

**UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE DO ESTADO DO RIO
GRANDE DO SUL - UNIJUÍ**

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**MODELAGEM MATEMÁTICA DE TENACIFICAÇÃO DE
MATERIAIS CERÂMICOS ATRAVÉS DA ADIÇÃO DE
MICROFIBRAS**

ALCIONE RAFAEL PAVAN

IJUÍ, RS, BRASIL, 2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE DO ESTADO DO RIO GRANDE
DO SUL - UNIJUÍ
DeFEM – DEPARTAMENTO DE FÍSICA, ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA
DeTEC – DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIA

**MODELAGEM MATEMÁTICA DE TENACIFICAÇÃO DE MATERIAIS
CERÂMICOS ATRAVÉS DA ADIÇÃO DE MICROFIBRAS**

ALCIONE RAFAEL PAVAN

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado
em Modelagem Matemática da Universidade
Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande
do Sul – UNIJUÍ como requisito parcial à
obtenção do título de Mestre em Modelagem
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Wang Chong

Ijuí
2006

UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE DO ESTADO DO
RIO GRANDE DO SUL
DeFEM – DEPARTAMENTO DE FÍSICA, ESTATÍSTICA E MATEMÁTICA
DeTEC – DEPARTAMENTO DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação

**“MODELAGEM MATEMÁTICA DE TENACIFICAÇÃO DE MATERIAIS
CERÂMICOS ATRAVÉS DA ADIÇÃO DE MICROFIBRAS”**

Elaborada por

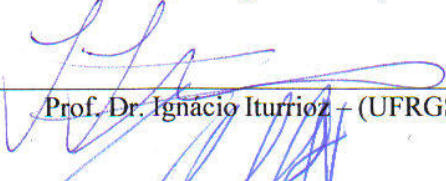
ALCIONE RAFAEL PAVAN

Como requisito para obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática

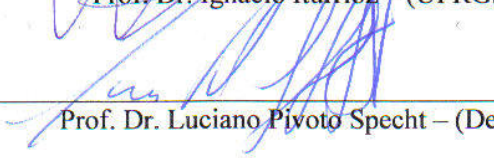
Comissão Examinadora



Prof. Dr. Wang Chong - DeTec - (Orientador)



Prof. Dr. Ignacio Iturrioz - (UFRGS)



Prof. Dr. Luciano Pivoto Specht – (DeTec)

Ijuí, RS, 22 de setembro de 2006.

Dedicatória

Ao meu Pai.

À Minha mãe, pela fé, confiança e amor.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos...

- *À Deus...*
- *À minha mãe, meu padrasto, meus irmãos, minhas sobrinhas...*
- *Ao Professor Doutor Wang Chong pela paciência, compreensão, dedicação. Cujo conhecimento comigo dividiu, conduzindo-me admiravelmente a completar este trabalho.*
- *A toda equipe do mestrado, professores e funcionários, especialmente à Geni.*
- *Aos Professores da Banca, pela disponibilidade e interesse.*
- *À CAPES, pela ajuda financeira através de bolsa integral.*
- *À Professora Denise Knorst, pois sem seu incentivo na graduação, eu aqui não chegaria.*
- *À Dona Zaida, por estar sempre de braços abertos.*
- *Aos meus colegas, uns mais, outros menos... Em especial ao Marcos Espindola, Erno, Vanderlei e João.*

...A todos, obrigado.

RESUMO

A cerâmica avançada tem propriedades peculiares que a tornam ideais para as mais diversas aplicações de campos de alta tecnologia. No entanto, esses materiais são frágeis, e a facilidade de se trincar é seu principal problema, sendo motivo de avançados estudos/pesquisas para aumentar a capacidade da cerâmica de resistir à fratura e ampliar suas aplicações. Entre os mecanismos usados para aumentar a tenacidade (*toughening*), o que tem mostrado melhor resultado é a tenacificação por microfibras, no qual esta pesquisa é baseada. Através da análise da deformação das microfibras, que estão no plano trincado e sujeitas a carregamento externo na matriz composta, e utilizando-se de análises mecânicas elásticas, foram propostos modelos matemáticos baseados no comportamento mecânico de uma viga em balanço e numa hipótese sobre a rigidez da matriz no local imediatamente da saída de fibra na matriz. Tais modelos são para os cálculos das tensões das fibras nos processos de descolagem (*debonding*) e de quando a fibra é puxada para fora da matriz (*pull-out*), da resistência de tensão aparente da fibra (*apparent strength*) e da tensão gerada pelas fibras (*bridging stress*, relação tensão-abertura da trinca) distribuídas aleatoriamente na matriz frágil com uma fração volumétrica. Nos cálculos, foram utilizados métodos numéricos de integral tripla e de soluções de equações de segunda e terceira ordem. Foram analisadas as influências de parâmetros mecânicos da fibra e da matriz na tenacidade à fratura da cerâmica composta como a tenacidade da interface fibra/matriz, a resistência de atrito entre a matriz e a superfície descolada da fibra, a resistência de tração, a porcentagem volumétrica e comprimento das fibras, a razão entre as elasticidades da fibra e da matriz, entre outros. As comparações dos resultados obtidos pelos modelos propostos neste trabalho com os dados experimentais e resultados de outros modelos na literatura revelaram a imprescindível necessidade de incorporar nos modelos considerações como o efeito de spalling, a deformação localizada ao redor do ponto imediatamente da saída da fibra na matriz, a possibilidade de ocorrência de plasticidade e a relação entre a força axial

e o progresso de descolagem no processo de descolagem da fibra com a matriz, etc. Os resultados obtidos confirmaram que existe uma combinação ótima entre os parâmetros que podem dar o melhor aumento da tenacidade à fratura. Para encontrar esta combinação ótima, a modelagem matemática é o único caminho viável e econômico.

Palavras chaves: tenacidade à fratura, aumento de tenacidade, mecanismos de tenacificação, cerâmica composta, materiais compostos reforçados com fibras, tensão de ponte, interface fibra/matriz, descolagem, modelo matemático.

ABSTRACT

Advanced ceramics presents of special mechanical features, which make itself ideal for diverse applications in the fields of hi-Tech. However it is brittle and easy to crack. This inherent shortcoming motivates a lot of research work on the enhancement of the capacity to resist fracture i.e. ceramics toughening in order to extend its application. Among toughening mechanisms the one of having obtained good results is micro fiber toughening, on which the present research works. By means of elastic stress and deformation analysis of fibers that cross the fractured planes subjected to an external load, mathematical models were presented on the theory of an elastic cantilever beam and a hypothesis on the local matrix stiffness near the point where a fiber exits the matrix. The models are used for the calculations of fiber stress in debonding and pull-out processes, fiber apparent strength and bridging stress contributed by fibers distributed randomly in the matrix at a volume fraction. In the calculations, numeric methods for triple integral and solutions of the second and third order equations were utilized. The influence of mechanical properties of the fiber and matrix, such as the bond strength of fiber/matrix interface, the resistance of friction between debonded fiber surface and matrix, fiber tensile strength, fiber volume percentage fraction, fiber length as well as the ratio of elasticity module of fiber and matrix, on the fracture toughness of ceramics composite were investigated. The comparison of the results obtained from present models with the ones from experiments and models otherwise revealed the necessity of adding to models the considerations such as spalling effect, localized deformation near the fiber exit point from the matrix, possibility of plasticity occurrence as well as the correlation between the fiber axial force and the interface debonding progress. The obtained results also confirmed the existence of an optimal combination of the mechanical parameters that would yield the best toughening effect. To encounter this combination, mathematical modeling is a uniquely viable and economic means.

