pontos de equilíbrio além da origem é,

$$j > \frac{4cd}{eh^2}.$$

Na Figura 4.3 é mostrado um gráfico simulado para valores particulares dos parâmetros. Foram usados os valores,  $c = 3$ ,  $d = 1$ ,  $e = 2$ ,  $h = 2$  e  $j = 4$ . A tabela 4.1 mostra os pontos de equilíbrio e os autovalores, calculados para estes valores dos parâmetros. Pode-se ver que os autovalores indicam que os pontos de equilíbrio são um nó estável e um ponto de sela, como foi determinado anteriormente.

Tabela 4.1: Tabela da simulação 1.

Pontos de equilíbrio	Autovalores
$P_{e1} = (2.3874, 3.5811)$	$(-0.8771, -2.7040)$
$P_{e2} = (0.2796, 0.4189)$	$(1.3448, -1.7636)$
$P_{e3} = (0, 0)$	$(-3, -1)$

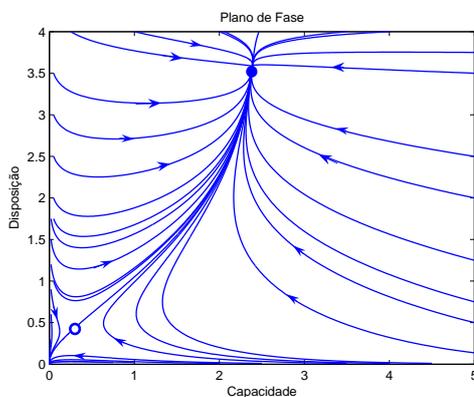


Figura 4.3: Simulação 1.

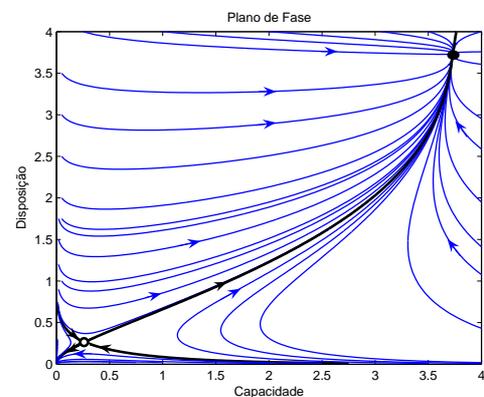


Figura 4.4: Simulação 2.

Pode-se visualizar o efeito de uma alteração nos parâmetros, pelo gráfico das trajetórias e pela localização dos pontos de equilíbrio. Mantendo-se os parâmetros  $c$ ,  $d$ ,  $e$  e  $h$  constantes e variando apenas o parâmetro  $j$ , escolhe-se  $j = 6$ , que gera o plano de fase da Figura 4.4.

Na Figura 4.5 é mostrada uma simulação para os valores  $c = 3$ ,  $d = 1$ ,  $e = 2$ ,  $h = 2$  e

Tabela 4.2: Tabela da simulação 2.

Pontos de equilíbrio	Autovalores
$P_{e1} = (3.7321, 3.7321)$	$(-0.9258, -2.8062)$
$P_{e2} = (0.2679, 0.2679)$	$(-1.7514, 1.4834)$
$P_{e3} = (0, 0)$	$(-3, -1)$

$j = 1, 5$ . Nesse caso temos que,

$$j = \frac{4cd}{eh^2}$$

e os pontos de equilíbrio se juntam no plano.

Tabela 4.3: Tabela da simulação 3.

Pontos de equilíbrio
$P_{e1} = (0.5000, 2.0000)$
$P_{e2} = (0.5000, 2.0000)$
$P_{e3} = (0, 0)$

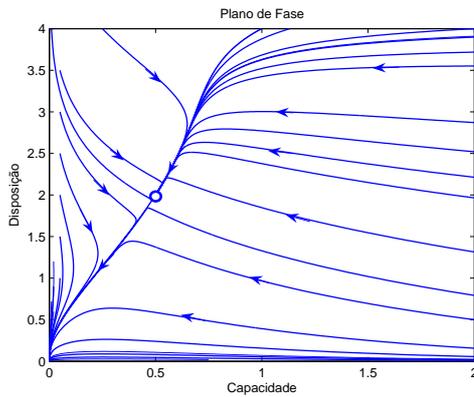


Figura 4.5: Simulação 3.

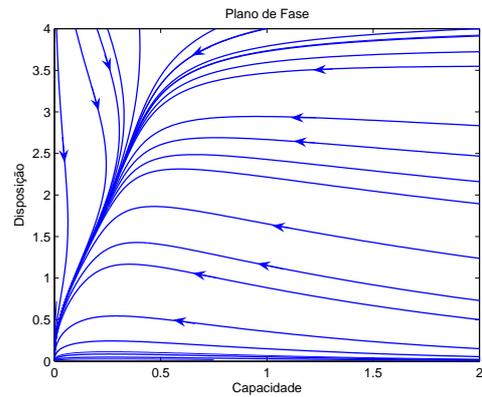


Figura 4.6: Simulação 4.

A Figura 4.6 mostra uma simulação para

$$j < \frac{4cd}{eh^2}$$

onde escolhe-se  $c = 3, d = 1, e = 2, h = 2$  e  $j = 1$ .

A seguir mostram-se os resultados da segunda simulação. Segue-se a mesma seqüencia da simulação anterior para diferentes valores dos parâmetros. É fácil notar nos gráficos a mudança nas trajetórias do plano de fase. Estas mudanças representam alterações na

forma como as variáveis  $C$  e  $D$  se aproximam do equilíbrio dependendo dos valores dos parâmetros. Ou seja, mudanças na forma como o aluno evolui na dinâmica da capacidade e da vontade, se aproximando do estado estacionário.

A tabela 4.4 mostra os pontos de equilíbrio e os autovalores calculados para os valores  $c = d = e = h = 1$  e  $j = 5$  dos parâmetros. Na Figura 4.7 tem-se o plano de fase obtido nessa simulação. Novamente, os autovalores indicam que os pontos de equilíbrio são um foco estável e um ponto de sela.

Tabela 4.4: Tabela da simulação 5.

Pontos de equilíbrio	Autovalores
$P_{e1} = (3.6180, 0.7236)$	$(-0.4472, -1)$
$P_{e2} = (1.3820, 0.2764)$	$(0.4472, -1)$
$P_{e3} = (0, 0)$	$(-1, -1)$

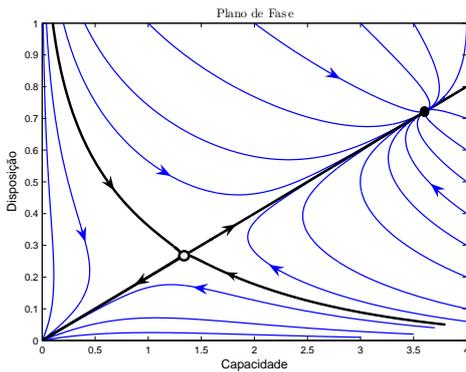


Figura 4.7: Simulação 5.

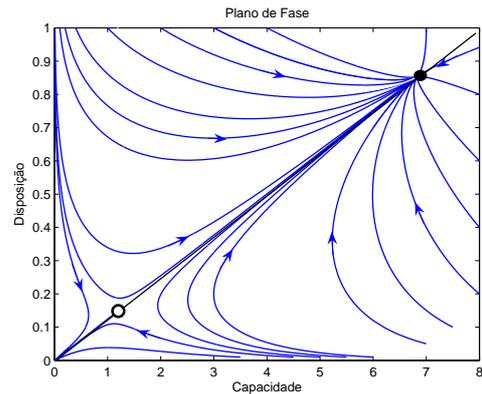


Figura 4.8: Simulação 6.

Novamente pode-se visualizar o efeito de uma alteração nos parâmetros pela forma das trajetórias e pela localização dos pontos de equilíbrio no plano. Mantendo-se constantes  $c, d, e, h$  e variando apenas o parâmetro  $j$ , escolhe-se  $c = d = e = h = 1$  e  $j = 8$ , que gera o plano de fase da Figura 4.8.

Tabela 4.5: Tabela da simulação 6.

Pontos de equilíbrio	Autovalores
$P_{e1} = (6.8284, 0.8536)$	$(-0.7071, -1)$
$P_{e2} = (1.1716, 0.1464)$	$(0.7071, -1)$
$P_{e3} = (0, 0)$	$(-1, -1)$

Na figura 4.9 é mostrada uma simulação para os valores  $c = d = e = h = 1$  e  $j = 4$ . Nesse caso temos que,

$$j = \frac{4cd}{eh^2}$$

e os pontos de equilíbrio se encontram no plano.

Tabela 4.6: Tabela da simulação 7.

Pontos de equilíbrio
$P_{e1} = (2.0000, 0.5000)$
$P_{e2} = (2.0000, 0.5000)$
$P_{e3} = (0, 0)$

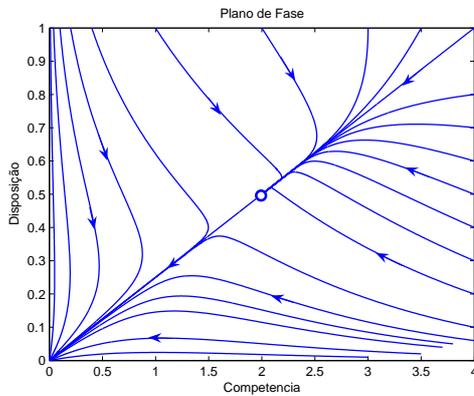


Figura 4.9: Simulação 7.

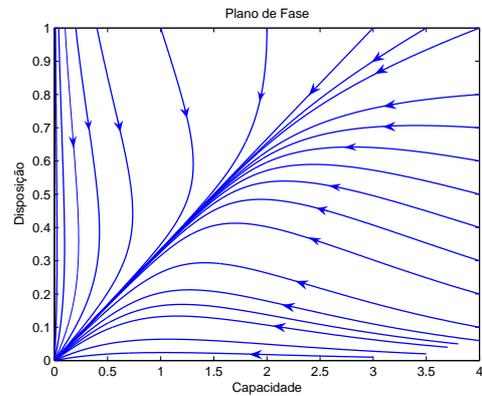


Figura 4.10: Simulação 8.

A figura 4.10 mostra uma simulação para

$$j < \frac{4cd}{eh^2},$$

onde escolhe-se  $c = d = e = h = 1$  e  $j = 3$ .

À medida que varia-se os parâmetros do modelo diminuindo a coragem, o parâmetro *learning-by-doing* ou a excitação pode-se chegar a um conjunto de valores onde  $j = 4cd/eh^2$ , em que se observa uma colisão dos pontos de equilíbrio 1 e 2. O mesmo pode ocorrer para um aumento dos parâmetros letargia e atrofiamento. Nessa configuração tem-se um ponto no plano onde as trajetórias se aproximam dele por um lado e se afastam pelo outro, é um ponto de equilíbrio semi-estável. Mesmo depois do encontro, os pontos de equilíbrio continuam a influenciar o fluxo das trajetórias. A região próxima do ponto de

encontro age como um gargalo para a passagem das trajetórias, que levam muito tempo para ir de um lado ao outro desse gargalo (Strogatz, 1994). Esse tempo depende da diferença entre os parâmetros  $j$  e  $4cd/eh^2$ , diminuindo com o aumento dessa diferença. Um aluno que chega a apresentar um comportamento desse tipo, pode passar muito tempo dentro dessa região, e não chegar ao ponto  $(0, 0)$  durante um período de modelagem onde os parâmetros fiquem constantes, ou mesmo durante toda sua vida. Se os parâmetros continuam a variar nesse sentido o tempo diminui e o fluxo fica mais veloz no gargalo, e o aluno tende a um estado de produção nula mais rapidamente.

