

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN

TESE DE DOUTORADO

**Álgebras de Clifford, Generalizações
e Aplicações à Física-Matemática**

ROLDÃO DA ROCHA JR.

Orientador: PROF. DR. JAYME VAZ JR.

*Tese apresentada ao Instituto de Física Gleb Wataghin,
Unicamp, como requisito parcial para a obtenção do
Título de Doutor em Ciências.*

Banca Examinadora:

1. Prof. Dr. Jayme Vaz Jr.
2. Prof. Dr. Francesco Toppan
3. Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira
4. Profa. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato
5. Prof. Dr. José Bellandi Filho

Campinas, 03 de Novembro de 2005.

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

*Men wanted for hazardous journey. Low rages, bitter cold, long months of complete darkness,
isolation and starvation, constant danger, safe return doubtful.*¹

Ernest Shackleton

I was stunned, I was knocked off my chair, I was overwhelmingly depressed. . .

Leonard Susskind

¹Em 29 de dezembro de 1913, anúncio de um jornal britânico, convocando voluntários para viagem ao Pólo Sul. Mais de cinco mil inscritos, dentre os quais três mulheres.

Agradecimentos

A Deus

Por tudo!

A ♡ Papaizinho e Mamãezinha ♡

Por serem a causa direta da minha vida, por todo o apoio, carinho, presença, amor, dedicação e incentivo incondicionais e sempre presentes. Que esta Tese seja um pagamento, embora ínfimo, por um débito tão infinito não-enumerável.

A Adriana ♡♡

Pelo amor, carinho, paz, compreensão. Pela tua Sustentação e Fortaleza durante todo o processo, e pela felicidade, fé e GRANDE SABEDORIA. Meu Grande Amor. . .

Agradecimento geral a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para esta tese.

Devo agradecer ao meu orientador, professor Jayme Vaz, por todo seu apoio, suas idéias e seu investimento. Pelo fino equilíbrio entre a liberdade e a exigência.

A Vô Roldão, Vó Nadir, Vô Russo e Vó Guiomar, que me ajudaram bastante. A minhas Irmãs queridas Cris e Ana, ao Harllen pela sua enorme paciência e carinho, sobrinhos e afilhados. À minha família toda, por todo o apoio e carinho.

A meus Amigos, não há palavras suficientes capazes de agradecer a vocês tudo que fizeram. Não vou citar nomes para não haver injustiças.

Ao IFGW, por me proporcionar motivação e logística necessárias para tornar melhor minha formação e mais confortável a confecção desta Tese.

Ao Dr. Ricardo A. Mosna por todas as discussões, sugestões e eterna disponibilidade ao auxílio. Ao Prof. Waldyr Alves Rodrigues Jr., pelos momentos de investimento, e ao Prof. Edmundo Capelas de Oliveira pela década colaborativa.

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro, que viabilizou este projeto.

Resumo

Investigamos generalizações das álgebras de Clifford (ACs) e suas vastas aplicações na Física. Classificamos o mais novo candidato à descrição da matéria escura como um campo espinorial bandeira, que pertence à classe 5 proposta por Lounesto, de acordo com os valores assumidos pelos seus covariantes bilineares. Decompomos a AC em partes α -pares e α -ímpares relativas a uma dada α -gradação automórfica interna, além de descrever suas diversas conseqüências na decomposição de operadores que agem sobre a álgebra exterior e sobre a AC. Além de escrever a equação de Dirac no contexto dessa decomposição, estendemos os resultados conhecidos sobre uma partícula-teste nas vizinhanças de um buraco negro de Schwarzschild para um buraco negro de Reissner-Nordstrøm. Introduzimos as ACs estendidas, construídas sobre duas cópias (quiral e aquiral) de um espaço vetorial de dimensão finita munido de uma métrica de assinatura (p, q) . Formulamos a AC sobre uma cópia quiral do contraespaço, mostrando propriedades surpreendentes, tais como: a indefinição do elemento de volume do contraespaço sob o produto regressivo, com a possibilidade de ele ser um escalar ou pseudoescalar, dependendo da dimensão do espaço vetorial; e o fato de que a co-cadeia de de Rham do operador codiferencial ser formada por uma seqüência de subespaços homogêneos da álgebra exterior subseqüentemente quirais e aquirais. Dessa maneira provamos que a álgebra exterior sobre o espaço e aquela construída sobre o contraespaço são apenas pseudo-duais ao introduzirmos quiralidade. A superálgebra de Poincaré é obtida a partir da introdução de algumas estruturas algébricas sobre o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , a partir da utilização de *spinors* puros e do Princípio da Trialidade juntamente com sua generalização. Introduzimos os octonions no contexto das ACs e definimos unidades octoniônicas parametrizadas por elementos arbitrários, mas fixos, de uma AC sobre $\mathbb{R}^{0,7}$ e também produtos octoniônicos entre multivetores, além de generalizarmos as identidades de Moufang para esse formalismo. O Modelo Padrão das partículas elementares é rediscutido nesse contexto, além de obtermos uma Teoria de Calibre não-associativa em $\mathcal{Cl}_{0,7}$, onde o campo espinorial é dado pela soma direta de um quark e um lépton. Finalmente introduzimos as isotopias, associativas e não-associativas, das ACs e em particular a simetria de sabor $SU(6)$ dos quarks se apresenta como uma simetria exata dentro do contexto do levantamento isotópico da AC \mathcal{Cl}_{12} . Bárions e mésons também são descritos nesse contexto.

Abstract

We investigate Clifford algebras (ACs) generalizations and their wide applications in Physics. The candidate for the description of the dark matter is classified as a flagpole spinor field, that is in the class 5 spinors proposed by Lounesto according to his spinor field classification by the values assumed by their bilinear covariants. The AC is split in α -even and α -odd components, related to a given inner automorphic α -grading, besides describing various consequences of this decomposition in the splitting of operators acting on the exterior and Clifford algebras. Besides writing the Dirac equation in the spacetime splitting context, we extend the well known results concerning a spinning test particle in a Schwarzschild black hole neighborhood to a Reissner-Nordström black hole. We also introduce the extended ACs associated with two copies (chiral and achiral) of a finite-dimensional vector space endowed with a metric of signature (p, q) . ACs are formulated on a chiral copy of the counterspace, where we show astounding and astonishing properties such as: the de Rham co-chain associated with the codifferential operator is constituted by a sequence of exterior algebra homogeneous subspaces subsequently chiral and achiral. Thus we prove that the exterior algebra on the space and the exterior algebra constructed on the counterspace are pseudoduals, if we introduce chirality. The Poincaré superalgebra is obtained from the introduction of some algebraic structures on the Euclidean space \mathbb{R}^3 , via the pure spinor formalism and the triality principle and its generalization. Octonions are introduced in the context of ACs and we define AC-parametrized octonionic units, besides generalizing Moufang identities in this context. The Standard Model of elementary particles is revisited in the octonionic context and we also obtain a gauge theory using the new octonionic products introduced, where a spinor field describes the direct sum of a quark and a lepton. Finally we introduce associative and non-associative isotopies of ACs. In particular we present the flavor quark symmetry $SU(6)$ as an exact symmetry in the $\mathcal{C}\ell_{12}$ isotopic lifting context. Barions and mesons are also described via isotopic lifting of ACs.

Conteúdo

Introdução	1
1 Álgebras de Clifford e <i>Spinors</i>	9
1.1 Preliminares	9
1.1.1 Produto tensorial	10
1.2 Álgebra exterior	10
1.2.1 Operações dentro da álgebra exterior	12
1.3 A álgebra de Grassmann	13
1.3.1 Isomorfismo de Hodge	14
1.4 A álgebra exterior como quociente da álgebra tensorial	14
1.5 Álgebras de Clifford (I)	15
1.6 Álgebras de Clifford (II)	16
1.7 Álgebras de Clifford (III)	17
1.8 Classificação e representação das álgebras de Clifford	18
1.8.1 Ideais	18
1.8.2 Idempotentes	18
1.8.3 Teoremas sobre a estrutura das álgebras de Clifford	19
1.8.4 Representações	21
1.8.5 A decomposição algébrica de Wedderburn	22
1.8.6 Classificação das álgebras de Clifford.	22
1.8.7 O grupo Spin	23
1.9 A álgebra de Lie dos grupos associados	24
1.10 As três definições de <i>spinors</i>	25
1.10.1 <i>Spinors</i> algébricos	25
1.10.2 <i>Spinors</i> clássicos	26
1.10.3 <i>Spinors</i> operatoriais	27
1.11 Covariantes bilineares	28
1.12 Campos espinoriais ELKO	30

2	Álgebras de Clifford Paralelas e Ortogonais	37
2.1	Introdução	37
2.2	α -projeções	39
2.3	A decomposição do espaço-tempo	40
2.4	Projeções da métrica	43
2.5	Componentes paralelas e ortogonais dos produtos exterior e de Clifford	44
2.6	A decomposição do operador dual de Hodge	45
2.7	O operador de Dirac no contexto da decomposição do espaço-tempo	48
2.8	Derivada covariante e derivada de Lie relativos ao operador diferencial	51
2.8.1	Condição necessária para que $[\mathcal{L}_n, d_{\parallel}] = 0$	53
2.9	Derivada covariante e derivada de Lie relativos ao operador codiferencial	54
2.10	Decomposições duais equivalentes	56
2.11	Generalização das α -gradações: automorfismos internos k -vetoriais	58
2.11.1	Automorfismos internos bivetoriais	58
2.11.2	Automorfismos internos trivetoriais	59
2.11.3	Automorfismos internos tetravetoriais	60
2.11.4	Automorfismos internos multivetoriais	61
2.12	Cinemática relativística e observadores de Killing	61
2.13	Identidades entre a decomposição de operadores diferenciais, derivadas de Lie e quantidades cinemáticas	63
2.14	Equações de Maxwell via α -gradações	65
2.15	Transformações de Lorentz no contexto da decomposição do espaço-tempo	66
2.16	Transformações de Lorentz em campos e induções	68
2.16.1	Campo elétrico	68
2.16.2	Indução magnética	69
2.17	Dinâmica de uma partícula-teste com spin em um campo gravitacional de Reissner-Nordström	69
2.18	A decomposição da equação de Dirac	72
3	Álgebras de Grassmann e de Clifford Estendidas	75
3.1	Apresentação	75
3.2	Espaços de Peano	78
3.3	A álgebra exterior estendida	79
3.3.1	O produto exterior a partir do colchete de Rota	79
3.3.2	Isomorfismos duais de quasi-Hodge: operadores duais de Hodge quirais	81
3.4	As álgebras de Grassmann e Clifford estendidas	82
3.5	Operadores de Hodge quirais	86
3.6	Imersões, subespaços maximais totalmente isotrópicos e bases de Witt	86
3.7	\mathbb{D} -álgebras de Clifford	87
3.7.1	\mathbb{D} -conjugação	88

3.8	O produto regressivo	89
3.9	Contraespaço	91
3.10	Álgebras de Clifford sobre o contraespaço	93
3.11	Interpretação geométrica do produto regressivo	95
3.12	Dualidades e codualidades	96
3.13	Operadores diferencial e codiferencial	97
3.13.1	Operador diferencial	97
3.13.2	Operador codiferencial	98
3.13.3	O Laplaciano de Hodge-de Rham	99
3.14	Aplicações em eletromagnetismo em meios cristalinos quirais	100
3.14.1	Interpretação geométrica das k -formas	100
3.14.2	Eletromagnetismo no contexto da álgebra de Grassmann estendida	101
3.14.3	Equações de Maxwell homogêneas e potenciais	102
3.14.4	Equações de Maxwell não-homogêneas	102
3.14.5	Intensidade e excitação eletromagnéticas	103
3.14.6	Relações constitutivas no vácuo	103
3.14.7	As equações de onda generalizadas para os potenciais	106
3.14.8	As equações de onda generalizadas para os campos e excitações	107
3.14.9	O tensor constitutivo a partir da métrica	109
3.14.10	Equivalência entre meios cristalinos e o vácuo ‘efetivo’ no espaço curvo	111
3.15	SUSYs e a superálgebra de Poincaré via AC estendida sobre \mathbb{R}^3	111
4	Octonions e aplicações à TQC	117
4.1	Octonions: preliminares	118
4.2	Aplicações- ζ	119
4.3	O produto- ζ e generalizações	119
4.3.1	O Produto- X e suas extensões	119
4.3.2	O produto- ζ e suas extensões	120
4.3.3	\mathbb{O} -unidades relativas ao produto- $(1, \zeta)$	121
4.3.4	Produto octoniônico entre multivetores de Clifford	126
4.3.5	Extensões de \mathbb{O} -álgebras generalizadas	128
4.4	Octonions, álgebras de Clifford e as fibrações de Hopf	129
4.4.1	A fibração de Hopf $S^1 \cdots S^3 \rightarrow S^2$	129
4.4.2	A fibração de Hopf $S^3 \cdots S^7 \rightarrow S^4$	129
4.5	A descrição de anti-partículas implica o uso de \mathbb{C} -octonions	131
4.5.1	As matrizes de Gell-Mann como operadores na álgebra $\mathbb{O}_{1, \zeta}$	131
4.6	O Modelo Padrão via álgebras de divisão	132
4.6.1	Preliminares algébricas	132
4.6.2	Álgebras de Lie e grupos de Lie em $\mathcal{C}\ell_{0,6}$ e a construção de automorfismos úteis	133
4.6.3	Modelo de Dixon estendido	134

4.6.4	Simetria do Modelo Padrão	134
4.6.5	Ações de $SU(2)$ e $U(1)$	136
4.6.6	Dubletos de $SU(2)$	136
4.7	Quarks e léptons	138
4.7.1	Hipercarga e isospin	139
4.7.2	Projeções redutivas	140
4.8	Campos de Calibre	142
5	Isotopias de álgebras e aplicações à TQC	145
5.1	Álgebras de Clifford isotópicas e generalizações	145
5.1.1	Caso associativo	146
5.1.2	Caso não-associativo	147
5.2	Campos de aplicações- ζ e corpos isocomplexos	149
5.3	Isotopias de Clifford via produto- ζ associativo	149
5.4	Isotopia da álgebra exterior	150
5.5	Levantamento isotópico da álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{3,0}$	151
5.5.1	Preliminares: a álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{3,0}$	152
5.5.2	O grupo $\text{Spin}_+(3) \hookrightarrow \mathcal{Cl}_{3,0}$	152
5.5.3	O subgrupo $SU(2)_\zeta$ isotópico a $SU(2)$ dentro de $\mathcal{Cl}_{3,0}^\zeta$	152
5.6	Aplicações em Mecânica Quântica	153
5.7	A álgebra do espaço-tempo $\mathcal{Cl}_{1,3}$	157
5.8	Isotopia $\mathcal{Cl}_{1,3}^\zeta$ de $\mathcal{Cl}_{1,3}$	158
5.8.1	Iso-representações não-homogêneas de $SU(3)$ em $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$	159
5.8.2	Levantamentos isotópicos de $SU(3)$	160
5.9	Levantamento isotópico $SU_\zeta(n)$ do grupo $SU(n)$	160
5.10	Simetria de sabor $SU(3)$ exata	161
5.11	Simetria de sabor $SU(6)$ isotópica exata	164
5.12	Mésons e bárions no isoespaço	165
5.13	Eletromagnetismo em meios lineares: o vácuo isotópico	165
6	Conclusões e Perspectivas	167
	Bibliografia	173
A	Apêndice: o Princípio da Trialidade	193
A.1	Preliminares	193
A.2	O Produto de Chevalley	195
A.3	Trialidade	196
A.4	<i>Spinors</i> puros	198

B	Lista de Publicações	201
B.1	Artigos Publicados	201
B.2	Artigos submetidos à publicação	202

Introdução

Vários formalismos matemáticos, além das suas diversas aplicações tanto na descrição quanto no desenvolvimento de teorias físicas, podem ser construídos a partir das álgebras de Clifford (ACs). É nesse intuito que se baseia o paradigma da presente tese. Sua motivação principal é a de que, no contexto das ACs, os formalismos e as teorias físicas desenvolvidas e apresentadas são formuladas de maneira unificada em um único cenário algébrico e geométrico. Tal apresentação nos serve para indicar alguns métodos para testar o próprio formalismo matemático desenvolvido e também na investigação de diversos tópicos em Física Teórica, além de um entendimento mais profundo e completo de determinadas teorias físicas, tais como Teoria Quântica de Campos (TQC), Relatividade Geral, Eletromagnetismo, Mecânica Quântica Relativística e Supersimetria, dentre outros a serem abordados nos cinco capítulos que se seguem. Cada um desses capítulos é auto-contido, e tem uma introdução própria, onde são abordados a motivação física-algébrica-geométrica além do que será exposto no decorrer do capítulo. A proposta geral desta Tese de Doutorado é, em cada um dos capítulos, generalizar as álgebras de Clifford e/ou alguns de seus aspectos no contexto da geometria do espaço sobre o qual a AC é construída, e posteriormente mostrar as imediatas aplicações à Física, decorrentes do formalismo previamente desenvolvido. Introduzimos novos formalismos onde, do ponto de vista matemático, em particular,

- Generalizamos o produto de Clifford.
- Definimos as álgebras exterior, de Grassmann e de Clifford quirais.
- Introduzimos as álgebras de Clifford construídas sobre a soma direta de um espaço vetorial com sua cópia quiral.
- Definimos o complexo de de Rham quiral, mostrando que em relação ao produto exterior dual (produto regressivo) a co-cadeia de de Rham apresenta uma seqüência de subespaços quirais e aquirais da álgebra exterior, subseqüentemente alternados.
- Construimos toda a teoria da decomposição local do espaço-tempo em infinitas fatias espaciais (isócronas) generalizando-a para o contexto das ACs. Ilustramos suas conseqüências imediatas na decomposição dos operadores diferencial e codiferencial, operador de Dirac, derivada de Lie e operador dual de Hodge. Além disso aceleração, vorticidade, expansão e cisalhamento

associados ao campo tipo-tempo, que define unicamente a decomposição, são apresentados e vinculados por equações diferenciais advindas de propriedades geométricas e algébricas.

- Generalizamos o produto octoniónico de maneira a introduzirmos as corretas transformações de campos fermiônicos e bosônicos sobre a esfera S^7 , no contexto geral das ACs. As novas unidades octoniónicas construídas são parametrizadas por um elemento arbitrário de uma AC construída sobre o espaço vetorial $\mathbb{R}^{0,7}$.
- Apresentamos as q -deformações no contexto dos levantamentos isotópicos de estruturas algébricas, trazendo amplas aplicações em TQCs.
- Introduzimos as ACs admissíveis, resultantes do levantamento isotópico de ACs usuais, e consequentemente os levantamentos isotópicos de $SU(n)$, dentro de \mathcal{Cl}_{2n} .

Embora a introdução correspondente à primeira seção de cada capítulo traga informações com maiores detalhes, apresentamos a seguir os resultados originais mais relevantes que se encontram em cada um deles.

No Cap. (1) apresentamos as preliminares algébricas sobre álgebras de Clifford e *spinors*, onde introduzimos a álgebra de Grassmann, representações, a classificação de todas as ACs via Teorema da Periodicidade, o grupo Spin, e a classificação de Lounesto dos *spinors* de acordo com os valores assumidos pelos seus covariantes bilineares. Nesse contexto, classificamos o mais novo candidato à descrição da matéria escura como um campo espinorial de classe 5 [Lou93, Lou94, Lou02]. Já que todos os campos espinoriais, associados a algum campo fermiônico sobre o espaço de Minkowski, são elementos dos espaços que carregam respectivamente as representações $D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ ou $D^{(1/2,0)}$, ou $D^{(0,1/2)}$ de $SL(2, \mathbb{C})$, todos eles pertencem a alguma das seis classes encontradas por Lounesto em sua teoria de classificação dos campos espinoriais. Nosso resultado se baseia no formalismo desenvolvido por D. V. Ahluwalia-Khalilova e D. Grumiller, que introduziram recentemente o *Eigen spinoren des Ladungskonjugationsoperator* (ELKO) [Ahl04]. O ELKO, apesar de ser apresentado como um novo férmion descrito por um campo espinorial que no limite de baixas energias se comporta como uma representação do grupo de Lorentz, do ponto de vista algébrico pertence juntamente com o campo espinorial de Majorana a uma classe maior de campo espinoriais, os chamados *campos espinoriais bandeira*², que não satisfazem a equação de Dirac.

No Cap. (2) graduações arbitrárias de álgebras de Clifford são apresentadas, e as utilizamos para generalizar a decomposição do espaço-tempo em uma superposição de infinitas fatias espaciais, cada uma em um tempo fixo, correspondendo a um processo de folheação. Baseados em uma \mathbb{Z}_2 -gradação induzida por um automorfismo interno de $\mathcal{Cl}_{p,q}$, decompomos o operador de Dirac em componentes paralela [α -par, espacial] e ortogonal [α -ímpar, temporal], mostrando como cada uma das componentes está relacionada à derivada de Lie ao longo do vetor-decomposição e ao bivector-decomposição momento angular. Projeções ortogonais e paralelas ao espaço isócrono são introduzidas, via automorfismos internos induzidos por campos multivetoriais, ao invés de simplesmente campos vetoriais, generalizando ainda mais o formalismo até então apresentado. Algumas aplicações

²Flagpole spinor fields.

físicas são descritas em detalhes, como, por exemplo, as transformações de Lorentz no contexto da decomposição do espaço-tempo de Minkowski (ETM), a cinemática relativística, a equação de Dirac para uma α -gradação associada à decomposição do espaço-tempo através de automorfismos internos e a dedução das leis de evolução para a massa e o spin de uma partícula-teste nas vizinhanças de uma singularidade cuja geometria pode ser representada através da métrica de Reissner-Nordström. O formalismo desenvolvido é válido para qualquer variedade $(p + q)$ -dimensional. Tal formalismo apresentado é independente de coordenadas e os desenvolvimentos algébricos possuem no Cap. (2) algumas aplicações físicas decorrentes, como por exemplo a obtenção das equações de Maxwell no contexto da decomposição do espaço-tempo (Sec. (2.14)) juntamente com as transformações de Lorentz dos campos elétrico e magnético no presente contexto (Secs. (2.15, 2.16)), a investigação das leis de evolução para uma partícula-teste com spin nas vizinhanças de um buraco-negro de Reissner-Nordström (Sec. (2.17)) e a mecânica quântica relativística, mais especificamente a equação de Dirac no contexto da decomposição usada. (Sec. (2.18)). Nessa última seção a equação de Dirac é escrita para a decomposição $\alpha(\psi) = n\psi n^{-1}$. Algumas propriedades algébricas e geométricas notáveis são apresentadas ao longo do texto.

No Cap. (3) apresentamos o conceito de quiralidade associado às formas diferenciais e construímos a AC sobre um espaço vetorial que consiste na soma direta de um espaço vetorial e de sua cópia quiral canonicamente isomorfa. As álgebras exterior, de Grassmann e de Clifford são então introduzidas nesse contexto, de onde surge o formalismo adequado para a descrição das transformações conformes e *twistors*, pois ao considerarmos $V \simeq \mathbb{R}^{p,q}$, cada um dos objetos que age sobre $V \oplus \dot{V}$ mostra ser um elemento de $\mathcal{C}\ell_{p+1,q+1}$, a AC sobre $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$, onde essa última é a álgebra de Clifford estendida sobre $\mathbb{R}^{p,q}$. O caráter dual de uma AC é definido a partir do conceito de contraespaço, intimamente ligado ao produto regressivo [Cdt00, Cot00, Hes91b]. Dualidades e codualidades entre o espaço e o contraespaço são introduzidas a partir do operador de Hodge, a partir do qual estabelecemos o caráter dual dos operadores de contração, definidos no espaço e no contraespaço. Investigamos também as ACs hiperbólicas, juntamente com as co-cadeias de de Rham no espaço e no contraespaço. Definimos o operador codiferencial em termos do produto regressivo e subseqüentemente verificamos que o laplaciano de Hodge-de Rham é corretamente definido também neste contexto como o anticomutador entre os operadores diferencial e codiferencial. A teoria eletromagnética utilizando as formas quirais é descrita em meios materiais, onde o tensor constitutivo é introduzido a partir do operador de Hodge quiral. Após introduzirmos as equações de onda generalizadas para os potenciais, campos e excitações em meios lineares, descrevemos o tensor constitutivo, para qualquer meio linear, em termos da métrica do espaço-tempo. Uma métrica efetiva do espaço-tempo é usada para a investigação do problema da propagação da luz em meios cristalinos a partir da propagação da luz no vácuo. A superálgebra de Poincaré (SAP) é derivada a partir de uma generalização do Princípio da Trilateralidade, onde mostramos como a SAP emerge de uma maneira natural a partir da geometria do espaço-tempo, sem qualquer necessidade de conceitos físicos possivelmente envolvidos, embora tais conceitos sirvam para nos motivar e dar rumo à nossa via de pesquisa.

No Cap. (4) a álgebra dos octonions é utilizada para obtermos a generalização do produto- X , apresentado originalmente em [Ced95] para definir corretamente as regras de transformação dos

campos bosônicos (vetores) e fermiônicos (*spinors*) sobre a esfera S^7 . Fazemos uso da definição de uma estrutura de álgebras de Clifford para as aplicações- ζ e do fornecimento de uma estrutura algébrica necessária e suficiente para se definir os produtos- ζ e $-\zeta\xi$ ($\zeta, \xi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$), que naturalmente são usados para generalizar respectivamente o produto- X e o produto- XY , onde $X, Y \in \mathbb{O}$ e $X, Y \in S^7$. Apresentamos também as operações- ζ_\bullet , úteis para expressar os produtos definidos de uma maneira bem específica e simples. A partir disso o Modelo Padrão das partículas elementares é proposto de uma maneira bem natural, onde os *spinors* que descrevem as partículas são elementos de $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{O}_{1,\zeta}$. Além disso as dimensões extras do formalismo desaparecem de maneira natural, ao se utilizar as projeções redutivas. Finalmente propomos um modelo para teorias de calibre não-associativas em espaços de oito dimensões, onde o campo espinorial é a soma direta das funções de onda que descrevem um quark e um lépton, no contexto da AC sobre o espaço $\mathbb{R}^{0,7}$.

No Cap. (5) introduzimos os levantamentos isotópicos das ACs, cuja motivação física foi originalmente a de mapear teorias lagrangianas lineares e locais em teorias mais gerais, não-lineares, não-locais e não-lagrangianas. Essas últimas recuperam o caráter linear, local e lagrangiano da teoria original, se formuladas em um *isoespaço*. As isotopias de álgebras possuem correspondência direta com as q -deformações de estruturas algébricas [Kli93], às quais são completamente equivalentes. Nossa proposta é apresentar os conceitos isotópicos no contexto das álgebras de Clifford, cuja estrutura é herdada através das então já definidas aplicações- ζ . Mostramos como obter a simetria exata do isospin nuclear $SU(2)$ no espaço isotópico associado, onde o próton e o nêutron têm a mesma massa, a partir da introdução de uma deformação no espaço que carrega a representação fundamental do grupo $Spin_+(3) \simeq SU(2)$. Os operadores de massa e carga elétrica são também erigidos a partir dessa deformação. Uma outra aplicação concerne a descrição da simetria de sabor entre os quarks u, d e s como uma simetria também exata, no isótopo de $SU(3)$ construído através do levantamento isotópico de $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$. Após introduzirmos as isomatrizes de Gell-Mann, investigamos o comportamento de alguns operadores sobre o espaço que carrega a representação fundamental isotópica de $SU(3)$. Mais geralmente, a fim de que os seis quarks exibam uma simetria de sabor exata enquanto componentes de um elemento do espaço de representação do grupo $SU(6)$ isotópico, e conseqüentemente tenham a mesma massa no espaço isotópico, construímos a álgebra de Lie isotópica a $\mathfrak{su}(6)$ dentro do levantamento isotópico de $\mathcal{C}\ell_{12,0}$. Mais geralmente o levantamento isotópico de $SU(n)$ dentro de uma álgebra de Clifford isotópica $\mathcal{C}\ell_{2n,0}$ é construído. Mostramos que as massas dos quarks são responsáveis pela deformação da estrutura algébrica associada à geometria do espaço-tempo. Toda a investigação feita no Cap. (3) acerca do eletromagnetismo (EM) para meios lineares é reduzido ao EM no vácuo, mediante uma isotopia apropriada.

Quais são os principais resultados originais desta tese?

1. Classificamos o mais novo candidato à descrição da matéria escura como um campo espinorial de classe 5, de acordo com a classificação de Lounesto de todos os campos espinoriais associados ao fibrado de spin-Clifford sobre $\mathbb{R}^{1,3}$. Tal classificação algébrica é baseada nos valores assumidos pelos covariantes bilineares associados, nas identidades de Fierz, nos agregados e *boomerangs*. Provamos que do ponto de vista algébrico o ELKO pertence juntamente com o

campo espinorial de Majorana a uma classe maior de campo espinoriais: os campos espinoriais bandeira, que correspondem à classe 5, segundo a classificação de Lounesto. A pedido de D. V. Ahluwalia-Khalilova investigamos seu resultado à luz do formalismo de Lounesto, e a dinâmica do ELKO, que não satisfaz a equação de Dirac, está sendo investigada em conjunto no momento. Mostramos ainda que o *spinor* de Majorana, assim como qualquer outro *spinor* que seja classificado como um *spinor* de classe 5, possui diferentes autovalores do operador de helicidade quando aplicado em cada um de seus 2-campos espinoriais.

2. A superálgebra de Poincaré (SAP) é introduzida exclusivamente a partir da generalização do Princípio da Trilateralidade e *spinors* puros. Os resultados de Crumeyrolle são estendidos a fim de que o Princípio da Interação por ele proposto seja naturalmente adaptado à descrição da parte translacional da SAP. Todo o formalismo é, apesar da introdução de estruturas algébricas, desenvolvido sobre a complexificação de \mathbb{R}^3 , sem a utilização de dimensões extras. O superespaço é construído unicamente sobre o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 .
3. Generalizações de álgebras de Clifford: surge o formalismo adequado para a descrição das transformações conformes e *twistors*, pois mostramos que a AC estendida construída sobre $\mathbb{R}^{p,q}$ é exatamente a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{p+1,q+1}$, que é a AC associada a $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$. Além disso provamos que as métricas que assumem valores quirais e aquirais são identicamente nulas, outrossim podemos provar que $\mathbb{R}^{p,q}$ seria um espaço vetorial isotrópico.
4. Enunciamos e provamos uma proposição que afirma que o elemento de volume associado ao contraespaço é escalar ou pseudoescalar, dependendo se a dimensão do espaço em questão for respectivamente par ou ímpar. Nesse sentido o fato de que a unidade da AC, interpretada como sendo o elemento de volume do contraespaço, troca ou não de sinal depende exclusivamente da dimensão do espaço.
5. A co-cadeia de de Rham gerada pela ação do operador codiferencial, em relação ao produto exterior dual (produto regressivo) apresenta uma seqüência de subespaços quirais e aquirais da álgebra exterior, subseqüentemente alternados. Esse resultado é uma surpresa, já que a dualidade entre as álgebras exteriores associadas ao espaço e contraespaço no contexto quiral é irregular, no sentido de que, tomando-se a dualidade da álgebra exterior do espaço, obtemos a álgebra exterior do contraespaço, mas o processo inverso produz a álgebra exterior do espaço, cujos subespaços homogêneos pares [ímpares] são quirais [aquirais] dependendo da dimensão do espaço vetorial original (veja eq.(3.76)). Ao introduzirmos a quiralidade na álgebra exterior a dualidade é apenas uma *pseudo-dualidade*.
6. Todos os produtos que se utilizam de vetores em S^7 e octonions, usados na descrição das leis de transformação de campos bosônicos e fermiônicos sobre a esfera S^7 , são generalizados de maneira a englobar multivetores. Definimos unidades octoniônicas parametrizadas por elementos arbitrários de uma AC, o que generaliza a definição de octonions.

7. Definimos produtos não-associativos entre octonions e multivetores, e também produtos não-associativos entre multivetores. Extensões de álgebras octoniônicas são obtidas a partir dos novos produtos definidos.
8. O Modelo Padrão é rediscutido e introduzido a partir desse novo formalismo, generalizando o formalismo de Dixon [Dix83, Dix84, Dix86, Dix90b, Dix94a, Dix90a, Dix94b, Dix95, Dix04] para as novas unidades octoniônicas parametrizadas por multivetores. As matrizes de Gell-Mann são escritas a partir da ação dessas unidades em uma dada base que corresponde aos quarks coloridos. Projeções são utilizadas para se eliminar as dimensões redundantes da teoria.
9. Propomos ainda uma teoria de calibre em $\mathcal{C}\ell_{0,7} \simeq \mathcal{M}(8, \mathbb{C})$, no contexto do produto octoniônico generalizado. Os campos espinoriais do formalismo são os mesmos daqueles propostos em [Tra01, Tra99].
10. A 2-forma de vorticidade, a aceleração, o tensor de expansão e de cisalhamento associados à geometria induzida pela decomposição do espaço-tempo são apresentados no contexto da decomposição do espaço-tempo, e além disso também obtemos duas equações diferenciais de vínculo para a 2-forma de vorticidade, e mais geralmente equações diferenciais de vínculo entre a 2-forma de vorticidade e um elemento arbitrário de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$.
11. As equações de Dixon-Soriau-Papapetrou são usadas no contexto das ACs para deduzirmos as leis de evolução para a massa e o spin de uma partícula-teste nas vizinhanças de uma singularidade cuja geometria pode ser representada através da métrica de Reissner-Nordstrøm. Esses resultados estão fortemente relacionados à transformação de um buraco-negro para uma singularidade nua. Generalizamos os resultados obtidos por Khriplovich e Pomeransky [Khr96, Khr98, Gem00], sobre a métrica de Schwarzschild, para a métrica de Reissner-Nordstrøm. Assim todos os resultados sobre a investigação de uma partícula-teste com spin em uma vizinhança de um buraco-negro neutro são obtidos agora para um buraco-negro eletricamente carregado.
12. Escrevemos a equação de Dirac associada à α -graduação baseada em campos de 1-formas $n = n(x)$ dada por $\alpha(\psi) = n\psi n^{-1}$ de maneira mais simples que outras descrições até agora apresentadas, baseadas nas diversas representações (padrão, quiral e de Majorana) de $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$.
13. A unidade da álgebra de Clifford isotópica não é mais o elemento 1, mas um elemento ζ arbitrário, porém fixo, da AC.
14. Formulamos as álgebras isotópicas não-associativas, e também as isotopias da álgebra exterior, de maneira que as contrações isotópicas e produto exterior isotópico possam ser definidos precisamente.
15. O levantamento isotópico do grupo $SU(n)$ é efetuado com base na estrutura algébrica da AC $\mathcal{C}\ell_{2n}$, e também as isotopias de $SU(2)$ e $SU(3)$ são geradas no contexto das ACs $\mathcal{C}\ell_{3,0}$ e $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$ respectivamente.

16. Descrevemos as simetrias hadrônicas de sabor $SU(2)$, $SU(3)$ e $SU(6)$, associadas aos quarks, como simetrias *exatas*, ao serem consideradas no contexto dos levantamentos isotópicos das ACs.
17. Mostramos como no contexto do iso espaço as massas dos quarks são as ‘variáveis’ dos parâmetros de deformação da isounidade da álgebra de Clifford admissível $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$ que usamos para construir o grupo $SU(3)$ isotópico, e também da unidade de $\mathcal{Cl}_{12,0}$, usada para construir o levantamento isotópico do grupo de simetria de sabor $SU(6)$. Assim as massas dos quarks são responsáveis pelo levantamento isotópico das ACs e de suas estruturas associadas.
18. A teoria eletromagnética em meios lineares é completamente descrita como sendo o eletromagnetismo no vácuo, onde o espaço em questão é o iso espaço, juntamente com todas as estruturas algébricas e geométricas que são envolvidas no levantamento isotópico do espaço. Portanto o eletromagnetismo em qualquer meio material é descrito como sendo no vácuo, ao considerarmos a teoria descrita em um espaço isotópico.

Capítulo 1

Álgebras de Clifford e *Spinors*

1.1 Preliminares

Considere um espaço vetorial V de dimensão finita n sobre um corpo¹ \mathbb{F} , de agora em diante escolhido como sendo \mathbb{R} (reais) ou \mathbb{C} (complexos). Escolha arbitrariamente uma base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ para V . Dessa maneira, podemos escrever um elemento genérico $\mathbf{v} \in V$ como $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$, onde está implícita a convenção da somatória de Einstein.

A todo espaço vetorial V está naturalmente associado o *espaço dual* de V , denotado por V^* , cujos elementos são funcionais lineares $\alpha : V \rightarrow \mathbb{F}$ (também denominados *covetores*). Podemos ver que o espaço V^* é de fato um espaço vetorial, ao definirmos a soma de covetores através de $(\alpha + \beta)(\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v})$ e a multiplicação por escalar através de $(a\alpha)(\mathbf{v}) = a\alpha(\mathbf{v})$, $a \in \mathbb{F}$. Defina os covetores \mathbf{e}^i ($i = 1, \dots, n$) a partir de sua ação em elementos de V como

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{quando } i = j, \\ 0, & \text{quando } i \neq j. \end{cases} \quad (1.1)$$

Segue-se que os covetores $\{\mathbf{e}^i\}$ formam uma base para V^* . As coordenadas de um covetor arbitrário α nessa base são dadas pelo valor de α na base $\{\mathbf{e}^i\}$ de V . De fato, dado $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$, $\alpha(\mathbf{v}) = \alpha(v^i \mathbf{e}_i) = v^i \alpha(\mathbf{e}_i) = v^i \alpha_i$. A base $\{\mathbf{e}^i\}$ é chamada de *base dual* de V . É simples notar que $\dim V^* = \dim V$. Esse fato sugere um isomorfismo entre os espaços V e V^* . Define-se então uma aplicação linear, denominada *correlação* $\tau : V \rightarrow V^*$, que por sua vez define de modo natural um funcional bilinear $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \tau(\mathbf{v})(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (1.2)$$

A correlação $\tau : V \rightarrow V^*$ não é um isomorfismo canônico entre V e V^* , já que essa aplicação depende da escolha de bases em V e V^* . A correlação τ é dita *não-degenerada* se $\ker \tau = \{0\}$. Pelo

¹Usaremos o recurso de complexificação de espaços vetoriais, e quando o espaço V for sobre \mathbb{C} , denotaremos $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V$, sendo V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} .

Teorema do Isomorfismo entre espaços vetoriais², se $\ker \tau = \{0\}$, então τ é isomorfismo entre V e V^* .

1.1.1 Produto tensorial

Dados os covetores $\alpha^{\nu_j} \in V^*$ e os vetores $\mathbf{v}_{\mu_j} \in V$, definimos um *tensor do tipo* $\binom{0}{k}$ como

$$\begin{aligned} \alpha^{\nu_1} \otimes \alpha^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \alpha^{\nu_k} &: \overbrace{V \times V \times \cdots \times V}^{k \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha^{\nu_1} \otimes \alpha^{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \alpha^{\nu_k})(\mathbf{v}_{\mu_1}, \mathbf{v}_{\mu_2}, \dots, \mathbf{v}_{\mu_k}) &\mapsto \alpha^{\nu_1}(\mathbf{v}_{\mu_1})\alpha^{\nu_2}(\mathbf{v}_{\mu_2}) \cdots \alpha^{\nu_k}(\mathbf{v}_{\mu_k}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

O espaço vetorial $V^{\otimes p}$, formado pelo produto tensorial entre p cópias de V é denotado por $T^p(V) := V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$, enquanto que o espaço vetorial $(V^*)^{\otimes p}$ definido pelo produto tensorial de p covetores é também um espaço vetorial, denotado por $T_q(V) := V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$. Também definimos um tensor do tipo $\binom{k}{0}$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\nu_1} \otimes \mathbf{v}_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_{\nu_k} &: \overbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}^{k \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}_{\nu_1} \otimes \mathbf{v}_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_{\nu_k})(\alpha^{\mu_1}, \alpha^{\mu_2}, \dots, \alpha^{\mu_k}) &\mapsto \alpha^{\mu_1}(\mathbf{v}_{\nu_1})\alpha^{\mu_2}(\mathbf{v}_{\nu_2}) \cdots \alpha^{\mu_k}(\mathbf{v}_{\nu_k}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Podemos considerar um caso mais geral, o de um produto tensorial de um número arbitrário de covetores e vetores, que será elemento do espaço $T_q^p(V) = V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q}$. Um elemento arbitrário $T \in T_q^p(V)$ pode ser escrito na forma

$$T = T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} \mathbf{e}^{\mu_1} \otimes \mathbf{e}^{\mu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{\mu_p} \otimes \mathbf{e}_{\nu_1} \otimes \mathbf{e}_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{\nu_q},$$

onde $T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} = T(\mathbf{e}^{\mu_1}, \mathbf{e}^{\mu_2}, \dots, \mathbf{e}^{\mu_p}, \mathbf{e}_{\nu_1}, \mathbf{e}_{\nu_2}, \dots, \mathbf{e}_{\nu_q})$.

Dada uma permutação $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, definimos o operador \mathcal{ALT} , denominado *alternador*, da seguinte maneira:

$$\mathcal{ALT}(X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_p) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) X_{\sigma(1)} \otimes X_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes X_{\sigma(p-1)} \otimes X_{\sigma(p)}, \quad (1.5)$$

onde S_p é o *grupo simétrico* formado pelo conjunto de todas as permutações e $\varepsilon(\sigma)$ vale $+1[-1]$ se a permutação σ for par [ímpar]. O alternador definido dessa maneira é um operador de projeção ($\mathcal{ALT}^2 = \mathcal{ALT}$). Um k -covetor é um elemento Ψ_k tal que $\Psi_k = \mathcal{ALT}(\Psi_k)$.

1.2 Álgebra exterior

Dados $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^k \in V^*$ e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in V$, definimos o *produto exterior* $\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^k : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}$ como

²Esse teorema enuncia o seguinte: sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e considere uma aplicação linear $f : V \rightarrow W$, então $\dim \text{rank} f + \dim \ker f = \dim V$. Também se prova que f é injetiva $\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$. Como corolário do teorema, f é injetiva \Leftrightarrow é sobrejetiva, portanto é um isomorfismo entre V e W .

$$(\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \frac{1}{p!} \begin{vmatrix} \alpha^1(\mathbf{v}_1) & \alpha^1(\mathbf{v}_2) & \cdots & \alpha^1(\mathbf{v}_k) \\ \alpha^2(\mathbf{v}_1) & \alpha^2(\mathbf{v}_2) & \cdots & \alpha^2(\mathbf{v}_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^k(\mathbf{v}_1) & \alpha^k(\mathbf{v}_2) & \cdots & \alpha^k(\mathbf{v}_k) \end{vmatrix}$$

O conjunto dos funcionais k -lineares alternados formam um espaço vetorial $\Lambda^k(V)$ e seus elementos serão denominados k -covetores. Denotamos $\Lambda^k(V) = \Lambda_k(V^*)$ e também $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$ e $\Lambda^1(V) = V^*$.

Definimos produtos de p -covetores simples como

$$(\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^m) \wedge (\beta^1 \wedge \beta^2 \wedge \cdots \wedge \beta^l) := \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^m \wedge \beta^1 \wedge \beta^2 \wedge \cdots \wedge \beta^l. \quad (1.6)$$

Note que, se $\alpha^k \in \Lambda^k(V)$ e $\beta^m \in \Lambda^m(V)$, então $\alpha^k \wedge \beta^m = (-1)^{mk} \beta^m \wedge \alpha^k$.

Uma base para o espaço $\Lambda^k(V)$ é da forma $\{\mathbf{e}^{\mu_1} \wedge \mathbf{e}^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\mu_k}\}$ e o número de elementos distintos de $\Lambda^k(V)$ consiste na combinação de n elementos tomados k a k , que é dada por $\binom{n}{k}$. Um elemento $\psi_k \in \Lambda^k(V)$ pode ser escrito como

$$\psi_k = \sum_{\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_k} a_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \mathbf{e}^{\mu_1} \wedge \mathbf{e}^{\mu_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\mu_k}, \quad a_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \in \mathbb{F}. \quad (1.7)$$

A dimensão de $\Lambda^k(V)$ é portanto dada por

$$\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k} = \dim \Lambda^{n-k}(V). \quad (1.8)$$

Em particular, $\dim \Lambda^n(V) = \binom{n}{n} = 1$. Pela definição do produto exterior podemos ver que o produto exterior de m covetores se anula sempre que $m > n$. Isso mostra que o único espaço $\Lambda^k(V)$ se $k > n$ é o espaço trivial. Os k -covetores também recebem o nome de k -formas, quando o espaço vetorial em questão for o espaço tangente a uma variedade.

Ao efetuarmos a multiplicação exterior entre 1-formas, obtemos 2-formas, 3-formas, \dots , k -formas ($k \leq n$), e assim sucessivamente, dependendo do número de vezes que efetuamos o produto exterior (o mesmo vale para os vetores). Cada k -forma pertence a um espaço vetorial $\Lambda^k(V)$, e utilizando a eq.(1.6), ao considerarmos $\psi_k \in \Lambda^k(V)$ e $\phi_m \in \Lambda^m(V)$, vemos que $\psi_k \wedge \phi_m \in \Lambda^{m+k}(V)$, o que mostra que a álgebra $(\Lambda^k(V), \wedge)$ não é fechada em relação ao produto exterior. Para contornarmos essa situação indesejada, definimos

$$\Lambda^*(V) = \Lambda^0(V) \oplus \Lambda^1(V) \oplus \Lambda^2(V) \oplus \cdots \oplus \Lambda^n(V) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V) \quad (1.9)$$

Em muitos casos estamos interessados em trabalhar com formas diferenciais em variedades. Considere por exemplo uma variedade M e $\{x^i\}$ coordenadas locais definidas em um aberto $U \subseteq M$. Tomando $\mathbf{e}^i = dx^i$ e $\mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$, pela eq.(1.1). Nesse caso podemos escrever uma multiforma diferencial $\Psi \in \Lambda^*(V)$ como

$$\Psi = a + a_i dx^i + a_{ij} dx^i \wedge dx^j + a_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k + \cdots + p dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n. \quad (1.10)$$

onde $a, a_i, a_{ij}, \dots, p \in \mathbb{F}$

Definição 1.1 ► O par $(\Lambda(V), \wedge)$ é denominado **álgebra exterior** do espaço vetorial V^* . De maneira análoga pode ser definida a álgebra exterior $\Lambda(V)$, onde passamos a considerar o produto exterior de vetores. ◀

Finalmente, $\dim \Lambda^*(V) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

1.2.1 Operações dentro da álgebra exterior

Nesta subseção tratamos da álgebra $\Lambda^*(V)$ dos multivetores, mas o desenvolvimento é análogo para o caso da álgebra dos multivetores. Definimos as operações dentro da álgebra exterior a seguir:

• **Projeção:**

$$\langle \rangle_k : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda^k(V),$$

de modo que $\langle \Psi \rangle_k$ é a parte k -covetorial do multivetor Ψ .

• **Reversão:**

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)^\sim = \alpha_k \wedge \alpha_{k-1} \wedge \cdots \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_1 = (-1)^{k(k-1)/2} \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k.$$

• **Involução graduada:**

Dado um multivetor $\Psi \in \Lambda^*(V)$, a ação da involução graduada no multivetor Ψ é denotada por $\widehat{\Psi}_k = \#(\Psi_k) = (-1)^k \Psi_k$. Este automorfismo é usado para definirmos uma \mathbb{Z}_2 -graduação em $\Lambda^*(V)$. Os \mathbb{Z}_2 -subespaços homogêneos consistem na soma de todos os \mathbb{Z} -subespaços de grau par e ímpar, onde o grau do subespaço se refere ao autovalor ± 1 do operador $\#$, já que os \mathbb{Z} -subespaços homogêneos são autoespaços do operador $\#$ [Rie58, Por95, Mos02, Mos03a].

• **Conjugação:**

Esta operação é definida como sendo a composição da reversão com a involução graduada, e é denotada por $\bar{\Psi} = (\widehat{\Psi})^\sim = \widehat{\bar{\Psi}}$.

• **Contração:**

No começo deste capítulo a aplicação linear $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$ foi definida como um elemento do espaço dual V^* . Podemos generalizar esse conceito, introduzindo uma operação denominada *contração à esquerda* pelo vetor \mathbf{v} , que age sobre $\Omega \in \Lambda^k(V)$ e resulta em um elemento de $\Lambda^{k-1}(V)$, da seguinte maneira:

$$(\mathbf{v} \lrcorner \Omega_k)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}) = k \Omega_k(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}). \quad (1.11)$$

No caso em que $k = 1$, a definição se reduz a $\mathbf{v} \lrcorner \alpha = \alpha(\mathbf{v})$. Para $a \in \mathbb{R}$, temos $\mathbf{v} \lrcorner a = 0$. A definição dada acima não é útil do ponto de vista computacional. Vamos considerar a contração de $\alpha \wedge \beta$ por um vetor \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} \lrcorner (\alpha \wedge \beta)(\mathbf{u}) = (\alpha \wedge \beta)(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\alpha(\mathbf{v})\beta - \beta(\mathbf{v})\alpha)(\mathbf{u}) = ((\mathbf{v} \lrcorner \alpha)\beta - (\mathbf{v} \lrcorner \beta)\alpha)(\mathbf{u}).$$

A generalização dessa equação para multivetores Ψ e Φ arbitrários é dada pela *regra de Leibniz graduada*:

$$\mathbf{v} \lrcorner (\Psi \wedge \Phi) = (\mathbf{v} \lrcorner \Psi) \wedge \Phi + \widehat{\Psi} \wedge (\mathbf{v} \lrcorner \Phi) \quad (1.12)$$

A definição de *contração à direita* é feita de maneira semelhante:

$$(\Omega_{\perp \mathbf{v}})(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k-1}) = k\Omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}) \quad (1.13)$$

e a regra de Leibniz graduada para a contração à direita é expressa como

$$\boxed{(\Psi \wedge \Phi)_{\perp \mathbf{v}} = \Psi \wedge (\Phi_{\perp \mathbf{v}}) + (\Psi_{\perp \mathbf{v}}) \wedge \hat{\Phi}} \quad (1.14)$$

A contração à esquerda se relaciona com a contração à direita por:

$$\boxed{\mathbf{v} \lrcorner \Psi = -\hat{\Psi}_{\perp \mathbf{v}}} \quad (1.15)$$

onde $\Psi \in \Lambda^*(V)$ é um multivetor genérico.

Podemos não somente nos restringir à contração por vetores, mas por k -vetores (ou de modo mais geral, por multivetores, estendendo-se o caso dos k -vetores por linearidade). Dado um k -vetor $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k$, definimos

$$\boxed{(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k) \lrcorner = \mathbf{v}_1 \lrcorner \mathbf{v}_2 \lrcorner \dots \lrcorner \mathbf{v}_k \lrcorner}$$

e

$$\boxed{\lrcorner (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k) = \lrcorner \mathbf{v}_1 \lrcorner \mathbf{v}_2 \lrcorner \dots \lrcorner \mathbf{v}_k} \quad (1.16)$$

Essa definição é natural de maneira que o operador \lrcorner seja o dual do operador \wedge . Segue-se que a contração de um q -vetor por um p -vetor se anula para $p > q$. A mesma generalização pode ser feita para multivetores.

1.3 A álgebra de Grassmann

Primeiramente é preciso definir a extensão do funcional bilinear simétrico não-degenerado $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, o que é equivalente a estender a correlação $\tau : V \rightarrow V^*$. Definimos tal extensão como uma aplicação $\tau : \Lambda_k(V) \rightarrow \Lambda^k(V)$ dada por

$$\tau(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k) = \tau(\mathbf{v}_1) \wedge \tau(\mathbf{v}_2) \wedge \dots \wedge \tau(\mathbf{v}_k). \quad (1.17)$$

A partir disso, definimos a extensão de g dada por $G_k : \Lambda_k(V) \times \Lambda_k(V) \rightarrow \mathbb{R}$ para o caso de k -vetores simples como

$$G_k(\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_k) = (\mathbf{u}_k \wedge \dots \wedge \mathbf{u}_1) \lrcorner \tau(\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k). \quad (1.18)$$

Dados $\Psi_k \in \Lambda^k(V)$ e $\Phi_m \in \Lambda^m(V)$, definimos a métrica G em $\Lambda(V)$ impondo que ela seja diagonal nos subespaços homogêneos $\Lambda^i(V)$, ou seja, $G(\Psi_k, \Phi_m) = 0$, se $k \neq m$. Escrevemos, dados Ψ e $\Phi \in \Lambda(V)$,

$$G(\Psi, \Phi) = \sum_{p=0}^n G_p(\Phi_p, \Psi_p).$$

Definição 1.2 ► A álgebra exterior $(\Lambda(V), \wedge)$ munida da extensão G para todo $\Lambda(V)$ é denominada **álgebra de Grassmann** associada ao espaço vetorial V ◀

Observação ► Podemos formular todo o desenvolvimento acima para covetores, definindo as aplicações $g^{-1} : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tau^{-1} : V^* \rightarrow V$. Nesse caso, $g^{-1} : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ *não* denota a inversa da forma bilinear g ◀

1.3.1 Isomorfismo de Hodge

Vimos na seção (1.1) que os espaços vetoriais $\Lambda^k(V)$ e $\Lambda^{n-k}(V)$ têm a mesma dimensão. Não existe, entretanto, nenhum isomorfismo canônico entre esses espaços. O *isomorfismo de Hodge* está definido dentro do contexto da álgebra de Grassmann, pois precisamos necessariamente de uma correlação em V .

Seja o pseudoescalar η definido por $\eta = |\det \tau|^{1/2} \mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n$, onde $\det \tau$ é dado implicitamente por

$$\tau(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) = \tau(\mathbf{e}_1) \wedge \tau(\mathbf{e}_2) \wedge \cdots \wedge \tau(\mathbf{e}_n) = (\det \tau) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n. \quad (1.19)$$

Tal isomorfismo dado pelo *operador dual de Hodge* $\star : \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V)$ é definido por

$$\star \mathbf{1} = \eta, \quad (1.20)$$

$$\star \psi = \tilde{\psi} \eta, \quad (1.21)$$

onde na última igualdade está implícita a ação da correlação τ^{-1} e ψ é um multivetor arbitrário. Uma outra definição para o isomorfismo de Hodge é dada por

$$\psi \wedge \star \phi = G^{-1}(\psi, \phi) \eta, \quad \forall \psi, \phi \in \Lambda^*(V) \quad (1.22)$$

Podemos mostrar que tal definição equivale à definição anterior.

1.4 A álgebra exterior como quociente da álgebra tensorial

Seja agora I um ideal da álgebra $T(V)$ dos tensores covariantes, consistindo das somas de termos da forma $a \otimes x \otimes x \otimes b$, onde $x \in V$ e $a, b \in T(V)$. Definimos a álgebra exterior $\Lambda(V)$ por

$$\Lambda(V) = T(V)/I \quad (1.23)$$

Elementos em $\Lambda(V)$ são classes de equivalência de elementos em $T(V)$, onde a relação de equivalência é definida por $a \sim b$, se $a = b + c$, para algum $c \in I$. A estrutura de espaço vetorial de $\Lambda(V)$ é definida por

$$[a] + \lambda[b] = [a + \lambda b], \quad a, b \in T(V), \lambda \in \mathbb{F},$$

e a multiplicação, que é denotada por \wedge é dada por

$$[a] \wedge [b] = [a \otimes b].$$

Se $x, y \in V$, então

$$x \otimes y = x \wedge y + \frac{1}{2} \{(x+y) \otimes (x+y) - x \otimes x - y \otimes y\}. \quad (1.24)$$

O termo entre chaves está em I . Portanto $x \otimes y \sim x \wedge y$ ou $[x \otimes y] = [x \wedge y]$ e $[x] \wedge [y] = [x \wedge y]$.

Pela definição do ideal I , ele é justamente o núcleo do alternador \mathcal{ALT} e portanto $[a] = [\mathcal{ALT} a]$. A generalização desse resultado para multivetores pode ser obtida por indução finita [Ben87]:

Teorema 1.1 ► $x \otimes \Omega \sim x \wedge \Omega$, para $x \in V$ e $\Omega \in \Lambda^*(V)$. ◀

1.5 Álgebras de Clifford (I)

Seja V um espaço vetorial sobre \mathbb{R} munido de um funcional bilinear simétrico não-degenerado g . Sejam \mathcal{A} uma álgebra associativa com unidade $1_{\mathcal{A}}$ e $\gamma : V \rightarrow \mathcal{A}$ uma aplicação linear.

Definição 1.3 ► O par (\mathcal{A}, γ) é uma **álgebra de Clifford** (AC) para o espaço quadrático (V, g) quando \mathcal{A} é gerada como uma álgebra por $\{\gamma(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$ e $\{a1_{\mathcal{A}} \mid a \in \mathbb{R}\}$ e γ satisfaz, para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,

$$\boxed{\gamma(\mathbf{v})\gamma(\mathbf{u}) + \gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathbf{v}) = 2g(\mathbf{u}, \mathbf{v})1_{\mathcal{A}}} \quad \blacktriangleleft \quad (1.25)$$

Considere uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de V . Dentro da AC (\mathcal{A}, γ) para (V, g) , temos

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{e}_i)\gamma(\mathbf{e}_j) + \gamma(\mathbf{e}_j)\gamma(\mathbf{e}_i) &= 0, \quad i \neq j \\ (\gamma(\mathbf{e}_i))^2 &= g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)1_{\mathcal{A}}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Podemos ver que, sendo \mathcal{A} gerada por $\{\gamma(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$ e $\{a1_{\mathcal{A}} \mid a \in \mathbb{R}\}$, então ela é gerada pelos produtos

$$\mathcal{A} = \text{span}\{\gamma(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\gamma(\mathbf{e}_2)^{\mu_2}\dots\gamma(\mathbf{e}_n)^{\mu_n} \mid \mu_i = 0, 1\},$$

onde denotamos $\gamma(\mathbf{e}_1)^0 \dots \gamma(\mathbf{e}_n)^0 = 1_{\mathcal{A}}$. O número de elementos da forma $\gamma(\mathbf{e}_1)^{\mu_1}\gamma(\mathbf{e}_2)^{\mu_2}\dots\gamma(\mathbf{e}_n)^{\mu_n}$ com $\mu_i = 0, 1$ é 2^n . Assim a máxima dimensão de uma AC é 2^n .

Definição 1.4 ► Uma álgebra de Clifford (\mathcal{A}, γ) para o espaço quadrático (V, g) é dita uma **álgebra de Clifford universal** se, para cada álgebra de Clifford (\mathcal{B}, ρ) para (V, g) , existir um homomorfismo $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, tal que $\rho = \phi \circ \gamma$ e $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$. Denotaremos uma AC universal para (V, g) por $\mathcal{C}\ell(V, g)$. ◀

Uma definição equivalente à definição acima é

Definição 1.4' ► Uma álgebra de Clifford para o espaço quadrático $\mathbb{R}^{p,q}$ é universal se ela é gerada como álgebra pelos geradores de $\mathbb{R}^{p,q}$, mas não por um subespaço de $\mathbb{R}^{p,q}$. ◀

Teorema 1.2 ► A álgebra de Clifford (\mathcal{A}, γ) para o espaço quadrático (V, g) é universal quando $\dim \mathcal{A} = 2^n$, onde $n = \dim V$. ◀

Lema 1.1 ► Defina o centro de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, a álgebra de Clifford associada ao espaço $\mathbb{R}^{p,q}$ como

$$\boxed{\text{Cen}(\mathcal{C}\ell_{p,q}) = \{\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q} \mid \psi\phi = \phi\psi, \forall \phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}\}} \quad (1.27)$$

Se $n = \dim \mathbb{R}^{p,q}$ for par, então $\text{Cen}(\mathcal{C}\ell_{p,q}) = \Lambda^0(\mathbb{R}^{p,q})$, e se n for ímpar, então $\text{Cen}(\mathcal{C}\ell_{p,q}) = \Lambda^0(\mathbb{R}^{p,q}) \oplus \Lambda^n(\mathbb{R}^{p,q})$. ◀

Note que aqui usamos a notação $\Lambda^0(\mathbb{R}^{p,q})$ e $\Lambda^n(\mathbb{R}^{p,q})$ referentes respectivamente ao espaço dos escalares e pseudoescalares. Em se tratando de uma AC universal, existe um isomorfismo que não é canônico, enquanto espaços vetoriais, entre $\Lambda(\mathbb{R}^{p,q})$ e $\mathcal{C}\ell_{p,q}$. Entretanto, uma vez definida uma base ortonormal faz sentido falar em k -vetores que pertencem ao espaço $\Lambda^k(\mathbb{R}^{p,q})$. Veremos isso com mais detalhes mais adiante, nas eqs.(1.31-1.33).

Para determinar se um sistema ortonormal gera uma AC universal, temos o [Sny97]

Teorema 1.3 (Marcel Riesz) ► Uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ gera uma álgebra de dimensão 2^n a menos que o pseudoescalar $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n$ seja um múltiplo escalar da identidade. (Para as ACs reais, o caso excepcional ocorre quando $\eta = \mathbf{e}_{12\dots n} = \pm I$. Para as ACs complexas, o caso excepcional ocorre quando $\eta = \pm I$ ou $\pm iI$). ◀

A classe das possíveis ACs não-universais é restringida pelo seguinte:

Teorema 1.4 ► Se a álgebra de Clifford gerada por uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ não é universal, então n é ímpar. Além disso, se a álgebra de Clifford for real e não for universal, então $p - q - 1$ é um múltiplo inteiro de 4 ◀

1.6 Álgebras de Clifford (II)

Assumimos que o espaço vetorial V tenha uma métrica g . Seja J o ideal de $T(V)$ que consiste na soma dos termos da forma $a \otimes \{x \otimes x - g(x, x)\} \otimes b$ tais que $a, b \in T(V), x \in V$. Então a AC associada a V é denotada por $C_\diamond(V, g)$ e definida por

$$\boxed{C_\diamond(V, g) = T(V)/J} \quad (1.28)$$

O produto será denotado por $\overset{\circ}{\vee}$, satisfazendo $[a] \overset{\circ}{\vee} [b] = [a \otimes b]$. Se $x, y \in V$, então

$$\begin{aligned} x \otimes y &= \frac{1}{2} \{(x + y) \otimes (x + y) - g(x + y, x + y) - x \otimes x + g(x, x) - y \otimes y + g(y, y)\} \\ &\quad + x \wedge y + g(x, y). \end{aligned} \quad (1.29)$$

O termo dentro das chaves está em J e portanto

$$\boxed{x \otimes y \sim x \wedge y + g(x, y)} \quad (1.30)$$

Mais geralmente, para Ω uma p -forma e $x \in V$, prova-se [Ben87] que

Teorema 1.5 ► $x \otimes \Omega \sim x \wedge \Omega + x^\sharp \lrcorner \Omega$, onde $x^\sharp = \tau(x)$ denota a correlação em V ◀

O produto $\overset{\circ}{\vee}$ é introduzido no espaço das formas exteriores que transformam tal espaço em uma álgebra $\mathcal{C}\ell(V, g)$, onde $\mathcal{C}\ell(V, g) = C_\circ(V, g)$. Se Ω_1 e Ω_2 são multiformas exteriores, definimos

$$[\Omega_1] \overset{\circ}{\vee} [\Omega_2] = [\Omega_1 \overset{\circ}{\vee} \Omega_2],$$

já que $[\Omega_1] \overset{\circ}{\vee} [\Omega_2] = [\Omega_1 \otimes \Omega_2]$. Assim falamos que

$$x\Omega \equiv x \overset{\circ}{\vee} \Omega = x \wedge \Omega + x^\sharp \lrcorner \Omega, \quad (1.31)$$

onde, de agora em diante, o produto $\overset{\circ}{\vee}$ é indicado por justaposição. A álgebra quociente $C_\circ(V, g) = T(V)/J$ é uma AC. De fato, verificamos que

$$\mathbf{v} \overset{\circ}{\vee} \mathbf{u} + \mathbf{u} \overset{\circ}{\vee} \mathbf{v} = 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

De uma maneira semelhante podemos demonstrar que para uma forma arbitrária $\Psi \in \Lambda(V)$ temos

$$x \wedge \Psi = \frac{1}{2}(x\Psi + (\hat{\Psi})x) \quad (1.32)$$

e

$$x \lrcorner \Psi = \frac{1}{2}(x\Psi - (\hat{\Psi})x) \quad (1.33)$$

Essas duas expressões relacionam a álgebra de Grassmann à álgebra de Clifford. De fato, se $\{\mathbf{e}_i\}$ é uma base ortogonal,

$$\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_k} = \mathbf{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{i_k}. \quad (1.34)$$

1.7 Álgebras de Clifford (III)

Vamos agora exibir uma outra construção das ACs via *operadores de criação e aniquilação*³ [Ozi86].

Considere um vetor $\mathbf{v} \in V$ e um multivetor $\phi \in \Lambda(V)$. Seja o espaço dos endomorfismos⁴ de $\Lambda(V)$, denotado por $\text{End}(\Lambda(V))$. Definimos o *operador de criação* $\mathbf{E} : V \rightarrow \text{End}(\Lambda(V))$ como

$$\mathbf{E}(\mathbf{v})(\phi) = \mathbf{v} \wedge \phi \quad (1.35)$$

É claro que $\mathbf{E}(\mathbf{v}) : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V)$.

Definimos o *operador de aniquilação* $\mathbf{I} : V \rightarrow \text{End}(\Lambda(V))$ como

$$\mathbf{I}(\alpha)(\Psi) = \alpha \lrcorner \Psi \quad \alpha \in V^* \quad (1.36)$$

Podemos ver que os operadores \mathbf{E} anticomutam, pois

$$\mathbf{E}(\mathbf{u})\mathbf{E}(\mathbf{v}) + \mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{E}(\mathbf{u}) = 0, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \phi \in \Lambda(V). \quad (1.37)$$

³Esta denominação foi herdada do formalismo de segunda quantização por motivos que ficarão óbvios no decorrer desta seção, especificamente relativos às eqs.(1.37), (1.38) e (1.39).

⁴Um endomorfismo é um homomorfismo de um espaço nele mesmo.

e também que os operadores de aniquilação anticomutam:

$$\mathbf{I}(\alpha)\mathbf{I}(\beta) + \mathbf{I}(\beta)\mathbf{I}(\alpha) = 0. \quad (1.38)$$

Ainda podemos chegar a uma relação de comutação entre os operadores de criação e aniquilação utilizando a regra de Leibniz graduada para a contração à esquerda:

$$\boxed{\mathbf{I}(\alpha)\mathbf{E}(\mathbf{v}) + \mathbf{E}(\mathbf{v})\mathbf{I}(\alpha) = \alpha(\mathbf{v})} \quad (1.39)$$

Seja o espaço vetorial V munido de uma correlação simétrica $\tau : V \rightarrow V^*$. Dados os operadores $\mathbf{E} : V \rightarrow \text{End}(\Lambda(V))$ e $\mathbf{I} \circ \tau : V \rightarrow \text{End}(\Lambda(V))$, definimos o operador $\gamma : V \rightarrow \text{End}(\Lambda(V))$ como

$$\boxed{\gamma = \mathbf{E} + \mathbf{I} \circ \tau} \quad (1.40)$$

Com essas definições enunciamos o

Teorema 1.6 ► *A aplicação γ é uma aplicação de Clifford, ou seja,*

$$\boxed{\gamma(\mathbf{v})\gamma(\mathbf{u}) + \gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathbf{v}) = 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u})} \blacktriangleleft \quad (1.41)$$

1.8 Classificação e representação das álgebras de Clifford

1.8.1 Ideais

Seja \mathcal{A} uma álgebra. Um subespaço vetorial $I_L \subset \mathcal{A}$ é chamado um *ideal à esquerda* de \mathcal{A} se $\mathcal{A}I_L \subset I_L$. Analogamente, a um conjunto $I_R \subset \mathcal{A}$ denominamos *ideal à direita* de \mathcal{A} se $I_R\mathcal{A} \subset I_R$. Um conjunto $I \subset \mathcal{A}$ é um *ideal bilateral* (ou simplesmente *ideal*) de \mathcal{A} se $\mathcal{A}I\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$. Obviamente ideais são subálgebras. Um elemento não-nulo $a \in \mathcal{A}$ é dito *nilpotente* se $a^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que uma álgebra ou ideal é nilpotente quando todos seus elementos são nilpotentes. Segue, portanto, que todo ideal nilpotente de \mathcal{A} está contido em um único ideal nilpotente maximal, chamado de *radical*. Uma álgebra é *semi-simples* se seu radical for nulo.

Uma álgebra é dita *simples* se seus únicos ideais são os triviais, desde que \mathcal{A} não seja unidimensional e nilpotente. Enunciamos uma série de teoremas, cuja demonstração está em [Ben87] a fim de encaminharmos o teorema da decomposição de Wedderburn.

Teorema 1.7 ► *Uma álgebra é semi-simples se, e somente se, é simples ou soma direta de álgebras simples.* ◀

1.8.2 Idempotentes

Em uma álgebra \mathcal{A} , um elemento f é dito um *idempotente* se $f^2 = f$ e $f \neq 0$. Em uma álgebra de divisão \mathcal{A} o único idempotente é a unidade, pois se $f \neq 0$ e $f^2 = f$, multiplicando ambos os lados por f^{-1} obtemos $f = 1_{\mathcal{A}}$. Se não existirem idempotentes f_1 e f_2 tais que $f_1f_2 = 0$ e $f = f_1 + f_2$, dizemos que f é um idempotente *primitivo*.

Proposição 1.1 ► *Todo idempotente não-primitivo pode ser escrito como soma de idempotentes primitivos ortogonais.* ◀

Proposição 1.2 ► *O idempotente f é primitivo se, e somente se, f é o único idempotente em fAf .* ◀

O estudo dos idempotentes nas álgebras de Clifford é de suma importância, já que *spinors* algébricos são os ideais minimais laterais de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, construídos a partir de idempotentes primitivos.

Proposição 1.3 ► *Sejam uma base ortonormal de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ e r_i os números de Radon-Hurwitz dados pela tabela abaixo*

j	0	1	2	3	4	5	6	7
r_j	0	1	2	2	3	3	3	3

com a relação de recorrência $r_{j+8} = r_j + 4$. Existem $k = q - r_{q-p}$ elementos e_{I_1}, \dots, e_{I_k} tais que $e_{I_j}^2 = 1$ e todos esses elementos comutam entre si. Então os elementos da forma

$$\frac{1}{2}(1 \pm e_{I_1}) \frac{1}{2}(1 \pm e_{I_2}) \dots \frac{1}{2}(1 \pm e_{I_k}), \quad (1.42)$$

são idempotentes primitivos ortogonais entre, si cuja soma é igual a 1. Mais ainda, todo idempotente primitivo em $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ é da forma acima. ◀

1.8.3 Teoremas sobre a estrutura das álgebras de Clifford

A complexificação de um espaço vetorial V , denotada por $V_{\mathbb{C}}$ é o espaço dos elementos da forma $\mathbf{v} + i\mathbf{u}$, onde $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ e i é a unidade imaginária. O espaço $V_{\mathbb{C}}$ é um espaço vetorial com soma e multiplicação por um escalar complexo ($a + ib$), definidas respectivamente por

$$(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{u}_1) + (\mathbf{v}_2 + i\mathbf{u}_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + i(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$$

$$(a + ib)(\mathbf{v} + i\mathbf{u}) = (a\mathbf{v} - b\mathbf{u}) + i(b\mathbf{v} + a\mathbf{u})$$

A dimensão de $V_{\mathbb{C}}$ é $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = n$ e $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}} = 2n$. A partir daí vemos que $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes V$. Já a extensão $g_{\mathbb{C}}$ de g é definida como

$$g_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}_1 + i\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2 + i\mathbf{u}_2) = g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - g(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + i(g(\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2) + g(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2)).$$

Teorema 1.8 ► *Seja (V, g) um espaço quadrático sobre \mathbb{R} e $\mathcal{C}\ell(V, g)$ a sua AC real. Considere a AC complexa $\mathcal{C}\ell(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$ para o espaço quadrático complexificado $(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}})$. Então*

$$\mathcal{C}\ell(V_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}}) \simeq \mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(V, g)$$

onde $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(V, g) = \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell(V, g)$ denota a complexificação de $\mathcal{C}\ell(V, g)$. ◀

Esse teorema mostra que, para uma completa descrição das ACs, basta estudarmos a estrutura das ACs reais. A estrutura das ACs complexas é obtida via complexificação.

Seja agora uma métrica g em \mathbb{R}^n de assinatura (p, q) , com $p + q = n$, de modo que se $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base ortonormal, temos, para $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$,

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (v^1)^2 + \dots + (v^p)^2 - (v^{p+1})^2 - \dots - (v^n)^2. \quad (1.43)$$

Denotaremos esse espaço quadrático por $\mathbb{R}^{p,q}$ e a correspondente AC por $\mathcal{C}l_{p,q}$, com $p + q = n$,

$$\mathcal{C}l_{p,q} = \mathcal{C}l(\mathbb{R}^{p,q}).$$

Teorema 1.9 ► *Seja $\mathcal{C}l_{p,q}$ a álgebra de Clifford do espaço quadrático $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{p,q}$. Temos então os isomorfismos*

$$\boxed{\mathcal{C}l_{p+1,q+1} \simeq \mathcal{C}l_{1,1} \otimes \mathcal{C}l_{p,q}} \quad (1.44)$$

$$\mathcal{C}l_{q+2,p} \simeq \mathcal{C}l_{2,0} \otimes \mathcal{C}l_{p,q}, \quad (1.45)$$

$$\mathcal{C}l_{q,p+2} \simeq \mathcal{C}l_{0,2} \otimes \mathcal{C}l_{p,q}, \quad (1.46)$$

onde $p > 0$ ou $q > 0$. ◀

Observação ► O isomorfismo dado pela eq.(1.44) é chamado **teorema da periodicidade** ◀.

Havíamos definido anteriormente as três operações básicas⁵ das ACs. Redefinimos a notação de tais antiautomorfismos, sugerindo uma nova notação: para a **reversão**, α_1 e para a **conjugação**, α_{-1} , de modo que podemos unificar as duas operações na notação α_ϵ , ($\epsilon = \pm 1$). Com essa nova notação, enunciamos [Mak89] a generalização:

Teorema 1.10 (Periodicidade generalizado) ► *O Teorema da periodicidade (1.44) se generaliza em seus antiautomorfismos como*

$$\boxed{(\mathcal{C}l_{p+1,q+1}, \alpha_\epsilon) \simeq (\mathcal{C}l_{p,q}, \alpha_{-\epsilon}) \otimes (\mathcal{C}l_{1,1}, \alpha_\epsilon)} \quad \blacktriangleleft \quad (1.47)$$

No que se segue, as operações que agem sobre os elementos da AC em uma álgebra de dimensão maior podem ser conduzidas a operações sobre álgebras de dimensão menor.

Apenas combinando os isomorfismos acima, podemos obter outros. Por exemplo, usando a eq.(1.44), obtemos

$$\mathcal{C}l_{p,p} \simeq \otimes^p \mathcal{C}l_{1,1}. \quad (1.48)$$

Podemos também através deste observar que

$$\mathcal{C}l_{p,q} \simeq \mathcal{C}l_{p,p} \otimes \mathcal{C}l_{0,q-p} \quad (q > p), \quad \mathcal{C}l_{p,q} \simeq \mathcal{C}l_{q,q} \otimes \mathcal{C}l_{0,p-q} \quad (p > q). \quad (1.49)$$

Segue-se ainda que

$$\mathcal{C}l_{0,4} \simeq \mathcal{C}l_{0,2} \otimes \mathcal{C}l_{2,0}, \quad \mathcal{C}l_{0,8} \simeq \mathcal{C}l_{0,4} \otimes \mathcal{C}l_{4,0}, \quad \mathcal{C}l_{2,2} \simeq \mathcal{C}l_{0,2} \otimes \mathcal{C}l_{0,2} \simeq \mathcal{C}l_{1,1} \otimes \mathcal{C}l_{1,1} \quad (1.50)$$

⁵Reversão, involução graduada e conjugação.

e

$$\mathcal{C}l_{0,4} \otimes \mathcal{C}l_{p,q} \simeq \mathcal{C}l_{p,q+4}, \quad \mathcal{C}l_{0,8} \otimes \mathcal{C}l_{p,q} \simeq \mathcal{C}l_{p,q+8}. \quad (1.51)$$

Esse último é um caso particular o clássico teorema de Atiyah-Bott-Shapiro [Ati61, Ati64]

Temos também que

$$\mathcal{C}l_{2,0} \simeq \mathcal{C}l_{1,1}. \quad (1.52)$$

e combinando esse último isomorfismo aos outros isomorfismos vistos anteriormente, mostramos que

$$\boxed{\mathcal{C}l_{p+1,q} \simeq \mathcal{C}l_{q+1,p}} \quad (1.53)$$

Teorema 1.11 ► *Seja $\mathcal{C}l_{p,q}$ a AC associada ao espaço quadrático $\mathbb{R}^{p,q}$ e $\mathcal{C}l_{p,q}^+ = \{\phi \in \mathcal{C}l(V, g) \mid \phi = \hat{\phi}\}$ a sua sub-álgebra par. Então*

$$\boxed{\mathcal{C}l_{p,q}^+ \simeq \mathcal{C}l_{q,p-1} \simeq \mathcal{C}l_{p,q-1} \simeq \mathcal{C}l_{q,p}^+} \blacktriangleleft \quad (1.54)$$

1.8.4 Representações

Definição 1.5 ► *Seja \mathcal{A} uma álgebra real e V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} . Uma aplicação linear $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ satisfazendo $\rho(1_{\mathcal{A}}) = 1_V$ e $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{A}$, é chamada uma \mathbb{K} -representação de \mathcal{A} . O espaço vetorial V é chamado de *espaço de representação* de \mathcal{A} . ◀*

Se V_1 e V_2 carregam representações ρ_1 e ρ_2 respectivamente, dizemos que tais representações são *equivalentes* se existir um \mathbb{K} -isomorfismo $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\rho_1(a)} & \rho_1(a)x \\ \phi \downarrow & & \phi \downarrow \\ \phi(x) & \xrightarrow{\rho_2(a)} & \rho_2(a)\phi(x) = \phi(\rho_1(a)x) \end{array}$$

isto é, $\rho_2(a) = \phi \circ \rho_1(a) \circ \phi^{-1}$, $\forall a \in \mathcal{A}$.

Uma representação é dita *irredutível* se nenhum subespaço não-trivial de V é invariante. No caso em que V pode ser decomposto como soma direta de subespaços invariantes por ρ , dizemos que ρ é *redutível*. Nesse caso podemos induzir uma representação sobre cada um desses espaços.

Abaixo enunciamos dois teoremas que, de certa forma, completam essa sintética descrição das representações das álgebras.

Teorema 1.12 ► *Todas as representações irredutíveis de uma álgebra simples são equivalentes.* ◀

Teorema 1.13 ► *Representações irredutíveis de uma álgebra semi-simples são equivalentes se, e somente se, seus núcleos coincidem.* ◀

1.8.5 A decomposição algébrica de Wedderburn

A álgebra das matrizes quadradas de ordem n sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} será denotada por $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$.

Proposição 1.4 ▶ $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ é álgebra simples. ◀

Se a álgebra real é simples, então $\mathcal{A} = \mathcal{D} \otimes \mathcal{M}$, onde \mathcal{D} e \mathcal{M} são subálgebras de \mathcal{A} , onde \mathcal{D} é isomorfa a \mathbb{R}, \mathbb{C} ou \mathbb{H} e \mathcal{M} uma álgebra de matrizes. Portanto toda álgebra simples é da forma $\mathcal{A} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} . Podemos ver [Ben87] que \mathcal{D} comuta com \mathcal{A} e $\mathcal{A} = \mathcal{D}\mathcal{M}$; enunciamos o

Teorema 1.14 (Decomposição de Wedderburn): ▶ $\mathcal{A} = \mathcal{D} \otimes \mathcal{M}$. ◀

Como as únicas álgebras de divisão sobre \mathbb{R} são \mathbb{R}, \mathbb{C} ou \mathbb{H} , temos finalmente a

Proposição 1.5 ▶ \mathcal{A} é uma álgebra simples associativa sobre \mathbb{R} se e somente se $\mathcal{A} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} ◀

O caso de álgebras simples sobre \mathbb{C} segue imediatamente. Se $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ denota a álgebra \mathcal{B} com os escalares restritos a \mathbb{R} , então $\mathcal{B} = \mathbb{C} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Logo a proposição anterior nos dá $\mathcal{B} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{K} \otimes \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} . Mas como

$$\mathbb{C} \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}, \quad \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \quad \text{e} \quad \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathcal{M}(2, \mathbb{R}), \quad (1.55)$$

sendo \mathcal{B} simples por hipótese, o segundo caso acima não pode ocorrer. De acordo com o isomorfismo $\mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathcal{M}(2n, \mathbb{R})$, temos a

Proposição 1.6 ▶ Se \mathcal{A} é álgebra simples sobre \mathbb{C} , então $\mathcal{A} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$. ◀

1.8.6 Classificação das álgebras de Clifford.

Dados os isomorfismos

$$\mathcal{Cl}_{0,1} \simeq \mathbb{C}, \quad \mathcal{Cl}_{1,0} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \quad (1.56)$$

$$\mathcal{Cl}_{0,2} \simeq \mathbb{H}, \quad \mathcal{Cl}_{2,0} \simeq \mathcal{Cl}_{1,1} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \quad (1.57)$$

podemos, com a ajuda dos teoremas já vistos, classificar todas as ACs. Tal procedimento pode ser visto na literatura padrão [Por69, Por95, Lou94, Lou02, Ben87, Sny97] e apenas exibiremos os isomorfismos mais importantes.

$$\mathcal{M}(m, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathcal{M}(mn, \mathbb{R}), \quad \mathcal{Cl}_{p,p} \simeq \mathcal{M}(2p, \mathbb{R}), \quad (1.58)$$

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \simeq \mathcal{M}(4, \mathbb{R}), \quad \mathcal{Cl}_{3,0} \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{H}, \quad (1.59)$$

$$\mathcal{Cl}_{0,4} \simeq \mathbb{H} \otimes \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{H}) \simeq \mathcal{Cl}_{4,0}, \quad (1.60)$$

$$\mathcal{Cl}_{0,8} \simeq \mathcal{M}(16, \mathbb{R}), \quad (1.61)$$

A eq.(1.61) implica, juntamente com a eq.(1.44) (o teorema da periodicidade) [Ati61, Ati64] que

$$\boxed{\mathcal{Cl}_{p,q+8} \simeq \mathcal{Cl}_{p,q} \otimes \mathcal{M}(16, \mathbb{R})} \quad (1.62)$$

A tabela abaixo mostra a classificação de todas as ACs a partir dos isomorfismos estudados e do teorema da periodicidade:

$p - q \bmod 8$	0	1	2	3
$\mathcal{Cl}_{p,q}$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R})$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R})^{\oplus 2}$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R})$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{C})$
$p - q \bmod 8$	4	5	6	7
$\mathcal{Cl}_{p,q}$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{H})$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H})^{\oplus 2}$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H})$	$\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{C})$

onde $\lfloor n/2 \rfloor$ denota a parte inteira de $n/2$ e $\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{F})^{\oplus 2}$ denota a soma direta $\mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{F}) \oplus \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{F})$.

Com relação ao caso complexo, a classificação pode ser obtida através do recurso de complexificação. Denotamos $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{p,q} = \mathcal{Cl}_{\mathbb{C}}(n)$, onde $n = p + q$. Então,

$$\mathcal{Cl}_{\mathbb{C}}(2k) = \mathcal{M}(2^k, \mathbb{C}), \quad (1.63)$$

$$\mathcal{Cl}_{\mathbb{C}}(2k + 1) = \mathcal{M}(2^k, \mathbb{C}) \oplus \mathcal{M}(2^k, \mathbb{C}). \quad (1.64)$$

Portanto, todas as álgebras de Clifford podem ser construídas a partir das álgebras

$$\mathcal{Cl}_{1,0}, \quad \mathcal{Cl}_{0,1}, \quad \mathcal{Cl}_{0,2} \quad \text{e} \quad \mathcal{Cl}_{1,1}$$

1.8.7 O grupo Spin

O grupo $\text{Spin}(p, q)$ é definido como

$$\text{Spin}(p, q) = \{ \psi \in \widehat{\Gamma}_{p,q}^+ \mid \langle \psi \tilde{\psi} \rangle_0 = \pm 1 \} \quad (1.65)$$

onde

$$\widehat{\Gamma}_{p,q}^+ = \{ \phi \in \mathcal{Cl}_{p,q}^+ \mid \widehat{\phi} \mathbf{v} \phi^{-1} \in V, \forall \mathbf{v} \in V \} \quad (1.66)$$

denota o grupo de Clifford-Lipschitz contorcido.

O grupo $\text{Spin}_+(p, q)$ é definido como

$$\text{Spin}_+(p, q) = \{ \psi \in \widehat{\Gamma}_{p,q}^+ \mid \langle \psi \tilde{\psi} \rangle_0 = 1 \} \quad (1.67)$$

e podemos verificar que $\text{Spin}_+(p, q)$ é o recobrimento duplo de $\text{SO}_+(p, q)$, i.e.,

$$\text{Spin}_+(p, q) / \mathbb{Z}_2 = \text{SO}_+(p, q) \quad (1.68)$$

Como conseqüência imediata do assunto discutido nessa subseção temos o

Teorema 1.15 ▶ *Seja $\mathcal{Cl}_{p,q}$ a AC sobre $\mathbb{R}^{p,q}$ e $\mathcal{Cl}_{p,q}^+$ sua subálgebra par. Então se $n = p + q \leq 5$ temos*

$$\text{Spin}_+(p, q) = \{ R \in \mathcal{Cl}_{p,q}^+ \mid R \tilde{R} = \tilde{R} R = 1 \} \blacktriangleleft$$

1.9 A álgebra de Lie dos grupos associados

Grupos de Lie podem ser vistos como variedades munidas de uma estrutura de grupo, onde as operações do grupo são diferenciáveis. Não entraremos em detalhes sobre os conceitos ligados aos grupos de Lie [Lau97, Sat00], pois o que nos interessa neste capítulo é introduzir as álgebras de Clifford e os *spinors*. Entretanto, como as álgebras de Lie aparecem dentro das álgebras de Clifford [Sob84]), uma pequena discussão se faz oportuna.

Os grupos definidos na Subsec. (1.8.7) são grupos de Lie, e a álgebra de Lie desses grupos pode ser identificada com um subespaço $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, onde colchete de Lie é dado pelo comutador

$$[\psi, \phi] = \psi\phi - \phi\psi, \quad \psi\phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q} \quad (1.69)$$

Considerando $\mathcal{C}\ell_{p,q}^*$ o grupo dos elementos inversíveis, definimos a função

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{C}\ell_{p,q} &\rightarrow \mathcal{C}\ell_{p,q}^* \\ \psi &\mapsto \exp \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^n}{n!} \end{aligned} \quad (1.70)$$

A álgebra de Lie $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ com produto definido pela eq.(1.69) pode ser identificada com a álgebra de Lie de $\mathcal{C}\ell_{p,q}^*$.