Keywords: fracture toughness, toughening, toughening mechanisms, ceramics composite, fiber reinforced composite, bridging stress, fiber/matrix interface, debonding, pull-out, mathematical modeling.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	13
LISTA DE TABELAS.....	17
INTRODUÇÃO	18
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	21
2.1 MECANISMOS DE TENACIFICAÇÃO	22
2.1.1. Tenacificação por microtrincas.....	22
2.1.2. Tenacificação por transformação de fases.....	22
2.1.3. Tenacificação por partículas.....	23
2.1.4. Tenacificação por micro fibras e whiskers.....	23
2.2 MODELOS MATEMÁTICOS PARA CALCULAR A TENACIFICAÇÃO POR MICRO FIBRAS	24
2.3 DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO DE TRAÇÃO DO MATERIAL REFORÇADO POR MICRO FIBRAS	28
FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DO MEIO CONTÍNUO.....	30
3.1 NOTAÇÃO PARA FORÇAS E TENSÕES.....	31
3.2 COMPONENTES DE TENSÕES	32
3.3 COMPONENTES DE DEFORMAÇÃO.....	33
3.4 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS: LEI DE HOOKE	35
3.5 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO.....	36
3.6 CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	38
3.7 EQUAÇÕES E COMPATIBILIDADE	39
3.8 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MECÂNICA ELÁSTICA	40
3.8.1 Função de tensão.....	41

FUNDAMENTO DA MECÂNICA DA FRATURA.....	42
4.1. RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS – PARADOXO	43
4.2. TEORIA GRIFFITH	44
4.3. CORREÇÕES PROPOSTAS POR IRWIN E OROWAN.....	46
4.4. MODOS DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS	47
4.4.1 Distribuição de tensões na ponta de uma trinca	47
4.4.2 Fatores de intensidade de tensões	51
4.5. CRITÉRIOS DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS	51
4.5.1 Critério do fator de intensidade de tensões	52
4.5.2 Critério da máxima tensão circunferencial ($(\sigma_{\theta})_{\text{máx}}$, Erdogan e Sih [54])	52
4.5.3 Critério de intensidade de energia de deformação mínima (critério S , Sih [55])	53
4.5.4 Critério da taxa máxima de liberação de energia de deformação (critério G_{max} , Irwin [56])	54
4.5.5 Critério COD (Crack-tip-Open Displacement)	55
4.5.5.1. COB sob condição de escoamento pequeno de Irwin [56]	55
4.5.5.2. COD da região de escoamento tipo cunha (Dugdale-Barenblatt modelo)	56
4.5.6 Critério da J-Integral	57
4.5.6.1. Conceito de J-Integral	57
4.5.6.2. O Critério do J-Integral	59
4.5.6.3. Relação entre J_C e K_{IC}	63
 MODELO MATEMÁTICO PARA TENACIFICAÇÃO POR MICROFIBRAS	 64
5.1. A TRINCA	64
5.2. FIBRAS	64
5.3. MATERIAL COMPOSTO	65
5.4. METODOLOGIA E CONCEITOS PARA ELABORAÇÃO DOS MODELOS	65
5.5. DELIMITAÇÕES DE DIMENSÕES E FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO DA FIBRA	65
5.6. FORMA DEFORMADA DA FIBRA.....	72
5.7. IDENTIFICAÇÃO DOS ESTADOS DA FIBRA	74
5.8. EFEITO DE <i>SNUBBING</i> , <i>SPALLING</i> E <i>BENDING</i>	74
5.9. RELAÇÃO ENTRE A FORÇA AXIAL N E A MEIA ABERTURA w DA TRINCA, ANTES DA OCORRÊNCIA DE DESCOLAGEM NA INTERFACE FIBRA/MATRIZ	76
5.10. A RELAÇÃO $N-w$ NO PROCESSO DE DESCOLAGEM.....	81
5.11. A RELAÇÃO $N-w$ NO PROCESSO DE PULL-OUT.....	85
5.12. RESISTÊNCIA APARENTE DA FIBRA	88
5.13. TENSÃO PROVENIENTE DAS FIBRAS NO PLANO TRINCADO (BRIDGING STRESS)	89
5.14. ENERGIA DE FRATURA (TENACIDADE)	89

SIMULAÇÕES E RESULTADOS.....	90
6.1. FLUXOGRAMA PARA DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA PARA CALCULAR TENSÃO ORIGINADA DAS FIBRAS.....	90
6.2. FORMAS DE DEFORMAÇÃO DA FIBRA.....	95
6.3. TENSÃO AXIAL NUMA FIBRA NOS PROCESSOS <i>DEBONDING</i> E <i>PULL-OUT</i>	99
6.4. TENSÃO APARENTE	104
6.5. TENSÃO NA MATRIZ COMPOSTA (<i>BRIDGING STRESS</i>) E TENACIDADE	113
6.6. ESTUDO DA INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS NA TENACIDADE EM MATRIZ CERÂMICA	117
CONCLUSÃO	132
SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	135
REFERÊNCIAS	136
APÊNDICES.....	141
APÊNDICE A - FORÇA AXIAL N COM ENERGIA DA FRATURA G_d E TENSÃO DE CISLHAMENTO τ_0	141
APÊNDICE B - DETERMINAÇÃO DA TENACIDADE DA SUPERFÍCIE G_d	145
ANEXOS	146
ANEXO A - PROGRAMA PARA CALCULAR A RESISTÊNCIA APARENTE DE UMA FIBRA	146
ANEXO B -PROGRAMA PARA CALCULAR A TENSÃO EM RELAÇÃO À ABERTURA DA TRINCA E TENACIDADE PARA AS FIBRAS NO COMPOSTO	150
ANEXO C - O PROGRAMA PARA FAZER O TRATAMENTO DOS <i>FLAGS</i> (FLUXOGRAMA).....	153
ANEXO D - PROGRAMA PARA TRATAR O PROCESSO DE DESCOLAGEM.....	156
ANEXO E - PROGRAMA PARA TRATAR O PROCESSO DE <i>PULL-OUT</i>	158