Quando se tem  $j < 4cd/eh^2$  não ocorrem mais pontos de equilíbrio reais além da origem. Este fenômeno de variação topológica da configuração do plano de fase como consequência da variação dos parâmetros do modelo é chamado de bifurcação. No caso particular ocorre a destruição dos pontos de equilíbrio, constituindo uma bifurcação denominada *bifurcação de ponto de sela* (Strogatz, 1994).

Essa dependência dos pontos de equilíbrio com os parâmetros pode ser vista também pelo gráfico da Figura 4.2 onde observamos que a medida que reduz-se o atrofiamiento, ou aumenta-se o aprendizado pela prática e a coragem, a assíntota  $C = hj/c$  tende a se afastar para a direita paralelamente à reta  $D = 0$ , e o ponto  $D = c/hj$  aproxima-se da origem. Algo semelhante ocorre com os parâmetros da equação de  $\dot{D}$ . À medida que se aumentam os valores da excitação e da coragem, e reduz-se o valor da letargia, a assíntota  $D = eh/d$  se afasta paralelamente ao eixo  $C = 0$  e o ponto  $C = d/eh$  se aproxima da origem. O parâmetro mais presente nestas expressões é a coragem que aparece em todas elas.

Considerando os parâmetros  $e, h$ , e  $j$  como os parâmetros de natureza positiva do processo educacional, e  $d$  e  $c$  os parâmetros de natureza negativa, vê-se que com o aumento dos parâmetros positivos ou redução dos negativos, diminui a probabilidade de um aluno se deparar com uma situação onde ele estará na região do plano de fase que evolui para o ponto de produção nula, através da redução da bacia de atração do ponto de equilíbrio  $(0, 0)$ , uma vez que o ponto de equilíbrio 2 se aproxima da origem. E ao mesmo tempo aumenta a região da bacia de atração do ponto de equilíbrio 1, sendo este um ponto de operação desejável não nula. Isso pode ser visto também pelos valores dos pontos de

equilíbrio. Nas expressões dos pontos de equilíbrio vê-se que o ponto 2 caminha na direção da origem e o ponto 1 se afasta dela.

Uma análise semelhante pode ser feita variando os parâmetros no sentido oposto ao indicado anteriormente. Observa-se que a bacia de atração no ponto de equilíbrio 2 fica cada vez maior à medida que os pontos de equilíbrio se aproximam. O momento da bifurcação ocorre quando as curvas  $\dot{C} = 0$  e  $\dot{D} = 0$  se tangenciam. Esse ponto pode ser obtido fazendo-se a expressão 4.4.8 igual a zero. Isso acontece no ponto,

$$(C(t), D(t)) = \left( \frac{jh}{2c}, \frac{2c}{jh} \right).$$

Continuando com essa variação dos parâmetros, as hipérboles não têm mais pontos de contato e o único valor real que satisfaz as equações 4.4.1 e 4.4.2 simultaneamente é a origem. A análise de estabilidade local pelo método de linearização, fornece que este é um foco estável, e portanto toda trajetória do plano de fase tende para a origem quando  $t \rightarrow \infty$ . Isso indica que, para qualquer valor de  $C$  e  $D$  que o aluno possua, ele sempre tenderá a se aproximar de um estado de produção nula. Então o treinamento diminui a possibilidade de o aluno cair em uma região de não produção.

# 5 CONTROLE ÓTIMO EM EDUCAÇÃO

## 5.1 Introdução

Políticas que dizem respeito à formação de capital humano devem abranger mais do que educação formal dos indivíduos. Devem englobar também políticas familiares, políticas sociais, políticas de saúde e políticas de treinamento para ajuste do trabalhador ao mercado de trabalho. A educação formal, entretanto, permanece no centro da formação do capital humano (Jerôme-Forget, 1997). Aqui pretende-se salientar esse aspecto fundamental do capital humano dentro do modelo, propondo variáveis de controle e estado para componentes considerados fundamentais nesse ambiente.

Ao contrário do modelo de Solow que tomava a taxa de poupança como dada externamente, aqui relaxa-se essa hipótese considerando a taxa de poupança como uma das formas através das quais o planejador geral da economia vai intervir na dinâmica do crescimento. Ou seja a taxa de poupança é considerada variante no tempo e é tomada como variável de controle.

Um dos aspectos mais importantes dos modelos de crescimento mais recentes (Romer, 1994; Romer, 1990; Romer, 2001; Jones, 1995; Jones, 1998) é o progresso tecnológico. Este, por sua vez, entra na função de produção como sendo aumentador de trabalho, representando o motivo pelo qual mais renda pode ser gerada hoje do que podia ser gerada a um século atrás, para uma mesma quantidade de capital e trabalho.

Supõe-se uma economia fechada onde as características do sistema produtivo são representadas por uma função de produção agregada. Quando se deseja estudar o efeito de um setor específico da economia na produção, o que se faz tipicamente é destacar este setor como insumo produtivo nos argumentos da função de produção.

O modelo reconhece que o capital físico não é a única forma de capital e pretende tratar o capital humano como um fator essencial para o crescimento econômico. Pretende-se

incorporar aspectos da interferência educacional, tratando a produção educacional como outro setor da economia, cuja função de produção considera como fatores de produção o capital e a força de trabalho destinados à educação. A produção do setor educacional entra como insumo na função agregada da economia representando a geração de conhecimento e qualificação para a força de trabalho como um todo. Esse setor educacional engloba atividades de educação e pesquisa.

O modelo apresenta a formulação de um problema de controle ótimo, pretendendo-se evidenciar aspectos do sistema educacional relacionados com o crescimento econômico. Dependendo do modelo formulado faz-se uma escolha apropriada das variáveis de estado e das variáveis de controle. O modelo apresenta uma estrutura utilitária, tratando de maximizar uma função de bem-estar intertemporal, sujeita basicamente a restrições impostas pela identidade da renda, identidade do investimento, dinâmica de evolução da força de trabalho e balanço populacional, que serão tratadas para o problema em questão.

A abordagem utilizada aqui é bastante comum no contexto de macroeconomia. Algumas referências são Stamford da Silva (1999), Ortigueira (2003), Beaudry (2002).

## 5.2 Descrição do Modelo e Hipóteses

O modelo é apresentado por partes incluindo algumas das hipóteses feitas. São hipóteses clássicas, amplamente usadas na literatura (Intriligator, 1971; Romer, 2001; Jones, 1998).

### 5.2.1 Setores da Economia

Supõe-se um ambiente econômico com dois setores produtivos. Um desses setores é o setor educacional, onde está incluídas escolas, universidades, professores, pesquisadores, material destinado à educação, etc. E o outro um setor formado pelos outros setores da economia, tais como setor de saúde, indústrias, comércio, etc. Tem-se então duas funções

de produção:

$$Y = F(K_0, L_0, E) \quad (5.2.1)$$

$$E = F_e(K_e, L_e) \quad (5.2.2)$$

onde  $K_0$  representa o capital destinado ao setor não-educacional,  $K_e$  representa o capital destinado ao setor educacional,  $E$  é a produção do setor educacional,  $L_0$  é a força de trabalho empregada no setor não educacional,  $L_e$  é a força de trabalho empregada no setor educacional e  $Y$  é a renda total da economia, o produto final.

O  $E$  representa a produção do setor educacional, ou seja, é o número de pessoas formadas com um certo grau de instrução. São as as pessoas como o capital humano incorporado nelas. O processo educacional é visto como uma indústria de bens de capital que forma capital humano.

As expressões 5.2.1 e 5.2.2, quando especificadas não consideram o tempo diretamente, mas apenas através dos insumos. Ou seja, tanto a produção educacional quanto a produção da economia só mudam no tempo se os insumos também mudarem.

Assume-se que a função de produção 5.2.1 obedeça às *condições de Inada* (Romer, 2001), considerando assim que ela seja pelo menos duas vezes diferenciável, onde, para todos os fatores de entrada não negativos:

$$\frac{\partial F}{\partial K_0} > 0 ; \frac{\partial^2 F}{\partial K_0^2} < 0 \quad (5.2.3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial L_0} > 0 ; \frac{\partial^2 F}{\partial L_0^2} < 0 \quad (5.2.4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial E} > 0 ; \frac{\partial^2 F}{\partial E^2} < 0 \quad (5.2.5)$$

e, tomando os limites:

$$\lim_{K_0 \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial K_0} = \infty ; \lim_{K_0 \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial K_0} = 0 \quad (5.2.6)$$

$$\lim_{L_0 \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial L_0} = \infty ; \lim_{L_0 \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial L_0} = 0 \quad (5.2.7)$$

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{\partial F}{\partial E} = \infty ; \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{\partial F}{\partial E} = 0 \quad (5.2.8)$$

ou seja, os produtos marginais começam infinitos e decaem para zero.

Agora descreve-se como os estoques de capital e de trabalhadores variam ao longo do tempo. Todas as variáveis são contínuas no tempo.

### 5.2.2 Dinâmica da Força de Trabalho

Para a força de trabalho como um todo, representada pelo estoque de trabalhadores para educação e trabalhadores do setor não-educacional, considera-se um crescimento com uma taxa proporcional constante:

$$\dot{L}(t) = nL(t) \quad (5.2.9)$$

onde  $n$  é um parâmetro exógeno e  $L(t) = L_0(t) + L_e(t)$  é a força de trabalho total da economia.

Dessa equação vem que

$$L(t) = L(0)e^{nt}. \quad (5.2.10)$$

Então tem-se que essa suposição equivale a dizer que  $L(t)$  cresce exponencialmente.

### 5.2.3 Dinâmica da Força de Trabalho Educacional

A dinâmica da força de trabalho educacional é dada por um sistema de equações diferenciais sugerido em Intriligator (1971) como exercício, e cuja solução, que pode ser encontrada em Campello de Souza (2006), é apresentada a seguir:

#### Cientistas, Pesquisadores e Docentes

Suponha que num país, no tempo  $t$ , existem  $S(t)$  cientistas engajados seja em pesquisa seja em ensino. O número de cientistas que ensinam (educadores) é  $E(t)$ , e o número de cientistas que fazem apenas pesquisa (pesquisadores) é  $R(t)$ , onde:  $S(t) = E(t) + R(t)$ . Novos cientistas são formados por educadores, e são necessários  $1/\gamma$  educadores para formar um novo cientista em um ano. Cientistas deixam o ramo da ciência devido a

morte, aposentadoria e transferência à taxa de  $\delta$  por ano. Então:  $\dot{S}(t) = \gamma D(t) - \delta S(t)$ . (Para os Estados Unidos os valores estimados para os parâmetros são:  $\gamma = 0.14$ ,  $\delta = 0.02$ ). Através de vários incentivos um gestor de política científica pode influenciar a proporção de novos cientistas que entram no ensino,  $\alpha(t)$ , onde:  $\dot{D}(t) = \alpha(t)\gamma D(t) - \delta D(t)$ ;  $\dot{R}(t) = (1 - \alpha(t))\gamma D(t) - \delta R(t)$ ;  $0 < \alpha_{\min} \leq \alpha(t) \leq \alpha_{\max} < 1$ .