Como exemplo vamos considerar o grupo de Clifford-Lipschitz $\Gamma_{p,q} := \{\phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^* \mid \phi \mathbf{v} \phi^{-1} \in V, \forall \mathbf{v} \in V\}$. Esse grupo é um subgrupo de Lie do grupo de Lie $\mathcal{C}\ell_{p,q}^*$ e sua álgebra de Lie é um subespaço vetorial de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$. Considere X um elemento da álgebra de Lie de $\Gamma_{p,q}$. Então $\exp(tX)$ é um elemento de $\Gamma_{p,q}$, ou seja,

$$f(t) = \text{Ad } \exp(tX)(\mathbf{v}) \equiv \exp(tX) \mathbf{v} \exp(-tX) \in \mathbb{R}^{p,q}, \quad \forall \mathbf{v} \in V \simeq \mathbb{R}^{p,q}. \quad (1.71)$$

De fato definindo $(\text{ad}(X))(\mathbf{v}) = [X, \mathbf{v}]$ e usando o conhecido resultado $\text{Ad}(\exp(tX)) = \exp(\text{ad}(tX))$, temos que $f(t) \in \mathbb{R}^{p,q}$ se, e somente se, $\text{ad}(X)(\mathbf{v}) = [X, \mathbf{v}] = X\mathbf{v} - \mathbf{v}X \in \mathbb{R}^{p,q}$. Prova-se que X , um elemento da álgebra de Lie de $\Gamma_{p,q}$, pode ser escrito como um elemento do espaço $X \in \text{Cen}(\mathcal{C}\ell_{p,q}) \oplus \Lambda_2(\mathbb{R}^{p,q})$ [Vaz99]. Desse modo segue que $\exp(tX) \in \Gamma_{p,q}$. De uma maneira mais geral podemos provar que

$$\exp(t\psi) \in \text{Spin}_+(p, q), \quad \text{dado } \psi \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{p,q}). \quad (1.72)$$

A álgebra de Lie do grupo $\text{Spin}_+(p, q)$, denotada por $\mathfrak{spin}_+(p, q)$ consiste no espaço vetorial dos bivectores munido do comutador. Se ψ e ϕ são bivectores, então é imediato que

$$\psi\phi = \langle \psi\phi \rangle_0 + \langle \psi\phi \rangle_2 + \langle \psi\phi \rangle_4, \quad (1.73)$$

e que

$$[\psi, \phi] = 2\langle \psi\phi \rangle_2. \quad (1.74)$$

Portanto o comutador entre bivectores é um bivector de onde segue o isomorfismo

$$\boxed{(\Lambda_2(\mathbb{R}^{p,q}), [\ , \]) \simeq \mathfrak{spin}_+(p, q)} \quad (1.75)$$

Exemplo 1.1: $\mathfrak{spin}_+(3, 0)$

Considere as quantidades $L_1 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_{23}$, $L_2 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_{31}$, $L_3 = \frac{1}{2}\mathbf{e}_{12}$. Esses bivectores satisfazem $L_1 = [L_2, L_3]$, $L_2 = [L_3, L_1]$, $L_3 = [L_1, L_2]$, ou seja,

$$\boxed{\mathfrak{spin}_+(3, 0) \simeq \mathfrak{su}(2)} \quad (1.76)$$

Exemplo 1.2: $\mathfrak{spin}_+(1, 3)$

Considere uma base ortonormal $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ de $\mathbb{R}^{1,3}$ que gera a AC do espaço-tempo $\mathcal{Cl}_{1,3}$. Existem seis geradores para essa álgebra, já que os geradores são os bivectores de $\mathcal{Cl}_{1,3}$. Definimos os geradores $\{J_i, L_i\}$ de $\mathfrak{spin}_+(1, 3)$ como:

$$J_i = \frac{1}{2}\gamma_{i0}, \quad L_i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}\gamma_{jk}, \quad (1.77)$$

onde ϵ^{ijk} denota o símbolo de Levi-Civita, o que nos permite provar que: $[L_i, L_j] = -\epsilon^{ijk}L_k$, $[J_i, J_j] = -\epsilon^{ijk}L_k$, $[J_i, L_j] = -\epsilon^{ijk}J_k$.

1.10 As três definições de *spinors*

O grupo $SU(2)$ é recobrimento duplo do grupo ortogonal especial $SO(3)$, ou seja, $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3)$, e o espaço que carrega a representação de $SU(2)$ é o \mathbb{C}^2 . Tais elementos de \mathbb{C}^2 são ditos *spinors* de Pauli, e dentro da classificação a ser apresentada, os *spinors clássicos* para esse caso bem particular.

Como $SU(2)$ é isomorfo ao grupo $\text{Spin}_+(3)$, \mathbb{C}^2 é o espaço de representação do grupo $\text{Spin}_+(3)$. Os grupos Spin estão naturalmente definidos dentro de uma AC, como vimos na seção anterior, e, no caso do grupo $\text{Spin}_+(3)$, dentro de $\mathcal{Cl}_{3,0}$. Dizemos ainda que $\text{Spin}_+(3)$ é a *representação de spin 1/2* do grupo de rotações espaciais em \mathbb{R}^3 e o grupo $SO(3)$ é a *representação de spin 1* dessas rotações e $\text{Spin}_+(3)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3)$. Não somente nos restringindo a $\mathcal{Cl}_{3,0}$, iremos definir o *spinor* clássico como entidade que carrega uma representação irredutível do grupo $\text{Spin}_+(p, q)$, que é recobrimento duplo do grupo ortogonal especial e, portanto, a representação de spin 1/2 do grupo de rotações em um espaço munido de uma métrica.

Também será usada uma outra definição para o *spinor*, a *algébrica*, onde um *spinor* é um elemento de um ideal minimal lateral de uma álgebra de Clifford. A representação da álgebra de Clifford obtida dessa maneira será chamada de *representação espinorial*. De fato, ainda nesse exemplo envolvendo $\mathcal{Cl}_{3,0} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$, esse ideal é isomorfo a \mathbb{C}^2 , de onde sugere-se essa outra definição.

Além das definições denominadas clássica e algébrica, existe ainda a que chamaremos *operatorial*. Discutiremos⁶ cada uma delas separadamente, devido à sua importância ao desenvolvimento da teoria.

1.10.1 *Spinors* algébricos

Definição 1.6 ► Um elemento de um ideal lateral minimal de uma álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(V, g)$ é

⁶Optamos por enfatizar as ACs reais, pois o caso complexo é trivialmente obtido a partir delas.

dito um *spinor algébrico* se $\mathcal{Cl}(V, g)$ for uma álgebra simples e um *semi-spinor algébrico* se $\mathcal{Cl}(V, g)$ for semi-simples e não-simples. ◀

Identificamos os *spinors* algébricos segundo a classificação das ACs discutidas na seção (1.10). Para uma AC simples temos $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ e um ideal à esquerda minimal de $\mathcal{Cl}_{p,q}$ é isomorfo a \mathbb{K}^n . No caso em que consideramos uma AC semi-simples, temos $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \oplus \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ e um ideal à esquerda minimal de $\mathcal{Cl}_{p,q}$ é isomorfo a \mathbb{K}^n . *Semi-spinors* algébricos são classificados de acordo com esse isomorfismo, ou seja, como elementos de \mathbb{K}^n . Nesse caso a soma de *semi-spinors* algébricos é chamada um *spinor* algébrico⁷. Para uma AC semi-simples um *spinor* algébrico é classificado como um elemento de $\mathbb{K}^n \oplus \mathbb{K}^n$.

De acordo com a classificação das AC, podemos classificar os *spinors* algébricos em classes perante a assinatura (p, q) de $\mathbb{R}^{p,q}$:

- **$p - q = 0, 2 \pmod 8$** . Neste caso temos $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R})$. Um *spinor* algébrico é um elemento de um ideal à esquerda minimal isomorfo a $\mathbb{R}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$.

- **$p - q = 4, 6 \pmod 8$** . Temos $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H})$. O espaço de *spinors* algébricos é isomorfo a $\mathbb{H}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}}$.

- **$p - q = 3, 7 \pmod 8$** . Neste caso temos $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{C})$. Um *spinor* algébrico é um elemento de um ideal à esquerda minimal isomorfo a $\mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$. A condição $p - q = 3, 7 \pmod 8$ só acontece se $n = p + q$ for ímpar. Nesse caso o pseudoescalar η pertence ao centro de $\mathcal{Cl}_{p,q}$ e satisfaz $\eta^2 = -1$, definindo assim uma \mathbb{C} -estrutura.

- **$p - q = 5 \pmod 8$** . Quando esta condição ocorre $\mathcal{Cl}_{p,q}$ é semi-simples, onde $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H}) \oplus \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H})$, portanto temos *semi-spinors* algébricos. O espaço dos *semi-spinors* algébricos é isomorfo a $\mathbb{H}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}}$ e conseqüentemente o espaço dos *spinors* algébricos é dado por $\mathbb{H}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}} \oplus \mathbb{H}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}}$. Para $p - q = 5 \pmod 8$ o pseudoescalar η pertence ao centro de $\mathcal{Cl}_{p,q}$ e é tal que $\eta^2 = 1$. Assim, podemos escrever $\mathcal{Cl}_{p,q} = +\mathcal{Cl}_{p,q} \oplus -\mathcal{Cl}_{p,q}$, com $\pm\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H})$.

- **$p - q = 1 \pmod 8$** . Nesta condição $\mathcal{Cl}_{p,q}$ é semi-simples e temos o isomorfismo $\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R})$. Portanto temos *semi-spinors* algébricos. O espaço dos *semi-spinors* algébricos é isomorfo a $\mathbb{R}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$. Então o espaço dos *spinors* algébricos é isomorfo a $\mathbb{R}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} \oplus \mathbb{R}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$. Para $p - q = 1 \pmod 8$, o pseudoescalar η pertence ao centro de $\mathcal{Cl}_{p,q}$ e é tal que $\eta^2 = 1$. Neste caso, também é possível escrever $\mathcal{Cl}_{p,q} = +\mathcal{Cl}_{p,q} \oplus -\mathcal{Cl}_{p,q}$, com $\pm\mathcal{Cl}_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor}, \mathbb{R})$.

1.10.2 *Spinors* clássicos

Definição 1.7 ▶ Seja $\mathbb{R}^{p,q}$ um espaço quadrático, $\mathcal{Cl}_{p,q}$ a AC desse espaço e $\text{Spin}_+(p, q)$ o grupo spin associado a $\mathcal{Cl}_{p,q}$. Um elemento do espaço de representação irredutível de $\text{Spin}_+(p, q)$ é dito um *spinor clássico*⁸. ◀

⁷Neste caso, o ideal não é minimal.

⁸Essa denominação não é padrão. Estamos utilizando-a para enfatizar que se trata da definição usual encontrada sobretudo em livros de física.

Novamente de acordo com a classificação das ACs, podemos classificar os *spinors* clássicos:

• **$\underline{p - q = 1, 7 \bmod 8}$** . Neste caso temos $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \simeq \mathcal{C}\ell_{p,q-1} = \mathcal{C}\ell_{p',q'}$, com $p' - q' = p - q + 1 = 0, 2 \bmod 8$, ou seja $\mathcal{C}\ell_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n-1/2 \rfloor}, \mathbb{R})$. Um *spinor* clássico é um elemento isomorfo a $\mathbb{R}^{2^{\lfloor n-1/2 \rfloor}}$.

• **$\underline{p - q = 2, 6 \bmod 8}$** . Temos $p' - q' = p - q + 1 = 3, 7 \bmod 8$, de modo que $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}, \mathbb{C})$. Um *spinor* clássico é um elemento de $\mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}}$. O pseudoescalar η define uma estrutura complexa no espaço dos *spinors* clássicos e temos duas representações irredutíveis não-equivalentes: uma com $\eta \simeq i \in \mathbb{C}$ e a outra com $\eta \simeq -i$. Os *spinors* clássicos que correspondem a essas duas estruturas são conjugados.

• **$\underline{p - q = 3, 5 \bmod 8}$** . Aqui $p' - q' = 4, 6 \bmod 8$ e assim temos a relação $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H})$. Um *spinor* clássico é um elemento $\mathbb{H}^{2^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1}}$.

• **$\underline{p - q = 4 \bmod 8}$** . Quando essa condição ocorre, $p' - q' = 5 \bmod 8$. A subálgebra par é semi-simples e portanto estabelecemos o isomorfismo $\mathcal{C}\ell_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H}) \oplus \mathcal{M}(2^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1}, \mathbb{H})$. Temos duas representações não-equivalentes de $\text{Spin}_+(p, q)$. Um *spinor* clássico é um elemento de $\mathbb{H}^{2^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1}}$. Assim, podemos escrever $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ = +\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \oplus -\mathcal{C}\ell_{p,q}^+$.

• **$\underline{p - q = 0 \bmod 8}$** . Nesta condição, $p' - q' = 1 \bmod 8$. A sub-álgebra par $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+$ é semi-simples, onde $\mathcal{C}\ell_{p,q} \simeq \mathcal{M}(2^{\lfloor n-1/2 \rfloor}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}(2^{\lfloor n-1/2 \rfloor}, \mathbb{R})$, portanto temos duas representações não-equivalentes de $\text{Spin}_+(p, q)$. O espaço $\mathbb{R}^{2^{\lfloor n-1/2 \rfloor}}$ é o espaço dos semi-*spinors* clássicos. Como no caso anterior, é possível escrever $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ = +\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \oplus -\mathcal{C}\ell_{p,q}^+$.

Observação: ► a definição de *spinor* algébrico em $\mathbb{R}^{q,p-1}$ é equivalente à definição de um *spinor* clássico em $\mathbb{R}^{p,q}$, já que, com base na eq.(1.54), a saber

$$\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \simeq \mathcal{C}\ell_{q,p-1}, \quad (1.78)$$

uma representação irredutível de $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+$ é obtida a partir de uma representação irredutível de $\mathcal{C}\ell_{q,p-1}$. Daí concluímos que um *spinor* clássico em $\mathbb{R}^{p,q}$ é um *spinor* algébrico em $\mathbb{R}^{q,p-1}$ ◀

1.10.3 *Spinors* operatoriais

Dada uma álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada como $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, podemos usar sua sub-álgebra par $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+$ como um espaço de representação de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$. Definimos uma representação $\rho : \mathcal{C}\ell_{p,q} \rightarrow \text{End}(\mathcal{C}\ell_{p,q}^+)$, que será denominada *representação graduada irredutível* (RGI).

Escrevemos um multivetor $a \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$ como $a = a_+ + a_-$, onde $a_{\pm} = \frac{1}{2}(a \pm \hat{a}) \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\pm}$. Considere agora $\rho = \rho_+ + \rho_-$ de modo que $\rho(a) = \rho_+(a_+) + \rho_-(a_-)$. Para $a_- \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^-$ temos $a_- \phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^-$ para $\phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^+$, ou seja, $\rho_+(a_+)(\phi) = a_+ \phi$, $\forall \phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^+$. Tome agora um elemento ímpar $\varsigma \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^-$ e defina

$$\rho_-(a_-)(\phi) = a_- \phi \varsigma, \quad \forall \phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \quad (1.79)$$

Se escolhermos ς de modo que $\varsigma^2 = 1$, onde $\varsigma \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^-$, então $\rho = \rho_+ + \rho_-$ é uma representação de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$.

A definição da RGI depende da existência de um elemento ímpar tal que $\varsigma^2 = 1$. Nos casos $\mathcal{C}\ell_{0,1} \simeq \mathbb{C}$ e $\mathcal{C}\ell_{0,2} \simeq \mathbb{H}$, esse elemento não existe. Para saber se ρ é redutível, siga o seguinte raciocínio: suponha que exista um elemento $\varpi_1 \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^+$ tal que

$$(\varpi_1)^2 = 1, \quad \varpi\varsigma = \varsigma\varpi. \quad (1.80)$$

Assim podemos escrever $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ = {}_+\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \oplus {}_-\mathcal{C}\ell_{p,q}^+$, onde

$${}_{\pm}\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ = \mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \frac{1}{2}(1 \pm \varpi_1), \quad (1.81)$$

de modo que, para $\phi_{\pm} \in {}_{\pm}\mathcal{C}\ell_{p,q}^+$, temos $\phi_{\pm}\varpi_1 = \pm\phi_{\pm}$.

Cada um dos espaços ${}_{\pm}\mathcal{C}\ell_{p,q}^+$ é invariante pela ação de ρ , como pode ser visto diretamente a partir da eq.(1.80). Além disso esses subespaços são subálgebras de $\mathcal{C}\ell_{p,q}^+$.

Se existir um outro elemento par ϖ_2 tal que $(\varpi_2)^2 = 1$, $\varpi_2\varpi_1 = \varpi_1\varpi_2$ e $\varpi_2\varsigma = \varsigma\varpi_2$, então os subespaços ${}_{\pm}\mathcal{C}\ell_{p,q}^+$ não carregam uma representação irredutível. Definimos, pois, outros quatro subespaços

$${}_{\pm\pm}\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ = {}_{\pm}\mathcal{C}\ell_{p,q}^+ \frac{1}{2}(1 \pm \varpi_1) \frac{1}{2}(1 \pm \varpi_2), \quad (1.82)$$

cada um invariante pela ação de ρ , ou seja $\rho({}_{\pm\pm}\mathcal{C}\ell_{p,q}^+) \hookrightarrow {}_{\pm\pm}\mathcal{C}\ell_{p,q}^+$. Podemos então continuar com essa construção se tivermos um outro elemento par ϖ_3 tal que $(\varpi_3)^2 = 1$, $\varpi_3\varpi_1 = \varpi_1\varpi_3$, $\varpi_3\varpi_2 = \varpi_2\varpi_3$ e $\varpi_3\varsigma = \varsigma\varpi_3$. Construimos, agora, oito subespaços invariantes.

Quando não existirem mais elementos pares satisfazendo essas condições, temos então uma *representação irredutível*. O espaço que carrega tal representação será denominado *álgebra espinorial*, que é uma subálgebra da subálgebra par e em alguns casos ela mesma pode ser a própria subálgebra par.

Definição 1.8 ► Um elemento do espaço de representação graduada irredutível de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ é denominado um *spinor operatorial*. ◀

Na verdade existem ainda outras subálgebras de Clifford que podem ser utilizadas como espaço de representação. O estudo dessas subálgebras e a completa classificação dos espaços operatoriais definidos em termos de subálgebras tem sido objeto de estudo atual.

1.11 Covariantes bilineares

Nesta seção denotamos campos espinoriais $\psi(x)$ unicamente por ψ , onde em cada ponto x de uma variedade ψ é um *spinor* apresentado em sua forma clássica, definido como um elemento do espaço de representação \mathbb{C}^4 do grupo $\text{Spin}_+(1,3)$, conforme a definição dada na última seção.

Os covariantes bilineares associados a ψ são considerados como sendo os seguintes campos:

$$\begin{aligned} \sigma &= \psi^\dagger \gamma_0 \psi, \quad \mathbf{J} = J_\mu \gamma^\mu = \psi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \psi \gamma^\mu, \quad \mathbf{S} = S_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma_0 i \gamma_{\mu\nu} \psi \gamma^{\mu\nu}, \\ \mathbf{K} &= \psi^\dagger \gamma_0 i \gamma_{0123} \gamma_\mu \psi \gamma^\mu, \quad \omega = -\psi^\dagger \gamma_0 \gamma_{0123} \psi. \end{aligned} \quad (1.83)$$

\mathbf{J} é interpretado, por exemplo no caso do elétron, e mais geralmente para qualquer férmion de spin 1/2 descrito por um campo espinorial de Dirac, como o vetor densidade de corrente tipo-tempo ($\mathbf{J}^2 > 0$) orientado na direção do futuro, o bivetor \mathbf{S} é usualmente interpretado como a densidade de probabilidade associada ao momento electromagnético, e o vetor tipo-espaço \mathbf{K} indica a direção do spin do elétron. Para uma discussão mais detalhada sobre essas entidades, suas relações e respectivas interpretações físicas veja, e.g., [Hol86a, Lou94, Lou02].

Os covariantes bilineares satisfazem as identidades de Fierz dadas por [Lou02, Hol86a, Hol86b]:

$$\mathbf{J}^2 = \omega^2 + \sigma^2, \quad \mathbf{K}^2 = -\mathbf{J}^2, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{K} = 0, \quad \mathbf{J} \wedge \mathbf{K} = -(\omega + \sigma\gamma_{0123})\mathbf{S}. \quad (1.84)$$

Quando σ e ω forem ambos não nulos, as identidades de Fierz podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_L \mathbf{J} &= \omega \mathbf{K} & \mathbf{S}_L \mathbf{K} &= \omega \mathbf{J}, & (\gamma_{0123} \mathbf{S})_L \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{K}, \\ (\gamma_{0123} \mathbf{S})_L \mathbf{K} &= \sigma \mathbf{J}, & \mathbf{S}_L \mathbf{S} &= \omega^2 - \sigma^2, & (\gamma_{0123} \mathbf{S})_L \mathbf{S} &= 2\omega\sigma, \\ \mathbf{J} \mathbf{S} &= -(\omega + \sigma\gamma_{0123})\mathbf{K}, & \mathbf{K} \mathbf{S} &= -(\omega + \sigma\gamma_{0123})\mathbf{J}, & \mathbf{S} \mathbf{J} &= (\omega - \sigma\gamma_{0123})\mathbf{K}, \\ \mathbf{S} \mathbf{K} &= (\omega - \sigma\gamma_{0123})\mathbf{J}, & \mathbf{S}^2 &= (\omega - \sigma\gamma_{0123})^2 = \omega^2 - \sigma^2 - 2\omega\sigma\gamma_{0123}, \\ \mathbf{S}^{-1} &= -\mathbf{S} \frac{(\sigma - \omega\gamma_{0123})^2}{(\omega^2 + \sigma^2)^2} = \frac{\mathbf{K} \mathbf{S} \mathbf{K}}{(\sigma^2 + \omega^2)^2}. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Para reconstruir um campo espinorial a partir dos seus covariantes bilineares, sabemos que dado um campo espinorial arbitrário ξ satisfazendo $\xi^\dagger \gamma_0 \psi \neq 0$, o campo espinorial ψ e o multivetor $Z\xi$, onde $Z = \sigma + \mathbf{J} + i\mathbf{S} + i\mathbf{K}\gamma_{0123} + \omega\gamma_{0123}$, diferem somente por uma fase. De fato, ψ pode ser escrito como

$$\psi = \frac{1}{4N} e^{-i\alpha} Z\xi, \quad (1.86)$$

onde $N = \frac{1}{2}\sqrt{\xi^\dagger \gamma_0 Z \xi}$ e $e^{-i\alpha} = \frac{1}{N} \xi^\dagger \gamma_0 \psi$ [Cra85, Mos03b]. Multivetores arbitrários são covariantes bilineares relativos a algum campo espinorial se satisfizerem as identidades de Fierz, quando pelo menos σ ou ω for diferente de zero [Lou02]. Quando os multivetores $\sigma, \omega, \mathbf{J}, \mathbf{S}, \mathbf{K}$ satisfazem as identidades de Fierz, o multivetor $Z = \sigma + \mathbf{J} + i\mathbf{S} + i\mathbf{K}\gamma_{0123} + \omega\gamma_{0123}$ é denominado *agregado de Fierz*, e quando $\gamma_0 Z^\dagger \gamma_0 = Z$, o que significa que Z é um agregado auto-adjunto⁹, Z é denominado *boomerang*.

Lounesto afirma que em todas as seis classes, mesmo quando $\omega = \sigma = 0$, um campo espinorial ψ é determinado por seu agregado Z a menos de uma fase pela eq.(1.86), que por sua vez é dado por ψ via $Z = 4\psi\psi^\dagger\gamma_0$. Quando os campos espinoriais são singulares ($\sigma = 0 = \omega$), é possível existir um agregado de Fierz Z associado a algum campo espinorial ψ , que não é um *boomerang*. Nesse caso, as identidades de Fierz são substituídas pelas condições

$$\begin{aligned} Z^2 &= 4\sigma Z, & Z\gamma_\mu Z &= 4J_\mu Z, & Zi\gamma_{\mu\nu} Z &= 4S_{\mu\nu} Z, \\ Zi\gamma_{0123}\gamma_\mu Z &= 4K_\mu Z, & Z\gamma_{0123} Z &= -4\omega Z. \end{aligned} \quad (1.87)$$

A classificação de Lounesto de todos os campo espinoriais é dada pelas seguintes classes disjuntas de campo espinoriais [Lou94, Lou02], onde nas três primeiras classes está implícito que $\mathbf{K}, \mathbf{S} \neq 0$:

⁹ Isso é equivalente a dizer que $\omega, \sigma, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathbf{S}$ são multivetores reais.

- 1) $\sigma \neq 0, \omega \neq 0$.
- 2) $\sigma \neq 0, \omega = 0$.
- 3) $\sigma = 0, \omega \neq 0$.
- 4) $\sigma = 0 = \omega, \mathbf{K} \neq 0, \mathbf{S} \neq 0$.
- 5) $\sigma = 0 = \omega, \mathbf{K} = 0, \mathbf{S} \neq 0$.
- 6) $\sigma = 0 = \omega, \mathbf{K} \neq 0, \mathbf{S} = 0$.

A densidade de corrente \mathbf{J} é sempre não-nula. Campos espinoriais de classe 1, 2 and 3 são de Dirac e os de classe 4, 5, and 6 são respectivamente denominados *flag-dipole*, *flagpole* (bandeira) e campos espinoriais de Weyl [Lou02]. Os campos espinoriais de Majorana são caso particular dos campos de classe 5. Veremos agora que os covariantes bilineares associados ao ELKO satisfazem $\sigma = 0 = \omega, \mathbf{K} = 0, \mathbf{S} \neq 0$ e $\mathbf{J}^2 = 0$, classificando-o dessa maneira como um campo espinorial de classe 5, do tipo bandeira.

1.12 Campos espinoriais ELKO

Daqui em diante faremos uso da definições do operador de conjugação de carga \mathcal{C} , que age sobre um *spinor* ψ a partir da ação $\mathcal{C}\psi = -\gamma^2\psi^*$, e também do operador de helicidade definido por $\sigma \cdot \mathbf{p}$, que age em cada uma de suas duas 2-componentes ϕ_a de $\psi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$. A fim de se encontrar um formalismo matemático adequado para se representar a matéria escura, Ahluwalia-Khalilova e Grumiller introduziram recentemente o *Eigen-spinoren des Ladungskonjugationsoperatoren*, cujo acrônimo ELKO¹⁰ será usado daqui em diante. Em [Ahl04] o ELKO é apresentado como um novo férmion descrito por um campo espinorial que ainda não foi identificado, na literatura da Física, com nenhuma partícula ou mesmo outra entidade física qualquer. No limite de baixas energias o ELKO se comporta como uma representação do grupo de Lorentz.

No restante desta subseção provamos que do ponto de vista algébrico o ELKO pertence juntamente com o campo espinorial de Majorana a uma classe maior de campo espinoriais, os chamados *campos espinoriais bandeira*¹¹, que correspondem à classe 5, segundo a classificação de Lounesto [Lou93, Lou94, Lou02] de todos os campos espinoriais de acordo com os valores assumidos pelos seus covariantes bilineares. A demonstração de nossa afirmação é baseada na classificação de Lounesto, e pode trazer alguma luz às recentes investigações que concernem a matéria escura.

Já que todos os campos espinoriais associados a algum campo fermiônico são elementos dos espaços que carregam respectivamente as representações $D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ ou $D^{(1/2,0)}$, ou $D^{(0,1/2)}$

¹⁰ *Autospinors* do operador de conjugação de carga, que possuem helicidades duais. (Dual-helicity *eigen-spinors* of the charge conjugation operator.) Essa denominação é redundante, pois provaremos logo a seguir que qualquer campo espinorial de classe 5, dentro da qual o ELKO é classificado segundo Lounesto [Lou02, Lou94] possui sempre componentes com helicidades opostas [Roc05b]

¹¹ Flagpole spinor fields.

de $SL(2, \mathbb{C})$, todos eles pertencem a alguma das seis classes encontradas por Lounesto em sua teoria de classificação dos campos espinoriais. Tal classificação algébrica é baseada nos valores assumidos pelos covariantes bilineares associados, nas identidades de Fierz, nos agregados e *boomerangs* [Lou93, Lou94, Lou02]. Daqui em diante provamos que os campos espinoriais ELKO possuem natureza semelhante à dos campos espinoriais de Majorana, no sentido de que ambos pertencem à classe 5 dos campos espinoriais bandeira propostos por Lounesto, que naturalmente carregam uma estrutura de bandeira. No entanto devido aos diferentes valores das helicidades de cada um de seus 2-campos espinoriais, ambos se encaixam na classe 5 da classificação de Lounesto, embora possuam propriedades físicas bem distintas, cuja discussão está fora do escopo desta tese. Para maiores detalhes veja, e.g., [Ahl04]. A demonstração se faz primeiramente mostrando que o ELKO pertence à classe 5 e subseqüentemente que o ELKO satisfaz a condição de Majorana, i.e., $\mathcal{C}\psi = \lambda\psi$, onde \mathcal{C} denota o operador de conjugação de carga, ψ denota o ELKO e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$. Mais precisamente $\lambda = \pm 1$ para o ELKO. Enfatizamos ainda que os campos espinoriais da classe 4 ainda não possuem uma correspondência com nenhuma partícula elementar descrita por alguma teoria física.

O campo espinorial ELKO Ψ que corresponde a uma onda plana com *momentum* $p = (p^0, \mathbf{p})$ pode ser escrito, sem perda de generalidade, como $\Psi = \psi e^{-ip \cdot x}$ ou $\Psi = \psi e^{ip \cdot x}$, onde

$$\psi = \begin{pmatrix} i\Theta\phi_L^*(\mathbf{p}) \\ \phi_L(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (1.88)$$

onde dados os geradores \mathfrak{J} das rotações, o operador de reversão temporal de Wigner Θ satisfaz $\Theta\mathfrak{J}\Theta^{-1} = -\mathfrak{J}^*$. É útil escolher $i\Theta = \sigma_2$, como feito em [Ahl04], de tal maneira que seja possível expressar

$$\psi = \begin{pmatrix} \sigma_2\phi_L^*(\mathbf{p}) \\ \phi_L(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (1.89)$$

A representação de Weyl dos γ^μ

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad -\gamma_k = \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (1.90)$$

é usada, onde

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.91)$$

são matrizes de Pauli.

Omitindo o subíndice do campo espinorial ϕ_L , denotando-se de agora em diante ϕ , podemos escrever

$$\phi = \begin{pmatrix} \alpha(\mathbf{p}) \\ \beta(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad \alpha(\mathbf{p}), \beta(\mathbf{p}) \text{ são funções complexas.} \quad (1.92)$$

É imediato que

$$\begin{aligned}\sigma_1\phi &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}, & \sigma_2\phi &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\beta \\ i\alpha \end{pmatrix}, \\ \sigma_3\phi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{1.93}$$

Da eq. (1.89) segue que

$$\psi^\dagger = [(\sigma_2\phi^*)^\dagger, \phi^\dagger] = [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)].\tag{1.94}$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned}\sigma &= \psi^\dagger\gamma_0\psi \\ &= [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -i\beta^* \\ i\alpha^* \end{pmatrix} \\ &= i\beta\alpha - i\alpha\beta - i\alpha^*\beta^* + i\beta^*\alpha^* \\ &= 0,\end{aligned}\tag{1.95}$$

$$\begin{aligned}\omega &= -\psi^\dagger\gamma_{123}\psi = [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} i\alpha \\ i\beta \\ -\beta^* \\ \alpha^* \end{pmatrix} \\ &= 0,\end{aligned}\tag{1.96}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= J_\mu\gamma^\mu = \psi^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\psi\gamma^\mu \\ &= \psi^\dagger\gamma_0\gamma_1\psi\gamma^1 + \psi^\dagger\gamma_0\gamma_2\psi\gamma^2 + \psi^\dagger\gamma_0\gamma_3\psi\gamma^3 - \psi^\dagger\psi\gamma^0 \\ &= \psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \psi\gamma^1 + \psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \psi\gamma^2 \\ &\quad + \psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} \psi\gamma^3 - \psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \psi\gamma^0 \\ &= \psi^\dagger \begin{pmatrix} i\sigma_3\phi^* \\ -\sigma_1\phi \end{pmatrix} \gamma^1 + \psi^\dagger \begin{pmatrix} -\phi^* \\ -\sigma_2\phi \end{pmatrix} \gamma^2 - \sigma^\dagger \begin{pmatrix} -i\sigma_1\phi^* \\ -\sigma_3\phi \end{pmatrix} + \psi^\dagger\psi\gamma^0 \\ &= [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} i\alpha^* \\ -i\beta^* \\ -\beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \gamma^1 + [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} -\alpha^* \\ -\beta^* \\ i\beta \\ -i\alpha \end{pmatrix} \gamma^2 + \\ &\quad [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} -i\beta^* \\ -i\alpha^* \\ -\alpha \\ \beta \end{pmatrix} \gamma^3 + [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} -i\beta^* \\ i\alpha^* \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \gamma^0 \\ &= 2(\alpha\beta^* + \alpha^*\beta)\gamma^1 + 2i(\alpha^*\beta - \alpha\beta^*)\gamma^2 + 2(\beta\beta^* - \alpha\alpha^*)\gamma^3 \\ &\quad + 2(\alpha\alpha^* + \beta\beta^*)\gamma^0, \\ &\neq 0.\end{aligned}\tag{1.97}$$

Dos resultados acima vemos que $\mathbf{J}^2 = 0$. Os valores de \mathbf{K} e \mathbf{S} são agora calculados:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K} &= K_\mu \gamma^\mu = \psi^\dagger i\gamma_{123} \gamma_\mu \psi \gamma^\mu \\
&= i\psi^\dagger \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix} \psi \gamma^1 + i\psi^\dagger \begin{pmatrix} -i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \psi \gamma^2 + i\psi^\dagger \begin{pmatrix} -i\sigma_3 & 0 \\ 0 & -i\sigma_3 \end{pmatrix} \psi \gamma^3 \\
&\quad + i\psi^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \psi \gamma^0 \\
&= \psi^\dagger \begin{pmatrix} i\sigma_3 \phi^* \\ \sigma_1 \phi \end{pmatrix} \gamma^1 - \psi^\dagger \begin{pmatrix} \phi^* \\ -\sigma_2 \phi \end{pmatrix} \gamma^2 - \psi^\dagger \begin{pmatrix} i\sigma_1 \phi^* \\ -\sigma_3 \phi \end{pmatrix} \gamma^3 + \psi^\dagger \begin{pmatrix} \sigma_2 \phi^* \\ -\phi \end{pmatrix} \gamma^0 \\
&= [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} \alpha^* \\ -\beta^* \\ -i\beta \\ -i\alpha \end{pmatrix} \gamma^1 + [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} i\alpha^* \\ i\beta^* \\ -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} \gamma^2 \\
&\quad + [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} -\beta^* \\ -\alpha^* \\ -i\alpha \\ i\beta \end{pmatrix} \gamma^3 + [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} -i\beta^* \\ i\alpha^* \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \gamma^0 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.98}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma_0 i\gamma_{\mu\nu} \psi \gamma^{\mu\nu} \\
&= \frac{i}{2} (\psi^\dagger \gamma_1 \psi \gamma^{01} + \psi^\dagger \gamma_2 \psi \gamma^{02} + \psi^\dagger \gamma_3 \psi \gamma^{03} + \psi^\dagger \gamma_{012} \psi \gamma^{12} + \psi^\dagger \gamma_{013} \psi \gamma^{13} + \psi^\dagger \gamma_{023} \psi \gamma^{23}) \\
&= \frac{i}{2} \left(\psi^\dagger \begin{pmatrix} -\sigma_1 \phi^* \\ i\sigma_3 \phi \end{pmatrix} \gamma^{01} - \psi^\dagger \begin{pmatrix} \sigma_2 \phi \\ \phi^* \end{pmatrix} \gamma^{02} - \psi^\dagger \begin{pmatrix} \sigma_3 \phi \\ i\sigma_1 \phi^* \end{pmatrix} \gamma^{03} - \psi^\dagger \begin{pmatrix} i\sigma_3 \phi \\ \sigma_1 \phi^* \end{pmatrix} \gamma^{12} + i\psi^\dagger \begin{pmatrix} \sigma_2 \phi \\ -\phi^* \end{pmatrix} \gamma^{13} \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2} \psi^\dagger \begin{pmatrix} -i\sigma_1 \phi \\ \sigma_3 \phi^* \end{pmatrix} \gamma^{23} \right) \\
&= \frac{i}{2} \{ [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} -\beta^* \\ -\alpha^* \\ -i\beta \\ -i\beta \end{pmatrix} \gamma^{01} + [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} i\beta \\ -i\alpha \\ -\alpha^* \\ -\beta^* \end{pmatrix} \gamma^{02} \\
&\quad + [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} -\alpha \\ \beta \\ -i\beta^* \\ -i\alpha^* \end{pmatrix} \gamma^{03} + [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} -i\alpha \\ i\beta \\ -\beta^* \\ -\alpha^* \end{pmatrix} \gamma^{12} \\
&\quad + [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} -i\beta \\ i\alpha \\ -\alpha^* \\ -\beta^* \end{pmatrix} \gamma^{13} + [(i\beta, -i\alpha), (\alpha^*, \beta^*)] \begin{pmatrix} -i\beta \\ -i\alpha \\ \alpha^* \\ -\beta^* \end{pmatrix} \gamma^{23} \} \\
&= \frac{i}{2} ((\alpha^*)^2 + (\beta^*)^2 - \beta^2 - \alpha^2) \gamma^{02} + \frac{1}{2} ((\alpha^*)^2 + (\beta^*)^2 + \beta^2 + \alpha^2) \gamma^{31} \\
&\quad + \frac{1}{2} ((\beta^*)^2 + \beta^2 - (\alpha^*)^2 - \alpha^2) \gamma^{01} + \frac{i}{2} (-\beta^2 - \alpha^2 + (\alpha^*)^2 + (\beta^*)^2) \gamma^{02} \\
&\quad + (\alpha\beta + \alpha^* \beta^*) \gamma^{03} + \frac{i}{2} (\alpha\beta - \alpha^* \beta^*) \gamma^{12} + \frac{i}{2} (\beta^2 - \alpha^2 + (\alpha^*)^2 - (\beta^*)^2) \gamma^{23}.
\end{aligned} \tag{1.99}$$

$\neq 0$.

Das eqs.(1.97) e (1.98) é imediato ver que

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{K} = 0. \tag{1.100}$$

Além disso, o campo espinorial ELKO satisfaz a condição de Majorana, dada por [Tic99, Del99, Itz80, Kak93, Ryd96]

$$\psi = -\gamma^2 \psi^* = \lambda \psi, \quad \lambda \in \text{U}(1). \quad (1.101)$$

Aqui utilizamos o operador de conjugação de carga \mathcal{C} dado por $\mathcal{C}\psi = -\gamma^2 \psi^*$. De fato, usando a eq.(1.89) segue que

$$\begin{aligned} -\gamma^2 \psi^* &= - \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma_2 \phi^*)^* \\ \phi^* \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} -\sigma_2 \phi^* \\ \sigma_2 \sigma_2^* \phi \end{pmatrix} \\ &= \psi. \end{aligned} \quad (1.102)$$

É imediato que todas as identidades de Fierz introduzidas pelas expressões nas eqs.(1.84) são satisfeitas, e também segue da eq.(1.99) que

$$\mathbf{S}_L \mathbf{S} = 0 \quad (1.103)$$

A fim de mostrar que o campo espinorial de Majorana possui componentes *2-spinors* com helicidades opostas, considere o operador de conjugação de carga $\mathcal{C}\psi = -\gamma^2 \psi^*$, e tome um *autospinor* de Majorana $\psi_M := \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ com autovalor igual a 1, i.e., $-\gamma^2 \psi_M^* = \psi_M$. segue que

$$\begin{aligned} -\gamma^2 \psi_M^* &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_2 \phi_2^* \\ -\sigma_2 \phi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Da equação $(\sigma \cdot \mathbf{p})\phi_1 = \phi_1$, equivalente a supor que a componente ϕ_1 tenha helicidade positiva, temos que

$$(\sigma \cdot \mathbf{p})^* \phi_1^* = \phi_1^*, \quad (1.105)$$

e portanto

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot \mathbf{p})\phi_2 &= (\sigma \cdot \mathbf{p})(-\sigma_2 \phi_1^*) \\ &= \sigma_2 (\sigma \cdot \mathbf{p})^* \phi_1^* \\ &= \sigma_2 \phi_1^*, \quad \text{pela eq.(1.105)} \\ &= -\phi_2, \quad \text{pela eq.(1.104)}. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Agora considere a definição contravariante $\mathcal{C}\psi = -\gamma_2 \psi^* = \gamma^2 \psi^*$ do operador de conjugação de carga. Daí segue que

$$\gamma^2 \psi_M^* = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_2 \phi_2^* \\ \sigma_2 \phi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (1.107)$$

Da equação $(\sigma \cdot \mathbf{p})\phi_1 = \phi_1$, segue que

$$(\sigma \cdot \mathbf{p})^* \phi_1^* = \phi_1^*$$

e portanto

$$(\sigma \cdot \mathbf{p})\phi_2 = (\sigma \cdot \mathbf{p})(\sigma_2 \phi_1^*) = \sigma_2(-\sigma \cdot \mathbf{p})^* \phi_1^* = -\sigma_2 \phi_1^* = -\phi_2. \quad (1.108)$$

Mostramos que não importa a definição do operador \mathcal{C} ser co- ou contravariante, as componentes do operador de Majorana sempre terão helicidades opostas.

De uma maneira mais geral, considere qualquer campo espinorial de classe 5 dado por $\psi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ para o qual $\mathcal{C}\psi = \lambda\psi$ e $\lambda\lambda^* = 1$. Tal condição implica que

$$\lambda\phi_1 = \sigma_2\phi_2^*, \quad \lambda\phi_2 = -\sigma_2\phi_1^*. \quad (1.109)$$

Agora, a fim de provar que qualquer campo espinorial bandeira possui helicidades opostas, suponha que

$$(\sigma \cdot \mathbf{p})\phi_2 = \phi_2 \quad (1.110)$$

(respectivamente, $(\sigma \cdot \mathbf{p})\phi_1 = \phi_1$). Um cálculo trivial mostra que $(\sigma \cdot \mathbf{p})\phi_1 = -\phi_1$ (respectivamente, que $(\sigma \cdot \mathbf{p})\phi_2 = -\phi_2$), i.e., os dois 2-campos espinoriais, componentes do campo espinorial de classe 5, possuem helicidades *opostas*. Com efeito, pela eq.(1.109) segue que

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot \mathbf{p})\phi_1 &= (\sigma \cdot \mathbf{p})\lambda^* \sigma_2 \phi_2^* \\ &= \lambda^* (\sigma \cdot \mathbf{p}) \sigma_2 \phi_2^* \\ &= -\lambda^* \sigma_2 (\sigma \cdot \mathbf{p})^* \phi_2^*, \\ &= -\lambda^* \sigma_2 \phi_2^*, \quad \text{pela eq.(1.110)} \\ &= -\phi_1, \quad \text{pela eq.(1.109)}. \end{aligned} \quad (1.111)$$

No caso particular do ELKO $\psi = \begin{pmatrix} \sigma_2 \phi^* \\ \phi \end{pmatrix}$, satisfazendo $\mathcal{C}\psi = \psi$, se $(\sigma \cdot \mathbf{p})\phi = \phi$ então $(\sigma \cdot \mathbf{p})(\sigma_2 \phi^*) = -\sigma_2 \phi^*$. Com efeito, já que $(\sigma \cdot \mathbf{p})^* \phi^* = \phi^*$, segue então que

$$(\sigma \cdot \mathbf{p})(\sigma_2 \phi^*) = -\sigma_2 (\sigma \cdot \mathbf{p})^* \phi^* = -\sigma_2 \phi^*. \quad (1.112)$$

É claro que o resultado acima é um caso particular da propriedade de que os campos espinoriais de classe 5 possuem 2-componentes com helicidades opostas, como provado através do desenvolvimento a partir da eq.(1.110) que culmina na eq.(1.111). Portanto o ELKO também possui componentes com helicidades opostas.

Ahluwalia-Khalilova e Grumiller [Ahl04] citando Peskin e Schroeder [Pes95], e Marshak e Sudarshan [Sud61], afirmam que a diferença fundamental entre o ELKO e o campo espinorial de Majorana é o fato de que as componentes deste possuem a mesma helicidade. Essa suposição em [Pes95, Sud61] é completamente *ad hoc* do ponto de vista algébrico, e não há justificativa algébrica para as afirmações em [Pes95, Sud61], exceto pelo desejo de se associar partículas de Majorana a estados de helicidade bem definida, algo que não é endossado pelo formalismo de Lounesto.

Vimos que qualquer campo espinorial bandeira, que representa a classe 5, é um *autospinor* do operador de conjugação de carga \mathcal{C} , que pode ser representado por $-\gamma^2(\cdot)^*$, na representação quiral (de Weyl) até agora utilizada. Além disso sabemos que um campo espinorial que satisfaz a condição de Majorana $\mathcal{C}\psi = \lambda\psi$ tal que $\lambda = \pm 1$ pertence à mesma classe dos *spinors* de Majorana [Lou94, Lou02], e portanto o ELKO pertence à classe 5 de campos espinoriais, pela classificação geral de Lounesto. Podemos provar, ainda no presente contexto, que enquanto o anticomutador entre \mathcal{C} e o operador de paridade \mathcal{P} agindo em *spinors* de Dirac é igual a zero, o *comutador* $[\mathcal{C}, \mathcal{P}]$ agindo sobre o ELKO é também igual a zero. De fato, definindo-se o operador \mathcal{R} como a reversão do sinal dos *autospinors* do operador de helicidade $\sigma \cdot \mathbf{p}$, é imediato que

$$\mathcal{R}\psi = -\psi \quad (1.113)$$

no caso particular onde $\psi = \begin{pmatrix} \sigma_2 \phi^* \\ \phi \end{pmatrix}$ representa o ELKO. O operador de paridade é definido como $\mathcal{P} = i\gamma^0 \mathcal{R}$ [Kak93, Tic99, Ahl04]. segue que

$$\mathcal{C}\mathcal{P}\psi = -i \begin{pmatrix} \phi \\ \sigma_2 \phi^* \end{pmatrix} = \mathcal{P}\mathcal{C}\psi, \quad (1.114)$$

e portanto

$$\boxed{[\mathcal{C}, \mathcal{P}]\psi_{\text{ELKO}} = 0} \quad (1.115)$$

Além disso, podemos provar também para o ELKO que, dado o operador de reversão temporal $\mathcal{T} = \gamma^{0123}\mathcal{C}$ segue que $[\mathcal{C}, \mathcal{T}]\psi = 0 = \{\mathcal{P}, \mathcal{T}\}\psi$ e que

$$\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{T}\psi = \begin{pmatrix} -\phi \\ \sigma_2 \phi^* \end{pmatrix}, \quad (1.116)$$

e portanto temos $\mathcal{C}\mathcal{P}\mathcal{T}^2 = -1$.

Observação: ► o ELKO na sua forma mais geral é dado pelo campo [Ahl04]

$$\Psi = e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} \sigma_2 \phi^*(\mathbf{p}) \\ \phi(\mathbf{p}) \end{pmatrix} + e^{ip \cdot x} \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{p}) \\ -\sigma_2 \phi^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (1.117)$$

onde os campos espinoriais da combinação acima são *autospinors* do operador de conjugação de carga \mathcal{C} com autovalores ± 1 , isto é:

$$\mathcal{C} \begin{pmatrix} \sigma_2 \phi^*(\mathbf{p}) \\ \phi(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} \sigma_2 \phi^*(\mathbf{p}) \\ \phi(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{p}) \\ -\sigma_2 \phi^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{p}) \\ -\sigma_2 \phi^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (1.118)$$

Como a soma de campos espinoriais não preserva as classes propostas por Lounesto, optamos por apresentar o ELKO a partir de uma única componente. Todos os resultados obtidos até agora são válidos também para a outra componente $\begin{pmatrix} \phi(\mathbf{p}) \\ -\sigma_2 \phi^*(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$. ◀

É bem sabido que o ELKO não satisfaz a equação de Dirac [Ahl04], o que o torna um férmion bastante peculiar. Para mais discussões acerca de suas propriedades físicas e sua utilização como um possível candidato para a descrição da matéria escura, veja por exemplo [Ahl04].

Capítulo 2

Álgebras de Clifford Paralelas e Ortogonais

2.1 Introdução

Uma das motivações das quais este capítulo é oriundo consiste na nova possibilidade de contornarmos as dificuldades que o formalismo de Hestenes apresenta, acerca da decomposição projetiva¹ levar às transformações de Lorentz. A formulação de Hestenes nos diz que os pontos do espaço projetivo \mathbb{P}^n podem ser representados como raias em \mathbb{R}^{p+q+1} ou, de maneira equivalente, como vetores em \mathbb{R}^{p+q} . A álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ é capaz de expressar a relação entre \mathbb{R}^{p+q} e \mathbb{R}^{p+q+1} de maneira natural, totalmente independente de coordenadas. Por exemplo, considerando x e n vetores de \mathbb{R}^{p+q+1} tais que $n^2 \neq 0$, dado n fixo, o espaço vetorial \mathbb{R}^{p+q} pode ser definido como o conjunto $\mathbb{R}^{p+q} = \{x \wedge n\}$. De fato, a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ gerada dessa maneira é exatamente a subálgebra par $\mathcal{C}\ell_{p+q+1}^+$ de $\mathcal{C}\ell_{p+q+1}$. O chamado mapa projetivo que relaciona cada raia $\{\lambda x\}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) em \mathbb{R}^{p+q+1} a um único vetor \mathbf{x} em \mathbb{R}^{p+q} é definido pela relação de Clifford

$$xn = x \cdot n + x \wedge n = ct + \mathbf{x}, \quad ct = x \cdot n, \quad \mathbf{x} = \frac{x \wedge n}{x \cdot n}. \quad (2.1)$$

No caso de $\mathbb{R}^{1,3}$, esse mapa decompõe o espaço-tempo de Minkowski em uma soma direta de uma hiperfície tipo-espaço e uma componente tipo-tempo.

Apesar de muitas tentativas, dadas as decomposições de dois vetores $x = ct + \mathbf{x}$ e $x' = ct' + \mathbf{x}'$, não é possível relacionar os vetores \mathbf{x} e \mathbf{x}' por intermédio de uma transformação de Lorentz. Uma das conseqüências do formalismo desenvolvido nesse capítulo é exatamente contornar essa questão (vide Sec. (2.15)).

Neste capítulo apresentamos graduações arbitrárias de álgebras de Clifford, e as utilizamos para generalizar a decomposição do espaço-tempo em uma superposição de infinitas fatias espaciais, cada uma em um tempo fixo, correspondendo a um processo de folheação local do espaço-tempo. Esse

¹Projective splitting.

por exemplo é o paradigma do formalismo ADM [Arn62, Bae94, Mis73]. Baseados em uma \mathbb{Z}_2 -gradação induzida por um automorfismo interno α de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, decompomos o operador de Dirac em componentes paralela [α -par] e ortogonal [α -ímpar], mostrando como cada uma das componentes está relacionada à derivada de Lie ao longo do vetor-decomposição e ao bivector-decomposição momento angular. Algumas aplicações físicas são descritas em detalhes, como por exemplo, as transformações de Lorentz no contexto da decomposição do espaço-tempo de Minkowski (ETM), a cinemática relativística, a equação de Dirac para uma α -gradação associada à decomposição do espaço-tempo através de automorfismos internos e a dedução das leis de evolução para a massa e o spin de uma partícula-teste nas vizinhanças de uma singularidade cuja geometria pode ser representada através da métrica de Reissner-Nordström. O formalismo desenvolvido é válido para qualquer variedade $(p + q)$ -dimensional.

A relação entre decomposições do espaço-tempo e Física tem sido explorada, por exemplo, em [Man99a], onde a álgebra dos octonions \mathbb{O} é projetada na álgebra dos números complexos \mathbb{C} . Com isso o grupo de Lorentz $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{O})$ é imediatamente obtido. A idéia principal desse capítulo é dar continuidade a essa idéia para espaços de dimensão finita arbitrária, além de obter projeções, via automorfismos internos induzidos por campos multivetoriais, ao invés de simplesmente campos vetoriais, generalizando ainda mais o formalismo até então apresentado. Tal formalismo apresentado é independente de coordenadas e os desenvolvimentos algébricos possuem neste capítulo algumas aplicações físicas decorrentes, como por exemplo a obtenção das equações de Maxwell no contexto da decomposição do espaço-tempo (Sec. (2.14)) juntamente com as transformações de Lorentz dos campos elétrico e magnético no presente contexto (Secs. (2.15, 2.16)), a investigação das leis de evolução para uma partícula-teste com spin nas vizinhanças de uma singularidade (Sec. (2.17)) e a mecânica quântica relativística (Sec. (2.18)). Além disso também possuem notáveis propriedades algébricas e geométricas a serem apresentadas ao longo do texto.

Após apresentarmos algumas preliminares algébricas na Sec. (2.2), revisitamos a classe das \mathbb{Z}_2 -gradações em álgebras de Clifford [Rie58, Por69, Por95, Mos02]. Na Sec. (2.3) a decomposição do espaço-tempo surge naturalmente da estrutura dos automorfismos internos através de uma α -gradação escolhida, e logo após exibirmos a decomposição da métrica em partes espacial e temporal na Sec. (2.4), na Sec. (2.5) mostramos algumas propriedades das componentes ortogonais e paralelas de operadores diferenciais e de produtos de multivetores, onde a componente paralela [ortogonal] corresponde à parte espacial [temporal]. A decomposição do operador dual de Hodge é investigada em detalhes na Sec. (2.6) e nas Secs. (2.7 - 2.9) fornecemos uma exposição detalhada sobre a decomposição do operador de Dirac e mostramos como as componentes paralela e ortogonal do operador diferencial estão relacionadas à derivada de Lie ao longo do vetor-decomposição e também ao bivector-decomposição momento angular. Além disso, fazemos uma completa investigação acerca das decomposições do operador codiferencial em termos da α -gradação proposta.

Relativamente à α -gradação $\alpha(\psi) = n\hat{\psi}n^{-1}$, responsável pela decomposição local do espaço-tempo em sucessivas fatias espaciais ortogonais à linha de universo de um observador, existe uma decomposição dual equivalente em termos do elemento de volume associado à subálgebra α -par. Nas Secs. (2.10-2.11) o operador de Dirac é calculado em cada uma dessas decomposições duais equiva-

lentes, e como parte final do desenvolvimento do formalismo algébrico investigamos a decomposição mais geral, baseada em uma classe de automorfismos internos de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ do tipo $\alpha_\phi(\psi) = \phi\psi\phi^{-1}$, onde $\psi, \phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$. O caso de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ é analisado em detalhes.

Quanto às aplicações do formalismo à Física, na Sec. (2.13) começamos por apresentar a 2-forma de vorticidade, a aceleração, o tensor de expansão e de cisalhamento associados à geometria induzida pela decomposição do espaço-tempo, e investigamos os observadores de Killing sob a luz do presente formalismo. Obtemos ainda duas equações diferenciais de vínculo para a 2-forma de vorticidade, e, mais geralmente, de vínculo entre a 2-forma de vorticidade e um elemento arbitrário de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$. Já nas Secs. (2.14, 2.15, 2.16) obtemos de uma maneira muito natural as equações de Maxwell e as transformações de Lorentz a partir do formalismo apresentado. Na Sec. (2.17) com base nas equações de Dixon-Soriau-Papapetrou [Pap51, Sou74, Fel01] deduzimos as leis de evolução para a massa e o spin de uma partícula-teste nas vizinhanças de uma singularidade cuja geometria pode ser representada através da métrica de Reissner-Nordström. Finalmente na Sec. (2.18) alguns resultados da abordagem de Hestenes da teoria de Dirac [Hes67, Hes75, Hes97] são revistos brevemente, e desenvolvemos a equação de Dirac associada a qualquer α -gradação [Mos02], só que desta vez para *campos* de 1-formas $n = n(x)$, e não somente para 1-formas, a partir da α -gradação dada por $\alpha(\psi) = n\psi n^{-1}$. Mostramos que o campo espinorial que satisfaz a equação de Dirac é descrito pela soma de dois quatérnions, além de escrever de maneira original a equação de Dirac no presente contexto, de maneira mais simples que outras descrições até agora apresentadas, baseadas nas diversas representações (padrão, quiral e de Majorana) de $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ em $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ [Mos02].

Os resultados das Secs. (2.3 - 2.11) e Secs. (2.13, 2.17, 2.18) são originais, e a Sec. (2.5) e outros poucos resultados na Sec. (2.6), somente dentro do contexto das álgebras exteriores, também podem ser vistos juntamente com algumas de suas aplicações físicas em, e.g., [Scz68, Bin93, Mie92, Mie94, Ehl93].

2.2 α -projeções

Dizemos que um espaço vetorial V é graduado por um grupo abeliano G se V puder ser expresso como a soma direta $V = \bigoplus_a V_a$ de subespaços indexados por elementos $a \in G$. Uma álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(V, g)$ é dita ser graduada por G se seu espaço vetorial subjacente é G -graduado, e o produto $\phi\psi$ de elementos $\psi, \phi \in \mathcal{C}\ell(V, g)$ satisfaz² $\deg(\psi\phi) = \deg(\psi) + \deg(\phi)$. De agora em diante consideramos $G = \mathbb{Z}_2$. A \mathbb{Z}_2 -gradação usual de $\mathcal{C}\ell(V, g)$, induzida através da involução graduada, é dada por $\mathcal{C}\ell(V, g) = \mathcal{C}\ell^+(V, g) \oplus \mathcal{C}\ell^-(V, g)$, onde $\mathcal{C}\ell^{+[-1]}(V, g)$ denota a soma direta dos espaços de todos os k -vetores pares [ímpares]. Uma \mathbb{Z}_2 -gradação arbitrária de $\mathcal{C}\ell(V, g)$ é dada por $\mathcal{C}\ell(V, g) = \mathcal{C}\ell_0 \oplus \mathcal{C}\ell_1$ [Mos03a], onde os subespaços $\mathcal{C}\ell_a, a = 0, 1$, satisfazem $\mathcal{C}\ell_a \mathcal{C}\ell_b \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{a+b(\text{mod } 2)}$. Para cada decomposição existe um automorfismo entre espaços vetoriais associados $\alpha : \mathcal{C}\ell(V, g) \rightarrow \mathcal{C}\ell(V, g)$ definido por $\alpha|_{\mathcal{C}\ell_a} = (-1)^a \text{id}$, onde id denota a identidade em $\mathcal{C}\ell_a$. As projeções $\pi_a : \mathcal{C}\ell(V, g) \rightarrow \mathcal{C}\ell_a$ são dadas por $\pi_a(\psi) = \frac{1}{2}(\psi + (-1)^a \alpha(\psi))$. Denotamos a partir daqui, neste capítulo, $\pi_a(\psi) = \psi_a$.

²Denota-se o grau de ψ por $\deg(\psi)$.

Um elemento que pertence a \mathcal{Cl}_0 [\mathcal{Cl}_1] é denominado α -par [α -ímpar]. Com respeito à \mathbb{Z}_2 -gradação usual, onde o α -automorfismo de ψ é dado por $\alpha(\psi) = \hat{\psi}$, temos que $\mathcal{Cl}_0 = \mathcal{Cl}_{p,q}^+$ e $\mathcal{Cl}_1 = \mathcal{Cl}_{p,q}^-$.

2.3 A decomposição do espaço-tempo

Denotamos a partir daqui o operador de correlação $\tau : V \rightarrow V^*$ por $(\cdot)^\sharp$ e seu inverso $\tau^{-1} : V^* \rightarrow V$ por $(\cdot)^\flat$, já que neste capítulo denotaremos o elemento de volume associado à parte α -par $\mathcal{Cl}_{p,q}^0$ de $\mathcal{Cl}_{p,q}$ por τ . A fim de não carregar demasiadamente a notação, dados $\psi, \phi \in \mathcal{Cl}_{p,q}$, denotamos a contração de ψ por ϕ por $\phi \cdot \psi$, que somente será denotada explicitamente por $\psi \lrcorner \phi$ ou $\psi \lrcorner \phi$ quando houver alguma ambigüidade. Nesta seção, dadas duas aplicações \varkappa_1, \varkappa_2 em $\mathcal{Cl}_{p,q}$, denotaremos a composição delas por $\varkappa_1 \circ \varkappa_2$. No Cap. (4) essa mesma notação indicará o \mathbb{O} -produto. Neste capítulo denotamos vetores em $T_x M \simeq \mathbb{R}^{p,q}$ pela notação em negrito, i.e, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \dots \in \mathbb{R}^{p,q} \simeq T_x M$.

Um espaço vetorial munido de uma métrica de assinatura (p, q) , isomorfo a $\mathbb{R}^{p,q}$, pode ser identificado em um ponto $x \in M$ como o espaço $T_x M$ tangente a M nesse ponto, onde M é uma variedade difeomorfa à folheação $\mathbb{R} \times \Sigma$, e a variedade Σ é tipo-espaço³, representando a parte espacial, enquanto $t \in \mathbb{R}$ representa o tempo. Nesse sentido a variedade que descreve o espaço-tempo é então dada por uma folheação composta pelas sucessivas fatias espaciais Σ de M ao longo do tempo. Assim escrevemos a folheação $M = \cup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$. O formalismo aqui apresentado é desenvolvido com base na variedade M , sobre a qual é construída o fibrado de Clifford $\mathcal{Cl}(M, g) := \cup_{x \in M} \mathcal{Cl}(T_x M, g_x)$, e nesse caso a álgebra $\mathcal{Cl}_{p,q}$ é considerada em um ponto x de M como sendo uma seção $\text{sec } \mathcal{Cl}(T_x M, g_x)$ do fibrado de Clifford $\mathcal{Cl}(M, g)$.

Uma decomposição particular do espaço-tempo é arbitrária e depende de uma escolha de um campo n de 1-formas no fibrado normal [Cho00, Hus94, Nak96, Mis73, Nas83]. De agora em diante n denota tanto um campo de 1-formas em M quanto um campo vetorial em M , e a notação n^\flat para o campo vetorial, dado um campo de 1-formas $n \in T_x^* M$, ou equivalentemente a notação n^\sharp para o campo de 1-formas, dado um campo vetorial $n \in T_x M$, será omitida, sendo somente utilizada explicitamente quando for necessário. No que segue a decomposição do espaço-tempo por um campo de 1-formas n ou um campo vetorial n será considerada equivalente e tal distinção é irrelevante para o desenvolvimento do formalismo que se segue.

Podemos sempre encontrar um campo de 1-formas tipo-tempo n normal a Σ , i.e., $n^2 = g(n, n) > 0$ e $g(n, \vec{v}) = 0$, para todo $\vec{v} \in T_x \Sigma$ [Bae94]. Denotamos a métrica em $T_x M \simeq \mathbb{R}^{p,q}$ por $g_x : \text{sec } T_x M \times \text{sec } T_x M \rightarrow \mathbb{R}$, e omitiremos o subíndice da métrica, estando de agora em diante implícito que ela depende do ponto $x \in M$. O campo de 1-formas $n \in T_x^* M$ pode ainda ser interpretado como sendo localmente cotangente à linha de universo de uma família de observadores, ou seja, o dual da velocidade dos referenciais de tais observadores.

A subálgebra par $\mathcal{Cl}_{p,q}^+$ de $\mathcal{Cl}_{p,q}$, associada à involução graduada, é definida como $\mathcal{Cl}_{p,q}^+ = \{\psi \in \mathcal{Cl}_{p,q} \mid \alpha(\psi) := \hat{\psi} = \psi\}$ e, motivados pela estrutura dos automorfismos internos, a α -gradação

³Uma variedade M é dita ser *tipo-espaço* se, quando nós restringimos a Σ a métrica g de M , temos uma métrica riemanniana em Σ .

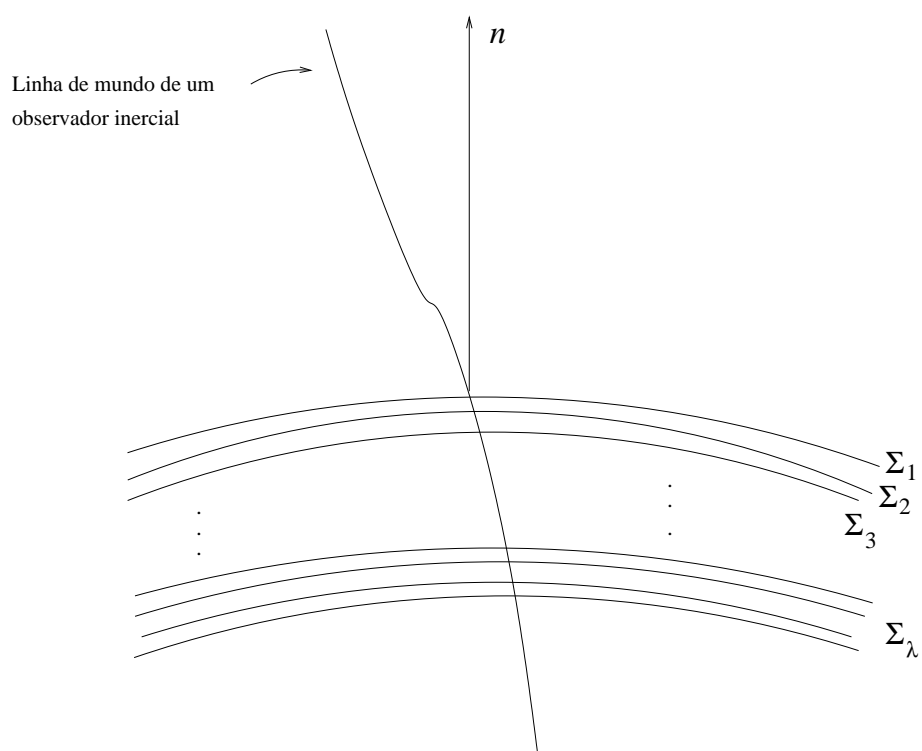


Figura 2.1: Decomposição local da variedade M em infinitas fatias espaciais. O campo vetorial $n(x)$ é interpretado como sendo tangente à linha de universo de um determinado observador inercial.

$\alpha : \mathcal{C}\ell_{p,q} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{p,q}$ é por nós definida como

$$\boxed{\alpha(\psi) = n\hat{\psi}n^{-1}} \quad (2.2)$$

Vemos a partir da eq.(2.2) que o automorfismo α é invariante perante dilatações de n . Sem perda de generalidade podemos passar o quociente pelo centro multiplicativo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ e de fato considerar somente campos de 1-formas $n = n(x) \in \text{sec } T_x^*M$ de norma unitária. Ao escolhermos $n^2 = 1$ a eq.(2.2) pode ser reescrita como

$$\alpha(\psi) = n\hat{\psi}n. \quad (2.3)$$

Utilizaremos tal α -gradação até a Sec. (2.9) inclusive. A partir da Sec. (2.10) faremos o caso mais geral, onde $n \neq n^{-1}$. Sendo n tipo-tempo e unitário tal campo de 1-formas pode ser obtido através de uma transformação de Lorentz $L \in \text{Spin}_+(1,3)$, através de $n(x) = L(x)\mathbf{e}_0\tilde{L}(x)$, no caso particular de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$.

Dado $L \in \text{Spin}_+(p,q)$, um sistema de referência $\{\mathbf{e}_p\}$ é dito ser adaptado ao observador se valem as seguintes condições:

- i) $n = L\mathbf{e}_0\tilde{L}$,
- ii) $n^\sharp(\mathbf{e}_p) = 0$,
- iii) $\{\mathbf{e}_p\}$ gera o espaço-tempo local com relação a n (ETLn).

Um sistema de referência $\{\mathbf{e}_p\}$ é dito ser parcialmente adaptado ao observador se $n = L\mathbf{e}_0\tilde{L}$ ou se $\{\mathbf{e}_p\}$ gera o ETLn. Esse conceitos serão usados na Sec. (2.18).

Existem várias possibilidades para se definir subálgebras e, por exemplo, definimos

$$\boxed{\mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel} = \{\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q} \mid \alpha(\psi) = n\hat{\psi}n = \psi\}, \quad \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\perp} = \{\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q} \mid \alpha(\psi) = n\hat{\psi}n = -\psi\}} \quad (2.4)$$

onde $\mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}$ denota a componente ap -par (espacial) de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, enquanto que $\mathcal{C}\ell_{p,q}^{\perp}$ denota a componente ap -ímpar (temporal) de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$. Podemos ver que $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ é uma álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada com respeito ao automorfismo dado pela eq.(2.2). Com efeito, dados $\psi_{\parallel}, \phi_{\parallel} \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}$ e $\psi_{\perp}, \phi_{\perp} \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\perp}$, temos

$$\begin{aligned} n\psi_{\parallel}\phi_{\parallel}n &= n\psi_{\parallel}nn\phi_{\parallel}n = \widehat{\psi_{\parallel}}\widehat{\phi_{\parallel}} = \widehat{\psi_{\parallel}\phi_{\parallel}} \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}, \\ n\psi_{\parallel}\phi_{\perp}n &= n\psi_{\parallel}nn\phi_{\perp}n = \widehat{\psi_{\parallel}}(-\widehat{\phi_{\perp}}) = -(\widehat{\psi_{\parallel}\phi_{\perp}}) \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\perp}, \\ n\psi_{\perp}\phi_{\perp}n &= n\psi_{\perp}nn\phi_{\perp}n = (-\widehat{\psi_{\perp}})(-\widehat{\phi_{\perp}}) = \widehat{\psi_{\perp}\phi_{\perp}} \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Uma das vantagens de trabalharmos com $\mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}$ é que a involução graduada em $\mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}$ é a mesma de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$. Os projetores $\pi_{\parallel}, \pi_{\perp} : \mathcal{C}\ell_{p,q} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel,\perp}$, definidos pelas relações

$$\boxed{\pi_{\parallel}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi + n\hat{\psi}n), \quad \pi_{\perp}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi - n\hat{\psi}n)} \quad (2.6)$$

podem ser reescritos como

$$\begin{aligned}\pi_{\parallel}(\psi) &= n \cdot (n \wedge \psi) = (\psi \wedge n) \cdot n = \psi - n \wedge (n \cdot \psi), \\ \pi_{\perp}(\psi) &= n \wedge (n \cdot \psi) = (\psi \cdot n) \wedge n,\end{aligned}\tag{2.7}$$

de onde seguem as relações

$$n \cdot \psi_{\parallel} = 0, \quad n \wedge \psi_{\perp} = 0.\tag{2.8}$$

As expressões dadas pelas eqs.(2.7) acima têm motivação geométrica, já que para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{p,q}$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}\mathbf{u}\mathbf{u}^{-1} \\ &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{u})\mathbf{u}^{-1} \\ &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}^{-1} + (\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}^{-1} \\ &= \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

As relações

$$\begin{aligned}\psi_{\parallel} &= \pi_{\parallel}(\psi_{\parallel}), \quad \psi_{\perp} = \pi_{\perp}(\psi_{\perp}), \quad \pi_{\parallel}\pi_{\perp} = \pi_{\perp}\pi_{\parallel} = 0, \\ \pi_{\parallel}^2 &= \pi_{\parallel}, \quad \pi_{\perp}^2 = \pi_{\perp} \quad \text{e} \quad \pi_{\perp} + \pi_{\parallel} = 1\end{aligned}\tag{2.10}$$

podem ser imediatamente verificadas a partir das definições (2.7). Podemos ainda escrever os projetores ψ_{\parallel} e ψ_{\perp} em um espaço destituído de uma métrica como

$$\pi_{\parallel} = id - n \otimes n^{\sharp}, \quad \pi_{\perp} = n \otimes n^{\sharp}.\tag{2.11}$$

Mas daqui em diante admitimos um espaço vetorial munido de uma métrica, e as relações (2.11) serão utilizadas quando for necessário. Nossa convenção propõe que ψ_{\parallel} representa a componente espacial, enquanto que ψ_{\perp} está relacionado à componente temporal de $\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$.

As relações

$$\psi_{\parallel}n = n\widehat{\psi}_{\parallel}, \quad \psi_{\perp}n = -n\widehat{\psi}_{\perp}, \quad n\psi n = \widehat{\psi}_{\parallel} - \widehat{\psi}_{\perp},\tag{2.12}$$

decorrem imediatamente.

2.4 Projeções da métrica

Com o intuito de expressar a métrica $g_x^{\parallel} \equiv g^{\parallel} : T_x\Sigma \times T_x\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ em cada ponto da variedade espacial Σ , dada localmente por $g^{\parallel}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{u}_{\parallel}$, lidamos primeiramente com a componente espacial g^{\parallel} da métrica $g : T_xM \times T_xM \rightarrow \mathbb{R}$ do espaço-tempo. A partir da relação

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\parallel}\mathbf{u}_{\parallel} &= \frac{1}{4}(\mathbf{v} - n\mathbf{v}n)(\mathbf{u} - n\mathbf{u}n) \\ &= \frac{1}{4}(\mathbf{v}\mathbf{u} - \mathbf{u}n\mathbf{v}n - n\mathbf{u}n\mathbf{v} + n\mathbf{u}n^2\mathbf{v}n).\end{aligned}\tag{2.13}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} g^{\parallel}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{u}_{\parallel} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{\parallel} \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\parallel} \mathbf{v}_{\parallel}) \\ &= \frac{1}{8}(\mathbf{v}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{v} + n\mathbf{v}\mathbf{u}n + n\mathbf{u}\mathbf{v}n - \mathbf{v}n\mathbf{u}n - n\mathbf{v}n\mathbf{u} - \mathbf{u}n\mathbf{v}n - n\mathbf{u}n\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Mas como

$$\begin{aligned} n\mathbf{v}n\mathbf{u} &= 2(\mathbf{v} \cdot n)\mathbf{u}n - \mathbf{v}\mathbf{u}, & \mathbf{u}n\mathbf{v}n &= 2(\mathbf{v} \cdot n)\mathbf{u}n - \mathbf{u}\mathbf{v}, \\ \mathbf{v}n\mathbf{u}n &= 2(\mathbf{u} \cdot n)\mathbf{v}n - \mathbf{v}\mathbf{u}, & n\mathbf{u}n\mathbf{v} &= 2(\mathbf{u} \cdot n)n\mathbf{v} - \mathbf{u}\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

então segue que

$$\begin{aligned} g^{\parallel}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{1}{8}(2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot n)(n\mathbf{u} + \mathbf{u}n) + 2\mathbf{v}\mathbf{u} - 2(\mathbf{u}n)(\mathbf{v}n + n\mathbf{v}) + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{8}(2(\mathbf{v} \cdot n)2(\mathbf{u} \cdot n) + 2(\mathbf{u} \cdot n)2(\mathbf{v} \cdot n)), \end{aligned} \quad (2.16)$$

e portanto

$$\begin{aligned} g^{\parallel}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{u}_{\parallel} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot n)(\mathbf{u} \cdot n) \\ &= g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot n)(\mathbf{u} \cdot n). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ao adotarmos um sistema de coordenadas locais em $T_x M \simeq \mathbb{R}^{p,q}$, podemos expressar $n = n^{\mu} \mathbf{e}_{\mu}$, $\mathbf{v} = v^{\nu} \mathbf{e}_{\nu}$, $\mathbf{u} = u^{\mu} \mathbf{e}_{\mu}$, e decorre da eq.(2.17) que

$$\begin{aligned} g^{\parallel}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} u^{\mu} v^{\nu} - n_{\mu} u^{\mu} n_{\nu} v^{\nu} = (g_{\mu\nu} - n_{\mu} n_{\nu}) u^{\mu} v^{\nu} \\ &= h_{\mu\nu} u^{\mu} v^{\nu}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_{\mu} n_{\nu}$. Portanto

$$g^{\parallel} = h_{\mu\nu} \mathbf{e}^{\mu} \otimes \mathbf{e}^{\nu} = (g_{\mu\nu} - n_{\mu} n_{\nu}) \mathbf{e}^{\mu} \otimes \mathbf{e}^{\nu}, \quad (2.19)$$

naturalmente

$$g^{\perp} = n_{\mu} n_{\nu} \mathbf{e}^{\mu} \otimes \mathbf{e}^{\nu}. \quad (2.20)$$

A métrica g^{\parallel} dá a projecção espacial de g em Σ , a fatia espacial do observador em questão em um dado instante, e g^{\perp} a componente temporal de g .

2.5 Componentes paralelas e ortogonais dos produtos exterior e de Clifford

Pelas eqs.(2.5) vimos que $\mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel} \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel} \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}$, $\mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel} \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\perp} \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\perp}$ e que $\mathcal{C}\ell_{p,q}^{\perp} \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\perp} \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}$. Portanto o produto de Clifford entre dois multivetores $\psi, \phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$ é dado por

$$\phi\psi = (\phi_{\parallel} + \phi_{\perp})(\psi_{\parallel} + \psi_{\perp}) = \phi_{\parallel}\psi_{\parallel} + \phi_{\perp}\psi_{\perp} + \phi_{\parallel}\psi_{\perp} + \phi_{\perp}\psi_{\parallel}, \quad (2.21)$$

onde as componentes paralela e ortogonal do produto de Clifford $\phi\psi$ são dadas respectivamente por:

$$(\phi\psi)_{\parallel} = \phi_{\parallel}\psi_{\parallel} + \phi_{\perp}\psi_{\perp} \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}, \quad (\phi\psi)_{\perp} = \phi_{\parallel}\psi_{\perp} + \phi_{\perp}\psi_{\parallel} \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\perp}. \quad (2.22)$$

Daí temos que

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \wedge \phi)_{\parallel} &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}\phi + \widehat{\phi}\mathbf{v})_{\parallel} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{\parallel}\phi_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}\phi_{\perp} + \widehat{\phi}_{\parallel}\mathbf{v}_{\parallel} + \widehat{\phi}_{\perp}\mathbf{v}_{\perp}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{\parallel}\phi_{\parallel} + \widehat{\phi}_{\parallel}\mathbf{v}_{\parallel}) + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{\perp}\phi_{\perp} + \widehat{\phi}_{\perp}\mathbf{v}_{\perp}) \\ &= \mathbf{v}_{\parallel} \wedge \phi_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} \wedge \phi_{\perp}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Mas $\mathbf{v}_{\perp} \wedge \phi_{\perp} = n \wedge (n \cdot \mathbf{v}) \wedge n \wedge (n \cdot \phi_{\perp}) = 0$, já que $n \wedge n = 0$. Portanto

$$(\mathbf{v} \wedge \phi)_{\parallel} = \mathbf{v}_{\parallel} \wedge \phi_{\parallel}. \quad (2.24)$$

Analogamente é fácil notar que

$$(\mathbf{v} \wedge \phi)_{\perp} = \mathbf{v}_{\perp} \wedge \phi_{\parallel} + \mathbf{v}_{\parallel} \wedge \phi_{\perp}. \quad (2.25)$$

2.6 A decomposição do operador dual de Hodge

Denotamos os pseudoescalares associados a $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ e a $\mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}$ respectivamente por $\eta \in \sec \Lambda^{p+q}(T_x^*M)$ e $\tau \in \sec \Lambda^{p+q-1}(T_x^*M)$. A partir da orientação de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ podemos definir a orientação de $\mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}$ como

$$\boxed{\tau := n \cdot \eta} \quad (2.26)$$

Já que $n \wedge \eta = 0$, então $\tau = n\eta$ e conseqüentemente $\eta = n\tau$. Da relação $n \cdot \tau = 0$, segue que $\eta = n \wedge \tau$. É mais apropriado escrever a eq.(2.26) como

$$\boxed{\tau = n\eta} \quad (2.27)$$

de onde obtemos $\eta = n\tau$, e portanto as relações

$$n\tau = \widehat{\tau}n \quad \text{e} \quad \widehat{\eta} = -n\widehat{\tau} = -\tau n \quad (2.28)$$

seguem diretamente, uma vez que $\tau \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}$.

O operador dual de Hodge (ODH) é definido em $\mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}$ como

$$\begin{aligned} \star_{\parallel} \mathbf{v}_{\parallel} &= \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \tau \\ &= \mathbf{v}_{\parallel} \cdot (n \cdot \eta) \\ &= (\mathbf{v}_{\parallel} \wedge n) \cdot \eta \\ &= -(n \wedge \mathbf{v}_{\parallel}) \cdot \eta \\ &= -n \cdot (\mathbf{v}_{\parallel} \cdot \eta). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Das eqs.(2.7) temos a relação $\mathbf{v}_{\parallel} \cdot \eta = \mathbf{v} \cdot \eta - [n \wedge (n \cdot \mathbf{v})] \cdot \eta$. Daí

$$\begin{aligned} n \cdot (\mathbf{v}_{\parallel} \cdot \eta) &= n \cdot (\mathbf{v} \cdot \eta) - n \cdot \{[n \wedge (n \cdot \mathbf{v})] \cdot \eta\} \\ &= n \cdot \star \mathbf{v} - \{n \wedge [n \wedge (n \cdot \mathbf{v})]\} \cdot \eta \\ &= n \cdot (\star \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (2.30)$$

de onde concluímos, das eqs.(2.29) e (2.30), que $\star_{\parallel} \mathbf{v}_{\parallel} = -n \cdot (\star \mathbf{v})$. Podemos ainda escrever $\star_{\parallel} \mathbf{v}_{\parallel} = -n \cdot (\star \mathbf{v})_{\perp}$ já que $n \cdot (\star \mathbf{v})_{\parallel} = 0$. Mas $n \wedge (\star \mathbf{v})_{\perp} = 0$ e portanto a relação $\star_{\parallel} \mathbf{v}_{\parallel} = -n(\star \mathbf{v})_{\perp}$ implica que

$$\boxed{(\star \mathbf{v})_{\perp} = -n(\star_{\parallel} \mathbf{v}_{\parallel})} \quad (2.31)$$

No caso particular da álgebra do espaço-tempo $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ com α -gradação dada pela involução graduada, sabemos que $\mathcal{C}\ell_{1,3}^{\parallel} = \mathcal{C}\ell_{1,3}^{+} \simeq \mathcal{C}\ell_{3,0}$, e portanto o produto vetorial entre dois vetores em um referencial local em Σ pode ser imediatamente obtido a partir da eq.(2.29). Já no caso de outra α -gradação, como por exemplo aquela dada pela eq.(2.2), a subálgebra α -par de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ é dada por $\mathcal{C}\ell_{1,3}^{\parallel} \simeq \mathcal{C}\ell_{0,3} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Mais detalhes serão devidamente abordados na Sec. (2.18).