LISTA DE FIGURAS

FIG. 2.1.	LI, WANG E BACKER [6]: PULL-OUT PARA COMPRIMENTO ENTERRADO L . (A) PARA FIBRA ALINHADA COM A FORÇA AXIAL; (B) FIBRA COM ORIENTAÇÃO ARBITRÁRIA.	25
FIG. 2.2.	LIN E LI [8]: ESQUEMA DE FIBRA <i>DEBONDING</i> (A); E <i>PULL-OUT</i> (B).	25
FIG. 2.3.	LEUNG E LI [14]: (A) EFEITO <i>BENDING</i> NA FIBRA E (B) COMPONENTES DE FORÇA E TENSÃO DE PONTE.	26
FIG. 2.4.	ILUSTRAÇÃO DO EFEITO <i>SNUBBING</i>	27
FIG. 3.1.	ELEMENTO CÚBICO SUJEITO A TENSÕES NAS FACES.	31
FIG. 3.2.	TENSÕES EM UMA FACE DE UM ELEMENTO CÚBICO.	32
FIG. 3.3.	ELEMENTO INFINITESIMAL $dx dy$ DE UM CORPO ELÁSTICO.	33
FIG. 3.4.	DEFORMAÇÕES NO PLANO XY.	34
FIG. 3.5.	TENSÕES EM UM BLOCO RETANGULAR.	37
FIG. 3.6.	TENSÕES NO CONTORNO.	39
FIG. 4.1.	CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO NA EXTREMIDADE DA TRINCA (A).	43
FIG. 4.2.	TRINCA EM MATERIAL FRÁGIL – VIDRO, MATERIAL TESTADO POR GRIFFITH.	44
FIG. 4.3.	MODOS DE CARREGAMENTOS QUE PODEM SER APLICADOS PARA UMA TRINCA.	47
FIG. 4.4.	DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES NA PONTA DA TRINCA; (A) COORDENADAS POLARES E (B) COORDENADAS RETANGULARES.	48
FIG. 4.5.	COMPRIMENTO EFETIVO DA TRINCA $(A+R_0)$ [56].	56
FIG. 4.6.	REGIÃO DE ESCOAMENTO TIPO CUNHA.	57
FIG. 4.7.	TENSÃO X DEFORMAÇÃO.	58
FIG. 4.8.	CAMINHO DA J-INTEGRAL.	59
FIG. 4.9.	VETOR NORMAL AO PLANO INCLINADO.	61
FIG. 5.1.	TRINCA CONSIDERADA – MODO I.	64
FIG. 5.2.	GEOMETRIA DA FIBRA.	64
FIG. 5.3.	ORIENTAÇÃO 3-D RANDÔMICA DA FIBRA ONDE O COMPRIMENTO ENTERRADO TEM SUA PARTE FINAL NA SUPERFÍCIE HEMISFÉRICA E A PROBABILIDADE $P(\theta)$	66
FIG. 5.4.	FIBRA ANTES DA TRINCA ABRIR.	67
FIG. 5.5.	DEFORMAÇÃO DA FIBRA APÓS ABERTURA DA TRINCA.	69

FIG. 5.6.	FIBRA TRATADA COMO UMA VIGA EM BALANÇO.	69
FIG. 5.7.	ANÁLISE GEOMÉTRICA DO DESLOCAMENTO DO CENTRO O.	71
FIG. 5.8.	CURVAS DE DEFORMAÇÃO.	72
FIG. 5.9.	ILUSTRAÇÃO DOS EFEITOS SNUBBING, MATRIZ SPALLING E BENDING.	75
FIG. 5.10.	TRATAMENTO PARA L MUITO PEQUENO.	77
FIG. 5.11.	DEFLEXÃO y_B PROVOCADA NA MATRIZ.	79
FIG. 5.12.	FIBRA/MATRIZ DESCOLAGEM (DEBONDING).	81
FIG. 5.13.	ALONGAMENTO DA FIBRA DURANTE DESCOLAGEM.	82
FIG. 5.14.	PROCESSO PULL-OUT: FIBRA SENDO PUXADA PARA FORA DA MATRIZ.	86
FIG. 5.15.	FORÇA APARENTE RESULTANTE.	88
FIG. 6.1.	A FORMA DEFORMADA DE UMA FIBRA INCLINADA 5° AO NORMAL DO PLANO DA TRINCA.	95
FIG. 6.2.	A FORMA DEFORMADA DE UMA FIBRA INCLINADA 15° AO NORMAL DO PLANO DA TRINCA.	96
FIG. 6.3.	A FORMA DEFORMADA DE UMA FIBRA INCLINADA 30° AO NORMAL DO PLANO DA TRINCA.	96
FIG. 6.4.	A FORMA DEFORMADA DE UMA FIBRA INCLINADA 45° AO NORMAL DO PLANO DA TRINCA.	97
FIG. 6.5.	A FORMA DEFORMADA DE UMA FIBRA INCLINADA 70° AO NORMAL DO PLANO DA TRINCA.	97
FIG. 6.6.	PARA w VARIANDO ATÉ $1,2d_f$ ÂNGULO IGUAL A 30°	98
FIG. 6.7.	PARA w VARIANDO ATÉ $1,2d_f$ ÂNGULO IGUAL A 70°	98
FIG. 6.8.	TÍPICA CURVA DE TENSÃO-DESLOCAMENTO PARA <i>DEBONDING</i> E <i>PULL-OUT</i> PROCESSOS.	99
FIG. 6.9.	PROCESSOS DEBONDING E PULL-OUT COM VARIAÇÃO DO ÂNGULO θ	100
FIG. 6.10.	INFLUÊNCIA DA FORÇA DE LIGAÇÃO τ_0 NOS PROCESSOS DEBONDING E PULL-OUT.	100
FIG. 6.11.	INFLUÊNCIA DO COMPRIMENTO ENTERRADO L_e NOS PROCESSOS DEBONDING E PULL-OUT.	101
FIG. 6.12.	INFLUÊNCIA DO DIÂMETRO d_f DA FIBRA NOS PROCESSOS DEBONDING E PULL-OUT.	101
FIG. 6.13.	INFLUÊNCIA DA TENACIDADE DA INTERFACE G_d NOS PROCESSOS DEBONDING E PULL-OUT.	102
FIG. 6.14.	INFLUÊNCIA DO MÓDULO DE ELASTICIDADE DA FIBRA E_f NOS PROCESSOS DEBONDING E PULL-OUT.	102
FIG. 6.15.	INFLUÊNCIA DO COEFICIENTE DE SNUBBING f NOS PROCESSOS DEBONDING E PULL-OUT.	103
FIG. 6.16.	COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS PROPOSTOS, DADOS EXPERIMENTAIS E MODELO DE ZHANG E LI.	105
FIG. 6.17.	COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS PROPOSTOS, DADOS EXPERIMENTAIS E MODELO DE ZHANG E LI COM $E_m = 2,5 \text{ GPa}$ PARA OS MODELOS PROPOSTOS.	106
FIG. 6.18.	COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS PROPOSTOS, DADOS EXPERIMENTAIS E MODELO DE ZHANG E LI COM $E_f = 480 \text{ GPa}$ PARA OS MODELOS PROPOSTOS.	107
FIG. 6.19.	COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS PROPOSTOS, DADOS EXPERIMENTAIS E MODELO DE ZHANG E LI COM $\sigma_{fu} = 1400 \text{ MPa}$ PARA OS MODELOS PROPOSTOS.	107
FIG. 6.20.	COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS PROPOSTOS, DADOS EXPERIMENTAIS E MODELO DE ZHANG E LI COM $\tau_0 = 2 \text{ MPa}$ PARA OS MODELOS PROPOSTOS.	108