Encontre a política de alocação ótima se o objetivo é minimizar o tempo necessário para se atingir números dados de cientistas de ensino e pesquisa.

Solução: Faça  $\alpha(t) = u(t)$ . Ter-se-á então:

$$\dot{D} = u\gamma D - \delta D = -(\delta - u\gamma)D; \quad \dot{R} = (1 - u)\gamma D - \delta R; \quad 0 < u_{\min} \leq u \leq u_{\max} < 1.$$

O Hamiltoniano será dado por:

$$H = -1 + y_1 u \gamma D - y_1 \delta D + y_2 (1 - u) \gamma D - y_2 \delta R$$

$$H = -1 - \delta D y_1 - \delta R y_2 + \gamma D y_2 + \gamma D (y_1 - y_2) u.$$

Vê-se então que o Hamiltoniano é linear na força de controle e portanto a solução será do tipo *bang-bang*. Como  $D > 0$ , a solução será:

$$u^* = u_{\max} \text{ se } y_1 - y_2 > 0; \quad u^* = u_{\min} \text{ se } y_1 - y_2 < 0.$$

Para cada valor de  $u^*$  as trajetórias no plano de fase  $(D, R)$  terão um padrão diferente. Raciocinando-se no limite, isto é, para  $u_{\min} = 0$  e  $u_{\max} = 1$ , haveria então dois sistemas dinâmicos:

Para  $u = 1$ :  $\frac{dD}{dt} = -(\delta - u\gamma)D$  e  $\frac{dR}{dt} = -\delta R$ . Os autovalores do sistema são  $\lambda_1 = -(\delta - u\gamma)$  e  $\lambda_2 = -\delta$ . Como  $\gamma > \delta$ ,  $\lambda_1 > 0$  e  $\lambda_2 < 0$  portanto o ponto de equilíbrio (a origem) é um ponto de sela.

Para  $u = 0$ :  $\frac{dD}{dt} = -\delta D$  e  $\frac{dR}{dt} = \gamma D - \delta R$ . Os autovalores são:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$ . O ponto de equilíbrio é um nó.

O gráfico da figura 5.1 ilustra a estratégia do controle ótimo para se ir de um estado inicial a um estado final em tempo mínimo. Apenas uma comutação é necessária. No caso da sela o eixo dos  $x$ 's rotaciona passando a ocupar a posição da reta  $R = -\frac{1-u}{u}$ . No caso do nó os eixos são os mesmos.

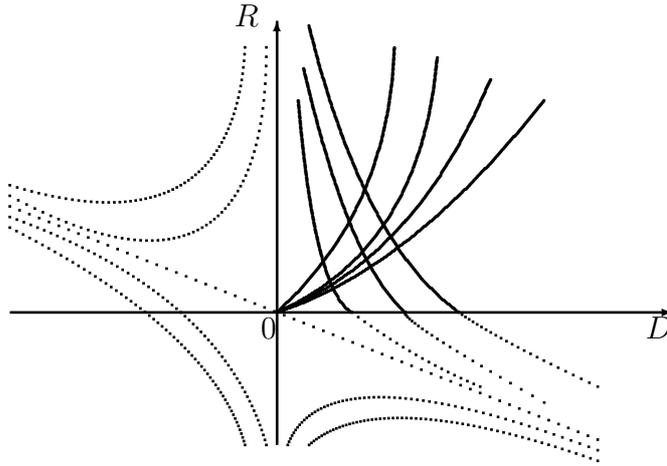


Figura 5.1: Política de alocação de cientistas e professores.

As equações diferenciais das variáveis de co-estado são:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial D} = \delta y_1 - \gamma y_2 - \gamma(y_1 - y_2)u \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial R} = \delta y_2 \implies y_2(t) = y_2(0)e^{\delta t}.\end{aligned}$$

Subtraindo a equação diferencial de  $y_2$  da de  $y_1$  vem:

$$\frac{d}{dt}(y_1 - y_2) = (\delta - u\gamma)(y_1 - y_2) - \gamma y_2 = (\delta - u\gamma)(y_1 - y_2) - \gamma y_2(0)e^{\delta t},$$

cuja solução é:

$$y_1(t) - y_2(t) = (y_1(0) - y_2(0))e^{(\delta - u\gamma)t} - \frac{y_2(0)}{u}(e^{\delta t} - e^{(\delta - u\gamma)t}).$$

Pode-se também substituir a solução da segunda equação, isto é,  $y_2(t) = y_2(0)e^{\delta t}$ , na

primeira e obter:

$$y_1(t) = y_1(0)e^{(\delta-u\gamma)t} - \frac{1-u}{u}y_2(0)(e^{u\gamma t} - 1)e^{(\delta-u\gamma)t}.$$

Solução das equações de estado. A solução da equação de  $D$  será dada por:  $D(t) = D(0)e^{-(\delta-u\gamma)t}$ . Substituindo-se na equação de  $R$  vem:

$$\frac{dR}{dt} = -\delta R + (1-u)\gamma D(0)e^{-(\delta-u\gamma)t},$$

cuja solução será então:

$$R(t) = R(0)e^{-\delta t} + \frac{1-u}{u}D(0)e^{-\delta t}(e^{u\gamma t} - 1).$$

Portanto o número total de cientistas será:

$$S(t) = D(t) + R(t) = [D(0) + R(0)]e^{-\delta t} + \frac{D(0)}{u}[e^{-(\delta-u\gamma)t} - e^{-\delta t}].$$

O modelo usado aqui é uma linearização do modelo acima. Essa linearização tem como objetivo facilitar a manipulação matemática. A força de controle também foi mudada para ficar consistente com o novo modelo. Alguns parâmetros apresentados são semelhantes, mas os significados precisos são diferentes. Considera-se que a força de trabalho do setor educacional é formada por cientistas. Dentre estes uma parte se dedica unicamente à pesquisa e o restante se dedica unicamente à educação. Então tem-se que

$$L(t) = L_0(t) + L_e(t) = L_0(t) + R(t) + D(t) \quad (5.2.11)$$

onde  $R(t)$  representa o número de pesquisadores e  $D(t)$  representa o número de educadores. As variáveis  $D$  e  $R$  são tomadas como variáveis de estado, tendo sua dinâmica governada pelo sistema abaixo:

$$\begin{cases} \dot{D} = -\xi D + \eta R + \phi \\ \dot{R} = \gamma D - \xi R - \phi \end{cases} \quad (5.2.12)$$

Por estas equações vê-se que no caso em que se tem  $R = 0$ , indicando que existem apenas educadores, estes tendem a desaparecer visto que sua dinâmica fica sendo dada por

$$D(t) = D(0)e^{-\xi \cdot t}.$$

O mesmo acontecendo com os pesquisadores para  $D = 0$ .

O parâmetro  $\xi$  representa a taxa com que os cientistas deixam o ramo da ciência devido a morte, aposentadoria, transferência, etc. O parâmetro  $\eta$  representa a taxa de formação de educadores por pesquisador e o parâmetro  $\gamma$  representa a taxa de formação de pesquisadores por educador.

É natural se supor que para a formação de um pesquisador sejam necessários vários educadores. Enquanto que um único pesquisador pode contribuir para a formação de vários educadores. Então pode-se esperar que  $\eta > \gamma$ .

O controle do sistema é efetuado por meio de algum incentivo dado por um gestor de políticas educacionais, que aloca cientistas para o ramo de pesquisa ou de educação. Esse controle é representado pela variável  $\phi$ . Na forma como ela se apresenta no modelo vê-se que existe um balanço da força de trabalho educacional. Como o controle é aditivo, ele representa o número cientistas que são alocados para educação ou pesquisa. Aumentando-se a taxa de variação do número de educadores, reduz-se na mesma quantidade a taxa de variação do número de pesquisadores. Mas devido ao acoplamento do sistema o crescimento de  $D$  provoca um efeito de crescimento em  $R$  através do parâmetro  $\gamma$ . Então o controle educacional se dá apenas sobre o número de educadores, e por meio destes o sistema gera pesquisadores.

Por hipótese, todos os parâmetros desse sistema são não negativos, e o controle  $\phi$  que pode variar entre um valor mínimo e um valor máximo, ambos positivos. Então,

$$0 < \phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max}.$$

A população do sistema educacional como um todo, o  $L_e$ , cresce à taxa exógena  $n$ .

Este modelo foi inspirado em um modelo semelhante apresentado em Intrigator (1971), onde o controle era dado de forma multiplicativa, tendo a interpretação de uma proporção

de cientistas que eram alocados para educação. Essa foi a forma escolhida inicialmente, mas o tratamento matemático tornou-se por demais complicado.

### 5.2.4 Equações das Identidades do Investimento

Para ambos os setores da economia, o investimento é feito tanto para aumentar o estoque de capital como para repor o capital depreciado. Tem-se então, para o setor educacional,

$$\dot{K}_e = s_e Y - \mu_e K_e \quad (5.2.13)$$

mostrando que a acumulação de capital educacional, ou variação de estoque do capital educacional, é igual ao montante do investimento bruto em educação,  $s_e Y$ , menos o montante da depreciação que ocorre durante o processo produtivo,  $\mu_e K_e$ . Sendo  $s_e$  a taxa de poupança para a educação, ou seja, o percentual do produto que é investido em educação; e  $\mu_e$  a taxa de depreciação do capital educacional.

Esse capital educacional inclui, computadores destinados à educação, salas de aula, retroprojetores, quadros-negros, livros, bibliotecas, ônibus escolares, etc.

Da mesma forma temos para o setor não educacional:

$$\dot{K}_0 = s_0 Y - \mu_0 K_0 \quad (5.2.14)$$

com interpretações semelhantes para cada termo.

O capital não educacional inclui fábricas, maquinário, meios de transporte, insumos de transformação, dispositivos de comunicação, etc.

### 5.2.5 Identidade da Renda

Como foi comentado anteriormente, o modelo representa uma economia fechada, significando que nem o produto nem os insumos são exportados ou importados, toda produção da economia é consumida ( $C(t)$ ) ou investida para acumulação de capital. Esse investimento pode ser feito no setor educacional ( $I_e(t)$ ) ou no setor não-educacional ( $I_0(t)$ ).

Então,

$$Y(t) = C(t) + I(t) = C(t) + I_e(t) + I_0(t).$$

Fazendo  $I_e(t) = s_e Y$ ,  $I_0(t) = s_0 Y$  e  $C(t) = P_{marg} Y$  temos

$$Y(t) = (P_{marg} + s_e + s_0)Y. \quad (5.2.15)$$

Nesta equação  $s_e$  representa a fração da produção destinada aos investimentos no setor educacional,  $s_0$  a fração da produção destinada aos investimentos no setor não educacional e  $P_{marg}$  é a propensão marginal a consumir, representando a fração da produção da economia que é destinada ao consumo.

### 5.2.6 Funcional Objetivo

O objetivo econômico do planejador central da economia é assumido ser baseado em padrões de qualidade de vida. Aqui supõem-se que o planejador central da economia possui uma função utilidade, que lhe fornece a utilidade  $u(c(t))$  a cada instante de tempo.