Para o caso geral de multivetores $\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$ segue que

$$\begin{aligned} \star_{\parallel} \psi_{\parallel} &= \widetilde{\psi}_{\parallel} \cdot \tau \\ &= \widetilde{\psi}_{\parallel} \cdot (n \cdot \eta) \\ &= (\widetilde{\psi}_{\parallel} \wedge n) \cdot \eta \\ &= (n \wedge \overline{\psi}_{\parallel}) \cdot \eta \\ &= n \cdot (\overline{\psi}_{\parallel} \cdot \eta). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Tomando novamente a expressão $\psi_{\parallel} = \psi - n \wedge (n \cdot \psi)$ podemos expressar

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_{\parallel} &= \overline{\psi} \cdot \eta - \overline{[n \wedge (n \cdot \psi)]} \cdot \eta \\ &= \overline{\psi} \cdot \eta - \widetilde{[n \wedge (n \cdot \hat{\psi})]} \cdot \eta \\ &= \overline{\psi} \cdot \eta - \widetilde{[(n \cdot \hat{\psi}) \wedge n]} \cdot \eta \\ &= \star \hat{\psi} - \widetilde{[(n \cdot \hat{\psi}) \wedge n]} \cdot \eta. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} n \cdot (\overline{\psi} \cdot \eta) &= n \cdot (\star \hat{\psi}) - n \cdot \{[\widetilde{(n \cdot \hat{\psi}) \wedge n}] \cdot \eta\} \\ &= n \cdot (\star \hat{\psi}) - \{n \wedge \widetilde{[(n \cdot \hat{\psi}) \wedge n]} \cdot \eta\} \\ &= n \cdot (\star \hat{\psi}) - [n \wedge (n \cdot \hat{\psi}) \wedge n] \cdot \eta, \\ &= n \cdot (\star \hat{\psi}) \end{aligned} \quad (2.34)$$

e finalmente podemos escrever, pela eq.(2.32), que

$$\boxed{\star_{\parallel} \psi_{\parallel} = n \cdot (\star \hat{\psi})} \quad (2.35)$$

Utilizando as propriedades $n \cdot (\)_{\parallel} = 0$ e $n \wedge (\)_{\perp} = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}\star_{\parallel} \psi_{\parallel} &= n \cdot (\star \hat{\psi})_{\perp} \\ &= n(\star \hat{\psi})_{\perp}\end{aligned}\tag{2.36}$$

de onde concluímos que $(\star \psi)_{\perp} = n(\star_{\parallel} \hat{\psi}_{\parallel})$ e que

$$\begin{aligned}\star_{\parallel} \psi_{\parallel} &= n(\star \hat{\psi})_{\perp} \\ &= n \cdot (\star \hat{\psi})\end{aligned}\tag{2.37}$$

Mais uma relação importante para o desenvolvimento deste formalismo é a seguinte:

$$\begin{aligned}\star_{\parallel}(n \cdot \psi) &= (\widetilde{n \cdot \psi}) \cdot \tau \\ &= (\widetilde{n \cdot \psi}) \cdot (n \cdot \eta) \\ &= [(\widetilde{n \cdot \psi}) \wedge n] \cdot \eta \\ &= [(\widetilde{\psi} \cdot n) \wedge n] \cdot \eta \\ &= \widetilde{\psi}_{\perp} \cdot \eta\end{aligned}\tag{2.38}$$

e portanto

$$\boxed{\star_{\parallel}(n \cdot \psi) = \star(\psi_{\perp})}\tag{2.39}$$

Agora provaremos uma expressão similar para a componente paralela $(\star \psi)_{\parallel}$ de $\star \psi$. De acordo com a relação $\widetilde{\psi}_{\perp} = \frac{1}{2}(\tilde{\psi} - n\bar{\psi}n)$ podemos obviamente escrever

$$\widetilde{\psi}_{\perp} \cdot \eta = \frac{1}{2}(\tilde{\psi} - n\bar{\psi}n) \cdot \eta.\tag{2.40}$$

Agora dado $\psi_k \in \sec \Lambda^k(T_x M)$, segue que

$$\begin{aligned}(n\bar{\psi}_k n) \cdot \eta &= \langle n\bar{\psi}_k n \eta \rangle_{n-k} \\ &= -\langle n\bar{\psi}_k \hat{\eta} n \rangle_{n-k} \\ &= -n \langle (\widehat{\psi}_k \eta) \rangle_{n-k} n \\ &= -n(\widehat{\psi}_k \cdot \eta)n,\end{aligned}\tag{2.41}$$

obtendo a igualdade

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}_{\perp} \cdot \eta &= \frac{1}{2}[(\tilde{\psi} \cdot \eta) + n(\widehat{\psi} \cdot \eta)n] \\ &= (\tilde{\psi} \cdot \eta)_{\parallel} \\ &= (\star \psi)_{\parallel}\end{aligned}\tag{2.42}$$

e finalmente

$$\boxed{(\star \psi)_{\parallel} = \star(\psi_{\perp}) = \star_{\parallel}(n \cdot \psi)}\tag{2.43}$$

2.7 O operador de Dirac no contexto da decomposição do espaço-tempo

Considere o fibrado de Clifford sobre a variedade M , denotado por $\mathcal{C}\ell(M, g) := \bigcup_{x \in M} \mathcal{C}\ell(T_x M, g_x)$. Dado $n \in \sec T_x^* M$, a decomposição local $M = I \times \Sigma$ onde I é um intervalo de \mathbb{R} , pode ser obtida se e somente se $n \wedge dn = 0$, pelo teorema de Frobenius [Nak96]. Denotamos agora o operador de Dirac por ∂ , e também os operadores diferencial $d \equiv \partial \wedge : \sec \Lambda^k(T_x^* M) \rightarrow \sec \Lambda^{k+1}(T_x^* M)$ e codiferencial $\delta \equiv -\partial \cdot : \sec \Lambda^{k+1}(T_x^* M) \rightarrow \sec \Lambda^k(T_x^* M)$ em $\mathcal{C}\ell(M, g)$. Queremos achar expressões para $d_{\parallel}, d_{\perp}, \delta_{\parallel}$ e δ_{\perp} e portanto para $\partial_{\parallel}, \partial_{\perp}$. Das relações $(\psi \wedge \phi)_{\parallel} = \psi_{\parallel} \wedge \phi_{\parallel}$ temos

$$(\psi \wedge \phi_{\parallel})_{\parallel} = \psi_{\parallel} \wedge \phi_{\parallel} \quad \text{e} \quad (\psi \wedge \phi_{\perp})_{\parallel} = 0, \quad (2.44)$$

e da expressão

$$(\psi \wedge \phi)_{\perp} = \psi_{\parallel} \wedge \phi_{\perp} + (\psi_{\perp} \wedge \phi_{\parallel})_{\parallel}, \quad (2.45)$$

é imediato que

$$(\psi \wedge \phi_{\parallel})_{\perp} = \psi_{\parallel} \wedge \phi_{\parallel}, \quad (\psi \wedge \phi_{\perp})_{\perp} = \psi_{\parallel} \wedge \phi_{\perp} \quad (2.46)$$

Definimos as componentes paralela d_{\parallel} e ortogonal d_{\perp} do operador diferencial d , a partir das seguintes expressões:

$$d_{\parallel} \psi_{\parallel} = (d\psi_{\parallel})_{\parallel}, \quad d_{\parallel} \psi_{\perp} = (d\psi_{\perp})_{\perp}, \quad d_{\perp} \psi_{\parallel} = (d\psi_{\parallel})_{\perp}, \quad d_{\perp} \psi_{\perp} = 0, \quad (2.47)$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} d_{\parallel} \psi_{\parallel} &= (d\psi_{\parallel})_{\parallel} \\ &= n \cdot (n \wedge d\psi_{\parallel}), \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} d_{\perp} \psi_{\parallel} &= (d\psi_{\parallel})_{\perp} \\ &= n \wedge (n \cdot d\psi_{\parallel}) \\ &= n \wedge (n \cdot d\psi_{\parallel} + d(n \cdot \psi_{\parallel})) \\ &= n \wedge (n \cdot d + dn \cdot) \psi_{\parallel} \\ &= n \wedge \mathcal{L}_n \psi_{\parallel}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde a derivada de Lie \mathcal{L}_n ao longo da direção n é definida como $\mathcal{L}_n = n \cdot d + dn \cdot$, e ainda

$$\begin{aligned} d_{\perp} \psi_{\perp} = (d\psi_{\perp})_{\parallel} &= n \cdot (n \wedge d\psi_{\perp}) \\ &= n \cdot \{n \wedge d[n \wedge (n \cdot \psi)]\} \\ &= n \cdot [n \wedge dn \wedge (n \cdot \psi) - n \wedge n \wedge d(n \cdot \psi)] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Temos também a relação

$$\begin{aligned}
d_{\parallel}\psi_{\perp} = (d\psi_{\perp})_{\perp} &= n \wedge (n \cdot d\psi_{\perp}) \\
&= n \wedge \{n \cdot d[n \wedge (n \cdot \psi)]\} \\
&= n \wedge \{n \cdot [dn \wedge (n \cdot \psi) - n \wedge d(n \cdot \psi)]\} \\
&= n \wedge \{(n \cdot dn) \wedge (n \cdot \psi) + dn \wedge [n \cdot (n \cdot \psi)] - n \cdot [n \wedge d(n \cdot \psi)]\} \\
&= n \wedge (n \cdot dn) \wedge (n \cdot \psi) - n \wedge \{n \cdot [n \wedge d(n \cdot \psi)]\} \\
&= -(n \cdot dn) \wedge n \wedge (n \cdot \psi) - n \wedge d_{\parallel}(n \cdot \psi) \\
&= -(n \cdot dn) \wedge \psi_{\perp} - n \wedge d_{\parallel}(n \cdot \psi) \\
&= -\mathcal{L}_n n \wedge \psi_{\perp} - n \wedge d_{\parallel}(n \cdot \psi) \\
&= -\mathcal{L}_n n \wedge n \wedge (n \cdot \psi) - n \wedge d_{\parallel}(n \cdot \psi) \\
&= n \wedge (\mathcal{L}_n n) \wedge (n \cdot \psi) - n \wedge d_{\parallel}(n \cdot \psi).
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Agora defina o campo multivectorial $\Omega_{\mu} \in \sec \Lambda(T_x^*M)$ como

$$\boxed{\Omega_{\mu} = n \partial_{\mu} n = -(\partial_{\mu} n) n} \tag{2.52}$$

Podemos mostrar que $\Omega_{\mu} \in \sec \Lambda^2(T_x^*M)$, pois $n \cdot \partial_{\mu} n = 0$ e $n^2 = 1$. Então já que o comutador entre um multivector com um bivector preserva a graduação daquele, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\Omega_{\mu}, \psi_k] &= \langle n \partial_{\mu} n \psi_k \rangle_k \\
&= -\langle \partial_{\mu} n n \psi_k \rangle_k \\
&= -\langle \partial_{\mu} n (n \wedge \psi_k) \rangle_k - \langle \partial_{\mu} n (n \cdot \psi_k) \rangle_k \\
&= -(\partial_{\mu} n) \cdot (n \wedge \psi_k) - (\partial_{\mu} n) \wedge (n \cdot \psi_k).
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\Omega_{\mu}, \psi] &= -(\partial_{\mu} n) \cdot (n \wedge \psi) - (\partial_{\mu} n) \wedge (n \cdot \psi) \\
&= n \wedge (\partial_{\mu} n \cdot \psi) + n \cdot (\partial_{\mu} n \wedge \psi)
\end{aligned} \tag{2.54}$$

onde usamos a relação $n \cdot \partial_{\mu} n = 0$. O comutador entre o Ω_{μ} e ψ_{\parallel} é dado por

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\Omega_{\mu}, \psi_{\parallel}] &= -(\partial_{\mu} n) \cdot (n \wedge \psi_{\parallel}) - (\partial_{\mu} n) \wedge (n \cdot \psi_{\parallel}) \\
&= -(\partial_{\mu} n) \cdot (n \wedge \psi_{\parallel}) \\
&= n \wedge (\partial_{\mu} n \cdot \psi_{\parallel}) \\
&= -n \wedge (n \cdot \partial_{\mu} \psi_{\parallel})
\end{aligned} \tag{2.55}$$

onde $\partial_{\mu} n \cdot \psi_{\parallel} = -n \cdot \partial_{\mu} \psi_{\parallel}$, pela relação $n \cdot \psi_{\parallel} = 0$. Também temos o resultado

$$\boxed{\frac{1}{2}[\Omega_{\mu}, \psi_{\parallel}] = -(\partial_{\mu} \psi_{\parallel})_{\perp}} \tag{2.56}$$

já que $n \wedge (n \cdot \psi_\perp) = \pi_\perp(\psi_\perp)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\Omega_\mu, \psi_\perp] &= -(\partial_\mu n) \cdot (n \wedge \psi_\perp) - (\partial_\mu n) \wedge (n \cdot \psi_\perp) \\ &= -(\partial_\mu n) \wedge (n \cdot \psi_\perp) \\ &= n \cdot (\partial_\mu n \wedge \psi_\perp) \\ &= -n \cdot (n \wedge \partial_\mu \psi_\perp), \end{aligned} \quad (2.57)$$

de onde a partir da equivalência $n \cdot (n \wedge \psi_\perp) = \pi_\parallel(\psi_\perp)$ obtemos

$$\boxed{\frac{1}{2}[\Omega_\mu, \psi_\perp] = -(\partial_\mu \psi_\perp)_\parallel} \quad (2.58)$$

Também temos como expressar a derivada parcial do campo de 1-formas n em termos do comutador deste com Ω_μ pela expressão

$$\boxed{\partial_\mu n = -\frac{1}{2}[\Omega_\mu, n]} \quad (2.59)$$

já que

$$\frac{1}{2}[\Omega_\mu, n] = \frac{1}{2}[\Omega_\mu, n_\perp] = -(\partial_\mu n_\perp)_\parallel = -(\partial_\mu n)_\parallel = -\partial_\mu n. \quad (2.60)$$

Usamos a óbvia propriedade de que $n = n_\perp$ e, da relação $n \cdot \partial_\mu n = 0$ segue que

$$(\partial_\mu n)_\perp = 0 \quad \text{e} \quad \partial_\mu n = (\partial_\mu n)_\parallel. \quad (2.61)$$

Podemos também obter a eq.(2.59) diretamente da definição de Ω_μ . De fato,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\Omega_\mu, n] &= \frac{1}{2}(n\partial_\mu nn - nn\partial_\mu n) \\ &= \frac{1}{2}(n\partial_\mu nn - \partial_\mu n) \\ &= \frac{1}{2}(-nn\partial_\mu n - \partial_\mu n) \\ &= \frac{1}{2}(-\partial_\mu n - \partial_\mu n) \\ &= -\partial_\mu n. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Ao usarmos as relações $(\partial_\mu \psi_\parallel)_\perp = -\frac{1}{2}[\Omega_\mu, \psi_\parallel]$ e $(\partial_\mu \psi_\perp)_\parallel = -\frac{1}{2}[\Omega_\mu, \psi_\perp]$ temos

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \psi_\parallel)_\parallel &= \partial_\mu \psi_\parallel - (\partial_\mu \psi_\parallel)_\perp \\ &= \partial_\mu \psi_\parallel + \frac{1}{2}[\Omega_\mu, \psi_\parallel] \end{aligned} \quad (2.63)$$

e

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \psi_\perp)_\perp &= \partial_\mu \psi_\perp - (\partial_\mu \psi_\perp)_\parallel \\ &= \partial_\mu \psi_\perp + \frac{1}{2}[\Omega_\mu, \psi_\perp] \end{aligned} \quad (2.64)$$

2.8 Derivada covariante e derivada de Lie relativos ao operador diferencial

Considere a componente ortogonal do operador diferencial agindo sobre a componente paralela do multivetor $\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$:

$$\begin{aligned}
(d\psi_{\parallel})_{\perp} &= (\gamma^{\mu} \wedge \partial_{\mu} \psi_{\parallel})_{\perp} \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge (\partial_{\mu} \psi_{\parallel})_{\perp} + \gamma_{\perp}^{\mu} \wedge (\partial_{\mu} \psi_{\parallel})_{\parallel} \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge \left(-\frac{1}{2}[\Omega_{\mu}, \psi_{\parallel}]\right) + n \wedge n^{\mu} (\partial_{\mu} \psi_{\parallel}) + \frac{1}{2}[\Omega_{\mu}, \psi_{\parallel}] \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge [n \wedge (n \cdot \partial_{\mu} \psi_{\parallel})] + n \wedge (n^{\mu} \partial_{\mu} \psi_{\parallel}) + nn^{\mu} \wedge [-n \wedge (n \cdot \partial_{\mu} \psi_{\parallel})] \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge n \wedge (n \cdot \partial_{\mu} \psi_{\parallel}) + n \wedge n^{\mu} \partial_{\mu} \psi_{\parallel} \\
&= -n \wedge \gamma^{\mu} \wedge (n \cdot \partial_{\mu} \psi_{\parallel}) + n \wedge n^{\mu} \partial_{\mu} \psi_{\parallel} \\
&= n \wedge \gamma^{\mu} \wedge (\partial_{\mu} n \cdot \psi_{\parallel}) + n \wedge n^{\mu} \partial_{\mu} \psi_{\parallel} \\
&= n \wedge [\gamma^{\mu} (\partial_{\mu} n \cdot \psi_{\parallel}) + n^{\mu} \partial_{\mu} \psi_{\parallel}] \\
&= n \wedge \mathcal{L}_n \psi_{\parallel}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

onde

$$\boxed{\gamma_{\perp}^{\mu} = n \wedge (n \cdot \gamma^{\mu}) = nn^{\mu}, \quad \gamma_{\parallel}^{\mu} = \gamma^{\mu} - n \wedge (n \cdot \gamma^{\mu}) = \gamma^{\mu} - nn^{\mu}} \tag{2.66}$$

e \mathcal{L}_n é a derivada de Lie ao longo da direção do vetor n . As expressões acima serão bastante utilizadas na Sec. (2.18).

Definindo a componente paralela derivada covariante como

$$\boxed{D_{\mu}^{\parallel} \psi_{\parallel} = \partial_{\mu} \psi_{\parallel} + \frac{1}{2}[\Omega_{\mu}, \psi_{\parallel}]} \tag{2.67}$$

temos

$$\begin{aligned}
(d\psi_{\parallel})_{\parallel} &= (\gamma^{\mu} \wedge \partial_{\mu} \psi_{\parallel})_{\parallel} \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge (\partial_{\mu} \psi_{\parallel})_{\parallel} + \gamma_{\perp}^{\mu} \wedge (\partial_{\mu} \psi_{\parallel})_{\perp} \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge (\partial_{\mu} \psi_{\parallel} + \frac{1}{2}[\Omega_{\mu}, \psi_{\parallel}]) \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge D_{\mu}^{\parallel} \psi_{\parallel} \\
&= d_{\parallel} \psi_{\parallel}.
\end{aligned}$$

Portanto a relação

$$\boxed{d_{\parallel} = \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge D_{\mu}^{\parallel}} \tag{2.68}$$

é imediatamente obtida.

Agora considere a componente paralela do operador diferencial agindo sobre a componente ortogonal do multivetor $\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$:

$$\begin{aligned}
(d\psi_{\perp})_{\parallel} &= (\gamma^{\mu} \wedge \partial_{\mu} \psi_{\perp})_{\parallel} \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge (\partial_{\mu} \psi_{\perp})_{\parallel} + \gamma_{\perp}^{\mu} (\partial_{\mu} \psi_{\perp})_{\perp} \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \left(-\frac{1}{2} [\Omega_{\mu}, \psi_{\perp}] \right) \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge (\partial_{\mu} n) \wedge (n \cdot \psi_{\perp}) \\
&= [n \cdot (n \wedge \gamma^{\mu})] \wedge (\partial_{\mu} n) \wedge (n \cdot \psi_{\perp}) \\
&= n \cdot [n \wedge \gamma^{\mu} \wedge \partial_{\mu} n \wedge (n \cdot \psi_{\perp})], \quad \text{pois } n \cdot \partial_{\mu} n = 0 \text{ e } n \cdot (n \cdot \psi_{\perp}) = 0 \\
&= n \cdot [n \wedge (\partial_{\mu} \wedge n) \wedge (n \cdot \psi_{\perp})] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Finalmente para a componente ortogonal de $d\psi_{\perp}$ temos

$$\begin{aligned}
(d\psi_{\perp})_{\perp} &= (\gamma^{\mu} \wedge \partial_{\mu} \psi_{\perp})_{\perp} \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge (\partial_{\mu} \psi_{\perp})_{\perp} + \gamma_{\perp}^{\mu} (\partial_{\mu} \psi_{\perp})_{\parallel} \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge (\partial_{\mu} \psi_{\perp} + \frac{1}{2} [\Omega_{\mu}, \psi_{\perp}]) + \gamma_{\perp}^{\mu} \wedge (-\frac{1}{2} [\Omega_{\mu}, \psi_{\perp}]) \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge (D_{\mu} \psi_{\perp}) + n n^{\mu} \wedge (\partial_{\mu} n) \wedge (n \cdot \psi_{\perp}) \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} (D_{\mu} \psi_{\perp}) + n \wedge (n^{\mu} \partial_{\mu} n) \wedge (n \cdot \psi_{\perp}) \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} (D_{\mu} \psi_{\perp}) + n \wedge \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot \psi_{\perp}).
\end{aligned}$$

Mas sabemos que $\gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge D_{\mu} \psi_{\perp} = \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge (\partial_{\mu} \psi_{\perp}) + \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge \frac{1}{2} [\Omega_{\mu}, \psi_{\perp}]$ e que, pelas eqs.(2.69) e (2.70), $\gamma_{\parallel}^{\mu} (-\frac{1}{2} [\Omega_{\mu}, \psi_{\perp}]) = 0$. Portanto

$$\begin{aligned}
\gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge \partial_{\mu} \psi_{\perp} &= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge \{ \partial_{\mu} [n \wedge (n \cdot \psi)] \} \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge [\partial_{\mu} n \wedge (n \cdot \psi) + n \wedge \partial_{\mu} (n \cdot \psi)] \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge n \wedge \partial_{\mu} (n \cdot \psi) \\
&= -n \wedge \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge \partial_{\mu} (n \cdot \psi).
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} [\Omega_{\mu}, n \cdot \psi] &= -n \wedge (\partial_{\mu} n \cdot (n \cdot \psi)) + n \cdot (\partial_{\mu} n \wedge (n \cdot \psi)) \\
&= -n \wedge (\partial_{\mu} n \cdot (n \cdot \psi)) - n \cdot (n \cdot (\partial_{\mu} n \wedge \psi)) \\
&= -n \wedge (\partial_{\mu} n \cdot (n \cdot \psi)) - n \cdot (n \cdot \partial_{\mu} n) \psi + n \cdot [\partial_{\mu} n \wedge (n \cdot \psi)] \\
&= -n \wedge (\partial_{\mu} n \cdot (n \cdot \psi)) - \partial_{\mu} n \wedge (n \cdot \psi) \\
&= -n \wedge (\partial_{\mu} n \cdot (n \cdot \psi)) - (n \cdot \partial_{\mu} n) (n \cdot \psi) + \partial_{\mu} n \wedge [n \cdot (n \cdot \psi)] \\
&= -n \wedge (\partial_{\mu} n \cdot (n \cdot \psi)) + \partial_{\mu} n \wedge [n \wedge (n \cdot \psi)]
\end{aligned} \tag{2.72}$$

e então $n \wedge \frac{1}{2}[\Omega_\mu, n \cdot \psi] = 0$. Portanto

$$\begin{aligned}\gamma_{\parallel}^\mu \wedge \partial_\mu \psi_\perp &= -n \wedge \gamma_{\parallel}^\mu \wedge \partial_\mu (n \cdot \psi) \\ &= -n \wedge \gamma_{\parallel}^\mu \wedge D_\mu (n \cdot \psi).\end{aligned}\tag{2.73}$$

Finalmente

$$\boxed{(d\psi_\perp)_\perp = -n \wedge \gamma_{\parallel}^\mu \wedge D_\mu (n \cdot \psi) + n \wedge \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot \psi_\perp)}\tag{2.74}$$

Usando agora a definição do projetor π_\perp , temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n[\pi_\perp(\psi)] &= \mathcal{L}_n[n \wedge (n \cdot \psi)] \\ &= \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot \psi) + n \wedge \mathcal{L}_n(n \cdot \psi).\end{aligned}\tag{2.75}$$

Por outro lado sabemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n(n \cdot \psi) &= n \cdot d(n \cdot \psi) + d[n \cdot (n \cdot \psi)] \\ &= \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot \psi) + n \wedge [n \cdot d(n \cdot \psi)] \\ &= \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot \psi) + n \wedge \{n \cdot [d(n \cdot \psi) + n \cdot (d\psi)]\}, \text{ pois } n \cdot (n \cdot d\psi) = 0 \\ &= \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot \psi) + n \wedge (n \cdot \mathcal{L}_n \psi) \\ &= \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot \psi) + \pi_\perp(\mathcal{L}_n \psi)\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n[\pi_\perp(\psi)] &= \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot \psi) + n \wedge \mathcal{L}_n(n \cdot \psi) \\ &= \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot \psi) + n \wedge \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot \psi) + n \wedge \pi_\perp(\mathcal{L}_n \psi)\end{aligned}\tag{2.76}$$

2.8.1 Condição necessária para que $[\mathcal{L}_n, d_{\parallel}] = 0$

Por definição a derivada de Lie do operador diferencial agindo sobre $\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$ calculada ao longo da curva que tem como campo de vetores tangentes n é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n d\psi &= d(n \cdot d\psi) + n \cdot d(d\psi) \\ &= d(n \cdot d\psi) + d[d(n \cdot \psi)] \\ &= d\mathcal{L}_n \psi\end{aligned}\tag{2.77}$$

e portanto $d\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n d$. Assim

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n d_{\parallel} \psi &= \mathcal{L}_n[n \cdot (n \wedge d\psi)] \\ &= \mathcal{L}_n[d\psi - n \wedge (n \cdot d\psi)] \\ &= d(\mathcal{L}_n \psi) - \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot d\psi) - n \wedge \mathcal{L}_n(n \cdot d\psi) \\ &= d(\mathcal{L}_n \psi) - n \wedge \{d[n \cdot (n \cdot d\psi)]\} + n \cdot d(n \cdot \psi) - \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot d\psi) \\ &= d(\mathcal{L}_n \psi) - n \wedge \{d[n \cdot (n \cdot d\psi)]\} - n \wedge \{n \cdot d[d(n \cdot \psi)]\} - \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot d\psi) \\ &= d(\mathcal{L}_n \psi) - n \wedge [n \cdot d(\mathcal{L}_n \psi)] - \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot d\psi) \\ &= d_{\parallel}(\mathcal{L}_n \psi) - \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot d\psi).\end{aligned}$$

Portanto

$$\boxed{\mathcal{L}_n(d_{\parallel}\psi) = d_{\parallel}(\mathcal{L}_n\psi) - \mathcal{L}_n n \wedge (n \cdot d\psi)} \quad (2.78)$$

o que mostra que \mathcal{L}_n e d_{\parallel} comutam se e somente se $\mathcal{L}_n n = 0$, ou de maneira equivalente, quando a aceleração $a(n) := \nabla_n n$ for identicamente nula, como veremos logo a seguir na Sec. (2.12).

2.9 Derivada covariante e derivada de Lie relativos ao operador codiferencial

Considere inicialmente a componente paralela δ_{\parallel} do operador codiferencial δ . Definimos

$$\begin{aligned} \delta_{\parallel}\psi_{\parallel} &= (\delta\psi_{\parallel})_{\parallel} \\ &= -(\partial \cdot \psi_{\parallel})_{\parallel} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Com essa definição podemos ver que

$$\begin{aligned} (\partial \cdot \psi_{\parallel})_{\parallel} &= (\gamma^{\mu} \cdot \partial_{\mu}\psi_{\parallel})_{\parallel} \\ &= (\gamma_{\parallel}^{\mu} \cdot \partial_{\mu}\psi_{\parallel})_{\parallel} + (\gamma_{\perp}^{\mu} \cdot \partial_{\mu}\psi_{\parallel})_{\perp} \\ &= \gamma_{\parallel}^{\mu} \cdot (D_{\mu}^{\parallel}\psi_{\parallel}) + (nn^{\mu}) \cdot \left(-\frac{1}{2}[\Omega_{\mu}, \psi_{\parallel}]\right) \\ &= \gamma_{\parallel}^{\mu} \cdot (D_{\mu}^{\parallel}\psi_{\parallel}) - n \cdot \left(\frac{1}{2}[\Omega(n), \psi_{\parallel}]\right), \end{aligned} \quad (2.80)$$

onde $\Omega(n) := n^{\mu}\Omega_{\mu}$ e a derivada covariante é dada por $D_{\mu}^{\parallel}\psi_{\parallel} = \partial_{\mu}\psi_{\parallel} + \frac{1}{2}[\Omega_{\mu}, \psi_{\parallel}]$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \partial_{\parallel} \wedge (\star_{\parallel}\hat{\psi}_{\parallel}) &= \partial_{\parallel} \wedge [n(\star\hat{\psi}_{\perp})] \\ &= d_{\parallel}[n(\star\psi)_{\perp}] \\ &= \partial_{\parallel}[n(\tilde{\psi}\eta)_{\perp}] \\ &= \partial_{\parallel} \wedge (n\tilde{\psi}_{\parallel}\eta) \\ &= \partial_{\parallel} \wedge (n\tilde{\psi}\eta)_{\parallel} \\ &= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge \left(\partial_{\mu}(n\tilde{\psi}_{\parallel}\eta) + \frac{1}{2}[\Omega_{\mu}, n\tilde{\psi}_{\parallel}\eta]\right) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Mas das relações

$$\begin{aligned} [\Omega_{\mu}, n\tilde{\psi}_{\parallel}\eta] &= (\Omega_{\mu}n\tilde{\psi}_{\parallel}\eta - n\tilde{\psi}_{\parallel}\eta\Omega_{\mu}) \\ &= (\Omega_{\mu}n\tilde{\psi}_{\parallel}\eta - n\tilde{\psi}_{\parallel}\Omega_{\mu}\eta) \\ &= (\Omega_{\mu}n\tilde{\psi}_{\parallel}\eta - n\Omega_{\mu}\tilde{\psi}_{\parallel}\eta + n\Omega_{\mu}\tilde{\psi}_{\parallel}\eta - n\tilde{\psi}_{\parallel}\Omega_{\mu}\eta) \\ &= [\Omega_{\mu}, n]\tilde{\psi}_{\parallel}\eta + n[\Omega_{\mu}, \tilde{\psi}_{\parallel}]\eta \end{aligned} \quad (2.82)$$

obtemos, usando $\partial_\mu \eta = 0$, as expressões

$$\begin{aligned}
\partial_{\parallel} \wedge (\star_{\parallel} \widehat{\psi}_{\parallel}) &= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge \left(\partial_{\mu} n \widetilde{\psi}_{\parallel} \eta + n (\partial_{\mu} \widetilde{\psi}_{\parallel}) \eta + \frac{1}{2} [\Omega_{\mu}, n] \widetilde{\psi}_{\parallel} \eta + \frac{1}{2} n [\Omega_{\mu}, \widetilde{\psi}_{\parallel}] \eta \right) \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge \left[n (\partial_{\mu} \widetilde{\psi}_{\parallel}) \eta + \frac{1}{2} n [\Omega_{\mu}, \widetilde{\psi}_{\parallel}] \eta \right], \quad \text{pois } \partial_{\mu} n = -\frac{1}{2} [\Omega_{\mu}, n] \\
&= \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge [n (D_{\mu}^{\parallel} \widetilde{\psi}_{\parallel}) \eta] \\
&= \frac{1}{2} \left[\gamma_{\parallel}^{\mu} n (\partial_{\mu} \widetilde{\psi}_{\parallel}) \eta + \widehat{n (\partial_{\mu} \widetilde{\psi}_{\parallel})} \eta \gamma_{\parallel}^{\mu} + \gamma_{\parallel}^{\mu} n \frac{1}{2} [\Omega_{\mu}, \widetilde{\psi}_{\parallel}] \eta + n \frac{1}{2} \widehat{[\Omega_{\mu}, \widetilde{\psi}_{\parallel}]} \eta \gamma_{\parallel}^{\mu} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[-n \gamma_{\parallel}^{\mu} (\partial_{\mu} \widetilde{\psi}_{\parallel}) \eta - n \widehat{(\partial_{\mu} \widetilde{\psi}_{\parallel})} \eta \gamma_{\parallel}^{\mu} - n \gamma_{\parallel}^{\mu} \frac{1}{2} [\Omega_{\mu}, \widetilde{\psi}_{\parallel}] \eta - \widehat{n \frac{1}{2} [\Omega_{\mu}, \widetilde{\psi}_{\parallel}]} \eta \gamma_{\parallel}^{\mu} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[-n \gamma_{\parallel}^{\mu} (\partial_{\mu} \widetilde{\psi}_{\parallel}) \eta - n \widehat{(\partial_{\mu} \widetilde{\psi}_{\parallel})} (-\gamma_{\parallel}^{\mu} \widehat{\eta}) - n \gamma_{\parallel}^{\mu} \frac{1}{2} [\Omega_{\mu}, \widetilde{\psi}_{\parallel}] \eta - n \frac{1}{2} \widehat{[\Omega_{\mu}, \widetilde{\psi}_{\parallel}]} (-\gamma_{\parallel}^{\mu} \widehat{\eta}) \right] \\
&= -\frac{n}{2} \left[\gamma_{\parallel}^{\mu} \partial_{\mu} \widetilde{\psi}_{\parallel} - \widehat{(\partial_{\mu} \widetilde{\psi}_{\parallel})} \gamma_{\parallel}^{\mu} + \left(\gamma_{\parallel}^{\mu} \frac{1}{2} [\Omega_{\mu}, \widetilde{\psi}_{\parallel}] - \frac{1}{2} \widehat{[\Omega_{\mu}, \widetilde{\psi}_{\parallel}]} \gamma_{\parallel}^{\mu} \right) \eta \right] \\
&= -n \left[\gamma_{\parallel}^{\mu} \cdot (D_{\mu}^{\parallel} \widetilde{\psi}_{\parallel}) + \left(\gamma_{\parallel}^{\mu} \frac{1}{2} [\Omega_{\mu}, \widetilde{\psi}_{\parallel}] \right) \right] \eta \\
&= -n [\gamma_{\parallel}^{\mu} \cdot (D_{\mu}^{\parallel} \widetilde{\psi}_{\parallel})] \eta
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Agora a ação do ODH sobre a expressão acima é calculada:

$$\begin{aligned}
\star_{\parallel}^{-1} [\partial_{\parallel} \wedge (\star_{\parallel} \widehat{\psi}_{\parallel})] &= \widehat{\tau}^{-1} \{ -[\gamma_{\parallel}^{\mu} \cdot \widehat{D_{\mu}^{\parallel} \widetilde{\psi}_{\parallel}}] n \eta \} \\
&= -\widehat{\tau}^{-1} \widehat{\eta} [\gamma_{\parallel}^{\mu} \cdot \widehat{D_{\mu}^{\parallel} \widetilde{\psi}_{\parallel}}] n \\
&= -\widehat{\tau}^{-1} \widehat{\tau} n (D_{\mu}^{\parallel} \psi_{\parallel} \cdot \gamma_{\parallel}^{\mu}) n \\
&= -n [(D_{\mu}^{\parallel} \psi_{\parallel}) \cdot \gamma_{\parallel}^{\mu}] n \\
&= -n^2 [(D_{\mu}^{\parallel} \widehat{\psi}_{\parallel}) \cdot \widehat{\gamma}_{\parallel}^{\mu}] \\
&= (D_{\mu}^{\parallel} \widehat{\psi}_{\parallel}) \cdot \gamma_{\parallel}^{\mu} \\
&= -\gamma_{\parallel}^{\mu} \cdot D_{\mu}^{\parallel} \psi_{\parallel}
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Comparando essa última expressão com a eq.(2.80), obtemos

$$\begin{aligned}
(\partial \cdot \psi_{\parallel})_{\parallel} &= -\star_{\parallel}^{-1} [\partial_{\parallel} \wedge (\star_{\parallel} \widehat{\psi}_{\parallel})] - n \cdot \left(\frac{1}{2} [\Omega(n), \psi_{\parallel}] \right) \\
&= -\star_{\parallel}^{-1} d_{\parallel} \star_{\parallel} \widehat{\psi}_{\parallel} - n \cdot \left(\frac{1}{2} [\Omega(n), \psi_{\parallel}] \right)
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Mas como

$$\begin{aligned}
n \cdot \frac{1}{2}[\Omega(n), \psi_{\parallel}] &= n^{\mu} n \cdot \frac{1}{2}[\Omega_{\mu}, \psi_{\parallel}] \\
&= n^{\mu} n \cdot [-(\partial_{\mu} n) \cdot (\psi_{\parallel})] \\
&= -n^{\mu} \{n \cdot [(\partial_{\mu} n) \cdot (n \wedge \psi_{\parallel})]\} \\
&= -n^{\mu} [(n \wedge \partial_{\mu} n) \cdot (n \wedge \psi_{\parallel})] \\
&= n^{\mu} [(\partial_{\mu} n \wedge n) \cdot (n \wedge \psi_{\parallel})] \\
&= n^{\mu} \{(\partial_{\mu} n) \cdot [n \cdot (n \wedge \psi_{\parallel})]\} \\
&= n^{\mu} \{(\partial_{\mu} n) \cdot [\psi_{\parallel} - n \wedge (n \cdot \psi_{\parallel})]\} \\
&= n^{\mu} (\partial_{\mu} n) \cdot \psi_{\parallel} \\
&= (n^{\mu} \partial_{\mu} n) \cdot \psi_{\parallel} \\
&= \mathcal{L}_n n \cdot \psi_{\parallel}
\end{aligned} \tag{2.86}$$

segue que

$$\boxed{(\partial \cdot \psi_{\parallel})_{\parallel} = -\star_{\parallel}^{-1} d_{\parallel} \star_{\parallel} \widehat{\psi}_{\parallel} - (\mathcal{L}_n n) \cdot \psi_{\parallel}} \tag{2.87}$$

2.10 Decomposições duais equivalentes

Definimos a partir da eq.(2.2) a α -gradação dada por

$$\alpha(\psi) = n\hat{\psi}n^{-1} \tag{2.88}$$

Pelas eqs.(2.26, 2.27), já que $\eta \in \sec \Lambda^{p+q}(T_x^* M)$ e portanto $\eta^2 = \pm 1$, podemos ver que

$$\begin{aligned}
\alpha(\psi) &= n\hat{\psi}n^{-1} \\
&= n\eta^2\hat{\psi}\eta^{-2}n^{-1} \\
&= n\eta(\eta\hat{\psi})\eta^{-2}n^{-1} \\
&= (-1)^{|\psi|(p+q-1)} n\eta(\hat{\psi}\eta)\eta^{-1}\eta^{-1}n^{-1} \\
&= (-1)^{p+q-1} \tau\psi\tau^{-1}
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Portanto definimos uma mesma maneira de representar a decomposição de elementos de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$:

1. A partir do campo de 1-formas $n \in \sec T_x^* M$ do fibrado normal dada por

$$\boxed{\alpha(\psi)_n := n\hat{\psi}n^{-1}} \tag{2.90}$$

ou

2. Via o campo definido pelo elemento de volume $\tau \in \sec \Lambda^{p+q-1}(T_x^* M)$ associado a $\mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}$, onde a decomposição (dada pela eq.(2.90)) agora é reescrita como

$$\boxed{\alpha(\psi)_{\tau} := (-1)^{(p+q-1)} \tau\psi\tau^{-1}} \tag{2.91}$$

pela eq.(2.89).

Como as decomposições dadas por $\alpha(\psi)_n$ e $\alpha(\psi)_\tau$ são idênticas, é imediato que a ação de operadores diferenciais sobre tais automorfismos são também equivalentes. De fato, calculamos explicitamente a seguir a ação do operador diferencial $d : \sec \Lambda^p(T_x^*M) \rightarrow \sec \Lambda^{p+1}(T_x^*M)$ em cada uma das decomposições dadas pelas eqs.(2.88) e (2.89):

$$\boxed{d\alpha(\psi)_n = dn\hat{\psi}n^{-1} - nd\hat{\psi}n^{-1} + (-1)^{|\psi|}n\hat{\psi}dn^{-1}} \quad (2.92)$$

$$\boxed{d\alpha(\psi)_\tau = (-1)^{|\psi|(p+q-1)}(dn\hat{\psi}n^{-1} - nd\hat{\psi}n^{-1} - (-1)^{|\psi|}n\hat{\psi}dn^{-1})} \quad (2.93)$$

Agora, a ação do operador codiferencial $\delta : \sec \Lambda^p(T_x^*M) \rightarrow \sec \Lambda^{p-1}(T_x^*M)$ em cada uma das decomposições dadas pelas eqs.(2.88) e (2.89), considerando o operador codiferencial dado por $\delta\phi = \star^{-1}d\star\hat{\phi}$ e o operador dual de Hodge dado por $\star\phi = \hat{\phi}\eta$ ($\phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$), é dada respectivamente por

$$\begin{aligned} \delta\alpha(\psi)_n &= \star^{-1}d\star\widehat{\alpha(\psi)_n} \\ &= \star^{-1}d(n\tilde{\psi}n^{-1}\eta) \\ &= \star^{-1}\{dn^{-1}\tilde{\psi}n\eta - n^{-1}d\tilde{\psi}n\eta - (-1)^{|\psi|}n^{-1}\tilde{\psi}dn\eta\} \\ &= \beta\{\eta n\psi(-dn^{-1})\eta - \eta n(-\widehat{d\psi})n^{-1}\eta - (-1)^{|\psi|}\eta(-dn)\psi n^{-1}\eta\} \\ &= -(-1)^{|\psi|(p+q-1)}\beta\{n\hat{\psi}dn^{-1} + nd\psi n^{-1} + (-1)^{|\psi|}dn\hat{\psi}n^{-1}\}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

onde a constante $\beta := (-1)^{q+|\psi|(p+q-|\psi|)}$ vem da propriedade $\star^{-1} = \beta\star$, e por

$$\begin{aligned} \delta\alpha(\psi)_\tau &= \star^{-1}d\star\widehat{\alpha(\psi)_\tau} \\ &= \star^{-1}d(n\eta\bar{\psi}\eta^{-1}n^{-1}\eta) \\ &= \star^{-1}\{dn^{-1}\eta^{-1}\bar{\psi}n - n^{-1}\eta^{-1}d\bar{\psi}n - (-1)^{|\psi|}n^{-1}\eta^{-1}\bar{\psi}dn\} \\ &= \beta\{n\hat{\psi}\eta^{-1}(-dn^{-1})\eta - n(-\widehat{d\bar{\psi}})\eta^{-1}n^{-1}\eta - (-1)^{|\psi|}\eta(-dn)\bar{\psi}\eta^{-1}n^{-1}\eta\} \\ &= (-1)^{|\psi|(p+q-1)}\beta\{-n\hat{\psi}dn^{-1} + nd\psi n^{-1} - (-1)^{|\psi|}dn\hat{\psi}n^{-1}\}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Portanto, já que o operador de Dirac ∂ é dado por $d - \delta$, temos pelas eqs.(2.92, 2.93, 2.94, 2.95), que $\partial(\alpha(\psi)_n) = \partial(\alpha(\psi)_\tau)$ é escrito como

$$\boxed{\partial(\alpha(\psi)_n) = (1 + (-1)^{|\psi|}\beta\Delta)dn\hat{\psi}n^{-1} - n(d\hat{\psi} - \beta\Delta d\psi)n^{-1} + (\beta\Delta - (-1)^{|\psi|})n\hat{\psi}dn^{-1}} \quad (2.96)$$

onde $\Delta := (-1)^{|\psi|(p+q-1)}$, que pode ser reescrita, no caso particular do espaço-tempo de Minkowski, como

$$\boxed{\partial(\alpha(\psi)_n) = \partial(\alpha(\psi)_\tau) = -2\left((-1)^{|\psi|}nd\psi n^{-1} + n\psi dn^{-1}\right)} \quad (2.97)$$

No caso mais geral, para variedades pseudo-riemannianas cujo espaço-tangente a um ponto é isomorfo a $\mathbb{R}^{p,q}$, a expressão dada pela eq.(2.96) não pode ser reduzida à eq.(2.97), a menos que $p = 1$ e $q = 3$.

2.11 Generalização das α -gradações: automorfismos internos k -vetoriais

Até agora tratamos de automorfismos internos do tipo

$$\alpha(\psi)_n := n\hat{\psi}n^{-1} \quad (2.98)$$

onde $n \in T_x^*M$ é um campo de 1-formas. Podemos generalizar esses automorfismos, considerando automorfismos mais gerais de $\mathcal{C}\ell_{p,q} \simeq \sec \mathcal{C}\ell(M, g)$ gerados por campos de k -formas ao invés de campos de 1-formas, a partir da definição

$$\boxed{\alpha^{(k)}(\psi) := \phi_{(k)}\psi\phi_{(k)}^{-1}} \quad (2.99)$$

onde $\phi_{(k)} \in \sec \Lambda^k(T_x^*M)$. Os operadores de projeção dados pelas eqs.(2.6) podem ser generalizados imediatamente através das expressões

$$\boxed{\pi_{\parallel}^{(k)}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi + \phi_{(k)}\psi\phi_{(k)}^{-1}), \quad \pi_{\perp}^{(k)}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi - \phi_{(k)}\psi\phi_{(k)}^{-1})} \quad (2.100)$$

Nas subseções seguintes expressaremos explicitamente as α -gradações para todos os elementos de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$. Consideramos $\phi^{(k)} \neq \psi$, caso contrário $\alpha^{(k)}(\psi) = \psi$. No que se segue considere $1 \leq i, j, k \leq 3$ índices distintos.

2.11.1 Automorfismos internos bivetoriais

Neste caso a decomposição é definida por

$$\boxed{\alpha^{(2)}(\psi) := \phi_{(2)}\psi\phi_{(2)}^{-1}} \quad (2.101)$$

onde $\phi_{(2)} \in \sec \Lambda^2(T_x^*M)$ é um campo bivetorial. Temos vários casos ($i, j, k = 1, 2, 3$):

a) $\psi \in \Lambda^1(T_x^*M)$:

ψ	$\phi_{(2)}$	$\alpha^{(2)}(\psi)$	$\pi_{\parallel}^{(2)}(\psi)$	$\pi_{\perp}^{(2)}(\psi)$
e^0	e^{0j}	$-e^0$	0	e^0
e^0	e^{ij}	e^0	e^0	0
e^i	e^{0j}	e^i	e^i	0
e^i	e^{ik}	$-e^i$	0	e^i
e^i	e^{0i}	$-e^i$	0	e^i
e^i	e^{jk}	e^i	e^i	0

b) $\psi \in \Lambda^2(T_x^*M)$:

ψ	$\phi_{(2)}$	$\alpha^{(2)}(\psi)$	$\pi_{\parallel}^{(2)}(\psi)$	$\pi_{\perp}^{(2)}(\psi)$
e^{0i}	e^{0j}	$-e^{0i}$	0	e^{0i}
e^{0i}	e^{ij}	$-e^{0i}$	0	e^{0i}
e^{0i}	e^{jk}	e^{0i}	e^{0i}	0
e^{ij}	e^{0i}	$-e^{ij}$	0	e^{ij}
e^{ij}	e^{0k}	e^{ij}	e^{ij}	0
e^{ij}	e^{ik}	$-e^{ij}$	0	e^{ij}

c) $\psi \in \Lambda^3(T_x^*M)$:

ψ	$\phi_{(2)}$	$\alpha^{(2)}(\psi)$	$\pi_{\parallel}^{(2)}(\psi)$	$\pi_{\perp}^{(2)}(\psi)$
e^{0ij}	e^{0j}	e^{0ij}	e^{0ij}	0
e^{0ij}	e^{ij}	e^{0i}	e^{0ij}	0
e^{0ij}	e^{jk}	$-e^{0ij}$	0	e^{0ij}
e^{123}	e^{0i}	$-e^{123}$	0	e^{123}
e^{123}	e^{ij}	e^{123}	e^{123}	0

d) $\psi \in \Lambda^4(T_x^*M)$:

ψ	$\phi_{(2)}$	$\alpha^{(2)}(\psi)$	$\pi_{\parallel}^{(2)}(\psi)$	$\pi_{\perp}^{(2)}(\psi)$
e^{0123}	$e^{\mu\nu}$	e^{0123}	e^{0123}	0

2.11.2 Automorfismos internos trivetoriais

Agora a α -gradação é definida por

$$\alpha^{(3)}(\psi) := \phi_{(3)}\psi\phi_{(3)}^{-1} \quad (2.102)$$

onde $\phi_{(3)} \in \text{sec } \Lambda^3(T_x^*M)$ é um campo trivetorial. Temos vários casos ($i, j, k = 1, 2, 3$):

a) $\psi \in \Lambda^1(T_x^*M)$:

ψ	$\phi_{(3)}$	$\alpha^{(3)}(\psi)$	$\pi_{\parallel}^{(3)}(\psi)$	$\pi_{\perp}^{(3)}(\psi)$
e^0	e^{0ij}	e^0	e^0	0
e^0	e^{123}	$-e^0$	0	e^0
e^i	e^{0ij}	e^i	e^i	0
e^i	e^{0jk}	$-e^i$	0	e^i
e^i	e^{123}	e^i	e^i	0

b) $\psi \in \Lambda^2(T_x^*M)$:

ψ	$\phi_{(3)}$	$\alpha^{(3)}(\psi)$	$\pi_{\parallel}^{(3)}(\psi)$	$\pi_{\perp}^{(3)}(\psi)$
e^{0i}	e^{0ij}	e^{0i}	e^{0i}	0
e^{0i}	e^{123}	$-e^{0i}$	0	e^{0i}
e^{ij}	e^{0ij}	e^{ij}	e^{ij}	0
e^{ij}	e^{0ik}	$-e^{ij}$	0	e^{ij}
e^{ij}	e^{123}	e^{ij}	e^{ij}	0

c) $\psi \in \Lambda^3(T_x^*M)$:

ψ	$\phi_{(3)}$	$\alpha^{(3)}(\psi)$	$\pi_{\parallel}^{(3)}(\psi)$	$\pi_{\perp}^{(3)}(\psi)$
e^{0ij}	e^{0ik}	e^{0ij}	e^{0ij}	0
e^{0ij}	e^{123}	$-e^{0ij}$	0	e^{0ij}
e^{123}	e^{0ij}	$-e^{123}$	0	$-e^{123}$

d) $\psi \in \Lambda^4(T_x^*M)$:

ψ	$\phi_{(3)}$	$\alpha^{(3)}(\psi)$	$\pi_{\parallel}^{(3)}(\psi)$	$\pi_{\perp}^{(3)}(\psi)$
e^{0123}	$e^{\mu\nu\sigma}$	$-e^{0123}$	0	e^{0123}

2.11.3 Automorfismos internos tetravetoriais

Neste último caso que concerne as decomposições multivetoriais em $\mathcal{C}\ell_{1,3}$, a α -gradação é definida por

$$\alpha^{(4)}(\psi) := e_{0123}\psi e_{0123}^{-1} = \hat{\psi} \quad (2.103)$$

onde $e_{0123} \in \sec \Lambda^4(T_x M)$ denota um campo de elementos de volume em $\mathbb{R}^{1,3} \simeq T_x M$. É imediato ver que $\alpha^{(4)}(\psi) = \hat{\psi}$, ou seja, o automorfismo interno tetravetorial em $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ é exatamente a involução graduada. Todos os casos podem ser resumidos na seguinte tabela, para $\psi \in \Lambda^i(T_x^*M)$, $i = 1, 2, 3$:

ψ	$\alpha^{(4)}(\psi)$	$\pi_{\parallel}^{(4)}(\psi)$	$\pi_{\perp}^{(4)}(\psi)$
e^{μ}	$-e^{\mu}$	0	e^{μ}
$e^{\mu\nu}$	$e^{\mu\nu}$	$e^{\mu\nu}$	0
$e^{\mu\nu\sigma}$	$-e^{\mu\nu\sigma}$	0	$e^{\mu\nu\sigma}$

2.11.4 Automorfismos internos multivetoriais

Esse caso é a extensão das definições dos automorfismos definidos nas Subsecs. (2.11.1 - 2.11.3) por linearidade, como

$$\alpha^\phi(\psi) := \sum_{b=1}^4 \alpha^{(b)}(\psi) \quad (2.104)$$

onde $\alpha^{(1)}(\psi) \equiv \alpha(\psi)_n = n\hat{\psi}n^{-1}$. Podemos ainda expressar

$$\boxed{\alpha^\phi(\psi) := \phi\psi\phi^{-1}} \quad (2.105)$$

$\phi, \psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$.

Na próxima seção revisitamos os conceitos da cinemática relativística no contexto das ACs paralelas e ortogonais.

2.12 Cinemática relativística e observadores de Killing

Lembrando (vide Apêndice A) que a derivada covariante ∇ é dada por $\nabla = \mathbf{e}^a \otimes \nabla_{\mathbf{e}_a}$, primeiramente a derivada covariante espacial (DCE) de $\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$ é definida como sendo a parte espacial da derivada covariante $\nabla^\parallel\psi$, enquanto que a derivada espacial de Fermi-Walker⁴, denotada por \mathfrak{d} , é definida como a derivada covariante ao longo da direção temporal n [Bin93, Bin95, Bin97]:

$$\mathfrak{d}\psi := (\nabla_n \psi)_\parallel \quad (2.106)$$

Definimos agora no nosso formalismo as quantidades cinemáticas associadas ao campo vetorial n :

$$\text{(Aceleração)} \quad \boxed{a(n) := \nabla_n n} \in \sec \Lambda^1(T_x^*M) \quad (2.107)$$

$$\text{(Tensor de expansão)} \quad \boxed{\theta(n) := \mathcal{L}_n \circ \pi_\parallel g} \quad (2.108)$$

$$\text{(2-forma de vorticidade)} \quad \boxed{\omega(n) := \frac{1}{2}d_\parallel n = \frac{1}{2}(dn)_\parallel} \in \sec \Lambda^2(T_x^*M) \quad (2.109)$$

$$\text{(Escalar de expansão)} \quad \boxed{\Theta(n) := \text{Tr } \theta(n)} \quad (2.110)$$

$$\text{(Tensor de cisalhamento)} \quad \boxed{\sigma(n) := \mathcal{L}_n \circ \pi_\parallel - \frac{1}{3}(\Theta(n) \circ \pi_\parallel)} \quad (2.111)$$

Para o caso euclidiano $\mathcal{C}\ell_{3,0}$, as definições acima estão de acordo com as definições clássicas [Ell71, Ell73, Ehl93, Mis73].

Lembramos que a aceleração é tipo-espaço, pois

$$n \cdot a(n) = n \cdot \nabla_n n = \frac{1}{2}\nabla_n(n \cdot n) = 0. \quad (2.112)$$

⁴A derivada de Fermi-Walker agindo sobre um vetor espacial, ao longo do campo vetorial n que define um observador, tem a interpretação física de descrever o vetor spin de um giroscópio de teste de um observador [Mis73].

Quando as linhas de universo que descrevem os observadores são geodésicas, segue que $\nabla_n n = 0$ e os observadores são inerciais. Podemos ainda mostrar que

$$\boxed{a(n) = \mathcal{L}_n n = n \cdot dn = \mathcal{L}_n^{\parallel} n} \quad (2.113)$$

já que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n^{\parallel} n &= n \cdot (n \wedge (n \cdot dn)) \\ &= n \cdot dn - n \wedge (n \cdot (n \cdot dn)) = n \cdot dn \\ &= \mathcal{L}_n n, \end{aligned} \quad (2.114)$$

onde denotamos

$$\boxed{\mathcal{L}_n^{\parallel} \psi := (\mathcal{L}_n \psi)_{\parallel} = \pi_{\parallel}(\mathcal{L}_n \psi)} \quad (2.115)$$

Além disso podemos escrever

$$\boxed{\nabla n = -a(n) \otimes n^{\sharp} + \theta(n) - \omega(n)} \quad (2.116)$$

$$\boxed{\theta(n) = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n^{\parallel} g} \quad (2.117)$$

e, usando a eq.(2.68), que a 2-forma de vorticidade pode ser escrita como

$$\boxed{\omega(n) = -n \wedge \gamma_{\parallel}^{\mu} \wedge D_{\mu} + n \wedge \mathcal{L}_n n} \quad (2.118)$$

Alternativamente podemos ainda expressar

$$\begin{aligned} \Theta(n) &= -\delta n \\ &= \star^{-1} d \star n \in \Lambda^0(T_x^* M) \end{aligned} \quad (2.119)$$

Além disso, já que a orientação espacial está relacionada à orientação τ associada a $\mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}$, definida pela eq.(2.26), então é imediato que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n \tau &= \mathcal{L}_n^{\parallel} \tau \\ &= n \cdot \mathcal{L}_n \eta \end{aligned} \quad (2.120)$$

A 2-forma de vorticidade $\omega(n)$ mede o quanto o colchete de Lie entre dois campos vetoriais espaciais está na direção temporal. Isso pode ser visto ao mostrarmos que a parte temporal, correspondente à projeção ortogonal do colchete de Lie, é nula se somente se a 2-forma de vorticidade for identicamente nula. Para mostrar isso, dados dois campos vetoriais espaciais $\mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\parallel}$, por um lado temos:

$$\begin{aligned} \omega(n)(\mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\parallel}) &= \frac{1}{2} (dn)_{\parallel}(\mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\parallel}) \\ &= \frac{1}{2} dn(\mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\parallel}), \quad \text{já que } \mathbf{u}_{\parallel} \text{ e } \mathbf{v}_{\parallel} \text{ são espaciais} \\ &= \mathbf{u}_{\parallel} n^{\sharp}(\mathbf{v}_{\parallel}) - \mathbf{v}_{\parallel} n^{\sharp}(\mathbf{u}_{\parallel}) - n^{\sharp}([\mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\parallel}]) \\ &= -n^{\sharp}([\mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\parallel}]) \end{aligned} \quad (2.121)$$

Por outro lado, pelas eqs.(2.11), obtemos

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\parallel}]_{\perp} &= n^{\sharp}([\mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\parallel}])n \\ &= -2\omega(n)(\mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\parallel})n, \quad \text{pela eq.(2.121)}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Portanto, quando $\omega(n)$ é identicamente nula, pela eq.(2.122) a componente temporal $[\mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\parallel}]_{\perp}$ de $[\mathbf{u}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\parallel}]$ é também nula, e nesse caso o colchete de Lie está contido na variedade espacial Σ .

Um espaço-tempo estacionário é caracterizado pela existência de um campo de 1-formas de Killing ξ que satisfaz [Mis73]

$$\mathcal{L}_{\xi}g = 0. \quad (2.123)$$

O campo vetorial de 4-velocidades dos observadores de Killing é então caso particular no nosso formalismo, podendo ser definido por

$$n = (\det g(\xi, \xi))^{-1/2}\xi. \quad (2.124)$$

O fator de normalização $(\det g(\xi, \xi))^{-1/2}$ também é estacionário, já que $\mathcal{L}_{\xi}(g_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\xi^{\beta}) = (\mathcal{L}_{\xi}g_{\alpha\beta})\xi^{\alpha}\xi^{\beta} = 0$, pela eq.(2.123), implica que $\mathcal{L}_{\xi}(\det g(\xi, \xi))^{-1/2} = 0$.

No referencial dos observadores de Killing estacionários o tensor de expansão $\theta(n)$ é identicamente nulo, pois pela eq.(2.117) temos

$$\begin{aligned} \theta(n) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_n^{\parallel}g = \frac{1}{2}(\det g(\xi, \xi))^{-1/2}\mathcal{L}_{\xi}^{\parallel}g \\ &= \frac{1}{2}(\det g(\xi, \xi))^{-1/2}\pi_{\parallel} \circ \mathcal{L}_{\xi}g \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Denotando agora $\kappa = (\det g(\xi, \xi))^{-1/2}$, mostramos que a aceleração admite um potencial:

$$\begin{aligned} a(n) &= \mathcal{L}_n^{\parallel}n \\ &= \pi_{\parallel} \circ \mathcal{L}_{\kappa\xi}(\kappa\xi) \\ &= d_{\parallel} \ln \kappa^{-1} \\ &= d \ln \kappa^{-1}. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Quando n descreve um campo vetorial de Killing, κ é constante e portanto a aceleração é nula.

2.13 Identidades entre a decomposição de operadores diferenciais, derivadas de Lie e quantidades cinemáticas

A partir relação de Cartan, que afirma que

$$\mathcal{L}_n\psi = d(n \cdot \psi) + n \cdot d\psi, \quad \psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}, \quad (2.127)$$

e também como vimos na Sec. (2.7), o operador diferencial agindo em ψ pode ser decomposto em partes temporal e espacial como

$$\begin{aligned} d\psi &= (d\psi)_{\parallel} + (d\psi)_{\perp} \\ &= (n \cdot d\psi) \wedge n + (d\psi \wedge n) \cdot n, \end{aligned} \quad (2.128)$$

e no caso em que $\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}^{\parallel}$, obtemos

$$d\psi = \mathcal{L}_n^{\parallel} \psi \wedge n + (d\psi)_{\parallel}. \quad (2.129)$$

Para o caso geral onde $\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$, obtemos duas equações:

$$\begin{aligned} (d\psi)_{\parallel} &= -d_{\parallel} \psi_{\perp} + a(n) \wedge \psi_{\perp} - \mathcal{L}_n^{\parallel} \psi_{\parallel}, \\ (d\psi)_{\perp} &= d_{\parallel} \psi_{\parallel} + 2\omega(n) \wedge \psi_{\perp} \end{aligned} \quad (2.130)$$

Escolhendo $\psi = dn = 2\omega(n) - n \wedge a(n) \in \sec \Lambda^2(T_x^*M)$, segue das eqs.(2.129) e (2.130) que

$$\begin{aligned} (d^2n)_{\perp} = 0 &= d_{\parallel} a(n) + a(n) \wedge a(n) - 2\mathcal{L}_n^{\parallel} \omega(n) \\ (d^2n)_{\parallel} = 0 &= 2(d_{\parallel} \omega(n) - \omega(n) \wedge a(n)), \end{aligned} \quad (2.131)$$

de onde obtemos imediatamente as identidades

$$\boxed{d_{\parallel} a(n) = 2\mathcal{L}_n^{\parallel} \omega(n)} \quad (2.132)$$

e

$$\boxed{d_{\parallel} \omega(n) = \omega(n) \wedge a(n)} \quad (2.133)$$

Desacoplando as eqs.(2.132) e (2.133), o que pode ser feito ao aplicarmos o operador d_{\parallel} na eq.(2.133) juntamente com a regra de Leibniz dada pela eq.(3.98) e substituindo na eq.(2.132), obtemos a seguinte expressão para a 2-forma de vorticidade:

$$\boxed{d_{\parallel}^2 \omega(n) - d_{\parallel} \omega(n) \wedge \mathcal{L}_n n + 2\omega(n) \wedge \mathcal{L}_n \omega(n) = 0} \quad (2.134)$$

Agora, como o operador diferencial é nilpotente (de ordem 2), então

$$\begin{aligned} (d^2\psi)_{\perp} &= (d_{\parallel}^2 - 2\omega(n) \wedge \mathcal{L}_n^{\parallel}) \psi_{\perp} + (a(n) \wedge \mathcal{L}_n^{\parallel} - [\mathcal{L}_n^{\parallel}, d_{\parallel}]) \psi_{\parallel} \\ &\quad + (d_{\parallel} a(n) - 2\mathcal{L}_n^{\parallel} \omega(n)) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.135)$$

e também

$$\begin{aligned} (d^2\psi)_{\parallel} &= (d_{\parallel}^2 - 2\omega(n) \wedge \mathcal{L}_n^{\parallel}) \psi_{\parallel} + 2(d_{\parallel} \omega(n) - \omega(n) \wedge a(n)) \wedge \psi_{\perp} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Podemos ainda mostrar que para todo $\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$, temos

$$\boxed{d_{\parallel}^2 \psi = 2\omega(n) \wedge (\mathcal{L}_n^{\parallel} \psi - d_{\parallel} (n \cdot \psi))} \quad (2.137)$$

e portanto, embora $d^2 = 0$, o mesmo não ocorre com d_{\parallel}^2 e nem com d_{\perp}^2 em geral. Reescrevemos as expressões obtidas na Sec. (2.9) para as componentes paralela e ortogonal do operador codiferencial, aplicado a um multivetor $\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$, usando a aceleração e a 2-forma de vorticidade:

$$\boxed{(\delta\psi)_{\perp} = \delta_{\parallel}\psi_{\perp} - 2\omega(n) \cdot \psi_{\parallel}} \quad (2.138)$$

$$\boxed{(\delta\psi)_{\parallel} = \delta_{\parallel}\widehat{\psi}_{\parallel} - a(n) \cdot \psi_{\parallel} - \star_{\parallel}^{-1}\mathcal{L}_n^{\parallel}\star_{\parallel}\psi} \quad (2.139)$$

2.14 Equações de Maxwell via α -graduações

O operador de Dirac pode ser escrito como $\partial = \mathbf{e}_{\mu}\partial^{\mu} = \mathbf{e}_0\partial_0 - \mathbf{e}_i\partial_i$. A seguinte igualdade é imediata:

$$\begin{aligned} \partial F &= \partial \cdot F + \partial \wedge F \\ &= \langle \partial \cdot F \rangle_{\parallel} + \langle \partial \cdot F \rangle_{\perp} + \langle \partial \wedge F \rangle_{\parallel} + \langle \partial \wedge F \rangle_{\perp} \end{aligned} \quad (2.140)$$

A intensidade do campo eletromagnético $F \in \Lambda^2(T_x^*M)$ pode ser decomposta como $F = F_{\parallel} + F_{\perp}$, onde $F_{\parallel} = \mathbf{B} \in \sec \Lambda^2(T_x^*\Sigma)$, $F_{\perp} = -\mathbf{E} \wedge \mathbf{e}_0$ e $\mathbf{E} \in \sec \Lambda^1(T_x^*\Sigma)$. Usando as equações obtidas no início deste capítulo obtemos

$$\begin{aligned} \langle \partial \cdot F \rangle_{\perp} &= \langle \mathbf{e}^{\mu} \cdot \partial_{\mu} F \rangle_{\perp} \\ &= \mathbf{e}_{\parallel}^{\mu} \cdot \partial_{\mu} F_{\perp} \\ &= \mathbf{e}^i \cdot \partial_i (-\mathbf{E} \wedge \mathbf{e}_0) \\ &= -(\operatorname{div} \mathbf{E})\mathbf{e}_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \partial \cdot F \rangle_{\parallel} &= \langle \mathbf{e}^{\mu} \cdot \partial_{\mu} F \rangle_{\parallel} \\ &= \mathbf{e}_{\parallel}^{\mu} \cdot \partial_{\mu} F_{\parallel} + \mathbf{e}_{\perp}^{\mu} \cdot \partial_{\mu} F_{\perp} \\ &= \mathbf{e}^i \partial_i \mathbf{B} + \mathbf{e}^0 \partial_0 (-\mathbf{E} \wedge \mathbf{e}_0) \\ &= \mathbf{e}^i \partial_i \mathbf{B} + \partial_0 \mathbf{E} \\ &= -\operatorname{rot} \mathbf{B} + \partial_0 \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.141)$$

$$\begin{aligned} \langle \partial \wedge F \rangle_{\perp} &= \langle \mathbf{e}^{\mu} \wedge \partial_{\mu} F \rangle_{\perp} \\ &= \mathbf{e}_{\perp}^{\mu} \wedge \partial_{\mu} F_{\parallel} + \mathbf{e}_{\parallel}^{\mu} \cdot \partial_{\mu} F_{\perp} \\ &= \mathbf{e}^i \wedge \partial_i (-\mathbf{E} \wedge \mathbf{e}_0) + \mathbf{e}^0 \wedge \partial_0 \mathbf{B} \\ &= (\operatorname{rot} \mathbf{E} + \partial_0 \mathbf{B}) \wedge \mathbf{e}_0 \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} \langle \partial \wedge F \rangle_{\parallel} &= \langle \mathbf{e}^{\mu} \wedge \partial_{\mu} F \rangle_{\parallel} \\ &= \mathbf{e}_{\parallel}^{\mu} \wedge \partial_{\mu} F_{\parallel} \\ &= \mathbf{e}^i \wedge \partial_i \mathbf{B} \\ &= -(\operatorname{div} \mathbf{B})\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.143)$$

Considerando a densidade de carga elétrica ρ e a densidade de corrente espacial \mathbf{j} , já que as equações de Maxwell são dadas por

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \partial_0 \mathbf{E} + \mathbf{j} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial_0 \mathbf{B} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{2.144}$$

podemos expressá-las como

$$\begin{aligned}\langle \partial \cdot F \rangle_{\parallel} &= -\mathbf{j} \\ \langle \partial \cdot F \rangle_{\perp} &= -\rho \mathbf{e}_0 \\ \langle \partial \wedge F \rangle_{\parallel} &= \langle \partial \wedge F \rangle_{\perp} = 0\end{aligned}\tag{2.145}$$

Além disso, definindo a densidade de corrente $J = J_{\parallel} + J_{\perp} \in \sec \Lambda^3(T_x^*M)$, onde $J_{\perp} = -\rho \mathbf{e}_0$, $J_{\parallel} = -\mathbf{j}$, as equações de Maxwell podem ser escritas em uma forma mais compacta como

$$\boxed{\partial F = J}\tag{2.146}$$

2.15 Transformações de Lorentz no contexto da decomposição do espaço-tempo

Seja $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ um referencial inercial correspondente a um observador inercial, satisfazendo $\mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\nu \mathbf{e}_\mu = 2g_{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$. Após escolhermos um observador inercial representado por \mathbf{e}_0 , podemos expressar um vetor no espaço afim $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{1,3}$ como

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v^\mu \mathbf{e}_\mu \\ &= ct \mathbf{e}_0 + \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{\parallel}, \quad \text{onde } \mathbf{v}_{\perp} = v^i \mathbf{e}_i = \vec{\mathbf{v}}, \quad x_{\parallel} = ct \mathbf{e}_0.\end{aligned}\tag{2.147}$$

Já que \mathbf{e}_0 é tipo-tempo, escrevemos

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_0) \mathbf{e}_0 + (\mathbf{v} \wedge \mathbf{e}_0) \mathbf{e}_0 = ct \mathbf{e}_0 + \vec{\mathbf{v}},\tag{2.148}$$

onde $\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{e}_0) \cdot \mathbf{e}_0 = v^i \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_0 = ct$. Se outro observador é representado por um campo vetorial $n \in T_x M$, fazemos a decomposição

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot n)n + (\mathbf{v} \wedge n) \cdot n = ct' n + \vec{\mathbf{v}}'.\tag{2.149}$$

Uma transformação de Lorentz (TL) transforma $(ct, \vec{\mathbf{v}}) \mapsto (ct', \vec{\mathbf{v}}')$ onde o inverso γ^{-1} do fator de contração de Lorentz⁵ γ é definido por $\gamma = n \cdot \mathbf{e}_0$. O vetor n é obtido a partir de uma rotação

⁵ Definido como $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - n^2/c^2}$.

hiperbólica de \mathbf{e}_0 , dada por $n = L\mathbf{e}_0\tilde{L}$, $L \in \text{Spin}_+(1,3)$. Se notarmos que $(1 + n\mathbf{e}_0)\mathbf{e}_0(1 + \mathbf{e}_0n) = 2(1 + n \cdot \mathbf{e}_0)n$, podemos expressar o operador L como

$$L = \frac{1 + n\mathbf{e}_0}{\sqrt{2(1 + n \cdot \mathbf{e}_0)}} = \frac{1 + n \cdot \mathbf{e}_0 + n \wedge \mathbf{e}_0}{\sqrt{2(1 + n \cdot \mathbf{e}_0)}} = \frac{1 + \gamma + n \wedge \mathbf{e}_0}{\sqrt{2(1 + \gamma)}} \quad (2.150)$$

Pela relação

$$\begin{aligned} (n \wedge \mathbf{e}_0)^2 &= n \cdot (\mathbf{e}_0 \cdot (n \wedge \mathbf{e}_0)) \\ &= n \cdot (\gamma\mathbf{e}_0 - n) \\ &= \gamma^2 - 1, \end{aligned} \quad (2.151)$$

reescrevemos a eq.(2.150) como

$$L = \sqrt{\frac{1 + \gamma}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}} \left(\frac{n \wedge \mathbf{e}_0}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right) \quad (2.152)$$

Se o ângulo hiperbólico θ é definido a partir das expressões

$$\cosh \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \gamma}{2}}, \quad \sinh \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}},$$

é imediato ver que $\tanh \theta = \|n\|/c$. Denotando $B = n \wedge \mathbf{e}_0$ escrevemos $L = \exp(\frac{\theta}{2}B)$, já que a rotação hiperbólica acontece no plano definido por $n \wedge \mathbf{e}_0$.

Considere o caso particular onde $L = \exp(\frac{\theta}{2}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_0)$:

$$\begin{aligned} n = L\mathbf{e}_0\tilde{L} &= \left[\sqrt{\frac{1 + \gamma}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}} \left(\frac{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_0}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right) \right] \mathbf{e}_0 \left[\sqrt{\frac{1 + \gamma}{2}} + \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}} \left(\frac{\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right) \right] \\ &= \gamma\mathbf{e}_0 + \gamma \frac{\|n\|}{c} \mathbf{e}_1. \end{aligned} \quad (2.153)$$

Pela eq.(2.149) and eq.(2.153), a componente temporal do observador é dada por

$$ct' = \mathbf{v} \cdot n = \gamma ct - \gamma v^1 \frac{\|n\|}{c} \Rightarrow t' = \gamma \left(t - \frac{\|n\|v^1}{c^2} \right). \quad (2.154)$$

Já a componente espacial $\vec{\mathbf{v}}'$ de \mathbf{v} é expressa como

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}' &= (\mathbf{v} \wedge n) \cdot n \\ &= (v^1 - t\|n\|)\gamma^2 \frac{\|n\|}{c} \mathbf{e}_0 + (v^1 - t\|n\|)\gamma^2 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Efetuada-se uma TL em vetores em $T_x M \simeq \mathbb{R}^{1,3}$ ($\mathbf{e}_\mu \mapsto \mathbf{e}'_\mu = L\mathbf{e}_\mu\tilde{L}$) obtemos

$$\mathbf{e}'_0 = n, \quad \mathbf{e}'_1 = \gamma\mathbf{e}_1 + \gamma \frac{\|n\|}{c} \mathbf{e}_0, \quad \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3. \quad (2.156)$$

de onde a TL usual é obtida:

$$v^{1'} = \gamma(v^1 - t\|n\|), \quad v^{2'} = v^2, \quad v^{3'} = v^3. \quad (2.157)$$

Escrevemos as eqs.(2.154, 2.156) como

$$\boxed{t' = \frac{t - \|n\|v^1/c^2}{\sqrt{1 - n^2/c^2}}, \quad v^{1'} = \frac{v^1 - t\|n\|}{\sqrt{1 - n^2/c^2}}, \quad v^{2'} = v^2, \quad v^{3'} = v^3} \quad (2.158)$$

2.16 Transformações de Lorentz em campos e induções

2.16.1 Campo elétrico

Já vimos que a intensidade do campo eletromagnético é dada por

$$F = -\mathbf{E} \wedge \mathbf{e}_0 + \mathbf{B} = -(E^i \mathbf{e}_i) \wedge \mathbf{e}_0 + (B^i \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k) \varepsilon_i^{jk} \quad (2.159)$$

onde ε_i^{jk} é o tensor de Levi-Civita. Já que $\mathbf{E} = -F \cdot \mathbf{e}_0$, o campo elétrico medido por um observador definido pelo campo de 1-formas n com velocidade relativa $\|n\|$ é dado por

$$\begin{aligned} -\mathbf{E}' &= F \cdot n \\ &= -(E^i \mathbf{e}_i) \wedge \mathbf{e}_0 + (\varepsilon_i^{jk} B^i \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k) \cdot \left(\gamma \mathbf{e}_0 + \gamma \frac{\|n\|}{c} \mathbf{e}_1 \right) \\ &= -E^1 \left(\gamma \mathbf{e}_1 + \gamma \frac{\|n\|}{c} \mathbf{e}_0 \right) - \left(\gamma E^2 - \gamma \frac{\|n\|}{c} B^3 \right) \mathbf{e}_2 - \left(\gamma E^3 + \gamma \frac{\|n\|}{c} B^2 \right) \mathbf{e}_3 \\ &= -E^{i'} \mathbf{e}'_i \end{aligned} \quad (2.160)$$

Assim obtemos a TL de campos elétricos:

$$\begin{aligned} E^{1'} &= E^1 \\ E^{2'} &= \gamma \left(E^2 - \frac{\|n\|}{c} B^3 \right) \\ E^{3'} &= \gamma \left(E^3 + \frac{\|n\|}{c} B^2 \right) \end{aligned} \quad (2.161)$$

2.16.2 Indução magnética

Já que a indução magnética \mathbf{B} é dada pela componente espacial de F , o campo \mathbf{B} relativo a um observador correspondente a n é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}' = F'_{\parallel} &= \frac{1}{2}(F + nFn) \\
&= (F \wedge n) \cdot n \\
&= (F \wedge n) \cdot \left(\gamma \mathbf{e}_0 + \gamma \frac{\|n\|}{c} \mathbf{e}_1 \right) \\
&= \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \left(\gamma^2 B^3 - E^2 \gamma^2 \frac{\|n\|}{c} \right) + \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \left(-\gamma^2 B^2 - \gamma^2 \frac{\|n\|}{c} E^3 \right) \\
&\quad + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \left(\gamma^2 B^1 - E^1 \gamma^2 \frac{\|n\|^2}{c^2} \right) + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_0 \left(-\gamma^2 \frac{\|n\|}{c} B^3 + E^2 \gamma^2 \frac{\|n\|^2}{c^2} \right) \\
&\quad + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_0 \left(\gamma^2 \frac{\|n\|}{c} B^2 + E^3 \gamma^2 \frac{\|n\|^2}{c^2} \right) \\
&= \gamma \left(B^3 - \frac{\|n\|}{c} E^2 \right) \left(\gamma \mathbf{e}_1 + \gamma \frac{\|n\|}{c} \mathbf{e}_0 \right) \wedge \mathbf{e}_2 \\
&\quad - \gamma \left(B^2 + \frac{\|n\|}{c} E^3 \right) \left(\gamma \mathbf{e}_1 + \gamma \frac{\|n\|}{c} \mathbf{e}_0 \right) \wedge \mathbf{e}_3 + B^1 \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\
&= \gamma \left(B^3 - \frac{\|n\|}{c} E^2 \right) \mathbf{e}_1' \wedge \mathbf{e}_2' - \gamma \left(B^2 + \frac{\|n\|}{c} E^3 \right) \mathbf{e}_1' \wedge \mathbf{e}_3' \\
&\quad + B^1 \mathbf{e}_2' \wedge \mathbf{e}_3'
\end{aligned} \tag{2.162}$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned}
B^{1'} &= B^1 \\
B^{2'} &= \gamma \left(B^2 + \frac{\|n\|}{c} E^3 \right) \\
B^{3'} &= \gamma \left(B^3 - \frac{\|n\|}{c} E^2 \right)
\end{aligned} \tag{2.163}$$

2.17 Dinâmica de uma partícula-teste com spin em um campo gravitacional de Reissner-Nordstrøm

Dado o tensor de Riemann $\mathbf{R} = R_{abcd} \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b \otimes \mathbf{e}^c \wedge \mathbf{e}^d \in \sec \Lambda^2(T_x^* M) \otimes \sec \Lambda^2(T_x^* M)$, o movimento de uma partícula-teste com spin S e carga e , em um campo gravitacional e em um meio eletromagnético satisfaz as equações de Dixon-Soriau-Papapetrou [Pap51, Sou74, Fel01], que no nosso formalismo são dadas por

$$\nabla_n p = \mathbf{R} \lrcorner (S \wedge n) + e F_{\parallel} - \frac{1}{2} \lambda S \lrcorner \nabla F \tag{2.164}$$

$$\nabla_n S = p \wedge n + \lambda n \wedge (S \lrcorner (n \lrcorner F)). \tag{2.165}$$

onde $\lambda = -e/M_0$ é um escalar de acoplamento eletromagnético e $p = M_0 n$, onde M_0 é definido como a norma $\|p\|$ do *momentum* p . O último termo da eq.(2.164) descreve termos de interação spin-eletromagnetismo. Para partículas sem carga o modelo acima é reconduzido ao modelo de Papapetrou [Pap51].

Consideramos ainda uma outra congruência de observadores, cuja cotangente à linha de universo é denotada por n' , que está portanto relacionada instantaneamente a n através da expressão

$$n' = \gamma[n + \nu], \quad (2.166)$$

onde ν é a velocidade relativa instantânea entre os referenciais definidos por n e n' e $\gamma = (1 - \nu^2/c^2)^{-1/2}$.

A geometria que descreve as vizinhanças de um buraco-negro estático de massa M e carga Q é dada pela métrica de Reissner-Nordström [Mis73, Gao04, Kim00]. Se utilizarmos as coordenadas de Boyer-Lindquist [Mis73], podemos escrever tal métrica como

$$g^{RN} = -\frac{\varsigma}{r^2} dt \otimes dt + \frac{r^2}{\varsigma} dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi, \quad (2.167)$$

onde $\varsigma = Q^2 - 2Mr + r^2$ [Gao04, Kim00, Gem00], extraímos da eq.(2.167) os coeficientes $g_{00} = g_{tt} = \varsigma/r^2$, $g_{11} = g_{rr} = r^2/\varsigma$, $g_{22} = g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{33} = g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$. Os únicos símbolos de conexão não-nulos são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \frac{r-M}{\varsigma} - \frac{1}{r}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{\varsigma(M-r)}{r^4} + \frac{\varsigma^2}{r^5}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{M-r}{\varsigma} + \frac{1}{r}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{\varsigma}{r}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -\frac{\varsigma \sin^2 \theta}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (2.168)$$

($\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a$). A partir daí as únicas componentes não-nulas do tensor de Riemann são

$$\begin{aligned} R^1_{001} &= -\frac{1}{r^3} \left(\varsigma + \frac{4(M-r)^2}{r} + \frac{6\varsigma(M-r)}{r^2} \right), & R^2_{002} &= \frac{-\varsigma}{r^5} \left(\frac{\varsigma}{r} + M - r \right), \\ R^3_{003} &= \frac{-\varsigma}{r^5} \left(\frac{\varsigma}{r} + M - r \right), & R^1_{112} &= \frac{1}{r^2}, & R^1_{113} &= \frac{1}{r^2}, \\ R^3_{213} &= -\frac{1}{r^2}, & R^3_{223} &= \frac{\cos(2\theta)}{\sin^2 \theta} + \frac{\varsigma}{r^2} \end{aligned} \quad (2.169)$$

juntamente com as componentes obtidas pelas simetrias $R^d_{abc} = -R^a_{dbc}$, $R^d_{abc} = -R^d_{acb}$ e também através da identidade de Bianchi $R^d_{abc} + R^d_{bca} + R^d_{cab} = 0$ satisfeita pelas componentes do tensor de Riemann.

A intensidade do campo eletromagnético $F \in \Lambda^2(T_x^*M)$ gerado pela singularidade e seu potencial associado $A \in T_x^*M$ são respectivamente dados por

$$F = \frac{Q}{r^2} dr \wedge dt, \quad A = -\frac{Q}{r} dt. \quad (2.170)$$

Escolhendo a família de observadores radiais, determinada pela congruência apropriadamente escolhida como sendo $n = (\sqrt{\varsigma}/r) dr$, pelas componentes do tensor de curvatura de Riemann \mathbf{R} dadas

pelas eqs.(2.169) obtemos as seguintes igualdades (lembrando que $\tau = \eta \cdot n$ denota o 3-elemento de volume de Σ):

$$\begin{aligned}
(\mathbf{R}_L n)_L n &= \frac{Mr - Q^2}{r^4} \pi_{\parallel} - \frac{3Mr - 4Q^2}{r^4} \pi_{\perp} \\
(\tilde{\mathbf{R}}_L \tau)_{\lrcorner} \tau &= -(\mathbf{R}_L n)_L n + \frac{2Q^2}{r^4} n \wedge n \\
\star_{\parallel}(\mathbf{R}_L n) \cdot \tau &= 0 \\
F_{\parallel} &= \frac{Q}{r^2} n, \quad F_{\perp} = 0 \\
(n_{\lrcorner}(\mathbf{R}_L S))_{\perp} &= -\frac{Mr - Q^2}{r^4} S \cdot n - \frac{3Mr - 4Q^2}{r^4} n(\star S)_{\perp} \\
(\mathbf{R}_L S)_{\perp} &= \frac{Q^2 - Mr}{r^4} S_{\perp} n + \frac{3Mr - 2Q^2}{r^4} (S_{\perp} n)_{\parallel} \\
(S_{\perp}(n_{\lrcorner} F)) &= \frac{Q}{r^2} \star_{\parallel} (n \wedge (n_{\lrcorner} S)) \\
S_{\lrcorner} \nabla F &= 3 \frac{Q\sqrt{\zeta}}{r^4} (S_{\perp} n)_{\parallel} - \frac{Q\sqrt{\zeta}}{r^4} S_{\perp} n
\end{aligned} \tag{2.171}$$

A aceleração $A(n)$ da partícula teste que satisfaz as eqs.(2.164) é dada por [Bin95, Bin97, Gem00]

$$A(n) = \mathfrak{d}(\gamma M_0 \nu) + \gamma M_0 h(n) - e F_{\perp}, \tag{2.172}$$

onde $h(n) = \frac{Mr - Q^2}{r^3} dr \in \sec \Lambda^1(T_x^* M)$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
A(n) &= \frac{Mr - Q^2}{r^4} \star_{\parallel} (\nu \wedge \star_{\parallel} S_{\parallel}) + \frac{(2Q^2 - 3Mr)\zeta}{r^5} (\star_{\parallel} S_{\parallel} \cdot dr) \star_{\parallel} (\nu \wedge dr) \\
&\quad - \left(\frac{2Mr + 3Q^2}{r^4} - 2 \frac{\lambda Q \sqrt{\zeta}}{\gamma r^4} \right) \frac{\zeta}{r^2} (\star S_{\perp}) n \cdot dr
\end{aligned} \tag{2.173}$$

Utilizando uma aproximação de campos fracos⁶, os dois observadores inerciais respectivamente relativos às congruências n e n' , inicialmente com velocidade relativa ν que satisfaz a eq.(2.166), agora evoluem de maneira acelerada:

$$\boxed{\frac{d\nu}{dt} \cong \sqrt{\zeta} \left(\frac{-M + \lambda Q}{r^3} + \frac{Q^2 - M^2}{r^4} \right) dr + \frac{1}{M_0} A(n) + \alpha} \tag{2.174}$$

onde

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha r^3}{3M} &= \star(\nu \wedge S) + \frac{\zeta}{r^2} \left(S \cdot dr + 2 \star((\nu \cdot dr) dr \wedge S) + \frac{1}{3} F_{\parallel} - \frac{\zeta}{r^2} F_{\parallel} \right) \\
&= + \frac{\lambda Q}{M} \left[\frac{\zeta}{r^2} \left(\frac{1}{3} \star(n \wedge S) + \star \nu \cdot dr \right) dr \wedge S \right] + \frac{1}{3} F_{\parallel} - \frac{\zeta}{r^2} F_{\parallel} \\
&\quad + \iota \star \left[\nu \wedge \left(\nu + \frac{1}{M_0} \left(\frac{M + \lambda Q}{r^2} + \frac{M^2 - Q^2}{r^3} \right) \frac{\sqrt{\zeta}}{r} \star(n \wedge S) - \frac{1}{M_0} \frac{dF_{\parallel}}{dt} \right) \right] \wedge n + \frac{d^2 F_{\parallel}}{dt^2}
\end{aligned}$$

⁶Significando que o quadrado de ν , $S_{\perp} n$, S_{\perp} são considerados desprezíveis, além de fatores $\mathcal{O}(r^{-4})$ em diante.

com $\iota = \left[r \left(1 + \frac{\lambda Q}{M} \right) - \frac{Q^2}{3M} \right] M_0$. Podemos mostrar ainda que as leis de evolução para o *momentum* $p = M_0 n = \|p\|n$ e o spin S da partícula-teste são dadas por:

$$\boxed{\frac{dM_0}{dt} \approx -M_0 \left(\frac{M^2 - Q^2}{r^3} + \frac{M}{r^2} \right) (\iota \cdot n) + \frac{eQ}{r^2} (\nu \cdot n) + \frac{3M}{r^3} [((S \llcorner n) \llcorner n) (\nu \cdot n) - (\nu \llcorner (S \llcorner n))]} \quad (2.175)$$

$$\boxed{\frac{dS}{dt} \approx \left(\frac{M + \lambda Q}{r^2} + \frac{M^2 - Q^2}{r^3} \right) \star ((S \llcorner n) \wedge n) + M_0 \star (\mathcal{U} \wedge \nu)} \quad (2.176)$$

onde

$$\mathcal{U} = \nu + \frac{1}{M_0} \left(\frac{M + \lambda Q}{r^2} + \frac{M^2 - Q^2}{r^3} \right) \star (n \wedge (S \llcorner n)). \quad (2.177)$$

2.18 A decomposição da equação de Dirac

A abordagem de Hestenes à teoria de Dirac [Hes67, Hes75, Hes97] é baseada na álgebra de Clifford real $\mathcal{Cl}_{1,3}$, ao invés da álgebra de Dirac $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3} \simeq \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ usada para se formular a teoria de Dirac [Bjo64, Fls98]. Em tal abordagem Hestenes afirma que um campo espinorial ψ é um elemento da subálgebra par $\mathcal{Cl}_{1,3}^+$.

A equação de Dirac pode ser escrita [Bjo64] como

$$i\gamma_\mu \partial^\mu \psi = m\psi \quad (2.178)$$

onde $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^\dagger$ é um vetor coluna em \mathbb{C}^4 . A fim de que se represente vetores, *spinors* e operadores dentro de um único formalismo, a álgebra de Clifford, *spinors*-coluna são substituídos por matrizes quadradas [Hes67, Hes75, Hes97, Lou02]. Usando por exemplo a representação padrão das matrizes de Dirac, podemos achar um idempotente

$$f = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_0)(1 + i\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.179)$$

tal que o *spinor* ψ possa ser expresso como um *spinor* algébrico [Fig90a, Fig90b, Fau01].

$$\mathbb{C}^4 \ni \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(4, \mathbb{C})f \simeq (\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3})f$$

Já que $i\psi = \psi\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, o spinor Φ é definido em $\mathcal{Cl}_{1,3} \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_0)$.