FIG. 6.21. COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS PROPOSTOS, DADOS EXPERIMENTAIS E MODELO DE ZHANG E LI COM $\tau_0 = 4 \text{ MPa}$ PARA OS MODELOS PROPOSTOS.....	108
FIG. 6.22. COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS PROPOSTOS, DADOS EXPERIMENTAIS E MODELO DE ZHANG E LI COM $\tau_0 = 7 \text{ MPa}$ PARA OS MODELOS PROPOSTOS.....	109
FIG. 6.23. COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS PROPOSTOS E O MODELO DE ZHANG E LI COM $G_d = 8 \text{ J/m}^2$	110
FIG. 6.24. COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS PROPOSTOS E O MODELO DE ZHANG E LI COM $G_d = 4 \text{ J/m}^2$	110
FIG. 6.25. COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS PROPOSTOS E O MODELO DE ZHANG E LI COM $G_d = 2 \text{ J/m}^2$	111
FIG. 6.26. COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS PROPOSTOS E O MODELO DE ZHANG E LI COM $L_e = 3 \text{ mm}$..	112
FIG. 6.27. COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS PROPOSTOS E O MODELO DE ZHANG E LI COM $L_e = 15.7 \text{ mm}$...	112
FIG. 6.28. TENSÃO DA MATRIZ COMPOSTA, MODELO PROPOSTO POR MAALEJ ET AL COM DADOS EXPERIMENTAIS.	114
FIG. 6.29. COMPARAÇÃO DA TENSÃO DOS MODELOS 0-II PROPOSTOS COM DADOS EXPERIMENTAIS. MATRIZ COMPOSTA COM 2% DE FIBRAS.	114
FIG. 6.30. PORCENTAGEM DOS ESTADOS DAS FIBRAS PARA O MODELO 0, COMPOSTO KEVLAR/CIMENTO.	116
FIG. 6.31. PORCENTAGEM DOS ESTADOS DAS FIBRAS PARA O MODELO I, COMPOSTO KEVLAR/CIMENTO. ...	116
FIG. 6.32. PORCENTAGEM DOS ESTADOS DAS FIBRAS PARA O MODELO II, COMPOSTO KEVLAR/CIMENTO. ...	117
FIG. 6.33. CURVAS DE TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SiC/GLASS COM 1% DE FIBRAS.	118
FIG. 6.34. PORCENTAGEM DOS ESTADOS DAS FIBRAS PARA O MODELO 0, COMPOSTO SiC/GLASS.....	118
FIG. 6.35. PORCENTAGEM DOS ESTADOS DAS FIBRAS PARA O MODELO I, COMPOSTO SiC/GLASS.	119
FIG. 6.36. PORCENTAGEM DOS ESTADOS DAS FIBRAS PARA O MODELO II, COMPOSTO SiC/GLASS.	119
FIG. 6.37. TENACIDADE PELO COMPRIMENTO DA FIBRA. MODELO II	120
FIG. 6.38. CURVAS DE TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SiC/GLASS COM 1% DE FIBRAS E $L_f = 33 \text{ mm}$	121
FIG. 6.39. PORCENTAGEM DOS ESTADOS DAS FIBRAS PARA O MODELO 0, COMPOSTO SiC/GLASS.....	121
FIG. 6.40. PORCENTAGEM DOS ESTADOS DAS FIBRAS PARA O MODELO I, COMPOSTO SiC/GLASS.	122
FIG. 6.41. PORCENTAGEM DOS ESTADOS DAS FIBRAS PARA O MODELO II, COMPOSTO SiC/GLASS.	122
FIG. 6.42. TENACIDADE E DIÂMETRO DA FIBRA.	123
FIG. 6.43. TENACIDADE E VOLUME DE FIBRAS NO COMPOSTO.....	123
FIG. 6.44. TENACIDADE E TENSÃO CISALHANTE.	124
FIG. 6.45. TENACIDADE E TENACIDADE DA SUPERFÍCIE.	125
FIG. 6.46. TENACIDADE E RESISTÊNCIA DA FIBRA.....	125
FIG. 6.47. TENACIDADE E A RAZÃO E_f/E_m	126
FIG. 6.48. CURVAS DE TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SiC/GLASS COM 1% DE FIBRAS, $L_f = 33 \text{ mm}$ E $d_f = 0,16 \text{ mm}$	127
FIG. 6.49. PORCENTAGEM DOS ESTADOS DAS FIBRAS PARA O MODELO 0, COMPOSTO SiC/GLASS.....	127

FIG. 6.50. PORCENTAGEM DOS ESTADOS DAS FIBRAS PARA O MODELO I, COMPOSTO SiC/GLASS.	128
FIG. 6.51. PORCENTAGEM DOS ESTADOS DAS FIBRAS PARA O MODELO II, COMPOSTO SiC/GLASS.	128
FIG. 6.52. CURVAS DE TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SiC/GLASS COM 1% DE FIBRAS, $L_f = 33mm$ E $d_f = 0,16mm$ E $G_d = 0,08 N/m$	129
FIG. 6.53. PORCENTAGEM DOS ESTADOS DAS FIBRAS PARA O MODELO 0, COMPOSTO SiC/GLASS.	130
FIG. 6.54. PORCENTAGEM DOS ESTADOS DAS FIBRAS PARA O MODELO I, COMPOSTO SiC/GLASS.	130
FIG. 6.55. PORCENTAGEM DOS ESTADOS DAS FIBRAS PARA O MODELO II, COMPOSTO SiC/GLASS.	130
FIG. 6.56. CURVAS DE TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA SiC/GLASS COM 2% DE FIBRAS, $L_f = 33mm$ E $d_f = 0,16mm$ E $G_d = 0,08 N/m$	131

LISTA DE TABELAS

TABELA 5.1. SITUAÇÃO DA FIBRA NA MATRIZ – FLAGS IDENTIFICAÇÕES	74
TABELA 5.2. DIFERENTES MODELOS PARA TRATAMENTO DA TENSÃO σ_f	80
TABELA 6.1. DIMENSÕES E PROPRIEDADES MECÂNICAS DO COMPOSTO DE KEVLAR/CIMENTO.	113
TABELA 6.2. DIMENSÕES E PROPRIEDADES MECÂNICAS DO COMPOSTO SiC/GLASS USADOS PARA TESTAR OS MODELOS.	117

INTRODUÇÃO

O avanço da tecnologia, necessidades econômicas, fatores ambientais tem causado grandes mudanças na utilização de materiais, no sentido de substituir materiais tradicionais da indústria, principalmente os metais, por materiais compostos com melhor desempenho e baixo custo.

Entre eles, a cerâmica avançada tem sido objetivo de estudos nas últimas décadas devido as suas intrínsecas propriedades mecânicas e físicas, como baixa densidade, alta resistência à corrosão e à abrasão, baixa condutividade térmica, resistência a altas temperaturas, ao desgaste e a compressão além de algumas características específicas de algumas cerâmicas como supercondutividade, condutividade iônica e propriedades nucleares. Mas, graças ao avanço do conhecimento científico e tecnológico, a cerâmica vem sendo usada nas mais diversas aplicações da indústria e outras áreas de conhecimento, na qual vale destacar aplicações em áreas que envolvem altas tecnologias como: reatores nucleares, motores automotivos (onde aumentam o rendimento e possibilitam a utilização de combustíveis menos nobres e diesel), turbinas, foguetes, ferramentas de cortes de alta velocidade, materiais de alta resistência à abrasão, refratários especiais, componentes eletrônicos, biomateriais, junta de joelho artificial, implantes dentários, entre outras. A Toyota, empresa automotiva vem pesquisando materiais cerâmicos para aplicações em altas temperaturas em motores a mais de 40 anos, outro exemplo são aplicações de cerâmica em turbinas para produção de energia elétrica, gerando grandes economias.