Assume-se ainda que a utilidade é uma função pelo menos duas vezes diferenciável com derivadas primeira e segunda contínuas, onde a utilidade marginal é uma função monotônica decrescente e positiva para todo valor de  $c(t) > 0$ . Ou seja,  $u(c(t))$ , é uma função estritamente côncava e crescente. Temos ainda que ela obedece a:

$$\lim_{c \rightarrow 0} u'(c) = \infty$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} u'(c) = 0.$$

O funcional objetivo é então

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} Lu(c(t)) dt \quad (5.2.16)$$

onde o termo  $\rho$  é a taxa de impaciência, assumido constante e não negativo. Ele representa a taxa marginal de transformação entre utilidade presente e utilidade futura, onde uma

taxa de desconto grande representa um maior favorecimento para utilidades próximas do tempo presente, no lugar de utilidades num prazo mais longo.

Vê-se que a integral do bem estar considera como tempo inicial o tempo presente e o tempo final infinito. Esse é o caso em que o planejador da economia procura por políticas ótimas de gestão para todo o tempo futuro.

Inserindo a equação 5.2.10 no funcional anterior e assumindo  $L(0) = 1$ , tem-se que:

$$J = \int_0^{\infty} e^{(n-\rho)t} u(c(t)) dt \quad (5.2.17)$$

onde,  $n < \rho$  e se considera uma classe de funções  $u(t)$  tal que,

$$J = \int_0^{\infty} |e^{(n-\rho)t} u(c(t))| dt < +\infty.$$

### 5.3 Análise do Modelo

O problema de crescimento econômico para uma economia agregada, fechada, com tempo terminal infinito e taxa positiva de desconto é então aquele de escolher trajetórias temporais sobre as variáveis de controle,  $s_e, s_0$  e  $\Phi$ , de forma a maximizar o funcional dado pela expressão 5.2.17.

A idéia inicial da análise era de não especificar as formas das equações 5.2.1 e 5.2.2, buscando resultados mais gerais em termos da produção educacional e da produção total da economia. Mas essa abordagem não gerou resultados de fácil interpretação. Então optou-se por propor funções para estas equações em termos das variáveis nos respectivos argumentos. Por uma questão de simplicidade escolheu-se como base para construção das funções o formato de uma *Cobb-Douglas*. Tem-se então,

$$Y = K_0^\alpha E^\beta (AL)^{1-\alpha-\beta} \quad (5.3.1)$$

$$E = K_e^{\alpha_e} R^{\beta_e} D^{\gamma_e} (AL)^{1-\alpha_e-\beta_e-\gamma_e} \quad (5.3.2)$$

onde os parâmetros são todos não negativos e estão entre zero e um.

Nota-se nessa especificação que tanto a produção da economia quanto a da educação

foram assumidas serem funções do termo  $AL$  que representa a força efetiva de trabalho. O  $A = A(t)$  representa o progresso tecnológico, que influencia tanto na educação quanto na produção econômica. A dinâmica de evolução dessa variável é dada por,

$$\dot{A}(t) = gA(t) \quad (5.3.3)$$

onde  $g$  é um parâmetro exógeno representando a taxa de crescimento proporcional da tecnologia. Nota-se que não se fez nenhuma distinção entre a tecnologia utilizada no setor educacional e a tecnologia utilizada no resto da economia.

Na construção da expressão 5.3.1 e 5.3.2 optou-se por mudar o formato das expressões 5.2.1 e 5.2.2 para que elas contivessem o termo  $AL$ , e dessa considerar nos dois setores a contribuição da força de trabalho não-educacional,  $L_0$ . Assim espera-se englobar no modelo a contribuição de trabalhadores do setor educacional que não são pesquisadores ou educadores. Por exemplo, os motoristas de ônibus escolares, vigias, funcionários de secretarias, faxineiros, etc. Uma suposição feita aqui é que a força de trabalho total,  $L(t)$ , possui uma contribuição muito maior da força de trabalho não-educacional do que da educacional,  $L_e$ . Ou seja,

$$L(t) = L_0(t) + L_e(t) = L_0(t) + R(t) + D(t) \approx L_0(t). \quad (5.3.4)$$

Em outro formato pode-se dizer que  $\frac{L_0}{L} \approx 1$ .

Essa suposição não é uma hipótese muito forte, o que pode ser constatado por dados recentes publicados na primeira edição do cadastro nacional de docentes do sistema federal de ensino superior, divulgado no dia 11/11/2005 pelo instituto nacional de estudos e pesquisas educacionais (INEP/MEC). Segundo dados dessa pesquisa, existem 230 mil professores na educação superior no Brasil. Comparando esse valor com a população do país, de aproximadamente 170 milhões de habitantes, o fator  $L_e$  se torna desprezível. Além do que, nesse formato, tem-se uma maior facilidade nos cálculos.

Na expressão 5.3.2 os termos de maior peso com certeza são os educadores e pesquisadores. Mais que qualquer outro bem de capital que possa estar envolvido na formação de indivíduos educados, pesquisadores e educadores são sem dúvida os mais importan-

tes. Daí pode-se concluir que os expoentes  $\beta_e$  e  $\gamma_e$  são bem maiores que  $\alpha_e$ , e o termo  $1 - \alpha_e - \beta_e - \gamma_e$  é muito próximo de 0. Essas magnitudes dos expoentes fazem com que, dentro do termo  $AL$ , o maior peso seja do  $L_0$ , e as contribuições repetidas do  $R$  e do  $D$ , que já são muito pequenas, são reduzidas mais ainda pelo expoente  $1 - \alpha_e - \beta_e - \gamma_e$ . Disso resulta que a função  $E$  depende essencialmente dos termos  $R^{\beta_e}$ ,  $D^{\gamma_e}$ , com contribuições menores do  $K_e^{\alpha_e}$  e do  $L_0$  através do  $(AL)^{1-\alpha_e-\beta_e-\gamma_e}$ .

Tem-se então um modelo de crescimento dado por:

$$\text{Max}_{s_e, s_0, \Phi} J = \int_0^{\infty} e^{(n-\rho)t} u(c(t)) dt$$

sujeito a:

$$Y(t) = C(t) + I(t) = C(t) + I_e(t) + I_0(t)$$

$$Y = K_0^\alpha E^\beta (AL)^{1-\alpha-\beta}$$

$$E = K_e^{\alpha_e} R^{\beta_e} D^{\gamma_e} (AL)^{1-\alpha_e-\beta_e-\gamma_e}$$

$$\dot{K}_0 = s_0 Y - \mu_0 K_0$$

$$\dot{K}_e = s_e Y - \mu_e K_e$$

$$\dot{D} = -\xi D + \eta R + \phi$$

$$\dot{R} = \gamma D - \xi R - \phi$$

$$\dot{L}(t) = nL(t)$$

$$\dot{A}(t) = gA(t)$$

$$\phi_{min} \leq \phi(t) \leq \phi_{max} \tag{5.3.5}$$

Onde  $K_0 \geq 0$ ,  $K_e \geq 0$ ,  $D \geq 0$ ,  $R \geq 0$ ,  $L \geq 0$ ,  $Y \geq 0$ ,  $I_0 \geq 0$ ,  $I_e \geq 0$ . E ainda,  $\phi(t) \in \Phi$  com  $\Phi \in [\phi_{min}, \phi_{max}]$ ,  $s_e(t) \in S_e$  com  $S_e \in [0, 1]$ ,  $s_0(t) \in S_0$  com  $S_0 \in [0, 1]$ .

Tipicamente, em trabalhos de crescimento econômico a exposição dos fatos se dá em termos de renda *per capita*. Poderiam ser usados outros indicadores como mortalidade infantil, expectativa de vida, etc. Mas a representação por renda *per capita* é uma “estatística sintética”, útil acerca do nível de desenvolvimento econômico no sentido que está altamente correlacionada com outros indicadores de qualidade de vida. Então é conveniente reescrever o modelo descrito até agora em termos de variáveis por trabalhador de

forma a estudar a evolução do produto *per capita* e do capital *per capita*. Seguindo uma abordagem usual na literatura, escreveremos o modelo com as variáveis “por trabalhador efetivo”, ou seja,  $Y/AL, K_0/AL$ , etc. Os cálculos dessa passagem podem ser encontrados no apêndice. Tem-se então:

$$\text{Max}_{s_e, s_0, \varphi} J = \int_0^{\infty} e^{(n-\rho)t} u(c(t)) dt \quad (5.3.6)$$

sujeito a:

$$y = i_0 + i_e + c = s_0 y + s_e y + c \quad (5.3.7)$$

$$y = k_0^\alpha e^\beta \quad (5.3.8)$$

$$e = k_e^{\alpha_e} r^{\beta_e} d^{\gamma_e} \quad (5.3.9)$$

$$\dot{k}_0 = s_0 y - (g + n + \mu_0) k_0 \quad (5.3.10)$$

$$\dot{k}_e = s_e y - (g + n + \mu_e) k_e \quad (5.3.11)$$

$$\dot{d} = \eta r - (\xi + g + n) d + \varphi \quad (5.3.12)$$

$$\dot{r} = -(\xi + g + n) r + \gamma d - \varphi \quad (5.3.13)$$

$$\varphi_{min} \leq \varphi(t) \leq \varphi_{max} \quad (5.3.14)$$

onde  $c = P_{marg} y$ .

Das expressões 5.3.8 e 5.3.9 chega-se a:

$$y = k_0^\alpha k_e^{\beta \alpha_e} r^{\beta \beta_e} d^{\beta \gamma_e} \quad (5.3.15)$$

Uma vez que este é um problema de controle ele pode ser resolvido usando o princípio do máximo de Pontryagin (Intriligator, 1971; Elgerd, 1967; Pontryagin, 1962). Seguindo este procedimento, acrescentamos ao problema 4 variáveis, uma para cada equação de estado. São as variáveis de co-estado, as quais vão compor o hamiltoniano incorporando

nele as restrições impostas pelas equações de movimento. Tem-se então:

$$H = e^{(n-\rho)t} \{u(c) + \lambda_0[s_0y - (g + n + \mu_0)k_0] + \quad (5.3.16)$$

$$+ \lambda_e[s_e y - (g + n + \mu_e)k_e] + \quad (5.3.17)$$

$$+ \lambda_d[\eta r - (\xi + g + n)d + \varphi] + \quad (5.3.18)$$

$$+ \lambda_r[-(\xi + g + n)r + \gamma d - \varphi]\} \quad (5.3.19)$$

Dessa expressão tiramos as condições de primeira ordem necessárias para a existência de um máximo local. Daí tem-se que:

1. Sendo o vetor de controle dado por  $u(t) = (s_0, s_e, \varphi)$ :

$$\frac{\partial H}{\partial s_0} = 0 \quad (5.3.20)$$

$$\frac{\partial H}{\partial s_e} = 0 \quad (5.3.21)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad (5.3.22)$$

2. Sendo o vetor de estado dado por  $\mathbf{x}(t) = (k_0, k_e, d, r)$ :

$$\frac{\partial H}{\partial k_0} = -\frac{d}{dt}[\lambda_0 e^{(n-\rho)t}] \quad (5.3.23)$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_e} = -\frac{d}{dt}[\lambda_e e^{(n-\rho)t}] \quad (5.3.24)$$

$$\frac{\partial H}{\partial d} = -\frac{d}{dt}[\lambda_d e^{(n-\rho)t}] \quad (5.3.25)$$

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{d}{dt}[\lambda_r e^{(n-\rho)t}] \quad (5.3.26)$$

3. As outras condições são as próprias equações de movimento dadas pelas expressões 5.3.10, 5.3.11, 5.3.12 e 5.3.13.

### 5.3.1 Resultados

As relações que se seguem foram obtidas das condições de otimalidade listadas anteriormente. O desenvolvimento algébrico completo pode ser encontrado no apêndice.