O automorfismo $\alpha : \sec \mathcal{Cl}_{1,3} \rightarrow \sec \mathcal{Cl}_{1,3}^\pm$ dado pela eq.(2.2) no caso particular onde $n = S\mathbf{e}^0 S^{-1} = \mathbf{e}^0$ por $\alpha(\psi) = \mathbf{e}_0 \hat{\psi} \mathbf{e}_0^{-1}$, induz uma \mathbb{Z}_2 -gradação em $\mathcal{Cl}_{1,3}$, dada por [Mos02, Mos03a]:

$$\mathcal{Cl}_{1,3}^\parallel = \text{span} \{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31}, \mathbf{e}_{123}\} \quad (2.180)$$

$$\mathcal{Cl}_{1,3}^\perp = \text{span} \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_{01}, \mathbf{e}_{02}, \mathbf{e}_{03}, \mathbf{e}_{012}, \mathbf{e}_{023}, \mathbf{e}_{031}, \mathbf{e}_{0123}\} \quad (2.181)$$

A fim de que $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ seja mapeado em $\mathcal{C}\ell_{1,3}^-$ temos que multiplicar elementos de $\mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ por \mathbf{e}^0 . Com efeito, o spinor Φ pode ser escrito como [Lou94, Lou02]

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 = (\Phi_0 + \Phi_1)\frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_0) = \frac{1}{2}(\Phi_0 + \Phi_1\mathbf{e}_0) + \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_0\mathbf{e}_0).$$

Verificamos imediatamente que $\Phi_0 = \Phi_1\mathbf{e}_0$ e $\Phi_1 = \Phi_0\mathbf{e}_0$.

Tomando a parte real em $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ da eq.(2.178) obtemos

$$\mathbf{e}_\mu \partial^\mu \Phi \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = m\Phi, \quad \Phi \in \mathcal{C}\ell_{1,3}\frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_0).$$

A parte par da equação acima com respeito à involução graduada é a equação de Dirac-Hestenes [Hes75, Lou02]:

$$\partial\psi\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - m\psi\mathbf{e}_0 = 0, \quad \psi \in \mathcal{C}\ell_{1,3}^+ \quad (2.182)$$

O campo espinorial ψ é denominado campo espinorial de Dirac-Hestenes (CSDH) $\psi: \mathbb{R}^{1,3} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{1,3}^+$ e também é chamado de *spinor* operatorial, já que ele gera observáveis na teoria de Dirac. Um CSDH admite decomposição canônica [Lou02]

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp(\mathbf{e}_5\beta/2)R$$

sempre que $\psi\tilde{\psi} \neq 0$, onde $\sqrt{\rho}$ é uma dilatação, $\exp(\mathbf{e}_5\beta/2)$ é uma rotação dual, β é o ângulo de Yvon-Takabayasi [Tak57, Yvo40] e o bivector R , elemento de $\text{Spin}_+(1,3) \simeq \text{SL}(2,\mathbb{C})$, é um operador de Lorentz.

Tomando agora $n = S\mathbf{e}^0S^{-1}$ e $\sigma = S\mathbf{e}^{12}S^{-1}$, onde S é um operador unitário, é imediato que

$$n^2 = 1, \quad \sigma^2 = -1, \quad [n, \sigma], \quad (2.183)$$

e a partir do idempotente dado pela eq.(2.179) pode-se construir o idempotente $\frac{1}{2}(1 + n)\frac{1}{2}(1 + \sigma)$. Por outro lado, perante uma α -gradação arbitrária sabemos que é possível conduzir a equação de Dirac-Hestenes (eq.(2.182)) à sua forma mais geral dada por [Mos02]

$$\boxed{\check{\partial}\psi\sigma + m\psi n = 0} \quad \psi \in \mathcal{C}\ell_{1,3}^\parallel \quad (2.184)$$

onde

$$\check{\partial}\psi = \pi_\parallel(\partial\psi)n + \pi_\perp(\partial\psi) \quad (2.185)$$

e n é claramente α -ímpar, sendo σ por sua vez um elemento α -par.

Considerando o automorfismo $\alpha(\psi) = n\hat{\psi}n^{-1}$, segue que no caso do espaço-tempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3} \simeq T_xM$, dado um referencial espacial $\{\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \mathbf{n}^3\} \in T_x^*\Sigma \simeq \mathbb{R}^{0,3}$ adaptado a $n := \mathbf{n}^0 = S\mathbf{e}^0S^{-1}$, tal automorfismo induz uma \mathbb{Z}_2 -gradação em $\mathcal{C}\ell_{1,3}$, dada por

$$\mathcal{C}\ell_{1,3}^\parallel = \text{span} \{1, \mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \mathbf{n}^3, \mathbf{n}^{12}, \mathbf{n}^{23}, \mathbf{n}^{31}, \mathbf{n}^{123}\}, \quad (2.186)$$

$$\mathcal{C}\ell_{1,3}^\perp = \text{span} \{\mathbf{n}^0, \mathbf{n}^{01}, \mathbf{n}^{02}, \mathbf{n}^{03}, \mathbf{n}^{012}, \mathbf{n}^{023}, \mathbf{n}^{031}, \mathbf{n}^{0123}\}. \quad (2.187)$$

Os campos de 1-formas $\mathbf{n}^i \in T_x^*\Sigma$ são exatamente os campos γ_\parallel^i definidos na eq.(2.66). Como no caso da α -gradação dada por $\alpha(\psi) = n\psi n^{-1}$, a componente paralela $\mathcal{C}\ell_{1,3}^\parallel$ de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ é dada por

$\mathcal{C}\ell_{1,3}^{\parallel} \simeq \mathcal{C}\ell_{0,3} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, então é imediato ver que o campo espinorial que compõe a eq.(2.184) é gerado por $\{P_{\pm}, \mathbf{n}^{ij}P_{\pm}\}$, onde $P_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{n}^{123})$ são idempotentes gerados por elementos centrais de $\mathcal{C}\ell_{0,3}$. Cada cópia \mathbb{H} de $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \simeq \mathcal{C}\ell_{0,3}$ é gerada respectivamente por $\{P_+, \mathbf{n}^{ij}P_+\}$ e $\{P_-, \mathbf{n}^{ij}P_-\}$, e portanto o campo espinorial $\psi \in \mathcal{C}\ell_{1,3}^{\parallel}$ com relação à α -gradação dada por $\alpha(\psi) = n\hat{\psi}n^{-1}$ tem a forma mais geral dada por

$$\boxed{\psi = aP_+ + b_{ij}\mathbf{n}^{ij}P_+ + cP_- + d_{ij}\mathbf{n}^{ij}P_-} \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \simeq \mathcal{C}\ell_{0,3}, \quad (2.188)$$

onde a, b_{ij}, c, d_{ij} são funções escalares com valores em \mathbb{C} .

Os possíveis valores de $\sigma \in \mathcal{C}\ell_{1,3}^{\parallel}$ são dados pelas condições dadas pelas expressões na eq.(2.183), e de acordo com os elementos de $\mathcal{C}\ell_{1,3}^{\parallel}$ dados pela eq.(2.186) segue imediatamente que

$$\boxed{\sigma = a_3\mathbf{n}^{12} + a_1\mathbf{n}^{23} + a_2\mathbf{n}^{31}} \in \text{SU}(2), \quad (2.189)$$

onde $a_i \in \mathbb{C}$, já que pela condição $\sigma^2 = -1$ temos $(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 = 1$, o que faz com que $\sigma \in \text{SU}(2)$ seja um quatérnio unitário.

A ação dos operadores de projecção paralela e ortogonal sobre o operador de Dirac, no caso da α -gradação dada por $\alpha(\psi)_n = n\hat{\psi}n^{-1}$ é definida como [Mos02]

$$\pi_{\parallel}(\partial) = \pi_{\parallel}(\mathbf{n}^{\mu}\partial_{\mu}) := \pi_{\parallel}(\mathbf{n}^{\mu})\partial_{\mu}, \quad \pi_{\perp}(\partial) = \pi_{\perp}(\mathbf{n}^{\mu}\partial_{\mu}) := \pi_{\perp}(\mathbf{n}^{\mu})\partial_{\mu}. \quad (2.190)$$

Lembramos que $\mathbf{n}^0 \equiv n$. Portanto a eq.(2.184) pode ser escrita como

$$\mathbf{n}^k \partial_k \psi n \sigma + n \partial_n \psi \sigma + m \psi n = 0. \quad (2.191)$$

Multiplicando-se a equação acima à direita por n segue que

$$\mathbf{n}^k \partial_k \psi \sigma + n \partial_n \psi n \sigma + m \psi = 0, \quad (2.192)$$

que é reconduzida à seguinte expressão:

$$\boxed{\mathbf{n}^k \partial_k \psi + \partial_n \hat{\psi} = m \psi \sigma} \quad (2.193)$$

Essa é a equação de Dirac para a α -gradação dada por $\alpha(\psi) = n\hat{\psi}n^{-1}$, e motivada pela decomposição do espaço-tempo, cujos campos espinoriais que a satisfazem são dados pela eq.(2.188).

Capítulo 3

Álgebras de Grassmann e de Clifford Estendidas

3.1 Apresentação

As álgebras de Grassmann¹ e de Clifford têm tido papel fundamental na descrição de teorias da física moderna, [Bay96, Ben87, Hes91a, Bay96, Bay95a, Bay95b] desde sua descoberta [Gra94, Cli78].

A álgebra vetorial foi introduzida por Gibbs em 1886 na tentativa de incorporar a teoria de Grassmann [Gra94], capaz de abordar a geometria afim e a geometria projetiva, e a teoria de Hamilton, acerca das rotações espaciais via quaternions [Ham53]. Tal formalismo apresenta certas incoerências e limitações: além de somente valer para o espaço tridimensional, o produto vetorial não define uma álgebra, já que o produto de dois vetores em um plano dá origem a um vetor ortogonal ao plano. Além disso o produto vetorial entre dois vetores polares² se comporta como um vetor axial, que *não* muda de orientação perante inversão de orientação do espaço. Podemos verificar que o produto vetorial entre dois vetores axiais é um vetor axial, enquanto que o produto vetorial entre um vetor axial e um vetor polar origina um vetor polar. Torna-se então necessário apresentarmos uma formulação consistente de maneira a abordar um formalismo algébrico adequado à questão da orientação de vetores (e multivetores) no espaço.

Neste capítulo é apresentada uma formulação matemática precisa do conceito de quiralidade associado às álgebras de Grassmann e de Clifford, que é definido como a multiplicação por um pseudoescalar³ ε que satisfaz $\varepsilon^2 = 1$. Note que, embora elementos de $\Lambda^n(V)$ sejam comumente denominados pseudoescalares, utilizaremos tal denominação exclusiva para ε , enquanto que elementos de $\Lambda^n(V)$ serão chamados de n -formas no que se segue.

Nosso ponto de vista traz uma nova interpretação sobre conceitos tradicionais e suas aplicações

¹Álgebras de Grassmann são álgebras exteriores munidas de uma estrutura métrica.

²Vetores polares são elementos de V que mudam de sinal perante inversão da orientação do espaço, podendo ser escritos como $\mathbf{v} = v^a \mathbf{e}_a$.

³Pseudoescalares são escalares que mudam de sinal perante inversão de orientação do espaço.

são promissoras. Em particular, a formulação da teoria eletromagnética neste formalismo é mais natural, correta, precisa e rica geometricamente, ao usarmos formas diferenciais intrinsecamente munidas de quiralidade [Bay96, Mis73, Bur85, Pos72, Kie00, Kie04a, Kie04b, Kie04c, Kie04d], denominadas de agora em diante *formas quirais*. A formulação da eletrodinâmica em um espaço destituído de uma métrica envolve interpretações geométricas e físicas mais claras. Tal formalismo, descrito em alguns artigos [Jan96a], motiva uma nova formulação usando o colchete de Rota [Cot00, Rot85]. Apresentamos tal colchete como um pseudoescalar que mune formas diferenciais e multivetores de quiralidade, em álgebras de Clifford construídas sobre espaços de Peano⁴. Na notação utilizada no Cap. (4) e denotando o colchete de Rota por $[\]$, consideraremos que o espaço de Peano seja então munido de uma métrica, e logo a seguir desenvolvemos o formalismo sobre a álgebra $\mathcal{C}\ell(V, [\], g)$ ao invés de $\mathcal{C}\ell(V, g)$. Tomamos emprestado a palavra *quiral* para denominar aquelas formas diferenciais (ou multivetores) multiplicadas pelo pseudoescalar, e que portanto estão sujeitas à mudança de sinal quando da inversão de orientação do espaço. Maxwell denomina por *perversão* a operação de inversão na orientação do espaço ([Max54], p.26).

As formas diferenciais quirais serão importantes na formulação da teoria eletromagnética, pois podemos verificar as propriedades dos campos \mathbf{E} , \mathbf{B} e excitações \mathbf{D} , \mathbf{H} , esses últimos descritos por formas quirais, o que resulta em uma interpretação propícia da teoria. O formalismo que apresenta alguns rudimentos das álgebras de Grassmann quirais tem uma apresentação didática (e não por isso menos rigorosa) nos artigos de Jancewicz [Jan96b, Jan96a], e no contexto que se utiliza do colchete de Rota [Rot85] tal formalismo também pode ser explorado, onde se introduz o produto regressivo [Gra94, Cot00]. Após definirmos formas diferenciais quirais, que mudam de sinal perante inversão de orientação no espaço, investigamos mais detalhadamente a álgebra exterior estendida, construída como uma soma direta de duas cópias (quiral e aquiral) da álgebra exterior.

Apresentamos os operadores duais de quasi-Hodge e também seus parceiros quirais. Após introduzirmos uma métrica no espaço de Peano, apresentamos a álgebra de Grassmann e a álgebra de Clifford estendidas, juntamente com os operadores duais de Hodge quirais. Um análogo da lei de Morgan para a álgebra de Grassmann-Cayley, que é definida como sendo a álgebra de Grassmann estendida munida do produto regressivo, é introduzido à luz do presente formalismo. Enunciamos e provamos uma proposição que afirma que o elemento de volume do contraespaço é escalar ou pseudoescalar, dependendo se a dimensão do espaço em questão for respectivamente par ou ímpar. Finalmente investigamos a imersão do espaço vetorial V em duas cópias de V , a saber, $V \oplus \mathring{V}$, para que assim seja possível a introdução correta das álgebras de Clifford nesse contexto. As unidades de V e \mathring{V} são distintas, e também as métricas em cada um desses espaços. Além disso a métrica que toma valores em subespaços distintos de $V \oplus \mathring{V}$ é definida ser identicamente nula, a fim de evitar inconsistências algébricas. De maneira natural, a métrica em $V \oplus \mathring{V}$ é a soma das métricas em V e \mathring{V} , e também a unidade em $V \oplus \mathring{V}$ é a soma das unidades em V e \mathring{V} , consideradas distintas. Ao considerarmos $V \simeq \mathbb{R}^{p,q}$, cada um dos objetos que age sobre $V \oplus \mathring{V}$ mostra-se ser um elemento da álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{p+1,q+1}$, onde essa última é a álgebra de Clifford estendida sobre $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$. Dessa maneira as transformações conformes e a teoria dos *twistors* surgem naturalmente através da

⁴Definidos como sendo o espaço vetorial original V munido do colchete de Rota.

estrutura da AC estendida sobre $\mathbb{R}^{p,q}$.

Podemos também definir uma métrica diferente em $V \oplus \mathring{V}$, a fim de que uma estrutura hiperbólica seja definida em $V \oplus \mathring{V}$ [Rod95]. A partir da base de Witt nesse novo espaço métrico, definimos as \mathbb{D} -álgebras de Clifford, demonstrando o caráter hiperbólico desse espaço, e sua relação com a álgebra dos números perplexos.

O produto regressivo é então introduzido juntamente com o contraespaço, nos fornecendo o pré-requisito formal para definirmos álgebras de Clifford sobre o contraespaço, ilustrando assim seu caráter dual associado ao contraespaço. Definimos as dualidades e as codualidades entre o espaço e o contraespaço, a partir do operador de Hodge. Também estabelecemos o caráter dual dos operadores de contração, definidos no espaço e no contraespaço. Definimos o operador codiferencial em termos do produto regressivo e subseqüentemente verificamos que o laplaciano de Hodge-de Rham é corretamente definido também neste contexto como o anticomutador entre os operadores diferencial e codiferencial. Vemos como a homologia e cohomologia de de Rham surgem através desses conceitos.

Descrevemos a teoria eletromagnética utilizando as formas quirais, escrevendo as equações de Maxwell no vácuo e definindo algumas entidades físicas como, por exemplo, densidade de energia, torção e spin topológicos. Em meios materiais lineares, o tensor constitutivo é introduzido a partir do operador de Hodge quiral, tendo as mesmas propriedades e simetrias do tensor de Riemann. Depois de introduzir as equações de onda generalizadas para os potenciais, campos e excitações em meios lineares, descrevemos o tensor constitutivo para qualquer meio linear (em particular aqueles que apresentam atividade óptica natural) a partir da métrica do espaço-tempo. O problema inverso, o da destilação da métrica a partir do tensor constitutivo já foi tratado em [Heh99, Heh00]. Com o uso de uma métrica efetiva do espaço-tempo, tratamos o problema da propagação da luz em meios cristalinos como uma questão sobre a propagação da luz no vácuo, em um espaço curvo munido de uma métrica efetiva e vice-versa.

Finalmente, de posse das álgebras de Clifford estendidas, construiremos a superálgebra de Poincaré (SAP) com base na generalização do Princípio da Trindade, mostrando como a SAP emerge de uma maneira natural a partir da geometria do espaço-tempo. Atualmente a procura por uma teoria fundamental que descreva a natureza física do universo exige um conhecimento matemático profundo e, sobretudo, a interface entre física e matemática. Por exemplo, ao se introduzir variáveis de Grassmann, a supersimetria combina as simetrias de calibre e a simetria de Lorentz, o que é *a priori*, proibido pelo teorema (*no-go*) de Coleman-Mandula [Col67, Kak93]. De fato, todas as partículas são classificadas de acordo com as estatísticas às quais elas estão submetidas, a saber Fermi-Dirac ou Bose-Einstein. A supersimetria relaciona entre bósons e férmions dentro de uma álgebra de Lie graduada, cuja introdução permitiu que operadores de simetria em $\mathbb{R}^{1,3}$ fossem ‘agrupados’ com os de simetria interna através do teorema de Coleman-Mandula, já que suas hipóteses não afirmam nada sobre variáveis de Grassmann. As extensões de calibre das teorias supersimétricas, mais conhecidas como teorias de supergravidade, fornecem uma estrutura natural para a unificação de todas as interações fundamentais numa única teoria [Gre87, Wei95, Web83, Fer97]. Como base das teorias supersimétricas, a superálgebra de Poincaré 4-dimensional foi discutida pela primeira vez no artigo

de Julius Wess e Bruno Zumino [Wes70], estimulando a partir daí um grande fluxo de investigações e resultados acerca de teorias de campos em física de partículas [Fer97].

Por outro lado, o Princípio da Trialidade de Cartan [Car37, Car66, Che54], baseado no grupo $SO(8)$ e seu recobrimento duplo $Spin(8)$, tem sido bastante aplicado a recentes teorias físicas. Por exemplo, a única simetria no calibre do cone de luz (sob as condições de Majorana-Weyl) é advinda a partir de ações do grupo $Spin(8)$, e em (1+9) dimensões o *massless little group* [Del99] é o $SO(8)$. Somente em um espaço de dimensão oito é que bósons e férmions têm o mesmo número de graus de liberdade. O princípio supersimétrico generalizado vem do Princípio da Trialidade, que diz que bósons e férmions são equivalentes perante o mapa de trialidade, viz., um automorfismo de ordem três que permuta ciclicamente vetores (bósons) e *semispinors* (férmions) que carregam representações não-equivalentes do grupo $Spin(8)$. O mapa de trialidade é baseado no produto de Chevalley. Usando esse formalismo [Knu98] e sua generalização [Cru91, Cru83], podemos obter a superálgebra de Poincaré de uma maneira geométrica *independentemente* das condições através das quais ela é obtida em um contexto físico, como por exemplo, o fato de que a superálgebra de Poincaré é a única álgebra de Lie graduada que determina as simetrias da matrix- S de maneira consistente com uma TQC relativística [Haa75]. Isso traz à tona o fato de que a superálgebra de Poincaré é consequência de uma estrutura algébrica que envolve os *spinors* puros através do Princípio da Trialidade e suas generalizações, na álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{8,0} \simeq \mathcal{M}(16, \mathbb{R})$. juntamente com uma interpretação geométrica clara, através do formalismo dos *spinors* puros e álgebras de Clifford. Todas as informações relevantes sobre o Princípio da Trialidade estão contidas no Apêndice B.

3.2 Espaços de Peano

Seja V um espaço vetorial ($\dim V = n$) sobre \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Escolhemos uma base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V e denotamos V^* seu espaço dual, que tem uma base $\{\mathbf{e}^i\}$ que satisfaz $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i$. Já que $\dim V^* = \dim V$, segue que $V \simeq V^*$.

Um espaço de Peano é definido como sendo um par $(V, [\])$, onde $[\]$ é uma forma n -linear alternada sobre \mathbb{R} , o colchete de Rota [Rot85], definido como o mapa $[\] : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{n \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}$

que possui as seguintes propriedades:

1. Para todo $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$,

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n] = a[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n] + b[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n],$$
2. $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = \text{sign}(\sigma)[\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \mathbf{v}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(n)}]$, onde $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ é uma permutação.

Um espaço de Peano é dito *padrão* se existir uma base $\{\mathbf{u}_i\}$ de V tal que $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] \neq 0$. A menos que dito explicitamente, adotaremos no restante deste capítulo espaços de Peano padrão, que serão denotados de agora em diante unicamente por V . Os vetores \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 são linearmente

independentes se existir uma base de $n - 2$ vetores $\mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n$ tais que $[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n] \neq 0$. O colchete $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ calcula o volume do paralelepípedo cujos lados são os \mathbf{v}_i . Ao tomarmos outra base $\{\mathbf{v}_i\}$ de V , então $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = \det(v_i^j) [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]$, onde $\mathbf{v}_i = v_i^j \mathbf{e}_j$. O número $\det(v_i^j)$ é positivo [negativo] se $\{\mathbf{e}_\mu\}$ e $\{\mathbf{v}_\mu\}$ tiverem mesma [oposta] orientação, onde definimos a orientação em V como uma escolha em \mathbb{Z}_2 de classes de equivalência⁵ de bases em V . Qualquer espaço vetorial V tem somente duas possibilidades de orientação, dependendo do sinal de $\det(v_i^j)$, e qualquer permutação par de elementos da base induz a mesma orientação. Uma base $\{\mathbf{e}_i\}$ pode ser transformada ($\mathbf{e}_i \mapsto A\mathbf{e}_i$, onde A denota um homomorfismo que preserva a orientação), e ainda representará a mesma orientação, já que o colchete é não-nulo. Chamaremos $\{\mathbf{e}_\mu\}$ uma base unimodular se $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n] = 1$, cujo sinal irá depender da orientação de V e assim terá que se distinguir da unidade $1 \in \mathbb{R}$. De agora em diante denotaremos $\varepsilon = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]$. O quadrado de tal elemento, ε^2 , não muda de sinal perante inversão de orientação e $\varepsilon^2 = 1$. O mapa $\varepsilon \mapsto -\varepsilon$ corresponde a uma perversão, i.e., uma inversão de orientação em V e é claro que $\varepsilon = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n] = (-1)^{i-1}[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \check{\mathbf{e}}_i, \dots, \mathbf{e}_n]$, onde $\check{\mathbf{e}}_i$ indica que \mathbf{e}_i está ausente do colchete. Pelo fato de que a todo espaço vetorial V está associado naturalmente um espaço vetorial dual V^* , todas as considerações feitas até o momento podem ser feitas, *mutatis mutandis*, para o espaço dual V^* , e utilizaremos daqui em diante a mesma notação para o colchete de Rota $[\] \equiv [\]^* : \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{n \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{R}$, definido agora a partir do espaço dual.

Considere agora uma cópia de V^* canonicamente isomorfa a V^* , que será denotada por \mathring{V}^* , munida de uma base $\{\mathring{\mathbf{e}}^i\}$. Essa nova base mapeia vetores em pseudoescalares, de acordo com a definição

$$\mathring{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_j) = (-1)^{i-1}[\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \check{\mathbf{e}}_i, \dots, \mathbf{e}_n] = \varepsilon \delta_j^i = \varepsilon \mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j). \quad (3.1)$$

Temos então a relação

$$\boxed{\mathring{\mathbf{e}}^i = \varepsilon \mathbf{e}^i} \quad (3.2)$$

As 1-formas de \mathring{V}^* mudam de sinal perante inversão de orientação do espaço⁶. A multiplicação por ε é um isomorfismo entre V^* e \mathring{V}^* .

3.3 A álgebra exterior estendida

Nesta seção estabelecemos a noção de álgebra exterior estendida, usando o pseudoescalar ε . Também definimos os operadores de quasi-Hodge quirais.

3.3.1 O produto exterior a partir do colchete de Rota

Podemos construir a álgebra exterior a partir de um espaço de Peano dual V^* , introduzindo classes de equivalência de seqüências ordenadas de 1-formas, usando o colchete [Fau02]. Dadas então seqüências

⁵ Duas bases são assim ditas equivalentes se tiverem a mesma orientação.

⁶ Uma 1-forma quiral $\mathring{\mathbf{e}}^i$ é definida diretamente através de sua ação sobre um vetor de V e $\mathring{\mathbf{e}}^i(\cdot) = (-1)^{i-1}[\cdot, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \check{\mathbf{e}}_i, \dots, \mathbf{e}_n]$.

de 1-formas $(\mathbf{a}^i)_{i=1}^k, (\mathbf{b}^i)_{i=1}^k \in V^*$, dizemos que as duas seqüências são equivalentes, e denotamos por $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^k \sim \mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^k$, se tivermos $[\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^k, \mathbf{e}^{k+1}, \dots, \mathbf{e}^n] = [\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^k, \mathbf{e}^{k+1}, \dots, \mathbf{e}^n]$. O produto exterior⁷ entre duas 1-formas $\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j \in V^*$ é definido a partir do colchete de Rota como o espaço quociente [Fau02]

$$\boxed{\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j = (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) \pmod{\sim}} \quad (3.3)$$

onde $(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) \in V^* \times V^*$ denota o produto cartesiano entre \mathbf{e}^i e \mathbf{e}^j . As propriedades usuais do produto exterior podem ser demonstradas a partir da definição dada pela eq.(3.3). Definimos uma k -forma indutivamente, através do produto exterior de k 1-formas. Cada k -forma pertence a $\Lambda^k(V)$ e a álgebra exterior é naturalmente definida nesse contexto como

$$\boxed{\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V)} \quad (3.4)$$

Analogamente definimos k -formas quirais, elementos de $\mathring{\Lambda}^k(V)$, como produto exterior de elementos de V^* e um número ímpar de elementos em \mathring{V}^* . Uma forma diferencial é dita quiral se ela for multiplicada por ε . Também definimos a álgebra exterior quiral, cujos elementos trocam de sinal perante inversão na orientação do espaço:

$$\boxed{\mathring{\Lambda}(V) := \bigoplus_{k=0}^n \mathring{\Lambda}^k(V)} \quad (3.5)$$

Por construção a álgebra exterior $\mathring{\Lambda}(V)$ é quiral. Denotamos $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$ (escalares), $\mathring{\Lambda}^0(V) = \varepsilon\mathbb{R}$ (pseudoescalares), $\Lambda^1(V) = V^*$ e $\mathring{\Lambda}^1(V) = \mathring{V}^*$. A álgebra exterior estendida é definida como

$$\boxed{\check{\Lambda}(V) := \Lambda(V) \oplus \mathring{\Lambda}(V)} \quad (3.6)$$

Tal álgebra é $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -graduada, onde a primeira \mathbb{Z}_2 -gradação diz respeito à quiralidade das formas e a segunda diz respeito aos subespaços $\Lambda^k(V)$, com k par ou ímpar. Também são verificadas as inclusões

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) \wedge \Lambda^l(V) &\hookrightarrow \Lambda^{k+l}(V), \\ \Lambda^k(V) \wedge \mathring{\Lambda}^l(V) &\hookrightarrow \mathring{\Lambda}^{k+l}(V), \\ \mathring{\Lambda}^k(V) \wedge \mathring{\Lambda}^l(V) &\hookrightarrow \Lambda^{k+l}(V), \end{aligned} \quad (3.7)$$

o que mostra que a álgebra exterior quiral $\mathring{\Lambda}(V)$ não é subálgebra da álgebra exterior estendida $\check{\Lambda}(V)$, embora $\Lambda(V)$ o seja.

Da eq.(3.2), a multiplicação pelo pseudoescalar ε dá origem a um isomorfismo natural entre $\Lambda(V)$ e $\mathring{\Lambda}(V)$. Com efeito, formas diferenciais são levadas em formas quirais através da multiplicação por ε :

$$\mathring{\Lambda}^k(V) = \varepsilon\Lambda^k(V) \quad (1 \leq k \leq n). \quad (3.8)$$

⁷Grassmann [Gra94] em seu trabalho original denominou o produto exterior de *produto progressivo*.

Da relação $\varepsilon^2 = 1$, vemos que o conjunto $\{1, \varepsilon\}$ gera a álgebra real $\mathbb{D} := \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ dos números hiperbólicos (ou perplexos, ou duplexos, ou de Study) [Fje86, Hes91a, Kel94]. Um elemento de \mathbb{D} pode ser escrito como $a + b\varepsilon$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Dessa maneira a álgebra

$$\boxed{\check{\Lambda}(V) := \Lambda(V) \oplus \mathring{\Lambda}(V) = \Lambda(V) \oplus \varepsilon \Lambda(V)} \quad (3.9)$$

é escrita como

$$\boxed{\check{\Lambda}(V) = \mathbb{D} \otimes \Lambda(V)} \quad (3.10)$$

Quando $V \simeq \mathbb{R}^3$, $\dim_{\mathbb{R}} \check{\Lambda}(V) = 16$. Já que o espaço dual estendido $V^* \oplus \mathring{V}^*$ é $2n$ -dimensional, sendo gerado por n 1-formas aquirais juntamente com n 1-formas quirais, então necessitamos somente da álgebra exterior gerada pelas n 1-formas aquirais, pois as outras 1-formas (quirais) podem ser obtidas através da multiplicação de 1-formas aquirais por ε .

Dada uma base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V , definimos o espaço vetorial \mathring{V} como o espaço gerado pelos vetores $\mathring{\mathbf{e}}_i := \varepsilon \mathbf{e}_i$. Todo o desenvolvimento feito nesta seção e nas seções posteriores deste capítulo, utilizando formas diferenciais pode ser feito *ipsis literis* para campos vetoriais.

3.3.2 Isomorfismos duais de quasi-Hodge: operadores duais de Hodge quirais

Considere um n -vetor $\Theta = a \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n$ e uma n -forma $\eta = a' \mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n$, onde $a, a' \in \mathbb{R}$. Denotando a contração à esquerda por \lrcorner , temos a relação

$$\tilde{\eta} \lrcorner \Theta = aa' (\mathbf{e}^n \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^1) \lrcorner (\mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) = aa', \quad (3.11)$$

tal que

$$0 \neq \tilde{\eta} \lrcorner \Theta = \begin{cases} > 0, & \text{se } a > 0 \text{ e } a' > 0, \text{ ou } a < 0 \text{ e } a' < 0, \\ < 0, & \text{se } a > 0 \text{ e } a' < 0, \text{ ou } a < 0 \text{ e } a' > 0. \end{cases}$$

Podemos relacionar a orientação de V com a do dual V^* . Dizemos que as orientações de V e V^* , que são respectivamente determinadas por Θ e η , são compatíveis se $\tilde{\eta} \lrcorner \Theta > 0$. Assumindo que as orientações de V e V^* são compatíveis, ao escolhermos uma orientação para um desses espaços, a orientação do outro está completamente definida. Escolhemos η tal que $\tilde{\eta} \lrcorner \Theta = 1$.

Denotando $\Lambda_k(V) = \Lambda^k(V^*)$, definimos os operadores duais quasi-Hodge como

$$\begin{aligned} \underline{\star} : \Lambda_k(V) &\rightarrow \Lambda^{n-k}(V) \\ \psi_k &\mapsto \underline{\star} \psi_k = \widetilde{\psi}_k \lrcorner \eta \end{aligned} \quad (3.12)$$

($\underline{\star} 1 = \eta$) e

$$\begin{aligned} \overline{\star} : \Lambda^k(V) &\rightarrow \Lambda_{n-k}(V) \\ \psi^k &\mapsto \overline{\star} \psi^k = \widetilde{\psi}^k \lrcorner \Theta \end{aligned} \quad (3.13)$$

$(\bar{\kappa}1 = \Theta)$. Podemos facilmente provar que

$$\underline{\kappa}\bar{\kappa} = \bar{\kappa}\underline{\kappa} = (-1)^{k(n-k)}1. \quad (3.14)$$

Analogamente definimos os operadores duais quasi-Hodge quirais como

$$\begin{aligned} \underline{\kappa}_\varepsilon : \Lambda_k(V) &\rightarrow \hat{\Lambda}^{n-k}(V) \\ \psi_k &\mapsto \underline{\kappa}_\varepsilon \psi_k = \varepsilon \widetilde{\psi_k} \lrcorner \eta \end{aligned} \quad (3.15)$$

$(\underline{\kappa}_\varepsilon 1 = \varepsilon \eta)$ e

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_\varepsilon : \hat{\Lambda}^k(V) &\rightarrow \Lambda_{n-k}(V) \\ \varepsilon \psi^k &\mapsto \bar{\kappa}_\varepsilon (\varepsilon \psi^k) = \widetilde{\psi^k} \lrcorner \Theta \end{aligned} \quad (3.16)$$

$(\bar{\kappa}_\varepsilon \varepsilon = \Theta)$. Por construção temos $\underline{\kappa}_\varepsilon = \varepsilon \underline{\kappa}$ e $\bar{\kappa}_\varepsilon = \varepsilon \bar{\kappa}$.

3.4 As álgebras de Grassmann e Clifford estendidas

Considerando um isomorfismo $V \simeq V^*$, definimos uma correlação como uma transformação linear $\tau : V \rightarrow V^*$, que induz uma métrica (bilinear, simétrica, não-degenerada) $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que, quando avaliada sobre vetores de uma base ortonormal, pode ser escrita como $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \tau(\mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_j) = g_{ik} \mathbf{e}^k(\mathbf{e}_j) = g_{ik} \delta_j^k = g_{ij}$. A álgebra de Grassmann estendida é definida como a álgebra exterior estendida munida de uma métrica estendida. O mapa $\tau : V \rightarrow V^*$ não é um isomorfismo canônico entre V e V^* . Já que dispomos de duas cópias de V^* (a saber V^* e \hat{V}^*), definimos uma correlação com valores em cada um desses espaços:

$$\begin{aligned} \tau : V &\rightarrow V^* & \hat{\tau} : V &\rightarrow \hat{V}^* \\ \mathbf{e}_i &\mapsto \tau(\mathbf{e}_i) = g_{ij} \mathbf{e}^j & \mathbf{e}_i &\mapsto \hat{\tau}(\mathbf{e}_i) = \hat{g}_{ij} \hat{\mathbf{e}}^j = \varepsilon \hat{g}_{ij} \mathbf{e}^j \end{aligned}$$

Definimos métricas distintas que respectivamente envolvem 1-formas aquirais ou 1-formas quirais:

$$\begin{aligned} g : V^* \times V^* &\rightarrow \mathbb{R} & \hat{g} : \hat{V}^* \times \hat{V}^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) &\mapsto g(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = g^{ij} & (\hat{\mathbf{e}}^i, \hat{\mathbf{e}}^j) &\mapsto \hat{g}(\hat{\mathbf{e}}^i, \hat{\mathbf{e}}^j) = \hat{g}^{ij} \end{aligned}$$

(Por abuso de notação usamos a mesma notação tanto para a métrica definida em $V \times V$ quanto em $V^* \times V^*$.) Definimos ainda as métricas $\overset{\varepsilon}{g} : \hat{V}^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ e $\overset{\hat{g}}{g} : V^* \times \hat{V}^* \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo identicamente nulas, de modo que

$$\overset{\varepsilon}{g}(\varepsilon \mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = 0 = \overset{\hat{g}}{g}(\mathbf{e}^i, \varepsilon \mathbf{e}^j). \quad (3.17)$$

Os espaços $V^* \times \hat{V}^*$ e $\hat{V}^* \times V^*$ são portanto isotrópicos e várias aplicações de tais espaços advêm de sua estrutura isotrópica peculiar. Podemos citar a construção dos espinores puros [Ben87]

Lembrando que $V \simeq \mathbb{R}^{p,q}$ e que a álgebra $\check{\Lambda}(V)$ foi definida através da eq.(3.9), os operadores $\Upsilon : \check{\Lambda}(V) \rightarrow \check{\Lambda}(V)$ admitem uma representação fundamental

$$\rho(\Upsilon) = \begin{pmatrix} \Upsilon_1 & \Upsilon_2 \\ \Upsilon_3 & \Upsilon_4 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

que age sobre elementos $\begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix}$, onde $\psi \in \Lambda(V)$ e $\phi \in \dot{\Lambda}(V)$. Os operadores Υ_d ($d = 1, \dots, 4$) são elementos de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ definidos através dos mapas

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 : \Lambda(V) &\rightarrow \Lambda(V), & \Upsilon_2 : \dot{\Lambda}(V) &\rightarrow \Lambda(V) \\ \Upsilon_3 : \Lambda(V) &\rightarrow \dot{\Lambda}(V), & \Upsilon_4 : \Lambda(V) &\rightarrow \dot{\Lambda}(V) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Através do Teorema da Periodicidade definido em (1.44), vemos que $\Upsilon \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R}) \otimes \mathcal{C}\ell_{p,q} \simeq \mathcal{C}\ell_{1,1} \otimes \mathcal{C}\ell_{p,q} \simeq \mathcal{C}\ell_{p+1,q+1}$, e já que de acordo com a literatura [Abl82, Kel97b], os *spinors* (algébricos) associados a $\mathcal{C}\ell_{p+1,q+1}$ definem os *twistors*, os ideais de $\check{\Lambda}(V)$ são úteis também para descrevermos *twistors* quando $\dim V = 1, 2, 4$, e de maneira decorrente suas amplas aplicações na Física [Abl82, Beg88, Bet00, Ced93, Kel97b, Las92].

Podemos ainda obter uma representação $\rho : \dot{\Lambda}(V) \rightarrow \text{End } \check{\Lambda}(V)$ do pseudoescalar $\varepsilon \in \dot{\Lambda}^0(V)$, como

$$\rho(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

pelo fato de que ε leva formas diferenciais quirais em formas que não apresentam quiralidade, e vice-versa. Com efeito, dados $\psi \in \Lambda(V)$ e $\phi \in \dot{\Lambda}(V)$, segue que

$$\rho(\varepsilon) \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \in \Lambda(V) \oplus \dot{\Lambda}(V) \simeq \check{\Lambda}(V). \quad (3.21)$$

Agora o formalismo será descrito tanto matricialmente quanto algebricamente, e iremos de uma notação a outra livremente, onde está subentendida a notação da Seção (3.4). Denotando a unidade de V^* por 1 e a unidade de \dot{V}^* por $\dot{1}$, representamo-las respectivamente por

$$\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\dot{1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

A unidade de $V^* \oplus \dot{V}^* \simeq \mathbb{D} \otimes V^*$ é dada por $\check{1} = 1 + \dot{1}$, que tem como representação $\rho(\check{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Naturalmente representamos elementos das bases de V^* e \dot{V}^* respectivamente por

$$\rho(\mathbf{e}^i) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\dot{\mathbf{e}}^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^i \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Representando o pseudoescalar como foi feito na eq.(3.20), podemos verificar várias propriedades

que definem a álgebra de Clifford estendida. O produto de Clifford é definido em V^* por

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j + \mathbf{e}^j \mathbf{e}^i &= \rho^{-1} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{e}^i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{e}^j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \rho^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j + \mathbf{e}^j \mathbf{e}^i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \rho^{-1} \begin{pmatrix} 2g(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2g(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

e em \mathring{V}^* por

$$\begin{aligned} \mathring{\mathbf{e}}^i \mathring{\mathbf{e}}^j + \mathring{\mathbf{e}}^j \mathring{\mathbf{e}}^i &= \rho^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^i \end{pmatrix} \right] \\ &= \rho^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j + \mathbf{e}^j \mathbf{e}^i \end{pmatrix} = \rho^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2g(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) \end{pmatrix} \\ &= 2g(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) \mathring{\mathbf{1}}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde representamos a métrica em V^* e em \mathring{V}^* respectivamente por

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathring{g}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

As representações de g e \mathring{g} são relacionadas por

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \rho(\varepsilon) \rho(\mathring{g}) \rho(\varepsilon)^{-1}, \quad (3.27)$$

o que mostra que, analogamente às transformações conformes de $\mathbb{R}^{p,q}$ [Hes91b, Mak89, Cra91, Klo74, Tel96], as métricas se relacionam por representações adjuntas. A representação da métrica $\mathring{g} = g + \mathring{g}$ em $V \oplus \mathring{V}$ é então dada por

$$\rho(\mathring{g}) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Álgebras de Clifford associadas a formas aquirais e quirais são portanto introduzidas a partir das relações (3.24, 3.25) como

$$\mathbf{e}^i \mathbf{e}^j + \mathbf{e}^j \mathbf{e}^i = 2g^{ij} \mathbf{1}, \quad \mathring{\mathbf{e}}^i \mathring{\mathbf{e}}^j + \mathring{\mathbf{e}}^j \mathring{\mathbf{e}}^i = 2\mathring{g}^{ij} \mathring{\mathbf{1}}, \quad (3.29)$$

$$\mathbf{e}^i \mathring{\mathbf{e}}^j + \mathring{\mathbf{e}}^j \mathbf{e}^i = 0, \quad (3.30)$$

onde essa última relação representa a def.(3.17).

A tripla $\mathbb{D} \otimes \mathcal{C}\ell_{p,q} = (\mathring{\Lambda}(V), g, \text{eqs.}(3.29, 3.30))$ não é uma álgebra de Clifford. Por exemplo, considerando $\mathcal{C}\ell_{1,0} \simeq \mathbb{D}$, já que $\mathbb{D} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, então $\mathbb{D} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,0} \simeq \mathbb{D} \oplus \mathbb{D}$, que não é uma álgebra de Clifford. Pode-se mostrar [Mos03a] que todas as subálgebras de uma álgebra de Clifford são álgebras de Clifford, ou álgebras do tipo $\mathbb{D} \otimes \mathcal{C}\ell_{r,s}$, ou do tipo $(\mathbb{D} \otimes \mathbb{D}) \otimes \mathcal{C}\ell_{r,s}$. Daí a importância de

definirmos e investigarmos as álgebras do tipo $\mathbb{D} \otimes \mathcal{C}\ell_{p,q}$, que nos permitem classificar de maneira completa todas as subálgebras de uma álgebra de Clifford. Mesmo $\mathbb{D} \otimes \mathcal{C}\ell_{p,q}$ não sendo uma álgebra de Clifford, como já definimos álgebras de Clifford no contexto dado pelas eqs.(3.24, 3.25), podemos definir uma álgebra de Clifford hiperbólica agora sobre o espaço $V \oplus \dot{V} \simeq \mathbb{D} \otimes V$, munindo o espaço vetorial $V \oplus \dot{V}$ com uma métrica bem peculiar, diferente da def.(3.28). Isso será investigado em detalhes na Sec. (3.7).

As três definições de álgebras de Clifford, dadas nas Secs. (1.5, 1.6, 1.7), podem ser agora investigadas quanto à possibilidade de definir, também, álgebras de Clifford quirais. O caso da definição (I), da Sec. (1.5), já foi explicitado pelas eqs.(3.29, 3.30), provenientes das eqs.(3.24, 3.25).

A definição (II), vista na Sec. (1.6) pode também ser usada para definir ACs quirais. De fato, considerando \dot{J} o ideal de $\dot{T}(V)$ ⁸ que consiste na soma dos termos da forma $\dot{T}_1 \otimes \{\dot{\mathbf{v}} \otimes \dot{\mathbf{v}} - \dot{g}(\dot{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{v}})\} \otimes \dot{T}_2$ tais que $\dot{T}_1, \dot{T}_2 \in \dot{T}(V)$, $\dot{\mathbf{v}} \in \dot{V}$. Portanto a álgebra de Clifford associada a \dot{V} , denotada por $\mathcal{C}\ell_{\circ}(\dot{V}, \dot{g})$ é definida por

$$\boxed{\mathcal{C}\ell_{\circ}(\dot{V}, \dot{g}) = \dot{T}(V)/\dot{J}} \quad (3.31)$$

A definição (III), vista na Sec. (1.7) e que concerne os operadores de criação e aniquilação, é útil para definir a álgebra de Clifford quiral. Tome $\mathbf{v} \in V$ e $\dot{\psi}, \dot{\phi} \in \dot{\Lambda}(V)$. Definimos o operador de criação quiral $\dot{\mathbf{E}} : V \rightarrow \text{End}(\dot{\Lambda}(V))$ como

$$\boxed{\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{v})(\dot{\phi}) = \mathbf{v} \wedge \dot{\phi}} \quad (3.32)$$

e o operador de aniquilação quiral $\dot{\mathbf{I}} : V \rightarrow \text{End}(\dot{\Lambda}(V))$ como

$$\boxed{\dot{\mathbf{I}}(\alpha)(\dot{\psi}) = \alpha \lrcorner \dot{\psi}} \quad (3.33)$$

Podemos ver que os operadores $\dot{\mathbf{E}}$ anticomutam, i.e., $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{u})\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{v}) + \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{v})\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{u}) = 0$ e que os operadores de aniquilação comutam, i.e., $\dot{\mathbf{I}}(\alpha)\dot{\mathbf{I}}(\beta) + \dot{\mathbf{I}}(\beta)\dot{\mathbf{I}}(\alpha) = 0$. Da regra de Leibniz graduada para a contração à esquerda obtemos

$$\boxed{\dot{\mathbf{I}}(\alpha)\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{v}) + \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{v})\dot{\mathbf{I}}(\alpha) = \alpha(\mathbf{v})} \quad (3.34)$$

Definimos a aplicação $\dot{\gamma} : V \rightarrow \text{End}(\dot{\Lambda}(V))$ como

$$\boxed{\dot{\gamma} = \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{I}} \circ \tau} \quad (3.35)$$

É fácil ver que a aplicação $\dot{\gamma}$ é uma aplicação de Clifford:

$$\dot{\gamma}(\mathbf{v})\dot{\gamma}(\mathbf{u}) + \dot{\gamma}(\mathbf{u})\dot{\gamma}(\mathbf{v}) = 2g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \dot{\mathbf{1}}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (3.36)$$

⁸ $\dot{T}(V)$ denota o espaço dos tensores quirais.

3.5 Operadores de Hodge quirais

Os espaços vetoriais $\Lambda^k(V)$ [$\mathring{\Lambda}^k(V)$] e $\Lambda^{n-k}(V)$ [$\mathring{\Lambda}^{n-k}(V)$] têm a mesma dimensão, mas não existe nenhum isomorfismo canônico entre esses espaços. Seja Θ o elemento de volume em V definido por $\Theta = |\det \tau|^{1/2} \mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n$, onde $\det \tau$ é dado⁹ implicitamente por

$$\tau(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) = \tau(\mathbf{e}_1) \wedge \tau(\mathbf{e}_2) \wedge \cdots \wedge \tau(\mathbf{e}_n) = (\det \tau) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n. \quad (3.37)$$

O isomorfismo dado pelo dual de Hodge $\star : \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V)$ [$\star : \mathring{\Lambda}^k(V) \rightarrow \mathring{\Lambda}^{n-k}(V)$] é definido a partir dos operadores duais de quasi-Hodge. Já que a correlação é definida como sendo um isomorfismo $\tau : \Lambda_k(V) \rightarrow \Lambda^k(V)$, temos $\underline{\star} \circ \tau^{-1} : \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V)$ [$\underline{\star} \circ \tau^{-1} : \mathring{\Lambda}^k(V) \rightarrow \mathring{\Lambda}^{n-k}(V)$] e $\overline{\star} \circ \tau : \Lambda_k(V) \rightarrow \Lambda_{n-k}(V)$. Exigimos que

$$\underline{\star} \circ \tau^{-1} = \overline{\star} \circ \tau, \quad (3.38)$$

que irá ocorrer somente se Θ for unitário. O operador dual de Hodge é definido como

$$\boxed{\star = \underline{\star} \circ \tau^{-1} = \overline{\star} \circ \tau} \quad (3.39)$$

e, mais explicitamente,

$$\boxed{\star 1 = \eta}, \quad \boxed{\star \psi = \tilde{\psi} \eta} \quad (3.40)$$

onde $\psi \in \mathring{\Lambda}(V)$. O operador dual de Hodge \star não muda a quiralidade das formas. Definimos o operador dual de Hodge quiral $\star_\varepsilon : \Lambda^k(V) \rightarrow \mathring{\Lambda}^{n-k}(V)$ agindo sobre formas diferenciais como

$$\star_\varepsilon 1 = \varepsilon \eta, \quad \star_\varepsilon \psi = \varepsilon \tilde{\psi} \eta \quad (3.41)$$

onde a última expressão denota $\varepsilon \tau^{-1}(\tilde{\psi}) \lrcorner \eta$. Observamos que $\star_\varepsilon = \varepsilon \star$, e \star_ε naturalmente muda a quiralidade das formas. De maneira análoga, o operador de Hodge quiral agindo sobre formas quirais $\star_\varepsilon : \mathring{\Lambda}^k(V) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V)$ é também definido como:

$$\star_\varepsilon \varepsilon = \eta, \quad \star_\varepsilon \mathring{\psi} = \tilde{\psi} \eta. \quad (3.42)$$

3.6 Imersões, subespaços maximais totalmente isotrópicos e bases de Witt

Consideramos o espaço-métrico $(V \oplus \mathring{V}, \underline{g}) = (\mathbb{D} \otimes V, \underline{g})$, onde a métrica $\underline{g} : (V \oplus \mathring{V}) \times (V \oplus \mathring{V}) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\underline{g}(u, v) = g(\mathring{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + g(\mathring{\mathbf{v}}, \mathbf{u}). \quad (3.43)$$

⁹ Usamos a notação τ para descrever o mapa $\tau : V \rightarrow V^*$ e sua extensão natural $\tau : \Lambda_k(V) \rightarrow \Lambda^k(V)$, sem qualquer distinção. No texto estará implícito a qual deles estaremos nos referindo.

Com base na notação da Sec.(3.4), a métrica \underline{g} pode agora ser representada por $\begin{pmatrix} 0 & g \\ g & 0 \end{pmatrix}$. Adotamos a notação $u = \mathbf{u} + \mathring{\mathbf{u}}, v = \mathbf{v} + \mathring{\mathbf{v}} \in V \oplus \mathring{V}$.

Sob as inclusões

$$\begin{aligned} \iota_V : V &\rightarrow V \oplus \mathring{V} \\ \mathbf{v} &\mapsto \mathbf{v} + 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

e

$$\begin{aligned} \iota_{\mathring{V}} : \mathring{V} &\rightarrow V \oplus \mathring{V} \\ \mathring{\mathbf{v}} &\mapsto 0 + \mathring{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

ao interpretarmos V e \mathring{V} como subespaços vetoriais de $V \oplus \mathring{V}$, é imediato ver que

$$\underline{g}(\mathbf{u}+0, 0+\mathring{\mathbf{v}}) = g(\mathbf{u}, \mathring{\mathbf{v}}), \quad \underline{g}(0+\mathring{\mathbf{u}}, \mathbf{v}+0) = g(\mathring{\mathbf{u}}, \mathbf{v}), \quad \underline{g}(\mathbf{u}+0, \mathbf{v}+0) = \underline{g}(0+\mathring{\mathbf{u}}, 0+\mathring{\mathbf{v}}) = 0, \quad (3.46)$$

de onde podemos ver que V e \mathring{V} são subespaços maximais totalmente isotrópicos de $V \oplus \mathring{V}$ [Cru90]. Naturalmente existe uma base $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ de V e uma base $\{\mathring{\mathbf{e}}_j\}_{j=1}^n$ de \mathring{V} , que satisfazem

$$\underline{g}(\mathbf{e}_i, \mathring{\mathbf{e}}_j) = \delta_{ij}, \quad \underline{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \underline{g}(\mathring{\mathbf{e}}_i, \mathring{\mathbf{e}}_j) = 0. \quad (3.47)$$

Motivados por [Cru90], definimos

$$\xi_i = (\mathring{\mathbf{e}}_i + \mathbf{e}_i)/\sqrt{2}, \quad \xi_{i+n} = (\mathring{\mathbf{e}}_i - \mathbf{e}_i)/\sqrt{2}. \quad (3.48)$$

Os vetores $\{\xi_k\}_{k=1}^{2n}$ geram $\mathbb{R}^{n,n}$, já que para $i, j = 1, \dots, n$ as relações

$$\underline{g}(\xi_i, \xi_j) = -\underline{g}(\xi_{i+n}, \xi_{j+n}) = \varepsilon \delta_{ij}. \quad (3.49)$$

são satisfeitas. Vale a pena ainda notar que $\underline{g}(\xi_i, \xi_{k+n}) = 0$, $1 \leq i, j \leq n$.

3.7 \mathbb{D} -álgebras de Clifford

Nesta seção construímos uma álgebra de Clifford hiperbólica sobre o espaço $2n$ -dimensional $V \oplus \mathring{V} \simeq \mathbb{D} \otimes V$, denominada \mathbb{D} -álgebra de Clifford. Suas aplicações na construção de supercampos podem ser vistas com detalhes em [Rod95].

Definimos a álgebra de Grassmann (hiperbólica) estendida como a tripla $(\Lambda(V \oplus \mathring{V}), \wedge, G)$, onde $\Lambda(V \oplus \mathring{V}) = \sum_{i=0}^n \Lambda^i(V \oplus \mathring{V})$ é a álgebra exterior estendida e G é métrica \underline{g} -induzida em $\Lambda(V \oplus \mathring{V})$. Denotamos $\xi = \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{2n} \in \Lambda^n(V \oplus \mathring{V})$ o elemento de volume de $\Lambda(V \oplus \mathring{V})$, e é fácil ver que $G(\xi, \xi) = (-1)^n$. As inclusões dadas pelas eqs.(3.44, 3.45) podem ser estendidas a fim de que se identifique $\Lambda(V) \hookrightarrow \Lambda(V \oplus \mathring{V})$ como:

$$\begin{aligned} \iota_V : \Lambda(V) &\rightarrow \Lambda(V \oplus \mathring{V}) \\ \mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_k &\mapsto (\mathbf{v}_1 + 0) \wedge \dots \wedge (\mathbf{v}_k + 0) \end{aligned}$$

$$\iota_{\mathring{V}} : \Lambda(\mathring{V}) \rightarrow \Lambda(V \oplus \mathring{V})$$

$$\mathring{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathring{v}_k \mapsto (0 + \mathring{v}_1) \wedge \cdots \wedge (0 + \mathring{v}_k)$$

A conjugação de Clifford, a involução graduada e a reversão são analogamente definidas em $V \oplus \mathring{V}$, onde a contração satisfaz

$$\mathbf{u} \lrcorner \mathbf{v} = 0 = \mathring{\mathbf{u}} \lrcorner \mathring{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad \mathring{\mathbf{u}}, \mathring{\mathbf{v}} \in \mathring{V}. \quad (3.50)$$

Uma \mathbb{D} -álgebra de Clifford é definida, nesse contexto, como sendo a álgebra de Grassmann munida do produto de Clifford dado por

$$u\psi = u \lrcorner \psi + u \wedge \psi, \quad \psi \in \check{\Lambda}(V) = \Lambda(V \oplus \mathring{V}), \quad u \in V \oplus \mathring{V}. \quad (3.51)$$

A base de Witt $\{\mathbf{e}_i, \mathring{\mathbf{e}}_k\}$ satisfaz as relações

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = 0 = \mathring{\mathbf{e}}_i \mathring{\mathbf{e}}_j + \mathring{\mathbf{e}}_j \mathring{\mathbf{e}}_i, \quad \mathbf{e}_i \mathring{\mathbf{e}}_j + \mathring{\mathbf{e}}_j \mathbf{e}_i = 2\delta_{ij}, \quad (3.52)$$

e por sua vez a base $\{\xi_p\}_{p=1}^{2n}$ satisfaz as expressões

$$\xi_{n+i} \xi_{n+k} + \xi_{n+k} \xi_{n+i} = -\xi_i \xi_k + \xi_k \xi_i = -2\delta_{ik},$$

$$\xi_i \xi_{n+k} + \xi_{n+k} \xi_i = 0, \quad 1 \leq i, k \leq n.$$

3.7.1 \mathbb{D} -conjugação

Consideramos algumas observações importantes para se caracterizar $V \oplus \mathring{V}$ como um espaço hiperbólico de fato.

Para todo $(\mathbf{u}, \mathring{\mathbf{u}}) \in V \oplus \mathring{V}$, a condição de que $g(\mathbf{u}, \mathring{\mathbf{u}}) = 0$ é equivalente a $g(\mathring{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) = 0$ implica que g deve ser simétrica (onde a geometria é chamada *ortogonal*) ou antissimétrica (onde a geometria é chamada *simplética*).

O conjunto dos $\mathbf{u} \in V$ para os quais $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in V$, é um subespaço de V denominado *radical* e denotado por $\text{rad } V$ ou V^\perp . Podemos mostrar que se g é não-degenerada, então $\text{rad } V = 0$. Nesse caso V é dito ser *não-isotrópico*. Seja U um subespaço de V tal que a restrição $g|_U$ de g a U induz uma geometria do mesmo tipo (ortogonal ou simplética) que a geometria em V . O radical $\text{rad } U$ de U é definido como $U \cap U^\perp$. Note que embora $\text{rad } V = V^\perp$, $\text{rad } U \neq U^\perp$ em geral. U é dito ser *isotrópico* se $\text{rad } U \neq 0$. V é dito ser totalmente isotrópico se $g \equiv 0$ em V . Um subespaço $U \subseteq V$ é dito ser totalmente isotrópico se $g|_U \equiv 0$ [Cru90].

Um plano não-isotrópico que contém um vetor isotrópico não-nulo é denominado *hiperbólico*. Uma soma ortogonal de planos hiperbólicos é chamada de espaço hiperbólico. Um plano hiperbólico é gerado pelo par (x, y) para o qual $g(x, x) = g(y, y) = 0$ e $g(x, y) = 1$. Tal par é chamado (x, y) hiperbólico.

As definições acima nos permitem denominar $V \oplus \mathring{V}$ de espaço hiperbólico. Os espaços vetoriais V e \mathring{V} são todos de mesma dimensão (n) por definição e são, com efeito, subespaços maximais totalmente isotrópicos [Cru90] de $V \oplus \mathring{V}$.

Nosso objetivo é agora estender tal conceito a subespaços $V, \mathring{V} \hookrightarrow V \oplus \mathring{V}$. Eqs.(3.48) definem uma base $\{\xi_i\}$, e ao escrevermos $v = \mathbf{v} + \mathring{\mathbf{v}}$, onde $\mathbf{v} = \mathbf{v}^i \mathbf{e}_i \in V$ e $\mathring{\mathbf{v}} = \mathring{\mathbf{v}}^i \mathring{\mathbf{e}}_i \in \mathring{V}$, é possível expressar as componentes $\{v^i, v^{n+i}\}$ (associadas aos ξ_j) como

$$v^i = (\mathbf{v}^i + \mathring{\mathbf{v}}^i)/\sqrt{2}, \quad v^{n+i} = (\mathbf{v}^i - \mathring{\mathbf{v}}^i)/\sqrt{2}. \quad (3.53)$$

Definimos a \mathbb{D} -conjugação, que inverte a parte ímpar, como

$$v_{\dagger} = (\mathbf{v} + \mathring{\mathbf{v}})_{\dagger} := \mathbf{v} - \mathring{\mathbf{v}}. \quad (3.54)$$

e a \mathbb{D} -conjugação, que inverte a parte par, como

$$v_{\ddagger} = (\mathbf{v} + \mathring{\mathbf{v}})_{\ddagger} := \mathring{\mathbf{v}} - \mathbf{v}. \quad (3.55)$$

É simples notar que $v_{\dagger} = -v_{\ddagger}$, donde concluímos que

$$v_{\ddagger} = \hat{v}_{\dagger}. \quad (3.56)$$

Das eqs.(3.53) é simples notar que

$$(v_{\dagger})^i = (-\mathbf{v}^i + \mathring{\mathbf{v}}^i)/\sqrt{2}, \quad v_{\ddagger}^{n+i} = (\mathbf{v}^i + \mathring{\mathbf{v}}^i)/\sqrt{2}. \quad (3.57)$$

Motivados pela definição acima é então possível definir uma geometria simplética, a partir de uma forma alternada $A : (V \oplus \mathring{V}) \times (V \oplus \mathring{V}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$A(u, v) = g(\mathbf{u}, \mathring{\mathbf{v}}) - g(\mathbf{v}, \mathring{\mathbf{u}}). \quad (3.58)$$

Tal espaço é apropriado para se descrever, por exemplo, o formalismo hamiltoniano da mecânica clássica.

3.8 O produto regressivo

Dada uma representação de uma k -forma $\psi = \mathbf{a}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}^k$, e $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$ um conjunto de inteiros não-negativos tais que $h_1 + h_2 + \cdots + h_r = k$, definimos uma *decomposição de classe* (h_1, h_2, \dots, h_r) de ψ como um conjunto de formas (ψ^1, \dots, ψ^r) tais que [Rot85]

1. $\psi^i = 1$ se $h_i = 0$ e $\psi^i = \mathbf{a}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}^{i_{h_i}}$, $i_1 < \cdots < i_{h_i}$, se $h_i \neq 0$;
2. $\psi^i \wedge \psi^j \neq 0$;
3. $\psi^1 \wedge \psi^2 \wedge \cdots \wedge \psi^r = \pm \psi$.

A partir de agora formularemos o que segue na álgebra exterior aquiral $\Lambda(V)$, e a formulação na álgebra exterior quiral segue *mutatis mutandis*. Denotamos (ψ) o conjunto finito de todas as possíveis decomposições de uma k -forma $\psi \in \Lambda^k(V)$. Dado $\phi \in \Lambda^l(V)$, o produto regressivo

$$\begin{aligned} \vee : \Lambda^k(V) \times \Lambda^l(V) &\rightarrow \Lambda^{k+l-n}(V) \\ (\psi, \phi) &\mapsto \psi \vee \phi \end{aligned} \quad (3.59)$$

é definido [Rot85] como sendo

$$\psi \vee \phi = \sum_{(\psi)} [\psi_{(1)}, \phi] \psi_{(2)}^k = \sum_{(\phi)} [\psi, \phi_{(2)}] \phi_{(1)}, \quad \text{se } k+l \geq n. \quad (3.60)$$

Quando $k+l < n$ temos o caso trivial $\psi \vee \phi = 0$. Definimos

$$[\mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}_l] = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_l], \quad \text{se } k+l = n, \quad (3.61)$$

$$= 0, \quad \text{se } k+l \neq n. \quad (3.62)$$

Exemplo 3.1: Considere $\psi = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 \in \Lambda^3(\mathbb{R}^{1,3})$ e $\phi = \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^{1,3})$. As possíveis decomposições de ψ são dadas por

1. Classe (0,3): $\psi_1 = 1, \psi_2 = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3$.

2. Classe (1,2):

(a) $\psi_1 = \mathbf{e}^1, \psi_2 = \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3,$

(b) $\psi_1 = \mathbf{e}^2, \psi_2 = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3,$

(c) $\psi_1 = \mathbf{e}^3, \psi_2 = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2.$

3. Classe (2,1):

(a) $\psi_1 = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2, \psi_2 = \mathbf{e}^3,$

(b) $\psi_1 = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3, \psi_2 = \mathbf{e}^2,$

(c) $\psi_1 = \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3, \psi_2 = \mathbf{e}^1.$

4. Classe (3,0): $\psi_1 = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3, \psi_2 = 1.$

5. Classe (1,1,1): $\psi_1 = \mathbf{e}^1, \psi_2 = \mathbf{e}^2, \psi_3 = \mathbf{e}^3$ e permutações.

A decomposição de classe (1,1,1) consta para efeitos de ilustração, mas somente decomposições duplas, do tipo (h_1, h_2) , entram na definição (3.60).

Considerando a definição (3.60) e o fato de que o colchete de Rota é nulo se $k+l \neq n = 4$, vemos imediatamente que somente as decomposições de classe (2,1) são termos potencialmente não-nulos. Temos então:

$$\begin{aligned} \psi \vee \phi &= \sum_{(\psi)} [\psi_{(1)}, \phi] \psi_{(2)} \\ &= [\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4] \mathbf{e}^3 + [\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4] \mathbf{e}^2 + [\mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4] \mathbf{e}^1 \\ &= [\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^4] \mathbf{e}^3 + 0 + 0 \\ &= [\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3, \mathbf{e}^4] \mathbf{e}^3 \\ &= \mathbf{e}^3. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Dados agora $\psi, \phi, \zeta \in \check{\Lambda}(V)$ as seguintes propriedades são imediatamente verificadas:

1. (Associatividade) $(\psi \vee \phi) \vee \zeta = \psi \vee (\phi \vee \zeta)$,
2. (Supercomutatividade) $\psi^{[k]} \vee \phi^{[l]} = (-1)^{[k][l]} \phi^{[l]} \vee \psi^{[k]}$, onde $[i] = n - i$,
3. (Distributividade aditiva) $(\psi + \phi) \vee \zeta = \psi \vee \zeta + \phi \vee \zeta$, $\psi \vee (\phi + \zeta) = \psi \vee \phi + \psi \vee \zeta$,
4. (Multiplicação por escalar) $\psi \vee (a\phi) = (a\psi) \vee \phi = a(\psi \vee \phi)$, $a \in \mathbb{R}$.

Temos as relações

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^i \vee (\mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n) &= [1, \mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n] \mathbf{e}^i \\ &= [\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n] \mathbf{e}^i \\ &= \varepsilon \mathbf{e}^i, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j) \vee (\mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n) &= [1, \mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n] (\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j) \\ &= [\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n] (\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j) = \varepsilon (\mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j), \end{aligned} \quad (3.65)$$

e

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_k}) \vee (\mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n) &= [1, \mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n] \mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_k} \\ &= [\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n] \mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_k} \\ &= \varepsilon \mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_k}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Das expressões acima podemos provar por indução (e estendendo por linearidade a $\psi \in \check{\Lambda}(V)$) que:

$$\boxed{\psi \vee (\mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n) = \varepsilon \psi} \quad (3.67)$$

Usando a relação

$$\mathbf{e}^i \vee (\mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \check{\mathbf{e}}^j \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n) = [\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^1, \dots, \check{\mathbf{e}}^j, \dots, \mathbf{e}^n] = \delta^{ij} (-1)^{i-1} \varepsilon,$$

quando $i = j$ representamos o pseudoescalar ε por

$$\boxed{\varepsilon = (-1)^{i-1} \mathbf{e}^i \vee (\mathbf{e}^1 \wedge \cdots \wedge \check{\mathbf{e}}^i \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^n)} \quad (3.68)$$

3.9 Contraespaço

Da definição do produto regressivo é imediato que

$$\Lambda^k(V) \vee \Lambda^l(V) \hookrightarrow \Lambda^{k+l-n}(V), \quad k+l \geq n. \quad (3.69)$$

Denotando $[k] = n - k$, escrevemos a eq.(3.69) como

$$\Lambda^{n-[k]}(V) \vee \Lambda^{n-[l]}(V) \hookrightarrow \Lambda^{n-([k]+[l])}(V). \quad (3.70)$$

O k -contraespaço \check{V}^k é definido [Cot00, Rot85] como

$$\check{V}^k = \Lambda^{n-k}(V) \quad (3.71)$$

e portanto

$$\check{V}^r \vee \check{V}^s \hookrightarrow \check{V}^{r+s} \quad (3.72)$$

Também definimos a álgebra coexterior como

$$\check{V} = \check{V}^0 \oplus \check{V}^1 \oplus \cdots \oplus \check{V}^n = \bigoplus_{j=0}^n \check{V}^j \quad (3.73)$$

que é a álgebra exterior com respeito ao produto regressivo. Da def.(3.71) vemos que $\check{V}^1 = \Lambda^{n-1}(V)$ e $(n-1)$ -formas podem ser vistas como 1-formas, já que consideramos o contraespaço \check{V}^1 . Definimos uma base para \check{V}^1 , a cobase, como o conjunto $\{\check{e}^i\}$, cujos elementos são definidos como

$$\check{e}^i = (-1)^{i-1} e^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e}^i \wedge \cdots \wedge e^n \quad (3.74)$$

Elementos de \check{V}^1 são chamados de 1-co-formas. Rota [Rot85] denomina a álgebra $(\Lambda(V), \wedge, \vee)$ por diálgebra ou álgebra dupla. Estendemos esse conceito considerando a álgebra $(\check{\Lambda}(V), \wedge, \vee)$. Da definição acima vemos que $e^i \wedge \check{e}^i = e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^n$. Analogamente à eq.(3.2), consideramos uma cobase quiral $\{\check{e}^i\}$, cujos elementos são definidos pela identidade $\check{e}^i = \varepsilon e^i$. Vemos que a unidade da álgebra associativa gerada pelas co-formas é o elemento de volume $e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^n$. A seguinte proposição é uma simples generalização da proposição de Grassmann-Rota, que dá informação sobre a quiralidade entre formas e suas co-formas equivalentes.

Proposição 3.1: $\blacktriangleright e^1 \vee e^2 \vee \cdots \vee e^i = \varepsilon^{i+1} e^{i+1} \wedge \cdots \wedge e^n \blacktriangleleft$

Demonstração: Seja $\check{e}^1 = e^2 \wedge e^3 \wedge \cdots \wedge e^n$ e $\check{e}^2 = -e^1 \wedge e^3 \wedge \cdots \wedge e^n$ duas 1-co-formas. segue que

$$\begin{aligned} e^1 \vee e^2 &= -(e^2 \wedge e^3 \wedge \cdots \wedge e^n) \vee (e^1 \wedge e^3 \wedge \cdots \wedge e^n) \\ &= -[e^2, e^1, e^3, \dots, e^n] e^3 \wedge \cdots \wedge e^n \\ &= \varepsilon e^3 \wedge \cdots \wedge e^n. \end{aligned}$$

Por indução,

$$\begin{aligned} e^1 \vee e^2 \vee \cdots \vee e^i \vee e^{i+1} &= (\varepsilon^{i+1} e^{i+1} \wedge \cdots \wedge e^n) \vee e^{i+1} \\ &= \varepsilon^{i+1} (e^{i+1} \wedge \cdots \wedge e^n) \vee ((-1)^i e^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e}^{i+1} \wedge \cdots \wedge e^n) \\ &= (-1)^i \varepsilon^{i+1} [e^{i+1}, e^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e}^i \wedge \cdots \wedge e^n] e^{i+2} \wedge \cdots \wedge e^n \\ &= \varepsilon^{i+1} [e^{i+1}, e^1, \dots, \widehat{e}^i, \dots, e^n] e^{i+2} \wedge \cdots \wedge e^n \\ &= \varepsilon^{i+1} \varepsilon e^{i+2} \wedge \cdots \wedge e^n \\ &= \varepsilon^{i+2} e^{i+2} \wedge \cdots \wedge e^n \end{aligned}$$

□

Dependendo do número i de elementos que formam o produto $\mathbf{e}^1 \vee \mathbf{e}^2 \vee \cdots \vee \mathbf{e}^i$, o lado direito da Proposição 3.1 muda ou não muda de sinal perante inversão de orientação do espaço. Como corolário, quando $i = n$, obtemos

$$\mathbf{e}^1 \vee \mathbf{e}^2 \vee \cdots \vee \mathbf{e}^n = \varepsilon^{n+1} \in \begin{cases} \Lambda^0(V), & \text{se } n = 2k + 1, \\ \dot{\Lambda}^0(V), & \text{se } n = 2k. \end{cases} \quad (3.75)$$

Assim o elemento de volume (relativo ao produto regressivo) $\mathbf{e}^1 \vee \mathbf{e}^2 \vee \cdots \vee \mathbf{e}^n \in \mathbb{V}^n$ é um escalar **ou** um pseudoescalar, dependendo da dimensão n de V . Concluimos dessas considerações que

$$\bigvee^0 \oplus \bigvee^1 \oplus \bigvee^2 \oplus \cdots \oplus \bigvee^n = \Lambda^n(V) \oplus \Lambda^{n-1}(V) \oplus \dot{\Lambda}^{n-2} \oplus \cdots \oplus \dot{\Lambda}^0(V). \quad (3.76)$$

Da Prop. 3.1 e das propriedades do operador dual de Hodge, temos a relação

$$\star(\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^k) = \varepsilon^{k+1} \mathbf{e}^1 \vee \cdots \vee \mathbf{e}^k \quad (3.77)$$

O operador dual de Hodge aplicado em $(2k)$ -formas produz $(2k)$ -co-formas quirais, e quando é aplicado sobre $(2k+1)$ -formas, as respectivas $(2k+1)$ -co-formas não possuem quiralidade ($2k + 1 \leq n$).

3.10 Álgebras de Clifford sobre o contraespaço

Vimos pelas eqs.(1.20) e (1.21) que, dado um elemento de volume $\eta \in \Lambda^n(V)$, o operador dual de Hodge é escrito como $\star\psi = \tilde{\psi}\eta$ e $\star 1 = \eta$.

O produto de Clifford $\star : \mathcal{C}\ell_{p,q} \times \mathcal{C}\ell_{p,q} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{p,q}$, relativo ao contraespaço é definido como:

$$\psi \star \phi := \star^{-1}[(\star\psi)(\star\phi)] \quad \psi, \phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}. \quad (3.78)$$

Podemos ver imediatamente que tal produto de fato define uma álgebra de Clifford. Primeiramente a associatividade é verificada. Dados $\psi, \phi, \zeta \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$, temos:

$$\begin{aligned} (\psi \star \phi) \star \zeta &= \{\star^{-1}[(\star\psi)(\star\phi)]\} \star \zeta \\ &= \star^{-1}\{\star \star^{-1} [(\star\psi)(\star\phi)](\star\zeta)\} \\ &= \star^{-1}\{[(\star\psi)(\star\phi)](\star\zeta)\} \\ &= \star^{-1}\{(\star\psi)[(\star\phi)(\star\zeta)]\} \\ &= \star^{-1}\{(\star\psi) \star [\star^{-1}((\star\phi)(\star\zeta))]\} \\ &= \psi \star [\star^{-1}((\star\phi)(\star\zeta))] \\ &= \psi \star (\phi \star \zeta) \end{aligned} \quad (3.79)$$

A distributividade com respeito à adição

$$\psi \star (\phi + \zeta) = \psi \star \phi + \psi \star \zeta \quad (3.80)$$

$$(\psi + \phi) \star \zeta = \psi \star \zeta + \phi \star \zeta. \quad (3.81)$$

também pode ser facilmente verificada. De fato,

$$\begin{aligned}
\psi * (\phi + \zeta) &= \star[(\star\psi) \star (\phi + \zeta)] \\
&= \star^{-1}[(\star\psi)(\star\phi + \star\zeta)] \\
&= \star^{-1}[(\star\psi)(\star\phi)] + \star^{-1}[(\star\psi)(\star\zeta)] \\
&= \psi * \phi + \psi * \zeta.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

A eq.(3.81) é mostrada de maneira análoga.

O elemento de volume η age como a unidade com relação ao produto $*$. Com efeito, η é a unidade à esquerda:

$$\begin{aligned}
\eta * \psi &= \star^{-1}[(\star\eta)(\star\psi)] \\
&= \star^{-1}(1 \star \psi) = \star^{-1}(\star\psi) \\
&= \psi.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Analogamente podemos provar que η é também unidade à direita com relação ao produto $*$, já que

$$\begin{aligned}
\psi * \eta &= \star^{-1}[(\star\psi)(\star\eta)] \\
&= \star^{-1}(\star\psi 1) = \star^{-1}(\star\psi) \\
&= \psi.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

É importante enfatizar e ressaltar que o produto de Clifford usual, denotado por justaposição, e o novo produto de Clifford $*$: $\mathcal{C}\ell_{p,q} \times \mathcal{C}\ell_{p,q} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{p,q}$ relativo ao contraespaço, agem ambos no espaço vetorial subjacente a $\mathcal{C}\ell_{p,q}$. Já que denotamos a álgebra de Clifford, construída a partir do produto de Clifford usual, por $\mathcal{C}\ell(\Lambda^1(V), g)$, podemos denotar a nova álgebra de Clifford por $\mathcal{C}\ell(V^1, g)$. De fato a relação de Clifford, calculada a partir do produto dado pela eq.(3.78) entre duas co-formas $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \in \mathcal{V}^1$, é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^i * \mathbf{e}^j + \mathbf{e}^j * \mathbf{e}^i &= \star^{-1}[(\star\mathbf{e}^i)(\star\mathbf{e}^j)] + \star^{-1}[(\star\mathbf{e}^j)(\star\mathbf{e}^i)] \\
&= \star^{-1}(\mathbf{e}^i \mathbf{e}^j) + \star^{-1}(\mathbf{e}^j \mathbf{e}^i) \\
&= \star^{-1}(\mathbf{e}^i \mathbf{e}^j + \mathbf{e}^j \mathbf{e}^i) \\
&= \star^{-1}(2g(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j)) \\
&= 2g(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) \eta,
\end{aligned} \tag{3.85}$$

pela eq.(1.20). Como provamos que η é a unidade do produto $*$, vemos que $*$ define de fato uma álgebra de Clifford.

Dados $\mathbf{v} \in V, \psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$, o produto regressivo definido na Sec. (3.8) pode agora ser escrito em termos do produto de Clifford $*$, como:

$$\boxed{\mathbf{e}^i \vee \psi = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^i * \psi + \hat{\psi} * \mathbf{e}^i)} \tag{3.86}$$

Analogamente à definição de contração à direita através da eq.(1.12), a contração à direita de um vetor \mathbf{v} por um elemento $\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$ associada ao produto $*$ é definida por

$$\boxed{\mathbf{v}^\top \psi := \frac{1}{2}(\mathbf{v} * \psi - \hat{\psi} * \mathbf{v})} \quad (3.87)$$

A contração à esquerda se define pela expressão

$$\boxed{\psi^\top \mathbf{v} := \frac{1}{2}(\psi * \mathbf{v} - \mathbf{v} * \hat{\psi})} \quad (3.88)$$

O formalismo desenvolvido acima tem inúmeras aplicações em, por exemplo, mecânica e geometria projetiva [Fau02, Cot00]. A mecânica lagrangiana e hamiltoniana são descritas naturalmente pela estrutura dual do espaço e do contraespaço, cuja abordagem fornece uma nova possibilidade de interpretação da geometria simplética.

O formalismo aqui desenvolvido, no caso particular de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ descreve o princípio da dualidade na geometria projetiva [Cdt00, Hes91b, Cot00]. Conradt [Cdt00, Cot00] obtém os conceitos de espaço de fase e forma simplética em uma estrutura bem simples e de rico significado geométrico. Dentre as várias aplicações desse formalismo podemos citar ainda o sistema de n corpos com forças potenciais, o oscilador harmônico e o movimento de Kepler [Cot00].

3.11 Interpretação geométrica do produto regressivo

Denotamos por $(\check{\Lambda}(V), \wedge, \vee, \bar{\mathfrak{r}}, \underline{\mathfrak{r}})$ a álgebra de Grassmann-Cayley. Na próxima proposição enunciamos e provamos, usando os operadores duais de quasi-Hodge, os produtos progressivo e regressivo, um análogo à lei de Morgan [Bro99] em teoria de conjuntos.

Proposição 3.2: $\blacktriangleright \bar{\mathfrak{r}}(\psi \wedge \phi) = (\bar{\mathfrak{r}}\psi) \vee (\bar{\mathfrak{r}}\phi)$, onde $\psi, \phi \in \check{\Lambda}(V)$ \blacktriangleleft

Demonstração: Primeiramente vamos supor que ψ e ϕ estejam em subespaços complementares de $\check{\Lambda}(V)$, caso contrário teremos o caso trivial onde $\psi \wedge \phi = 0$. Assim escrevemos $\psi = \psi^1 \wedge \dots \wedge \psi^k \in \check{\Lambda}^k(V)$ e $\phi = \phi^{k+1} \wedge \dots \wedge \phi^m \in \Lambda^{m-k}(V)$. Então

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{r}}(\psi \wedge \phi) &= \bar{\mathfrak{r}}(\psi^1 \wedge \dots \wedge \psi^k \wedge \phi^{k+1} \wedge \dots \wedge \phi^m) = \det(\psi_j^i) \det(\phi_j^i) \bar{\mathfrak{r}}(\mathbf{e}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^k \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^m) \\ &= \det(\psi_j^i) \det(\phi_j^i) (\mathbf{e}_{m+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n). \end{aligned}$$

Por outro lado, $\bar{\mathfrak{r}}\psi = \det(\psi_j^i) \bar{\mathfrak{r}}(\mathbf{e}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^k) = \det(\psi_j^i) (\mathbf{e}_{k+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n)$, e

$$\bar{\mathfrak{r}}\phi = \det(\phi_j^i) \bar{\mathfrak{r}}(\mathbf{e}^{k+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}^m) = \det(\phi_j^i) (-1)^{(m-k)(m-1)} (\mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_{m+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n).$$

Combinando as duas expressões acima afirmamos que

$$\begin{aligned} (\bar{\mathfrak{r}}\psi) \vee (\bar{\mathfrak{r}}\phi) &= \det(\psi_j^i) \det(\phi_j^i) \alpha (\mathbf{e}_{k+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n) \vee (\mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_k \wedge \mathbf{e}_{m+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n) \\ &= \det(\psi_j^i) \det(\phi_j^i) \alpha [\mathbf{e}_{k+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_k] \mathbf{e}_{m+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n \\ &= \det(\psi_j^i) \det(\phi_j^i) \alpha [\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k] \mathbf{e}_{m+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n \\ &= \det(\psi_j^i) \det(\phi_j^i) \mathbf{e}_{m+1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

onde $\alpha = (-1)^{(m-k)(m-1)}$. □

Podemos também provar que $\bar{\star}(\psi \vee \phi) = (\bar{\star}\psi) \wedge (\bar{\star}\phi)$. Os mesmos resultados seguem analogamente para o operador $\underline{\star}$. Se trabalharmos com uma álgebra de Grassmann, onde há uma métrica, ao invés de uma álgebra de Grassmann-Cayley, podemos provar que

$$\boxed{\star(\psi \wedge \phi) = (\star\psi) \vee (\star\phi)} \quad (3.89)$$

e

$$\boxed{\star(\psi \vee \phi) = (\star\psi) \wedge (\star\phi)} \quad (3.90)$$

É óbvia a analogia entre eqs. (3.89, 3.90) e as leis de Morgan em teoria de conjuntos, dadas por

$$\mathfrak{C}(A \cap B) = \mathfrak{C}(A) \cup \mathfrak{C}(B), \quad \mathfrak{C}(A \cup B) = \mathfrak{C}(A) \cap \mathfrak{C}(B), \quad (3.91)$$

onde A e B denotam conjuntos. A relação $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(A))$ é análoga a $\bar{\star}\underline{\star} = \underline{\star}\bar{\star} = (-1)^{k(n-k)}$ e os operadores $(\cup, \cap, \mathfrak{C})$ em conjuntos são análogos aos operadores $(\wedge, \vee, \underline{\star}, \bar{\star})$ na álgebra de Grassmann-Cayley. Existe uma consistência geométrica na Prop. 3.2, pois dados $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^3$, o produto $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ é a união dos subespaços gerados por \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 . A entidade $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ é uma plaqueta que tem orientação própria. O produto regressivo está relacionado à intersecção entre subespaços. Se consideramos bivectores $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, concluímos que $\underline{\star}(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}^1$ e $\underline{\star}(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}^3$. Da Prop. 3.2 obtemos:

$$\begin{aligned} \underline{\star}((\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \vee (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)) &= (\underline{\star}(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)) \wedge (\underline{\star}(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)) \\ &= \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^1 = \underline{\star}\mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (3.92)$$

e conseqüentemente $(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \vee (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2$, que mostra a intersecção entre bivectores.

3.12 Dualidades e codualidades

Considere agora duas formas diferenciais $\xi \in \Lambda^i(V)$ e $\omega \in \Lambda^j(V)$. O nosso intuito é provar que as relações (3.89) e (3.90), além de poderem ser demonstradas a partir de um formalismo destituído de índices e/ou componentes, têm sua origem na definição do produto de Clifford \star associado ao contraespaço. De fato,

$$\begin{aligned} \xi \vee \omega &= \langle \xi \star \omega \rangle_{n-(i+j)} \\ &= \langle \xi \star \omega \eta^{-1} \eta \rangle_{n-(i+j)} \\ &= \langle \star^{-1} \{ [(\star\xi)(\star\omega)] \eta^{-1} \}_{i+j} \eta \rangle \\ &= \langle \star^{-1} \{ \star [\widetilde{(\star\xi)(\star\omega)}] \eta^{-1} \}_{i+j} \eta \rangle, \quad \text{pela eq. (1.21)} \\ &= \langle \widetilde{(\star\xi)(\star\omega)} \rangle_{i+j} \eta \\ &= (\widetilde{\star\omega}) \wedge (\star\xi) \eta \\ &= (\star\xi) \wedge (\star\omega) \eta \\ &= \star^{-1} [(\star\xi) \wedge (\star\omega)] \end{aligned} \quad (3.93)$$

de onde segue por linearidade que

$$\boxed{\star(\xi \vee \omega) = (\star\xi) \wedge (\star\omega)} \quad \forall \xi, \omega \in \Lambda(V). \quad (3.94)$$

que é *exatamente* a eq.(3.90). Utilizando o mesmo procedimento podemos de maneira análoga construir a eq.(3.89) como uma identidade envolvendo o produto de Clifford \star . Portanto a dualidade entre as álgebras de Clifford sobre \mathbb{V}^1 e $\Lambda^1(V)$ reflete a dualidade entre os espaços \mathbb{V}^1 e $\Lambda^1(V)$, que por sua vez vem da dualidade entre os produtos progressivo (exterior) e regressivo. Além disso existe também uma dualidade entre a contração entre formas diferenciais e a contração entre co-formas diferenciais, onde essa última foi definida na eq.(3.87). Essa dualidade é apresentada pela

Proposição 3.3: $\blacktriangleright \boxed{\star(\xi^\Gamma \omega) = (\star\xi) \lrcorner (\star\omega)} \quad \forall \xi, \omega \in \Lambda(V). \blacktriangleleft$

Demonstração: Observamos que a definição do produto $\xi^\Gamma \omega$ somente procede caso ω tenha o grau maior que ξ . Com essa suposição temos:

$$\begin{aligned} \xi^\Gamma \omega &= \langle \xi * \omega \rangle_{n-|i-j|} \\ &= \langle \xi * \omega (\eta^{-1} \eta) \rangle_{n-|i-j|} \\ &= \langle \star^{-1} [(\star\xi)(\star\omega)] \eta^{-1} \rangle_{|i-j|} \eta \\ &= \langle \star^{-1} \{ \star [\widetilde{(\star\xi)(\star\omega)}] \} \eta \eta^{-1} \rangle_{|i-j|} \eta \\ &= \langle \widetilde{(\star\xi)(\star\omega)} \rangle_{|i-j|} \eta \\ &= \widetilde{(\star\omega) \lrcorner (\star\xi)} \eta \\ &= (\star\xi) \lrcorner (\star\omega) \eta \\ &= \star^{-1} [(\star\xi) \lrcorner (\star\omega)] \end{aligned} \quad (3.95)$$

Portanto $\star(\xi^\Gamma \omega) = (\star\xi) \lrcorner (\star\omega)$. □

De maneira análoga, a contração à esquerda nos permite enunciar a codualidade

Proposição 3.3': $\blacktriangleright \boxed{\star(\xi^\lrcorner \omega) = (\star\xi)^\lrcorner (\star\omega)} \quad \forall \xi, \omega \in \Lambda(V) \blacktriangleleft$

no caso em que ω tenha o grau menor que ξ .