Apesar de tantas qualidades e aplicações, a cerâmica avançada tem desafiado a ciência devido a sua fragilidade, sendo que uma microtrinca na cerâmica se propaga facilmente quando submetida a ações de tensões. O aprimoramento da fragilidade da cerâmica é alvo de muitas pesquisas ao redor do mundo. A resistência do material à fratura é

mensurada por tenacidade da fratura (*toughening*), sendo a taxa de alívio crítica de energia. Várias características, como resistência ao choque térmico e suscetibilidade ao desgaste erosivo, são controladas por esta propriedade.

Vários mecanismos têm sido desenvolvidos e aperfeiçoados de maneira a aumentar a tenacidade do material, gerando assim, uma nova gama de cerâmicas avançadas, muito mais resistentes e com propriedades diversificadas. Entre os mecanismos, o que mais tem dado resultado é o reforço da cerâmica com micro fibras, dos mais variados materiais, como níquel, nióbio, silício, entre outros materiais considerados dúcteis e que não altere significativamente as propriedades da cerâmica.

Engenheiros de materiais, geralmente, avaliam esses materiais em testes práticos, de diferentes formas e métodos, de maneira a obter cerâmicas avançadas resistentes, testando com diferentes tipos de fibras, nas mais diversificadas propriedades mecânicas, físicas e geométricas. Esses testes práticos acabam por terem custos elevados, exigindo a confecção de equipamentos adequados de alta tecnologia, que agregados ao tempo, mão-de-obra especializada e competente, entre outros fatores, tornam o processo de confecção dos materiais compostos caros, onde poucas instituições conseguem ter laboratórios adequados à essas confecções e testes. Por estas razões, a utilização de simulação e modelagem matemática para desenvolver cerâmica composta de alto desempenho é uma etapa necessária e econômica, pois poderá prever o comportamento do composto de maneira otimizada e trazer a melhor composição que irá propiciar a maior tenacidade.

Uma área que merece destaque é a Mecânica da Fratura. Pois nas últimas décadas tem evoluído muito com a necessidade do ser humano de prevenir e evitar grandes tragédias, como pontes que quebram, cascos de navios que se rompem, entre outros tantos acontecimentos, que acontecem por existirem trincas ou micro trincas nas estruturas provocadas por fadiga, corrosão, entre outros processos mecânicos e físicos.

Assim, cerâmicas avançadas e a Mecânica da Fratura andam juntas em busca de novos conceitos, fórmulas, modelos que possa trazer o melhor benefício à humanidade, propondo materiais de altas resistências a fraturas.

Objetiva-se nesta pesquisa, aplicando as teorias de Mecânica da Elasticidade e da Mecânica da Fratura, propor um modelo matemático que possa calcular as forças e tensões às quais as microfibras estão sujeitas quando uma trinca principal aparece na matriz frágil, assim como a tenacidade que essas fibras irão contribuir para o composto cerâmico.

A metade de cada microfibra, que está cruzando com o plano da trinca, foi tratada como uma viga em balanço, sujeita a uma força axial e uma força cortante na extremidade

livre. Através das fórmulas de deslocamentos da viga elástica, realizou-se a análise da forma geométrica de uma fibra deformada. Ainda com a base da teoria de elasticidade, foram propostos modelos matemáticos para análise dos processos de descolagem (*debonding*) entre uma fibra com a matriz e para quando a fibra é puxada para fora da matriz (*pull-out*). Pelos modelos, calculou-se a resistência aparente de uma única fibra inclinada, sendo está à tensão máxima antes da fibra se romper (*apparent strength*). Ainda, desenvolveram-se os modelos para calcular a tensão gerada por fibras distribuídas aleatoriamente na matriz com dada fração volumétrica (*bridging stress*) e o aumento da tenacidade que as mesmas atribuem ao composto. Para este último, métodos numéricos para o cálculo de integrais triplas e equações de terceira ordem foram utilizados. Nos modelos, quase todas as propriedades mecânicas foram envolvidas. Os resultados foram obtidos através de implementação em MATLAB.

A estrutura desta dissertação é composta de seis capítulos. A princípio, após esta introdução, uma revisão bibliográfica, onde foram observados os mecanismos de tenacificação de materiais cerâmicos e uma breve referência à literatura sobre modelos e experimentos com materiais compostos. Nos dois capítulos posteriores foram feitos embasamentos teóricos sobre as Teorias da Elasticidade e Mecânica da Fratura. Após, o quinto capítulo mostra os detalhes da dedução dos modelos propostos. No capítulo 6, foram mostrados e discutidos os resultados obtidos pela implementação dos modelos em MATLAB e finalmente, no capítulo seis, a conclusão da pesquisa.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Cerâmica compreende todos os materiais inorgânicos, não-metálicos, obtidos geralmente após tratamento térmico em temperaturas elevadas. Incluem óxidos, carbonetos, sulfuretos, e metais compostos, que são juntados por ligações covalentes ou iônicas [1], geralmente por sinterização.

São inúmeras as iniciativas tecnológicas para implementação e adaptação de cerâmicas avançadas adequadas e resistentes as mais diversas aplicações, principalmente na indústria mecânica cuja implementação depende de avanços tecnológicos importantes em tecnologia de materiais.

Por exemplo, uma nave espacial ao entrar na atmosfera terrestre em alta velocidade, gera altas temperaturas e tensões. Também, existem motores em desenvolvimento que trabalham a cerca de 1350°C. Aplicações adicionais futuras exigiram materiais resistentes a temperaturas superiores a 2000°C. Todos os metais, incluindo superligas baseadas em cobalto, são inadequados a estas temperaturas. Somente a cerâmica possui adequada resistência a temperaturas superiores a 1000°C. Tipicamente a cerâmica possui alto ponto de fusão, o que explica suas excelentes propriedades como altíssima dureza, resistência à corrosão, ao desgaste, além de baixa densidade.

No entanto, os materiais cerâmicos são muito frágeis para as aplicações onde acontece tensões altas ou carga de impacto. Tradicionalmente as cerâmicas são de única fase (monolítico) e possuem baixa tenacidade, ou seja, possui uma baixa energia de fratura, estando sujeitas a fácil propagação de trincas.

Consequentemente há numerosas pesquisas para melhorar a tenacidade de materiais cerâmicos, na qual, são altos os investimentos. Além do problema de tenacidade, a cerâmica ainda tem mais dois problemas inerentes a ser resolvidos: a dificuldade para ser usinada e a

difficuldade para o controle de tamanho desejado devido ao processo de queima na confecção da mesma.

2.1 Mecanismos de tenacificação

Uma nova geração de cerâmicas está sendo aperfeiçoada, incluindo materiais multifases e cerâmicas compostas que têm sua tenacidade muito melhorada. Sob certas condições, dois materiais frágeis podem ser combinados para produzir um material mais resistente e mais dúctil que seus materiais originais.