1. De 5.3.20 e 5.3.21 tem-se que:

$$\lambda_0 = \lambda_e = \frac{\partial u}{\partial c} \quad (5.3.27)$$

2. De 5.3.22 chega-se a:

$$\varphi(t) = \frac{M \cdot \sigma_r}{\lambda_r - \lambda_d} r + \frac{N \cdot \sigma_d}{\lambda_r - \lambda_d} d \quad (5.3.28)$$

onde  $M$  e  $N$  são as expressões;

$$\begin{aligned} M(t) &= \lambda_d \eta - \lambda_r (\xi + g + n) + \lambda_0 \frac{\beta \beta_e}{r} y \\ N(t) &= \lambda_r \gamma - \lambda_d (\xi + g + n) + \lambda_0 \frac{\beta \gamma_E}{d} y \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

Os termos  $\sigma_r$  e  $\sigma_d$  são as elasticidades do número de pesquisadores com relação ao incentivo governamental e do número de educadores com relação ao incentivo governamental, sendo dados por:

$$\sigma_r = \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\varphi}{r} \quad (5.3.30)$$

$$\sigma_d = \frac{\partial d}{\partial \varphi} \frac{\varphi}{d} \quad (5.3.31)$$

3. De 5.3.23 tem-se que:

$$\frac{\dot{\lambda}_0}{\lambda_0} + \alpha \frac{y}{k_0} - (\mu_0 + g + \rho) = 0 \quad (5.3.32)$$

4. De 5.3.24 tem-se:

$$\frac{\dot{\lambda}_e}{\lambda_e} + \beta \alpha_e \frac{y}{k_e} - (\mu_e + g + \rho) = 0 \quad (5.3.33)$$

5. As condições de otimalidade 5.3.25 e 5.3.26 geram um sistema de equações diferen-

ciais em  $\lambda_d$  e  $\lambda_r$  e outras variáveis do modelo, sendo dado por:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_r = \Gamma \cdot \lambda_r - \eta \cdot \lambda_d + F(t) \\ \dot{\lambda}_d = \Gamma \cdot \lambda_d - \gamma \cdot \lambda_r + G(t) \end{cases} \quad (5.3.34)$$

onde,

$$\Gamma = \xi + g + \rho \quad (5.3.35)$$

$$F(t) = -\lambda_e \cdot \beta \beta_e \cdot \frac{y}{r} \quad (5.3.36)$$

$$G(t) = -\lambda_e \cdot \beta \gamma_e \cdot \frac{y}{d} \quad (5.3.37)$$

6. Dos resultados 5.3.32 e 5.3.33 chega-se a:

$$\mu_0 - \mu_e = \alpha \frac{y}{k_0} - \beta \alpha_e \frac{y}{k_e} \quad (5.3.38)$$

7. Das equações 5.3.10 e 5.3.11 pode-se tirar resultados já conhecidos sobre as taxas de crescimento do capital para cada setor da economia:

$$g_{k_0} = s_0 \frac{y}{k_0} - (g + n + \mu_0) \quad (5.3.39)$$

$$g_{k_e} = s_e \frac{y}{k_e} - (g + n + \mu_e) \quad (5.3.40)$$

8. Das equações 5.3.12 e 5.3.13 tem-se um sistema em  $d$  e  $r$ .

9. Da equação 5.3.15 tem-se que:

$$g_y = \alpha g_{k_0} + \beta \alpha_e g_{k_e} + \beta \beta_e \frac{\dot{r}}{r} + \beta \gamma_e \frac{\dot{d}}{d} \quad (5.3.41)$$

## 5.4 Discussão

O resultado 5.3.27 já era previsto por modelos mais simples de crescimento. Segundo essa igualdade, ao longo da trajetória ótima, o preço sombra da acumulação de capital

educacional é igual ao preço sombra da acumulação do capital não-educacional; e ambos são iguais à utilidade marginal do consumo por trabalhador.

Ou seja, no curso ótimo, a utilidade adicional por mais consumo deve se igualar ao valor adicional de se investir mais em bens de capital educacionais e em não educacionais. Pode-se dizer ainda que o valor de se adicionar mais capital, tanto ao setor educacional quanto ao não-educacional deve ser igual a utilidade marginal do consumo.

Do resultado 5.3.28 pode-se ver que no controle  $\varphi$ , o que determina o peso do número de educadores e de pesquisadores, é um fator que depende tanto da elasticidade marginal de cada um desses profissionais com relação ao incentivo educacional (o próprio  $\varphi$ ), como dos custos de oportunidade dessas variáveis (dentro do  $M$  e do  $N$ ). Além de haver uma componente que depende da produtividade média dos educadores ou pesquisadores.

De 5.3.32 e 5.3.33 o lucro líquido de prender uma unidade de capital por trabalhador efetivo, ao longo da trajetória ótima, é zero. O lucro líquido é o produto marginal do capital educacional mais os ganhos de capital ( $\dot{\lambda}_e/\lambda_e$ ) menos as perdas por: depreciação do capital educacional, perdas pela taxa de crescimento da tecnologia e pela taxa de impaciência. A produção marginal de cada setor é proporcional à produção média do capital do setor, com um fator de proporcionalidade dado pela participação do capital do setor na renda final.

Fazendo  $\dot{\lambda}_d = \dot{\lambda}_r = 0$  obtém-se os pontos de equilíbrio do sistema 5.3.34:

$$\begin{aligned}\lambda_r^e &= \frac{\eta G(t) + \Gamma F(t)}{\eta\gamma - \Gamma^2} \\ \lambda_d^e &= \frac{\Gamma G(t) + \gamma F(t)}{\eta\gamma - \Gamma^2}\end{aligned}\tag{5.4.1}$$

Dessas equações pode-se ver que no regime permanente do sistema formado pelas equações 5.3.32, 5.3.33 e 5.3.34 tem-se que  $\lambda_0^e = \lambda_e^e = \lambda_d^e = \lambda_r^e = 0$ . Esse ponto de equilíbrio não pode ocorrer pela equação 5.3.28. Mas, além desse ponto de equilíbrio tem-se ainda, dessas mesmas expressões, que todos os valores de  $\lambda_e$  e  $\lambda_0$  para os quais se

verifica,

$$(\mu_0 + g + \rho) - \alpha \frac{y}{k_0} = 0 \quad (5.4.2)$$

$$(\mu_e + g + \rho) - \beta \alpha_e \frac{y}{k_e} = 0 \quad (5.4.3)$$

também são pontos de equilíbrio. Tem-se então infinitos pontos de equilíbrio. Nota-se que para reduzir o custo de oportunidade do capital educacional e do capital não-educacional deve-se ter  $\dot{\lambda}_0/\lambda_0 < 0$  e  $\dot{\lambda}_e/\lambda_e < 0$ . Para isso,

$$\frac{y}{k_0} > \frac{(\mu_0 + g + \rho)}{\alpha(s_0 + P_{marg})}$$

$$\frac{y}{k_e} > \frac{(\mu_e + g + \rho)}{\beta \alpha_e (s_e + P_{marg})}.$$

Então vê-se que para reduzir o custo de oportunidade do capital educacional aumentar o peso desse capital na formação da renda final.

Nota-se que como existem infinitos pontos de equilíbrio para as variáveis  $\lambda_i$ , com  $i = 0, e, r$  e  $d$ , pela equação 5.3.28, existem também infinitos pontos de equilíbrio para o  $\varphi$ . Pois o  $M$  e o  $N$  dependem dos  $\lambda$ 's.

Na equação 5.3.38 os dois termos do lado direito representam a produção marginal do capital educacional,

$$\frac{\partial y}{\partial k_e} = \beta \alpha_e \frac{y}{k_e} \quad (5.4.4)$$

e a produção marginal do capital não-educacional,

$$\frac{\partial y}{\partial k_0} = \alpha \frac{y}{k_0}. \quad (5.4.5)$$

Por esta expressão a diferença das taxas de depreciação do capital não-educacional e do capital educacional é igual à diferença das produções marginais dos capitais. Pode-se ver que estas produções marginais dos capitais são frações da produção média dos capitais.

A equação 5.3.11 indica que a acumulação de capital por trabalhador é determinada a cada período por quatro termos. Um deles é o montante de investimento bruto em

educação,  $s_e y$ , menos as perdas que ocorrem durante o processo produtivo pelos fatores de depreciação, crescimento populacional e desenvolvimento tecnológico.

Colocando a equação 5.3.11 em outro formato tem-se a equação 5.3.40, de onde nota-se que, para se ter uma taxa de crescimento positiva do capital educacional, um percentual  $s_e$  da produção média do capital educacional deve ser maior que o efeito das perdas por depreciação, pelo desenvolvimento tecnológico e pelo aumento populacional. Para a equação 5.3.39 há uma interpretação semelhante.

No estado estacionário tem-se que  $\dot{k}_0 = 0$   $\dot{k}_e = 0$  e daí,

$$\frac{y}{k_0} = \frac{g + n + \mu_0}{s_0} \quad (5.4.6)$$

$$\frac{y}{k_e} = \frac{g + n + \mu_e}{s_e} \quad (5.4.7)$$

Dessas duas equações, e de 5.4.2 e 5.4.3 chega-se que, no equilíbrio,

$$s_0^e = \frac{\alpha(g + n + \mu_0)}{(\rho + g + \mu_0)} \quad (5.4.8)$$

$$s_e^e = \frac{\beta\alpha_e(g + n + \mu_e)}{(\rho + g + \mu_e)} \quad (5.4.9)$$

Como  $s_e$  e  $s_0$  estão entre zero e um devemos ter no equilíbrio do curso ótimo,

$$\alpha < \frac{\rho + g + \mu_0}{n + g + \mu_0}$$

$$\beta\alpha_e < \frac{\rho + g + \mu_e}{n + g + \mu_e}.$$

Uma vez que, por hipótese,  $\rho > n$ , então as condições acima não levam a nenhum resultado significativo com relação a  $\alpha$  e  $\beta$ , pois eles já estão restritos ao intervalo  $[0, 1]$ .

Da equação 5.3.41 obtém-se que o crescimento do produto é igual a uma ponderação do crescimento do capital educacional, do crescimento do capital não educacional e do crescimento populacional. Os pesos são os expoentes da função de produção 5.3.15 que representam a participação das variáveis na renda. Estes pesos são as elasticidades

marginais da produção por trabalhador efetivo, com relação ao capital educacional,

$$\frac{\partial y}{\partial k_e} \frac{k_e}{y} = \beta \alpha_e$$

em relação ao capital não-educacional,

$$\frac{\partial y}{\partial k_0} \frac{k_0}{y} = \alpha$$

em relação ao número de pesquisadores,

$$\frac{\partial y}{\partial r} \frac{r}{y} = \beta \beta_e$$

e em relação ao número de educadores,

$$\frac{\partial y}{\partial d} \frac{d}{y} = \beta \gamma_e.$$

Pode-se ver dessas equações e de 5.3.41 que para uma economia com poucos educadores, pequenas variações na produção por educador provocam uma grande potencialização no acréscimo de novos educadores na economia em termos do efeito que esse acréscimo terá para a taxa de crescimento da produção por trabalhador efetivo. O mesmo ocorre para o número de pesquisadores. A taxa de variação da força de trabalho como um todo,  $L(t) = L_0(t) + L_e(t)$ , é assumida constante é igual a  $n$ . Então a taxa de variação da força de trabalho de cada setor da economia separadamente é igual a  $n$ . Mas a taxa com que, dentro do setor educacional, os trabalhadores são alocados seja para educação ou para pesquisa depende também da força de controle  $\varphi$ . Ou seja, as taxas de variação relativa para o número de educadores e de pesquisadores na equação 5.3.41 podem ser controladas pelos incentivos da política educacional para a alocação de cientistas em educação ou pesquisa.