3.13 Operadores diferencial e codiferencial

Todas as definições feitas nesta seção para $\Lambda(V)$ podem ser também feitas para $\mathring{\Lambda}(V)$.

3.13.1 Operador diferencial

O operador diferencial d é definido como

$$\begin{aligned} d : \sec \Lambda^k(T^*M) &\rightarrow \sec \Lambda^{k+1}(T^*M) \\ \psi &\mapsto d\psi = (\partial_{i_j} \psi_{i_1 \dots i_k}) dx^{i_j} \wedge (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \end{aligned} \quad (3.96)$$

onde M é uma variedade cujo espaço tangente T^*M é isomorfo a V .

Vimos que para se transformar uma k -forma aquiral em uma k -forma quiral multiplicamos por ε . Dado $\psi^k \in \Lambda^k(V)$, temos $\check{\psi}^k = \varepsilon\psi^k \in \check{\Lambda}^k(V)$. Já que d é definido ser \mathbb{D} -linear, ou seja, $d(\varepsilon\psi^k) = \varepsilon d(\psi^k)$, e que $d(\psi^k) \in \Lambda^{k+1}(V)$, então $\varepsilon d(\psi^k) \in \check{\Lambda}^{k+1}(V)$. segue que o operador diferencial leva k -formas quirais em $(k+1)$ -formas quirais, i.e., $d : \sec \check{\Lambda}^k(T_x^*M) \rightarrow \sec \check{\Lambda}^{k+1}(T_x^*M)$. Motivados por essa consideração definimos a derivada exterior como sendo o único conjunto de operadores $d : \sec \Lambda^k(T_x^*M) \rightarrow \sec \Lambda^{k+1}(T_x^*M)$ e $d : \sec \check{\Lambda}^k(T_x^*M) \rightarrow \sec \check{\Lambda}^{k+1}(T_x^*M)$ que satisfazem as seguintes propriedades:

$$\text{(Linearidade)} \quad d(\zeta + \omega) = d\zeta + d\omega, \quad \text{e} \quad d(c\omega) = c d\omega, \quad \forall \zeta, \omega \in \check{\Lambda}(V), c \in \mathbb{R}, \quad (3.97)$$

$$\text{(Regra de Leibniz)} \quad \boxed{d(\omega \wedge \zeta) = d\omega \wedge \zeta + (-1)^k \omega \wedge d\zeta, \quad \forall \omega \in \Lambda^k(V), \zeta \in \check{\Lambda}(V)} \quad (3.98)$$

$$d(d\omega) = 0, \quad \omega \in \check{\Lambda}(V)$$

Por linearidade podemos estender a ação do operador diferencial para toda a álgebra $\check{\Lambda}(V)$ como $d : \sec \check{\Lambda}(V) \rightarrow \sec \check{\Lambda}(V)$.

3.13.2 Operador codiferencial

Nesta seção desenvolvemos o formalismo acerca do operador codiferencial na álgebra $\Lambda(T_x^*M)$, mas o mesmo vale para $\check{\Lambda}(T_x^*M)$ e conseqüentemente para $\check{\Lambda}(T_x^*M)$.

Considerando $l = n - 1$ na eq.(3.69), temos

$$\Lambda^k(V) \vee \Lambda^{n-1}(V) \hookrightarrow \Lambda^{k-1}(V), \quad k \geq 1, \quad (3.99)$$

o que nos motiva a definirmos o operador codiferencial a partir do produto regressivo como

$$\begin{aligned} \delta : \sec \Lambda^k(T_x^*M) &\rightarrow \sec \Lambda^{k-1}(T_x^*M) \\ \psi &\mapsto \delta\psi = (g_{i_k i_j} \partial^{i_k} \psi_{i_1 \dots i_k})(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \vee \left[(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i_j} \wedge \dots \wedge dx^n) \right] \end{aligned} \quad (3.100)$$

Da associatividade do produto regressivo obtemos

$$\boxed{\delta(\psi \vee \phi) = \delta\psi \vee \phi + (-1)^{[\psi]} \psi \vee \delta\phi} \quad (3.101)$$

onde $\psi, \phi \in \check{\Lambda}(V)$ e $[\psi] = k$ se $\psi \in \Lambda^k(V)$ ou $\psi \in \check{\Lambda}^k(V)$.

Esclarecemos que a nossa definição do operador codiferencial δ , dada pela eq.(3.100), implicitamente usa a definição de métrica, já que usualmente temos a definição

$$\delta\psi = \star^{-1} d \star \hat{\psi}, \quad \forall \psi \in \Lambda(V), \quad (3.102)$$

[Bae94, Nak96, Nas83] e a definição do operador dual de Hodge \star necessariamente exige uma métrica. A métrica que aparece na definição (3.100) está implícita nas eqs.(3.89, 3.90, 3.94), já que através

delas mostramos que dados dois dos elementos da tripla (\wedge, \vee, \star) , o outro é imediatamente definido pelas eqs. (3.89, 3.90, 3.94). Como na eq. (3.100) os produtos regressivo \vee e progressivo \wedge são usados, a métrica lá se encontra. Isso é notório por sua forma explícita na def. (3.100).

O contraespaço tem o operador codiferencial δ agindo como o operador diferencial. Isso pode ser visto pelas seqüências abaixo, que geram respectivamente a cohomologia de de Rham [Nak96]. Para o operador diferencial,

$$\Lambda^0(V) \xrightarrow{d} \Lambda^1(V) \xrightarrow{d} \Lambda^2(V) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^{n-1}(V) \xrightarrow{d} \Lambda^n(V) \xrightarrow{d} 0 \quad (3.103)$$

$$0 \xleftarrow{d} \bigvee^0 \xleftarrow{d} \bigvee^1 \xleftarrow{d} \bigvee^2 \xleftarrow{d} \dots \xleftarrow{d} \bigvee^{n-1} \xleftarrow{d} \bigvee^n \quad (3.104)$$

Já para o operador codiferencial,

$$\bigvee^0 \xrightarrow{\delta} \bigvee^1 \xrightarrow{\delta} \bigvee^2 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \bigvee^{n-1} \xrightarrow{\delta} \bigvee^n \xrightarrow{d} 0 \quad (3.105)$$

$$0 \xleftarrow{d} \Lambda^0(V) \xleftarrow{\delta} \Lambda^1(V) \xleftarrow{\delta} \Lambda^2(V) \xleftarrow{\delta} \dots \xleftarrow{\delta} \Lambda^{n-1}(V) \xleftarrow{\delta} \Lambda^n(V). \quad (3.106)$$

Isso completa a caracterização dual do contraespaço.

3.13.3 O Laplaciano de Hodge-de Rham

O laplaciano Δ é naturalmente definido como

$$\boxed{\Delta = d\delta + \delta d} \quad (3.107)$$

Exibiremos um exemplo simples que ilustra a eq. (3.107) em uma notação mais familiar.

Exemplo 3.2: Considere $\psi \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, dado por $\psi = f(x^1, x^2, x^3)dx^1 \wedge dx^2$, onde f é um campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Temos então que

$$d\psi = \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (3.108)$$

Portanto, pela definição dada pela eq. (3.100) segue que

$$\begin{aligned} \delta d\psi &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^3} (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \vee (dx^2 \wedge dx^3) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^3} (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \vee (dx^1 \wedge dx^3) \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^3)^2} (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) \vee (dx^1 \wedge dx^1) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^3} (dx^2 \wedge dx^3) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^3} (dx^1 \wedge dx^3) + \frac{\partial^2 f}{\partial (x^3)^2} (dx^1 \wedge dx^2) \end{aligned} \quad (3.109)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \delta\psi &= \frac{\partial f}{\partial x^1} (dx^1 \wedge dx^2) \vee (dx^2 \wedge dx^3) + \frac{\partial f}{\partial x^2} (dx^1 \wedge dx^2) \vee (dx^1 \wedge dx^3) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x^3} (dx^1 \wedge dx^2) \vee (dx^1 \wedge dx^2) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^2} (-dx^1) + 0, \end{aligned} \quad (3.110)$$

e portanto

$$\begin{aligned} d\delta\psi &= \frac{\partial^2 f}{\partial(x^1)^2}(dx^1 \wedge dx^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial(x^2)^2}(-dx^2 \wedge dx^1) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^3} dx^3 \wedge dx^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^3} dx^1 \wedge dx^3. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Somando as eqs.(3.109, 3.111) temos:

$$\begin{aligned} (d\delta + \delta d)\psi &= \frac{\partial^2 f}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial(x^3)^2} \\ &= \Delta\psi. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Podemos provar por indução que a eq.(3.107) é válida para todo $\psi \in \Lambda(V)$.

3.14 Aplicações em eletromagnetismo em meios cristalinos quirais

3.14.1 Interpretação geométrica das k -formas

1-formas

Considere $V \simeq \mathbb{R}^3$. Definimos as 1-formas como o conjunto dos funcionais lineares $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$. O seu núcleo é definido como o conjunto $\ker(\alpha) = \{\mathbf{v} \in V \mid \alpha(\mathbf{v}) = 0\}$. Sendo um subespaço vetorial de dimensão 2 de \mathbb{R}^3 , vemos imediatamente que $\ker(\alpha)$ é um plano. Assim a cada 1-forma podemos associar um plano que passa pela origem, além de também achar outros planos paralelos a $\ker(\alpha)$, nos quais a forma α toma os valores 1, 2, 3, etc.. Dessa maneira podemos interpretar a 1-forma geometricamente como uma família de planos paralelos, com uma seta unindo planos vizinhos que mostra a direção de crescimento da forma.

Reciprocamente, se tivermos uma família de planos, um número pode ser associado a qualquer vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Se a origem de \mathbf{v} se encontra em um dos planos, contamos o número de planos que \mathbf{v} intercepta e esse número é igual a $\alpha(\mathbf{v})$. (Se \mathbf{v} termina em algum plano, o número $\alpha(\mathbf{v})$ é um inteiro.)

Considerando outra forma $\beta \in V^*$, onde $\beta = 2\alpha$, isto é, $\beta(\mathbf{v}) = 2\alpha(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in V$, os planos então devem estar distribuídos com densidade duas vezes maior. Com isso concluímos que a magnitude (relativa) de uma forma deve ser o inverso da razão da distância entre os planos da forma β e os planos da forma α . Em uma família de formas paralelas, podemos usar um vetor de referência para medir suas magnitudes relativas contando quantos planos de uma dada forma são cortados por esse vetor. Daí uma unidade natural para se medir uma família de formas paralelas é o inverso do comprimento de um vetor de referência. Vale notar que uma 1-forma pode ser interpretada como uma densidade linear.

2-formas

Uma 2-forma, sendo um mapa linear entre bivectores nos escalares, pode ser interpretada como um sistema de prismas (tubos) paralelos de seções retas iguais. Se a 2-forma for par, cada prisma tem um arco direcionado próximo à superfície. No caso de uma 2-forma quiral, cada tubo tem uma seta na direção paralela a suas paredes. O valor de uma 2-forma avaliado em um bivector é (analogamente ao caso de 1-formas) o número de prismas (tubos) que fazem intersecção com o bivector (visto como uma superfície orientada). Claramente uma 2-forma é interpretada como uma densidade superficial.

Exemplos de algumas entidades físicas

Em seu tratado [Max54], Maxwell diz “*Physical vector quantities may be divided into two classes, in one of which the quantity is defined with a reference to a line, while in the other the quantity is defined with reference to an area. In electrical science, electromotive and magnetic intensity belong to the first class, being defined with reference to lines. When we wish to indicate this fact, we may refer to them as Intensities. On the other hand, electric and magnetic induction, and electric currents, belong to the second class, being defined with reference to areas. When we wish to indicate this fact, we shall refer to them as Fluxes.*”

A entidade vetorial mais natural utilizada em teorias físicas é o vetor deslocamento \mathbf{l} , que possui a mesma natureza que o vetor \mathbf{r} de um ponto no espaço, relativo à origem de um referencial. Obviamente a velocidade $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ e a aceleração $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ também são vetores. O momentum \mathbf{p} e a força¹⁰ $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ são considerados 1-formas.

O modelo físico mais simples de um bivector é o que descreve um circuito elétrico plano. Sua magnitude é a área que o circuito engloba e sua orientação é o sentido que a corrente circula. Tal bivector é chamado a *área orientada* do circuito, e é denotado por \mathbf{S} . O momento magnético do circuito é então dado por $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$, onde I é a corrente que passa pelo circuito. As unidades do sistema SI $[\mathbf{m}] = \text{Am}^2$ estão de acordo com tal interpretação [Jan96a].

3.14.2 Eletromagnetismo no contexto da álgebra de Grassmann estendida

Nesta seção revisitamos a descrição de campos e excitações na teoria eletromagnética, já bem estabelecida nos manuscritos de Maxwell [Max54], Hehl [Heh99, Heh00, Heh01, Heh02a, Heh02b], Obukhov [Obu00, Obu02], Kiehn [Kie00], Post [Pos72] e Jancewicz [Jan96a], dentre outros [Bar64, Jac98, Jad98, Bay99a]. As equações de Maxwell carregam informação acerca dos campos \mathbf{B} , \mathbf{E} e excitações \mathbf{D} e \mathbf{H} na teoria eletromagnética, que surge com um caráter também geométrico, se formulada a partir de formas diferenciais quirais e aquirais. Esse tipo de formulação é essencial para incorporarmos a gravitação a teorias que descrevem o eletromagnetismo, já que a presente for-

¹⁰Ao considerarmos a energia potencial um escalar, sua relação com a força (em linguagem padrão do cálculo diferencial) é $dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Isso significa que a força é um mapa linear do vetor infinitesimal $d\mathbf{r}$ ao escalar infinitesimal dU . Tal mapa é a própria definição de 1-forma, e com essa válida interpretação a força é vista como uma 1-forma. Pela segunda lei de Newton ($\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$) o momento \mathbf{p} também deve ser uma 1-forma.

mulação independe de uma métrica no espaço e pode ser realizada nos espaços tangentes de qualquer variedade diferenciável que modele o espaço-tempo.

A teoria eletromagnética tem uma clara interpretação geométrica se o seu formalismo é apresentado em um espaço sem métrica, usando quatro campos de formas diferenciais [Heh99, Heh00, Heh01, Heh02a, Heh02b, Jan96a, Max54, Jan96b]: a indução magnética \mathbf{B} , o campo magnético \mathbf{H} , o deslocamento elétrico \mathbf{D} e o campo elétrico \mathbf{E} . O campo elétrico \mathbf{E} é interpretado como um campo de 1-formas aquiral ($\mathbf{E} \in \sec(T_x^*\Sigma)$), já que \mathbf{E} é um mapa linear de $d\mathbf{r}$ ao escalar dV , dado por $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$. A dimensão física de $\mathbf{E}(x)$ no SI ($[\mathbf{E}] = \text{Vm}^{-1}$) atesta tal interpretação. A indução magnética \mathbf{B} é um exemplo de campo de 2-formas aquiral ($\mathbf{B} \in \sec \Lambda^2(T_x^*\Sigma)$), já que \mathbf{B} é um mapa linear do bivector $d\mathbf{S}$ ao escalar $d\Phi = -\mathbf{B} \lrcorner d\mathbf{S}$, onde Φ é o fluxo magnético. A dimensão física de \mathbf{B} no SI é dada por $[\mathbf{B}] = \text{Wbm}^{-2} = \text{T}$ (= Tesla). O campo magnético \mathbf{H} é representado por uma 1-forma quiral e no SI, $[\mathbf{H}] = \text{Am}^{-1}$, enquanto que o deslocamento elétrico \mathbf{D} tem unidade no SI $[\mathbf{D}] = \text{Cm}^{-2}$.

3.14.3 Equações de Maxwell homogêneas e potenciais

O operador diferencial $d : \sec \Lambda^k(T_x^*\Sigma) \rightarrow \sec \Lambda^{k+1}(T_x^*\Sigma)$ não muda a quiralidade das formas. A primeira das equações de Maxwell relaciona 2-formas aquirais pela equação

$$\boxed{d\mathbf{E} + \partial_0\mathbf{B} = 0} \quad (3.113)$$

A ausência de monopólos magnéticos pode ser traduzida na seguinte equação

$$\boxed{d\mathbf{B} = 0} \quad (3.114)$$

Essas são as duas equações de Maxwell homogêneas. Da eq.(3.114), usando o lema de Poincaré¹¹ podemos admitir a existência de um campo de 1-formas aquiral \mathbf{A} (o potencial magnético) que satisfaz a relação $\mathbf{B} = d\mathbf{A}$. Substituindo na eq.(3.113), obtemos $d\mathbf{E} + \partial_0 d\mathbf{A} = 0$, ou $d(\mathbf{E} + \partial_0\mathbf{A}) = 0$. O lema de Poincaré permite a existência de um potencial escalar $\Phi \in \Lambda^0(T_x^*\Sigma)$ tal que $\mathbf{E} + \partial_0\mathbf{A} = -d\Phi$, de onde é possível escrever

$$\mathbf{E} = \partial_0\mathbf{A} - d\Phi. \quad (3.115)$$

3.14.4 Equações de Maxwell não-homogêneas

Considere a densidade de corrente elétrica \mathbf{j} como um elemento de $\sec \mathring{\Lambda}^2(T_x^*\Sigma)$, viz., um campo de 2-formas quiral [Heh99, Heh00]. Então $d\mathbf{j} \in \sec \mathring{\Lambda}^3(T_x^*\Sigma)$ e podemos escrever a equação da continuidade (forma local de conservação da carga elétrica)

$$d\mathbf{j} + \partial_t\rho = 0, \quad (3.116)$$

¹¹O lema de Poincaré nos diz que se um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é *contrátil a um ponto* com respeito à origem, toda forma fechada é exata em Ω . (Uma forma ω é fechada se $d\omega = 0$ e exata se existir η tal que $\omega = d\eta$.) [Nak96, Bur85].

onde ρ é a densidade de carga elétrica, de onde concluímos que ρ é uma 3-forma quiral, i.e, $\rho \in \sec \mathring{\Lambda}^3(T_x^*\Sigma)$. Quando $T_x^*\Sigma \simeq \mathbb{R}^3$, obviamente $d\rho = 0$, e a partir do lema de Poincaré, existe $\mathbf{D} \in \sec \mathring{\Lambda}^2(T_x^*\Sigma)$ tal que

$$\boxed{d\mathbf{D} = \rho} \quad (3.117)$$

\mathbf{D} é denominado *deslocamento elétrico*. Substituindo na eq.(3.116) então $d\mathbf{j} + \partial_t(d\mathbf{D}) = 0$ e assim $d(\mathbf{j} + \partial_t\mathbf{D}) = 0$. Novamente o lema de Poincaré assegura a existência de uma 1-forma quiral $\mathbf{H} \in \sec \mathring{\Lambda}^1(T_x^*\Sigma)$ tal que

$$\boxed{\mathbf{j} + \partial_t\mathbf{D} = d\mathbf{H}} \quad (3.118)$$

Essa é a forma local da lei de Ampère-Oersted. Os elementos \mathbf{D} e \mathbf{H} são potenciais relativos às fontes ρ e \mathbf{j} respectivamente.

O campo de 3-formas de Poynting \mathbf{S} é definido como a 3-forma quiral $\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$. As densidades de energia dos campos elétrico e magnético, $\mathbf{w}_e, \mathbf{w}_m \in \sec \mathring{\Lambda}^3(T_x^*\Sigma)$, são descritas respectivamente como $\mathbf{w}_e = \frac{1}{2}\mathbf{E} \wedge \mathbf{D}$ e $\mathbf{w}_m = \frac{1}{2}\mathbf{H} \wedge \mathbf{B}$. Finalmente expressamos a densidade de energia do campo eletromagnético como $\mathbf{w} = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_m = \frac{1}{2}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{D} + \mathbf{H} \wedge \mathbf{B})$.

3.14.5 Intensidade e excitação eletromagnéticas

Dada uma decomposição local $\mathbb{R}^{1,3} = \Sigma \times I$, onde Σ é uma fatia espacial e I denota um intervalo de tempo, podemos expressar a intensidade do campo electromagnético $F \in \sec \Lambda^2(T_x^*M)$ como $F = \mathbf{B} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{e}^0$, e a excitação eletromagnética como uma 2-forma quiral $G = \mathbf{D} - \mathbf{H} \wedge \mathbf{e}^0$. Eqs.(3.113, 3.114) podem ser escritas univocamente como

$$\boxed{dF = 0} \quad (3.119)$$

e as eqs.(3.117, 3.118) como

$$\boxed{dG = J} \quad (3.120)$$

quando $J = \rho - \mathbf{j} \wedge \mathbf{e}^0 \in \sec \mathring{\Lambda}^3(T_x^*\Sigma)$ é definido.

3.14.6 Relações constitutivas no vácuo

Considerando $T_x^*\Sigma \simeq \mathbb{R}^3$ e o operador dual de Hodge quiral \star_ϵ definido pelas eqs.(3.41, 3.42), as relações constitutivas no vácuo são escritas como

$$G = \star_\epsilon F, \quad (3.121)$$

o que implica que $\mathbf{D} = \epsilon_0 \star_\epsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu_0 \star_\epsilon \mathbf{H}$, onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo e μ_0 denota a permeabilidade magnética do vácuo. Usando eq.(3.119) temos

$$F = dA \quad (3.122)$$

onde $A \in \sec \Lambda^1(T_x^*M)$ é a 1-forma potencial eletromagnético. A Eq.(3.122) é invariante perante mapas $A \mapsto A + d\lambda$, $\lambda \in \sec(T_x^*\Sigma)$. A 3-forma quiral spin topológico é definida por [Kie00] $S =$

$A \wedge G \in \sec \mathring{\Lambda}^3(T_x^*M)$ e a 3-forma aquiral torção topológica como $T = A \wedge F \in \sec \Lambda^3(T_x^*M)$. É possível escrever

$$\begin{aligned} T = A \wedge F &= (\mathbf{A} - \phi_0) \wedge (\mathbf{B} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{e}^0) \\ &= \mathbf{A} \wedge \mathbf{B} + (\mathbf{A} \wedge \mathbf{E} - \phi \mathbf{B}) \mathbf{e}^0 \end{aligned} \quad (3.123)$$

e

$$\begin{aligned} S = A \wedge G &= (\mathbf{A} - \phi \mathbf{e}^0) \wedge (\mathbf{D} - \mathbf{H} \wedge \mathbf{e}^0) \\ &= \mathbf{A} \wedge \mathbf{D} + (\mathbf{A} \wedge \mathbf{H} - \phi \mathbf{D}) \mathbf{e}^0 \end{aligned} \quad (3.124)$$

T está relacionada com a helicidade e S com a quiralidade [Kie00, Kie04b] associados ao campo eletromagnético.

A 3-forma quiral de energia-*momentum* \mathbf{U}_i é definida, escolhendo uma direção arbitrária \mathbf{e}_i

$$\mathbf{U}_i = \frac{1}{2} [F \wedge (\mathbf{e}_i \lrcorner G) - G \wedge (\mathbf{e}_i \lrcorner F)] \in \sec \mathring{\Lambda}^3(T_x^*M). \quad (3.125)$$

Essa expressão é invariante sob mapas pseudo-duais $F \mapsto aG$ and $G \mapsto -F/a$, onde a é uma função escalar arbitrária não-nula em todos os pontos de T_x^*M [Kie00]. Em particular, a eq.(3.122) é invariante perante mapas $A(x) \mapsto A(x) + d\lambda(x)$, onde $\lambda(x) \in \Lambda^1(T_x^*M)$. A existência de campos de formas que são fechadas, mas *não* são exatas, origina monopólos e instantons em fluidos, envolvendo importantes aplicações em supercondutividade, defeitos topológicos em termodinâmica fora do equilíbrio em fluidos, digressionadas exaustivamente em [Kie00, Kie04a, Kie04b, Kie04c, Kie04d].

O tensor constitutivo

No formalismo de Hehl que descreve EM em meios lineares [Grn97, Grs01, Heh99, Heh00, Heh01, Heh02a, Heh02b], a ação do operador dual de Hodge é equivalente à ação do tensor constitutivo χ sobre campos de 2-formas:

$$\star_\varepsilon \psi = \chi \psi, \quad \psi \in \sec \Lambda^2(T_x^*M). \quad (3.126)$$

Em meios lineares, a 2-forma intensidade do campo eletromagnético $F \in \sec \Lambda^2(T_x^*M)$ se relaciona com a 2-forma de excitação eletromagnética $G \in \sec \mathring{\Lambda}^2(T_x^*M)$ através da relação

$$F = \chi G. \quad (3.127)$$

Além disso a densidade langragiana é definida como

$$\mathcal{L} = G \wedge F \quad (3.128)$$

No vácuo, as componentes de $\chi \equiv \chi_0$ podem ser escritas como

$$\chi_0^{\lambda\nu\sigma\kappa} = Y_0 \sqrt{\det g} (g^{\lambda\sigma} g^{\nu\kappa} - g^{\lambda\kappa} g^{\nu\sigma}), \quad (3.129)$$

onde Y_0 denota a admitância do vácuo.

A partir do tensor constitutivo χ Post define dois invariantes [Pos72, Pos97]: $\chi_1 = (g \wedge g) \lrcorner \chi$ que chamaremos de curvatura escalar do meio descrito por χ e $\chi_2 = \chi \wedge \chi$ Post [Pos72] mostra que χ_2 é diferente de zero para qualquer meio e argumenta que χ_1 é identicamente nulo em qualquer meio que possua simetria central, o que significa que a curvatura escalar associada ao meio é nula.

Explicitamente expressando χ como uma matriz simétrica 6×6 podemos representar

$$\chi = \begin{pmatrix} -\epsilon & \gamma \\ \gamma^\dagger & \mu^{-1} \end{pmatrix}_{6 \times 6} = \begin{array}{|ccc|ccc|} \hline -\epsilon_{11} & -\epsilon_{12} & -\epsilon_{13} & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ -\epsilon_{21}^* & -\epsilon_{22} & -\epsilon_{23} & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ -\epsilon_{31}^* & -\epsilon_{32}^* & -\epsilon_{33} & \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \\ \hline \gamma_{11}^* & \gamma_{21}^* & \gamma_{31}^* & \zeta_{11} & \zeta_{12} & \zeta_{13} \\ \gamma_{12}^* & \gamma_{22}^* & \gamma_{32}^* & \zeta_{21} & \zeta_{22} & \zeta_{23} \\ \gamma_{13}^* & \gamma_{23}^* & \gamma_{33}^* & \zeta_{31} & \zeta_{32} & \zeta_{33} \\ \hline \end{array}$$

Tabela 1

onde ζ_{lk} denota o inverso da matriz μ_{lk} de permeabilidade magnética, ϵ_{lk} é a matriz de permissividade elétrica e γ_{lk} é a matriz que descreve os efeitos das polarizações elétrica e magnética. Podemos inferir por argumentos físicos que γ_{lk} é nula em meios que possuem simetria central. Em meios isotrópicos temos as seguintes relações:

$$\gamma_{lk} \equiv 0, \quad \epsilon_{lk} = \epsilon_0 \delta_{lk}, \quad \zeta_{lk} = \mu_0^{-1} \delta_{lk}. \tag{3.130}$$

Nesse caso Post prova que $\chi_1 = 0$ e $\chi_2 = -12\epsilon_0/\mu_0$ [Pos97, Pos72].

Estudaremos a propagação da luz em meios cristalinos que apresentam atividade óptica, que são caracterizados por 32 classes [Voi10, Pos97]. Cada classe é representada por uma determinada simetria e é representada na tabela abaixo:

1	C	9	C, z_2, x_2	17	C, z_4	25	z_6
2	z_2	10	z_3, x_2	18	z_4	26	z_3, x_2, \bar{E}_z
3	C, z_2	11	z_3, E_x	19	S_z, x_2	27	z_3, E_z
4	E_z	12	C, z_3	20	S_z	28	C, x_4, y_4
5	z_2	13	z_3	21	C, z_6, x_2	29	x_4, y_4
6	C, z_2, x_2	14	C, z_4, x_2	22	z_6, x_2	30	S_x, S_y
7	z_2, x_2	15	z_4, x_2	23	z_6, E_x	31	C, x_2, y_2, S
8	z_2, E_x	16	z_4, E_x	24	C, z_6	32	x_2, y_2, S

C indica simetria central, S é a permutação cíclica dos índices, E_x é a reflexão com respeito ao plano yz (definições análogas para E_y e E_z), S_x denota a rotação em torno do eixo x seguido de uma reflexão com respeito ao plano yz (e definições análogas para S_y e S_z).

Apenas dezoito das classes de cristais descritas na tabela acima apresentam atividade óptica natural e as correspondentes matrizes γ_{kl} que formam o tensor χ são descritas abaixo (o número

que antecede a matriz descreve a respectiva classe descrita na tabela acima):

$$\begin{aligned}
& 2 \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}; \quad 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_{13} \\ 0 & 0 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 0 \end{pmatrix}; \quad 5 \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{pmatrix}; \quad 7 \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{pmatrix}; \\
& 8 \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad 10, 15, 22 \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{pmatrix}, \quad 11, 16, 23 \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & 0 \\ -\gamma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
& 13, 18, 25 \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ -\gamma_{12} & \gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{pmatrix}; \quad 19 \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad 20 \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{12} & -\gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
& 29, 32 \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{11} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3.14.7 As equações de onda generalizadas para os potenciais

Substituindo a eq.(3.122) na eq.(3.127), podemos escrever

$$G = \chi_{\perp}(dA) \quad (3.131)$$

A equação (3.131) ao ser substituída na eq.(3.120) origina o seguinte:

$$(d_{\perp}\chi)_{\perp}dA = J. \quad (3.132)$$

A equação acima tem a forma de uma equação de onda generalizada, cujas aplicações estão bastante além de sua versão ‘isotrópica’ dada por

$$(d + \delta)^2 A = J. \quad (3.133)$$

A condição de Lorentz (CL) $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial_t \phi = 0$ pode ser escrita como $dA = 0$, e sob o *ansatz*

$$A = A^0 \exp(i\kappa_{\nu} x^{\nu}), \quad \kappa_{\nu} \in \mathbb{C} \quad (3.134)$$

onde $A^0 \in \text{sec}(T_x^* \Sigma)$ é uma 1-forma constante e, a CL é imediatamente conduzida à condição $g^{\mu\nu} A_{\mu} \kappa_{\nu} = 0$, o que significa que o potencial eletromagnético pode ser tomado como sendo ortogonal à 1-forma de frequência $\kappa = \kappa_{\mu} \mathbf{e}^{\mu}$, cujas componentes κ_i denotam os números de onda enquanto que $\kappa_0 = \omega$ é a frequência angular. A eq.(3.132), através do *ansatz* (3.134), pode ser escrita como

$$\chi_{\perp}(A^0 \wedge \kappa \wedge \kappa) = 0 \quad (3.135)$$

cuja solução é detalhadamente investigada em [Pos97].

Até agora elaboramos todo o formalismo explicitando seu conteúdo geométrico utilizando uma formulação algébrica, sem a necessidade de introduzirmos cartas locais e coordenadas. Daqui em diante é nosso intuito descrever as equações de onda generalizadas e comparar com os resultados existentes. Portanto a partir de agora utilizamos uma notação que faz uso de uma carta local em $T_x^*\Sigma \simeq \mathbb{R}^3$ e $T_x^*M \simeq \mathbb{R}^{1,3}$.

Com essa nova notação a eq.(3.131) é reescrita como

$$G^{\mu\nu} = \chi^{\mu\nu\sigma\rho} \partial_\sigma A_\rho, \quad (3.136)$$

e a eq.(3.120) como

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = J^\mu, \quad (3.137)$$

onde $J_\mu := (\star J)_\mu = (\star J) \cdot \mathbf{e}^\mu$. Já a equação (3.132) é escrita como

$$\boxed{\partial_\nu \chi^{\mu\nu\sigma\rho} \partial_\sigma A_\rho = J^\mu} \quad (3.138)$$

cuja versão isotrópica é dada por

$$g^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu A_\rho = J_\rho. \quad (3.139)$$

A condição de Lorentz (CL) é dada por $g^{\mu\nu} \nabla_\nu A_\mu = 0$ e sob o *ansatz*

$$A_\mu = a_\mu \exp(i\kappa_\nu x^\nu), \quad a_\mu, \kappa_\nu \in \mathbb{C} \quad (3.140)$$

a CL é imediatamente conduzida à condição $g^{\mu\nu} a_\mu \kappa_\nu = 0$. A eq.(3.138), através do *ansatz* (3.140), pode ser escrita como

$$\chi^{\mu\nu\sigma\rho} a_\rho k_\nu k_\sigma = 0. \quad (3.141)$$

3.14.8 As equações de onda generalizadas para os campos e excitações

Optamos também nesta seção abordar as equações na forma das componentes dos campos e excitações de maneira por estabelecer também a analogia com os resultados já obtidos na literatura. Escreveremos as equações de Maxwell dadas pelas eqs.(3.113, 3.114, 3.116, 3.118) respectivamente como

$$2\partial_{[i} E_{j]} = -\dot{B}_{ij}, \quad (3.142)$$

$$\partial_{[i} B_{jk]} = 0, \quad (3.143)$$

$$\partial^i H_{ij} = \dot{D}_i + J_i, \quad (3.144)$$

$$\partial^i D_i = \star\rho \quad (3.145)$$

onde $\mathbf{H} = H_{23}\mathbf{e}^1 + H_{31}\mathbf{e}^2 + H_{12}\mathbf{e}^3$ e $\mathbf{B} = B_{ij}\mathbf{e}^{ij}$. Pela Tabela 1, vemos também que segue a expressão $H_{ij} = \frac{1}{2}\chi_{ij}{}^{kl}B_{kl}$, que define interações locais, ao ser substituída na eq.(3.144), permite escrever essa última como

$$\frac{1}{2}\partial^j \chi_{ij}{}^{kl} B_{kl} = \dot{D}_i + J_i. \quad (3.146)$$

Consideramos agora que $J = 0$, com $J = \rho - \mathbf{j} \wedge dt$ e que $\partial_t \chi = 0$, e portanto tomando a derivada temporal da eq.(3.146), obtemos

$$\frac{1}{2} \partial^j \chi_{ij}{}^{kl} \dot{B}_{kl} = \ddot{D}_i. \quad (3.147)$$

Usando a eq.(3.142) e a relação constitutiva $D_i = \epsilon^{ij} E_j$, que descreve meios lineares, onde o tensor ϵ^{ij} é dado pela Tabela 1, então

$$\partial_j \chi^{ij}{}_{kl} \partial^k E_l = -\epsilon^{im} \ddot{E}_m \quad (3.148)$$

Essas equações e a eq.(3.145) com $\rho = 0$, reescrita como

$$\partial_i \epsilon^{ij} E_j \quad (3.149)$$

são dependentes. De fato, da eq.(3.148), obtemos $\partial_i \partial^j \chi_{ij}{}^{kl} \partial_k E_l = -\partial_i \epsilon^{im} \ddot{E}_m = 0$, através da eq.(3.149). A partir do *ansatz*

$$E_l = E_l^0 \exp(ik_\nu x^\mu), \quad (3.150)$$

temos:

$$(ik_p \partial^j \chi_{ij}{}^{pl} + \omega^2 \epsilon^{il}) E_l^0 = 0. \quad (3.151)$$

Podemos extrair de imediato o caráter ondulatório dos campos se considerarmos um caso particular da eq.(3.148). Com efeito, para $i = 1$, a eq.(3.148) é escrita como

$$\chi_{12}{}^{12} \partial_2 \partial_1 E_2 + \chi_{12}{}^{21} \partial_2 \partial_2 E_1 + \chi_{13}{}^{13} \partial_3 \partial_1 E_3 + \chi_{13}{}^{31} \partial_3 \partial_3 E_1 = -\epsilon^{11} \ddot{E}_1. \quad (3.152)$$

e a eq.(3.149) como

$$\epsilon^{11} \partial_1 E_1 + \epsilon^{22} \partial_2 E_2 + \epsilon^{33} \partial_3 E_3 = 0. \quad (3.153)$$

No caso particular de um meio isotrópico e linear, o tensor de permissividade elétrica é dado por $\epsilon^{ij} = \text{diag}(\epsilon, \epsilon, \epsilon)$, enquanto o tensor de permeabilidade magnética é dado por $\mu = \text{diag}(\mu, \mu, \mu)$. Com isso as eqs.(3.152, 3.153) são conduzidas respectivamente a

$$\partial_1 (\partial_2 E_2 + \partial_3 E_3) + \partial_2 \partial_2 E_1 + \partial_3 \partial_3 E_1 = \epsilon \mu \ddot{E}_1, \quad (3.154)$$

$$\partial \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (3.155)$$

Usando essa última, a eq.(3.154) se torna

$$\nabla^2 E_1 = \epsilon \mu \ddot{E}_1 \quad (3.156)$$

As equações de onda para as outras componentes de \mathbf{E} são obtidas analogamente ao se considerar $i = 2, 3$ na eq.(3.148).

De maneira análoga à obtenção das eqs.(3.148, 3.149), podemos também obter equações similares à eq.(3.148) para a indução magnética \mathbf{B} e para as excitações \mathbf{D} e \mathbf{H} , onde definimos $\varrho := \epsilon^{-1}$:

$$\partial_{[i} \varrho_{j]k} \partial_t \chi^{klpq} B_{pq} + \ddot{B}_{ij} = 0 \quad (3.157)$$

$$\boxed{\partial_j \chi^{ij} \partial^k \varrho^{pl} D_p + \ddot{D}_i = 0} \quad (3.158)$$

$$\boxed{2\partial^{[i} \varrho^{j]k} \partial^l H_{kl} + \chi_{ij}{}^{pq} \ddot{B}_{pq} = 0} \quad (3.159)$$

Com o *ansatz* dado analogamente à eq.(3.150), as equações acima podem ainda ser reexpressas. As eqs.(3.157, 3.158, 3.159) não têm em geral um método de resolução trivial, de maneira que nas próximas seções sugerimos um método para colocarmos toda a informação sobre o tensor constitutivo em uma métrica efetiva para o espaço-tempo, e tratar a propagação da luz em qualquer meio como sendo no vácuo associado a um espaço-tempo curvo.

3.14.9 O tensor constitutivo a partir da métrica

O formalismo desenvolvido na Sec. (3.4) é perfeitamente adequado nessa descrição alternativa, pois lá vimos que matrizes que são representações de $\mathcal{C}\ell_{2,4}$ constituem a classe geral de operadores sobre a álgebra de Grassmann estendida $\check{\Lambda}(T_x^*M)$. De fato, os elementos $\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix}$ pertencem a $\check{\Lambda}(T_x^*M)$, pois cada um deles é a soma entre uma forma quiral e uma forma aquiral. Considere o operador $\gamma : \Lambda^2(T_x^*M) \rightarrow \check{\Lambda}^2(T_x^*M)$, definido pela sua ação nos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} como

$$\gamma(\mathbf{B}) = \gamma(B_{ij} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j) := \gamma(B_{ij}) \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}^j, \quad \gamma(\mathbf{E}) = \gamma(E_i \mathbf{e}^i) := \gamma(E_i) \mathbf{e}^i. \quad (3.160)$$

A ação de γ nas excitações \mathbf{D} e \mathbf{H} são definidas analogamente. Esse operador representa fisicamente o efeito de Fizeau-Fresnel [Pos97].

Uma vez definida a relação constitutiva $F = \chi G$, podemos ver que as submatrizes Υ_μ definidas pela eq.(3.18) são dadas nesse caso através da ação

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon_1 & \Upsilon_2 \\ \Upsilon_3 & \Upsilon_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (3.161)$$

com $\Upsilon_1 = -\gamma^{-1}\varepsilon$, $\Upsilon_2 = \gamma^{-1}$, $\Upsilon_3 = -(\gamma^\dagger + \gamma^{-1}\varepsilon\mu^{-1})$, $\Upsilon_4 = \mu^{-1}\gamma^{-1}$. Uma notação mais familiar pode ser adotada:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & \gamma \\ \gamma^\dagger & \mu^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \quad (3.162)$$

onde para o caso de um meio isotrópico uniforme, temos

$$\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_0, \varepsilon_0, \varepsilon_0) \quad \text{e} \quad \mu^{-1} = (\mu_0^{-1}, \mu_0^{-1}, \mu_0^{-1}). \quad (3.163)$$

► **Teorema Espectral:** Sempre existe uma transformação conforme que diagonaliza o tensor constitutivo χ ◀

Isso é simples de se ver já que transformações conformes em $T_x^*M \simeq \mathbb{R}^{1,3}$ são, em suma, rotações no espaço $\mathbb{R}^{2,4}$ que portanto realizam o papel de diagonalização do tensor constitutivo. Pelo Teorema Espectral sempre existe uma matriz Γ dos autovetores da matriz χ tal que $\Gamma^{-1}\chi\Gamma = \Lambda$ é uma matriz diagonal.

Considere agora um meio linear arbitrário, descrito pela matriz

$$\chi = \begin{pmatrix} -\varepsilon & \gamma \\ \gamma^\dagger & \boldsymbol{\mu}^{-1} \end{pmatrix}_{6 \times 6}, \quad \text{onde } \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.164)$$

A matriz (3.164) tem autovalores σ_A ($A = 1, 2, \dots, 6$). Então

$$\Gamma^{-1}\chi\Gamma = \Lambda = \begin{pmatrix} -\Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \quad (3.165)$$

onde

$$\Sigma_1 = -\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \quad \Sigma_2 = -\text{diag}(\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6). \quad (3.166)$$

Ao definirmos $\check{F} = \Gamma^{-1}F$ e $\check{G} = \Gamma^{-1}G$, obtemos as implicações

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \chi \begin{pmatrix} -\mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} \Rightarrow \Gamma \begin{pmatrix} \check{\mathbf{D}} \\ \check{\mathbf{H}} \end{pmatrix} = \chi \Gamma \begin{pmatrix} -\check{\mathbf{E}} \\ \check{\mathbf{B}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \check{\mathbf{D}} \\ \check{\mathbf{H}} \end{pmatrix} = \Gamma^{-1}\chi\Gamma \begin{pmatrix} -\check{\mathbf{E}} \\ \check{\mathbf{B}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\check{\mathbf{E}} \\ \check{\mathbf{B}} \end{pmatrix}. \quad (3.167)$$

Defina os vetores \mathbf{D} e \mathbf{H} como $\mathbf{D} = \Sigma_1^{-1}\check{\mathbf{D}}$, $\mathbf{H} = \Sigma_2^{-1}\check{\mathbf{H}}$ de onde obtemos

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\check{\mathbf{D}} \\ \check{\mathbf{H}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\check{\mathbf{E}} \\ \check{\mathbf{B}} \end{pmatrix}. \quad (3.168)$$

Portanto chegamos à expressão

$$\mathbf{G} = \chi_0 \check{F}, \quad (3.169)$$

onde χ_0 é o tensor constitutivo do vácuo. Ao fazermos os mapas inversos, obtemos, para qualquer meio linear a relação constitutiva $G = \chi F$, onde $\chi = \Gamma\lambda\chi_0\Gamma^{-1}$. Portanto para a completa descrição do tensor constitutivo χ para qualquer meio linear, somente precisamos da matriz γ que descreve tal meio e do tensor constitutivo do vácuo. Em particular, podemos descrever o tensor constitutivo associado às 32 classes de cristais que apresentam atividade óptica unicamente a partir de χ_0 , ou seja, a partir da métrica de Lorentz que mune do espaço-tempo de Minkowski, já que

$$\chi_0^{\lambda\nu\sigma\kappa} = Y_0\sqrt{g}(g^{\lambda\sigma}g^{\nu\kappa} - g^{\lambda\kappa}g^{\nu\sigma}), \quad (3.170)$$

A relação constitutiva pode então ser expressa como

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \chi_{\mu\nu}{}^{\sigma\lambda} F_{\sigma\lambda} \\ &= \frac{Y_0}{4}\sqrt{g} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (\Gamma^\dagger)_\delta^\alpha \Gamma_\rho^\beta \Lambda_\theta^\sigma (g^{\delta\theta}g^{\rho\lambda} - g^{\delta\lambda}g^{\rho\theta}) F_{\sigma\lambda}. \end{aligned} \quad (3.171)$$

Em todo o processo descrito nessa subseção apenas efetuamos transformações conformes em $T_x^*M \simeq \mathbb{R}^{1,3}$ que agem como rotações em $\mathbb{R}^{2,4}$.

3.14.10 Equivalência entre meios cristalinos e o vácuo ‘efetivo’ no espaço curvo

O problema inverso, de se destilar a métrica a partir do tensor constitutivo pode ser visto em [Heh99]. Com o uso da métrica efetiva do espaço-tempo dada em [Heh99], podemos agora tratar o problema da propagação da luz em meios cristalinos como uma questão sobre a propagação da luz no vácuo, em um espaço curvo munido de uma métrica efetiva. Sobre os detalhes geométricos suficientes à construção de uma métrica efetiva veja, e.g. [Rap94]. As componentes da intensidade eletromagnética $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ para o espaço-tempo de Minkowski, são agora relacionadas às componentes do potencial eletromagnético A por

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad (3.172)$$

onde os ∇_μ denotam a derivada covariante na direção do campo vetorial ∂_μ . As equações de Maxwell são resumidas nas seguintes expressões:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (3.173)$$

$$\nabla_\sigma F^{\mu\nu} + \nabla_\mu F^{\nu\sigma} + \nabla_\nu F^{\sigma\mu} = 0. \quad (3.174)$$

A eq.(3.173) pode ainda, ao utilizarmos a eq.(3.172), ser reexpressa como

$$\nabla_\mu \nabla^\nu A_\nu - \nabla_\nu \nabla^\nu A_\mu = J_\mu, \quad (3.175)$$

que pode ser conduzida a

$$\Delta A_\mu := R^\mu{}_\nu A^\nu - \nabla_\nu \nabla^\nu A_\mu = J_\mu, \quad (3.176)$$

onde $R^\mu{}_\nu$ são as componentes do tensor de Ricci e Δ é o laplaciano de de Rham. Numa base coordenada podemos expressar a derivada covariante como $\nabla_\mu e^\nu = \partial_\mu e^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} e^\sigma$, e portanto a métrica efetiva entra nesse caso particular na construção dos símbolos de Christoffel $\Gamma^\nu_{\mu\sigma}$.

3.15 SUSYs e a superálgebra de Poincaré via AC estendida sobre \mathbb{R}^3

Nosso intuito nesta seção é formular o superespaço sobre o espaço de Minkowski usando a AC estendida sobre o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , utilizando a estrutura geométrica advinda do Princípio da Trindade e os *spinors* puros. Para uma apresentação desses conceitos, veja o Apêndice A.

O teorema de Coleman-Mandula, a partir das hipóteses de que

- a) a matriz- S é baseada em uma TQC relativística no espaço-tempo de Minkowski, e
- b) existe uma diferença de energia entre o vácuo e os estados que descrevem partículas,

afirma que a álgebra de Lie mais geral de simetrias de uma TQC relativística em quatro dimensões é dada pela soma direta entre a álgebra de Poincaré e uma álgebra de Lie compacta, o que significa que as transformações descritas pelas duas álgebras comutam [Fuc97]. A fim de contornar as hipóteses do teorema de Coleman-Mandula, TQCs podem ser construídas sobre uma *superálgebra* de Lie, que por definição é um espaço vetorial \mathfrak{g} que pode ser decomposto na soma direta entre dois subespaços \mathfrak{g}_0 (par) e \mathfrak{g}_1 (ímpar), munido de um produto

$$\{\cdot, \cdot\} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad (3.177)$$

que generaliza as propriedades do colchete de Lie [Ada69, Cru83, Fuc97] da seguinte maneira:

1. A decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ constitui uma \mathbb{Z}_2 -gradação com respeito ao produto em (3.177), i.e.:

$$\{\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0\} \hookrightarrow \mathfrak{g}_0, \quad \{\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1\} \hookrightarrow \mathfrak{g}_1, \quad \{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_0\} \hookrightarrow \mathfrak{g}_1, \quad \{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1\} \hookrightarrow \mathfrak{g}_0. \quad (3.178)$$

Para cada valor $x_a \in \mathfrak{g}_a$, o grau de x é uma função que assinala $|x_a| := \deg(x_a) = a$, que é \mathbb{Z}_2 -valorizada, i.e., $\deg(x_a) = 0$ ou 1 .

2. Comutatividade graduada:

$$\{x, y\} = (-1)^{1+|x||y|} \{y, x\}. \quad (3.179)$$

3. Super identidade de Jacobi:

$$(-1)^{|x||z|} \{x, \{y, z\}\} + (-1)^{|x||y|} \{y, \{z, x\}\} + (-1)^{|y||z|} \{z, \{x, y\}\} = 0. \quad (3.180)$$

O subespaço par $\mathfrak{g}_0 \hookrightarrow \mathfrak{g}$ é uma subálgebra de Lie, pois o produto dado pela def.(3.177), quando restrito a \mathfrak{g}_0 , é reconduzido ao comutador:

$$\{\cdot, \cdot\}_{\mathfrak{g}_0} \equiv [\cdot, \cdot] : \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}_0, \quad (3.181)$$

e \mathfrak{g}_0 é denominada *subálgebra bosônica* de \mathfrak{g} , enquanto que \mathfrak{g}_1 é denominado *subespaço fermiônico* de \mathfrak{g} , já que \mathfrak{g}_1 não é subálgebra de \mathfrak{g} .

A superálgebra de Poincaré é comumente *definida*, considerando o espaço afim de Minkowski onde o espaço gerado pelas translações será denotado por V , um espaço \mathbf{S} que carrega a representação espinorial do grupo $\text{Spin}(V)$. Considere também um morfismo simétrico, positivo definido, de representações de $\text{Spin}(V)$:

$$\sigma : \mathbf{S}^* \times \mathbf{S}^* \rightarrow V. \quad (3.182)$$

Existe um único morfismo simétrico [Del99, Gil91]

$$\overset{\Delta}{\sigma} : \mathbf{S} \times \mathbf{S} \rightarrow V \quad (3.183)$$

que se relaciona com σ pela seguinte expressão:

$$\boxed{\sigma_{ab}^\mu \overset{\Delta}{\sigma}{}^{\nu bc} + \sigma_{ab}^\nu \overset{\Delta}{\sigma}{}^{\mu bc} = 2g^{\mu\nu} \delta_a^c} \quad (3.184)$$

onde, fixadas as bases $\{e_\mu\} \subset V$ e $\{f^a\} \subset \mathbf{S}$, a seguinte notação

$$\sigma(f_a, f_b) = \sigma_{ab}^\mu e_\mu, \quad \overset{\Delta}{\sigma}(f^a, f^b) = \sigma^{\mu ab} e_\mu \quad (3.185)$$

foi introduzida. Pode-se mostrar que ao definirmos uma superálgebra de Lie \mathfrak{g} como

$$\mathfrak{g} = V \oplus \mathbf{S}^*, \quad (3.186)$$

identificando assim $\mathfrak{g}_0 = V$ e $\mathfrak{g}_1 = \mathbf{S}^*$, onde V é uma subálgebra central ($[e_\mu, e_\nu] = 0$), e definindo ainda o colchete de Lie em \mathbf{S}^* como sendo 2σ , então ao se tomar uma base $\{e_\mu, f_a\}$ em \mathfrak{g} , os únicos colchetes não-triviais são

$$[f_a, f_b] = 2\sigma_{ab}^\mu e_\mu. \quad (3.187)$$

Na literatura da Física é mais comum denotar e_μ por P_μ , que representa o operador energia-momentum, e f_a por Q_a , que representa os geradores supersimétricos, e a eq.(3.187) pode ser escrita como

$$\boxed{[Q_a, Q_b] = 2\sigma_{ab}^\mu P_\mu} \quad (3.188)$$

Na notação pontuada e apontuada, a álgebra supersimétrica em quatro dimensões, paradigma do formalismo de Wess-Zumino [Web83, Wes70, Wit84, Kak93], é dada por¹²

$$\begin{aligned} \{Q_a, Q_b\} &= 2\sigma_{ab}^\mu P_\mu, \\ \{Q_a, Q_b\} &= \{Q_{\dot{a}}, Q_{\dot{b}}\} = [P_\mu, Q_a] = [P_\nu, Q_{\dot{b}}] = [P_\mu, P_\nu] = 0. \end{aligned} \quad (3.189)$$

Geralmente em termos de coordenadas $\{\theta^\alpha\}$ do superespaço, os operadores P_μ, Q_a podem ser escritos como

$$\begin{aligned} P_\mu &= i\partial_\mu \\ Q_a &= \partial_{\theta^a} - i\sigma_{ab}^\mu \theta^b \partial_\mu \\ Q_{\dot{a}} &= -\partial_{\theta^{\dot{a}}} + i\theta^b \sigma_{ba}^\mu \partial_\mu \end{aligned} \quad (3.190)$$

A superálgebra de Poincaré pode agora ser obtida generalizando-se a Proposição 1 do Apêndice A:

$$\boxed{V \Delta \mathbf{S}^+ \hookrightarrow \mathbf{S}^-, \quad \mathbf{S}^+ \Delta \mathbf{S}^- \hookrightarrow V, \quad \mathbf{S}^- \Delta V \hookrightarrow \mathbf{S}^+} \quad (3.191)$$

Ao invés de considerarmos V um espaço vetorial, podemos considerar qualquer subespaço vetorial \mathcal{A} de uma álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(V, g)$. Essa generalização nos permite duas possibilidades:

1. Se $\dim(V) = n$ tal que $n/2$ é ímpar, temos as inclusões

$$\boxed{\mathcal{A}^+ \Delta \mathbf{S}^+ \hookrightarrow \mathbf{S}^+, \quad \mathbf{S}^+ \Delta \mathbf{S}^- \hookrightarrow \mathcal{A}^+, \quad \mathbf{S}^- \Delta \mathcal{A}^+ \hookrightarrow \mathbf{S}^-} \quad (3.192)$$

2. Se $\dim(V) = n$ tal que $n/2$ é par, temos as inclusões

$$\boxed{\mathcal{A}^- \Delta \mathbf{S}^+ \hookrightarrow \mathbf{S}^-, \quad \mathbf{S}^+ \Delta \mathbf{S}^- \hookrightarrow \mathcal{A}^-, \quad \mathbf{S}^- \Delta \mathcal{A}^- \hookrightarrow \mathbf{S}^+} \quad (3.193)$$

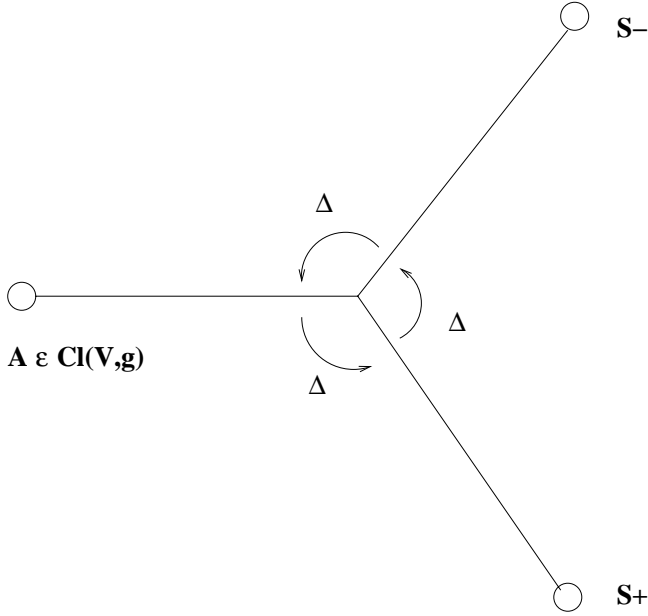


Figura 3.1: Ação do produto de Chevalley em S^\pm e $A \in \mathcal{Cl}(V, g)$.

Tudo isso pode ser ilustrado pela figura

Considere agora o formalismo das ACs estendidas do Cap. 2, i.e., todo o formalismo de agora em diante será feito sobre $\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{D} \otimes \mathbb{R}^3$. tomando a base definida pela eq.(3.48), multiplicada por $1/\sqrt{2}$, só que desta vez em um espaço complexificado:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 + \hat{\mathbf{e}}_3), & \xi_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 + \hat{\mathbf{e}}_1), & \xi_2 &= \frac{1}{2}(i\mathbf{e}_3 + \hat{\mathbf{e}}_1), \\ \xi_3 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 - \hat{\mathbf{e}}_3), & \xi_4 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_2 - \hat{\mathbf{e}}_1), & \xi_5 &= \frac{1}{2}(i\mathbf{e}_3 - \hat{\mathbf{e}}_1), \end{aligned} \quad (3.194)$$

onde $2g(\xi_i, \xi_{3+i}) = 1 = \xi_i \xi_{3+i} + \xi_{3+i} \xi_i$, $0 \leq i \leq 2$. Escolha

$$\mathcal{A} = \Lambda_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{D} \otimes \mathbb{R}^3) \oplus \Lambda_{\mathbb{C}}^6(\mathbb{D} \otimes \mathbb{R}^3). \quad (3.195)$$

Utilizando as propriedades bem conhecidas do produto de Chevalley [Che54, Knu98, Cru91, Cru83] demonstramos primeiramente que

$$\begin{aligned} \xi_3 \xi_4 \xi_5 \Delta \xi_1 \xi_3 \xi_4 \xi_5 &= 2\xi_5 \xi_3, \\ \xi_3 \xi_4 \xi_5 \Delta \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 &= -2\xi_5 \xi_3, \\ \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 \Delta \xi_1 \xi_3 \xi_4 \xi_5 &= 2\xi_1 \xi_3, \\ \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 \Delta \xi_2 \xi_3 \xi_4 \xi_5 &= 2\xi_2 \xi_3. \end{aligned} \quad (3.196)$$

¹²Não estamos considerando no momento os operadores de momento angular.

Por outro lado podemos também verificar as propriedades

$$\begin{aligned} [\mathfrak{v}\xi_3\xi_4\xi_5, \psi] &= 0, \quad \{\mathfrak{v}\xi_3\xi_4\xi_5, \mathfrak{w}\xi_3\xi_4\xi_5\} = -(\mathfrak{v}\xi_3\xi_4\xi_5) \Delta (\mathfrak{w}\xi_3\xi_4\xi_5), \\ \{\mathfrak{v}\xi_3\xi_4\xi_5, \mathfrak{w}\xi_3\xi_4\xi_5\} &= \{\mathfrak{v}\xi_3\xi_4\xi_5, \mathfrak{w}\xi_3\xi_4\xi_5\} = 0, \quad [\psi, \phi] = 0, \end{aligned} \quad (3.197)$$

onde $\mathfrak{v}, \mathfrak{w} \in \mathcal{A}^\pm$, $\psi, \phi = \xi_A \mathbf{e}_i$ ou $\xi_A \hat{\mathbf{e}}_i$. Defina então as variáveis P_μ, Q_μ e $Q_{\dot{\mu}}$ como

	Q_μ	$Q_{\dot{\mu}}$	P_μ
$\mu = 0$	$\xi_2\xi_1\xi_4\xi_3 + \xi_0\xi_3\xi_4\xi_5$	$\xi_0\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5 + \xi_1\xi_3\xi_4\xi_5$	$\xi_2\xi_4 + \xi_0\xi_1 \Delta \xi_3$
$\mu = 1$	$\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5 - \xi_1\xi_3\xi_4\xi_5$	$-\xi_3\xi_4\xi_5 - \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5$	$\xi_1\xi_0\xi_3\xi_5 + \xi_4 \Delta \xi_1\xi_2\xi_5$
$\mu = 2$	$\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5 + \xi_1\xi_3\xi_4\xi_5$	$-\xi_3\xi_4\xi_5 + \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5$	$\xi_3 \Delta \xi_1\xi_3\xi_4\xi_5 - \xi_4$
$\mu = 3$	$\xi_3\xi_0\xi_4\xi_5 - \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\xi_5$	$\xi_3\xi_4\xi_5 + \xi_0\xi_2\xi_4\xi_5$	$\xi_2 \Delta \xi_5 - \xi_0\xi_3\xi_4\xi_5$

Usando agora os resultados em [Cru90, Cru91, Cru83] tais operadores satisfazem as eqs.(3.190)

$$\{Q_a, Q_b\} = 2\varepsilon\sigma_{ab}^\mu P_\mu, \quad (3.198)$$

$$\{Q_a, Q_b\} = \{Q_{\dot{a}}, Q_{\dot{b}}\} = [P_\mu, Q_a] = [P_\nu, Q_b] = [P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (3.199)$$

que são exatamente as equações que definem a superálgebra de Poincaré, excetuando-se o operador de momento angular. As equações acima não vêm somente da necessidade de se generalizar a álgebra de Poincaré a uma teoria supersimétrica, mas são, como foi mostrado nesse capítulo, obtidas partir da generalização do produto de Chevalley ao Princípio da Interação, entre subespaços pares de uma álgebra de Clifford estendida sobre \mathbb{R}^3 , e também a partir do formalismo dos *spinors* puros.

A discussão mais aprofundada acerca das SUSYs está fora do escopo da presente tese, e para mais detalhes sobre o formalismo e suas conseqüências em Física, veja [Cru91, Duf86b, Eva88, Fer97, Foo87, Fro98, Gre87, Kug83, Oda88, Rod95, Sch94, Soh85, Top02, Web83, Wes70].

Capítulo 4

Octonions e aplicações à TQC

Embora os octonions tenham sido usados em teorias físicas pelo menos desde o trabalho de Jordan, von Neumann e Wigner [Jor34], foi nas últimas duas décadas que eles têm tido uma importância cada vez maior. Por exemplo, os octonions têm sido continuamente usados na descrição de teorias de calibre [Fai84, Wit84, Gro89], mecânica quântica [Jor34, Gun78], modelo padrão das partículas elementares [Dix83, Dix94a], triabilidade [Man93, Bli60, Lou01] e supersimetria [Sch94, Nis04, Kug83, Eva88, Gur90, Oda88], teoria de cordas [Har91, Iva93, Gun95, Tac89, Cor88-89, Foo87, Sie87] e supergravidade [Wit84, Duf86a, Duf86b, Gun84], teoria- M [Bec96] e também pela relação natural entre Física e álgebras de divisão [Oda88, Dun84, Dun91], dentre outras aplicações. O formalismo aqui desenvolvido tem o intuito de esclarecer e generalizar algumas das idéias já vigentes nessas áreas e traz consigo a noção de supersimetria, relativa à associatividade graduada.

O produto- X foi pela primeira vez apresentado [Ced95] para se definir corretamente as regras de transformação dos campos bosônicos (vetores) e fermiônicos (*spinors*) sobre a esfera S^7 . Esse produto está intimamente relacionado ao transporte paralelo de uma base do espaço tangente no ponto X (que corresponde a um campo vetorial) em S^7 , e pode-se provar que tal produto é duas vezes a torção paralelizável [Ced93, Ker58], dada pelo tensor de torção. Esse tensor varia de ponto a ponto sobre S^7 devido à não-associatividade de \mathbb{O} , e é não-nulo devido à não comutatividade de \mathbb{O} . Em particular, o produto- X é usado para se investigar a álgebra de Kač-Moody em S^7 [Ced95, Sth04]. Tal produto tem sido usado também para se obter mapas de triabilidade e G_2 -ações [Dix94a, Beg88], e está relacionado a algumas notáveis propriedades geométricas e topológicas, como por exemplo as fibrações de Hopf, que serão analisadas na sec.(4.4). As aplicações dos octonions à física datam de 1934, quando Jordan, von Neumann e Wigner generalizaram o formalismo da mecânica quântica utilizando os octonions. Desde então têm-se notado muitas aplicações em física teórica [Kug83, Gun78, Gur96]. A importância fundamental dos octonions na procura por uma teoria de unificação se baseia, por exemplo, no fato de que ao se estender as superálgebras, que tomam valores nas álgebras de divisão \mathbb{R} , \mathbb{C} e \mathbb{H} aos octonions, uma superálgebra de Poincaré pode ser construída em um espaço de onze dimensões, a chamada M -álgebra octoniônica, que descreve a teoria- M octoniônica [Top02].

Este capítulo é dedicado à generalização do produto- X , à definição de uma estrutura de álgebras de Clifford para as aplicações $-\zeta$ e ao fornecimento de uma estrutura algébrica necessária e suficiente para se definir os produtos- ζ e $-\zeta\xi$ ($\zeta, \xi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$), que naturalmente generalizam respectivamente o produto- X e o produto- XY , $X, Y \in \mathbb{O}$ e $X, Y \in S^7$. Apresentamos também as operações- ζ_\bullet , úteis para expressar os produtos definidos de uma maneira bem específica e simples. A partir disso o Modelo Padrão das partículas elementares é proposto de uma maneira bem natural, onde os *spinors* que descrevem as partículas são elementos de $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$. Além disso as dimensões extras do formalismo desaparecem de maneira natural, sendo que as quatro dimensões associadas ao espaço-tempo de Minkowski são recuperadas, ao se utilizar as projeções redutivas. Finalmente propomos um modelo para teorias de calibre em espaços de oito dimensões.

4.1 Octonions: preliminares

Enfatizamos que essa primeira seção é de caráter um pouco mais formal, a fim de que posteriormente, ainda neste capítulo, possamos aplicar o formalismo desenvolvido ao formalismo do Modelo Padrão.

Denotemos por $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ e \mathbb{O} (respectivamente) as álgebras de divisão (reais, complexos, quaternions e octonions). A álgebra dos octonions, \mathbb{O} , é gerada por paravetores de $\mathcal{C}\ell_{0,7}$ $\{e_0 = 1, e_a\}_{a=1}^7$ que satisfazem

$$e_a \circ e_b = \varepsilon_{ab}^c e_c - \delta_{ab} \quad (b, c = 1, \dots, 7), \quad (4.1)$$

onde denotamos $\circ : \mathbb{O} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$ o produto octoniônico e o tensor de Levi-Civita $\varepsilon_{ab}^c = 1$, para as permutações cíclicas $(abc) = (126), (327), (341), (452), (563), (674)$ e (715) . O produto entre octonions pode ser construído a partir das álgebras de Clifford $\mathcal{C}\ell_{0,7}$ como

$$A \circ B = \langle AB(1 - \psi) \rangle_{0 \oplus 1}, \quad A, B \in \mathbb{O}$$

onde $\psi = e_1 e_2 e_4 + e_2 e_3 e_5 + e_3 e_4 e_6 + e_4 e_5 e_7 + e_5 e_6 e_1 + e_6 e_7 e_2 + e_7 e_1 e_3 \in \Lambda^3(\mathbb{R}^{0,7}) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,7}$ e a justaposição denota o produto de Clifford [Lou01]. A idéia de introduzir o produto octoniônico através do produto de Clifford nesse contexto é apresentar nosso formalismo de agora em diante usando somente a arena das álgebras de Clifford.

A tabela de multiplicação que representa as relações (4.1) é apresentada:

1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_6	e_4	$-e_3$	e_7	$-e_2$	$-e_5$
e_2	$-e_6$	-1	e_7	e_5	$-e_4$	e_1	$-e_3$
e_3	$-e_4$	$-e_7$	-1	e_1	e_6	$-e_5$	e_2
e_4	e_3	$-e_5$	$-e_1$	-1	e_2	e_7	$-e_6$
e_5	$-e_7$	e_4	$-e_6$	$-e_2$	-1	e_3	e_1
e_6	e_2	$-e_1$	e_5	$-e_7$	$-e_3$	-1	e_4
e_7	e_5	e_3	$-e_2$	e_6	$-e_1$	$-e_4$	-1

Todas as relações acima podem ser expressas como $e_a \circ e_{a+1} = e_{a+5 \pmod 7}$.

4.2 Aplicações- ζ

Sejam $\psi, \phi, \zeta \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$. Defina duas aplicações $\diamond : \mathcal{C}\ell_{p,q} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{p,q}$ e $(\circ) : \mathcal{C}\ell_{p,q} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{p,q}$ como:

$$\boxed{\diamond\psi := \zeta^{-1}\psi} \quad (4.2)$$

$$\boxed{\dot{\psi} := \psi\zeta} \quad (4.3)$$

onde a justaposição denota produto de Clifford. Essas operações motivam a generalização do produto- X [Ced95, Dix94a], que será obtido mais adiante quando restringimos $\zeta \in \mathbb{O} \simeq (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}, \circ)$. Além disso, o operador \diamond pode simular um produto de Clifford:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} \diamond \dot{\phi} + \dot{\phi} \diamond \dot{\psi} &= \psi\zeta\zeta^{-1}\phi\zeta + \phi\zeta\zeta^{-1}\psi\zeta \\ &= (\psi\phi + \phi\psi)\zeta \\ &= 2g(\psi, \phi)\zeta \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde o elemento $\zeta \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$ age como a unidade, já que $\psi \diamond \zeta = \psi = \zeta \diamond \psi$. Esse conceito será abordado no próximo capítulo para obtermos os levantamentos isotópicos das ACs.

4.3 O produto- ζ e generalizações

De agora em diante consideramos $\zeta, \xi \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ e $X, Y \in \mathbb{O}$ fixos tais que $X\bar{X} = \bar{X}X = 1 = Y\bar{Y} = \bar{Y}Y$ ($X, Y \in S^7$).

4.3.1 O Produto- X e suas extensões

O produto- X é definido [Ced95, Ced93, Dix94a] por

$$\boxed{A \circ_X B := (A \circ X) \circ (\bar{X} \circ B)} \quad (4.5)$$

É imediato provar que

$$\boxed{A \circ_X B = X \circ ((\bar{X} \circ A) \circ B) = (A \circ (B \circ X)) \circ \bar{X}} \quad (4.6)$$

Já o produto- XY é dado por:

$$\boxed{A \circ_{X,Y} B := (A \circ X) \circ (\bar{Y} \circ B)} \quad (4.7)$$

Em particular, o produto- $(1, X)$ é definido por

$$\boxed{A \circ_{1,X} B := A \circ (\bar{X} \circ B)} \quad (4.8)$$

Relacionado ao produto- $(1, X)$ acima, $X \in \mathbb{O}$ se porta como a unidade, já que $A \circ_{1,X} X = X \circ_{1,X} A = A$.

Poderíamos propor uma generalização natural para o produto- X , definindo o produto- ζ como

$$\boxed{A \circ_{\zeta} B := (A\zeta) \circ (\zeta^{-1}B)} \quad (4.9)$$

Mas se os produtos $A\zeta$ e $\zeta^{-1}B$ forem interpretados como produtos de Clifford, os elementos $\zeta \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ tais que $A\zeta$ e $\zeta^{-1}B$ sejam octonions devem ser escalares. Nesse caso trivial $A \circ_{\zeta} B \equiv A \circ B$ e não haveria nada de novo para se mostrar.

Para que a eq.(4.9) faça sentido, todas as quantidades entre parênteses devem ser octonions, e para se evitar o caso trivial (onde ζ deve ser um escalar), temos que definir um produto entre octonions e elementos da álgebra de Clifford, resultando em um octonion. Portanto, para multivetores homogêneos $\zeta = \zeta_1 \dots \zeta_k \in \Lambda^k(\mathbb{R}^{0,7}) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,7}$ e $A \in \mathbb{O}$, definimos o produto $\bullet : \mathbb{O} \times \Lambda^k(\mathbb{R}^{0,7}) \rightarrow \mathbb{O}$ como:

$$\boxed{A \bullet \zeta := ((\dots (A \circ \zeta_1) \circ \zeta_2) \circ \dots) \circ \zeta_{k-1}) \circ \zeta_k} \quad (4.10)$$

Por abuso de notação também denotamos o produto $\bullet : \Lambda^k(\mathbb{R}^{0,7}) \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$ da mesma maneira, e tal produto se define como

$$\boxed{\zeta \bullet A = \zeta_1 \circ (\dots \circ (\zeta_{k-1} \circ (\zeta_k \circ A)) \dots)} \quad (4.11)$$

Esse produto é naturalmente estendido para $\bullet : \mathbb{O} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} \rightarrow \mathbb{O}$ e $\bullet : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$, por linearidade.

4.3.2 O produto- ζ e suas extensões

O produto- ζ , $\circ_{\zeta} : \mathbb{O} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$, é então definido como

$$\boxed{A \circ_{\zeta} B := (A \bullet \zeta) \circ (\zeta^{-1} \bullet B)} \quad (4.12)$$

Podemos imediatamente mostrar que

$$\boxed{A \circ_{\zeta} B = (A \circ (B \bullet \zeta)) \bullet \zeta^{-1} = \zeta \bullet ((\zeta^{-1} \bullet A) \circ B)} \quad (4.13)$$

As expressões (4.13) serão importantes no decorrer do capítulo.

Exemplo 4.1: Vamos calcular o produto $e_1 \circ_{\zeta} e_4$, dado $\zeta = e_2 e_7$:

$$\begin{aligned} e_1 \circ_{\zeta} e_4 &= [e_1 \bullet (e_2 e_7)] \circ [(e_2 e_7)^{-1} \bullet e_4] \\ &= [(e_1 \circ e_2) \circ e_7] \circ [-e_2 \circ (e_7 \circ e_4)] \\ &= [e_6 \circ e_7] \circ [-e_2 \circ e_6] \\ &= -e_4 \circ (-e_1) \\ &= 1e_3. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Notando que $e_1 \circ e_4 = e_3$ e que também $e_1 \circ_{1,\zeta} e_4 = e_3$, podemos ainda provar, usando eq.(4.1) e a propriedade $\epsilon_{abc}\epsilon_{dec} = \delta_{ad}\delta_{be} - \delta_{ae}\delta_{bd} := \epsilon_{ijklm}$, que $A \circ_{\zeta} B = A \circ B$, quando ζ é um multivetor de norma unitária. Quando $u \in \mathbb{O}$, é claro que o produto- u é equivalente ao produto- X .

É possível também definir outro produto, o produto- $(1, \zeta)$ $\circ_{1, \zeta} : \mathbb{O} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$, como

$$\boxed{A \circ_{1, \zeta} B := A \circ (\zeta^{-1} \bullet B)} \quad (4.15)$$

que naturalmente generaliza o produto- $(1, X)$ para multivetores de Clifford.

Como generalização das aplicações- ζ , definidas pelas eqs.(4.2), definimos as aplicações- ζ_\bullet como:

$$\boxed{\diamond_\bullet A := \zeta^{-1} \bullet A} \quad (4.16)$$

e

$$\boxed{\dot{A}_\bullet := A \bullet \zeta} \quad (4.17)$$

Portanto o produto- ζ pode ser escrito em termos das aplicações- ζ_\bullet e daí em termos da descrição de Lounesto [Lou01], como se segue:

$$\begin{aligned} A \circ_\zeta B &= (A \bullet \zeta) \circ (\zeta^{-1} \bullet B) \\ &= \dot{A}_\bullet \circ (\diamond_\bullet B) \\ &= \langle \dot{A}_\bullet \diamond_\bullet B (1 - \psi) \rangle_{0 \oplus 1}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

O produto $\circ_{1, \zeta}$ pode ser também escrito como

$$\begin{aligned} A \circ_{1, \zeta} B &= A \circ (\zeta^{-1} \bullet B) \\ &= \langle A \diamond_\bullet B (1 - \psi) \rangle_{0 \oplus 1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Finalmente a eq.(4.7) é generalizada ao se definir o produto- (ζ, ξ) $\circ_{\zeta, \xi} : \mathbb{O} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$, dados $\zeta, \xi \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ fixos mas arbitrários, como:

$$\boxed{A \circ_{\zeta, \xi} B := (A \bullet \zeta) \circ (\xi^{-1} \bullet B)} \quad (4.20)$$

Exemplo 4.2: Calculemos o produto $e_1 \circ_{\zeta, \xi} e_4$, onde $\zeta = e_4 e_6 e_7$ e $\xi = e_1 e_5$:

$$\begin{aligned} e_1 \circ_{\zeta, \xi} e_4 &= [e_1 \bullet (e_4 e_6 e_7)] \circ [(e_1 e_5)^{-1} \bullet e_4] \\ &= [((e_1 \circ e_4) \circ e_6) \circ e_7] \circ [-e_1 \circ (e_5 \circ e_4)] \\ &= [(e_3 \circ e_6) \circ e_7] \circ [-e_1 \circ (-e_2)] \\ &= (-e_5 \circ e_7) \circ (e_6) \\ &= -e_1 \circ e_6 \\ &= e_2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.3.3 \mathbb{O} -unidades relativas ao produto- $(1, \zeta)$

Enunciaremos a seguir alguns resultados que nos são necessários para mostrar que a álgebra \mathbb{O} dos octonions é isomorfa à álgebra $\mathbb{O}_{1, \zeta}$, que consiste no espaço vetorial $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}$ munido do produto $\circ_{1, \zeta}$. Com isso podemos generalizar, como faremos na próxima seção, o modelo de Dixon [Dix83, Dix84, Dix86, Dix90a, Dix90b, Dix94a, Dix04] para o Modelo Padrão, com algumas extensões de

estruturas geométricas e possíveis aplicações que emergem a partir dessa presente generalização. As demonstrações dos lemas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 são feitas se utilizando todas as possíveis combinações dos elementos $\{e_a\}_{a=1}^7$. Enfatizamos ainda que está implícito nos lemas abaixo que $\zeta \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ não é um escalar, pois nesse caso não haveria nada a se acrescentar.

Lema 4.1 ► Dados $A, B \in \mathbb{O}$, os elementos $\zeta \in \Lambda^{2k}(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,7}$ satisfazem a relação $(\zeta \bullet A) \circ B = \zeta \bullet (A \circ B)$, enquanto que os elementos $\zeta \in \Lambda^{2k+1}(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{0,7}$ satisfazem a relação $(\zeta \bullet A) \circ B = -\zeta \bullet (A \circ B)$. Esse resultado pode ser escrito como

$$\boxed{(\zeta \bullet A) \circ B = \hat{\zeta} \bullet (A \circ B)}$$

Vale ainda a relação

$$\boxed{A \circ (B \bullet \zeta) = (A \circ B) \bullet \hat{\zeta}} \blacktriangleleft$$

Observação: Pelo fato de que $A \bullet B \equiv A \circ B$ quando $A, B \in \mathbb{O}$, as afirmações do Lema 1 são obviamente equivalentes às expressões $(\zeta \bullet A) \bullet B = \hat{\zeta} \bullet (A \bullet B)$ e $A \bullet (B \bullet \zeta) = (A \bullet B) \bullet \hat{\zeta}$, de onde pode ser visto que a denominação ‘associatividade graduada’ vale para as expressões do enunciado no Lema 1.

Lema 4.2 ► Os elementos $\zeta \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ satisfazem a relação

$$\boxed{(\zeta \bullet A) \circ B = -(\zeta \bullet B) \circ A} \blacktriangleleft$$

Lema 4.3 ► Os elementos $\zeta \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ satisfazem a relação

$$\boxed{\zeta \bullet A = A \bullet \bar{\zeta}} \blacktriangleleft$$

Para o caso particular onde $\zeta = e_a e_b e_c e_d e_f e_g$ e $A = e_h$ (onde nenhum dos subíndices é igual), temos que $\zeta \bullet A = -1 = A \bullet \zeta$.

Lema 4.4 ► Os elementos $\zeta \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ satisfazem a relação

$$\boxed{\zeta^{-1} \bullet (\zeta \bullet A) = A = (A \bullet \zeta) \bullet \zeta^{-1}} \blacktriangleleft \quad (4.22)$$

Lema 4.5 ► Dados $\zeta \in \mathcal{C}\ell_{0,7}, A \in \mathbb{O}$, temos:

$$\boxed{\zeta \bullet (A \bullet \zeta) = (\zeta \bullet A) \bullet \zeta = \zeta \bullet A \bullet \zeta} \blacktriangleleft \quad (4.23)$$

Os lemas acima, além de serem resultados originais que generalizam o \mathbb{O} -produto, incluindo também elementos da álgebra de Clifford, nos fornecem o pré-requisito formal para que possamos construir a tabela multiplicativa dos elementos $\{E_A\}_{A=1}^7$, definidos como

$$\begin{aligned} E_1 &= \zeta \bullet e_1, & E_2 &= \zeta \bullet e_2, & E_3 &= \zeta \bullet e_3, & E_4 &= \hat{\zeta} \bullet e_4, \\ E_5 &= \zeta \bullet e_5, & E_6 &= \hat{\zeta} \bullet e_6, & E_7 &= \hat{\zeta} \bullet e_1. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Podemos demonstrar imediatamente, por verificação explícita em cada um dos octonions definidos pelas eqs.(4.24), o

Lema 4.6 ► *Os octonions E_a anticomutam entre si com relação ao produto (\cdot, ζ) , ou seja,*

$$\boxed{E_a \circ_{1,\zeta} E_b = -E_b \circ_{1,\zeta} E_a} \blacktriangleleft$$

Demonstração: verificação explícita em cada um dos octonions definidos pelas eqs.(4.24). Quando $\{a, b\} = \{1, 2, 3, 5\}$, vemos que

$$\begin{aligned} E_a \circ_{1,\zeta} E_b &= (\zeta \bullet e_a) \circ (\zeta^{-1} \bullet (\zeta \bullet e_b)) \\ &= (\zeta \bullet e_a) \circ e_b, \quad \text{pelo Lema 4.4} \\ &= -(\zeta \bullet e_b) \circ e_a, \quad \text{pelo Lema 4.2} \\ &= -(\zeta \bullet e_b) \circ (\zeta^{-1} \bullet (\zeta \bullet e_a)) \\ &= -E_b \circ_{1,\zeta} E_a. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Os outros casos, quando $\{a, b\} \neq \{1, 2, 3, 5\}$ são analogamente demonstrados. \square

Além disso a tabela de multiplicação é herdada da tabela 4.1. Exibiremos a seguir os cálculos para a primeira linha da tabela a ser exibida logo a seguir, e as outras linhas seguem de maneira análoga.

$$\begin{aligned} E_1 \circ_{1,\zeta} E_2 &= (\zeta \bullet e_1) \circ (\zeta^{-1} \bullet (\zeta \bullet e_2)) \\ &= (\zeta \bullet e_1) \circ e_2, \quad \text{pelo Lema 4.4} \\ &= \hat{\zeta} \bullet (e_1 \circ e_2), \quad \text{pelo Lema 4.1} \\ &= \hat{\zeta} \bullet e_6 \\ &= E_6 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Da mesma maneira temos:

$$\begin{aligned} E_1 \circ_{1,\zeta} E_3 &= (\zeta \bullet e_1) \circ (\zeta^{-1} \bullet (\zeta \bullet e_3)) \\ &= (\zeta \bullet e_1) \circ e_3 \\ &= \hat{\zeta} \bullet (e_1 \circ e_3) \\ &= \hat{\zeta} \bullet e_4 \\ &= E_4, \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned} E_1 \circ_{1,\zeta} E_4 = -E_4 \circ_{1,\zeta} E_1 &= -(\hat{\zeta} \bullet e_4) \circ (\zeta^{-1} \bullet (\zeta \bullet e_1)) \\ &= -(\hat{\zeta} \bullet e_4) \circ e_1 \\ &= -\zeta \bullet (e_4 \circ e_1), \quad \text{pelo Lema 4.1} \\ &= -\zeta \bullet e_3 \\ &= -E_3, \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}
E_1 \circ_{1,\zeta} E_5 &= (\zeta \bullet e_1) \circ (\zeta^{-1} \bullet (\zeta \bullet e_5)) \\
&= (\zeta \bullet e_1) \circ e_5 \\
&= \hat{\zeta} \bullet (e_1 \circ e_5) \\
&= \hat{\zeta} \bullet e_7 \\
&= E_7,
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
E_1 \circ_{1,\zeta} E_6 = -E_6 \circ_{1,\zeta} E_1 &= -(\bar{\zeta} \bullet e_6) \circ (\zeta^{-1} \bullet (\zeta \bullet e_1)) \\
&= -(\hat{\zeta} \bullet e_6) \circ e_1 \\
&= -\zeta \bullet (e_6 \circ e_1), \quad \text{pelo lema 4.1} \\
&= -\zeta \bullet e_2 \\
&= -E_2,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Finalmente expressamos a tabela que descreve o produto dos octonions E_A :

1	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
E_1	-1	E_6	E_4	$-E_3$	E_7	$-E_2$	$-E_5$
E_2	$-E_6$	-1	E_7	E_5	$-E_4$	E_1	$-E_3$
E_3	$-E_4$	$-E_7$	-1	E_1	E_6	$-E_5$	E_2
E_4	E_3	$-E_5$	$-E_1$	-1	E_2	E_7	$-E_6$
E_5	$-E_7$	E_4	$-E_6$	$-E_2$	-1	E_3	E_1
E_6	E_2	$-E_1$	E_5	$-E_7$	$-E_3$	-1	E_4
E_7	E_5	E_3	$-E_2$	E_6	$-E_1$	$-E_4$	-1

Com essa tabela, vemos que os E_A são as unidades octonionicas, relativas ao produto- $(1, \zeta)$, parametrizadas por ζ , como vimos na eq.(4.24).