Os micros mecanismos [2][3][4][5] que levam a melhorar a resistência da fratura em cerâmicas modernas são conhecidos como tenacificação por microtrincas, tenacificação por transformação de fases, tenacificação por partículas e tenacificação por micro fibras ou bigodes (whisker). A tenacificação da cerâmica com micro fibras mostra alta eficácia no melhoramento de resistência à fratura.

2.1.1. Tenacificação por microtrincas

Embora a formação de trincas em materiais geralmente causa danos, as microtrincas podem às vezes aumentar a tenacidade do material. Mas o maior problema nesse processo é o que considera o crescimento da microtrinca *estável*, o que não acontece em materiais frágeis. As falhas pré-existentes nos materiais permanecem estáveis até satisfazer o critério de Griffith (seção 4.2), depois se tornam instáveis.

Este processo é relativamente ineficaz, além disso, o grau de tenacificação por microtrincas depende da temperatura. Também, tensões residuais baixas não podem prevenir as microtrincas de ficarem instáveis e se propagarem.

2.1.2. Tenacificação por transformação de fases

Alguns materiais cerâmicos experimentam uma tensão de compressão induzida por uma transformação martensita que resulta nas mudanças de volume e forma (isto é, um

aumento na deformação). Cerâmicas que contêm partículas na segunda fase transformadas muitas vezes podem aumentar a tenacidade.

A tensão de transformação e de deformação depende da temperatura e, conseqüentemente, tenacificação por transformação também depende da temperatura. Abaixo da temperatura inicial da martensita, a transformação ocorre espontaneamente, e a tensão de transformação é basicamente zero. Acima da temperatura de martensita a tensão de transformação aumenta com a temperatura. Quando a tensão é suficientemente grande, pode provocar microtrincas ao redor da partícula. O mecanismo de tenacificação por transformação não produz grande efeito.

2.1.3. Tenacificação por partículas

Compostos cerâmicos com partículas dúcteis mostram um aumento na tenacidade devido à deformação plástica das partículas na zona da trinca e à ruptura das partículas que estão no plano da trinca. O grau de tenacificação depende diretamente da resistência de ligação das partículas com a matriz, do volume, tamanho e suas propriedades mecânicas de partículas. A tensão residual nas partículas também pode adicionar tenacidade ao material.

Esse mecanismo de tenacificação também depende da temperatura, pois as partículas metálicas variam suas propriedades com variação de temperatura. As partículas de fases dúcteis são, obviamente, inadequadas para os compostos que serão utilizados no ambiente de temperaturas que ultrapassem o ponto de fusão das partículas.

2.1.4. Tenacificação por micro fibras e whiskers

Cerâmicas reforçadas por bigodes (*whiskers*) apresentam tenacidades relativamente altas, mas não tão efetivas quanto reforçadas com microfibras. Esses materiais falham pela pouca ligação entre suas superfícies e matriz, e podem causar um desvio da trinca. A deflexão da trinca também aumenta um pouco a tenacidade.

O mecanismo de tenacificação por micro fibras resulta em materiais compostos com altas tenacidades, certamente é o mecanismo mais eficiente, devido principalmente a excelente força de ligação de suas superfícies com a matriz, que contribui a tenacificação em todos os processos, desde a descolagem a quebra da fibra.

2.2 Modelos Matemáticos para Calcular a Tenacificação por Micro Fibras

Existem muitos pesquisadores dedicados ao estudo dos efeitos da adição de fibras em materiais compostos quando uma trinca principal se propaga. Há vários modelos na literatura para prever o comportamento desses materiais.

Os modelos para prever o aumento de tenacidade estão envolvidos diretamente com a relação de tensão proveniente por fibras (*tensão de ponte ou bridging stress*) com a abertura da trinca, baseando-se em vários processos e efeitos como descolagem da interface fibra/matriz (*debonding*), fibra sendo puxada para fora da matriz (*pull-out*) ou escorregamento (*slip*), a máxima tensão suportada pela fibra antes do rompimento (*apparent strength*). O tipo de fibra considerada, dúctil ou frágil, é de extrema importância para avaliar a tensão de ponte que as mesmas agregam ao composto.

A fibra ao ser submetida a um carregamento pode atingir sua tensão de resistência máxima e romper. O rompimento também pode depender da capacidade de deformação (ductilidade) da fibra. Fibra de carbono (frágeis) pode romper antes de atingir sua capacidade máxima de resistência, dependendo de vários fatores agregados ao sistema.

LI, WANG e BACKER [6] fizeram exploração do processo *pull-out* formulando modelo para prever o comportamento da tensão de ponte com a abertura da trinca após propagação (post-cracking) em composto frágil com fibras randomicamente distribuídas. Para microfibras elásticas com trinca de propagação plana, não considerando efeitos como a deformação localizada da matriz no ponto onde a fibra sai da matriz e efeito de Poisson. Baseado nisso, LI [7] propôs o modelo chamado “*constant- τ model*”, tratando o atrito da interface fibra/matriz constante, que prevê o comportamento da tensão-deslocamento após propagação da trinca e a energia de fratura *pull-out* determinadas experimentalmente para compostos de cimento para vários tipos de fibras (aço, carbono e sintéticas) com parâmetros micro-mecânicos variados. Para LIN e LI [8], há discordância no uso do modelo τ constante para sistemas fibra/matriz com forte escorregamento (*slip*) na interface, especialmente para trincas que atingem o máximo da tensão de ponte, assim deduziram um modelo com a tensão de cisalhamento na interface variando em função dos deslocamentos por escorregamento da fibra na matriz.