Para uma economia com pouca produção do capital no setor educacional, qualquer variação relativa dessa produção aumenta a importância do crescimento do capital alocado para o setor educacional, no crescimento da economia. O mesmo sendo válido para o setor não-educacional. A importância dessas variações relativas é ponderada pela elasticidade

marginal do capital correspondente na produção por trabalhador efetivo.

Analisando a dinâmica das equações 5.3.12 e 5.3.13 tem-se como pontos de equilíbrio:

$$d^e = \left[ \frac{\eta - (\xi + g + n)}{\eta\gamma - (\xi + g + n)^2} \right] \varphi^e = P \cdot \varphi^e \quad (5.4.10)$$

$$r^e = \left[ \frac{(\xi + g + n) - \gamma}{\eta\gamma - (\xi + g + n)^2} \right] \varphi^e = Q \cdot \varphi^e \quad (5.4.11)$$

que mostram a dependência do número de pesquisadores e de educadores no equilíbrio, como sendo proporcional à força de controle. Uma vez que  $d^e$  e  $r^e$  são positivos e o  $\phi$  também é, vem que  $P \geq 0$  e  $Q \geq 0$ , e para isso:

- se  $\eta\gamma - (\xi + g + n)^2 > 0$ , então  $\eta \geq (\xi + g + n)$  e  $\gamma \leq (\xi + g + n)$ .
- se  $\eta\gamma - (\xi + g + n)^2 < 0$ , então  $\eta \leq (\xi + g + n)$  e  $\gamma \geq (\xi + g + n)$ .

Pelos pontos de equilíbrio vemos ainda que se não houver incentivo governamental, ou seja,  $\varphi = 0$  o número de pesquisadores e educadores tende para zero. Sendo assim, o governo deve sempre incentivar a educação, pois o setor não se sustenta por si só.

Para a equação 5.3.15 no equilíbrio tem-se,

$$y^e = (k_0^e)^\alpha \cdot (k_e^e)^{\beta\alpha_e} \cdot (r^e)^{\beta\beta_e} (d^e)^{\beta\gamma_e}$$

e daí,

$$y^e = \left[ \left( \frac{s_0^e}{g + n + \mu_0} \right)^\alpha \left( \frac{s_e^e}{g + n + \mu_e} \right)^{\beta\alpha_e} Q^{\beta\beta_e} P^{\beta\gamma_e} (\varphi^e)^{\beta(\beta_e + \gamma_e)} \right]^{\frac{1}{1 - \alpha - \beta\alpha_e}}. \quad (5.4.12)$$

Sendo  $y = Y/AL$  chega-se a expressão do PIB *per capita* como:

$$\left( \frac{Y}{L} \right)^e = \left[ \left( \frac{s_0^e}{g + n + \mu_0} \right)^\alpha \left( \frac{s_e^e}{g + n + \mu_e} \right)^{\beta\alpha_e} Q^{\beta\beta_e} P^{\beta\gamma_e} (\varphi^e)^{\beta(\beta_e + \gamma_e)} \right]^{\frac{1}{1 - \alpha - \beta\alpha_e}} A(t). \quad (5.4.13)$$

Discretizando a expressão anterior, tomando-se o PIB per capita no tempo  $t$  e no

tempo  $t + 1$  e dividindo ambos os membros das equações resultantes tem-se:

$$\frac{\left(\frac{Y}{L}\right)_{t+1}^e}{\left(\frac{Y}{L}\right)_t^e} = \frac{A_{t+1}}{A_t} = g$$

Vê-se então que no estado estacionário o crescimento do PIB *per capita* é determinado apenas pela taxa de desenvolvimento tecnológico,  $g$ , como previsto por diversos outros modelos de crescimento com tecnologia exógena.

No próximo capítulo seguem-se as conclusões e sugestões referentes a cada modelo separadamente.

# 6 CONCLUSÕES, COMENTÁRIOS E SUGESTÕES

## 6.1 Modelo Comportamental

O modelo comportamental proposto nesta dissertação tenta representar o funcionamento em conjunto de vários aspectos do comportamento do aluno dentro do sistema educacional. Mesmo assim ele omite muitos aspectos importantes do comportamento que certamente influenciam o processo motivacional. Pode-se pensar nessas características como um defeito, mas o modelo não tem por finalidade ser totalmente realista. O propósito é fornecer esclarecimento sobre aspectos particulares do fenômeno estudado. Se as hipóteses levam o modelo a fornecer respostas incorretas para alguma questão a que ele se proponha a responder, então essa falta de realismo pode ser um defeito ou simplesmente uma limitação do modelo. Se a simplificação não leva a conclusões incorretas, então essa falta de realismo pode ser uma virtude, pois isolando o efeito de interesse, a simplificação facilita o entendimento do fenômeno. O modelo deve representar os fenômenos de interesse e mesmo assim ser passível de tratamento, para que possa gerar resultados. Para o modelador

*“existe sempre o compromisso entre precisão e complexidade por um lado; e aproximação e simplicidade por outro” (Campello de Souza, 2002).*

### 6.1.1 Conclusões

- Constatou-se a existência de dois pontos de produção estável, ou seja, dois pontos de equilíbrio da motivação do aluno. Um ponto de produção nula e um ponto de produção previsível não nula. A evolução da dinâmica do aluno para algum desses pontos dependerá dos valores dos parâmetros do modelo que irão determinar a separatriz do plano em duas bacias de atração, cada uma para um dos pontos

mencionados. Dependendo dos valores iniciais de capacidade e disposição, o aluno tem chance de se encontrar numa região ou em outra.

- Pelo comportamento das trajetórias no plano, o modelo sugere o desenvolvimento de uma metodologia pedagógica que possa alterar os valores dos parâmetros de forma a fazer o aluno mudar de uma região de atração para a outra quando for preciso. Ou seja, sugere o desenvolvimento de um sistema de controle da dinâmica do aluno.
- Como os parâmetros do modelo são determinados pelo indivíduo e pela situação particular na qual ele se encontra, a existência da separatriz considera restrições ambientais que podem limitar o desempenho de um aluno em particular para certas situações. Representa também o nível de dificuldade que as restrições impõem, pela abrangência da bacia de atração do ponto na origem, tornando mais difícil a evolução para o ponto de equilíbrio não nulo. Pode representar ainda situações onde não há um ponto de produção estável não nula, como mostrado nas Figuras 4.6 e 4.10.
- Dando-se uma outra interpretação, pode-se entender o significado do modelo comportamental, interpretando tecnologia como o conjunto de todas as formas disponíveis para transformar insumos produtivos e insumos de produção em um produto formado. E assim, o ponto de operação determinado como sendo o ponto de equilíbrio do sistema, representa a tecnologia usada para gerar o capital humano no aluno. Ou seja, representam as pedagogias vencedoras.

### 6.1.2 Comentários e Sugestões para Trabalhos Futuros

1. Vale salientar que o modelo não considera todos os fatores psicológicos que interferem no comportamento do aluno, mas tentou-se utilizar aqueles aspectos relevantes que mais se ajustassem ao modelo considerado.
2. Deve-se ainda estabelecer unidades e escalas de medida para os parâmetros, variáveis e condições iniciais do modelo, além de desenvolver metodologias de mensuração para cada um destes. Pode-se fazer uso de técnicas estatísticas para medição dos

parâmetros verificando adequadamente seu ajuste ao modelo. O levantamento e tratamento estatístico de dados para investigação dos fenômenos considerados tem também como objetivo a validação do modelo. Representa a etapa de indução no processo hipotético de busca do conhecimento, ajustando-o às observações (Campello de Souza, 2002).

3. Uma vez que o modelo supõem a predominância de um subsistema comportamental sobre os outros, há ainda a necessidade de modelar a interação entre os subsistemas comportamentais podendo neste processo serem incorporados outros mecanismos, que não apenas os psicológicos. Nesta modelagem pode-se considerar aspectos de interação social, tais como costumes, cultura e linguagem.
4. Pode-se tentar ampliar o modelo acrescentando à dinâmica da necessidade no sistema de equações.

## 6.2 Modelo Econômico

O modelo não é um fim por si só, e sim uma ferramenta usada para se chegar a um maior entendimento sobre um determinado assunto. A proposta do trabalho era obter relações que indicassem como as variáveis econômicas englobadas pelo modelo deveriam se comportar ao longo do tempo no curso de uma trajetória de crescimento ótimo. Essas relações foram dadas no capítulo anterior com suas respectivas interpretações. Algumas delas são resultados já obtidos por outros modelos de crescimento, mostrando que o modelo não contraria resultados clássicos já esperados. Outras expressões apresentaram uma interpretação um pouco mais complicada, tornando necessário o uso de outras técnicas de análise que auxiliem o seu entendimento.

### 6.2.1 Conclusões

- A relação 5.3.41 mostra que é possível intervir na taxa de crescimento da economia pelo controle da força de trabalho educacional, ou seja, pela manipulação do número de educadores e pesquisadores no setor educacional.

- O interesse e escolha das taxas de poupança como forças de controle vem da suposição de que a forma como é feito o investimento em capital humano em um modelo influencia diretamente o impacto da política educacional no crescimento econômico. Apesar disso, devido às dificuldades encontradas pela não linearidade das equações diferenciais resultantes, só foram obtidas expressões para as variáveis no estado estacionário.
- O modelo não trata diretamente do capital humano, mas trata do setor educacional na economia. A educação é o principal fator de formação do capital humano, mas por sua vez, a produção educacional tem como um dos principais fatores de sua formação o capital humano de pessoas que já passaram pelo processo de educação que se representa aqui. Então, tanto o capital humano é um insumo fundamental para a educação, como a educação é um insumo fundamental para o capital humano. Ocorre, portanto, uma realimentação positiva, que implica num ciclo virtuoso.

### 6.2.2 Comentários e Sugestões para Trabalhos Futuros

1. O modelo pode ser usado para responder questões fundamentais do crescimento e desenvolvimento econômicos, tais como:
  - Por que alguns países são ricos e outros são pobres? Esta é uma pergunta relacionada aos níveis de desenvolvimento e distribuição mundial de rendas *per capita*.
  - Qual o principal fator que determina o crescimento econômico? Ou seja, quais fatores levam algumas economias a registrar crescimento sustentado no produto por trabalhador por longos períodos de tempo. Outros modelos respondem esta pergunta afirmando que o resposta está no progresso tecnológico. Mas em termos do investimento em educação e pesquisa, de que forma esse modelo responderia a essa pergunta?
  - Explicar os milagres do crescimento econômico, tais como Hong-Kong, o Japão após a segunda guerra mundial, Coréia do Sul, Cingapura. Com esses países conseguiram passar de “pobres” para “ricos” em um tempo tão curto.