Observação: As identidades de Moufang [Mou34, Dix94a]

$$(A \circ B) \circ (C \circ A) = A \circ (B \circ C) \circ A, \tag{4.31}$$

$$(A \circ B \circ A) \circ C = A \circ (B \circ (A \circ C)), \tag{4.32}$$

$$(A \circ B) \circ (C \circ A) = A \circ (C \circ B) \circ A, \tag{4.33}$$

$$C \circ (A \circ B \circ A) = ((C \circ A) \circ B) \circ A, \tag{4.34}$$

$A, B, C \in \mathbb{O}$ podem ser imediatamente generalizadas para o produto- $(1, \zeta)$, pela tabela (4.3.3), como

$$(A \circ_{1,\zeta} B) \circ_{1,\zeta} (C \circ_{1,\zeta} A) = A \circ_{1,\zeta} (B \circ_{1,\zeta} C) \circ_{1,\zeta} A, \tag{4.35}$$

$$(A \circ_{1,\zeta} B \circ_{1,\zeta} A) \circ_{1,\zeta} C = A \circ_{1,\zeta} (B \circ_{1,\zeta} (A \circ_{1,\zeta} C)), \tag{4.36}$$

$$(A \circ_{1,\zeta} B) \circ_{1,\zeta} (C \circ_{1,\zeta} A) = A \circ_{1,\zeta} (C \circ_{1,\zeta} B) \circ_{1,\zeta} A, \tag{4.37}$$

$$C \circ_{1,\zeta} (A \circ_{1,\zeta} B \circ_{1,\zeta} A) = ((C \circ_{1,\zeta} A) \circ_{1,\zeta} B) \circ_{1,\zeta} A, \quad (4.38)$$

$A, B, C \in \mathbb{O}$.

No caso dos produtos $\bullet : \mathbb{O} \times \Lambda^k(\mathbb{R}^{0,7}) \rightarrow \mathbb{O}$ e $\bullet : \Lambda^k(\mathbb{R}^{0,7}) \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$, as identidades de Moufang não podem ser generalizadas para o caso dos produtos unicamente se utilizando conjugação e involução graduada. Exibiremos dois contraexemplos.

Exemplo 4.3: Uma das identidades de Moufang para os octonions é expressa como

$$(A \circ B) \circ (C \circ A) = A \circ (B \circ C) \circ A, \quad A, B, C \in \mathbb{O}. \quad (4.39)$$

Suponha que uma generalização imediata para tal identidade seja escrever

$$(\zeta \bullet A) \bullet (B \bullet \zeta) = \zeta \bullet (A \bullet B) \bullet \zeta, \quad \zeta \in \mathcal{C}\ell_{0,7}, \quad (4.40)$$

ou mesmo $(\zeta \bullet A) \bullet (B \bullet \zeta) = \hat{\zeta} \bullet (A \bullet B) \bullet \zeta$, $(\zeta \bullet A) \bullet (B \bullet \zeta) = \bar{\zeta} \bullet (A \bullet B) \bullet \zeta$, ou o produto acima com qualquer combinação da involução graduada e/ou conjugação de Clifford sobre u . Para que as expressões sejam denotadas de maneira mais clara, escrevemos a eq.(4.40) como

$$(\zeta \bullet A) \circ (B \bullet \zeta) = \zeta \bullet (A \circ B) \bullet \zeta, \quad \zeta \in \mathcal{C}\ell_{0,7}, \quad (4.41)$$

já que o produto \bullet entre octonions é idêntico ao produto \circ . Tome $\zeta = e_6 e_7 e_1 e_3$, $A = e_2$ e $B = e_5$. Por um lado,

$$(e_6 e_7 e_1 e_3 \bullet e_2) \circ (e_5 \bullet e_6 e_7 e_1 e_3) = -e_4, \quad (4.42)$$

enquanto que

$$e_6 e_7 e_1 e_3 \bullet (e_2 \circ e_5) \bullet e_6 e_7 e_1 e_3 = -e_4. \quad (4.43)$$

Por outro lado, ao tomarmos $\zeta = e_1 e_2 e_3 e_6$, $A = e_4$ e $B = e_7$, temos que:

$$(e_1 e_2 e_3 e_6 \bullet e_4) \circ (e_7 \bullet e_1 e_2 e_3 e_6) = e_6, \quad (4.44)$$

enquanto que

$$e_1 e_2 e_3 e_6 \bullet (e_4 \circ e_7) \bullet e_1 e_2 e_3 e_6 = -e_6. \quad (4.45)$$

Vemos com isso que, para elementos ζ distintos de $\Lambda^4(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7})$, temos tanto que $(\zeta \bullet A) \circ (B \bullet \zeta) = \zeta \bullet (A \circ B) \bullet \zeta$, quanto que $(\zeta \bullet A) \circ (B \bullet \zeta) = -\zeta \bullet (A \circ B) \bullet \zeta$. Essas duas últimas relações não podem ser mutuamente satisfeitas por elementos de mesmo grau em $\mathcal{C}\ell_{0,7}$, o mesmo valendo para o produto dado pela eq.(4.40) com qualquer combinação da involução graduada e/ou conjugação de Clifford sobre ζ . Com os mesmos (contra)exemplos podemos mostrar que as identidades de Moufang

$$(A \circ B \circ A) \circ C = A \circ (B \circ (A \circ C)), \quad (4.46)$$

$$(A \circ B) \circ (C \circ A) = A \circ (C \circ B) \circ A, \quad (4.47)$$

$$C \circ (A \circ B \circ A) = ((C \circ A) \circ B) \circ A, \quad (4.48)$$

não podem ser generalizadas somente utilizando conjugação e involução graduada.

4.3.4 Produto octoniônico entre multivetores de Clifford

Dados os vetores $\{u_p\}_{p=1}^k$ e $\{v_q\}_{q=1}^k$ ($1 \leq k \leq 7$), construímos os elementos homogêneos $\zeta = \zeta_1 \dots \zeta_k, \xi = \xi_1 \dots \xi_k \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$. Definimos agora o produto $\odot_{\perp} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} \rightarrow \mathbb{O}$ como

$$\boxed{\zeta \odot_{\perp} \xi := \zeta_1 \circ (\zeta_2 \circ (\dots \circ (\zeta_k \bullet \xi) \dots))} \quad (4.49)$$

É claro que $e_a \odot_{\perp} e_b := e_a \circ e_b$.

Exemplo 4.4: Calculemos o produto $e_1 e_2 \odot_{\perp} e_3 e_4$:

$$\begin{aligned} e_1 e_2 \odot_{\perp} e_3 e_4 &= e_1 \circ (e_2 \bullet (e_3 e_4)) = e_1 \circ (e_7 \circ e_4) = e_1 \circ e_6 \\ &= -e_2. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Definimos ainda o produto $\odot_{\lrcorner} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} \rightarrow \mathbb{O}$ como

$$\boxed{\zeta \odot_{\lrcorner} \xi := ((\dots \circ (\zeta \bullet \xi_1) \circ \xi_2) \circ \dots) \circ \xi_k} \quad (4.51)$$

Também é imediato ver que $e_a \odot_{\lrcorner} e_b := e_a \circ e_b$.

Exemplo 4.5: Veremos agora que as identidades de Moufang, em particular aquela dada pela eq.(4.31), não podem ser generalizadas para os produtos \odot_{\perp} e \odot_{\lrcorner} . Computemos o produto $e_7 e_3 \odot_{\perp} (e_5 e_4 \odot_{\perp} e_1 e_6) \odot_{\lrcorner} e_7 e_3$:

$$\begin{aligned} e_7 e_3 \odot_{\perp} (e_5 e_4 \odot_{\perp} e_1 e_6) \odot_{\lrcorner} e_7 e_3 &= e_7 e_3 \odot_{\perp} (e_5 \circ (e_4 \bullet e_1 e_6)) \odot_{\lrcorner} e_7 e_3 \\ &= e_7 e_3 \odot_{\perp} (e_5 \circ (e_3 \circ e_6)) \odot_{\lrcorner} e_7 e_3 \\ &= e_7 e_3 \odot_{\perp} (-e_5 \circ e_5) \odot_{\lrcorner} e_7 e_3 \\ &= e_7 e_3 \odot_{\perp} 1 \odot_{\lrcorner} e_7 e_3 \\ &= (e_7 \circ e_3) \bullet e_7 e_3 \\ &= -e_2 \bullet e_7 e_3 \\ &= e_3 \circ e_3 \\ &= -1. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned} (e_7 e_3 \odot_{\perp} e_5 e_4) \odot_{\lrcorner} (e_1 e_6 \odot_{\perp} e_7 e_3) &= (e_7 \circ (e_6 \circ e_4)) \circ (e_1 \circ (e_4 \circ e_3)) \\ &= (e_7 \circ -e_7) \circ (-e_1 \circ e_1) \\ &= 1 \circ 1 \\ &= 1. \end{aligned} \quad (4.53)$$

De maneira análoga podemos ainda mostrar contraexemplos equivalentes que mostram que, em relação ao produto \odot_{\perp} , as identidades dadas pelas eqs.(4.32, 4.33, 4.34) não são generalizáveis.

Essas definições nos permitem ver que o produto- $(1, \zeta)$ pode agora ser generalizado, de modo a englobar e incluir multivetores $\zeta \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ na primeira ou na segunda entradas, como¹:

$$\begin{aligned} \circ_{1,\zeta} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathbb{O} &\rightarrow \mathbb{O} \\ (\psi, A) &\mapsto \psi \circ_{1,\zeta} A := \psi \bullet (\zeta^{-1} \bullet A). \end{aligned} \quad (4.54)$$

De agora em diante as definições abaixo podem ser feitas usando \odot_{\perp} ou \odot_{\lrcorner} , os quais denotamos de agora em diante por \odot . Obviamente, se um dos dois produtos \odot_{\perp} ou \odot_{\lrcorner} for escolhido, a respectiva escolha deve também ser feita em todas as definições que seguem. Definimos

$$\begin{aligned} \circ_{1,\zeta} : \mathbb{O} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} &\rightarrow \mathbb{O} \\ (A, \psi) &\mapsto A \circ_{1,\zeta} \psi := A \circ (\zeta^{-1} \odot \psi), \end{aligned} \quad (4.55)$$

É imediato que pela eq.(4.54) temos $A \circ_{1,\zeta} \zeta = A$, de maneira que o elemento $\zeta \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ atua com a unidade à direita do produto definido através da eq.(4.55). Usando o Lema 4.4 e a eq.(4.54), podemos também provar que $\zeta \circ_{1,\zeta} A = A$, e portanto ζ é também a unidade à esquerda em relação ao produto definido através da eq.(4.55), e então concluímos que a unidade associada ao produto- $(1, \zeta)$ é $\zeta \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$. A última extensão do produto $\circ_{1,\zeta}$, dados $\psi, \phi \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ fixos porém arbitrários, é definida por

$$\begin{aligned} \circ_{1,\zeta} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} &\rightarrow \mathbb{O} \\ (\psi, \phi) &\mapsto \psi \circ_{1,\zeta} \phi := \psi \bullet (\zeta^{-1} \odot \phi), \end{aligned} \quad (4.56)$$

Portanto, $\zeta \circ_{1,\zeta} A = A \circ_{1,\zeta} \zeta = A$, ou seja, ζ é a unidade do produto definido pela eq.(4.15). Agora, dados $\psi, \phi, \omega \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$, os produtos definidos na seção 4.3.2 podem ser imediatamente estendidos² ao definirmos:

$$\begin{aligned} \circ_{\zeta} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathbb{O} &\rightarrow \mathbb{O} \\ (\psi, A) &\mapsto \psi \circ_{\zeta} A := (\psi \odot \zeta) \circ (\zeta^{-1} \bullet A), \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \circ_{\zeta} : \mathbb{O} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} &\rightarrow \mathbb{O} \\ (A, \psi) &\mapsto A \circ_{\zeta} \psi := (A \bullet \zeta) \circ (\zeta^{-1} \odot \psi), \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \circ_{\zeta} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} &\rightarrow \mathbb{O} \\ (\psi, \phi) &\mapsto \psi \circ_{\zeta} \phi := (\psi \odot \zeta) \circ (\zeta^{-1} \odot \phi). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Finalmente o (ζ, ξ) -produto definido pela eq.(4.20) pode ser estendido como:

$$\begin{aligned} \circ_{\zeta,\xi} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathbb{O} &\rightarrow \mathbb{O} \\ (\psi, A) &\mapsto \psi \circ_{\zeta,\xi} A := (\psi \odot \zeta) \circ (\xi^{-1} \bullet A), \end{aligned} \quad (4.60)$$

¹Por abuso de notação denotamos produtos distintos $\circ_{1,\zeta} : \mathbb{O} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$, $\circ_{1,\zeta} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$, $\circ_{1,\zeta} : \mathbb{O} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} \rightarrow \mathbb{O}$ e $\circ_{1,\zeta} : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} \rightarrow \mathbb{O}$ pelo mesmo símbolo $\circ_{1,\zeta}$.

²Analogamente denotamos os produtos abaixo pelo mesmo símbolo por abuso de notação.

$$\begin{aligned} \circ_{\zeta, \xi} : \mathbb{O} \times \mathcal{Cl}_{0,7} &\rightarrow \mathbb{O} \\ (A, \psi) &\mapsto A \circ_{\zeta, \xi} \psi := (A \bullet \zeta) \circ (\xi^{-1} \odot \psi), \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} \circ_{\zeta, \xi} : \mathcal{Cl}_{0,7} \times \mathcal{Cl}_{0,7} &\rightarrow \mathbb{O} \\ (\psi, \phi) &\mapsto \psi \circ_{\zeta, \xi} \phi := (\psi \odot \zeta) \circ (\xi^{-1} \odot \phi). \end{aligned} \quad (4.62)$$

4.3.5 Extensões de \mathbb{O} -álgebras generalizadas

Pela tabela (4.3.3), vimos que $\mathbb{O} \simeq \mathbb{O}_{1, \zeta}$. Veremos agora que \mathbb{O} -álgebras podem ser estendidas. A partir de uma cópia de \mathbb{O}_{ζ} , podemos por exemplo obter a álgebra $\mathbb{O}_{\zeta, C} := (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}, \circ_{\zeta, C})$, $\zeta \in \mathcal{Cl}_{0,7}$ e $C \in \mathbb{O}$. O processo é feito por tomar, na álgebra $\mathbb{O}_{\zeta} = (\mathbb{O}, \circ_{\zeta})$, produtos- $(1, \xi)$, ou seja, dados $A, B \in \mathbb{O}$, efetuamos o produto³:

$$\begin{aligned} A \circ_{\zeta} (\xi^{-1} \circ_{\zeta} B) &= (A \bullet \zeta) \circ \{\zeta^{-1} \bullet [(\xi^{-1} \odot \zeta) \circ (\zeta^{-1} \bullet B)]\} \\ &= (A \bullet \zeta) \circ \{\zeta^{-1} \bullet [\zeta \bullet ((\zeta^{-1} \odot \xi^{-1}) \circ B)]\}, \quad \text{pela eq.(4.13)} \\ &= (A \bullet \zeta) \circ [(\zeta^{-1} \odot \xi^{-1}) \circ B] \\ &= (A \bullet \zeta) \circ (C \circ B) \\ &= A \circ_{\zeta, C} B, \end{aligned} \quad (4.63)$$

onde definimos

$$C = \zeta^{-1} \odot \xi^{-1} \in \mathbb{O}. \quad (4.64)$$

Portanto a álgebra \mathbb{O}_{ζ} é equivalente à álgebra $\mathbb{O}_{\zeta, C}$. Usaremos esse fato na descrição do Modelo Padrão nesse formalismo.

Teorema 4.1 $\blacktriangleright (A \circ_{\zeta} B) \circ_{\zeta} (B^{-1} \circ_{\zeta} C) = \pm A \circ_{B \bullet \zeta} C, \quad \forall A, B, C \in \mathbb{O}, \zeta \in \mathcal{Cl}_{0,7} \blacktriangleleft$

Demonstração:

$$\begin{aligned} (A \circ_{\zeta} B) \circ_{\zeta} (B^{-1} \circ_{\zeta} C) &= \{[(A \bullet \zeta) \circ (\zeta^{-1} \bullet B)] \bullet \zeta\} \circ \{\zeta^{-1} \bullet [(B^{-1} \bullet \zeta) \circ (\zeta^{-1} \bullet C)]\} \\ &= \{[(A \circ (B \bullet \zeta)) \bullet \zeta^{-1}] \bullet \zeta\} \circ \{\zeta^{-1} \bullet [\zeta \bullet ((\zeta^{-1} \bullet B^{-1}) \circ C)]\} \\ &= [A \circ (B \bullet \zeta)] \circ [(\zeta^{-1} \bullet B^{-1}) \circ C] \\ &= \pm [A \circ (B \bullet \zeta)] \circ [(B \bullet \zeta)^{-1} \circ C] \\ &= \pm A \circ_{B \bullet \zeta} C. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Se $B \in \mathbb{O}$ é tal que $B\bar{B} = \bar{B}B = 1$, i.e., $B \in S^7$, então o enunciado do teorema 4.1 se reduz a

$$\blacktriangleright (A \circ_{\zeta} B) \circ_{\zeta} (\bar{B} \circ_{\zeta} C) = \pm A \circ_{B \bullet \zeta} C, \quad \forall A, B, C \in \mathbb{O}, \zeta \in \mathcal{Cl}_{0,7} \blacktriangleleft \quad (4.66)$$

³No desenvolvimento que leva à eq.(4.63), é indiferente o uso do produto \odot_{\downarrow} ou \odot_{\uparrow} , que portanto denotaremos por \odot . Obviamente, a respectiva escolha deve também ser feita na definição de $C \in \mathbb{O}$, dado pela eq.(4.64).

4.4 Octonions, álgebras de Clifford e as fibrações de Hopf

A função energia associada a pontos na esfera S^2 é equivalente à energia proposta pela lei de Coulomb entre partículas carregadas. Alguns trabalhos que concernem física clássica discutem o problema de minimizar a energia entre partículas puntuais sobre S^2 , mas essa área de investigação foi obinubilada pelo advento inicial da mecânica quântica, a partir de 1923. Ademais, tais fibrações são utilizadas no problema de Kepler via mapas de Kustaanheimo-Stiefel envolvendo o oscilador harmônico [Kus65, Bas03].

4.4.1 A fibração de Hopf $S^1 \cdots S^3 \rightarrow S^2$

A fibração de Hopf $\rho : S^3 \rightarrow S^2$ surge em vários e diferentes conceitos relacionados diretamente, por exemplo, à Física [Hop31, Tru77, tHo79, Ryd80] e à Medicina [Spp98].

Para todo ponto p na esfera S^2 , sua pré-imagem é um círculo S^1 em S^3 . Existem várias descrições dessa fibração de Hopf. Uma delas é que, como uma subvariedade de \mathbb{R}^4 , a 3-esfera S^3 é dada por $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 = 1\}$, enquanto que S^2 , enquanto uma subvariedade de \mathbb{R}^3 , é dada por $\{(y_1, y_2, y_3) : (y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2 = 1\}$.

O mapa de Hopf é dado explicitamente por

$$\begin{aligned} y_1 &= 2(x_1 x_2 + x_3 x_4), \\ y_2 &= 2(x_1 x_4 - x_2 x_3), \\ y_3 &= x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Todo ponto em S^2 corresponde a um círculo denominado círculo de Hopf em S^3 . Podemos ainda verificar que ρ realmente mapeia S^3 em S^2 , já que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1. \quad (4.68)$$

A fibração de Hopf $S^1 \cdots S^3 \xrightarrow{\rho} S^2$ representa uma *liberdade de rotação* no plano. Com efeito, considere $R \in \text{Spin}(3)$. Pela eq.(1.136), que define o grupo Spin, sabemos que $R\bar{R} = 1$, e se representarmos $R = a + b\mathbf{e}_{12} + c\mathbf{e}_{13} + d\mathbf{e}_{23}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, então $R\bar{R} = 1$ é exatamente a equação da esfera S^3 , ou seja, $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Defina agora $\rho : S^3 \rightarrow S^2$ através da aplicação $v \mapsto Rv\bar{R}$.

4.4.2 A fibração de Hopf $S^3 \cdots S^7 \rightarrow S^4$

Dada

$$\begin{aligned} S^7 &= \{X^a : (X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 + (X^7)^2 = 1\}, \\ S^4 &= \{A^3, A^4, A^5, A^6, A^7 : (A^3)^2 + (A^4)^2 + (A^5)^2 + (A^6)^2 + (A^7)^2 = 1\}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

o mapa de Hopf é definido por

$$\begin{aligned}
A^3 &= 2(X^0X^5 - X^2X^4 + X^3X^6 + X^1X^7) \\
A^4 &= 2(X^1X^5 - X^0X^7 + X^3X^2 + X^4X^6) \\
A^5 &= 2(X^5X^6 - X^0X^3 - X^1X^4 - X^2X^7) \\
A^6 &= (X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 - (X^3)^2 - (X^4)^2 - (X^5)^2 + (X^6)^2 - (X^7)^2 \\
A^7 &= 2(X^0X^4 - X^1X^3 + X^2X^5 + X^6X^7)
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Pela definição do produto- X , consideremos sem perda de generalidade o produto $e_1 \circ_X e_2$, dado por

$$\begin{aligned}
e_1 \circ_X e_2 &= [(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 - (X^3)^2 - (X^4)^2 - (X^5)^2 + (X^6)^2 - (X^7)^2]e_6 \\
&\quad + 2(X^0X^5 - X^2X^4 + X^3X^6 + X^1X^7)e_3 + 2(X^1X^5 - X^0X^7 + X^3X^2 + X^4X^6)e_4 \\
&\quad + 2(X^5X^6 - X^0X^3 - X^1X^4 - X^2X^7)e_5 + 2(X^0X^4 - X^1X^3 + X^2X^5 + X^6X^7)e_7
\end{aligned}$$

com $X\bar{X} = 1$, i.e., $X \in S^7$. A expressão acima pode ainda ser reescrita como

$$e_1 \circ_X e_2 = A = A^3e_3 + A^4e_4 + A^5e_5 + A^6e_6 + A^7e_7. \tag{4.71}$$

onde $A \in \mathbb{O}_X$ e $A \in S^4$. Podemos verificar que o produto- X é um mapa da esfera S^7 na esfera S^4 , já que

$$\begin{aligned}
&(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 + (X^7)^2 \\
&= (A^3)^2 + (A^4)^2 + (A^5)^2 + (A^6)^2 + (A^7)^2 = 1.
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Considerando então A, e_1, e_2 uma \mathbb{H} -tripla [Dix94a], o conjunto de todos os

$$G = \exp(e_1\theta^1 + e_2\theta^2 + A\theta^3), \quad \theta^i \in \mathbb{R}, \tag{4.73}$$

é exatamente S^3 , e podemos verificar que

$$\begin{aligned}
e_1 \circ_{GX} e_2 &= (e_1 \circ_X G) \circ_X (\bar{G} \circ_X e_2) \\
&= e_1 \circ_X e_2 = A.
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Portanto o conjunto dos GX tais que G é dado pela eq.(4.73) é isomorfo a S^3 , e portanto é a fibra S^3 sobre $A \in S^4$. A fibração

$$S^3 \dots S^7 \rightarrow S^4 \tag{4.75}$$

é portanto construída da maneira indicada acima.

De maneira análoga, tal construção pode ainda ser generalizada fazendo-se o produto $e_1 \circ_\zeta e_2$, com $\zeta\bar{\zeta} = 1$. O mapa $\zeta \mapsto e_1 \circ_\zeta e_2$, exibido na eq.(4.71) pode também ser substituído por qualquer mapa do tipo $u \mapsto e_a \circ_\zeta e_b$.

O objetivo da próxima seção é estender o modelo de Dixon [Dix94a] utilizando-se um produto octonionico mais geral. Para a extensão do modelo de Dixon, já que $\mathbb{O}_{1,\zeta}$ não é associativa, introduzimos o produto $\circ_{1,\zeta} : \mathbb{O}_{1,\zeta} \times \mathbb{O}_{1,\zeta} \rightarrow \mathbb{O}_{1,\zeta}$ já definido, muito mais geral que o produto octonionico, já que agora ele depende de um multivetor $\zeta \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$.

4.5 A descrição de anti-partículas implica o uso de \mathbb{C} -octonions

Nesta seção mostramos que ao considerarmos um *spinor* como um elemento de $\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}_{1,\zeta}$, surge naturalmente uma estrutura do tipo singleto-triplete-antisinglete-antitripleto, i.e., $\mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{1}} \oplus \bar{\mathbf{3}}$. A partir de agora utilizamos a mesma notação utilizada até agora, e por abuso de notação denotaremos

$$\bullet : \mathbb{O}_{1,\zeta} \times \mathbb{O}_{1,\zeta} \rightarrow \mathbb{O}_{1,\zeta}.$$

4.5.1 As matrizes de Gell-Mann como operadores na álgebra $\mathbb{O}_{1,\zeta}$

Seja $X = x^0 + x^a E_a$ ($x^a \in \mathbb{R}$) um elemento de $\mathbb{O}_{1,\zeta}$. Defina as projeções

$$\rho_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm iE_7). \quad (4.76)$$

Utilizando-se as relações $E_3 = -E_2 \circ_{1,\zeta} E_7$, $E_5 = -E_1 \circ_{1,\zeta} E_7$, $E_6 = -E_4 \circ_{1,\zeta} E_7$ e $\rho_{\pm} \circ_{1,\zeta} E_7 = \mp i \rho \circ_{1,\zeta} \pm$, podemos escrever

$$\begin{aligned} \rho_+ \circ_{1,\zeta} (X) &= \rho_+ \circ_{1,\zeta} ((x^0 - ix^7) + (x^1 - ix^5)E_1 + (x^2 - ix^3)E_2 + (x^4 - ix^6)E_4) \\ &= \rho_+ \circ_{1,\zeta} (y^0 + y^1 E_1 + y^2 E_2 + y^4 E_4). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Considerando agora a base $\rho_+ \circ_{1,\zeta} \{E_1, E_2, E_4\}$, vamos calcular o operador $\frac{1}{2}(E_3 E_4 - E_2 E_6) \bullet (\cdot)$ que age sobre elementos dessa base:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(E_3 E_4 - E_2 E_6) \bullet (\rho_+ \circ_{1,\zeta} E_1) &= \frac{1}{2} \rho_+ \circ_{1,\zeta} ((E_3 E_4) \bullet E_1 - (E_2 E_6) \bullet E_1) \\ &= \frac{1}{2} \rho_+ \circ_{1,\zeta} (E_3 \circ_{1,\zeta} (E_4 \circ_{1,\zeta} E_1) - E_2 \circ_{1,\zeta} (E_6 \circ_{1,\zeta} E_1)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(E_3 E_4 - E_2 E_6) \bullet (\rho_+ \circ_{1,\zeta} E_2) &= \frac{1}{2} \rho_+ \circ_{1,\zeta} ((E_3 E_4) \bullet E_2 - (E_2 E_6) \bullet E_2) \\ &= \frac{1}{2} \rho_+ \circ_{1,\zeta} (E_3 \circ_{1,\zeta} (E_4 \circ_{1,\zeta} E_2) - E_2 \circ_{1,\zeta} (E_6 \circ_{1,\zeta} E_2)) \\ &= -\frac{1}{2} \rho_+ \circ_{1,\zeta} E_6 \\ &= i \rho_+ \circ_{1,\zeta} E_4 \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(E_3 E_4 - E_2 E_6) \bullet (\rho_+ \circ_{1,\zeta} E_4) &= \frac{1}{2} \rho_+ \circ_{1,\zeta} ((E_3 E_4) \bullet E_4 - (E_2 E_6) \bullet E_4) \\ &= \frac{1}{2} \rho_+ \circ_{1,\zeta} (E_3 \circ_{1,\zeta} (E_4 \circ_{1,\zeta} E_4) - E_2 \circ_{1,\zeta} (E_6 \circ_{1,\zeta} E_4)) \\ &= -\frac{1}{2} \rho_+ \circ_{1,\zeta} E_3 \\ &= i \rho_+ \circ_{1,\zeta} E_2 \end{aligned} \quad (4.80)$$

Portanto, na base $\rho_+ \circ_{1,\zeta} \{E_1, E_2, E_4\}$, podemos escrever o operador $\frac{1}{2}(E_3 E_4 - E_2 E_6) \bullet (\cdot)$ como a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

Da mesma maneira, é fácil mostrar a correspondência entre representações de $\mathfrak{su}(3)$, agindo em *spinors* $(y^1, y^2, y^4)^T$ (na base $\rho_+ \circ_{1,\zeta} \{E_1, E_2, E_4\}$), e os operadores em $\bullet : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathbb{O}_{1,\zeta} \rightarrow \mathbb{O}_{1,\zeta}$, agindo em $X \in \mathbb{O}_{1,\zeta}$, dada explicitamente pelas relações:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(E_6 E_3 - E_2 E_4) \bullet (\cdot) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2}(E_6 E_1 - E_4 E_5) \bullet (\cdot) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \frac{1}{2}(E_5 E_6 - E_4 E_1) \bullet (\cdot) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2}(E_5 E_2 - E_1 E_3) \bullet (\cdot) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \frac{1}{2}(E_3 E_5 - E_1 E_2) \bullet (\cdot) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2}(E_4 E_6 - E_2 E_3) \bullet (\cdot) &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, & \frac{1}{2}(E_2 E_3 - E_1 E_5) \bullet (\cdot) &\mapsto \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como $\rho_+ \circ_{1,\zeta} (X)$ tem a estrutura de singlete mais tripleto

$$\mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \tag{4.82}$$

da mesma forma $\rho_- \circ_{1,\zeta} (X)$ tem a estrutura de anti-singlete mais anti-triplete, transformando-se, sob a ação do $SU(3)$, como

$$\bar{\mathbf{1}} \oplus \bar{\mathbf{3}} \tag{4.83}$$

Contudo se $X \in \mathbb{O}_{1,\zeta}$, os elementos $\rho_+ \circ_{1,\zeta} (X)$ e $\rho_- \circ_{1,\zeta} (X)$ são dependentes, pois são conjugados um do outro. Para contornar essa situação podemos considerar então $X = x^0 + x^a E_a \in \mathbb{C} \otimes \mathbb{O}_{1,\zeta}$, com $x^0, x^a \in \mathbb{C}$. Com isso, sob a ação do grupo $SU(3)$, os elementos de $\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}_{1,\zeta}$ se transformam como

$$\boxed{\mathbf{1} \oplus \mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{1}} \oplus \bar{\mathbf{3}}} \tag{4.84}$$

4.6 O Modelo Padrão via álgebras de divisão

Nesta seção utilizaremos as siglas *l.h.* e *r.h.* respectivamente para indicar partículas com quiralidade positiva⁴ e negativa⁵.

4.6.1 Preliminares algébricas

Fixar-se-á de agora em diante a convenção

$$E_a \circ_{1,\zeta} E_{a+1} = E_{a+5} \pmod{7} \tag{4.85}$$

⁴ *Left-handed*

⁵ *Right-handed*

embora o formalismo descrito seja independente da convenção usada⁶.

Uma base ortonormal para o espaço $\mathbb{O}_{1,\zeta}$ dos *spinors* de $\mathcal{C}\ell_{0,6} \simeq \mathcal{M}(8, \mathbb{R})$ é evidentemente também dada por $\{E_0 = \zeta, E_a\}_{a=1}^7$. O antiautomorfismo $\overline{(\cdot)}$ é estendido, e denotado por $(\cdot)^\dagger$, ao nosso formalismo:

$$\begin{aligned} E_a^\dagger \bullet (\cdot) &:= -E_a \bullet (\cdot) \\ (E_a E_b)^\dagger \bullet (\cdot) &:= E_b E_a \bullet (\cdot) = -E_a E_b \bullet (\cdot) \\ (E_a E_b E_c)^\dagger \bullet (\cdot) &:= -E_c E_b E_a \bullet (\cdot) = E_a E_b E_c \bullet (\cdot) \end{aligned} \quad (4.86)$$

4.6.2 Álgebras de Lie e grupos de Lie em $\mathcal{C}\ell_{0,6}$ e a construção de automorfismos úteis

Defina os seguintes operadores formados por elementos de $\Lambda^3(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7})$, que agem sobre $\mathbb{O}_{1,\zeta}$ através do produto $\bullet : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathbb{O}_{1,\zeta} \rightarrow \mathbb{O}_{1,\zeta}$:

$$I_a := E_{(3+a)} E_{(5+a)} E_{(6+a)} \bullet (\cdot) \quad (4.87)$$

Explicitamente, as representações de I_a em $\mathcal{C}\ell_{0,6} \simeq \mathcal{M}(8, \mathbb{R})$ são dadas por

$$\begin{aligned} I_1 &= (E_4 E_7 E_6) \bullet (\cdot) = \text{diag}(1, -1, -1, -1, 1, -1, 1, 1) \\ I_2 &= (E_5 E_1 E_7) \bullet (\cdot) = \text{diag}(1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, 1) \\ I_3 &= (E_6 E_2 E_1) \bullet (\cdot) = \text{diag}(1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1) \\ I_4 &= (E_7 E_3 E_2) \bullet (\cdot) = \text{diag}(1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, 1) \\ I_5 &= (E_1 E_4 E_3) \bullet (\cdot) = \text{diag}(1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, -1) \\ I_6 &= (E_2 E_5 E_4) \bullet (\cdot) = \text{diag}(1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1) \\ I_7 &= (E_3 E_6 E_5) \bullet (\cdot) = \text{diag}(1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1) \end{aligned} \quad (4.88)$$

Podemos mostrar que $[I_a, I_b] = 0$, $I_a I_{a+1} = I_{a+3}$ e que $I_a \in \text{Aut}(\mathbb{O}_{1,\zeta}) = G_2$.

Algumas álgebras de Lie podem ser definidas, por exemplo:

$$\mathfrak{g}_2 = \{(E_a E_b - E_c E_d) \bullet (\cdot) : E_a \circ_{1,\zeta} E_b = E_c \circ_{1,\zeta} E_d\} \quad (4.89)$$

$$\mathfrak{su}(3) = \{(E_a E_b - E_c E_d) \bullet (\cdot) \in \mathfrak{g}_2 : a, b, c, d \neq 7\} \quad (4.90)$$

O espaço dos bivectores de $\mathcal{C}\ell_{0,6}$ é fechado (pelo comutador), como vimos na Sec.(1.9), e temos a relação

$$\boxed{\text{span}\{E_p E_q \bullet (\cdot) \text{ tal que } p, q \neq 7\} \simeq \mathfrak{su}(4) \simeq \mathfrak{so}(6) \simeq \mathfrak{spin}(6)} \quad (4.91)$$

Portanto

$$\boxed{\mathfrak{su}(3) = \mathfrak{spin}(6) \cap \mathfrak{g}_2} \quad (4.92)$$

Considere a álgebra $\mathbb{T} := \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{O}_{1,\zeta}$. A álgebra das aplicações- \bullet à esquerda é naturalmente definida como $\mathbb{T}_\bullet = \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathcal{C}\ell_{0,6}$. Temos o isomorfismo $\mathbb{T}_\bullet \simeq \mathcal{C}\ell_{0,9}$.

⁶Outra regra de multiplicação, como por exemplo $E_a E_{a+1} = E_{a+3 \pmod 7}$, poderia também ser usada.

4.6.3 Modelo de Dixon estendido

Dados os operadores de projeção primitivos ortogonais $\Delta_\mu \in \mathbb{T}$, dizemos que eles *resolvem a identidade de \mathbb{T}* se, para todo $X \in \mathbb{T}$,

1. $\Delta_\mu \circ_{1,\zeta} (\Delta_\nu \circ_{1,\zeta} X) = (\Delta_\mu \circ_{1,\zeta} \Delta_\nu) \circ_{1,\zeta} X = \delta_{\mu\nu} \Delta_\nu \circ_{1,\zeta} X$,
2. $\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 1$.

Em particular, dados $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{Cl}_{0,2}$, com $\mathbf{x}^2 = \mathbf{y}^2 = -1$, Dixon escolhe [Dix90b, Dix86, Dix94a, Dix95]

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \frac{1}{2}(1 + i\mathbf{x})\frac{1}{2}(1 + iE_7), \\ \Delta_1 &= \frac{1}{2}(1 - i\mathbf{x})\frac{1}{2}(1 + iE_7), \\ \Delta_2 &= \frac{1}{2}(1 + i\mathbf{y})\frac{1}{2}(1 - iE_7), \\ \Delta_3 &= \frac{1}{2}(1 - i\mathbf{x})\frac{1}{2}(1 - iE_7).\end{aligned}\tag{4.93}$$

Defina os seguintes automorfismos de \mathbb{T} ($M_\mu \in \text{Aut}(\mathbb{T})$):

$$\begin{aligned}M_0(X) &= X, \\ M_1(X) &= I_1 \circ_{1,\zeta} I_q \circ_{1,\zeta} (X^*), \\ M_2(X) &= -\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 I_1 \circ_{1,\zeta} I_q \circ_{1,\zeta} (X) \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1, \\ M_3(X) &= -\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 X^* \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1,\end{aligned}\tag{4.94}$$

com $q = 3, 5, 6$ ou 7 , e $X \mapsto X^*$ denota a \mathbb{C} -conjugação. Sem perda de generalidade assume-se que $\mathbf{y} = -e_3 e_1 \mathbf{x} e_3 e_1$. É imediato que

$$M_\mu(\Delta_0) = \Delta_\mu.\tag{4.95}$$

O seguinte produto interno é construído, analogamente à versão particular de Dixon [Dix94a]:

$$\begin{aligned}\langle A, B \rangle &= \frac{1}{8}(\text{Tr}(A^\dagger B + B^\dagger A)) \\ &= \frac{1}{8}\left\{\sum_{\mu\nu} M_\mu((A\Delta_\mu)^\dagger (B\Delta_\nu))\right\} + h.c.\end{aligned}\tag{4.96}$$

4.6.4 Simetria do Modelo Padrão

Para obter uma generalização do formalismo até então apresentado, pergunta-se o que aconteceria se, dados $X, Y \in \mathbb{T}$, a eq.(4.96) pudesse ser escrita de maneira mais geral

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{8}\left\{\sum_{\mu\nu} M_\mu((X \circ_{1,\zeta} \Gamma_\mu)^\dagger (Y \circ_{1,\zeta} \Gamma_\nu))\right\} + h.c.\tag{4.97}$$

É exigido que Γ_μ (uma extensão de Δ_μ) satisfaça

$$\Gamma_\mu^\dagger \circ_{1,\zeta} \Gamma_\mu = \delta_{\mu\nu} \Delta_\mu.\tag{4.98}$$

Para que as componentes de $X \in \mathbb{T}$, com respeito aos Γ_μ , sejam livres de problemas advindos da não-associatividade de $\mathbb{O}_{1,u}$, deve-se ter ainda que

$$(\Gamma_\mu^\dagger \circ_{1,\zeta} X) \circ_{1,\zeta} \Gamma_\mu = \Gamma_\mu^\dagger \circ_{1,\zeta} (X \circ_{1,\zeta} \Gamma_\mu), \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (4.99)$$

Da eq.(4.98) obtemos que

$$\Gamma_\mu^\dagger \circ_{1,\zeta} \Gamma_\mu = \Delta_\mu, \quad (4.100)$$

então

$$\begin{aligned} \Delta_\nu \circ_{1,\zeta} (\Delta_\mu) \circ_{1,\zeta} \Delta_\nu &= \Delta_\nu \circ_{1,\zeta} (\Gamma_\mu^\dagger \circ_{1,\zeta} \Gamma_\mu) \circ_{1,\zeta} \Delta_\nu \\ &= (\Gamma_\mu \circ_{1,\zeta} \Delta_\nu)^\dagger \circ_{1,\zeta} (\Gamma_\mu \circ_{1,\zeta} \Delta_\nu) \\ &= \delta_{\nu\mu} \Delta_\mu. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Mas se $X \in \mathbb{T}$ e $X^\dagger X = 0$, então $X = 0$. Portanto

$$\Gamma_\mu \Delta_\nu = 0, \quad \text{se } \mu \neq \nu. \quad (4.102)$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= \Gamma_\mu \circ_{1,\zeta} (\Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) \\ &= \Gamma_\mu \circ_{1,\zeta} \Delta_\nu, \end{aligned} \quad (4.103)$$

ou seja,

$$\Gamma_\mu \in \mathbb{T}\Delta_\mu, \quad \text{e portanto } \Gamma_\mu \text{ é um } \textit{spinor algébrico}, \quad (4.104)$$

com relação ao produto $\circ_{1,\zeta}$. Podemos ainda provar que, impondo a condição (4.99) podemos escrever

$$\Gamma_\mu = (u_\mu + v_\mu E_1) \circ_{1,\zeta} \Delta_\mu, \quad u_\mu, v_\mu \in \mathbb{C}. \quad (4.105)$$

Pela propriedade $\rho_\pm \circ_{1,\zeta} \rho_\mp = \frac{1}{2}(1 \pm iE_7) \circ_{1,\zeta} \frac{1}{2}(1 \mp iE_7) = 0$, as únicas equações não-triviais em (4.100) são

$$\begin{aligned} \Gamma_0^\dagger \circ_{1,\zeta} \Gamma_1 &= 0, \\ \Gamma_2^\dagger \circ_{1,\zeta} \Gamma_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Ambas as equações possuem simetrias do tipo

$$\text{U}(1) \times \text{U}(1) \times \text{SU}(2) \quad (4.107)$$

Ademais o subgrupo $\text{SU}(3)$ de estabilidade de G_2 que mantém E_7 fixo, deixa Δ_μ e Γ_μ invariantes, então cada Δ_μ (e também cada Γ_μ) é sujeito a uma simetria do tipo

$$\boxed{\text{U}(1) \times \text{SU}(2) \times \text{SU}(3)}$$

4.6.5 Ações de SU(2) e U(1)

Uma maneira de gerar as ações de SU(2) é definir os idempotentes

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm i(x^2 E_2 + x^3 i E_7 E_3)) = \frac{1}{2}(1 \pm \tilde{\mathbf{x}}), \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}\ell_{0,2}, \quad \tilde{\mathbf{x}}^2 = -1, \quad (4.108)$$

tal que as eqs.(4.93) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \lambda_+ \rho_+ &= \Delta_0, \\ \lambda_- \rho_+ &= \Delta_1, \\ \lambda_+ \rho_- &= \Delta_2, \\ \lambda_- \rho_- &= \Delta_3. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Notando que

$$\text{span} \{iE_7 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1, iE_7 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2\} \simeq \mathfrak{su}(2), \quad (4.110)$$

defina $\tilde{\alpha} = \alpha^1 i E_7 \mathbf{e}_1 + \alpha^2 \mathbf{e}_2 + \alpha^3 i E_7 \mathbf{e}_3$. Seja também $\tilde{\alpha} = \alpha^i \mathbf{e}_i$. Portanto o vetor $\tilde{\alpha}$ gera um SU(2) que é carregado de maneira intacta pelos M_{μ} de Δ_0 para os outros Δ_{μ} :

$$\begin{aligned} e^{\tilde{\alpha}} \Delta_0 &= e^{\tilde{\alpha}} \Delta_0 = M_0(e^{\tilde{\alpha}} \Delta_0), \\ e^{\tilde{\alpha}} \Delta_1 &= e^{\tilde{\alpha}} \Delta_1 = M_1(e^{\tilde{\alpha}} \Delta_0), \\ e^{\tilde{\alpha}} \Delta_2 &= e^{-\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \tilde{\alpha} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1} \Delta_2 = M_2(e^{\tilde{\alpha}} \Delta_0), \\ e^{\tilde{\alpha}} \Delta_3 &= e^{-\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \tilde{\alpha} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1} \Delta_3 = M_3(e^{\tilde{\alpha}} \Delta_0), \end{aligned} \quad (4.111)$$

4.6.6 Dubletos de SU(2)

Para cada $\mu = 0, 1, 2, 3$, os elementos Δ_{μ} e $\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \Delta_{\mu}$ formam um dubleto de SU(2) com respeito a $e^{\tilde{\alpha}}$. Em particular, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{C}\ell_{0,2}$ é o gerador diagonal de SU(2). Com efeito,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} \Delta_{\mu} \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \Delta_{\mu} \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \Delta_{\mu} \\ -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \tilde{\mathbf{x}} \Delta_{\mu} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{\mu} \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \Delta_{\mu} \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, 2, \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{\mu} \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \Delta_{\mu} \end{pmatrix}, \quad \mu = 1, 3. \end{aligned} \quad (4.112)$$

De maneira similar às ações de SU(2), as ações de U(1) também são carregadas de maneira intacta de Γ_0 para os outros Γ_j ($j = 1, 2, 3$). De maneira explícita:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &\mapsto e^{i\theta} \Gamma_0 = M_0(e^{i\theta} \Gamma_0) = M_0(e^{-E_7 \theta} \Gamma_0) \\ \Gamma_1 &\mapsto e^{-i\theta} \Gamma_1 = M_1(e^{i\theta} \Gamma_0) = M_1(e^{-E_7 \theta} \Gamma_0) \\ \Gamma_2 &\mapsto e^{i\theta} \Gamma_2 = M_2(e^{i\theta} \Gamma_0) = M_2(e^{-E_7 \theta} \Gamma_0) \\ \Gamma_3 &\mapsto e^{-i\theta} \Gamma_3 = M_3(e^{i\theta} \Gamma_0) = M_3(e^{-E_7 \theta} \Gamma_0) \end{aligned} \quad (4.113)$$

As ações de $SU(2)$ e $U(1)$ se combinam para formar as ações de $U(2)$. Isso é obtido pelo fato de que $SU(2) \times U(1) / \mathbb{Z}_2 \simeq U(2)$. Com efeito, primeiro considere a imersão de $U(1)$ em $U(2)$ dada naturalmente por

$$U(1) \xrightarrow{\tau} U(2), \quad \tau : e^{i\alpha} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad (4.114)$$

Então considere

$$(f, g) := \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{2-1} U(2) \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} ae^{i\alpha} & be^{i\alpha} \\ ce^{i\alpha} & de^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad (4.115)$$

É imediato que (f, g) e $(-f, -g)$ possuem a mesma imagem em $U(2)$, e portanto

$$\boxed{SU(2) \times U(1) / \mathbb{Z}_2 \simeq U(2)} \quad (4.116)$$

Acompanhando ainda a sec.(4.5), podemos ver que $\mathbb{T} = (\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}_{1,\zeta}) \otimes \mathbb{H}$ possui a mesma estrutura de multipletos que $\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}_{1,\zeta}$, porém quatro vezes mais, número este que advém do produto tensorial com a álgebra dos quaternions (\mathbb{H}). Portanto podemos identificar

$$\begin{aligned} \rho_+ \circ_{1,\zeta} \mathbb{T} \circ_{1,\zeta} \rho_+ &\mapsto \mathbf{1} \\ \rho_+ \circ_{1,\zeta} \mathbb{T} \circ_{1,\zeta} \rho_- &\mapsto \mathbf{3} \\ \rho_- \circ_{1,\zeta} \mathbb{T} \circ_{1,\zeta} \rho_- &\mapsto \bar{\mathbf{1}} \\ \rho_- \circ_{1,\zeta} \mathbb{T} \circ_{1,\zeta} \rho_+ &\mapsto \bar{\mathbf{3}} \end{aligned} \quad (4.117)$$

Assim $SU(3)$ divide \mathbb{T} em oito *spinors* e posteriormente $SU(2)$ divide cada um desses em dois, formando dezesseis *spinors* de Weyl. Portanto \mathbb{T} se transforma perante $SU(3) \times SU(2)$ como a soma de uma família de léptons e quarks (*l.h.*) e uma anti-família de anti-léptons e anti-quarks (*r.h.*).

Mais ainda, a ação de $U(1)$, dada por

$$\Gamma_\mu \mapsto e^{-\phi E_\tau/6} \circ_{1,\zeta} \Gamma_\mu \circ_{1,\zeta} e^{\phi E_\tau/6} \quad (4.118)$$

age trivialmente sobre os Γ_μ , mas em relação aos outros elementos de \mathbb{T} , essa ação se combina com $SU(3)$ para formar uma ação de $U(3)$. Nesse caso, se $X \in \mathbb{T}$, então

$$\begin{aligned} X &\mapsto e^{-\phi E_\tau/6} \circ_{1,\zeta} X \circ_{1,\zeta} e^{\phi E_\tau/6} \\ &\mapsto \rho_+ \circ_{1,\zeta} X \circ_{1,\zeta} \rho_+ + \rho_- \circ_{1,\zeta} X \circ_{1,\zeta} \rho_- + e^{i\phi/3} \rho_+ \circ_{1,\zeta} X \circ_{1,\zeta} \rho_- + e^{-i\phi/3} \rho_- \circ_{1,\zeta} X \circ_{1,\zeta} \rho_+ \end{aligned}$$

Portanto a simetria total carregada através dos automorfismos $M_\mu \in G_2$ dos Γ_0 para os outros Γ_i é

$$\boxed{U(2) \times U(3)}$$

4.7 Quarks e léptons

Para descrever completamente uma geração (*l.h.* + *r.h.*) de famílias e anti-famílias de quarks (u, d) (r, g, b) e léptons (e^-, ν), precisamos da álgebra $\mathcal{C}\ell_{1,9}(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{T}_\bullet) \simeq \mathcal{M}(32, \mathbb{C})$, a qual terá como espaço dos *spinors* duas cópias da já estudada $\mathbb{T}_\bullet \simeq \mathcal{C}\ell_{0,9}$. É feita a identificação :

$$\begin{aligned} \{\rho_+ \circ_{1,\zeta} (\mathbb{T} \oplus \mathbb{T}) \circ_{1,\zeta} \Delta_0, \quad \rho_+ \circ_{1,\zeta} (\mathbb{T} \oplus \mathbb{T}) \circ_{1,\zeta} \Delta_1\} &\mapsto \mathbf{1} \\ \{\rho_+ \circ_{1,\zeta} (\mathbb{T} \oplus \mathbb{T}) \circ_{1,\zeta} \Delta_2, \quad \rho_+ \circ_{1,\zeta} (\mathbb{T} \oplus \mathbb{T}) \circ_{1,\zeta} \Delta_3\} &\mapsto \mathbf{3} \end{aligned} \quad (4.119)$$

para descrever uma família e

$$\begin{aligned} \{\rho_- \circ_{1,\zeta} (\mathbb{T} \oplus \mathbb{T}) \circ_{1,\zeta} \Delta_2, \quad \rho_- \circ_{1,\zeta} (\mathbb{T} \oplus \mathbb{T}) \circ_{1,\zeta} \Delta_3\} &\mapsto \bar{\mathbf{1}} \\ \{\rho_- \circ_{1,\zeta} (\mathbb{T} \oplus \mathbb{T}) \circ_{1,\zeta} \Delta_0, \quad \rho_- \circ_{1,\zeta} (\mathbb{T} \oplus \mathbb{T}) \circ_{1,\zeta} \Delta_1\} &\mapsto \bar{\mathbf{3}} \end{aligned} \quad (4.120)$$

para descrever uma anti-família. Enfatizamos que tais construções descrevem uma geração de quarks e léptons, e em cada um dos termos acima, além da identificação feita acima, que relaciona os elementos de \mathbb{T} às representações de $SU(3)$ (trivial ou fundamental), cada elemento é intrinsecamente um dubleto de $SU(2)$.

Explicitamente, seja $\psi \in \mathbb{T} \oplus \mathbb{T}$ que se transforma perante $U(2) \times U(3)$ como qualquer um dos Γ_μ^i , viz.,

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu \xrightarrow{U(1)} e^{-\theta E_7/2} \circ_{1,\zeta} \Gamma_\mu &\Rightarrow \psi \xrightarrow{U(1)} \psi \circ_{1,\zeta} e^{\theta E_7/2} \\ \Gamma_\mu \xrightarrow{SU(2)} e^{\tilde{\alpha}/2} \Gamma_\mu &\Rightarrow \psi \xrightarrow{SU(2)} \psi e^{-\tilde{\alpha}/2} \end{aligned} \quad (4.121)$$

de forma que $\psi \circ_{1,\zeta} \Gamma_\mu$ seja invariante perante $U(2)$.

Com relação ao grupo $U(3)$, todos os Γ_μ são invariantes. A ação de $U(1) \hookrightarrow U(3)$ é definida como sendo o inverso do mapa (4.119):

$$\begin{aligned} \psi &\mapsto e^{\phi E_7/6} \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} e^{-\phi E_7/6} \\ &\mapsto \rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_+ + \rho_- \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_- + e^{-i\phi/3} \rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_- + e^{i\phi/3} \rho_- \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_+ \end{aligned}$$

e, com respeito a $SU(3)$, o *spinor* $\psi \in \mathbb{T} \oplus \mathbb{T}$ se transforma como $\mathbf{1} \oplus \bar{\mathbf{1}} \oplus \mathbf{3} \oplus \bar{\mathbf{3}}$. Em particular podemos escolher

$$\rho_+ \psi = \rho_+ \circ_{1,\zeta} (\psi_1 + \psi_r E_1 + \psi_g E_2 + \psi_b E_4) \quad (4.122)$$

onde ψ_1 e $\psi_a, a = r, g, b$ consiste de dubletos de $SU(2)$ (de *spinors* de Dirac). Como $SU(3)$ é um grupo de posto dois, precisamos de dois números quânticos para especificar de maneira completa as cargas relativas a cada cor de quark. Pode-se escolher as cargas de modo que o presente formalismo seja conduzido à descrição convencional do Modelo Padrão:

$$r = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right), \quad g = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right), \quad b = \left(0, -\frac{2}{3} \right) \quad (4.123)$$

4.7.1 Hipercarga e isospin

Seja I_3 o número quântico de $SU(2)$ associado com a ação

$$\begin{aligned} I_3 \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \lambda_{\pm} &:= \frac{1}{2} \psi \circ_{1,\zeta} \lambda_{\pm} \circ_{1,\zeta} (i\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= \pm \frac{1}{2} \psi \circ_{1,\zeta} \lambda_{\pm}. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Considere também as seguintes definições para a hipercarga Y_2 de $U(1) \hookrightarrow U(2)$:

$$\begin{aligned} Y_2 \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_{\pm} &= \frac{1}{2} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_{\pm} \circ_{1,\zeta} (-iE_7) \\ &= \mp \frac{1}{2} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_{\pm}, \end{aligned} \quad (4.125)$$

e a hipercarga $U(1) \hookrightarrow U(3)$

$$\begin{aligned} Y_3 \circ_{1,\zeta} \rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_{\pm} &= (-iE_7/6) \circ_{1,\zeta} \rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_{\pm} + \rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_{\pm} \circ_{1,\zeta} (iE_7/6) \\ &= \begin{cases} 0 \\ -\frac{1}{3} \rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_- \end{cases} \end{aligned} \quad (4.126)$$

Com isso temos as seguintes tabelas que descrevem partículas *l.h.*:

<i>l.h.</i>	I_3	Y_2	Y_3	Q
$\rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_+ \lambda_+$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
$\rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_+ \lambda_-$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1
$\rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_- \lambda_+$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$
$\rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_- \lambda_-$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Com isso as linhas da tabela acima correspondem, respectivamente, a neutrino, elétron, quark up e quark down.

As cargas associadas à anti-família são dadas por

<i>l.h.</i>	I_3	Y_2	Y_3	Q
$\rho_- \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_- \lambda_-$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	0
$\rho_- \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_- \lambda_+$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	+1
$\rho_- \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_+ \lambda_-$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\rho_- \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \rho_+ \lambda_+$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$

Quanto às partículas *r.h.*, a descrição deve ser diferente, pois elas são singletos de $SU(2)$ e portanto $I_3 = 0$. Dessa vez a ação de $SU(2)$ deve ser definida em ψ de modo a cancelar a ação de Γ_{μ} :

$$\psi \circ_{1,\zeta} \Gamma_{\mu} \mapsto (\psi e^{-\tilde{\alpha}/2}) \circ_{1,\zeta} (e^{\tilde{\alpha}/2} \Gamma_{\mu}) = \psi \circ_{1,\zeta} \Gamma_{\mu} \quad (4.127)$$

Com isso os oito *spinors* $\rho_{\pm} \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \Gamma_{\mu}$ têm carga nula perante $SU(2)$.

$r.h.$	I_3	Y_2	Y_3	Q
$\rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \Gamma_0$	0	0	0	0
$\rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \Gamma_1$	0	-1	0	-1
$\rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \Gamma_2$	0	+1	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$
$\rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \Gamma_3$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Com isso as linhas da tabela acima correspondem, respectivamente, a neutrino, elétron, quark up e quark down, todos $r.h.$.

As cargas associadas à anti-família são dadas por

$r.h.$	I_3	Y_2	Y_3	Q
$\rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \Gamma_0$	0	0	0	0
$\rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \Gamma_1$	0	+1	0	+1
$\rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \Gamma_2$	0	-1	$+\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\rho_+ \circ_{1,\zeta} \psi \circ_{1,\zeta} \Gamma_3$	0	0	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$

4.7.2 Projeções reductivas

Considere a álgebra $\mathbb{T} := \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{O}_{1,\zeta}$. A álgebra das ações à esquerda é naturalmente definida como $\mathbb{T}_{\circ_{1,\zeta}} = \mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{0,2} \otimes \mathcal{Cl}_{0,6}$. Temos o isomorfismo $\mathbb{T}_{\circ_{1,\zeta}} \simeq \mathcal{Cl}_{0,9}$. Para alojar todas as partículas de uma geração no Modelo Padrão, Dixon propõe matrizes 2×2 com entradas em $T_{\circ_{1,\zeta}}$, e esse espaço é exatamente a álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{1,9}(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes \mathcal{Cl}_{0,7} \simeq (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \mathcal{Cl}(\mathbb{O}_{1,\zeta}, g)$, onde está implícito que $\mathcal{Cl}_{0,8} \simeq \mathcal{Cl}(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7}, g)$.

Considere novamente os projetores

$$\rho_{\pm} := \frac{1}{2}(1 \pm E_7). \quad (4.128)$$

Também a partir do elemento de volume Ω relativo aos espaços $\mathbb{R}^{p,q}$ (logo abaixo) em questão, e seu projetor associado $\Omega_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \Omega)$, podemos (usando os projetores de maneira apropriada) emular as seguintes decomposições:

1. $\rho_{\pm} \circ_{1,\zeta} \mathfrak{so}(1,9) \mapsto \mathfrak{so}(1,3) \times \mathfrak{so}(6)$, onde o primeiro termo do lado direito é precisamente a álgebra de Lie do grupo de rotações do espaço-tempo de Minkowski ($\simeq \Lambda^2(\mathbb{R}^{1,3})$) e o segundo termo é o grupo de rotações associado às dimensões extras (internas).
2. $\mathfrak{so}(5) \mapsto \mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{u}(1)$.
3. $\mathfrak{so}(7) \mapsto \mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{u}(1)$.
4. $\mathfrak{so}(8) \mapsto \mathfrak{so}(6) \times \mathfrak{so}(2)$.
5. $\mathfrak{so}(8) \mapsto \mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{u}(1)$.
6. $\mathfrak{so}(1,9) \mapsto \mathfrak{so}(1,3) \times \mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{u}(1)$.

7. $\mathfrak{so}(1, 9) \times \mathfrak{su}(2) \mapsto \mathfrak{su}(2) \times (\mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{u}(1))$, onde $\mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{u}(1)$ é uma simetria de gauge interna, pois comuta com $\mathfrak{so}(1, 3)$
8. $\mathfrak{so}(24) \mapsto \mathfrak{so}(8) \times [\mathbb{D} \otimes (\mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{u}(1))]$.
9. $\mathfrak{so}(26) \mapsto \mathfrak{so}(1, 3) \times (\mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{u}(1)) \times [\mathbb{D} \otimes (\mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{u}(1))]$.
10. $\mathfrak{so}(13) \mapsto \mathfrak{so}(10) \times \mathfrak{su}(2) \mapsto \mathfrak{so}(10) \times \mathfrak{u}(1)$.

em particular, a última decomposição dá uma maneira natural de descrever o grupo $\text{SO}(10) \times \text{U}(1)$ dentro do grupo de Lie excepcional E_6 [Roc04b].

Explicitaremos agora a que consideramos ser a mais importante das projeções reductivas, pois ela oferece aplicações imediatas ao modelo simétrico. Escolhemos a decomposição

$$\boxed{\mathfrak{so}(7) \mapsto \mathfrak{so}(6) \mapsto \mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{u}(1)} \quad (4.129)$$

Considere a base de $\mathfrak{so}(8) \simeq \Lambda^2(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{0,7})$, que age sobre o espaço $\mathbb{O}_{1,\zeta}$:

$$B = \{E_1 E_2 \circ_{1,\zeta} (\cdot), E_p E_q \circ_{1,\zeta} (\cdot), (E_p E_7) \circ_{1,\zeta} (\cdot), (E_i E_j) \circ_{1,\zeta} (\cdot), |, (i, j) = (2, 3), (3, 1)\}, \quad (4.130)$$

onde $p, q = 1, \dots, 6$. Considerando os projetores (4.128), observamos que as dimensões extras, que estão associadas a simetrias internas, desaparecem da seguinte maneira:

$$\rho_{\pm} \circ_{1,\zeta} E_p \circ_{1,\zeta} \rho_{\pm} = 0, \quad p = 1, \dots, 6. \quad (4.131)$$

Segue que

$$\rho_+ \circ_{1,\zeta} B = \{E_1 E_2 \circ_{1,\zeta} (\cdot), E_p E_q \circ_{1,\zeta} (\cdot)\}. \quad (4.132)$$

O conjunto acima é base de $\mathfrak{so}(6) \times \mathfrak{u}(1)$. Agora, fazendo outra projeção

$$\begin{aligned} & \rho_+ \circ_{1,\zeta} \{E_1 E_2 \circ_{1,\zeta} (\cdot), E_p E_q \circ_{1,\zeta} (\cdot)\} \rho_+ \circ_{1,\zeta} \rho_+ \\ &= \rho_+ \circ_{1,\zeta} \{E_1 E_2 \circ_{1,\zeta} (\cdot), E_7 \circ_{1,\zeta} (\cdot) + 2 \circ_{1,\zeta} (\cdot) E_7, E_p E_q \circ_{1,\zeta} (\cdot) - E_r E_s \circ_{1,\zeta} (\cdot)\} \rho_+ \end{aligned} \quad (4.133)$$

onde $p, q, r, s = 1, \dots, 6$ e $E_p E_q = E_r E_s$. O lado direito da igualdade acima é exatamente uma base para

$$\boxed{\mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{u}(1)} \quad (4.134)$$

De maneira semelhante podemos realizar todas as outras projeções de modo a explicitar o formalismo apresentado. Vale observar ainda que a presença do gerador $E_7 \circ_{1,\zeta} (\cdot) + 2 \circ_{1,\zeta} (\cdot) E_7$ de $\mathfrak{u}(1)$ garante que as cargas dos quarks sejam $-1/3$ e $2/3$, se consideramos a carga do elétron igual a -1 . Temos ainda a possibilidade de considerarmos o grupo gerado por $E_1 E_2 \circ_{1,\zeta} (\cdot) \in \mathfrak{u}(1)$ como sendo um gerador de $\mathfrak{so}(2)$, e portanto, um gerador de transformações de Lorentz.

4.8 Campos de Calibre

As transformações de calibre surgem naturalmente ao considerarmos os campos $A_\mu(x)$ como elementos de $\mathcal{C}\ell_{0,7} \simeq \mathcal{M}(8, \mathbb{C})$, e são dadas a partir da ação $A_\mu(x)\psi = A_\mu^\alpha(x)E_\alpha \circ_{1,\zeta} \psi$. Supomos primeiramente transformações do tipo

$$\psi(x) \mapsto \exp(-\alpha^a(x)E_a) \circ_{1,\zeta} \psi(x). \quad (4.135)$$

Sob a derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x), \quad (4.136)$$

é natural que os campos A_μ se transformem como

$$\begin{aligned} A_\mu \psi &\mapsto A_\mu \psi + [-\alpha^a(x)E_a \circ_{1,\zeta} (\cdot), A_\mu] \psi - \frac{i}{g} E_a \circ_{1,\zeta} \partial_\mu \alpha^a(x) \\ &\mapsto A_\mu \psi - \alpha^a A_\mu^b \left\{ \frac{1}{8} \varepsilon_{ab}^c E_c \circ_{1,\zeta} \psi - \frac{1}{2} [E_b \circ_{1,\zeta} (\cdot), (\cdot) \circ_{1,\zeta} E_a] \psi \right\} - \frac{1}{4g} E_a \circ_{1,\zeta} \psi \partial_\mu \alpha^a \end{aligned} \quad (4.137)$$

onde na segunda linha da eq. (4.137) usamos a equação

$$\begin{aligned} [E_a \circ_{1,\zeta} (\cdot), E_b \circ_{1,\zeta} (\cdot)] \psi &= \frac{1}{2} E_{ab} \circ_{1,\zeta} \psi \\ &= 2\varepsilon_{ab}^c E_c \circ_{1,\zeta} \psi - 2[E_b \circ_{1,\zeta} (\cdot), (\cdot) \circ_{1,\zeta} E_a] \psi. \end{aligned} \quad (4.138)$$

O tensor de curvatura, em se tratando de uma teoria de Yang-Mills que é não-abeliana, é dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu], \quad (4.139)$$

e usando a eq.(4.138) podemos escrever sua ação sobre o *spinor* $\psi \in \mathbb{C}^8$ como

$$F_{\mu\nu} \psi = F_{\mu\nu}^a E_a \circ_{1,\zeta} \psi - ig A_\mu^a A_\nu^b (E_b \circ_{1,\zeta} (\psi \circ_{1,\zeta} E_a) - (E_b \circ_{1,\zeta} \psi) \circ_{1,\zeta} E_a), \quad (4.140)$$

onde $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - \frac{1}{2} g \varepsilon_{ab}^c A_\mu^b A_\nu^c$. A lagrangiana (externa) é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E &= -\frac{1}{4} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{8} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{8} g F_{\mu\nu}^a A^{b\mu} A^{c\nu} \varepsilon_{abc} - \frac{1}{16} g^2 A_\mu^b A_\nu^c (A^{b\mu} A^{c\nu} - A^{c\mu} A^{b\nu}). \end{aligned} \quad (4.141)$$

As simetrias internas são dadas por transformações que agem sobre os campos espinoriais à direita:

$$\psi(x) \mapsto \psi(x) \circ_{1,\zeta} \exp(-\beta^a(x)E_a). \quad (4.142)$$

Sob a derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + igB_\mu(x), \quad (4.143)$$

considerando um desenvolvimento algébrico similar às simetrias externas, o tensor de curvatura é dado por

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + ig[B_\mu, B_\nu], \quad (4.144)$$

e sua ação sobre $\psi(x) \in \mathbb{C}^8$ é tal que

$$G_{\mu\nu}\psi = G_{\mu\nu}^a \psi \circ_{1,\zeta} E_a - igB_\mu^a B_\nu^b ((E_a \circ_{1,\zeta} \psi) \circ_{1,\zeta} E_b - E_a \circ_{1,\zeta} (\psi \circ_{1,\zeta} E_b)), \quad (4.145)$$

onde $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + \frac{1}{2}g\varepsilon_{ab}^c B_\mu^b B_\nu^c$. A lagrangiana (interna) é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= -\frac{1}{4}\text{Tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{8}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{8}gB_{\mu\nu}^a B^{b\mu} B^{c\nu} \varepsilon_{abc} - \frac{1}{16}g^2 B_\mu^b B_\nu^c (B^{b\mu} B^{c\nu} - B^{c\mu} B^{b\nu}). \end{aligned} \quad (4.146)$$

Ao considerarmos simultaneamente as ações à direita e à esquerda, a derivada covariante é escrita como

$$D_\mu = \partial_\mu + ig[A_\mu(x) + B_\mu(x)] \quad (4.147)$$

e a ação do tensor de curvatura agora associado às transformações interna e externa é dado por

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}\psi &= F_{\mu\nu}^a E_a \circ_{1,\zeta} \psi + G_{\mu\nu}^a \psi \circ_{1,\zeta} E_a \\ &\quad + \frac{i}{2}g(A_\mu^a A_\nu^b + B_\mu^a B_\nu^b - \frac{1}{2}A_\mu^a B_\nu^b - \frac{1}{2}B_\mu^a A_\nu^b)((E_a \circ_{1,\zeta} \psi) \circ_{1,\zeta} E_b - E_a \circ_{1,\zeta} (\psi \circ_{1,\zeta} E_b)) \end{aligned}$$

e com isso a lagrangiana de ações bilaterais é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{8}F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu} - \frac{1}{8}G_{\mu\nu} \cdot G^{\mu\nu} + \frac{1}{8}F_{\mu\nu} \cdot G^{\mu\nu} + \frac{1}{8}gG_{\mu\nu}^a (A^{b\mu} A^{c\nu} + B^{b\mu} B^{c\nu} - A^{b\mu} B^{c\nu})\varepsilon_{abc} \\ &\quad - \frac{1}{16}g^2 A_\mu^b A_\nu^c (A^{b\mu} A^{c\nu} - A^{c\mu} A^{b\nu}) - \frac{1}{32}g^2 (A_\mu^b A_\nu^c + 2B_\mu^b B_\nu^c - 4A_\mu^b B_\nu^c)(B^{[b} B^{\mu\nu]c]) \\ &\quad + \frac{1}{32}g^2 (A_\mu^b A_\nu^c - A_\mu^c B_\nu^c)(A^{[b} B^{\mu\nu]c]) - \frac{5}{64}A_\mu^a A_\nu^b B^{c\nu} B^{d\mu} \varepsilon_{abcd} \end{aligned} \quad (4.148)$$

Em particular o campo espinorial $\psi(x)$ pode ser visto como uma das colunas das matrizes introduzidas em, e.g., [Tra01, Tra99].

Capítulo 5

Isotopias de álgebras e aplicações à TQC

5.1 Álgebras de Clifford isotópicas e generalizações

Certas inconsistências na descrição de teorias físicas que possuem estrutura não-canônica e não-unitária, via formalismos construídos para a descrição de teorias canônicas e unitárias, têm motivado o estudo das *isotopias* de estruturas matemáticas [Kad96, Kad97, Kam93, Kli93, Lea79, San78, San79a].

O principal conceito a ser abordado neste capítulo é relativo aos chamados *levantamentos isotópicos*, que são essencialmente mapas de teorias lagrangianas lineares e locais em teorias mais gerais, não-lineares, não-locais e não-lagrangianas. Essas últimas recuperam o caráter linear, local e lagrangiano da teoria original, se formuladas em um *isoespaço*. Fundamentalmente esses conceitos têm suas raízes nas q -deformações de estruturas algébricas [Kli93].

Definiremos a seguir os conceitos isotópicos no contexto das álgebras de Clifford, e logo após o formalismo desenvolvido é ilustrado com algumas aplicações à Física, em particular TQCs e eletromagnetismo. A primeira delas mostra como obter uma simetria *exata* do isospin¹ $SU(2)$ no espaço isotópico associado, onde o próton e o nêutron têm a mesma massa, a partir da introdução de uma deformação no espaço que carrega a representação fundamental do grupo $Spin_+(3) \simeq SU(2)$. Os operadores de massa e carga elétrica são também erigidos a partir dessa deformação. Uma outra aplicação concerne a descrição da simetria de sabor entre os quarks u, d e s como uma simetria também exata, no isótopo de $SU(3)$ construído através do levantamento isotópico de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$. Após introduzirmos as isomatrizes de Gell-Mann, investigamos o comportamento de alguns operadores sobre o espaço que carrega a representação fundamental isotópica de $SU(3)$. Mais geralmente, a fim de que os seis quarks exibam uma simetria de sabor exata enquanto componentes de um elemento

¹O prefixo da denominação 'isospin' não tem qualquer relação com as isotopias de estruturas matemáticas e levantamentos isotópicos de álgebras apresentados aqui.

do espaço de representação do grupo $SU(6)$ isotópico, e conseqüentemente tenham a mesma massa no espaço isotópico, construímos a álgebra de Lie isotópica a $\mathfrak{su}(6)$ dentro do levantamento isotópico de $\mathcal{C}\ell_{12,0}$. Mais geralmente o levantamento isotópico de $SU(n)$ dentro de uma álgebra de Clifford isotópica $\mathcal{C}\ell_{2n,0}$ é mostrado.

Finalmente, toda a investigação feita no Cap. (3) acerca do eletromagnetismo (EM) para meios lineares é reduzido ao EM no vácuo, mediante uma isotopia apropriada.

Nas Secs. (5.6, 5.10) e (5.11) faremos uso dos limites vigentes das massas dos quarks dadas por [RPP04]

$$\begin{aligned}
1.5 \text{ MeV} &\leq m_u \leq 4.0 \text{ MeV}, \\
4 \text{ MeV} &\leq m_d \leq 8 \text{ MeV}, \\
80 \text{ MeV} &\leq m_s \leq 130 \text{ MeV}, \\
1.15 \text{ GeV} &\leq m_c \leq 1.35 \text{ GeV}, \\
4.1 \text{ GeV} &\leq m_b \leq 4.9 \text{ GeV}, \\
169.2 \text{ GeV} &\leq m_t \leq 179.4 \text{ GeV}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

para determinarmos o elemento isotópico ζ , que será função dessas massas. Nesse sentido a massa dos quarks é responsável pela deformação da estrutura algébrica, juntamente com a estrutura geométrica associada ao formalismo aqui desenvolvido.

5.1.1 Caso associativo

Vimos na Subsec.(4.3.2) que dados $\psi, \phi, \zeta \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$, podemos definir as aplicações- ζ como

$$\boxed{\diamond \psi := \zeta^{-1} \psi} \tag{5.2}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \zeta \\ \psi \end{matrix} := \psi \zeta} \tag{5.3}$$

onde a justaposição denota produto de Clifford. Todo o formalismo a ser desenvolvido neste capítulo é motivado pelas definições (5.2) e (5.3) para uma álgebra \mathcal{A} arbitrária, a qual será considerada $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ a partir da Sec. (5.3).

Considere uma \mathbb{C} -álgebra associativa \mathcal{A} munida de um produto AB denotado por justaposição, onde $A, B \in \mathcal{A}$, e um elemento $\zeta \in \mathcal{A}$ fixo, mas arbitrário. Ao contrário do Cap. (4) onde investigamos octonions e denotamos A, B elementos da álgebra \mathbb{O} dos octonions, utilizamos tal notação de agora em diante para descrever elementos arbitrários de uma álgebra \mathcal{A} . O produto $\diamond : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ é dado por

$$\boxed{A \diamond B := A \zeta^{-1} B = (A \zeta^{-1}) B = A (\zeta^{-1} B)} \quad A, B, \zeta \in \mathcal{A}. \tag{5.4}$$

Claramente podemos ver que ζ é a unidade de \mathcal{A} em relação a esse produto, já que

$$A \diamond \zeta = \zeta \diamond A = A \tag{5.5}$$

para todo $A \in \mathcal{A}$.

O *isótopo*- ζ da álgebra \mathcal{A} , denotado por \mathcal{A}_ζ , é definido como sendo o espaço subjacente à álgebra \mathcal{A} , com multiplicação dada pela eq.(5.4).

A ação de uma álgebra isotópica \mathcal{A}_ζ em estados físicos, geralmente descritos por elementos de um espaço de Hilbert \mathcal{H} , advém da definição do isótopo- ζ de um \mathcal{A} -módulo. Considere V um \mathcal{A} -módulo à esquerda com unidade, com relação à composição $A\mathbf{v}$, $A \in \mathcal{A}$, $\mathbf{v} \in V$. Através do mapa

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\zeta \times V &\rightarrow V \\ (A, \mathbf{v}) &\mapsto A \diamond \mathbf{v} = A\zeta^{-1}\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

o \mathcal{A} -módulo V se torna um \mathcal{A}_ζ -módulo V_ζ à esquerda com unidade, já que $\zeta \diamond \mathbf{v} = \zeta\zeta^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in V$.

O produto

$$\begin{aligned} \diamond : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (A, B) &\mapsto A \diamond B \end{aligned} \quad (5.7)$$

pode ainda ser estendido para elementos $\overset{\zeta}{A}, \overset{\zeta}{B} \in \mathcal{A}$, com respeito à eq.(5.3). Dados $\overset{\zeta}{A}, \overset{\zeta}{B} \in \mathcal{A}$, é imediato que

$$\overset{\zeta}{A} \diamond \overset{\zeta}{B} = A\zeta\zeta^{-1}B\zeta = AB\zeta \in \mathcal{A}, \quad (5.8)$$

ou seja, mediante o produto \diamond , os elementos $\overset{\zeta}{A}, \overset{\zeta}{B}$ herdam o produto AB em \mathcal{A} . Isso nos será de grande utilidade para definir os levantamentos isotópicos de álgebras exteriores na Sec.(5.4).

5.1.2 Caso não-associativo

Neste caso a álgebra \mathcal{A} é uma \mathbb{C} -álgebra *não-associativa*, e portanto a última igualdade da eq.(5.4) não é mais válida. Dado $\zeta \in \mathcal{A}$ fixo, mas arbitrário, o *isótopo*- ζ (não-associativo) da álgebra \mathcal{A} , denotado por $\mathcal{A}_{(\zeta)}$, é definido pela multiplicação

$$\boxed{A \diamond_\zeta B := A(\zeta^{-1}B)} \quad (5.9)$$

enquanto que o ζ -*isótopo* de \mathcal{A} , denotado por ${}_{(\zeta)}\mathcal{A}$, é definido pela relação

$$\boxed{A_\zeta \diamond B := (A\zeta^{-1})B} \quad (5.10)$$

Verificamos que enquanto ζ é unidade à *direita* de $\mathcal{A}_{(\zeta)}$ com relação ao produto dado pela eq.(5.9), ζ é unidade à *esquerda* de ${}_{(\zeta)}\mathcal{A}$ com relação ao produto dado pela eq.(5.10). Portanto o produto

$$\begin{aligned} \diamond_\zeta : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (A, B) &\mapsto A \diamond_\zeta B := A(\zeta^{-1}B) \end{aligned} \quad (5.11)$$

define o isótopo- ζ $\mathcal{A}_{(\zeta)}$ de \mathcal{A} , enquanto que o produto

$$\begin{aligned}\zeta \diamond : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (A, B) &\mapsto A \zeta \diamond B := (A\zeta^{-1})B\end{aligned}\tag{5.12}$$

define o ζ -isótopo $(\zeta)\mathcal{A}$ de \mathcal{A} . Naturalmente estendemos o produto

$$\begin{aligned}\diamond_{\zeta} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (A, B) &= A \diamond_{\zeta} B\end{aligned}\tag{5.13}$$

para elementos $\overset{\zeta}{A}, \overset{\zeta}{B}$ no isótopo- ζ $\mathcal{A}_{(\zeta)}$ de \mathcal{A} , de maneira que para este caso não-associativo, temos:

$$\begin{aligned}\overset{\zeta}{A} \diamond_{\zeta} \overset{\zeta}{B} &:= \overset{\zeta}{A}(\zeta^{-1}\overset{\zeta}{B}) \\ &= (A\zeta)(\zeta^{-1}B\zeta) \\ &= \boxed{A \diamond_{\zeta} (B\zeta)}\end{aligned}\tag{5.14}$$

Portanto podemos definir o produto \diamond_{ζ} a partir da eq.(5.14) não somente para a álgebra dos octonions \mathbb{O} como feito no Cap. (4), mas para qualquer álgebra não-associativa \mathcal{A} .

Estendemos também o produto

$$\begin{aligned}\zeta \diamond : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (A, B) &= A \zeta \diamond B\end{aligned}\tag{5.15}$$

para o ζ -isótopo $(\zeta)\mathcal{A}$ de \mathcal{A} , de maneira que para este caso não-associativo, temos:

$$\begin{aligned}\overset{\zeta}{A} \zeta \diamond \overset{\zeta}{B} &:= (\overset{\zeta}{A}\zeta^{-1})\overset{\zeta}{B} \\ &= (A\zeta\zeta^{-1})(B\zeta) \\ &= A(B\zeta).\end{aligned}\tag{5.16}$$

As definições do $\mathcal{A}_{(\zeta)}$ -módulo e do $(\zeta)\mathcal{A}$ -módulo à esquerda com unidade para os casos (5.9, 5.10) decorrem naturalmente de suas respectivas definições.

Exemplo 5.1: Tome a álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{0,7}$, onde seu espaço subjacente $\mathbb{R}^{0,7}$ é munido do produto octoniônico $\circ : \mathbb{O} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$. Definindo o elemento $\zeta = e_1$, o isótopo- ζ $\mathbb{O}_{(\zeta)}$ da álgebra \mathbb{O} , é dado por

$$A \diamond_{\zeta} B = A \circ (e_1^{-1} \circ B),\tag{5.17}$$

enquanto que o ζ -isótopo $(\zeta)\mathbb{O}$ de \mathbb{O} é definido por

$$A \zeta \diamond B = (A \circ e_1^{-1}) \circ B.\tag{5.18}$$

Para os casos particulares onde $A = e_2$ e $B = e_4$, temos:

$$\begin{aligned}e_2 \diamond_{\zeta} e_4 &= e_2 \circ (e_1^{-1} \circ e_4) \\ &= e_2 \circ e_3 \\ &= e_7\end{aligned}\tag{5.19}$$

enquanto que

$$\begin{aligned} e_2 \zeta \diamond e_4 &= (e_2 \circ e_1^{-1}) \circ e_4 \\ &= e_6 \circ e_4 \\ &= -e_7 \end{aligned} \tag{5.20}$$

5.2 Campos de aplicações- ζ e corpos isocomplexos

Ao invés de considerarmos $\zeta \in \mathcal{A}$, consideremos um campo

$$\zeta = \zeta(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, \dots) \tag{5.21}$$

sobre uma variedade M de dimensão finita. Nesse caso o espaço vetorial subjacente a \mathcal{A} é isomorfo enquanto espaço vetorial ao espaço $T_x M$ tangente a M em um ponto $x \in M$.

Defina uma isotopia da unidade como o mapa $1 \mapsto \zeta = \zeta(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}, \dots)$. Por consistência, os produtos associativos entre operadores devem também ser levados em seus correspondentes parceiros isotópicos associativos, denominados isoprodutos:

$$AB \mapsto A \diamond B = A\zeta^{-1}B, \quad \zeta \text{ fixo.} \tag{5.22}$$

O elemento ζ como já vimos é a unidade do produto \diamond , denominada também *isounidade*, enquanto que ζ^{-1} é denominado *elemento isotópico*.

O corpo $\mathbb{C} = \mathbb{C}(a, +, \times)$ contendo elementos $a \in \mathbb{C}$, com soma ordinária $a_1 + a_2$ e multiplicação entre números complexos $a_1 \times a_2 = a_1 a_2$ é dito ser levantado a (infinitas) isotopias $\overset{\zeta}{\mathbb{C}}(a, \overset{\zeta}{+}, \diamond)$, onde são definidos os números isocomplexos (denotados daqui em diante por caracteres góticos) $\mathfrak{a} := a\zeta$, a soma $\mathfrak{a}_1 \overset{\zeta}{+} \mathfrak{a}_2 := (a_1 + a_2)\zeta$ e a isomultiplicação $\mathfrak{a}_1 \diamond \mathfrak{a}_2 = a_1 \zeta^{-1} a_2 = (a_1 a_2)\zeta$. Os corpos \mathbb{C} e $\overset{\zeta}{\mathbb{C}}$ são isomorfos [Kad96]. Note que dado um operador² $A \in \mathcal{A}$, o isoproduto entre isoescalares e tal operador é dado por $\mathfrak{a} \diamond A = a\zeta\zeta^{-1}A = aA$.

5.3 Isotopias de Clifford via produto- ζ associativo

A álgebra associativa \mathcal{A} é denominada isoálgebra de Lie-Santilli [Kad96, Kad97, Frt79a, Kam93, Lea79, San78, San79a, San83c, San93, San03a] quando, além do produto dado pela eq.(5.4), há o isocomutador $[,]_\zeta$ definido por

$$\boxed{[A_i, A_j]_\zeta := A_i \diamond A_j - A_j \diamond A_i = \mathfrak{c}_{ij}^k \diamond A_k} \quad A_i, A_j, A_k \in \mathcal{A}, \tag{5.23}$$

onde $\mathfrak{c}_{ij}^k := c_{ij}^k \zeta$ são as isoconstantes de estrutura da álgebra $(\mathcal{A}, [,]_\zeta)$. Nesta seção tomaremos a álgebra \mathcal{A} em particular como sendo a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ sobre o espaço quadrático $\mathbb{R}^{p,q}$.

²Tal operador pode ser considerado agindo sobre espaços vetoriais, espaços de Hilbert, álgebras arbitrárias (em particular, álgebras de Lie), grupos de Lie, etc..

O produto $\diamond : \mathcal{C}\ell_{p,q} \times \mathcal{C}\ell_{p,q} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{p,q}$ possui a estrutura de um produto de Clifford, pois dados $\psi, \phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$, temos:

$$\begin{aligned} \overset{\zeta}{\psi} \diamond \overset{\zeta}{\phi} + \overset{\zeta}{\phi} \diamond \overset{\zeta}{\psi} &= \psi\zeta\zeta^{-1}\phi\zeta + \phi\zeta\zeta^{-1}\psi\zeta \\ &= (\psi\phi + \phi\psi)\zeta \\ &= 2g(\psi, \phi)\zeta \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde o elemento $\zeta \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$ age como a unidade em relação ao produto \diamond , já que $\psi \diamond \zeta = \psi = \zeta \diamond \psi$.

Considere agora que a álgebra $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ seja munida do comutador $[\ , \] : \mathcal{C}\ell_{p,q} \times \mathcal{C}\ell_{p,q} \rightarrow \mathcal{C}\ell_{p,q}$ dado por $[\psi, \phi] = \psi\phi - \phi\psi$, $\forall \psi, \phi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$. A *álgebra de Clifford admissível* $\mathcal{C}\ell_{p,q}^\zeta$ é definida como sendo a tripla $(\mathcal{C}\ell_{p,q}, \diamond, [\ , \]_\zeta)$, onde o isocomutador

$$[\psi, \phi]_\zeta := \psi \diamond \phi - \phi \diamond \psi = \psi\zeta^{-1}\phi - \phi\zeta^{-1}\psi \quad (5.25)$$

já foi introduzido através da eq.(5.23). A álgebra $\mathcal{C}\ell_{p,q}^\zeta$ herda a estrutura de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, com a diferença de que as relações que valem em $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, com respeito ao produto de Clifford $\psi\phi$ (denotado por justaposição) agora valem em $\mathcal{C}\ell_{p,q}^\zeta$, com o produto $\overset{\zeta}{\psi} \diamond \overset{\zeta}{\phi}$. Com efeito,

$$\begin{aligned} [\overset{\zeta}{\psi}, \overset{\zeta}{\phi}]_\zeta &= \overset{\zeta}{\psi} \diamond \overset{\zeta}{\phi} - \overset{\zeta}{\phi} \diamond \overset{\zeta}{\psi} \\ &= \psi\zeta\zeta^{-1}\phi\zeta - \phi\zeta\zeta^{-1}\psi\zeta \\ &= (\psi\phi - \phi\psi)\zeta \end{aligned} \quad (5.26)$$

É imediato ver que, devido à antissimetria do comutador definido pela eq.(5.25), a regra de Jacobi vale também para $[\ , \]_\zeta$.