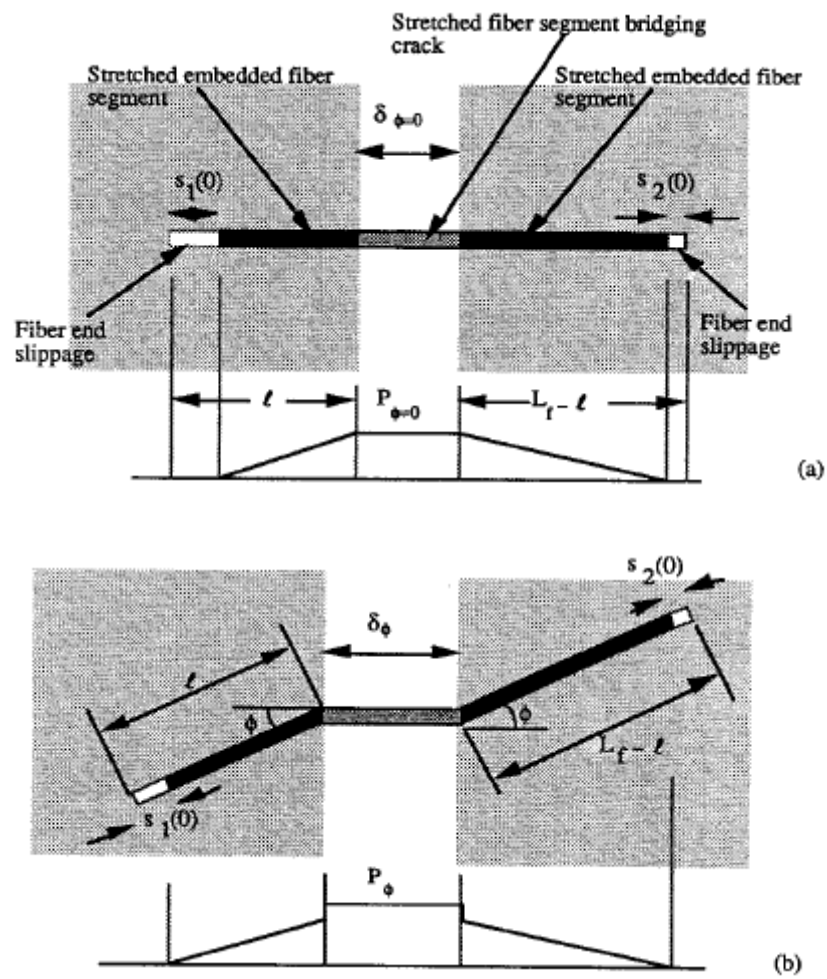


Fig. 2.1. LI, WANG e BACKER [6]: pull-out para comprimento enterrado ℓ . (a) para fibra alinhada com a força axial; (b) fibra com orientação arbitrária.

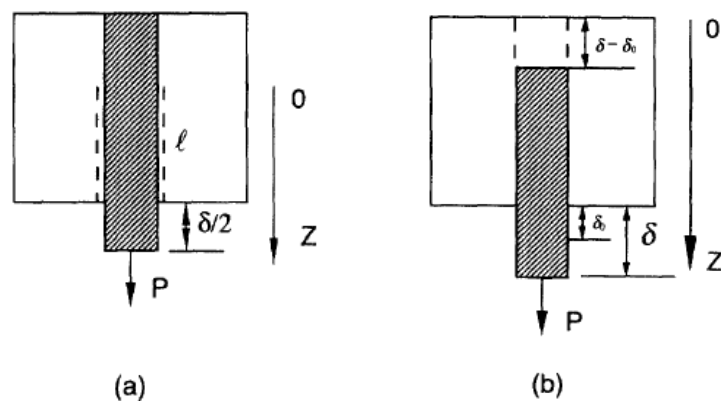


Fig. 2.2. LIN e LI [8]: Esquema de fibra *debonding* (a); e *pull-out* (b).

O estudo da força de atrito variado já havia sido explorado em um modelo de *pull-out* para matriz de cimento por WANG, LI e BACKER [9] para fibras de náilon, polipropileno e aço, obtendo bons resultados comparados com dados experimentais, tratando o atrito entre fibra/matriz como uma função quadrática dependente da distância escorregada (*slip*). GAO, WING e COTTERELL [10] exploraram a influência da força de atrito no processo de descolagem comparando o modelo com dados experimentais de um composto de fibras de aço e resina.

MARSHALL e COX [11] fizeram exploração da influência do comprimento da fibra para bringing stress, LIN, KANDA e LI [12] desenvolveram modelos para micro-mecanismos que caracterizam as propriedades da interface para uma fibra em *pull-out* (*single fiber pull-out test*) como a energia de fratura (*fracture toughness*), tensão de cisalhamento (*frictional bond*) e coeficiente slip-hardening. A tensão cisalhante é considerada constante, mas atribuem a tenacidade da interface (*chemical bond*) ao modelo, uma propriedade que influencia o processo de descolagem da fibra/matriz. MAALEJ, LI e SASHIDA [13], elaboraram um modelo que prevê o comportamento da tensão e energia de fratura no composto, considerando *pull-out*, tensão de ruptura da fibra, e o atrito local imediatamente antes da saída da fibra da matriz (coeficiente *snubbing*). LEUNG e LI [14] pesquisaram o efeito da inclinação na fibra na tensão do composto (bridging stress) considerando efeito *bending* (fibra curvada na saída da matriz como se fosse uma corda passando por uma polia), fundação elástica da matriz e possível *spalling* (quebra local da matriz imediatamente na saída da fibra), sendo que o tamanho da fundação elástica e o spalling foram analisados pelo Método de Elementos Finitos.

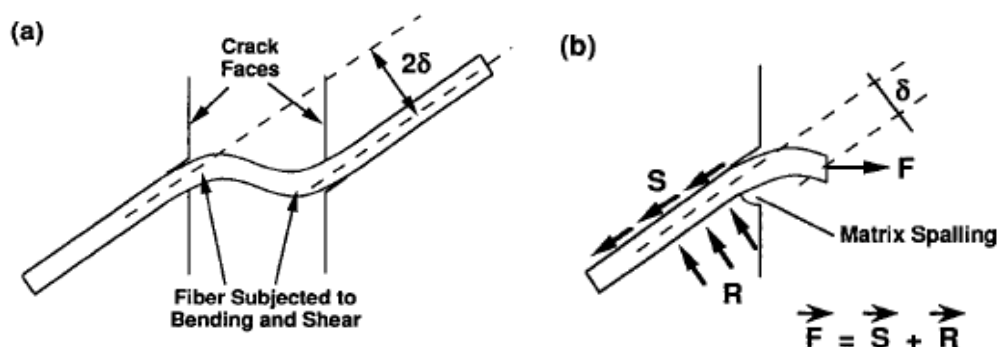


Fig. 2.3. LEUNG e LI [14]: (a) Efeito *bending* na fibra e (b) componentes de força e tensão de ponte.

ZHANG e LI [15] trataram em seu modelo o efeito do ângulo de inclinação na tensão de ruptura da fibra (*apparent strength*), usaram dados experimentais de matriz composta de

cimento com fibras de carbono, confirmando a degradação na tensão de ruptura da fibra a medida que o ângulo aumenta, influenciada pela elasticidade da fibra e da matriz e a força cisalhante entre fibra/matriz. No modelo deles trata-se a parte da fibra enterrada na matriz como uma viga elástica sobre uma fundação elástica e infinita, usando a solução clássica de TIMOSHENKO [16]. Essa solução também foi introduzida no trabalho de KATZ e LI [17]. Destaca-se que essa solução é baseada na hipótese que a fibra tem o suporte completo, ou seja, a fibra não é inclinada. Ainda não se encontrou a solução analítica para o caso da fibra inclinada.

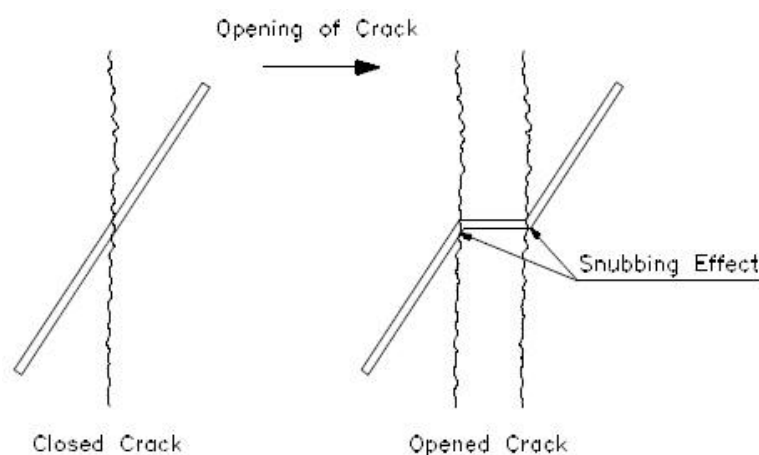


Fig. 2.4. Ilustração do Efeito *snubbing*.