2. Colocar o crescimento tecnológico como sendo dado endogenamente pelo modelo relacionando-o com a produção do setor educacional. Para tanto pode-se usar algum modelo já existente de crescimento com progresso tecnológico dado endogenamente e tentar ajustá-lo ao modelo proposto nesse trabalho.
3. Definir formas de se medir a produção do setor educacional ou inferir algo a respeito dela por meio de indicadores econômicos ou variáveis já existentes de forma a poder simular o modelo e assim poder visualizar e entender melhor as relações entre as variáveis e suas implicações para o modelo como um todo.
4. Analisar efeitos transitórios de variações nas taxas de poupança do setor educacional e do setor não educacional.
5. Relacionar a variável de controle  $\varphi$  com o a taxa de poupança do setor educacional, de forma a interligar mais as equações diferenciais.
6. Relacionar a produção do setor educacional com o tempo que o trabalhador dedica à aquisição de conhecimento e habilidades, seja por anos de escolaridade ou por tempo em outras formas de aprendizado.
7. Supor uma expressão para a função utilidade.

# A Apêndice

## A.1 Aplicação do Princípio do Máximo de Pontryagin

O modelo original é:

$$\max_{s_e, s_0, \Phi} J = \int_0^{\infty} e^{(n-\rho)t} u(c(t)) dt$$

sujeito a:

$$Y(t) = C(t) + I(t) = C(t) + I_e(t) + I_0(t)$$

$$Y = K_0^\alpha E^\beta (AL)^{1-\alpha-\beta}$$

$$E = K_e^{\alpha_e} R^{\beta_e} D^{\gamma_e} (AL)^{1-\alpha_e-\beta_e-\gamma_e}$$

$$\dot{K}_0 = s_0 Y - \mu_0 K_0$$

$$\dot{K}_e = s_e Y - \mu_e K_e$$

$$\dot{D} = -\xi D + \eta R + \Phi$$

$$\dot{R} = \gamma D - \xi R - \Phi$$

$$\dot{L}(t) = nL(t)$$

$$\dot{A}(t) = gA(t)$$

$$\Phi_{min} \leq \Phi(t) \leq \Phi_{max} \tag{A.1.1}$$

Onde  $K_0 \geq 0$ ,  $K_e \geq 0$ ,  $D \geq 0$ ,  $R \geq 0$ ,  $L \geq 0$ ,  $Y \geq 0$ ,  $I_0 \geq 0$ ,  $I_e \geq 0$ .

Passando as variáveis para por trabalhador efetivo:

$$c(t) = \frac{C(t)}{AL}$$

$$y = \frac{Y}{AL} = \frac{K_0^\alpha E^\beta (AL)^{1-\alpha-\beta}}{AL} = \frac{K_0^\alpha E^\beta}{(AL)^{\alpha+\beta}}$$

$$y = \left( \frac{K_0}{AL} \right)^\alpha \left( \frac{E}{AL} \right)^\beta = k_0^\alpha e^\beta$$

$$\tag{A.1.2}$$

Da mesma forma:

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{E}{AL} = \frac{K_e^{\alpha_e} R^{\beta_e} D^{\gamma_e} (AL)^{1-\alpha_e-\beta_e-\gamma_e}}{AL} = \\
 &= \left(\frac{K_e}{AL}\right)^{\alpha_e} \left(\frac{R}{AL}\right)^{\beta_e} \left(\frac{D}{AL}\right)^{\gamma_e} = k_e^{\alpha_e} r^{\beta_e} d^{\gamma_e}
 \end{aligned} \tag{A.1.3}$$

Para as equações de estado:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{K_0}{AL} \right) &= \frac{\dot{K}_0 AL - (\dot{A}L + A\dot{L})K_0}{(AL)^2} \\
 &= \frac{\dot{K}_0}{AL} \frac{AL}{AL} - \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} \right) \frac{K_0}{AL} = \\
 &= \frac{\dot{K}_0}{AL} - (g+n)k_0 = s_o \frac{Y}{AL} - \mu_0 \frac{K_0}{AL} - (g+n)k_0
 \end{aligned} \tag{A.1.4}$$

Então:

$$\dot{k}_0 = s_0 y - (g+n+\mu_0)k_0 \tag{A.1.5}$$

Da mesma forma, para o capital educacional:

$$\dot{k}_e = s_e y - (g+n+\mu_e)k_e \tag{A.1.6}$$

Para o número de educadores:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{D}{AL} \right) &= \frac{\dot{D}AL - (\dot{A}L + A\dot{L})D}{(AL)^2} \\
 &= \frac{\dot{D}}{AL} \frac{AL}{AL} - \left( \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} \right) \frac{D}{AL} = \\
 &= -\xi \frac{D}{AL} + \eta \frac{R}{AL} + \frac{\varphi}{AL} - (g+n)d
 \end{aligned}$$

Então tem-se:

$$\dot{d} = \eta r - (\xi + g + n)d + \varphi$$

Da mesma forma, para o número pesquisadores:

$$\dot{r} = -(\xi + g + n)r + \gamma d - \varphi$$

Tem-se então o modelo por trabalhador efetivo:

$$\max_{s_e, s_0, \varphi} J = \int_0^{\infty} e^{(n-\rho)t} u(c(t)) dt \quad (\text{A.1.7})$$

sujeito a:

$$y = i_0 + i_e + c = s_0 y + s_e y + c \quad (\text{A.1.8})$$

$$y = k_0^\alpha e^\beta \quad (\text{A.1.9})$$

$$e = k_e^{\alpha_e} r^{\beta_e} d^{\gamma_e} \quad (\text{A.1.10})$$

$$\dot{k}_0 = s_0 y - (g + n + \mu_0) k_0 \quad (\text{A.1.11})$$

$$\dot{k}_e = s_e y - (g + n + \mu_e) k_e \quad (\text{A.1.12})$$

$$\dot{d} = \eta r - (\xi + g + n) d + \varphi \quad (\text{A.1.13})$$

$$\dot{r} = -(\xi + g + n) r + \gamma d - \varphi \quad (\text{A.1.14})$$

$$\varphi_{min} \leq \varphi(t) \leq \varphi_{max} \quad (\text{A.1.15})$$

onde  $c = P_{marg} y$ . E ainda,

$$y = k_0^\alpha k_e^{\beta \alpha_e} r^{\beta \beta_e} d^{\beta \gamma_e} \quad (\text{A.1.16})$$

Na aplicação do Princípio do Máximo de Pontriagyn deve-se proceder, primeiramente, determinando o hamiltoniano,

$$\begin{aligned} H = e^{(n-\rho)t} \{ & u(c) + \lambda_0 [s_0 y - (g + n + \mu_0) k_0] + \\ & + \lambda_e [s_e y - (g + n + \mu_e) k_e] + \\ & + \lambda_d [\eta r - (\xi + g + n) d + \varphi] + \\ & + \lambda_r [-(\xi + g + n) r + \gamma d - \varphi] \} \end{aligned}$$

e em seguida aplicar as condições de otimalidade. Temos então:

1. Sendo o vetor de controle dado por  $u(t) = (s_0, s_e, \varphi)$ :

$$\frac{\partial H}{\partial s_0} = 0$$

$$e^{(n-\rho)t} \left\{ \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial s_0} + \lambda y \right\} = 0$$

Como

$$\frac{\partial c}{\partial s_0} = y,$$

então:

$$\frac{\partial u}{\partial c} = \lambda_0$$

De forma semelhante, para o  $s_e$  tem-se que:

$$\frac{\partial H}{\partial s_e} = 0$$

Que leva a:

$$\frac{\partial u}{\partial c} = \lambda_e$$

Para a variável  $\varphi$ :

$$\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varphi} + \lambda_0 s_0 \left[ \frac{\partial y}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right] +$$

$$+ \lambda_e s_e \left[ \frac{\partial y}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varphi} \right] + \lambda_d \left[ \eta \frac{\partial r}{\partial \varphi} - (\xi + g + n) \frac{\partial d}{\partial \varphi} + 1 \right] + \quad (\text{A.1.17})$$

$$+ \lambda_r \left[ \gamma \frac{\partial d}{\partial \varphi} - (\xi + g + n) \frac{\partial r}{\partial \varphi} - 1 \right] = 0 \quad (\text{A.1.18})$$

Que leva a:

$$\left[ \left( \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y} + \lambda_0 s_0 + \lambda_e s_e \right) \frac{\partial y}{\partial d} + \lambda_r \gamma - \lambda_d (\xi + g + n) \right] \frac{\partial d}{\partial \varphi} + \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y} + \lambda_0 s_0 + \lambda_e s_e \right) \frac{\partial y}{\partial r} + \lambda_d \eta - \lambda_r (\xi + g + n) \right] \frac{\partial r}{\partial \varphi} + \lambda_d - \lambda_r = 0$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y} + \lambda_0 s_0 + \lambda_e s_e &= (1 - s_0 - s_e) \lambda_0 + \lambda_0 s_0 + \lambda_e s_e = \lambda_e \\ \frac{\partial y}{\partial d} &= \beta \gamma_e \frac{y}{d} \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \beta \beta_e \frac{y}{r} \end{aligned}$$

Tem-se que:

$$\left[ \lambda_e \beta \gamma_e \frac{y}{d} + \lambda_r \gamma - \lambda_d (\xi + g + n) \right] \frac{\partial d}{\partial \varphi} + \left[ \lambda_e \beta \beta_e \frac{y}{r} + \lambda_d \eta - \lambda_r (\xi + g + n) \right] \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \lambda_r - \lambda_d$$

Chamando os termos entre colchetes de  $M$  e  $N$ , temos:

$$\begin{aligned} M &= \lambda_e \beta \beta_e \frac{y}{r} + \lambda_d \eta - \lambda_r (\xi + g + n) \\ N &= \lambda_e \beta \gamma_e \frac{y}{d} + \lambda_r \gamma - \lambda_d (\xi + g + n) \end{aligned}$$

E daí:

$$N \frac{\partial d}{\partial \varphi} \frac{\varphi}{d} + M \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\varphi}{r} = \lambda_r - \lambda_d$$

Agora fazendo,

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\varphi}{r} \\ \sigma_d &= \frac{\partial d}{\partial \varphi} \frac{\varphi}{d} \end{aligned}$$

2. Sendo o vetor de estado dado por  $\mathbf{x}(t) = (k_0, k_e, d, r)$ : Para a variável  $k_0$  temos:

$$\frac{\partial H}{\partial k_0} = -\frac{d}{dt}[\lambda_0 e^{(n-\rho)t}]$$

$$e^{(n-\rho)t} \left\{ \frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial k_0} + \lambda_0 s_0 \frac{\partial y}{\partial k_0} + \lambda_e s_e \frac{\partial y}{\partial k_0} - \lambda_0 (g + n + \mu_0) \right\} = \lambda_0 (\rho - n) e^{(n-\rho)t} - \dot{\lambda}_0 e^{(n-\rho)t}$$

Daí,

$$\dot{\lambda}_0 = \lambda_0 (\rho - n) - \lambda_0 (1 - s_0 - s_e) \alpha \frac{y}{k_0} - \lambda_0 s_0 \alpha \frac{y}{k_0} - \alpha \lambda_e s_e \frac{\partial y}{\partial k_0} + \lambda_0 (g + n + \mu_0)$$

$$\dot{\lambda}_0 = \lambda_0 (g + n + \mu_0) - \lambda_0 \alpha (s_0 + s_e + P_{marg}) \frac{y}{k_0}$$

$$\frac{\dot{\lambda}_0}{\lambda_0} = (g + n + \mu_0) - \alpha \frac{y}{k_0} \quad (\text{A.1.19})$$