Sistemas não-conservativos: genotopias

A eq.(5.25) pode ser ainda generalizada, definindo-se o *genocomutador*:

$$[\psi, \phi]_{\zeta, \xi} := \psi\zeta\phi - \phi\xi\psi, \quad \psi, \phi, \zeta, \xi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}. \quad (5.27)$$

Quando $\xi = \zeta$ a genocomutador é reconduzido ao isocomutador dada pela eq.(5.25). As aplicações do formalismo das álgebras de Clifford genotópicas admissíveis, definidas a partir do genocomutador acima, podem ser investigadas no contexto dos sistemas irreversíveis. Para mais detalhes fora do contexto das ACs, veja, e.g., [San03a].

5.4 Isotopia da álgebra exterior

Vimos no Cap. (1) que o produto exterior pode ser definido em termos das ACs, juntamente com a contração entre vetores e multivetores a partir das eqs.(1.32) e (1.33) como

$$\mathbf{v} \wedge \psi = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\psi + \hat{\psi}\mathbf{v}) \quad (5.28)$$

e

$$\mathbf{v} \lrcorner \psi = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\psi - \hat{\psi}\mathbf{v}) \quad (5.29)$$

$\mathbf{v} \in T_x M$, $\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$. A maneira natural de definirmos a isotopia

$$\mathbf{v} \wedge \psi \mapsto \mathbf{v} \overset{\zeta}{\wedge} \psi$$

do produto exterior é também via ACs, da seguinte maneira:

$$\mathbf{v} \overset{\zeta}{\wedge} \psi := \frac{1}{2}(\mathbf{v} \diamond \psi + \hat{\psi} \diamond \mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\zeta^{-1}\psi + \hat{\psi}\zeta^{-1}\mathbf{v}) \quad (5.30)$$

De maneira semelhante, a contração isotópica à esquerda é definida como

$$\mathbf{v} \overset{\zeta}{\lrcorner} \psi = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\zeta^{-1}\psi - \hat{\psi}\zeta^{-1}\mathbf{v}) \quad (5.31)$$

com análogo imediato para a contração à direita.

Embora as definições acima sejam corretas do ponto de vista formal, vimos pela eq.(5.24) que o produto \diamond (que mune $\mathcal{C}\ell_{p,q}^{\zeta}$) somente herda uma estrutura de produto de Clifford original $\psi\phi$ ao ser efetuado entre elementos $\overset{\zeta}{\psi}, \overset{\zeta}{\phi} \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$.

Portanto no que diz respeito às aplicações físicas do formalismo desenvolvido, nos serão também úteis as extensões

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \overset{\zeta}{\wedge} \overset{\zeta}{\psi} &= \frac{1}{2}(\overset{\zeta}{\mathbf{v}} \diamond \overset{\zeta}{\psi} + \overset{\zeta}{\hat{\psi}} \diamond \overset{\zeta}{\mathbf{v}}) \\ &= \mathbf{v}\zeta^{-1}\psi\zeta + \hat{\psi}\zeta\zeta^{-1}\mathbf{v}\zeta \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}\psi + \hat{\psi}\mathbf{v})\zeta \end{aligned} \quad (5.32)$$

e

$$\overset{\zeta}{\mathbf{v}} \overset{\zeta}{\lrcorner} \overset{\zeta}{\psi} = \frac{1}{2}(\overset{\zeta}{\mathbf{v}} \diamond \overset{\zeta}{\psi} - \overset{\zeta}{\hat{\psi}} \diamond \overset{\zeta}{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}\psi - \hat{\psi}\mathbf{v})\zeta \quad (5.33)$$

$\mathbf{v} \in T_x M$, $\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$. Da eq.(5.32) segue que

$$\begin{aligned} \overset{\zeta}{\mathbf{u}} \overset{\zeta}{\wedge} \overset{\zeta}{\mathbf{v}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}\zeta\zeta^{-1}\mathbf{v}\zeta - \mathbf{v}\zeta\zeta^{-1}\mathbf{u}\zeta) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u})\zeta \\ &= (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \zeta \end{aligned} \quad (5.34)$$

Dessa maneira vemos que o produto exterior isotópico $\overset{\zeta}{\mathbf{u}} \overset{\zeta}{\wedge} \overset{\zeta}{\mathbf{v}}$ de fato induz o produto exterior $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ no isoespço.

5.5 Levantamento isotópico da álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_{3,0}$

No que segue, após uma apresentação dos conceitos básicos relacionados às isotopias de $\mathcal{C}\ell_{3,0}$ e $\mathcal{C}\ell_{1,3}$, utilizaremos representações dos elementos dessas álgebras isotópicas, onde a notação implicitamente indicará o uso de suas representações.

5.5.1 Preliminares: a álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{3,0}$

A álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}_{3,0}$ é gerada pela base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de \mathbb{R}^3 , que satisfaz $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i)$. Um elemento arbitrário de $\mathcal{Cl}_{3,0}$ pode ser escrito como

$$\psi = a + a^i \mathbf{e}_i + a^{ij} \mathbf{e}_{ij} + p \mathbf{e}_{123}, \quad a, a^i, a^{ij}, p \in \mathbb{R}, \quad (5.35)$$

e já que $\mathcal{Cl}_{3,0} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$, uma representação matricial $\rho: \mathbf{e}_i \mapsto \rho(\mathbf{e}_i) = \sigma_i$ dos vetores \mathbf{e}_i é dada por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.36)$$

que são as matrizes de Pauli. Segundo essa representação, um multivetor $\psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}$ é levado em uma matriz $\Psi = \rho(\psi) \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$, e se ψ é dado pela eq.(5.35) então Ψ é dado por

$$\Psi = \begin{pmatrix} (a + a^3) + i(a^{12} + p) & (a^1 + a^{13}) + i(a^{23} - a^2) \\ (a^1 - a^{13}) + i(a^{23} + a^2) & (a - a^3) + i(p - a^{12}) \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

5.5.2 O grupo $\text{Spin}_+(3) \hookrightarrow \mathcal{Cl}_{3,0}$

O grupo $\text{Spin}_+(3)$ é definido em $\mathcal{Cl}_{3,0}$ como

$$\text{Spin}_+(3) = \{R \in \mathcal{Cl}_{3,0}^+ \mid R\tilde{R} = 1\} \quad (5.38)$$

Dado $\psi \in \mathcal{Cl}_{3,0}$, a ação de $\text{Spin}_+(3)$ sobre ψ é dada por $R\psi\tilde{R}$. Já que as rotações realizadas por R e $-R$ têm a mesma imagem, o grupo $\text{Spin}_+(3)$ é recobrimento duplo de $\text{SO}(3)$, e a partir do isomorfismo $\mathcal{Cl}_{3,0} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$, podemos ver que $\text{Spin}_+(3) \simeq \text{SU}(2)$, onde

$$\boxed{\text{SU}(2) = \{s \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \mid s^\dagger s = I, \det s = 1\}} \quad (5.39)$$

De fato a condição $R\tilde{R} = 1$ para $R \in \mathcal{Cl}_{3,0}^+$ se traduz em termos de $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ por

$$\begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* & w_2^* \\ -w_2 & w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.40)$$

ou seja,

$$\det \begin{pmatrix} w_1 & -w_2^* \\ w_2 & w_1^* \end{pmatrix} = |w_1|^2 + |w_2|^2 = 1. \quad (5.41)$$

5.5.3 O subgrupo $\text{SU}(2)_\zeta$ isotópico a $\text{SU}(2)$ dentro de $\mathcal{Cl}_{3,0}^\zeta$

Dado $\zeta \in \mathcal{Cl}_{3,0}$ fixo mas arbitrário, o isótopo $\mathcal{Cl}_{3,0}^\zeta$ de $\mathcal{Cl}_{3,0}$ é definido como sendo gerado pela base $\{\mathbf{e}_i\}$ de \mathbb{R}^3 que satisfaz $2g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\zeta = 2\delta_{ij}\zeta = \hat{\mathbf{e}}_i \diamond \hat{\mathbf{e}}_j + \hat{\mathbf{e}}_j \diamond \hat{\mathbf{e}}_i$, e um elemento arbitrário de $\mathcal{Cl}_{3,0}^\zeta$ pode ser escrito como:

$$\psi_\zeta = \mathbf{a} + \mathbf{a}^i \hat{\mathbf{e}}_i + \mathbf{a}^{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \diamond \hat{\mathbf{e}}_j + \mathbf{p} \hat{\mathbf{e}}_1 \diamond \hat{\mathbf{e}}_2 \diamond \hat{\mathbf{e}}_3, \quad \mathbf{a}, \mathbf{a}^i, \mathbf{a}^{ij}, \mathbf{p} \in \mathbb{R} = \mathbb{R}\zeta. \quad (5.42)$$

A representação matricial $\varrho : \hat{\mathbf{e}}_i \mapsto \varrho(\hat{\mathbf{e}}_i) = \hat{\sigma}_i \sigma_i \zeta$ dos vetores $\hat{\mathbf{e}}_i$ é dada por:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1 = \sigma_1 \zeta &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} \zeta_2 & \zeta_3 \\ \zeta_0 & \zeta_1 \end{pmatrix}, \\ \hat{\sigma}_2 = \sigma_2 \zeta &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \zeta = i \begin{pmatrix} -\zeta_2 & -\zeta_3 \\ \zeta_0 & \zeta_1 \end{pmatrix}, \\ \hat{\sigma}_3 = \sigma_3 \zeta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 \\ -\zeta_2 & -\zeta_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

onde $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 \\ \zeta_2 & \zeta_3 \end{pmatrix}$ é a representação da isounidade $\zeta \in \mathcal{C}\ell_{3,0}$ em $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$. As matrizes dadas pelas eqs.(5.43) são denominadas isomatrizes de Pauli.

Agora o isótopo $SU(2)_\zeta$ de $SU(2)$ será construído no contexto das ACs, a partir do levantamento isotópico $\text{Spin}_+(3)_\zeta \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{3,0}^\zeta$ do grupo $\text{Spin}_+(3) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{3,0}$ definido por:

$$\boxed{\text{Spin}_+(3)_\zeta := \{R \in \mathcal{C}\ell_{3,0}^\zeta \mid \tilde{R} \diamond R = \tilde{R} \zeta^{-1} R = 1\}} \quad (5.44)$$

A ação de $\text{Spin}(3)_{+\zeta}$ sobre $\psi \in \mathcal{C}\ell_{3,0}^\zeta$ é dada por $R \diamond \psi \diamond \tilde{R} = R \zeta^{-1} \psi \zeta^{-1} \tilde{R}$. Portanto $\text{Spin}(3)_{+\zeta} \simeq SU(2)_\zeta$, onde

$$\boxed{SU(2)_\zeta = \{s \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C}) \mid s^\dagger \diamond s = \zeta, \det(s \zeta^{-1}) = 1\}} \quad (5.45)$$

5.6 Aplicações em Mecânica Quântica

Considere um espaço de Hilbert \mathcal{H} com elementos $\{|\psi_i\rangle, \dots\}$, onde $\langle \psi_i | \psi_j \rangle \in \mathbb{C}$ e os estados normalizados são dados por $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij}$. Para a construção de uma teoria isotópica à mecânica quântica (MQ), a chamada mecânica hadrônica relativística (MHR) [Lea79, Mig83, San78, San82], considere o isoespaço de Hilbert \mathcal{H}_ζ , cujos operadores são multiplicados através da regra dada pela eq.(5.22), cujos elementos são denotados por $|\hat{\psi}\rangle$. \mathcal{H}_ζ é munido do isoproduto interno

$$\langle \hat{\psi} | \hat{\phi} \rangle := \langle \hat{\psi} | \zeta^{-1} | \hat{\phi} \rangle \zeta \in \hat{\mathbb{C}}. \quad (5.46)$$

Nesse caso os estados normalizados são dados por $\langle \hat{\psi} | \hat{\phi} \rangle = \zeta \in \hat{\mathbb{C}}$. Com essas definições podemos mostrar que operadores hermitianos (observáveis) no formalismo da MQ correspondem a estados isohermitianos na MHR.

Como caso particular, neste contexto os operadores isounitários $\hat{W} \in SU(2)_\zeta: \mathcal{H}_\zeta \rightarrow \mathcal{H}_\zeta$ satisfazem a relação $\hat{W} \diamond \hat{W}^\dagger = \hat{W}^\dagger \diamond \hat{W} = \zeta$, e todas as possíveis transformações não-unitárias em \mathcal{H} podem sempre ser escritas como operadores isounitários em \mathcal{H}_ζ . De fato, suponha que uma certa transformação $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ não seja unitária, i.e., $UU^\dagger \neq I$, onde I denota a identidade em $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$.

Definindo $U = \overset{\zeta}{U}\zeta^{-1/2}$, onde $\overset{\zeta}{U}$ é um operador isounitário (satisfazendo $\overset{\zeta}{U} \diamond \overset{\zeta}{U}^\dagger$), segue que

$$\begin{aligned}
UU^\dagger &= \overset{\zeta}{U}\zeta^{-1/2}(\overset{\zeta}{U}\zeta^{-1/2})^\dagger \\
&= \overset{\zeta}{U}\zeta^{-1/2}(\zeta^{-1/2})^\dagger\overset{\zeta}{U}^\dagger \\
&= \overset{\zeta}{U}\zeta^{-1}\overset{\zeta}{U}^\dagger \\
&= \overset{\zeta}{U} \diamond \overset{\zeta}{U}^\dagger \\
&= \zeta,
\end{aligned} \tag{5.47}$$

mostrando assim que o operador U é isounitário.

De agora em diante introduzimos ζ -kets $|\cdot\rangle$, através da notação

$$\boxed{|\psi\rangle := \zeta^{-1}|\psi\rangle} \tag{5.48}$$

e também a isoequação de autovalores, a ser usada mais tarde é dada por

$$\overset{\zeta}{H} \diamond |\overset{\zeta}{\psi}\rangle = \overset{\zeta}{H}\zeta^{-1}|\overset{\zeta}{\psi}\rangle = \overset{\zeta}{E} \diamond |\overset{\zeta}{\psi}\rangle = E|\overset{\zeta}{\psi}\rangle, \tag{5.49}$$

onde $|\overset{\zeta}{\psi}\rangle$ é elemento de \mathcal{H}_ζ e H denota um operador que age em \mathcal{H}_ζ .

Agora o exemplo de uma isotopia de $SU(2)$ será apresentado. Sabemos [San94b] que em geral álgebras de Lie isotópicas são imagens de álgebras de Lie sob transformações da ação adjunta de elementos $\Phi \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ que não estão em $SU(2)$, i.e., $\Phi\Phi^\dagger = \zeta \neq I$. De fato, sob essa transformação, o comutador entre dois operadores A, B que agem em \mathcal{H} adquire a forma

$$\begin{aligned}
\Phi[A, B]\Phi^\dagger &= \Phi(AB - BA)\Phi^\dagger \\
&= \Phi A\Phi^\dagger(\Phi\Phi^\dagger)^{-1}\Phi B\Phi^\dagger - \Phi B\Phi^\dagger(\Phi\Phi^\dagger)^{-1}\Phi A\Phi^\dagger \\
&= A'\zeta^{-1}B' - B'\zeta^{-1}A',
\end{aligned} \tag{5.50}$$

onde $A' = \Phi A\Phi^\dagger$, $B' = \Phi B\Phi^\dagger$, $\zeta = \Phi\Phi^\dagger$. Isso pode ainda ser descrito em termos de $\mathcal{C}\ell_{3,0}$, já que a conjugação hermitiana $\Phi \mapsto \Phi^\dagger$ em $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$ se traduz na reversão $\phi \mapsto \tilde{\phi}$ quando $\phi \in \mathcal{C}\ell_{3,0}$. Portanto perante a ação de $\mathcal{C}\ell_{3,0}^\zeta$, o comutador entre dois elementos de $\psi, \xi \in \mathcal{C}\ell_{3,0}$ é mapeado em

$$\begin{aligned}
\phi[\psi, \xi]\tilde{\phi} &= \phi(\psi\xi - \xi\psi)\tilde{\phi} \\
&= \psi'\zeta^{-1}\xi' - \xi'\zeta^{-1}\psi',
\end{aligned} \tag{5.51}$$

onde $\psi' = \phi\psi\tilde{\phi}$, $\xi' = \phi\xi\tilde{\phi}$ e $\zeta = \phi\tilde{\phi}$. Obviamente quando $\phi \in \text{Spin}_+(3)$, $\phi\tilde{\phi} = \zeta = 1$, e sendo isotopia a própria identidade, segue que $\mathcal{C}\ell_{3,0}^\zeta \equiv \mathcal{C}\ell_{3,0}$ nesse caso particular.

Vimos pelas eqs.(5.43) que as matrizes de Pauli, enquanto representações de $\text{Spin}_+(3) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell_{3,0}$ podem sofrer uma deformação a partir de um elemento isotópico, e definindo $\delta := \det \zeta^{-1}$ e $f(\delta)$

qualquer função não-nula que satisfaça $f(1) = 1$, Santilli [San98] constrói em particular as representações

$$\check{\sigma}_1 = f(\delta) \begin{pmatrix} 0 & g_{11} \\ g_{22} & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\sigma}_2 = f(\delta) \begin{pmatrix} 0 & -ig_{11} \\ ig_{22} & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\sigma}_3 = f(\delta) \begin{pmatrix} g_{22} & 0 \\ 0 & -g_{11} \end{pmatrix}. \quad (5.52)$$

Quando $\delta > 0$, a iso-representação acima satisfaz as relações

$$\check{\sigma}_i \zeta^{-1} \check{\sigma}_k = if(\delta) \varepsilon_{ijk} \check{\sigma}_k, \quad (5.53)$$

e conseqüentemente, para $f(\delta) = \delta^{1/2}$ temos

$$\begin{aligned} [\check{\sigma}_i, \check{\sigma}_j]_\zeta &= \check{\sigma}_i \zeta^{-1} \check{\sigma}_j - \check{\sigma}_j \zeta^{-1} \check{\sigma}_i = 2i\delta^{1/2} \varepsilon_{ijk} \check{\sigma}_k \\ \check{\sigma}_3 \diamond |\psi_A\rangle &= \pm \delta^{1/2} |\psi_A\rangle \\ (\check{\sigma} \diamond \check{\sigma}) \diamond |\psi_A\rangle &= 3\delta |\psi_A\rangle, \quad A = 1, 2, \end{aligned} \quad (5.54)$$

onde $|\psi_A\rangle$ é uma base do espaço de representação do grupo $SU(2)_\zeta$, isotópico a $SU(2)$, que satisfaz a isonormalização $\langle \check{\psi}_i | \check{\psi}_j \rangle = \delta_{ij} \zeta$.

Observação ► Além da possibilidade de que $\delta > 0$, onde $SU(2)_\zeta$ é homeomorfo a $SU(2)$ (compacto) existe também a possibilidade de que $\delta \leq 0$, o que no caso particular onde $\delta < 0$ temos que $SU(2)_\zeta$ é homeomorfo a $SU(1,1)$ (*não-compacto*). Com isso o grupo isotópico $SU(2)_\zeta$ permite a unificação de todos os grupos de Lie 3-dimensionais simples da classificação de Cartan sobre \mathbb{C} . Além disso, esse é um exemplo de que levantamentos isotópicos não necessariamente preservam a topologia [San98]. ◀

As isorepresentações adjuntas padrão das matrizes de Pauli são definidas como sendo aquelas definidas pelas eqs.(5.52), onde o espectro dos autovalores é o mesmo das matrizes de Pauli convencionais, i.e., quando $\delta = 1$ nas eqs.(5.52). As matrizes

$$\check{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & g_{11} \\ g_{22} & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -ig_{11} \\ ig_{22} & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} g_{22} & 0 \\ 0 & -g_{11} \end{pmatrix}, \quad (5.55)$$

com $g_{11} = g_{22}^{-1} = \lambda$, onde λ é um campo escalar, nos permitem verificar que, ao definirmos os iso-operadores de momento angular $2\check{J}_i = \check{\sigma}_i$, segue que

$$\begin{aligned} [\check{J}_i, \check{J}_j]_\zeta &= i\varepsilon_{ijk} \check{J}_k, \\ \check{J}_3 \diamond |\psi_A\rangle &= \pm \frac{1}{2} |\psi_A\rangle, \\ (\check{J} \diamond \check{J}) \diamond |\psi_A\rangle &= \frac{3}{4} |\psi_A\rangle \end{aligned} \quad (5.56)$$

Considere agora o isoestado $|\check{\psi}\rangle = (|\check{\psi}_p\rangle, |\check{\psi}_n\rangle)^T$, onde cada uma das funções que descreve respectivamente as funções de onda do próton e do nêutron são soluções da isoequação de Dirac [San82].

Ao escrevermos cada um dos estados $|\psi_p^\zeta\rangle, |\psi_n^\zeta\rangle$ como

$$|\psi_p^\zeta\rangle = \begin{pmatrix} \lambda^{-1/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_n^\zeta\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (5.57)$$

verificamos que tais estados são isoestados isonormalizados, satisfazendo

$$\langle \psi_i^\zeta | \psi_j^\zeta \rangle = \langle \psi_i | \zeta^{-1} | \psi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = p, n. \quad (5.58)$$

É útil agora nos restringirmos ao elemento $\zeta \in \text{SU}(2) \simeq \text{Spin}_+(3)$ quando ele é diagonalizável e tem determinante igual a um. Dos infinitos espaços isotópicos tais que $\zeta = \text{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$, é possível selecionar um deles de tal maneira que, nesse espaço, *as massas do nêutron e do próton sejam iguais*, e nesse caso portanto a simetria isospin $\text{SU}(2)$ [Hua92, Itz80, Kak93, Pes95, Ryd96] é *exata*. Para tanto, $m_p \lambda^{-1} = m_n \lambda$, o que implica que o parâmetro λ é dado por

$$\lambda = \left(\frac{m_p}{m_n} \right)^{1/2} \approx 0.999311 \quad (5.59)$$

O operador de massa isotópico é definido como

$$\begin{aligned} \hat{M}^\zeta &= \left(\frac{1}{2}(\lambda m_p + \lambda^{-1} m_n) \zeta + \frac{1}{2}(\lambda m_p - \lambda^{-1} m_n) \sigma_3 \right) \zeta \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{-1} m_p & 0 \\ 0 & \lambda m_n \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

que representa massa iguais $\hat{m}^\zeta = \lambda^{-1} m_p = \lambda m_n$ no isoespaço. Quando não restringimos o valor de λ , como feito pela eq.(5.59), podemos fazer o limite quando $\lambda \rightarrow 1$, e nesse caso é imediato que o operador de massa isotópico é reconduzido ao operador de massa usual, dado por

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2}(m_p + m_n)I + \frac{1}{2}(m_p - m_n)\sigma_3 \\ &= \begin{pmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

No espaço físico em questão os valores das massas convencionais das massas m_p do próton e m_n do nêutron são obtidas através da isoequação para autovalores

$$\hat{M}^\zeta \diamond |\psi^\zeta\rangle = M \zeta \zeta^{-1} |\psi^\zeta\rangle = M |\psi^\zeta\rangle = \begin{pmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_n \end{pmatrix} |\psi^\zeta\rangle \quad (5.62)$$

ou, de maneira equivalente, via isovalores esperados:

$$\langle \psi_p^\zeta | \hat{M}^\zeta | \psi_p^\zeta \rangle = m_p, \quad \langle \psi_n^\zeta | \hat{M}^\zeta | \psi_n^\zeta \rangle = m_n. \quad (5.63)$$

O operador carga elétrica é dado por [San98]

$$Q = \frac{1}{2}q(\zeta + \sigma_3), \quad (5.64)$$

onde q denota a carga do elétron. As cargas no isoespaço são dadas por $q_p = \lambda^{-1}q$ e $q_n = 0$, mas no espaço físico as cargas são dadas por

$$\langle \psi_p | Q | \psi_p \rangle = q, \quad \langle \psi_n | Q | \psi_n \rangle = 0. \quad (5.65)$$

5.7 A álgebra do espaço-tempo $\mathcal{Cl}_{1,3}$

Considere uma base ortonormal $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ do espaço-tempo $\mathbb{R}^{1,3}$, onde $\mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\nu \mathbf{e}_\mu = 2\eta_{\mu\nu} = 2\text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Um elemento arbitrário de $\Upsilon \in \mathcal{Cl}_{1,3}$ é escrito como $\Upsilon = c + c^\mu \mathbf{e}_\mu + c^{\mu\nu} \mathbf{e}_{\mu\nu} + c^{\mu\nu\sigma} \mathbf{e}_{\mu\nu\sigma} + h \mathbf{e}_{0123}$, onde $c, c^\mu, c^{\mu\nu}, h \in \mathbb{R}$.

O 4-vetor $(-i\mathbf{e}_{0123})$ é denotado por \mathbf{e}_5 e satisfaz $(\mathbf{e}_5)^2 = 1$, além de anticomutar com os vetores $(\mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_5 = -\mathbf{e}_5 \mathbf{e}_\mu)$. Pela tabela de classificação das álgebras de Clifford (Subsec. (1.8.6)) sabemos que $\mathcal{Cl}_{1,3} \simeq \mathcal{M}(2, \mathbb{H})$. A fim de obtermos uma representação de $\mathcal{Cl}_{1,3}$ em termos de matrizes com entradas quaterniônicas, faremos uso do idempotente primitivo $f = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{e}_0)$. Um ideal minimal à esquerda da álgebra $\mathcal{Cl}_{1,3}$ é escrito como $I_{1,3} = \mathcal{Cl}_{1,3}f$, cujos elementos são da forma

$$\Xi = (a^1 + a^2 \mathbf{e}_{23} + a^3 \mathbf{e}_{31} + a^4 \mathbf{e}_{12})f + (a^5 + a^6 \mathbf{e}_{23} + a^7 \mathbf{e}_{31} + a^8 \mathbf{e}_{12})\mathbf{e}_5 f, \quad (5.66)$$

onde

$$\begin{aligned} a^1 &= c + c^0, & a^2 &= c^{23} + c^{023}, & a^3 &= -c^{13} - c^{013}, & a^4 &= c^{12} + c^{012}, \\ a^5 &= -c^{123} + c^{0123}, & a^6 &= c^1 - c^{01}, & a^7 &= c^2 - c^{02}, & a^8 &= c^3 - c^{03}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Já que $\mathbf{e}_\mu = f \mathbf{e}_\mu f + f \mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_5 f - f \mathbf{e}_5 \mathbf{e}_\mu f - f \mathbf{e}_5 \mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_5 f$, através da representação matricial de $\mathbf{e}_\mu \in \mathcal{Cl}_{1,3}$ em $\mathcal{M}(2, \mathbb{H})$ dada por

$$\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{j} \\ \mathbf{j} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{k} \\ \mathbf{k} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

onde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ são unidades quaterniônicas, obtemos

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_5 f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.69)$$

e finalmente com essas representações é possível escrever $\Upsilon \in \mathcal{Cl}_{1,3}$ em $\mathcal{M}(2, \mathbb{H})$ como

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} (c + c^0) + (c^{23} + c^{023})\mathbf{i} & (-c^{123} - c^{0123}) + (c^1 + c^{01})\mathbf{i} + \\ +(-c^{13} - c^{013})\mathbf{j} + (c^{12} + c^{012})\mathbf{k} & (c^2 + c^{02})\mathbf{j} + (c^3 + c^{03})\mathbf{k} \\ (-c^{123} + c^{0123}) + (c^1 - c^{01})\mathbf{i} & (c - c^0) + (c^{23} - c^{023})\mathbf{i} + \\ +(c^2 - c^{02})\mathbf{j} + (c^3 - c^{03})\mathbf{k} & (-c^{13} + c^{013})\mathbf{j} + (c^{12} - c^{012})\mathbf{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{pmatrix}. \quad (5.70)$$

O grupo $\text{Spin}_+(1, 3)$, definido no Cap. (1), na AC do espaço-tempo $\mathcal{Cl}_{1,3}$ é dado por

$$\boxed{\text{Spin}_+(1, 3) = \{R \in \mathcal{Cl}_{1,3}^+ \mid R\tilde{R} = 1\}} \quad (5.71)$$

5.8 Isotopia $\mathcal{C}\ell_{1,3}^\zeta$ de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$

Nesse caso a base $\{\mathbf{e}_\mu\}$ de $\mathbb{R}^{1,3}$ satisfaz $\hat{\mathbf{e}}_\mu \diamond \hat{\mathbf{e}}_\nu + \hat{\mathbf{e}}_\nu \diamond \hat{\mathbf{e}}_\mu = 2\eta_{\mu\nu}\zeta$, e um elemento arbitrário de $\Upsilon_\zeta \in \mathcal{C}\ell_{1,3}^\zeta$ pode agora ser escrito como

$$\Upsilon_\zeta = \mathbf{c}\zeta + \mathbf{c}^\mu \diamond \hat{\mathbf{e}}_\nu + \mathbf{c}^{\mu\nu} \diamond \hat{\mathbf{e}}_\mu \diamond \hat{\mathbf{e}}_\nu + \mathbf{c}^{\mu\nu\sigma} \diamond \hat{\mathbf{e}}_\mu \diamond \hat{\mathbf{e}}_\nu \diamond \hat{\mathbf{e}}_\sigma + \mathfrak{h} \diamond \hat{\mathbf{e}}_0 \diamond \hat{\mathbf{e}}_1 \diamond \hat{\mathbf{e}}_2 \diamond \hat{\mathbf{e}}_3,$$

onde $\mathbf{c}, \mathbf{c}^\mu, \mathbf{c}^{\mu\nu}, \mathbf{c}^{0123} \in \mathbb{R}$.

O iso-4-vetor $(-i\hat{\mathbf{e}}_0 \diamond \hat{\mathbf{e}}_1 \diamond \hat{\mathbf{e}}_2 \diamond \hat{\mathbf{e}}_3)$ é denotado por \mathbf{e}_5^ζ e satisfaz $\mathbf{e}_5^\zeta \diamond \mathbf{e}_5^\zeta = 1$. Denotando $f_\zeta = \frac{1}{2}(\zeta + \hat{\mathbf{e}}_0)$, um ideal minimal $I_{1,3}^\zeta$ à esquerda da álgebra isotópica $\mathcal{C}\ell_{1,3}^\zeta$ é escrito como $\mathcal{C}\ell_{1,3}^\zeta \diamond f_\zeta$, cujos elementos são da forma

$$\begin{aligned} \Xi_\zeta = & (\mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2 \diamond \hat{\mathbf{e}}_2 \diamond \hat{\mathbf{e}}_3 + \mathbf{a}^3 \hat{\mathbf{e}}_3 \diamond \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{a}^4 \hat{\mathbf{e}}_1 \diamond \hat{\mathbf{e}}_2) \diamond f_\zeta \\ & + (\mathbf{a}^5 + \mathbf{a}^6 \diamond \hat{\mathbf{e}}_2 \diamond \hat{\mathbf{e}}_3 + \mathbf{a}^7 \diamond \hat{\mathbf{e}}_3 \diamond \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{a}^8 \diamond \hat{\mathbf{e}}_1 \diamond \hat{\mathbf{e}}_2) \diamond \hat{\mathbf{e}}_5 \diamond f_\zeta, \quad \mathbf{a}^m \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^1 &= \mathbf{c} + \mathbf{c}^0, & \mathbf{a}^2 &= \mathbf{c}^{23} + \mathbf{c}^{023}, \\ \mathbf{a}^3 &= -\mathbf{c}^{13} - \mathbf{c}^{013}, & \mathbf{a}^4 &= \mathbf{c}^{12} + \mathbf{c}^{012}, \\ \mathbf{a}^5 &= -\mathbf{c}^{123} + \mathbf{c}^{0123}, & \mathbf{a}^6 &= \mathbf{c}^1 - \mathbf{c}^{01}, \\ \mathbf{a}^7 &= \mathbf{c}^2 - \mathbf{c}^{02}, & \mathbf{a}^8 &= \mathbf{c}^3 - \mathbf{c}^{03}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Já que $\hat{\mathbf{e}}_\mu = f_\zeta \diamond \hat{\mathbf{e}}_\mu \diamond f_\zeta + f_\zeta \diamond \hat{\mathbf{e}}_\mu \diamond \mathbf{e}_5^\zeta \diamond f_\zeta - f_\zeta \diamond \mathbf{e}_5^\zeta \diamond \hat{\mathbf{e}}_\mu \diamond f_\zeta - f_\zeta \mathbf{e}_5^\zeta \diamond \hat{\mathbf{e}}_\mu \diamond \mathbf{e}_5^\zeta \diamond f_\zeta$ e através da representação matricial de $\hat{\mathbf{e}}_\mu \in \mathcal{C}\ell_{1,3}^\zeta$ em $\mathcal{M}(2, \mathbb{H})_\zeta$ segue que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 \\ \zeta_2 & \zeta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 \\ -\zeta_2 & -\zeta_3 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{e}}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 \\ \zeta_2 & \zeta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}\zeta_2 & \mathbf{i}\zeta_3 \\ \mathbf{i}\zeta_0 & \mathbf{i}\zeta_1 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{j} \\ \mathbf{j} & 0 \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{j} \\ \mathbf{j} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 \\ \zeta_2 & \zeta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{j}\zeta_2 & \mathbf{j}\zeta_3 \\ \mathbf{j}\zeta_0 & \mathbf{j}\zeta_1 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{e}}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{k} & 0 \end{pmatrix} \zeta = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{k} \\ \mathfrak{k} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_0 & \zeta_1 \\ \zeta_2 & \zeta_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathfrak{k}\zeta_2 & \mathfrak{k}\zeta_3 \\ \mathfrak{k}\zeta_0 & \mathfrak{k}\zeta_1 \end{pmatrix}, \quad (5.75)$$

obtemos

$$f_\zeta = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_5^\zeta \diamond f_\zeta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \zeta & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.76)$$

e finalmente com essas representações é possível escrever $\Upsilon \in \mathcal{C}\ell_{1,3}^\zeta$ em $\mathcal{M}(2, \mathbb{H})_\zeta$ como

$$\Upsilon_\zeta = \begin{pmatrix} (\mathfrak{c} + \mathfrak{c}^0) + (\mathfrak{c}^{23} + \mathfrak{c}^{023})\mathfrak{i} & (-\mathfrak{c}^{123} - \mathfrak{c}^{0123}) + (\mathfrak{c}^1 + \mathfrak{c}^{01})\mathfrak{i} + \\ + (-\mathfrak{c}^{13} - \mathfrak{c}^{013})\mathfrak{j} + (\mathfrak{c}^{12} + \mathfrak{c}^{012})\mathfrak{k} & (\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{c}^{02})\mathfrak{j} + (\mathfrak{c}^3 + \mathfrak{c}^{03})\mathfrak{k} \\ (-\mathfrak{c}^{123} + \mathfrak{c}^{0123}) + (\mathfrak{c}^1 - \mathfrak{c}^{01})\mathfrak{i} & (\mathfrak{c} - \mathfrak{c}^0) + (\mathfrak{c}^{23} - \mathfrak{c}^{023})\mathfrak{i} + \\ + (\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{c}^{02})\mathfrak{j} + (\mathfrak{c}^3 - \mathfrak{c}^{03})\mathfrak{k} & (-\mathfrak{c}^{13} + \mathfrak{c}^{013})\mathfrak{j} + (\mathfrak{c}^{12} - \mathfrak{c}^{012})\mathfrak{k} \end{pmatrix} \zeta. \quad (5.77)$$

O grupo $\text{Spin}_+^\zeta(1,3)$ na AC isotópica do espaço-tempo $\mathcal{C}\ell_{1,3}^\zeta$ é dado por

$$\text{Spin}_+^\zeta(1,3) = \{R \in \mathcal{C}\ell_{1,3}^{\zeta+} \mid R\tilde{R} = 1\}. \quad (5.78)$$

5.8.1 Iso-representações não-homogêneas de $\text{SU}(3)$ em $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$

Nem sempre uma subálgebra de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ é gerada por bivectores, e exibiremos agora dois exemplos de como os geradores da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$ podem ser construídos a partir de multivetores formados pela base $\{\mathbf{e}^\mu\}$ da álgebra de Dirac $\mathcal{C}\ell_{1,3}(\mathbb{C})$. Para mais exemplos, veja, e.g., [Rom91, Chi89].

Exemplo 1

A álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$ é gerada por

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{01} + i\mathbf{e}^{23}), & \lambda^2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{02} - i\mathbf{e}^{13}), \\ \lambda^3 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{03} + i\mathbf{e}^{12}), & \lambda^4 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}^0 + i\mathbf{e}^{012}), \\ \lambda^5 &= \frac{1}{2}(i\mathbf{e}^3 - \mathbf{e}^{123}), & \lambda^6 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{023} + i\mathbf{e}^2), \\ \lambda^7 &= \frac{i}{2}(\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^{013}), & \lambda^8 &= \frac{i}{\sqrt{3}}\mathbf{e}^5 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathbf{e}^{03} - \frac{i}{2\sqrt{3}}\mathbf{e}^{12}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Além disso os elementos $\{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3\}$ e λ^8 geram a subálgebra $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{u}(1)$.

Exemplo 2

A álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$ é gerada por

$$\begin{aligned} \xi^1 &= -\frac{i}{2}(\mathbf{e}^{23} + i\mathbf{e}^{023}), & \xi^2 &= \frac{i}{2}(\mathbf{e}^{13} + \mathbf{e}^{013}), \\ \xi^3 &= \frac{i}{2}(\mathbf{e}^{12} + \mathbf{e}^{012}), & \xi^4 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}^5 + i\mathbf{e}^{03}), \\ \xi^5 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}^3 - i\mathbf{e}^{123}), & \xi^6 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}^2 + i\mathbf{e}^{01}), \\ \xi^7 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}^1 - i\mathbf{e}^{02}), & \xi^8 &= \frac{i}{2\sqrt{3}}(2\mathbf{e}^0 + i\mathbf{e}^{12} - i\mathbf{e}^{012}), \end{aligned} \quad (5.80)$$

onde $\mathbf{e}^5 = \mathbf{e}^{0123}$. Os elementos $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ e ξ^8 geram a subálgebra $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{u}(1)$.

5.8.2 Levantamentos isotópicos de $SU(3)$

Com os exemplos acima que mostram como incluir a álgebra de Lie $\mathfrak{su}(3)$ do grupo $SU(3)$ em $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$, podemos construir o levantamento isotópico $SU(3)_\zeta \hookrightarrow \mathcal{Cl}_{1,3}^\zeta$ da seguinte maneira:

$SU(3)_\zeta$: caso 1

Vimos no Cap. (2.107) que para uma base ortonormal $\{\mathbf{e}^a\}$ de $\mathbb{R}^{p,q} \simeq T_x M$ vale a relação $\mathbf{e}^a \mathbf{e}^b = \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b$, entre o produto de Clifford e o produto exterior. Denotando \mathbf{e}^μ por \mathbf{e}_ζ^μ , definimos aqui o levantamento isotópico $\mathfrak{su}(3)_\zeta$ de $\mathfrak{su}(3)$, que gera o grupo isotópico $SU(3)_\zeta$ como de

$$\begin{aligned} \lambda_\zeta^1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\zeta^0 \wedge \mathbf{e}_\zeta^1 + i\mathbf{e}_\zeta^2 \wedge \mathbf{e}_\zeta^3), & \lambda_\zeta^2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\zeta^0 \wedge \mathbf{e}_\zeta^2 - i\mathbf{e}_\zeta^1 \wedge \mathbf{e}_\zeta^3), \\ \lambda_\zeta^3 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\zeta^0 \wedge \mathbf{e}_\zeta^3 + i\mathbf{e}_\zeta^1 \wedge \mathbf{e}_\zeta^2), & \lambda_\zeta^4 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\zeta^0 + i\mathbf{e}_\zeta^0 \wedge \mathbf{e}_\zeta^1 \wedge \mathbf{e}_\zeta^2), \\ \lambda_\zeta^5 &= \frac{1}{2}(i\mathbf{e}_\zeta^3 - \mathbf{e}_\zeta^1 \wedge \mathbf{e}_\zeta^2 \wedge \mathbf{e}_\zeta^3), & \lambda_\zeta^6 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\zeta^0 \wedge \mathbf{e}_\zeta^2 \wedge \mathbf{e}_\zeta^3 + i\mathbf{e}_\zeta^1), \\ \lambda_\zeta^7 &= \frac{i}{2}(\mathbf{e}_\zeta^1 + \mathbf{e}_\zeta^0 \wedge \mathbf{e}_\zeta^1 \wedge \mathbf{e}_\zeta^3), & \lambda_\zeta^8 &= \frac{i}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_\zeta^5 + \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathbf{e}_\zeta^0 \wedge \mathbf{e}_\zeta^3 - \frac{i}{2\sqrt{3}}\mathbf{e}_\zeta^1 \wedge \mathbf{e}_\zeta^2, \end{aligned} \quad (5.81)$$

onde $\mathbf{e}_\zeta^5 := -i\mathbf{e}_\zeta^0 \wedge \mathbf{e}_\zeta^1 \wedge \mathbf{e}_\zeta^2 \wedge \mathbf{e}_\zeta^3$. Além disso os elementos $\{\lambda_\zeta^1, \lambda_\zeta^2, \lambda_\zeta^3\}$ e λ_ζ^8 formam a subálgebra isotópica $\mathfrak{su}(2)_\zeta \times \mathfrak{u}(1)_\zeta$.

$SU(3)_\zeta$: caso 2

Fazendo o levantamento isotópico de $\mathfrak{su}(3)$ apresentado no Exemplo 2 acima, temos

$$\begin{aligned} \xi_\zeta^1 &= -\frac{i}{2}(\mathbf{e}_\zeta^2 \wedge \mathbf{e}_\zeta^3 + i\mathbf{e}_\zeta^0 \wedge \mathbf{e}_\zeta^2 \wedge \mathbf{e}_\zeta^3), & \xi_\zeta^2 &= \frac{i}{2}(\mathbf{e}_\zeta^1 \wedge \mathbf{e}_\zeta^3 + \mathbf{e}_\zeta^0 \wedge \mathbf{e}_\zeta^1 \wedge \mathbf{e}_\zeta^3), \\ \xi_\zeta^3 &= \frac{i}{2}(\mathbf{e}_\zeta^1 \wedge \mathbf{e}_\zeta^2 + \mathbf{e}_\zeta^0 \wedge \mathbf{e}_\zeta^1 \wedge \mathbf{e}_\zeta^2), & \xi_\zeta^4 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\zeta^5 + i\mathbf{e}_\zeta^0 \wedge \mathbf{e}_\zeta^3), \\ \xi_\zeta^5 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\zeta^3 - i\mathbf{e}_\zeta^1 \wedge \mathbf{e}_\zeta^2 \wedge \mathbf{e}_\zeta^3), & \xi_\zeta^6 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\zeta^2 + i\mathbf{e}_\zeta^0 \wedge \mathbf{e}_\zeta^1), \\ \xi_\zeta^7 &= \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\zeta^1 - i\mathbf{e}_\zeta^0 \wedge \mathbf{e}_\zeta^2), & \xi_\zeta^8 &= \frac{i}{2\sqrt{3}}(2\mathbf{e}_\zeta^0 + i\mathbf{e}_\zeta^1 \wedge \mathbf{e}_\zeta^2 - i\mathbf{e}_\zeta^0 \wedge \mathbf{e}_\zeta^1 \wedge \mathbf{e}_\zeta^2). \end{aligned} \quad (5.82)$$

De posse dos geradores $\{\xi_\zeta^a, \lambda_\zeta^a\} \equiv U^a$ da álgebra de Lie isotópica $\mathfrak{su}(3)_\zeta$, os geradores do grupo de Lie isotópico $SU(3)_\zeta$ são construídos a partir da isoexponenciação definida por

$$\exp(\theta_a \diamond U^a), \quad \theta_a \in \mathbb{C}. \quad (5.83)$$

5.9 Levantamento isotópico $SU_\zeta(n)$ do grupo $SU(n)$

A hipótese MIC afirma que toda álgebra de Lie é isomorfa à álgebra das 2-formas em uma álgebra de Lie(-Clifford) ($\mathcal{Cl}_{p,q}, [\ , \]$) de dimensão suficiente [Sob84]. Já provamos tal afirmação para o

grupo $SO(p, q) \simeq (\Lambda^2(\mathbb{R}^{p,q}), [\ , \])$ no Cap. (1). O grupo $SU(n)$ sempre pode ser construído na álgebra de Clifford \mathcal{Cl}_{2n} , tomando-se uma base $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^{2n}$ de \mathbb{R}^{2n} , com $\mathbf{e}_a^2 = 1$ e definindo as 2-formas

$$\begin{aligned} E^{pq} &= \mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^q + \mathbf{e}^{p+n} \wedge \mathbf{e}^{q+n} \\ F^{pq} &= \mathbf{e}^p \wedge \mathbf{e}^{q+n} - \mathbf{e}^{p+n} \wedge \mathbf{e}^q \\ H^r &= \mathbf{e}^r \wedge \mathbf{e}^{r+n} - \mathbf{e}^{r+n+1} \wedge \mathbf{e}^{r+n+1} \end{aligned} \quad (5.84)$$

para $p, q = 1, \dots, n$, $p \neq q$ e $k = 1, \dots, n-1$. É imediato verificar que as expressões

$$[E^{pq}, E^{st}] = 2E^{qt}, \quad [E^{pq}, F^{pq}] = -2H^q, \quad [E^{pq}, E^{st}] = 0, \quad [H^q, H^p] = 0, \quad (5.85)$$

e também

$$[F^{pq}, F^{ps}] = 2E^{qs}, \quad [H^p, E^{pq}] = -2F^{pq}, \quad [F^{pq}, F^{st}] = 0, \quad [H^p, E^{qs}] = 2F^{qs}, \quad (5.86)$$

onde o último comutador é não-trivial apenas quando $q = p+1$, definem completamente o grupo $SU(n)$ [Rom91, Ada69, Fuc97].

Da mesma maneira que $SU(n)$ é gerado por $\{E^{pq}, F^{pq}, H^r\}$, os geradores do seu levantamento isotópico $SU_\zeta(n)$ são agora escritos a partir do produto exterior isotópico definido pela eq.(5.30), denotando-se $\mathbf{e}_\zeta^m = \mathbf{e}^m$ como

$$\begin{aligned} E_\zeta^{pq} &= \mathbf{e}_\zeta^p \wedge \zeta \mathbf{e}_\zeta^q + \mathbf{e}_\zeta^{p+n} \wedge \zeta \mathbf{e}_\zeta^{q+n} \\ F_\zeta^{pq} &= \mathbf{e}_\zeta^p \wedge \zeta \mathbf{e}_\zeta^{q+n} - \mathbf{e}_\zeta^{p+n} \wedge \zeta \mathbf{e}_\zeta^q \\ H_\zeta^r &= \mathbf{e}_\zeta^r \wedge \zeta \mathbf{e}_\zeta^{r+n} - \mathbf{e}_\zeta^{r+n+1} \wedge \zeta \mathbf{e}_\zeta^{r+n+1}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

Para $p, q = 1, \dots, n$, $p \neq q$ e $k = 1, \dots, n-1$, as expressões

$$[E_\zeta^{pq}, E_\zeta^{st}]_\zeta = 2E_\zeta^{qt}, \quad [E_\zeta^{pq}, F_\zeta^{pq}]_\zeta = -2H_\zeta^q, \quad [E_\zeta^{pq}, E_\zeta^{st}]_\zeta = 0, \quad [H_\zeta^q, H_\zeta^p]_\zeta = 0, \quad (5.88)$$

e também

$$[F_\zeta^{pq}, F_\zeta^{ps}]_\zeta = 2E_\zeta^{qs}, \quad [H_\zeta^p, E_\zeta^{pq}]_\zeta = -2F_\zeta^{pq}, \quad [F_\zeta^{pq}, F_\zeta^{st}]_\zeta = 0, \quad [H_\zeta^p, E_\zeta^{qs}]_\zeta = 2F_\zeta^{qs}, \quad (5.89)$$

onde novamente o último comutador é não-trivial apenas quando $q = p+1$, definem completamente o grupo $SU_\zeta(n)$.

5.10 Simetria de sabor $SU(3)$ exata

Considere uma base $\{|\psi_\zeta\rangle, |\psi_d\rangle, |\psi_s\rangle\}$ do espaço que carrega a representação fundamental do grupo $SU(3)$, em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . Da mesma maneira que o isospin foi considerado uma simetria exata de $SU(2)$, onde o próton e o nêutron possuem massas iguais no isoespaço a partir do levantamento isotópico $SU(2)_\zeta$ de $SU(2)$, podemos também descrever a simetria de sabor do tipo $SU(3)$, entre os quarks u, d e s , de maneira que eles tenham a mesma massa, no isoespaço.

A fim de introduzir as *isomatrizes* de Gell-Mann no contexto das matrizes de Gell-Mann, introduzimo-las como

$$\begin{aligned}
\lambda_1^\zeta &= \delta^{-1/2} \begin{pmatrix} 0 & g_{11} & 0 \\ g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2^\zeta &= \delta^{-1/2} \begin{pmatrix} 0 & -ig_{11} & 0 \\ ig_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_3^\zeta &= \delta^{-1/2} \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4^\zeta &= \delta^{-1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ g_{33} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_5^\zeta &= \delta^{-1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -ig_{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ ig_{33} & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6^\zeta &= \delta^{-1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} \\ 0 & g_{33} & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_7^\zeta &= \delta^{-1/2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ig_{22} \\ 0 & ig_{33} & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8^\zeta &= \frac{\delta^{-1/2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -2g_{33} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.90}$$

As isomatrizes de Gell-Mann satisfazem as propriedades

$$[\lambda_a^\zeta, \lambda_b^\zeta]_\zeta = 2if_{abc}\delta^{-1/2}\lambda_c^\zeta, \tag{5.91}$$

onde as constantes de estrutura f_{abc} são dadas por $f_{123} = 2f_{147} = -2f_{156} = 2f_{246} = 2f_{257} = 2f_{345} = -2f_{367} = 2f_{458}/\sqrt{3} = 2f_{678}/\sqrt{3} = 1$ [RPP04, Itz80, Ryd96, Wei95].

Escolhemos o operador $\zeta = \text{diag}(g_{11}, g_{22}, g_{33})$ com a condição de que ele tenha determinante igual a um, de maneira que as isomatrizes de Gell-Mann sejam uma iso-representação adjunta padrão [San78, San79a, San93]. Assim,

$$\zeta = \text{diag}(\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \alpha\beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{5.92}$$

A partir dessa escolha, os isoestados isonormalizados são dados por

$$|\psi_\zeta^\zeta\rangle = \begin{pmatrix} \alpha^{-1/2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_d^\zeta\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta^{-1/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\psi_s^\zeta\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\alpha\beta)^{1/2} \end{pmatrix} \tag{5.93}$$

satisfazendo as relações $\langle \psi_i^\zeta | \psi_j^\zeta \rangle = \delta_{ij}$.

O operador de massa em $SU(3)$ é dado por

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{3}(m_u + m_d + m_s)I + \frac{1}{2}(m_u - m_d)\lambda_3 + \frac{\sqrt{3}}{6}(m_u + m_d - 2m_s)\lambda_8 \\
&= \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Agora, o levantamento isotópico $SU(3)_\zeta$ de $SU(3)$ possui operador de massa dado por

$$\begin{aligned} \overset{\zeta}{M} &= \left(\frac{1}{3}(m_u + m_d + m_s)\zeta + \frac{1}{2}(m_u - m_d)\lambda_3 + \frac{\sqrt{3}}{6}(m_u + m_d - 2m_s)\lambda_8 \right) \zeta \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^{-1}m_u & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-1}m_d & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta m_s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nos limites $\alpha \rightarrow 1$ e $\beta \rightarrow 1$, verifica-se que $\overset{\zeta}{M} \rightarrow M$. Vinculamos agora os parâmetros α, β que compõem a isounidade ζ , de modo que no isoespço os quarks u, d e s tenham massas iguais $\overset{\zeta}{m} = \alpha^{-1}m_\zeta = \beta^{-1}m_d = \alpha\beta m_s$. Portanto os parâmetros α, β são funções das massas dos quarks u, d e s , sendo dados por

$$\alpha = \left(\frac{m_u^2}{m_s m_d} \right)^{1/3}, \quad \beta = \left(\frac{m_d^2}{m_s m_u} \right)^{2/3}. \quad (5.94)$$

Tomando os valores das massas na eq.(5.1) [RPP04], p.37, obtemos os limites para os possíveis valores de α e β :

$$\boxed{0.1599 \leq \alpha \leq 0.3066 \quad 2.9629 \leq \beta \leq 6.1898} \quad (5.95)$$

A exatidão, ou mesmo uma melhor aproximação dos valores de α e β dependem da precisão na determinação das massas m_u, m_d e m_s .

Analogamente ao caso do isospin $SU(2)$, no espaço físico os valores convencionais das massas dos quarks u, d e s são dadas pela isoequação para os autovalores

$$\overset{\zeta}{M} \diamond |\overset{\zeta}{\psi}\rangle = M\zeta\zeta^{-1}|\overset{\zeta}{\psi}\rangle = M|\overset{\zeta}{\psi}\rangle = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} |\overset{\zeta}{\psi}\rangle \quad (5.96)$$

ou, de maneira equivalente, via isovalores esperados:

$$\langle \overset{\zeta}{\psi}_u | \overset{\zeta}{M} | \overset{\zeta}{\psi}_u \rangle = m_u, \quad \langle \overset{\zeta}{\psi}_d | \overset{\zeta}{M} | \overset{\zeta}{\psi}_d \rangle = m_d, \quad \langle \overset{\zeta}{\psi}_s | \overset{\zeta}{M} | \overset{\zeta}{\psi}_s \rangle = m_s. \quad (5.97)$$

O operador de hipercarga Y é naturalmente estendido ao espaço isotópico, e é dado por

$$\overset{\zeta}{Y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\lambda_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -2(\alpha\beta) \end{pmatrix}, \quad (5.98)$$

enquanto a componente z do isospin I_3 é dada por

$$\frac{1}{2}\lambda_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.99)$$

De fato, os isovalores esperados para as quantidades acima são dadas por

$$\begin{aligned} Y(u) &= \langle \psi_u^\zeta \mid Y \mid \psi_u^\zeta \rangle = \frac{1}{6}, & Y(d) &= \langle \psi_d^\zeta \mid Y \mid \psi_d^\zeta \rangle = \frac{1}{6}, \\ Y(s) &= \langle \psi_s^\zeta \mid Y \mid \psi_s^\zeta \rangle = -\frac{1}{3} \end{aligned} \quad (5.100)$$

e

$$\begin{aligned} I_3(u) &= \langle \psi_u^\zeta \mid I_3 \mid \psi_u^\zeta \rangle = \frac{1}{2}, & I_3(d) &= \langle \psi_d^\zeta \mid I_3 \mid \psi_d^\zeta \rangle = -\frac{1}{2}, \\ I_3(s) &= \langle \psi_s^\zeta \mid I_3 \mid \psi_s^\zeta \rangle = 0. \end{aligned} \quad (5.101)$$

O operador de carga elétrica é obviamente dado por

$$Q = Y + I_3 \quad (5.102)$$

5.11 Simetria de sabor $SU(6)$ isotópica exata

Efetuando-se o mesmo processo descrito na seção anterior, só que neste caso para obter uma simetria exata de sabor para os seis quarks, fazemos

$$\begin{aligned} \hat{M} = M\zeta &= \text{diag}(\alpha^{-1}m_u, \beta^{-1}m_d, \delta^{-1}m_s, \kappa^{-1}m_c, \tau^{-1}m_b, \alpha\beta\delta\kappa\tau m_t) \\ &\equiv \text{diag}(\overset{\zeta}{m}, \overset{\zeta}{m}, \overset{\zeta}{m}, \overset{\zeta}{m}, \overset{\zeta}{m}, \overset{\zeta}{m}) \end{aligned}$$

onde dessa vez a isounidade é dada por $\zeta = \text{diag}(\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \delta^{-1}, \kappa^{-1}, \tau^{-1}, \alpha\beta\delta\kappa\tau)$.

A fim de que as massas dos seis quarks sejam iguais no isoespaço, os parâmetros $\alpha, \beta, \delta, \kappa, \tau$ que entram na definição da isounidade devem ser funções das massas $m_u, m_d, m_s, m_c, m_b, m_t$ dos quarks, dadas pelas seguintes expressões, juntamente com seus limites segundo a precisão fenomenológica vigente [RPP04].

$$\begin{aligned} 1.6421 \times 10^{-5} &\leq \alpha = \left(\frac{m_d^5 m_s}{m_c m_b m_t m_u^3} \right)^{1/2} \leq 1.25782 \times 10^{-3} \\ 3.28419 \times 10^{-5} &\leq \beta = \left(\frac{m_d^3 m_s}{m_c m_b m_t m_u} \right)^{1/2} \leq 1.40257 \times 10^{-4} \\ 1.28817 \times 10^{-6} &\leq \delta = \left(\frac{m_d^5}{m_c m_b m_t m_u m_s} \right)^{1/2} \leq 1.85009 \times 10^{-5} \\ 9.73095 \times 10^{-8} &\leq \kappa = \left(\frac{m_d^5 m_s}{m_b m_t m_u m_c^3} \right)^{1/2} \leq 1.64064 \times 10^{-5} \\ 2.08097 \times 10^{-8} &\leq \tau = \left(\frac{m_d^5 m_s}{m_c m_b^3 m_t m_u} \right)^{1/2} \leq 4.24725 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

5.12 Mésons e bárions no isoespaço

Denotando $|\psi\rangle$ um estado que descreva qualquer um dos seis quarks, o levantamento isotópico induz os mésons, descritos por $|\psi\rangle \otimes |\bar{\psi}\rangle$, e os bárions, descritos por $|\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$, a terem suas partículas correspondentes no isoespaço, através da prescrição

$$|\overset{\zeta}{\psi}\rangle \otimes_{\zeta} |\overset{\zeta}{\bar{\psi}}\rangle \quad (5.103)$$

para os mésons, e

$$|\overset{\zeta}{\psi}\rangle \otimes_{\zeta} |\overset{\zeta}{\psi}\rangle \otimes_{\zeta} |\overset{\zeta}{\psi}\rangle, \quad (5.104)$$

no caso dos bárions, ao definirmos o produto isotensorial \otimes_{ζ} entre campos espinoriais de $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$ por

$$\boxed{(\cdot) \otimes_{\zeta} (\cdot) := \zeta^{-1}(\cdot) \otimes (\cdot) (\widetilde{\zeta^{-1}\mathbf{e}^0})^*} \quad (5.105)$$

O isoméson pode ser expresso por

$$\text{isoméson} = \zeta^{-1} \text{ méson } (\widetilde{\zeta^{-1}\mathbf{e}^0})^* \quad (5.106)$$

5.13 Eletromagnetismo em meios lineares: o vácuo isotópico

Vimos no Cap. (3) que o tensor constitutivo associado a qualquer meio linear pode ser expresso a partir da métrica ‘efetiva’ do espaço-tempo, enquanto que o processo inverso, de destilação da métrica a partir do tensor constitutivo, pode ser visto em [Heh99]. Veremos agora como a partir de uma isotopia apropriada da métrica g do espaço-tempo seremos capazes de descrever toda a teoria eletromagnética em meios lineares como o eletromagnetismo no vácuo associado ao espaço isotópico.

Considere a métrica de Minkowski $\eta : T_x(\mathbb{R}^{1,3}) \times T_x(\mathbb{R}^{1,3}) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Quando o levantamento isotópico da álgebra pode ser feito com base na geometria do espaço, de acordo com o teorema 1 em [San83a], a isotopia é então feita a partir da métrica, da seguinte maneira:

$$\eta \mapsto \zeta^{-1}(x)\eta := g_x \equiv g(x) : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (5.107)$$

onde g é a métrica que mune uma variedade pseudo-riemanniana M arbitrária. Tal isotopia induz a isotopia entre álgebras de Clifford

$$\mathcal{C}\ell(\mathbb{R}^{1,3}, \eta) \mapsto \mathcal{C}\ell(T_x M, g). \quad (5.108)$$

Portanto nesse caso o elemento isotópico ζ^{-1} é definido como sendo uma deformação que leva a métrica de Lorentz que mune o espaço-tempo de Minkowski a uma métrica arbitrária.

Agora, tomando o caminho inverso, podemos a partir de uma isotopia, onde o elemento isotópico $\zeta^{-1}(x)$ é dado pela isounidade $\zeta(x)$, definir um levantamento isotópico de tal maneira que o produto $g(x)\zeta(x)$ seja igual à métrica η , a partir da seguinte isotopia:

$$g(x) \mapsto \zeta(x)g(x) \equiv \eta : T_x(\mathbb{R}^{1,3}) \times T_x(\mathbb{R}^{1,3}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (5.109)$$

Com isso o tensor constitutivo associado χ a um meio linear arbitrário, definido implicitamente através da eq.(3.171) é levantado isotopicamente ao tensor constitutivo χ_0 associado ao vácuo, dado pela eq.(3.170), já que o tensor constitutivo é função da métrica do espaço-tempo.

Nesse caso a relação constitutiva dada através da eq.(3.162) torna-se diagonal, com elementos dados pela eq.(3.163). Assim as equações de Maxwell são dadas como na eq.(5.110) por

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}^\zeta &= \rho^\zeta \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}^\zeta &= \partial_0 \mathbf{E}^\zeta + \mathbf{j}^\zeta \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^\zeta &= -\partial_0 \mathbf{B}^\zeta \\ \operatorname{div} \mathbf{B}^\zeta &= 0, \end{aligned} \tag{5.110}$$

onde denotando $\mathbf{e}^\zeta = e_\zeta^i$, os isocampos são dados por $\mathbf{E}_\zeta = E_\zeta^i \diamond e_\zeta^i \in \Lambda_\zeta^1(T_x^*\Sigma)$, $\mathbf{B} = B_{ij}^\zeta \diamond e_\zeta^i \wedge e_\zeta^j \in \sec \Lambda_\zeta^2(T_x^*\Sigma)$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{ij}^\zeta \diamond e_\zeta^i \wedge e_\zeta^j \in \sec \Lambda_\zeta^2(T_x^*\Sigma)$ é a isodensidade de corrente e $\rho \in \sec \Lambda^3(T_x^*\Sigma^\zeta)$ é a isodensidade de carga elétrica associada.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

A classificação do ELKO como um campo espinorial bandeira pode esclarecer alguns aspectos bem peculiares do ELKO. Uma grande classe de interações entre, de um lado bósons e férmions, e de outro campos quânticos fermiônicos baseados em auto*spinors* do operador de conjugação de carga que apresentam helicidade dual, descritos pelo ELKO, é proibida, embora a interação entre o ELKO e o bóson de Higgs seja permitida. Ahluwalia-Khalilova propõe a identificação do ELKO com a matéria escura [Ahl04], cuja verificação fenomenológica se baseia em um colapso de uma nuvem de matéria escura (de massa de proporções galácticas) induzido gravitacionalmente. Três diferentes argumentos semi-quantitativos, respectivamente baseados em a) processos de autointeração do ELKO, b) resultados utilizando-se o bóson de Higgs e c) resultados acerca da Física na escala de Planck [Ahl04], indicam a massa do ELKO, que apresenta respectivamente 3 keV, 1.2 MeV e 0.5 TeV como limites inferiores. Considerações acerca da abundância primordial do ELKO e várias observações astrofísicas sugerem por sua vez uma massa de 20 MeV para o ELKO. Alguns experimentos sugerem indiretamente também o aspecto não-local de fenômenos físicos [Ath96], extrapolados em [Ahl04] para o ELKO. Todos esses aspectos poderão ser descritos no contexto de TQCs em espaços munidos de uma geometria não-comutativa [Con94]. Esperamos ainda juntamente com Ahluwalia-Khalilova investigar os aspectos dinâmicos do ELKO e sua possível relação com a matéria escura.

A questão acerca do ELKO é bem mais abrangente, já que, como provamos no Cap. (1), o ELKO pertence à classe 5 conforme a classificação de Lounesto, dos campos espinoriais bandeira. Como provado em [Roc04a], tais tipos de campos espinoriais generalizam a bandeira de Penrose, a partir da construção de uma bandeira via o formalismo dos *spinors* puros. Além disso a relação entre o formalismo dos *twistors* e o das bandeiras emerge naturalmente a partir da identificação do *twistor* como um elemento do espaço homogêneo $SO(2n)/U(n)$ [Roc04a]. Várias questões permanecem em aberto e serão palco de nossas futuras investigações.

Utilizamos graduações arbitrárias de álgebras de Clifford para generalizar a decomposição do espaço-tempo em uma superposição de infinitas fatias espaciais, cada uma em um tempo fixo. Tal decomposição consiste de fato de uma folheação local do espaço-tempo. Baseados em uma \mathbb{Z}_2 -graduação induzida por um automorfismo interno de $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, decompomos o operador de Dirac em

componentes paralela e ortogonal, mostrando como cada uma das componentes está relacionada à derivada de Lie ao longo do vetor-decomposição e ao bivector-decomposição momento angular. As projeções paralelas e ortogonais são introduzidas, via automorfismos internos induzidos por campos multivetoriais, ao invés de simplesmente campos vetoriais, generalizando ainda mais o formalismo até então apresentado. Introduzimos uma outra α -gradação (dual) completamente equivalente à α -gradação $\alpha(\psi) = n\hat{\psi}n^{-1}$, $\psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}$, inicialmente escolhida. Mostramos que tal α -gradação dual é equivalente à decomposição do espaço-tempo, só que agora em termos do elemento de volume associado à subálgebra α -par. O operador de Dirac é então calculado em cada uma dessas decomposições completamente duais. Além disso os automorfismos internos multivetoriais que generalizam a α -gradação conhecida são apresentados. Exibimos todas as decomposições induzidas pelos automorfismos internos multivetoriais para elementos de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$. Tais automorfismos podem fazer com que as projeções redutivas introduzidas na Subsec. (4.7.2) surjam naturalmente a partir de uma escolha particular do multivetor decomposição, como por exemplo a projeção ilustrada na decomposição $\mathfrak{so}(7) \mapsto \mathfrak{so}(6) \mapsto \mathfrak{su}(3) \times \mathfrak{u}(1)$. Dessa maneira por exemplo o grupo ‘eletroforte’, utilizado por Joyce [Joy02, Joy03] pode ser extraído de $\mathcal{C}\ell_{0,7}$. Como já vimos nos Caps. (4) e (5) que os grupos $SO(n)$ e $SU(n)$ podem ser expressos dentro da álgebra de Clifford ou equivalentemente, dentro da álgebra exterior, esperamos formalizar tais projeções dentro do formalismo da decomposição induzida por automorfismos multivetoriais. Tais projeções são completamente responsáveis pela descrição algébrica dos mecanismos de quebra de simetria em TQCs.

A cinemática relativística e a dedução das leis de evolução para a massa e o spin de uma partícula-teste nas vizinhanças de um buraco negro de Reissner-Nordström são descritas no formalismo da decomposição das ACs desenvolvido. Em particular, tais leis de evolução generalizam para a métrica de Reissner-Nordström os resultados em [Khr96, Khr98] obtidos anteriormente para buracos negros neutros, no contexto da métrica de Schwarzschild. Além disso, nossos resultados são bem mais concisos que aqueles obtidos em [Gem00]. O próximo passo é naturalmente obter as leis que regem a evolução da massa e do spin de uma partícula-teste em um buraco-negro de Kerr, onde o momento angular é diferente de zero (embora seja neutro) e para um buraco negro mais geral, onde o momento angular e a carga elétrica são não-nulos.

Nesse sentido nosso formalismo se mostra bastante útil para desenvolvermos um pouco mais o que já fizemos [Roc05c, Roc05d]. Além de uma obtenção livre de índices das equação de campos na brana, podemos trabalhar dentro do paradigma de um universo tipo-brana, que diz que nosso universo está imerso em um espaço-tempo com no mínimo uma dimensão a mais, e isso pode explicar a questão da hierarquia: o porquê de a gravidade ser tão fraca quando comparada às demais forças. Vários modelos podem muito bem serem testados em aceleradores de partículas. Nesse contexto o universo pode ser descrito como sendo uma variedade de quatro dimensões e assinatura $1 + 3$, denominada *brana*, imersa em um espaço-tempo com $1 + 3 + \delta$ dimensões, denominada *bulk*, onde δ é o número de dimensões extras. Essa idéia tem sua origem nos anos de 1890, quando Heinrich R. Hertz [Her94] e Luther P. Eisenhart [Eis29] propuseram que as trajetórias de um sistema conservativo na dinâmica clássica podem ser correspondidas injetivamente às geodésicas de uma variedade riemanniana com apenas uma única dimensão a mais [Bar94]. Depois, em 1920, a segunda

tentativa para se incluir dimensões extras em uma teoria física foi feita por Theodor Kaluza e Oskar Klein [Kal97, Kal26], que sugeriram a unificação do eletromagnetismo e da gravidade em uma única formulação geométrica, envolvendo uma dimensão extra que, quando compactificada, é responsável por um único formalismo que descreve a simetria de Lorentz e a simetria eletromagnética $U(1)$ simultaneamente. Mas as dimensões extras ainda permanecem até o momento inacessíveis aos experimentos. Teorias de Kaluza-Klein (KK) e de cordas indicam a introdução de dimensões extras compactas [Cam97] de pequeno raio e magnitude da ordem da escala de Planck $l_P \sim 10^{-33}$ cm. Essa dimensões extras inacessíveis, pelo menos por enquanto, podem ser tão ‘grandes’ quanto a escala de milímetros, implicando desvios da lei de Newton gravitacional nessas escalas. Em escalas abaixo de 1 mm, objetos podem estar gravitando em mais dimensões e as forças eletromagnética, fraca e forte, além de toda a matéria no universo, estariam na brana, e somente gravitons seriam capazes de deixar a superfície e se mover ao longo do *bulk* [Gre87, Die97, Kak00, Kit97].

A energias baixas a gravidade é localizada na brana e a teoria da relatividade geral é recuperada, mas sob altas energias, mudanças significantes são introduzidas na dinâmica gravitacional, forçando a relatividade geral a dar lugar a uma teoria da gravidade quântica [Rov97]. Uma razão plausível para que a força gravitacional pareça tão “fraca” é sua possível diluição na dimensões extras, onde p -branas [?, Die97, Kak00, Kit97, Bas00, Tow96] estão imersas. p -branas [Iva93, Tac89] são bons candidatos para universos tipo-brana pelo fato de que possuem simetrias de calibre [Die97, Kak00, Kit97] e portanto incorporam a teoria da gravidade quântica automaticamente.

Ao usarmos teorias 5-dimensionais sobre variedades munidas da métrica de Randall-Sundrum (RS), o espectro das perturbações gravitacionais correspondentes possuem um estado ligado sem massa na brana, e também um contínuo de modos sobre a variedade 5-dimensional na qual a brana está imersa. Esses modos introduzem pequenas correções a pequenas distâncias, e a introdução de dimensões extras compactificadas não afeta a localização dos campos fermiônicos que descrevem a matéria. Contudo, no caso massivo os estados ligados são instáveis e podem alcançar as dimensões extras. Podemos mostrar que esse é exatamente o caso para objetos massivos astrofísicos, onde estrelas de alta energia e seu processo de colapso gravitacional, que pode originar buracos-negros, nos leva a desvios do problema da relatividade geral em $4D$. Podemos explorar a idéia de que, se os buracos-negros e especialmente os buracos-negros supermassivos (BNSM) presentes nos núcleos de galáxias e quasares, causam desvios na relatividade geral $4D$ de fato, essas correções podem causar também pequenos desvios nas propriedades dos BNSM. Conseqüentemente, correções na teoria de acreção que suporta o processo radiativo de quasares e o fluxo radioativo observado podem indicar os desvios no raio de compactificação do universo AdS_5 .

No modelos apresentado em [Roc05c, Roc05d] a variação da luminosidade de quasares tem suas origens em efeitos extra-dimensionais em modelos de Randall-Sundrum (RS) [Ran99a, Ran99b]. Além de investigarmos tais efeitos para buracos-negros que exibem rotação (buracos-negros de Kerr), onde a variação da luminosidade é da ordem dentro do limite de 0.013 até aproximadamente 5 luminosidades solares também verificamos fisicamente efeitos que levam à diferença entre as análises relativas de buracos-negros estáticos (Schwarzschild) e com rotação (Kerr) à luz do fenômeno de arrastamento de referenciais. Com esses fatos vemos que podemos medir o raio externo de um BN

de Kerr, verificando que tal raio é de fato maior que o raio clássico de Kerr. Isso nos traz novas idéias e perspectivas, como a estimativa do tempo necessário para um BN de massa solar crescer até o limite de um BNSM, o que naturalmente esclareceria um pouco mais da história das galáxias no universo em tempos remotos.

Os próximos passos são o cálculo da variação da luminosidade de quasares formados por BNs de Reissner-Nordström (RN) geometry. Nesse contexto, mini-BNs possuem um comportamento efetivo do tipo RN behavior sob a ação do potencial gravitacional potencial, podendo estar sob a ação de um potencial associado à gravidade em um espaço-tempo 5-dimensional. Buracos-negros de RN são mais sensíveis a efeitos extra-dimensionais em modelos tipo-brana de RS, o que nos dá a oportunidade de investigar também a produção de mini-BNs no LHC.

A equação de Dirac para uma α -gradação associada à decomposição do espaço-tempo através de automorfismos internos é apresentada de uma maneira bem concisa. Além de mostrarmos que o campo espinorial de Dirac é descrito pela soma de dois quatérnions, escrevemos a equação de Dirac, comparando nossos resultados com aqueles já obtidos recentemente, também baseados em α -gradações induzidas pelas representações idempotentes padrão, quiral (Weyl) e Majorana da álgebra $\mathbb{C} \otimes \mathcal{Cl}_{1,3}$ em $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$ [Mos02].

O espaço de Peano é a arena natural para se introduzir álgebras exterior, de Grassmann e subseqüentemente álgebras de Clifford no contexto do produto regressivo. Além de munir álgebras exteriores com quiralidade, mostramos que o colchete de Rota é bastante apropriado para se definir a estrutura $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -graduada da álgebra exterior estendida, onde uma \mathbb{Z}_2 -gradação está relacionada aos subespaços pares e ímpares com respeito à involução graduada, e a outra \mathbb{Z}_2 -gradação indica a quiralidade/aquiralidade das formas diferenciais. A introdução de diferentes unidades, 1 e ε , relacionadas a cada uma das cópias (quiral e aquiral) do espaço vetorial $V \simeq \mathbb{R}^{p,q}$ nos fornece, a partir do uso do Teorema da Periodicidade¹, a possibilidade da imersão de ambas as cópias quiral e aquiral da AC $\mathcal{Cl}_{p,q}$ em $\mathcal{Cl}_{p+1,q+1}$. Daí surge naturalmente o formalismo adequado usado em várias aplicações à Física, por exemplo as transformações conformes e a teoria dos *twistors*. A partir da imersão $\mathbb{R}^{p,q} \hookrightarrow \mathbb{R}^{p,q} \oplus \varepsilon \mathbb{R}^{p,q}$, a AC estendida associada a $\mathcal{Cl}_{p,q}$ é a AC $\mathcal{Cl}_{p+1,q+1}$. O formalismo das álgebras de Grassmann estendidas e ACs estendidas mostram-se apropriadas para descrever as relações constitutivas na teoria eletromagnética. A Proposição 3.1 descreve uma relação quiral entre co-formas diferenciais (sob o produto regressivo) e formas (sob o produto progressivo). Quando o produto regressivo é usado, provamos que o operador dual de Hodge agindo em k -formas resulta em uma k -co-forma intrinsecamente munida de quiralidade somente se k for um número natural par ou $k = 0$. Além disso, o elemento de volume relativo ao contraespaço, com respeito ao produto regressivo, é um escalar *ou* pseudoescalar dependendo se a dimensão do espaço vetorial associado ao espaço de Peano é respectivamente ímpar ou par. O produto de Clifford dual $*$, definido em termos do produto regressivo sobre o contraespaço, finalmente completa a descrição do contraespaço.

Mostramos ainda que o complexo de de Rham associado ao operador codiferencial em relação ao produto regressivo é formado por subespaços quirais e aquirais subseqüentemente alternados. Esse fato é surpreendente, no sentido que tomando a dualidade da álgebra exterior do espaço, obtemos a

¹ $\mathcal{Cl}_{p+1,q+1} \simeq \mathcal{Cl}_{p,q} \otimes \mathcal{Cl}_{1,1}$.

álgebra exterior do contraespaço, mas o processo inverso produz a álgebra exterior do espaço, cujos subespaços homogêneos pares [ímpares] são quirais [aquirais] dependendo da dimensão do espaço vetorial original. Ao introduzirmos a quiralidade na álgebra exterior a dualidade é apenas uma *pseudo-dualidade*.

A partir do Princípio da Interação (PI) obtido por Crumeyrolle como uma generalização do Princípio de Trialidade (PTri), construímos a parte translacional da superálgebra de Poincaré utilizando somente o formalismo algébrico e geométrico. Embora o PI não apresente um automorfismo de ordem 3 que permuta ciclicamente os subespaços semiespinoriais e vetorial 8-dimensionais, ainda assim podemos munir o espaço vetorial (constituído pela soma de \mathbb{R}^n com subespaços da álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell_n$) do produto de Chevalley, e embora o Princípio de Interação não seja mais válido apenas para dimensão 8, como o PTri, o PI tem em sua estrutura ainda a permutação cíclica entre \mathbb{R}^n e subespaços de uma AC, como descrito pelas eqs.(3.192) e (3.193). O próximo passo é obter as relações que completam as regras de comutação e anticomutação da SAP a fim de se incorporar também os operadores de momento angular.

Generalizamos os produtos X e XY , introduzindo os produtos $\circ_\zeta : \mathbb{O} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$ e $\circ_{\zeta,\xi} : \mathbb{O} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$, onde $\zeta, \xi \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ são elementos fixos, mas arbitrários de $\mathcal{C}\ell_{0,7}$. Introduzimos também novas unidades octoniónicas que são parametrizadas por ζ , associadas ao produto- $(1, \zeta)$. Conseqüentemente, produzimos uma cópia de \mathbb{O} munida do produto- $(1, \zeta)$, além de estender os produtos \circ_ζ , $\circ_{1,\zeta}$ e $\circ_{\zeta,\xi}$ de maneira a descrever produtos octoniónicos entre octonions e multivetores, ou mesmo tais produtos não-associativos entre multivetores: $\mathbb{O} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} \rightarrow \mathbb{O}$, $\mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$ e $\mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} \rightarrow \mathbb{O}$. Introduzimos também um produto octoniónico entre multivetores. Mostramos que as álgebras \mathbb{O}_ζ e $\mathbb{O}_{B \bullet \zeta}$ são equivalentes, já que esta origina aquela a partir da iteração de produtos- ζ . Os produtos $\bullet : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$ e $\bullet : \mathbb{O} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} \rightarrow \mathbb{O}$ são associativos-graduados, indicando imediatamente o surgimento de uma estrutura supersimétrica a partir desses produtos. Algumas álgebras mais gerais podem ser construídas a partir de álgebras mais simples, como as construções explícitas dadas pela eq.(4.63). Embora possamos mostrar que os produtos $\bullet : \mathcal{C}\ell_{0,7} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$ e $\bullet : \mathbb{O} \times \mathcal{C}\ell_{0,7} \rightarrow \mathbb{O}$ sejam equivalentes, em certo sentido, às ações à esquerda e à direita introduzidas por [Dix94a], nossa nova abordagem nos permite generalizar tais ações de maneira a sermos capazes de descrever todos os produtos introduzidos no Cap. (4).

Estendemos o formalismo de Dixon para o Modelo Padrão de maneira a incluir o produto $\circ_{1,\zeta}$. Descrevemos as matrizes de Gell-Mann a partir da ação de bivectores formados pelas unidades octoniónicas parametrizadas por $\zeta \in \mathcal{C}\ell_{0,7}$ fixo, mas arbitrário, sobre uma base formada pela projeção $\rho_{\circ_{1,\zeta}}$ de três unidades octoniónicas escolhidas, onde $\rho = \frac{1}{2}(1 \pm iE_7)$. Tais unidades ao serem projetadas por ρ a partir do produto $\circ_{1,\zeta}$, descrevem as três modalidades coloridas de cada quark. O modelo de Dixon é revisitado sob essa nova abordagem algébrica, de maneira a sermos capazes de obter as chamadas projeções redutivas, de determinadas álgebras de Lie em produtos cartesianos de suas subálgebras, em geral. Construímos ainda uma teoria de calibre utilizando $\mathcal{C}\ell_{0,7} \simeq \mathcal{M}(8, \mathbb{C})$, de maneira que o elemento que carrega o espaço \mathbb{C}^8 de representação de $\mathcal{C}\ell_{0,7}$ seja uma das colunas das matrizes em [Tra01, Tra99]. Um elemento de $\mathbb{C}^8 \simeq \mathbb{C}^4 \oplus \mathbb{C}^4$ descreve portanto um lépton (\mathbb{C}^4) e um quark (\mathbb{C}^4). Nesse sentido os produtos que introduzimos, que generalizam os produtos

introduzidos por Cederwall [Ced95, Ced93] podem ser capazes de verificar a não-renormalizabilidade da eq.(4.148), já que podemos provar que a lagrangiana bilateral dada por tal equação não possui vértices de três bósons.

Formulamos as álgebras de Clifford isotópicas, de onde o levantamento isotópico do produto exterior surge de uma maneira natural, herdando a estrutura de produto exterior no isoespaço. Embora o caso associativo seja uma extensão natural da teoria de Santilli, introduzimos de maneira original o levantamento isotópico não-associativo de estruturas algébricas. As aplicações- ζ introduzidas no Cap. (4) são capazes de gerar as isotopias das álgebras de Clifford. A fim de retratar o grupo $SU(2)$ isotópico no contexto da AC $\mathcal{C}\ell_{3,0}$ efetuamos o levantamento isotópico desta última e também introduzimos as isotopias de $\mathcal{C}\ell_{1,3}$ e de sua complexificação, com o intuito de descrevermos o grupo $SU(3)$ nesse contexto. Como parte final da formulação algébrica, o grupo $SU(n)$ é levantado isotopicamente no contexto das isotopias de $\mathcal{C}\ell_{2n}$. Em particular consideramos o caso $n = 6$ para descrevermos a simetria de sabor $SU(6)$ dos quarks u, d, s, c, b, t como uma simetria exata, no isoespaço. Tal imposição fornece os parâmetros (adimensionais), que constituem a representação da unidade de $\mathcal{C}\ell_{12} \simeq \mathcal{M}(64, \mathbb{H})$, funções das massas dos quarks. Dessa maneira demonstramos que a estrutura que rege o levantamento isotópico de $\mathcal{C}\ell_{12}$ tem como unidade um elemento de $SU(6)$, escrito no contexto de $\mathcal{C}\ell_{12}$. Nesse sentido as massas dos quarks deformam a geometria e a topologia induzidas pelo levantamento isotópico. Esses parâmetros possuem limites inferior e superior, dentro dos limites mais recentes observados fenomenologicamente para as massas dos quarks. Formulamos ainda a descrição dos mésons e bárions no isoespaço, definindo o produto tensorial isotópico. Embora o operador de massa isotópico seja diagonal, os valores usuais das massas dos quarks são recuperadas ao se calcular o isovalor esperado do operador de massa, ou equivalentemente, através da isoequação de autovalores.

Surgem portanto várias perspectivas em relação às isotopias das ACs, já que todo o formalismo que não foi desenvolvido por causa da diferença entre as massas dos quarks, pode ser agora retomado, já que a simetria de sabor do tipo $SU(6)$ foi obtida por nós de maneira exata, via levantamento isotópico. —————

Bibliografia

Bibliografia

- [Abl82] Ablamowicz R, Oziewicz Z e Rzewuski J, *Clifford algebra approach to twistors*, J. Math. Phys. **23** 2 (1982).
- [Abl96] Ablamowicz R, Lounesto P e Parra J, *Clifford Algebras with Numeric and Symbolic Computations*, Birkhäuser, Berlin 1996.
- [Abr67] Abraham R e Marsden J, *Foundations of Mechanics*, Benjamin, New York 1967.
- [Ada69] Adams F, *Lectures on Lie groups*, Benjamin, New York 1969.
- [Alb48] Albert A A, *Power-associative rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 552-593 (1948).
- [Alb98] Albuquerque H e Majid S, *Quasialgebra structure of the octonions* [math.QA/9802116].
- [Ahl04] Ahluwalia-Khalilova D V and Grumiller D, *Spin half fermions, with mass dimension one: theory, phenomenology, and dark matter*, JCAP **07** (2005) 012. [hep/th-0412080].
- [And67] Anderson J L, *Principles of Relativity Physics*, Academic Press, New York 1967.
- [Arn62] Arnowit R, Deser S e Misner C W, *The dynamics of General Relativity in Gravitation: An Introduction to Current Research* L. Witten (ed.), J. Wiley, New York 1962.
- [Ath96] Athanassopoulos C et al (LSND Collaboration), *Evidence for $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ oscillation from the LSND experiment at the Los Alamos Meson Physics Facility*, Phys. Rev. Lett. **77** 3082 (1996) [nucl-ex/9605003]; Phys. Rev. Lett. **81** 1774 (1998) [nucl-ex/9709006].
- [Ati61] Atiyah M e Hirzebruch F, *Bott periodicity and the parallelizability of the spheres*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **57**, 223-226 (1961).
- [Ati64] Atiyah M F, Bott R e Shapiro A, *Clifford Modules*, Topology **3** (suppl. 1), 3-38 (1964).
- [Bac02] Bayro-Corrochano E, Lounesto P e Puska P, *Covariance of the Dirac and Maxwell Equations*, Adv. Appl. Clifford Algebras **12**, 91-108 (2002).
- [Bae94] Baez J e Muniain J P, *Gauge fields, Knots and Gravity*, World Scientific, London 1994.
- [Bar64] Barut A, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Dover, New York 1964.
- [Bar94] Barut A O, *Geometry and Physics, Non-Newtonian Forms of Dynamics*, Bibliopolis, Napoli 1989.
- [Bas00] Barceló C and Visser M, *Brane surgery: energy conditions, traversable wormholes, and voids*, Nucl. Phys. **B584**, 415-435 (2000).
- [Bas03] Bartsch T, *The Kustaanheimo-Stiefel transformation in geometric algebra*, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 6963-6978 (2003) [physics/0301017].
- [Bat10] Bateman H, *The transformation of the electro-dynamical equations*, Proc. London Math. Soc. **8**, 223-264 (1910).

- [Bay89] Baylis W E e Jones G, *The Pauli algebra approach to special relativity*, J. Phys. A **22** (1), 1-15 (1989).
- [Bay95a] Baylis W, *Eigenspinors in electrodynamics*, em Baylis W E (editor), *Clifford (Geometric) Algebras with Applications in Physics, Mathematics and Engineering*, Birkhäuser, Berlin 1995.
- [Bay95b] Baylis W, *The paravector model of spacetime*, em *Clifford (Geometric) Algebras with Applications in Physics, Mathematics and Engineering*, Birkhäuser, Berlin 1995.
- [Bay96] Baylis W E (editor), *Clifford (Geometric) Algebras with applications in Physics, Mathematics and Engineering*, Birkhäuser, Berlin 1996.
- [Bay97] Baylis W E, *Eigenspinors and electron spin*, Advances in Applied Clifford Algebras, **7** (S) (1997).
- [Bay99a] Baylis W E, *Electrodynamics: A Modern Approach*, Birkhäuser, Berlin 1999.
- [Bay99b] Baylis W E e Yao T, *Relativistic dynamics of charges in electromagnetic fields: an eigenspinor approach*, Physical Review A **60**, 785-795 (1999).
- [Bay00] Baylis W, *Multiparavector subspaces of Cl_n : theorems and applications*, em Ablamowicz R e Fauser B, *Clifford algebras and their Applications in Math. Physics, vol.I*, Birkhäuser, Berlin 2000.
- [Bec96] Becker K e Becker M, *M-theory on eight-manifolds*, Nucl. Phys. **B477**, 555 (1996).
- [Beg88] Bengtsson I e Cederwall M, *Particles, twistors and division algebras*, Nuc. Phys. **B302**, 81 (1988).
- [Ben87] Benn I e Tucker R, *An Introduction to Spinors and Geometry with applications in Physics*, Adam Hilger, Bristol 1987.
- [Bet00] Bette A, *Twistor approach to relativistic dynamics and to the Dirac equation*, em Ablamowicz R e Fauser B, *Clifford algebras and their Applications in Math. Physics, vol.I*, Birkhäuser, Berlin 2000.
- [Bin93] Bini D, Carini P, Jantzen R T, *Understanding Spacetime Splittings and their Relationships*, <http://www34.homepage.villanova.edu/robert.jantzen/gem/gemindex.html>
- [Bin95] Bini D, Carini P e Jantzen R T, *Relative observer kinematics in General Relativity*, Class. Quant. Grav. **12**, 2549 (1995).
- [Bin97] Bini D, Carini P e Jantzen R T, *The intrinsic derivative and centrifugal forces. I: theoretical foundations*, Int. J. Mod. Phys. **D6**, 1 (1997); *The intrinsic derivative and centrifugal forces. II: applications to some familiar stationary axisymmetric spacetimes*, Int. J. Mod. Phys. **D6**, 1 (1997).
- [Bjo64] Bjorken D e Drell S, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York 1964.
- [Ble81] Bleeker D, *Gauge Theory and Variational Principles*, Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, MA, 1981.
- [Bli60] van der Blij F e Springer T A, *Octaves and triality*, Nieuw Arch. v. Wiskunde **8**, 158-169 (1960).
- [Bor03a] Borstnik N M e Nielsen H B, *Weyl Spinor of $SO(1, 13)$, Families of Spinors of the Standard Model and Their Masses*, Proceedings do Bled Workshop in Physics **3**, 4, 27-51 (2003) [[hep-ph/0301029](#)].
- [Bor03b] Borstnik N M e Nielsen H B, *How to generate families of spinors*, J. Math. Phys. **44**, 4817-4827 (2003) [[hep-th/0303224](#)].
- [Bot58] Bott R e Milnor J, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **64**, 87-89 (1958).
- [Bou93] Boudet R, *Non-abelian gauge fields in the real Clifford algebra of spacetime*, em Brackx F et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht 1993.

- [Bra82] Brackx F, Delanghe R e Sommen F, *Clifford analysis*, Pitman, London 1982.
- [Bro99] Browne J, *The Grassmann Algebra Book*, <http://www.ses.swin.edu.au/homes/browne/grassmannalgebra/book/#Book>.
- [Bru02] Brouder C C, *A quantum field algebra*, [math-ph/0201033].
- [Bud89] Budinich P e Trautman A, *The Spinorial Chessboard*, Springer, NY 1989.
- [Bud02] Budinich P, *From the geometry of pure spinors with their division algebras to fermion physics*, Foundations of Physics **32** (9) 1347-1398 (2002).
- [Bur85] Burke W, *Applied Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1985.
- [Cam80a] Campolattaro A A, *New spinor representation of Maxwell equations 1. Generalities*, Int. J. Theor. Phys. **19**, 99-126 (1980).
- [Cam80b] Campolattaro A A, *New spinor representation of Maxwell equations 2. Generalities*, Int. J. Theor. Phys. **19**, 127-138 (1980).
- [Cam80c] Campolattaro A A, *Generalized Maxwell equations and quantum mechanics 1. Dirac equation for the free electron*, Int. J. Theor. Phys. **19**, 141-155 (1980).
- [Cam80d] Campolattaro A A, *Generalized Maxwell equations and quantum mechanics 2. Generalized Dirac equation*, Int. J. Theor. Phys. **19**, 477-482 (1980).
- [Cam97] Campolaratto A A, *From classical electrodynamics to relativistic quantum mechanics*, em Keller J e Oziwicz Z (eds.), *The theory of the electron*, Adv. Appl. Clifford Algebras **7** (S), 167-173 (1997).
- [Car37] Cartan É, *Leçons sur la Théorie des Spinours*, Hermann, Paris 1937.
- [Car66] Cartan É, *The Theory of Spinors*, MIT Press, Cambridge 1967.
- [Cdt00] Conradt O, *The principle of duality in Clifford algebra and projective geometry*, em *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, vol.1, p. 157-194, Ablamowicz R e Fauser B, Birkhäuser, Basel 2000.
- [Ced93] Cederwall M, *Introduction to Division Algebras, Sphere Algebras and Twistors*, talk presented at the Theoretical Physics Network Meeting at NORDITA, Copenhagen, set. 1993 [hep-th/9310115].
- [Ced95] Cederwall M e Preitschopf C R, *S^7 and its Kač-Moody Algebra*, Commun. Math. Phys. **167**, 373 (1995) [hep-th/9309030].
- [Che54] Chevalley C, *The Algebraic Theory of Spinors*, Columbia Univ. Press, New York 1954.
- [Chi87] Chisholm J S R e Farwell R S, *Electroweak spin gauge theories and the frame field*, J. Phys. A **20**, 6561-6580 (1987).
- [Chi89] Chisholm J e Farewell R, *Unified spin gauge theories of the four fundamental forces*, em Micali A et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht 1989.
- [Chi93] Chisholm J e R. Farewell, *Spin gauge theories: principles and predictions*, em Brackx F et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht 1993.
- [Chi96] Chisholm J S R e Farwell R S, *Properties of Clifford Algebras for Fundamental Particles*, em Baylis W E (ed.), *Clifford (geometric) algebras with applications in Physics, Mathematics, and Engineering*, capítulo 27, Birkhäuser, Boston 1996.

- [Chi99] Chisholm J S R e Farwell R S, *Gauge transformations of spinors within a Clifford algebraic structure*, J. Phys. A: Math. Gen. **32**, 2085-2823 (1999).
- [Cho00] de Witt-Morette C e Choquet-Bruhat Y, *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland, Amsterdam 2000.
- [Cli78] Clifford W K, *Applications of Grassmann extensive algebra*, Am. J. Math. Pure and Appl., **1** (1878).
- [Col67] Coleman S e Mandula J, *All possible symmetries of the S-matrix*, Phys. Rev. **159**, 1251-1256 (1967).
- [Con94] Connes A, *Noncommutative Theory*, Academic Press, London 1994.
- [Coq82] Coquereaux R, *mod 8 periodicity of real Clifford algebras and particle physics*, Phys. Lett. **115B**, 389-395 (1982).
- [Cor88-89] Corrigan E and Hollowood T J, *The exceptional Jordan algebra and the superstring*, Commun. Math. Phys. **122**, 393 (1989); *A string construction of a commutative non-associative algebra related to the exceptional Jordan algebra*, Physics Letters **B203**, 47 (1988).
- [Fau02] Fauser B, *A treatise on quantum Clifford algebras*, Ph.D. thesis, Konztanz University, Konstanz, 1999 [math.QA/0202059].
- [Cot00] Conrads O, *Mechanics in space and counterspace*, J. Math. Phys. **41**, 6995-7028 (2000).
- [Cra85] Crawford J, *On the algebra of Dirac bispinors densities: factorization and inversion theorems*, J. Math. Phys. **26**, 1439-1441 (1985).
- [Cra89] Crawford J, *The geometric structure of the space of fermionic physical observables*, em Micali A et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht 1989.
- [Cra91] Crawford J, *Clifford algebra: notes on the spinor metric and Lorentz, Poincaré, and conformal groups*, J. Math. Physics, **32**, 3 (1991).
- [Cru83] Crumeyrolle A, *Constructions d'algèbres de Lie graduées orthosymplectiques et conformosymplectiques minkowskiennes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1165, Spinger-Verlag, Berlin 1983
- [Cru90] Crumeyrolle A, *Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras*, Kluwer, Dordrecht 1990.
- [Cru91] Crumeyrolle A, *Supergravity, supersymmetry: a geometric unitary spinor theory*, em Micali A et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht 1989.
- [Dav98] Daviau C, *Dirac equation in the Clifford algebra of space*, em Dietrich V et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht 1998.
- [Dav01] Daviau C, *Sur une équation d'onde relativiste et ses solutions à symétrie interne*, Annales de la Fondation Louis de Broglie **26**, (4) 699-724 (2001).
- [Del99] Deligne P et al. (eds.), *Quantum Fields and Strings: a Course for Mathematicians*, Vols. I & II, AMS/IAS, Providence 1999.
- [Die97] Dienes K R, *String theory and the path to unification: a review of recent developments*, Phys. Rep. **287**, 447-525 (1997) [hep-th/9602045].
- [Dim89] Dimakis A, *A new representation of Clifford algebras*, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, 3171-3193 (1989).
- [Dix83] Dixon G M, *Algebraic unification*, Phys. Rev. **D28**, 833-843 (1983).

- [Dix84] Dixon G M, *Algebraic unification: Fermionic substructure of space-time, particle spectrum, and weak mixing*, Phys. Rev. **D29**, 1276-1278 (1984).
- [Dix86] Dixon G M, *Particle families and the division algebras*, J. Phys. **G: Nucl. Phys** **12**, 561-570 (1986).
- [Dix90a] Dixon G M, *Derivation of the standard model*, Nuovo Cimento B **11**, 349-364 (1990).
- [Dix90b] Dixon G M, *Adjoint division algebras and $SU(3)$* , J. Math. Phys. **31**, (6), 1504-1505 (1990).
- [Dix94a] Dixon G M, *Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers, and the Algebraic Design of Physics* Kluwer, Dordrecht 1994.
- [Dix94b] Dixon G M, *Octonion X-product orbits* [[hep-th 9410202](#)]; *Octonion X-product and octonion lattices* [[hep-th 9411063](#)].
- [Dix95] Dixon G M, *Octonion XY-product* [[hep-th/9503053](#)].
- [Dix04] Dixon G M, *Division algebras: family replication*, J. Math. Phys. **45** (10), 3878-3882 (2004).
- [Dor93] Doran C, Lasenby A e Gull S, *Gravity as a gauge theory in the spacetime algebra*, em F. Brackx et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht 1993.
- [Duf86a] Duff M J, Nilsson B E W e Pope C N, *Kaluza-Klein supergravity*, Phys. Rep. **130**, 1 (1986).
- [Duf86b] Duff M J e Pope C N, *Kaluza-Klein supergravity and the seven-sphere*, in *Supersymmetry and Supergravity* **82**, Trieste proceedings; Duff M J , Nilsson B E W e Pope C N, Phys. Rep. **130**, 1 (1986).
- [Dun84] Dunderer A R e Gursev F e C.-H. Tze, *Generalized vector products, duality and octonionic identities in $D = 8$ geometry*, J. Math. Phys. **25**, 1496 (1984).
- [Dun91] Dunderer A R e Gursev F, *Octonionic representations of $SO(8)$ and its subgroups and cosets*, J. Math. Phys. **32**, 1176 (1991).
- [Ebn89] Ebner D e Rodriguez-Romo S, *Fermions as special states of bosons*, em Micali A et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht 1989.
- [Ehl93] Ehlers J, *Beiträge zur relativistischen Mechanik kontinuierlicher Medien (Contributions to relativistic continuum mechanics)*, Akad. Wiss. Mainz Abh., Math.-Nat. Kl. **11**, 793 (1961). [Tradução de Ellis G F R, *Contributions to the Relativistic Mechanics of Continuous Media* Gen. Relat. Grav. **25**, 1225 (1993).]
- [Ell71] Ellis G F R, *Relativistic Cosmology* in Sachs R, *General Relativity and Cosmology: Proceedings of Course 47 of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, Academic Press, New York 1971.
- [Ell73] Ellis G F R, *Relativistic Cosmology* in Schatzman E, *Cargèse Lectures in Physics*, Vol. 6, Gordon and Breach, New York 1973.
- [Eis29] Eisenhart L P, *Dynamical trajectories and geodesics*, Ann. Math. **30** (2) 591-606 (1929).
- [Emc63] Emch G G, *Mécanique Quantique Quaternionienne et Relativité Restreinte I.*, Helv. Phys. Acta **36**, 739-769 (1963); *II.*, Helv. Phys. Acta **36**, 770-788 (1963).
- [Eva88] Evans J M, *Supersymmetric Yang-Mills theories and division algebras*, Nucl. Phys. **B298**, 92-108 (1988).
- [Fai84] Fairlie D B e Nuyts J, *Spherically symmetric solutions of gauge theories in eight dimensions*, J. Phys. A: Math. Gen. **17**, 2867 (1984).
- [Fau98] Fauser B, *On an easy transition from operator dynamics to generating functionals by Clifford algebras*, J. Math. Phys. **39**, 4928-4947 (1998) [[hep-th/9710186](#)].

- [Fau99] Fauser B, *Hecke algebra representations within Clifford geometric algebras of multivectors*, J. Phys. A **32**, 1919-1936 (1999) [[math.QA/9710020](#)].
- [Fau00] Fauser B e Ablamowicz R, *On the decomposition of Clifford algebras of arbitrary bilinear form*, em *Clifford algebras and their applications in Mathematical Physics - volume 1: Algebra and Physics*, 341-366, Ablamowicz R e Fauser B (eds.), Birkhäuser, Boston 2000 [[math.QA/9911180](#)].
- [Fau01] Fauser B, *On the equivalence of Daviau's space Clifford algebraic, Hestenes' and Parra's formulations of (real) Dirac theory*, Int. J. Theor. Phys. **40**, 441-453 (2001) [[hep-th/9908200](#)].
- [Fau02] Fauser B, *A Treatise on Quantum Clifford Algebras*, Habilitationsschrift, Universität Konstanz, Konstanz (2002).
- [Fel01] de Felice F e Yungiang Y, *Turning a black hole into a naked singularity*, Class. Quantum Grav. **18** 1235-1244 (2001).
- [Fer97] Ferrara S (ed.), *Supersymmetry*, North Holland - World Scientific, New Jersey 1987.
- [Fls98] Felsager B, *Geometry, Particles and Physics*, Springer-Verlag, Berlin 1998.
- [Frz02] Ferrandez A, Gimenez A e Lucas P, *Geometrical particle models on 3D null curves*, Phys.Lett. **B543**, 311-317 (2002) [[hep-th/0205284](#)].
- [Fig90a] Figueiredo V L, Capelas de Oliveira E e Rodrigues, Jr, W A, *Covariant, Algebraic and Operator Spinors*, IJTP **29**, 4, 371-395 (1990).
- [Fig90b] Figueiredo V L, Rodrigues Jr, W A e Capelas de Oliveira E, *Clifford algebras and the hidden geometrical nature of spinors, Algebras, Groups and Geometries* **7**, 153-198 (1990).
- [Fil90] Fillmore J e Springer A, *Möbius groups over general fields using Clifford algebras associated with spheres*, Int. J. Theor. Phys., **29**, 3 (1990).
- [Fin62] Finkelstein D, Jauch J M, Schiminovich S e Speiser D, *Foundations of quaternion quantum mechanics*, J. Math. Phys. **3**, 207-220 (1962).
- [Fje86] Fjelstad P, *Extending special relativity via the perplex numbers*, Am. J. Phys., **54** 416 (1986).
- [Foo87] Foot R e Joshi G C, *Space-time symmetries of superstring and Jordan algebras*, Int. J. Theor. Phys. **28**, 1449 (1989); *String theories and Jordan algebras*, Physics Letters **B199**, 203 (1987).
- [Fro98] Fröhlich J, Grandjean O e Recknagel A, *Supersymmetric Quantum Theory and Differential Geometry*, Commun. Math. Phys. **193**, 527-594 (1998) [[hep-th/9612205](#)].
- [Frt79a] Fronteau J, Santilli R M e Tellez-Arenas A, *Lie-admissible structure of statistical mechanics*, Hadronic J. **3**, 130-176 (1979).
- [Frt79b] Fronteau J, Santilli R M e Tellez-Arenas A, *Closed systems with nonconservative internal forces*, Hadronic J. **3**, 177-195 (1979).
- [Fuc97] Fuchs J e Schweigert C, *Symmetries, Lie Algebras and Representations: a Graduate Course for Physicists*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997).
- [Gao04] Gao C J e Zhang S N, *Reissner-Nordström metric in the Friedmann-Robertson-Walker universe*, Phys.Lett. **B595**, 28-36 (2004) [[gr-qc/0407045](#)].
- [Gem00] Bini D, Gemelli G e Ruffini R, *Spinning test particles in General Relativity: nongeodesic motion in the Reissner-Nordström spacetime*, Phys. Rev. **D61**, 064013 (2000).

- [Ger68] Geroch R, *Spinor structure of space-times in General Relativity I*, J. Math. Phys. **9**, 1739-1744 (1968).
- [Gil91] Gilbert J e Murray M, *Clifford Algebras and Dirac Operators in Harmonic Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1991.
- [Gol81] Goldstein H, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Boston 1981.
- [Gra78] Graf W, *Differential Forms as Spinors*, Ann. Inst. Henri Poincaré XXIX, 85-109 (1978).
- [Gra94] Grassmann M, *A New Branch of Mathematics. The Ausdehnungslehre and Other Works*, Open Court, Chicago 1994.
- [Gre87] Green M B, Schwarz J H e Witten E, *Superstring Theory*, vols. I & II, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1987.
- [Gre97] Greiner W, *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*, Springer-Verlag, Berlin 1997.
- [Grn97] Gronwald F, Muench U, Macías A e Hehl F W, *Volume elements of spacetime and a quartet of scalar fields*, [gr-qc/9712063].
- [Gro84] Grossman B, Kephart T E e Stasheff J D, *Solutions to Yang-Mills field equations in eight dimensions and the last Hopf map*, Comm. Math. Phys. **96**, 431-437 (1984).
- [Gro89] Grossman B, Kephart T W e Stasheff J D, *Solutions to gauge field equations in eight dimensions, conformal invariance and the last Hopf map*, Phys. Lett. **B220**, 431 (1989).
- [Grs01] Gross A e Rubilar G, *On the derivation of the spacetime metric from linear electrodynamics*, [gr-qc/0103016].
- [Gsp02] Gsponer A, *On the "equivalence" of Maxwell and Dirac equations*, Int. J. Theor. Phys. **41**, 689-694 (2002).
- [Gul96] Gull S, Doran C e Lasenby A, *Electron physics I and II*, in *Clifford (geometric) algebras with applications in Physics, Mathematics, and Engineering*, capítulos 9 e 10, Baylis W E (ed.), Birkhäuser Boston 1996.
- [Gun78] Günaydin M, Piron C e Ruegg H, *Moufang plane and octonionic quantum mechanics*, Comm. Math. Phys. **61**, 69-85 (1978).
- [Gun84] Günaydin M, Sierra G e Townsend P K, *The geometry of $N = 2$ Maxwell-Einstein supergravity and Jordan algebras*, Nucl. Phys. **B242**, 244 (1984); *Exceptional supergravity theories and the magic square*, Nucl. Phys. **B242**, 244 (1984).
- [Gun95] Günaydin M e Nicolai H, *Seven-dimensional octonionic Yang-Mills instanton and its extension to an heterotic string soliton*, Phys. Lett. **B351**, 169 (1995).
- [Gur56] Gürsey F, *Contribution to the quaternion formalism in special relativity*, Rev. Fac. Sci. Istanbul A **20**, 149-171 (1956).
- [Gur90] Gürsey F, *Supergroups in Critical Dimensions and Division Algebras*, Monographs on Fundamental Physics, Proceedings of Capri Symposia 1983-1987, ed. Buccella-Franco, Lecture Notes Series No. 15, American Institute of Physics, p.529 1990.
- [Gur96] Gürsey F e Tze C-H, *On the Role of Division, Jordan, and Related Algebras in Particle Physics*, World Scientific, Singapore 1996.
- [Gur97] Gürlebeck K e Sprössig W, *Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers*, J. Wiley, Indianapolis 1997.

- [Haa75] Haag R, Lopuszański e Sohnius M, *All possible generators of supersymmetries of the S-matrix*, Nucl. Phys **B88** (2) 257-274 (1975).
- [Ham53] Hamilton W, *On Quaternions, or on a new System of Imaginaries in Algebra* Philosophical Magazine, **25** 10-13, 241-246, 489-495 (1844); **26** 220-24 (1845); **29**, 26-31, 113-122, 326-328 (1846); **30** 458-461 (1847); **31** 214-219, 278-293, 511-519 (1847); **32** 367-374 (1848); **33** 58-60 (1848); **34** 294-297, 340-343, 425-439 (1849); **35** 133-137, 200-204 (1849); **36** 305-306 (1850); *On a Theory of Quaternions*, British Association Report 1844, published 1845, part 2, p. 2; *On Quaternions*, Proceedings of the Royal Irish Academy, **3** 1-16 (1847).
- [Har91] Harvey A e Ströminger A, *Octonionic superstring solitons*, Phys. Rev. Lett. **66**, 549 (1991).
- [Hea25] Heaviside O, *Electromagnetic Theory*, Ernest Benn, London 1925.
- [Hec93] Hecht R D e J M Nester, *A new evaluation of PGT mass and spin*, Phys. Lett. **A180**, 324-331 (1993).
- [Hec95] Hecht R D, *Mass and Spin of Poincare Gauge Theory*, Gen. Rel. Grav **27**, 537-554 (1995).
- [HeD67] Hehl F W e Datta B K, *Nonlinear spinor equation and asymmetric connection in general relativity*, J. Math. Phys. **12**, 798-808 (1967).
- [Heh99] Hehl F e Obukhov Y, *Spacetime metric from linear electrodynamics I, II*, [[gr-qc/9904067](#)], [[gr-qc/9911096](#)].
- [Heh00] Hehl F e Obukhov Y, *A gentle introduction to the foundations of classical electrodynamics: the meaning of the excitations and the field strengths*, [[physics/0005084](#)].
- [Heh01] Hehl F e Obukhov Y, *On the energy-momentum current of the electromagnetic field in a pre-metric axiomatic approach: I*, [[gr-qc/0103020](#)].
- [Heh02a] Hehl F, Obukhov Y e Rubilar G, *Light propagation in generally covariant electrodynamics and the Fresnel equation*, [[gr-qc/0203096](#)].
- [Heh02b] Hehl F, Obukhov Y e Rubilar G, *On a possible new type of a T odd skewon field linked to electromagnetism*, [[gr-qc/0203105](#)].
- [Her94] Hertz H, *Die Prinzipien der Mechanik in neuen Zusammenhänge*, J. Barth, Leipzig 1894.
- [Hes66] Hestenes D, *Spacetime Algebra*, Gordon and Breach, New York 1966.
- [Hes67] Hestenes D, *Real Spinor Fields*, J. Math. Phys. **8**, 798-808 (1967).
- [Hes75] Hestenes D, *Observables, operators and complex numbers in the Dirac theory*, J. Math. Phys. **16**, 3, 556-572 (1975).
- [Hes90] Hestenes D, *New Foundations for Classical Mechanics*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht 1990.
- [Hes91a] Hestenes D, Reany P e Sobczyk G, *Unipodal algebra and roots of polynomials*, Adv. Appl. Cliff. Algebras, **1**, 51 (1991).
- [Hes91b] Hestenes D, *The design of linear algebra and geometry*, Acta Applicandae Mathematicae, **23** (1991).
- [Hes94a] Hestenes D, *Invariant body kinematics I: saccadic and compensatory eye movements*, Neural Networks, **7**, 1 (1994).
- [Hes94b] Hestenes D, *Invariant body kinematics II: reaching and neurogeometry*, Neural Networks, **7**, 1 (1994).

- [Hes97] Hestenes D, *Real Dirac theory*, Advances in Applied Clifford Algebras, **7 (S)** (1997).
- [Hil93] Hillion P, *Electromagnetism in anisotropic chiral media*, Phys. Rev E **47** (4), 2868-2873 (1993).
- [Hol86a] Holland P R, *Relativistic algebraic spinors and quantum motions in phase space*, Found. Phys. **16**, 708-709 (1986).
- [Hol86b] Holland P R, *Minimal ideals and Clifford algebras in the phase space representation of spin-1/2 fields*, p. 273-283 in Chisholm J S R and Common A K (eds.), *Proceedings of the Workshop on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics (Carterbury 1985)*, Reidel, Dordrecht, 1986.
- [Hop31] Hopf H, *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, Math. Ann. **104**, 637-665 (1931).
- [Hua92] Huang G, *Quarks, Leptons & Gauge Fields*, World Scientific, Singapore (1992).
- [Hus94] Husemöller D, *Fibre Bundles*, Springer-Verlag, Berlin 1994.
- [Itz80] Itzykson C e Zuber J, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, Singapore 1980.
- [Iva93] Ivanova T, *Octonions, self-duality and strings*, Phys. Lett. **B315** 277 (1993).
- [Jac98] Jackson J D, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York 1975.
- [Jad79] Jadczyk A, *Electromagnetic permeability of the vacuum and the light cone structure*, Bull.Acad.Pol.Sci., Phys.Astron. **27**, 91-94 (1979).
- [Jad98] Jadczyk A e Canarutto D, *Fundamental Geometric Structures for the Dirac equation in GR*, (with D. Canarutto) Acta Appl. Math. **51**, 1, 59-62 (1998).
- [Jan96a] Jancewicz B, *A variable metric electrodynamics. The Coulomb and Biot-Savart laws in anisotropic media*, Annals of Physics, **245**, 227 (1996).
- [Jan96b] Jancewicz B, *The extended Grassmann algebra in \mathbb{R}^3* , cap. 28 in Baylis W E (editor), *Clifford (Geometric) Algebras with applications in Physics, Mathematics and Engineering*, Birkhäuser, Berlin 1996.
- [Jor32] Jordan P, *Über eine Klasse nichtassociativer hyperkomplexer Algebren*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 569-575 (1932).
- [Jor34] Jordan P, von Neumann J e Wigner E, *On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism*, Ann. Math. **35**, 29-64 (1934).
- [Joy02] Joyce W P, *Gauge freedom of Dirac theory in complexified spacetime algebra*, Journal of Physics A **35**, 4737-4747 (2002).
- [Joy03] Joyce W P, *Quarks state confinement as a consequence of the extension of the Bose-Fermi recoupling to $SU(3)$ colour*, Journal of Physics A **36**, 12329-12341 (2002).
- [Kad96] Kadeisvili J V, *An Introduction to the Lie-Santilli Isotopic theory*, Mathematical Methods in Applied Sciences **19**, 1349-1395 (1996).
- [Kad97] Kadeisvili J V, *Santilli's Isotopies of Contemporary Algebras, Geometries and Relativities*, 2nd Edition, Ukraine Academy of Sciences, Kiev 1997.
- [Kak93] Kaku M, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*, Oxford Univ. Press, NY (1993).
- [Kak00] Kaku M, *Strings, Conformal Fields and M-theory*, Springer-Verlag, New York 2000.

- [Kal26] Klein O, *Quantentheorie fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Z. Phys. **37**, 895-906 (1926).
- [Kal97] Kaluza T, *Zum Unitätsproblem in der Physik*, Sitzungsberichte Preussische Akademie Wissenschaften Phys. Math., **K1**, 966-972, (1921), Communicated to Einstein in 1919. Also found in English translation in O'Raiheartaigh L, (ed.), *The Dawning of Gauge Theory*, Princeton University Press, Princeton 1997, pp. 53-58.
- [Kam93] Kadeisvili J V, Kamiya N e Santilli R M, *A characterization of isofields and their isoduals*, Hadronic J. **16**, 169-187 (1993).
- [Kel89] Keller J e Viniegra F, *The multivector structure of the matter and interaction field theories*, em Micali A et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht 1989.
- [Kel91] Keller J, *Spinors and multivectors as a unified tool for spacetime geometry and for elementary particle physics*, Int. Journal of Theor. Physics, **30**, 2, 137-184 (1991).
- [Kel94] Keller J, *Quaternionic, complex, duplex and real Clifford algebras*, Adv. Appl. Cliff. Algebras, **4**, 1 (1994).
- [Kel97a] Keller J, *On the electron theory*, Advances in Applied Clifford Algebras, **7** (S) (1997).
- [Kel97b] Keller J, *Spinors, twistors, mexors and the massive spinning electron*, Adv. Apl. Clif. Algebras, **7** (S), 439-455 (1997).
- [Ker58] Kervaire M, *Non-parallelizability of the sphere*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **44**, 280-283 (1958).
- [Kie00] Kiehn R M, *Chirality and helicity vs. spin and torsion or differential topology and electromagnetism; Non-equilibrium and irreversible electromagnetism from a topological perspective; The Photon Spin and other Topological Features of Classical Electromagnetism; Electromagnetic Waves in the Vacuum with Torsion and Spin; Chirality and Helicity vs Topological Spin and Topological Torsion*.
- [Kie04a] Kiehn R M, *Non-Equilibrium Systems and Irreversible Processes: Non-equilibrium Thermodynamics*, Advances in Applied Topology Vol. 1, (<http://www.lulu.com/kiehn>).
- [Kie04b] Kiehn R M, *Non-Equilibrium Systems and Irreversible Processes: Falaco Solitons, Cosmology and the Arrow of Time*, Advances in Applied Topology Vol. 2, (<http://www.lulu.com/kiehn>).
- [Kie04c] Kiehn R M, *Non Equilibrium Systems and Irreversible Processes: Wakes, Coherent Structures and Turbulence*, Advances in Applied Topology Vol. 3, (<http://www.lulu.com/kiehn>).
- [Kie04d] Kiehn R M, *Non Equilibrium Systems and Irreversible Processes: Plasmas and Non equilibrium Electrodynamic*, Advances in Applied Topology Vol. 4, (<http://www.lulu.com/kiehn>).
- [Kim00] Kim Y-W, Park Y-J, Sohgr K-S, *Reissner-Nordström-AdS black hole in the GEMS approach*, Phys. Rev. **D62** 104020 (2000) [[qr-qc/0001045](http://arxiv.org/abs/hep-th/0001045)].
- [Kir83] Khirukin D A, Aringazin A K e Santilli R M, *Isotopic generalization of the Legendre, Jacobi and Bessel Functions*, Algebras, Groups and Geometries **12**, 255-305 (1995).
- [Kit97] Kiritsis E, *Introduction to Superstring Theory*, Leuven Notes in Math. and Theor. Phys. **9**, Leuven Univ. Press, Leuven 1997 [[hep-ph/9709062](http://arxiv.org/abs/hep-ph/9709062)].
- [Kli93] Klimyk S U e Santilli R M, *Standard isorepresentations of isotopic Q-operator deformations of Lie algebras*, Algebras, Groups and Geometries **10**, 323-332 (1993).
- [Klo74] Klotz F, *Twistors and conformal group*, J. Math. Physics, **15**, 2242-2247 (1974).

- [Knu98] Knus M-A, *The Book of Involutions*, AMS Colloquium Publications **44**, Providence 1998.
- [Kob63] Kobayashi S e Nomizu K, *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1, Interscience Publishers, New York 1963.
- [Khr96] Khriplovih I B e Pomeransky A A, *Gravitational Interaction of Spinning Bodies, Center-of-Mass Coordinate and Radiation of Compact Binary Systems*, Phys. Lett **A216** 7 (1996).
- [Khr98] Khriplovih I B e Pomeransky A A, *Equations of Motion of Spinning Relativistic Particle in External Fields*, J. Exp. Theor. Phys. **86**, 839-849 (1998).
- [Kru91] Krüger H, *New solutions oh the Dirac equation for central fields*, em *The electron*, D. Hestenes e A. Weingartshofer (eds.) , Kluwer, Dordrecht 1991.
- [Kru99] Krüger H, *Differential geometry and dynamics of a lightlike point in lorentzian spacetime*, Annales de la Fondation de Broglie **24**, 39-66 (1999).
- [Kug83] Kugo T e Townsend P-K, *Supersymmetry and the division algebras*, Nucl. Phys. **B221**, 357-380 (1983)
- [Kui99] Kuipers J, *Quaternion and Rotation Sequences*, Princeton Univ. Press, Princeton 1999.
- [Kus65] Kustaanheimo P e Stiefel E, *Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization*, J. für die Reine und Angew. Math. **218**, 204 (1965).
- [Las92] Lasenby A, Doran C e Gull S, *2-spinors, twistors and supersymmetry in the spacetime algebra*, Proceedings of the Second Max Born Symposium (1992).
- [Las95] Lasenby A, *Geometric algebra: applications in engineering*, em *Clifford (Geometric) Algebras with Applications in Physics, Mathematics and Engineering*, Birkhäuser, Berlin 1995.
- [Lau97] Laufer A, *The Exponential Map, Clifford Algebras, Spin Representations and Spin Gauge Theory of $U(1) \times T^4$* , tese de doutorado defendida em Universität Konstanz, Konstanz 1997.
- [Lea79] Leach P G, Kaloutas T M, Santilli R M, Prince G E, and Eliezer C J, *The Lie and Lie-admissible symmetries of dynamical systems*, Hadronic J. **3**, 390-439 (1979).
- [Lin95] Lindell I e Lounesto P, *Differentiaalimuodot shkmagnetiikassa (Differential forms in electromagnetics)* , Helsinki University of Technology, Electromagnetics laboratory report, Espoo 1995.
- [Loc85] Lochak G, *Wave equation for a magnetic monopole*, Int. J. Theor. Phys. **24**, 1019-1050 (1985).
- [Loh94] Lohmus J, Paal E e Sorgsepp L, *Nonassociative Algebras in Physics*, Hadronic Press, Palm Harbor, Florida 1994.
- [Lou93] Lounesto P, *Clifford algebras and Hestenes spinors*, Found. Phys. **23**, 1203-1237 (1993).
- [Lou94] Lounesto P, *Clifford algebras, relativity and quantum mechanics*, in Letelier P e Rodrigues, Jr W A (eds.), *Gravitation. The Spacetime Structure*, 50-81, Proc. of the 8th Latin American Symposium on Relativity and Gravitation, Águas de Lindóia, Brazil, 25-30 July 1993, World-Scientific, London 1993.
- [Lou02] Lounesto P, *Clifford Algebras and Spinors*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [Lou01] Lounesto P, *Octonions and triality*, Advances in Applied Clifford Algebras **11**, (2) 191-213 (2001).
- [Mak89] Maks J, *Modulo (1,1) Periodicity of Clifford Algebras and Generalized (anti-)Möbius Transformations*, tese de doutorado defendida na Technische Universiteit Delft, 1989.

- [Man93] Manogue C A e Schray J, *Finite Lorentz transformations, automorphisms, and division algebras*, J. Math. Phys. **34**, 3746-3767 (1993) [[hep-th/9302044](#)].
- [Man96] Manogue C A e Schray J, *Octonionic representations of Clifford algebras and triality*, Found. Phys. **26**, 17-70 (1996) [[hep-th/9407179](#)].
- [Man99a] Manogue C A e Dray T, *Dimensional reduction*, Mod. Phys. Letters **A14** (2), 93-97 (1999)
- [Man99b] Manogue C A e Dray T, *Quaternionic spin*, 5th International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, Ixtapa, México (1999).
- [Man99c] Manogue C A e Dray T, *Octonionic Mbius transformations*, Mod. Phys. Lett. **A14**, 1243-1256 (1999) [[math-ph/9905024](#)].
- [Mas02] Kokubu M, Umehara M e Yamada K, *An elementary proof of Small's formula for null curves in $PSL(2, C)$ and an analogue for Legendrian curves in $PSL(2, C)$* , [[math.DG/0209258](#)].
- [Max54] Maxwell J C, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vols.1,2, Dover, New York 1954.
- [McC78] McCrimmon K, *Jordan algebras and their applications*, Bull. Amer. Math. Soc. **84**, 612-627 (1978).
- [Mie87] Mielke E W, *Geometrodynamics of Gauge Fields*, Akademie-Verlag, Berlin 1987.
- [Mie92] Mielke E W, *Ashtekar's complex variables in general relativity and its teleparallelism equivalent*, Ann. Phys. N.Y. **219**, 78-108 (1992).
- [Mie94] Mielke E M, Obukov Y e Hehl F, *Yang- Mills Configurations from 3D Riemann-Cartan Geometry*, Phys.Lett. **A192** 153-162 (1994).
- [Mig83] Mignani R, Myung H C e Santilli R M, *Foundations of Hadronic Mechanics via an Isotopic Lifting of Dirac's Formulation of Quantum Mechanics*, Hadronic J. **6**, 1873-1950 (1983).
- [Mir01] Miralles D, Parra J M e Vaz J, *Signature change and Clifford algebras*, Int. J. Theor. Phys. **40**, 227-239 (2001) [[math-ph/0003041](#)].
- [Mis73] Misner C, Thorne K e Wheeler J A, *Gravitation*, Freeman, San Francisco 1973.
- [Moa01] Moya A M, Fernández V V, e Rodrigues W A Jr., *Lagrangian Formalism for Multivector Fields on Spacetime*, Int. J. Theor. Phys **40**, 299-313 (2001).
- [Moe01] Mosseri R e Dandoloff R, *Geometry of entangled states, Bloch spheres and Hopf fibrations*, J. Phys. **A34**, 10243-10252 (2001).
- [Moh94] Palash B Pal, Rabindra N Mohapatra, *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics (World Scientific Lecture Notes in Physics)*, **44** (1994).
- [Mos02] Mosna R A, Miralles D e Vaz J, *Multivector Dirac equations and \mathbb{Z}_2 -gradings of Clifford algebras*, Int. J. Theor. Phys. **41**, 1651-1671 (2002).
- [Mos03a] Mosna R A, Miralles D e Vaz J, *\mathbb{Z}_2 -gradings of Clifford algebras and multivector structures*, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 4395-4405 (2003) [[math-ph/0212020](#)].
- [Mos03b] Mosna R A e Vaz J, *Quantum tomography for Dirac spinors*, Phys. Lett. A **315**, 418-425 (2003) [[quant-ph/0303072](#)].
- [Mos04] Mosna R A e Rodrigues Jr, W A, *The Bundles of Algebraic and Dirac-Hestenes Spinors and Spinor Fields*, J. Math. Phys. **45**(7), 2945-2966 (2004) [[math.ph/0212033](#)].

- [Mou34] Moufang R, *Zur Struktur von Alternativkörpern*, Mathematische Annalen, **110**, 416-430 (1934).
- [Moy49] Moyal J E, *Quantum mechanics as a statistical theory*, Proc. Camb. Phil. **45**, 99-124 (1949).
- [Nab00] Naber G L, *Topology, geometry and gauge fields interactions* Appl. Math. Sci. **141**, Springer-Verlag, Berlin 2000.
- [Nak96] Nakahara M., *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing, Bristol 1996.
- [Nas83] Nash C e Zen S, *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press 1983.
- [Nas97] Nash C, *Topology and Physics-a historical essay* [[hep-th/9709135](#)].
- [Ner98] Nersessian A e Ramos E, *Massive spinning particles and the geometry of null curves* [[hep-th/9807143](#)].
- [Ner00] Nersessian A, Manvelyan R , Mueller-Kirsten H J W, *Particle with torsion on 3d null-curves*, Nucl.Phys.Proc.Suppl. **88**, 381-384 (2000).
- [Nis04] Nishino H e Rajpoot S, *Octonions, G_2 symmetry, generalized self-duality and supersymmetries in dimensions $D < 8$* , JHEP **04** 020 (2004).
- [Obu00] Obukhov Y, Fukui T e Rubilar G, *Wave propagation in linear electrodynamics* [[gr-qc/0005018](#)].
- [Obu02] Obukhov Y, *Fresnel analysis of the wave propagation in nonlinear electrodynamics* [[gr-qc/0204028](#)].
- [Oda88] Oda I, Kimura T e Nakamura A, *Superparticles and division algebras: ten dimensions and octonions*, Prog. Theor. Phys. **80**, 367 (1988).
- [Oku95] Okubo S, *Introduction to Octonion and Other Non-Associative Algebras in Physics*, Cambridge University Press, Cambridge 1995.
- [Ozi86] Oziewicz Z, *From Grassmann to Clifford*, em Chisholm J S R e e Common A (eds.) *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*, 245-255, D. Reidel Pub. Company, Dordrecht 1986.
- [Ozi97] Oziewicz Z, *Clifford algebra of multivectors: The minimum polynomials of the tensor product of the Dirac matrices and the opposite Clifford algebra*, em Proc. Int. Conf. on the Theory of the Electron (Cuautitlan, Mexico, 1995), Keller J e Oziewicz Z (eds.), Adv. in Appl. Clifford Alg. **7** (Suppl.), 467-486 (1997).
- [PaM94] Pal P B e Mohapatra R N, *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics (World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol. 41)* (1994).
- [Pal81] Palais R S, *The Geometrization of Physics*, The Geometrization of Physics, Lecture Notes from a Course at the National Tsing Hua University, Hsinchu, Taiwan 1981.
- [Pap51] Papapetrou A, *Spinning test-particles in general relativity. I*, Proc. R. Soc. London **A209** 248-258 (1951).
- [Pap93] Pappas R, *A formulation of hamiltonian mechanics using geometric calculus*, F. Brackx et al.(eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Math. Physics*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht 1993.
- [Pes95] Peskin M E e Schroeder D V, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, New York 1995.
- [Ply94] Plymen R J e Robinson P L, *Spinors in Hilbert Space*, Cambridge Tracts in Mathematics **114**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1994).
- [Por69] Porteous I R, *Topological Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1969.
- [Por95] Porteous I R, *Clifford Algebras and the Classical Groups*, (Cambridge Studies in Advanced Mathematics), Cambridge Univ. Press, Cambridge 1995.

- [Pos72] Post E J, *The constitutive map and some of its ramifications*, Ann. Phys, **71**, 497-518 (1972).
- [Pos97] Post E J, *Formal Structure of Electromagnetics*, Dover, New York 1997.
- [Pug97] Puntigam R A, Lämmerzahl C e Hehl F W, *Maxwell's theory on a post-Riemannian spacetime and principle of equivalence*, Class. Quantum Gravity **14**, 1347-1356 (1997).
- [Pus01] P. Puska *Covariant Isotropic Constitutive Relations in Clifford's Geometric Algebra*, PIER 32, EMW Publishing, Cambridge, 2001.
- [Qui94] Souza Q A G e Rodrigues, Jr W A, in Letelier P e Rodrigues, Jr W A, (eds.), *The Dirac operator and the structure of Riemann-Cartan-Weyl spaces, Gravitation. The Spacetime Structure*, 179-212, World Sci. Publ. Co., Singapore 1994.
- [Rai25] Rainich G, *Electrodynamics and general relativity theory*, Am. Math. Soc. Trans. **27**, 106-136 (1925).
- [Ram89] Ramond P, *Field Theory: A Modern Primer (2nd edition)*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading 1989.
- [Ran99a] Randall L and Sundrum R, *An alternative to compactification*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690-4693 (1999) [[hep-th/9906064](#)].
- [Ran99b] Randall L and Sundrum R, *A large mass hierarchy from a small extra dimension*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370-3373 [[hep-ph/9905221](#)].
- [Rap94] Rapoport-Campodonico D L, Rodrigues Jr. W A, Souza Q A G e Vaz Jr. J, *The Effective Riemann-Cartan-Weyl Geometry Generated By A Dirac-Hestenes Spinor Field*, Algebras, Groups and Geometries **11**, 23-35 (1994).
- [Ree90] Reese Harvey F, *Spinors and Calibrations*, Academic Press, Boston 1990.
- [Rie58] Riesz M, *Clifford Numbers and Spinors*, reprinted by E. F. Bolinder and P. Lounesto (eds.), Kluwer, Dordrecht 1993.
- [Roc04a] da Rocha R e Vaz Jr. J, *Twistors, Generalizations and Exceptional Structures*, JHEP PoS, WC2004 (2004) 022 [[math-ph/0412037](#)].
- [Roc04b] da Rocha R e Vaz Jr. J, *Standard Model of Elementary Particles and extensions using Exceptional Lie Groups G_2 , F_4 and E_6* , AIP Proc. **739**, 687-689 (2004).
- [Roc05a] Rodrigues, Jr W A, da Rocha R e Vaz Jr J, *Hidden Consequence of Active Local Lorentz Invariance*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., **2** (2) 305-357 (2005) [[math-ph/0501064](#)].
- [Roc05b] da Rocha R e Rodrigues Jr. W A, *Where are ELKO spinor fields in Lounesto spinor field classification*, submetido ao Int. J. Mod. Phys. B [[math-ph/0506075](#)].
- [Roc05c] da Rocha R, Coimbra-Araújo C H e Pedron I T, *Anti-de Sitter curvature radius constrained by quasars in brane-world scenarios*, aceito para publicação no Int. J. Mod. Phys. **D14** [[astro-ph/0505032](#)].
- [Roc05d] da Rocha R e Coimbra-Araújo C H., *Variation in the luminosity of Kerr quasars due to extra dimension in 3-brane Randall-Sundrum model*, [[astro-ph/0510318](#)], [[astro-ph/0509363](#)].
- [Rod90] Rodrigues, Jr W A e Capelas de Oliveira E, *Maxwell and Dirac equations in the Clifford and spin-Clifford bundles*, Int. J. Theor. Phys. **29**, 397-412 (1990).
- [Rod93] Rodrigues, Jr, W A e Souza Q A G, *The Clifford bundle and the nature of the gravitational field*, Found. Phys. 1465-1490 (1993).

- [Rod95] Rodrigues, Jr, W A, Souza Q A G e Vaz, Jr J, *Spinor fields and superfields as equivalence classes of exterior algebra fields*, in R. Ablamowicz and P. Lounesto (eds.), *Clifford Algebras and Spinor Structure*, 177-198, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1995).
- [Rod96] Rodrigues, Jr, W A, Souza Q A G, Vaz, Jr J e Lounesto P, *Dirac-Hestenes spinor fields on Riemann-Cartan manifolds*, *Int. J. Theor. Phys.* **35**, 1849-1990 (1996).
- [Rod98] Rodrigues, Jr, W A e Vaz, Jr, J, *From electromagnetism to relativistic quantum mechanics*, *Found. Phys.* **28**, 789-814 (1998).
- [Rod02] Rodrigues, Jr, W A, *Algebraic and Dirac-Hestenes Spinors and Spinor Fields*, *J. Math. Phys.* **45**(7), 2908-2944 (2004) [[math-ph/0212030](#)].
- [Roe61] Rose M E, *Relativistic Electron Theory*, John Wiley, New York (1961).
- [Rom91] Keller J e Rodríguez-Romo S, *Multivectorial representation of Lie groups*, *Int. J. Theor. Phys.* **30** (2) 185-196 (1991)
- [Ros01] Rodrigues, Jr, W A e Sharif M, *Rotating frames in RT: Sagnac's Effect in SRT and other related issues*, *Found. Phys.* **31**, 1767-1784 (2001).
- [Rot85] Barnabei M, Brini A e Rota G-C, *On the exterior calculus of invariant theory*, *J. Algebra* **96**, 120-160 (1985).
- [Rov97] Rovelli C, *Loop quantum gravity*, *Living Rev. Rel.* **1**, 1-34 (1998) [[gr-qc/9710008](#)].
- [RPP04] Alvarez-Gaumé L et al. (eds.), *Review of Particle Physics*, *Phys. Letters* **B592**, 1-1109 (2004).
- [Ryd80] Ryder L H, *Dirac monopoles and the Hopf map S^3 to S^2* , *J. Phys. A: Math. Gen.* **13**, 437-447 (1980).
- [Ryd96] Ryder L H, *Quantum Field Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1996.
- [Sac77] Sachs R K e Wu H, *General Relativity for Mathematicians* Springer-Verlag, New York 1977.
- [Sal81] Salingaro N, *Electromagnetism and the holomorphic properties of spacetime*, *J. Math. Phys.* **22**(9) 1919-1925 (1981).
- [Sam96] Samuel J e R. Nityananda, *Transport along null curves*, [[gr-qc/0005096](#)].
- [San78] Santilli R M *Foundations of Theoretical Mechanics Volume I: The Inverse Problem in Newtonian Mechanics*, Text and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Heidelberg 1978.
- [San79a] Santilli R M, *Isotopic breaking of gauge theories*, *Phys. Rev.* **D20**, 555-570 (1979).
- [San79b] Santilli R M, *Initiation of the representation theory of a Lie-admissible algebra of operators on a bimodular Hilbert space*, *Hadronic J.* **3**, 440-506 (1979).
- [San82] Santilli R M *Foundations of Theoretical Mechanics, Volume II: Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics*, Text and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Heidelberg 1982.
- [San83a] Santilli R M, *Lie-isotopic lifting of the special relativity for extended deformable particle*, *Lett. Nuovo Cimento* **37**, 545-555 (1983).
- [San83b] Santilli R M, *A possible, Lie-admissible, time-asymmetric model for open nuclear reactions*, *Lett. Nuovo Cimento* **37**, 337-344 (1983).
- [San83c] Santilli R M, *Lie-isotopic lifting of unitary symmetries and of Wigner's theorem for extended deformable particles*, *Lett. Nuovo Cimento* **3**, 509-521 (1983).

- [San93] Santilli R M, *Isotopic lifting of $SU(2)$ symmetry with application to nuclear physics*, JINR Rapid Comm. **6**, 24-38 (1993).
- [San94a] Santilli R M, *Isotopic lifting of Heisenberg's uncertainties for gravitational singularities*, Comm. Theor. Phys. **3**, 47-66 (1994).
- [San94b] Santilli R M, *Representation of antiparticles via isodual numbers, spaces and geometries*, Comm. Theor. Phys. **3**, 153-181 (1994).
- [San95a] Santilli R M, Aringazin A K e Kirukin D A, *Nonpotential elastic scattering of spinning particles*, Hadronic J. **18**, 257-270 (1995).
- [San95b] Santilli R M, *Isotopic lifting of quark theories with exact confinement and convergent perturbative expansions*, Comm. Theor. Phys. **4**, 1-23 (1995).
- [San96a] Santilli R M, *Isotopic, Genotopic and Hyperstructural Methods in Theoretical Biology*, Ukraine Academy of Sciences, Kiev (1996).
- [San96b] Santilli R M, *Isotopic quantization of gravity and its universal isoPoincaré symmetry*, in Jantzen R T, MacKeiser G e Ruffini R (editors), *Proceedings of the VII Marcel Grossmann Meeting on Gravitation*, World Scientific, Singapore 500-505 (1996).
- [San98] Santilli R M, *Isorepresentations of the Lie-isotopic $SU(2)$ algebra with applications to nuclear physics and to local realism*, Acta Applicandæ Mathematicæ **50**, 177-190 (1998).
- [San03a] Santilli R M, *Iso-, geno-, hyper-mechanics for matter and their isoduals for antimatter*, Found. of Phys. **33**, 1373-1416 (2003).
- [Sat00] Santana A, Ribeiro Filho A e David Vianna J, *Grupos de Lie em mecânica clássica: a contribuição de Dirac e recentes desenvolvimentos*, Rev. Bras. de Ensino de Física (RBEF) **22**, 2 (2000).
- [Sch71] Schönberg M, *Electromagnetism and gravitation*, Revista Brasileira de Física, **1** 91-122 (1971).
- [Sch94] Schray J, *Octonions and Supersymmetry*, tese de doutoramento, Department of Physics, Oregon State University 1994.
- [Sch95] Schafer R D, *Introduction to Non-Associative Algebras*, Dover, New York 1995.
- [Scz68] Schmutzer E, *New approach to interpretation problems of General Relativity by means of the splitting-up-formalism of space-time*, in Induction, Physics and Ethics, Weingartner P e Zecha G (eds.) Dordrecht 1968.
- [Sie87] Sierra G, *An application of the theories of Jordan algebras and Freudenthal triple systems to particles and strings*, Class. Quant. Grav. **4**, 227-236 (1987).
- [Sny97] Snygg J, *Clifford Algebra, a Computational Tool for Physicists*, Oxford Univ. Press, Oxford 1997.
- [Sob84] Hestenes D e Sobczik G, *Clifford Algebra to Geometric Calculus*, D. Reidel, Dordrecht 1984.
- [Soh85] Sohnius M, *Introducing supersymmetry*, Phys. Rep. **128**, 2-3 (1985).
- [Sou74] Souriau J M, *Modele de particule a spin dans le champ electromagnetique et gravitationell*, Ann. Inst. H. Poincaré **20**, 315-364 (1974).
- [Spp98] Schempp W, *Quantum holography and magnetic resonance tomography: an ensemble quantum computing approach*, Taiwanese J. Mth. **2**, 3, 257-286 (1998).

- [Sth04] Sthanumoorthy M e Misra K C (eds.), *Kac-Moody Lie algebras and related topics: Ramanujan International Symposium on Kac-Moody Lie Algebras and Applications*, Contemporary Mathematics **343**, AMS, Providence 2004.
- [Str41] Stratton J, *Electrodynamic theory*, McGraw-Hill, New York 1941.
- [Sud61] Marshak R E e Sudarshan E C G, *Introduction to Elementary Particle Physics*, John Wiley, New York 1961.
- [Sul05] Catto S, Moreno C J e Tze C-H, *Octonionic Structures in Physics*, a aparecer.
- [Tac89] Tachibana H e Imaeda K, *Octonions, superstrings and ten-dimensional spinors*, Nuovo Cimento **B104**, 91 (1989).
- [Tak57] Takabayasi T, *Relativistic Hydrodynamics of the Dirac Matter*, Suppl. Prog. Theor. Phys. **4**, 1-80 (1957).
- [Tel96] Teleman K, *Conformal Lorentz geometry revisited*, J. Math. Physics, **37**, 1076-1085 (1996).
- [Tha92] Thaller B, *The Dirac Equation*, Springer-Verlag, New York 1992.
- [Thi80] Thirring W *Classical Field Theory*, vol. 2, Springer-Verlag, New York 1980.
- [Tic99] Ticciati R, *Quantum Field Theory for Mathematicians*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 72, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1999.
- [tHo79] t'Hooft G, *Magnetic monopoles in unified gauge theories* Nuclear Physics **B79**, 2, 276-284 (1974).
- [Top02] Lukierski J e Toppan F, *Generalized space-time supersymmetries, division algebras and octonionic M-theory*, Phys.Lett. **B539**, 266-276 (2002).
- [Tow96] Townsend P K, *Brane surgery*, Nucl. Phys. **B** Proc. Suppl., **58**, 163-175 (1997) [[hep-th/9609217](#)].
- [Tra01] Trayling G e Baylis W E, *A geometric basis for the standard model gauge group*, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 3309-3324 (2001) [[hep-th/0103137](#)].
- [Tra99] Trayling G, *A geometric approach to the standard model* [[hep-th/9912231](#)].
- [Tru77] Trautman A, *Solutions of the Maxwell and Yang-Mills equations associated with Hopf fibrings*, Int. J. Theor. Phys. **16**, 561 (1977).
- [Var85] Varadarajan V S, *Geometry of Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin 1985.
- [Vaz93] Vaz, Jr J e Rodrigues, Jr W A, *Equivalence of Dirac and Maxwell equations and quantum mechanics*, Int. J. Theor. Phys. **32**, 945-949 (1993).
- [Vaz97] Vaz, Jr J e Rodrigues, Jr W A, *Maxwell and Dirac theory as an already unified theory*, in J. Keller e Z. Oziewicz (eds.), *The theory of the electron*, Adv. Appl. Clifford Algebras **7** (S), 369-385 (1997) [[hep-th/9511181](#)].
- [Vaz97] Vaz Jr, J, *Clifford Algebras and Witten's monopole equations*, in Apanasov B N, Bradlow S B, Rodrigues, Jr W A e Uhlenbeck K K (eds.), *Geometry, Topology and Physics*, de Gruyter W, Berlin 1997.
- [Vaz97] Vaz J, *A álgebra geométrica do espaço euclidiano e a teoria de Pauli*, Rev. Bras. de Ensino de Física (RBEF), **19**, 2 (1997).
- [Vaz99] Vaz J, *Notas de aula de MT301A (Tópicos em Física-Matemática)*, IMECC, Unicamp, Campinas 1999.
- [Vaz00] Vaz J, *Clifford algebra splittings*, Anotações Pessoais 2000.

- [Voi10] Voigt W, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Teubner B, Leipzig 1910.
- [Wey89] Weyl H, *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1989.
- [Wil98] Wilczek F, *The future of particle physics as a natural science*, Int. J. Modern Phys. A, **13** (1998).
- [Web83] Wess J e Bagger J, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton Univ. Press, Princeton 1983.
- [Wei95] Weinberg S, *The Quantum Theory of Fields: Volume 1, Foundations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1995.
- [Wes70] Wess J e Zumino B, *Supergauge transformations in four dimensions*, Nuc. Phys. **B70**, 39 (1974).
- [Wit84] de Wit B e Nicolai H, *The parallelizing S^7 torsion in gauged $N = 8$ supergravity*, Nucl. Phys. **B231**, 506 (1984).
- [Wit86] Witten E, *Noncommutative geometry and quantum field theory*, N. Phys. **B268** (1986).
- [Yvo40] Yvon J, *Equations de Dirac-Mandelung*, J. Phys. et Radium **8** (1940).

Apêndice A

Apêndice: o Princípio da Trialidade

Após apresentarmos as estruturas matemáticas necessárias à definição do produto de Chevalley, e conseqüentemente à construção do princípio da trialidade [Ben87, Knu98, Che54, Car37], a comutatividade e a não-associatividade do produto de Chevalley são verificadas, juntamente com a introdução de uma representação mista estendida em um espaço vetorial 24-dimensional, que consiste na soma direta do espaço vetorial 8-dimensional e seus respectivos espaços que carregam representações semiespinoriais não-equivalentes. Essa representação é a soma das representações adjunta, no espaço vetorial, e fundamental, em ambos os espaços semiespinoriais, além de ser uma involução em um caso bem peculiar. Dois automorfismos, respectivamente de ordem dois e três são construídos, onde esse último intercambia ciclicamente as representações semiespinoriais (respectivamente de helicidades positivas e negativas) e vetorial. Após a introdução dos *spinors* puros, a partir de subespaços maximais totalmente isotrópicos e das equações de Cartan, esses resultados são utilizados para obter a superálgebra de Poincaré, introduzida a partir das estruturas do produto de Chevalley e de Clifford entre vetores da álgebra exterior estendida sobre \mathbb{C}^3 , e também utilizando o Princípio da Interação, que generaliza a propriedade cíclica do produto de Chevalley.

A.1 Preliminares

Considere um corpo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . O espaço dos *spinors* \mathbf{S} pode ser escrito como a soma direta $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^-$, onde \mathbf{S}^\pm são espaços semi-espinoriais que carregam representações irredutíveis não-equivalentes da subálgebra par da álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(V, g)$.

Defina o espaço $\mathbf{E} = V \oplus \mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^-$. Queremos encontrar um espaço V tal que os espaços semi-espinoriais relativos a V tenham a mesma dimensão de V . Isso ocorrerá quando $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{S}^+ = \dim_{\mathbb{R}} \mathbf{S}^- = n$ e o índice de g for igual ao índice de h , onde h é a métrica spinorial a ser definida logo após a prova do Lema 0. A primeira condição é satisfeita quando $2^{n/2-1} = n$, ou seja, quando

$n = 8$. Consideramos a partir de agora $V \simeq \mathbb{R}^{8,0}$ ou $\mathbb{R}^{0,8}$ ou $\mathbb{R}^{4,4}$ (embora este último demande um pouco de cuidado, já que o índice da métrica não é maximal [Ben87, Che54]). O espaço \mathbf{E} é portanto 24-dimensional e seus elementos serão denotados por $\phi = \mathbf{x} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$, onde $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{v} \in \mathbf{S}^+$ e $\mathbf{w} \in \mathbf{S}^-$.

Lema A.0 ► Se $\mathbf{x} \in V$ é tal que $\mathbf{x}^2 = 1$, então para todo $\mathbf{w} \in \mathbf{S}^-$, existe um $\mathbf{v} \in \mathbf{S}^+$ tal que $\mathbf{w} = \mathbf{xv}$. ◀

Demonstração: considere um elemento de volume η^+ de $\mathcal{C}\ell^+(V, g)$. Como \mathbf{S}^+ e \mathbf{S}^- são espaços carregando representações irredutíveis de $\mathcal{C}\ell^+(V, g)$ e $\dim V = 8$, o espaço $\mathbf{S} = \mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^-$ carrega uma representação irredutível de $\mathcal{C}\ell(V, g)$. Neste caso, temos certamente $\mathbf{S}^+ = (1/2)(1 + \eta^+)\mathbf{S}^+$ e $\mathbf{S}^- = (1/2)(1 - \eta^+)\mathbf{S}^-$. De fato, pensando em álgebra de matrizes, temos que os elementos de $\mathcal{C}\ell^+(V, g)$ são da forma

$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

de forma que η^+ pode ser tomado como

$$\eta^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Para todo vetor $\mathbf{x} \in V$, temos $\eta^+ \mathbf{x} = -\mathbf{x} \eta^+$. Portanto, como $\mathbf{u} \in \mathbf{S}^+$, então $\mathbf{xu} = \mathbf{x} \frac{1}{2}(1 + \eta^+) \mathbf{u} = \frac{1}{2}(1 - \eta^+) \mathbf{xu}$, de onde se conclui que $\mathbf{xu} \in \mathbf{S}^-$.

□

Definimos a métrica spinorial $h : \mathbf{S}^\pm \times \mathbf{S}^\pm \rightarrow \mathbb{F}$ como

$$\boxed{h(\mathbf{v}, \mathbf{xw}) = h(\mathbf{xv}, \mathbf{w}) = (\mathbf{xv})^\chi \mathbf{w}} \quad (\text{A.3})$$

onde $(\cdot)^\chi$ é o operador dual

$$\begin{aligned} (\cdot)^\chi : \mathbf{S}^\pm &\longrightarrow (\mathbf{S}^\pm)^* \\ \alpha &\mapsto \alpha^\chi \end{aligned}$$

A partir dessa definição definimos ainda uma métrica \check{B} em \mathbf{E} a partir da métrica spinorial h e da métrica do espaço g :

$$\check{B}(\phi_1, \phi_2) = g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + h(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + h(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2), \quad \mathbf{x}_i \in V, \mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^+, \mathbf{w}_i \in \mathbf{S}^- \quad (i = 1, 2) \quad (\text{A.4})$$

Podemos também definir um tensor trilinear $T : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ totalmente simétrico:

$$\begin{aligned} T(\phi_1, \phi_2, \phi_3) &= h(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_2 \mathbf{w}_3) + h(\mathbf{v}_1, \mathbf{x}_3 \mathbf{w}_2) + h(\mathbf{v}_2, \mathbf{x}_3 \mathbf{w}_1) + \\ &\quad + h(\mathbf{v}_2, \mathbf{x}_1 \mathbf{w}_3) + h(\mathbf{v}_3, \mathbf{x}_2 \mathbf{w}_1) + h(\mathbf{v}_3, \mathbf{x}_1 \mathbf{w}_2). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

A.2 O Produto de Chevalley

É possível munir o espaço \mathbf{E} de um produto $\Delta: \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ associativo e não-comutativo, denominado *produto de Chevalley*, que é definido implicitamente como

$$T(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \check{B}(\phi_1 \Delta \phi_2, \phi_3) \quad (\text{A.6})$$

Pela propriedade de simetria total de T exibida pela eq.(A.5), concluímos que de fato o produto Δ é comutativo, i.e, $\phi_1 \Delta \phi_2 = \phi_2 \Delta \phi_1$.

Vale ainda observar que, se ϕ_1 e ϕ_2 pertencem ao mesmo subespaço, $T(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = 0$ e portanto $\phi_1 \Delta \phi_2 = 0$.

Lema A.1 ►

$$\mathbf{x} \Delta \mathbf{v} = \mathbf{xv}, \quad \mathbf{x} \Delta \mathbf{w} = \mathbf{xw} \quad (\text{A.7})$$

$\forall \mathbf{x} \in V, \mathbf{v} \in \mathbf{S}^+$ e $\mathbf{w} \in \mathbf{S}^-$. ◀

Demonstração:

$$\begin{aligned} \check{B}(\mathbf{x} \circ \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= T(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = h(\mathbf{u}, \mathbf{xv}) = h(\mathbf{xu}, \mathbf{v}) = \check{B}(\mathbf{xu}, \mathbf{v}) \\ \check{B}(\mathbf{x} \circ \mathbf{v}, \mathbf{u}) &= T(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = h(\mathbf{v}, \mathbf{xu}) = h(\mathbf{xv}, \mathbf{u}) = \check{B}(\mathbf{xv}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Proposição A.1 ► As inclusões

$$V \Delta \mathbf{S}^+ \subseteq \mathbf{S}^-, \quad \mathbf{S}^+ \Delta \mathbf{S}^- \subseteq V, \quad \mathbf{S}^- \Delta V \subseteq \mathbf{S}^+ \quad (\text{A.9})$$

são válidas. ◀

Demonstração: Se $\phi_1 \in V, \phi_2 \in \mathbf{S}^+$ e $\phi_3 \in V \oplus \mathbf{S}^+$, denotamos $\phi_1 = \mathbf{x}_1, \phi_2 = \mathbf{u}_2$ e $\phi_3 = \mathbf{x}_3 + \mathbf{u}_3$. Portanto $T(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = T(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_2, \phi_3) = 0 = \check{B}(\phi_1 \circ \phi_2, \phi_3)$, ou seja, $\phi_1 \circ \phi_2$ pertence ao subespaço ortogonal de $V \oplus \mathbf{S}^+$ relativo à métrica \check{B} , já que $\mathbf{E} = \mathbf{S}^- \oplus (\mathbf{S}^-)^\perp$. Um raciocínio análogo vale para os outros casos.

Lema A.2 ► O produto de Chevalley $\Delta: \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ é comutativo e não é associativo. ◀

Demonstração: Provaremos que $\mathbf{x} \circ (\mathbf{x} \circ \mathbf{u}) \neq (\mathbf{x} \circ \mathbf{x}) \circ \mathbf{u}$. Por um lado, $\mathbf{x} \circ (\mathbf{x} \circ \mathbf{u}) = \mathbf{x} \circ (\mathbf{xu}) = \mathbf{x}^2 \mathbf{u} = g(\mathbf{x}, \mathbf{x})\mathbf{u}$. Por outro lado $(\mathbf{x} \circ \mathbf{x}) \circ \mathbf{u} = 0$.

A partir de agora denotaremos por \mathbf{x}, \mathbf{v} e \mathbf{w} , respectivamente, elementos de V, \mathbf{S}^+ e \mathbf{S}^- . A representação spinorial ρ do grupo de Clifford em \mathbf{S}^\pm e a representação vetorial χ em V induzem naturalmente uma representação irredutível Y em \mathbf{E} . Dado $s \in \Gamma^+$, o qual denotamos um elemento do grupo de Clifford com norma unitária, definimos a ação de tal representação em \mathbf{E} como:

$$Y(s)(\mathbf{x} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \chi(s)\mathbf{x} + \rho(s)\mathbf{v} + \rho(s)\mathbf{w} = \mathbf{sxs}^{-1} + \mathbf{sv} + \mathbf{sw} \quad (\text{A.10})$$

Proposição A.2 ► O mapa $Y(s): \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ é ortogonal com relação à métrica \check{B} . ◀

Lema A.3 ► Se $\mathbf{x}_0 \in V$ é tal que $\mathbf{x}_0^2 = 1$, então $Y^2(\mathbf{x}_0) = 1$. ◀

Demonstração: Obviamente $\mathbf{x}_0 \in \Gamma^+$, de modo que a notação $Y(\mathbf{x}_0)$ faz sentido. Como $\mathbf{x}_0^2 = 1$, então $\mathbf{x}_0^{-1} = \mathbf{x}_0$, de modo que

$$\begin{aligned} Y^2(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{v}) &= Y(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_0 \mathbf{x} \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0 \mathbf{u} + \mathbf{x}_0 \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{x}_0^2 \mathbf{x} \mathbf{x}_0^2 + \mathbf{x}_0^2 \mathbf{u} + \mathbf{x}_0^2 \mathbf{v} \\ &= \mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{v} \end{aligned}$$

A fim de que o tensor T seja invariante por $Y(s)$ é necessário que $Y(s)$ seja um automorfismo em relação ao produto de Chevalley, i.e., $T(Y(s)\phi_1, Y(s)\phi_2, Y(s)\phi_3) = T(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. De fato,

$$\begin{aligned} T(Y(s)\phi_1, Y(s)\phi_2, Y(s)\phi_3) &= \check{B}([Y(s)\phi_1] \circ [Y(s)\phi_2], Y(s)\phi_3) \\ &= \check{B}(Y(s)[\phi_1 \circ \phi_2], Y(s)\phi_3) \\ &= \check{B}(\phi_1 \circ \phi_2, \phi_3) \\ &= T(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \end{aligned} \tag{A.11}$$

A.3 Trialidade

Considere um spinor $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{S}^+$ de norma unitária, ou seja, $h(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0) = 1$. Definimos uma transformação linear

$$\begin{aligned} \tau : \mathbf{S}^+ &\rightarrow V \\ \mathbf{v}_0 &\mapsto \tau(\mathbf{v}_0) : V \rightarrow \mathbf{S}^- \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\boxed{\tau(\mathbf{v}_0)(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \Delta \mathbf{v}_0} \tag{A.12}$$

Lema A.4 ► O mapa $\tau(\mathbf{v}_0)$ é ortogonal, i.e., $h(\tau(\mathbf{v}_0)\mathbf{x}_1, \tau(\mathbf{v}_0)\mathbf{x}_2) = g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. ◀

Demonstração:

$$\begin{aligned} h(\tau(\mathbf{v}_0)\mathbf{x}_1, \tau(\mathbf{v}_0)\mathbf{x}_2) &= h(\mathbf{x}_1 \circ \mathbf{u}_0, \mathbf{x}_2 \circ \mathbf{u}_0) = h(\mathbf{x}_1 \mathbf{u}_0, \mathbf{x}_2 \mathbf{u}_0) \\ &= (\mathbf{x}_1 \mathbf{u}_0)^\chi \mathbf{x}_2 \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0^\chi \mathbf{x}_1^\chi \mathbf{x}_2 \mathbf{u}_0 \\ &= g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) h(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0) \\ &= g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

O mapa $\tau(\mathbf{v}_0)$ é unicamente estendido a um automorfismo de ordem 2 em $V \oplus \mathbf{S}^-$. Se $\mathbf{w} \in \mathbf{S}^-$ é tal que $\mathbf{w} = \tau(\mathbf{v}_0)\mathbf{x}$ para um único $\mathbf{x} \in V$, definimos

$$\boxed{\tau(\mathbf{v}_0)(\mathbf{w}) = \mathbf{x}} \tag{A.13}$$

Além disso, o mapa $\tau(\mathbf{v}_0)$ é definido em \mathbf{S}^+ como sendo uma reflexão em relação ao spinor $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{S}^+$, da seguinte maneira:

$$\tau(\mathbf{v}_0)(\mathbf{v}) = 2h(\mathbf{v}, \mathbf{v}_0)\mathbf{v}_0 - \mathbf{v} \quad (\text{A.14})$$

Lema A.5: $\blacktriangleright \tau(\mathbf{v}_0)Y(\mathbf{x}_0)\tau(\mathbf{v}_0) = Y(\mathbf{x}_0)\tau(\mathbf{v}_0)Y(\mathbf{x}_0). \blacktriangleleft$

Demonstração: Mostraremos o lema 5 no caso em que os operadores $Y(\mathbf{x}_0)$ e $\tau(\mathbf{u}_0)$ são aplicados sobre um elemento $\mathbf{x} \in V$. Os outros casos são análogos e o teorema fica demonstrado por linearidade em \mathbf{E} .

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{u}_0)Y(\mathbf{x}_0)\tau(\mathbf{u}_0)(\mathbf{x}) &= \tau(\mathbf{u}_0)Y(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}\mathbf{u}_0) = \tau(\mathbf{u}_0)(\mathbf{x}_0\mathbf{x}\mathbf{u}_0) \\ &= 2h(\mathbf{x}_0\mathbf{x}\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0) - \mathbf{x}_0\mathbf{x}\mathbf{u}_0 \\ &= 2h(\mathbf{x}\mathbf{u}_0, \mathbf{x}_0\mathbf{u}_0)\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\mathbf{x}\mathbf{u}_0 \\ &= 2h(\tau(\mathbf{u}_0)\mathbf{x}, \tau(\mathbf{u}_0)\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\mathbf{x}\mathbf{u}_0 \\ &= 2g(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\mathbf{x}\mathbf{u}_0 \\ &= \mathbf{x}\mathbf{x}_0\mathbf{u}_0 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Y(\mathbf{x}_0)\tau(\mathbf{u}_0)Y(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}) &= Y(\mathbf{x}_0)\tau(\mathbf{u}_0)(\mathbf{x}_0\mathbf{x}\mathbf{x}_0) = Y(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_0\mathbf{x}\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_0 \\ &= \mathbf{x}_0^2\mathbf{x}\mathbf{x}_0\mathbf{u}_0 = \mathbf{x}\mathbf{x}_0\mathbf{u}_0 \quad \square \end{aligned}$$

Defina o operador Θ da seguinte maneira:

$$\Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = Y(\mathbf{x}_0)\tau(\mathbf{v}_0) \quad (\text{A.15})$$

O operador Θ é um automorfismo de ordem 3, i.e.,

$$\Theta^3(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = 1. \quad (\text{A.16})$$

Além disso podemos provar que $\Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ é ortogonal em relação à métrica \check{B} , i.e.,

$$\check{B}(\Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)\phi_1, \Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)\phi_2) = \check{B}(\phi_1, \phi_2) \quad (\text{A.17})$$

e que

$$T(\Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)\phi_1, \Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)\phi_2, \Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)\phi_3) = T(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \quad (\text{A.18})$$

Proposição A.3 ▶ Os subespaços V , \mathbf{S}^+ e \mathbf{S}^- de \mathbf{E} são permutados ciclicamente pelo operador $\Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ da seguinte forma:

$$\boxed{\Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0).V \subset \mathbf{S}^+, \quad \Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0).\mathbf{S}^+ \subset \mathbf{S}^-, \quad \Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0).\mathbf{S}^- \subset V} \blacktriangleleft \quad (\text{A.19})$$

Demonstração: De fato, dado $\mathbf{x} \in V$, temos

$$\Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)(\mathbf{x}) = Y(\mathbf{x}_0)\tau(\mathbf{u}_0)\mathbf{x} = Y(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}\mathbf{u}_0) = \mathbf{x}_0\mathbf{x}\mathbf{u}_0 \in \mathbf{S}^+,$$

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)(\mathbf{u}) &= Y(\mathbf{x}_0)\tau(\mathbf{u}_0)\mathbf{u} = Y(\mathbf{x}_0)[2h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0)\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}] \\ &= 2h(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0)\mathbf{x}\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\mathbf{u} \in \mathbf{S}^-, \end{aligned}$$

e

$$\Theta(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)(\mathbf{v}) = Y(\mathbf{x}_0)\tau(\mathbf{u}_0)\mathbf{v} = Y(\mathbf{x}_0)\mathbf{x} = \mathbf{x}_0\mathbf{x}\mathbf{x}_0 \in V.$$

□

Já sabemos que, em se tratando do espaço vetorial V , o espaço dos *spinors* de V é escrito como $\mathbf{S}^+ \oplus \mathbf{S}^-$. Pela Proposição A.3 podemos afirmar que se tomarmos o espaço \mathbf{S}^\pm como espaço vetorial, o espaço dos *spinors* de \mathbf{S}^\pm será $V \oplus \mathbf{S}^\mp$. Nesse sentido, *semispinors* de \mathbf{S}^\pm (enquanto espaço vetorial) são vetores de V .

O diagrama de Dynkin de $\mathfrak{so}(8)$, juntamente com a ação do operador Θ e do produto de Chevalley Δ , pode ainda ser representado por

Podemos ainda provar os isomorfismos entre as álgebras de Clifford [Ben87]:

$$\boxed{\mathcal{Cl}(V, g) \simeq \mathcal{Cl}(\mathbf{S}^+, h) \simeq \mathcal{Cl}(\mathbf{S}^-, h)} \quad (\text{A.20})$$

A.4 *Spinors* puros

Nesta seção revisamos os principais conceitos que definem os *spinors* puros. Para maiores detalhes veja [Ben87, Car37, Che54, Cru90, Cru91, Car66, Bud89, Bud02]. Dado um espaço vetorial complexo \mathbb{C}^{2n} de dimensão $2n$ e a sua respectiva álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(2n, \mathbb{C})$ com geradores γ^a que satisfazem $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\delta^{ab}$, vimos pela definição clássica de *spinors*, no Cap.(1), que um spinor \mathbf{u} é um vetor do espaço de representação de dimensão $2n$ da álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(2n, \mathbb{C}) = \text{End } \mathbf{S}$, definido pela equação de Cartan $z\mathbf{u} = 0$. Para $\mathbf{u} \neq 0$, $z \in \mathbb{C}^{2n}$ deve ser nulo.

A partir do elemento de volume $\eta := \gamma^1\gamma^2 \dots \gamma^{2n}$, *spinors* de Weyl \mathbf{u}_\pm são definidos pela expressão $z(1 \pm \eta)\mathbf{u}_\pm = 0$, sendo elementos do espaço de representação da subálgebra par $\mathcal{Cl}^+(2n, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{Cl}(2n, \mathbb{C})$. Cada spinor de Weyl \mathbf{u}_\pm gera um espaço spinorial de dimensão 2^{n-1} , e a expressão $z(1 \pm \eta)\mathbf{u}_\pm = 0$ define hiperplanos totalmente nulos de dimensão d , denotados por $T_d(\mathbf{u}_\pm)$, cujos vetores são nulos e mutuamente ortogonais. Podemos mostrar que todo $\mathbf{u}_\pm \in S_\pm$, onde $\mathcal{Cl}^+(2n, \mathbb{C}) =$

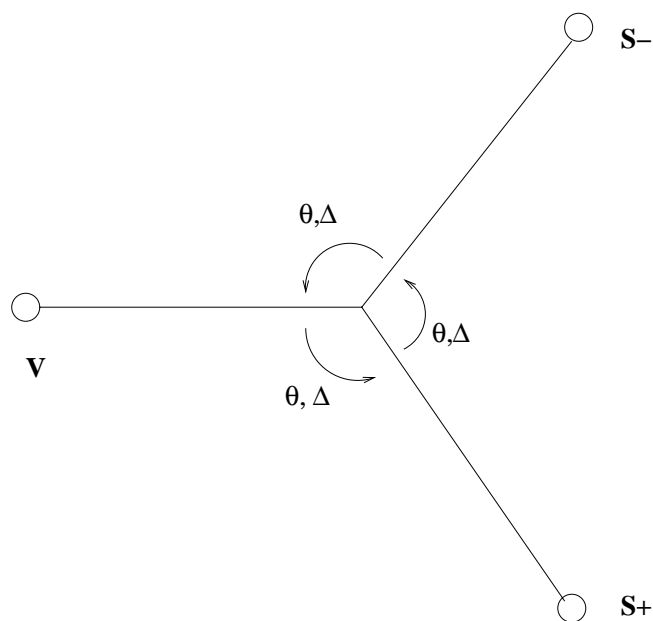


Figura A.1: Diagrama de Dynkin de $\mathfrak{so}(8)$ e a ação do operador de trialidade e do produto de Chevalley.

End S_{\pm} define tais planos. Para $d = n$, i.e., para dimensão maximal dos planos totalmente nulos, $T_n(u_{\pm}) := M(u_{\pm})$, os *spinors* de Weyl correspondentes u_{\pm} são denominados *simples* ou *puros* [Che54, Car37, Car66, Bud02]. Além disso, $M(u_{\pm})$ e $\pm u_{\pm}$ são isomorfos (mod \mathbb{Z}_2) e todos os *spinors* de Weyl são puros para $n \leq 3$.

Apêndice B

Lista de Publicações

B.1 Artigos Publicados

1. da Rocha R e Rodrigues Jr. W A, *Where are ELKO spinors in Lounesto spinor field classification?*, Mod. Phys. Lett. **A21** (1) 65-74 (2006) [math-ph/0506075].
2. da Rocha R e Vaz Jr. J, *Extended Grassmann and Clifford algebras*, Adv. Appl. Cliff. Alg., **15** (1), aceito para publicação (2006).
3. da Rocha R and Capelas de Oliveira E, *AdS geometry, embedded projective coordinates and isometry groups*, Int. J. Theor. Phys., aceito para publicação (2006) [math-ph/0309040].
4. da Rocha R e Coimbra-Araújo C H, *Variation in the luminosity of Kerr quasars due to extra dimension in 3-brane Randall-Sundrum model*, JCAP **12** (2005) 009 [astro-ph/0510329], [astro-ph/0509363].
5. da Rocha R, Coimbra-Araújo C H e Pedron I L, *Anti-de Sitter curvature radius in brane-world constrained by quasars*, Int. J. Mod. Phys. **D14** (11) 1883-1898 (2005) [astro-ph/05050132].
6. da Rocha R, Rodrigues Jr. W A, e Vaz Jr., J, *Hidden Consequence of Active Local Lorentz Invariance*, Int. J. Geom. Meth. in Math. Phys., **2** (2), 305-357 (2005) [math-ph/0501064].
7. da Rocha R, *Equivalence between Maupertuis' variational principle, Newton's second law and conformal geometry*, Rev. Bras. Ens. Fís. **27** (3), 381-384 (2005).
8. da Rocha R e Capelas de Oliveira E, *The Casimir operator of $SO(1,2)$ and the Pöschl-Teller potential: an AdS approach*, Rev. Mex. Fis., **51** (1), 1-4 (2005).
9. da Rocha R, *The super-Poincaré algebra via pure spinors and the interaction principle in 3-dimensional Euclidean space*, Braz. J. Phys. **35** (4B), 1138-1139 (2005).

10. da Rocha R, Coimbra-Araújo C H e Pedron I L, *Is it possible to test Brane-World scenarios by observation of quasars and microquasars?*, Braz. J. Phys. **35** (4B) 1129-1130 (2005).
11. da Rocha R e Vaz Jr. J, *Twistors, Generalizations and Exceptional Structures*, JHEP PoS WC2004 (2004) 022 [[math-ph/0412037](#)].
12. da Rocha R e Capelas de Oliveira E, *Partial differential equations in the projective relativity*, Hadronic J., **24** (6), 639-652 (2001).
13. da Rocha R, *Spinors and spacetime structure*, Physicæ **2**, 01-11 (2001).
14. da Rocha R e Rodrigues Jr. W A, *Diffeomorphism Invariance and Local Lorentz Invariance*, in Clifford Algebras, Applications to Mathematics, Physics and Engineering, Progress in Math. Phys., "Proceedings of 7^o International Conference on Clifford Algebras and their Applications, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, May 19-29, 2005", Birkhäuser, Berlin 2006, to appear [[math-ph/0510026](#)].
15. da Rocha R e Vaz Jr. J, *Standard Model of Elementary Particles and extensions using Exceptional Lie Groups G_2 , F_4 and E_6* , Proceedings of IX Hadron Physics and VII Relativistic Aspects of Nuclear Physics: a Joint Meeting on QCD and QGP Rio de Janeiro, Brazil, 28 March - 3 April 2004, AIP Conference Proceedings **739**, 687-689 (2004)

B.2 Artigos submetidos à publicação

1. da Rocha R, Capelas de Oliveira E, and Coimbra-Araújo C H, *Perturbative scalar field theory: a differential equation approach*, submetido ao MPLA, dez/05 [[hep-th/0512168](#)].
2. da Rocha R and Rodrigues Jr. W A, *A Comment on the Einstein-Hilbert Lagrangian Density in a 2-dimensional Spacetime*, submetido ao MPLA, dez/05 [[hep-th/0512168](#)].
3. da Rocha R and Capelas de Oliveira E, *On conformal d'Alembert-like equations*, submetido ao IJMPD, nov/05 [[math-ph/0502011](#)].
4. da Rocha R, Capelas de Oliveira E and Coimbra-Araújo C H, *Perturbative scalar field theory: a differential equation approach*, submetido ao Rep. Math. Phys., Jul/05 [[hep-th/0508199](#)].
5. da Rocha R and Rodrigues Jr. W A, *Riemann and Ricci fields in geometric structures*, submetido ao J. Math. Phys. Jan/05 [[math.DG/0502003](#)].
6. da Rocha R and Vaz Jr. J, *Clifford algebras and spinors III: conformal structures and twistors in the paravector model of spacetime*, submetido ao Comm. Contemporary Math., Nov/04 [[math-ph/0412076](#)].
7. da Rocha R and Vaz Jr. J, *Clifford algebras and spinors II: Weyl spinors in $Cl(3,0)$ and $Cl(0,3)$ and the Dirac equation*, submetido ao Comm. Contemporary Math., Nov/04 [[math-ph/0412075](#)].

8. da Rocha R and Vaz Jr. J, *Clifford algebras and spinors I: the twistor group $SU(2,2)$ in the Dirac algebra and some other remarks*, submetido ao Comm. Contemporary Math., Nov/04 [math-ph/0412074]
9. da Rocha R and Capelas de Oliveira E, *AdS geometry, embedded projective coordinates and isometry groups*, submetido ao Int. J. Theor. Phys., Nov/04 [math-ph/0309040].
10. da Rocha R and Vaz Jr. J, *Clifford algebra-parametrized octonions and generalizations*, submetido ao J. Algebra Abr/05.
11. da Rocha R, Freire I L, and Faria Rosa M A, *Spacetime deformations and electromagnetism in material media*, submetido ao Can. J. Phys., Abr/05 [physics/0502012]
12. da Rocha R and Vaz Jr. J, *Isotopic liftings of Clifford algebras and applications in Quantum Field Theory*, submetido ao J. Phys. **A**, Jan/06.
13. da Rocha R and Vaz Jr. J, *Clifford algebra-parametrized octonions and generalizations*, submetido ao J. Math. Phys., Jan/06.
14. da Rocha R and Rodrigues Jr. W A, *The Dirac-Hestenes equation for spherical symmetric potentials in the spherical and Cartesian gauges*, submetido ao Mod. Phys. Lett. **A**, abr/05 [math-ph/0601018].

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)