Da mesma forma, para  $k_e$ :

$$\frac{\partial H}{\partial k_e} = -\frac{d}{dt}[\lambda_e e^{(n-\rho)t}]$$

E daí chega-se a:

$$\frac{\dot{\lambda}_e}{\lambda_e} = (g + n + \mu_e) - \beta \alpha_e \frac{y}{k_e} \quad (\text{A.1.20})$$

Para  $r$  tem-se:

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{d}{dt}[\lambda_r e^{(n-\rho)t}]$$

$$\frac{\partial u}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \lambda_0 s_0 \frac{\partial y}{\partial r} + \lambda_e s_e \frac{\partial y}{\partial r} + \lambda_d \eta - \lambda_r (\xi + g + n) = -\dot{\lambda}_r + (\rho - n) \lambda_r$$

$$\lambda_e P_{marg} \beta \beta_e \frac{y}{r} + \lambda_0 s_0 \beta \beta_e \frac{y}{r} + \lambda_e s_e \beta \beta_e \frac{y}{r} + \lambda_d \eta - \lambda_r (\xi + g + \rho) = -\dot{\lambda}_r$$

$$\dot{\lambda}_r = \lambda_e \beta \beta_e \frac{y}{r} [P_{marg} + s_0 + s_e] - \lambda_d \eta + \lambda_r (\xi + g + \rho)$$

$$\dot{\lambda}_r = \lambda_r (\xi + g + \rho) - \lambda_d \eta - \lambda_e \beta \beta_e \frac{y}{r} \quad (\text{A.1.21})$$

Da mesma forma, para  $d$  tem-se:

$$\frac{\partial H}{\partial d} = -\frac{d}{dt}[\lambda_d e^{(n-\rho)t}]$$

que nos leva a:

$$\dot{\lambda}_d = \lambda_d (\xi + g + \rho) - \gamma \lambda_r - \lambda_e \beta \gamma_e \frac{y}{d} \quad (\text{A.1.22})$$

3. As outras condições são as próprias equações de movimento dadas pelas expressões A.1.11, A.1.12, A.1.13 e A.1.14.

Sabendo que  $\lambda_e = \lambda_0$  que leva a,  $\dot{\lambda}_e = \dot{\lambda}_0$ , e usando as equações A.1.19 e A.1.20 tem-se que:

$$\begin{aligned} (g + n + \mu_0) - \alpha \frac{y}{k_0} &= (g + n + \mu_e) - \beta \alpha_e \frac{y}{k_e} \\ \mu_0 - \mu_e &= \left[ \alpha \frac{y}{k_0} - \beta \alpha_e \frac{y}{k_e} \right] \end{aligned} \tag{A.1.23}$$

De A.1.11:

$$\dot{k}_0 = s_0 y - (g + n + \mu_0) k_0$$

De onde se tira que,

$$\frac{\dot{k}_0}{k_0} = s_0 \frac{y}{k_0} - (g + n + \mu_0)$$

Chamando  $\frac{\dot{k}_0}{k_0}$  de  $g_{k_0}$  tem-se que:

$$g_{k_0} = s_0 \frac{y}{k_0} - (g + n + \mu_0).$$

Da mesma forma para a equação A.1.12 tem-se:

$$g_{k_e} = s_e \frac{y}{k_e} - (g + n + \mu_e).$$

No estado de equilíbrio, para as duas equações anteriores:

$$\begin{aligned} k_0^e &= \frac{s_0^e}{g + n + \mu_0} y^e \\ k_e^e &= \frac{s_e^e}{g + n + \mu_e} y^e \end{aligned}$$

Tirando o logaritmo dos dois membros de A.1.16 e derivando com relação ao tempo:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha \frac{\dot{k}_0}{k_0} + \beta \alpha_e \frac{\dot{k}_e}{k_e} + \beta \beta_e \frac{\dot{r}}{r} + \beta \gamma_e \frac{\dot{d}}{d}$$

E daí,

$$g_y = \alpha g_{k_0} + \beta \alpha_e g_{k_e} + \beta \beta_e \frac{\dot{r}}{r} + \beta \gamma_e \frac{\dot{d}}{d}$$

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASTHON, D.; GREEN, F. Human capital and economic growth. *Policy Options*, Jul/Aug, p. 14–16. 1997.
- BEAUDRY, PAUL. Population growth, technological adoption and economic outcomes in the information era. *Review of Economic Dynamics*, p. 749–774. 2002.
- BECKER, GARY. Human Capital. In: *THE CONCYSE Encyclopedia of Economics*. 2005. Disponível em: <http://www.econlib.org/library/Enc/HumanCapital.html>. Acesso em 15 de abril de 2005.
- CAMPELLO DE SOUZA, F. M. *Decisões racionais em situações de incerteza*. Recife: Universitária-UFPE. 2002.
- CAMPELLO DE SOUZA, F. M. *Programação Matemática*. 2006. Livro em preparação.
- CAMPELLO DE SOUZA, F. M. (ORG.). *Tópicos em Engenharia de Sistemas*. v. 1. Recife-PE: Universitária-UFPE. 2004.
- CHEN, HUNG-JU. Educational systems growth and income distribution: a quantitative study. *Journal of Development Economics*, p. 325–353. 2005.
- CHIANG, A. C. *Elements of dynamic optimization*. New York: McGraw Hill. 1992.
- DIASMER, BLOE P. Development and human capital. *The Heinz School Review*, v. 1, n. 1, p. 1–14. 2004. Disponível em: <http://journal.heinz.cmu.edu/archive/vol1iss1.html>. Acesso em 19 de agosto de 2005.
- DORF, R. C; BISHOP, R. H. *Sistemas de controle moderno*. 8 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos. 1973.

- DREYER, D. Brasil, penúltimo em desempenho escolar. 2003. Disponível em: [www.educaionl.com.br/noticiacomentada/](http://www.educaionl.com.br/noticiacomentada/). Acesso em: 20 de dezembro de 2004.
- ELGERD, O. I. *Control systems theory*. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha – LTD. 1967. (International Student Edition).
- HERSEY, P., BLANCHARD K. *Psicologia para administradores: a teoria e as técnicas da liderança situacional*. São Paulo: Ed. Pedagógica e Universitária. 1986.
- INTRILIGATOR, M. D. *Mathematical optimization and economic theory*. New Jersey: Prentice Hall. 1971.
- JERÔME-FORGET, M. Investing in human capital. *Policy Options*, Jul/Aug. 1997.
- JONES, C. L. R&D – Based models of economic growth. *Journal of Political Economy*, v. 103, n. 4, p. 759–784. 1995.
- JONES, C. L. *Introdução à teoria do crescimento econômico*. 3 ed. Campus. 1998.
- LAROCHE, M.; M. MÉRETTE; G. C. RUGGERI. On the concept and dimensions of human capital in a knowledge-based economy context. *Canadian Public Policy-Analyse de Politiques*, v. 25, n. 1, p. 88–100. 1999.
- LINS, LUCIANO NADLER. *Modelagem dinâmica de processos reguladores do comportamento humano nas organizações*. 2004, 114f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Pernambuco–CTG–PPGEP, Recife–PE. 2004.
- MANSFIELD, EDWIN. *Principles of microeconomics*. New York: W. Norton & Company. 1974.
- ORTIGUEIRA, SALVADOR. Equipment prices, human capital and economic growth. *Journal of Economic Dynamics & Control*, p. 307–329. 2003.
- PETERSON, WILLIS S. *Principles of economics*. 3 ed. Homewood, Illinois: Richard D. Irwin. 1977. (The Irwin Series in Economics).

- PONTRYAGIN, L. S.; BOLTYANSKII V. G.; GRAMKELIDZE R. V. ; MISCHENKO, E. F. *The mathematical theory of optimal processes*. New York: Interscienc Publishers. 1962.
- PUBLIFOLHA. *Enciclopédia do Mundo Contemporâneo: estatísticas e informações completas dos 217 países do planeta*. São Paulo, SP: Terceiro Milênio. 1999. A Enciclopédia do Mundo Contemporâneo é resultado de um amplo trabalho de pesquisa coordenado pelo Instituto do Terceiro Mundo, do Uruguai, e realizado mediante a cooperação de uma rede internacional de pesquisadores, editores e entidades civis. É publicado em espanhol e inglês desde 1979. ISBN 85-7402-149-0.
- RINALDI, S.; CORDONE, R.; CASAGRANDE R. Instabilities in creative professions: a minimal model. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, v. 4, n. 3, p. 255–273. 2000.
- ROMER, DAVID. *Advanced macroeconomics*. 2 ed. New York: MacGraw-Hill. 2001.
- ROMER, M. PAUL. Endogenous technological change. *Journal of Political Economy*, v. 98, n. 5, p. S71–S102. 1990.
- ROMER, M. PAUL. The origins of endogenous growth. *Journal of Economic Perspectives*, v. 8, n. 1, p. 3–22. 1994.
- SALES, SÓSTENES DINIZ. *Dos custos à qualidade: a era da gestão da universidade brasileira*. Recife: Ed. da Universidade Federal de Pernambuco. 1995. (Didática).
- SCHULTZ, W. THEODORE. Investment in human capital. *The American Economic Review*, v. 51, n. 1, p. 1–17. 1961.
- SHARPE, ANDREW. Discussion paper on health and education, human capital indicators. Centre for the Study of Living Standards. 2001. Disponível em: [www.nrtee-trnee.ca/eng/programs/current\\_programs/SDIndicators/program\\_research/](http://www.nrtee-trnee.ca/eng/programs/current_programs/SDIndicators/program_research/). Acesso em: 10 de junho de 2005.
- SILVA, ALEXANDRE STAMFORD DA. *Uso dos recursos energéticos água e energia solar: implicações econômicas e decisão através de modelos dinâmicos*. 1999, 138f. Tese

- (Doutorado em Economia), Universidade Federal de Pernambuco – PIMES, Recife–PE. 1999.
- SILVA, ALANE A. ; CAMPELLO DE SOUZA, F. M.; BARROS JUNIOR P. F. R. *A população do Recife e seu pólo médico: uma visão pela teoria da decisão*. v. 1. 2004. In: Campello de Souza, F. M.(Org.). *Tópicos de Engenharia de Sistemas*. p. 97–107.
- SLACK, N. *Administração da produção*. São Paulo: Atlas. 1996.
- SOUZA, LUCIANO BRANDÃO. *O mercado automotivo do grande Recife: análise atual e perspectivas*. 2004, 144f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção), Universidade Federal de Pernambuco–CTG, Recife-PE. 2004.
- STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*. 12 ed. Cambridge: Perseus Books. 1994.
- SVEIBY, KARL ERIK. *A nova riqueza das organizações: gerenciando e avaliando patrimônios de conhecimento*. Campus. 1997.
- TEIXEIRA, C. F. H. *Modelo dinâmico estocástico de sistemas educacionais*. 1998, 138f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), Universidade Federal de Pernambuco – CTG – Departamento de Eletrônica e Sistemas, Recife–PE. 1998.
- TERRA, JOSÉ CLÁUDIO C. *Gestão do conhecimento: o grande desafio empresarial*. Ed. Negócio. 2000.
- VAN GEERT, P. We almost had a great future behind us: the contributions of non-linear dynamics to developmental science-in-the-making. *Developmental Science*, v. 1, n. 1, p. 143–159. 1998.
- VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. *Theory of games and economic behavior*. 3 ed. Princeton, NJ: Princeton University Press. 1944.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)