MORTON e GROVES [18] sugeriram que a força ao longo da fibra metálica pode ser calculada na base da teoria de junta plástica e que no ponto da saída da fibra da matriz, a pressão na matriz pode ser calculada pela rigidez Vickers multiplicando o diâmetro da fibra.

Ainda há muitos outros trabalhos envolvendo compostos de cimentos que merecem atenção como LI e WU [19], KATZ, LI e KAZMER [20], STANG, LI e KRENCHER [21], LI e MAALEJ [22], LI e LEUNG [23],[24],[25],[26], BRANT [27],[28], MOBASHER, OUYANG e SHAH [29], LI e CHAN [30], SHAH e OUYANG [31], LI, WANG e BACKER [32], NELSON, LI e KAMADA [33], WANG e LI [34] e LIU, TAO e GUO [35].

Os princípios da modelagem matemática em cerâmicos compostos são os mesmos que compostos de cimentos, no entanto possuem carência de modelos, pois a confecção da cerâmica através da sinterização dificulta a análise de algumas propriedades da interface como coeficiente de atrito, tensão de cisalhamento e tenacidade à fratura da interface. Além disso, a sinterização pode provocar, na cerâmica composta, tensões residuais notáveis causadas pelos coeficientes de dilatação térmica incompatíveis entre matriz e a fibra. Tudo isso complica o modelo matemático para a tenacificação de cerâmica.

CHARALAMBIDES e EVANS [36] analisaram a descolagem das interfaces fibra/matriz sujeita a tensão residual (*residual stress*). Outros pesquisadores como BUDIANSKY, JOHN e EVANS [37], MARSHALL, COX e EVANS [38], KERANS e PARTHASARATHY [39], NAIR [40], EVANS, HE e HUTCHINSON [41] também propõe modelos da tenacificação de compostos cerâmicos baseados em tensão residual e atrito, analisando os processo de descolagem e arrancamento da fibra/matriz.

2.3 Determinação Experimental do Comportamento de Tração do Material Reforçado por Micro Fibras

Existem vários resultados experimentais nas literaturas que representam o comportamento de materiais compostos, principalmente para compostos de cimentos com fibras. Como já mencionados, resultados experimentais com cerâmicas agregam alguns fatores que dificultam o estudo das propriedades mecânicas. Sendo que as referências encontradas envolvem tensões residuais e propriedades da interface fibra/matriz, e também envolve outros mecanismos, como mudança de fases que podem alterar as propriedades mecânicas dos materiais envolvidos. Abaixo, alguns trabalhos experimentais são mencionados.

MORTON e GROVES [18] fizeram vários experimentos para *debonding*, *pull-out* e atrito na interface, analisando efeito de fibras de cobre, níquel e aço de orientação oblíqua a face da trinca em matriz de resina (poliéster) e propuseram que a fibra inclinada pode ser dividida em duas partes iguais pelo centro da trinca, considerando simetria na trinca. Uma parte enterrada na matriz e uma parte livre (como uma viga em balanço). KATZ e LI [42], OUYANG, PACIOS e SHAH [43] examinaram a influência da inclinação da fibra no pico de tensão no processo de *pull-out* para várias fibras de aço e carbono em matrizes de cimento. WANG, LI e BACKER [44] analisaram o comportamento da tensão de ponte em compostos de cimento com fibras sintéticas. YANG, MURA e SHAH [45] observaram uma porcentagem volumétrica crítica de fibras de aço em matriz de cimento em seus testes. Quando a porcentagem de fibras no composto é menor que o valor crítico, a descolagem ocorre antes da propagação da trinca, se maior, a descolagem não ocorre antes. Tal fração volumétrica de fibras no composto depende das propriedades da fibra e matriz e da ligação das interfaces (bond character of the interface). KANDA e LI [46] fizeram experimentos com bases de cimentos e fibras hidrófilas (hydrophilic) analisando as propriedades da interface fibra/matriz

e tensão aparente (apparent strength), testes de *pull-out* para estudo da força de ligação (bond) e para tensão de ruptura da fibra. CAO et al [47] estudaram as propriedades mecânicas de matrizes compostas de vidro, cerâmica e vidro-cerâmica com fibras de carbono e Nicalon. Observado a tensão residual causada pelo esfriamento e pela mudança de fase da cerâmica. ZHAI et al [48] focalizam estudos no conceito de que mecanismos de tenacificação em compostos cerâmicos dependem da orientação das fibras e que a combinação de efeitos causados por múltiplos mecanismos estão associados com a distribuição aleatória das fibras.

FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DO MEIO CONTÍNUO

A mecânica elástica estuda as tensões, deformações e deslocamentos de um grupo elástico causados por ação de forças externas e/ou mudança de temperatura. Este capítulo é baseado em THIMOSHENKO e GOODIER [49].

Tais tensões, deformações e deslocamentos são analisados mediante a adoção das hipóteses básicas da teoria clássica:

- i) A matéria de um corpo é distribuída continuamente, isto é, não se considera a micro estrutura do material com grãos de cristais, poros, vácuo, fissura, etc. Assim, as tensões, deformações e deslocamentos são contínuos;
- ii) A matéria é homogênea (mesmas propriedades físicas para quaisquer elementos retirados de qualquer parte do corpo) e isotrópica (as propriedades físicas são as mesmas em todas as direções);

Os materiais estruturais não satisfazem completamente às hipóteses acima. O aço, por exemplo, apresenta-se constituído de cristais de várias espécies e com diversas orientações. Desta forma não é homogêneo por microscopia. No entanto, desde que as dimensões geométricas de um corpo elástico sejam muito grandes em comparação com as dimensões de um único cristal, a hipótese da homogeneidade pode ser usada com grande precisão e, se os cristais forem orientados aleatoriamente, o material pode ser tratado como isotrópico [49].

3.1 Notação para forças e tensões

Geralmente as forças externas que atuam sobre um corpo elástico são classificadas em dois tipos. As *forças de superfícies*, que são distribuídas sobre a superfície do corpo, tais como a pressão de um corpo sobre o outro ou a pressão hidrostática, e as *forças de massa* ou *forças de volume*, distribuídas pelo volume do corpo, como forças gravitacionais, magnéticas, ou forças de inércia, no caso de um corpo em movimento. A força de superfície por unidade de área pode ser decomposta em três componentes paralelas aos eixos coordenados cartesianos x , y , z , notadas por $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$. A força de massa por unidade de volume também pode ser decomposta em três componentes, designadas por X , Y , Z .

As letras σ e τ são usadas para representar, respectivamente, a tensão normal e a tensão cisalhante, sendo que, para identificar a direção do plano no qual a tensão está atuando, são usados índices subscritos a estas letras. Considerando um elemento cúbico muito pequeno num ponto P (Fig. 3.1), com faces paralelas aos eixos coordenados.

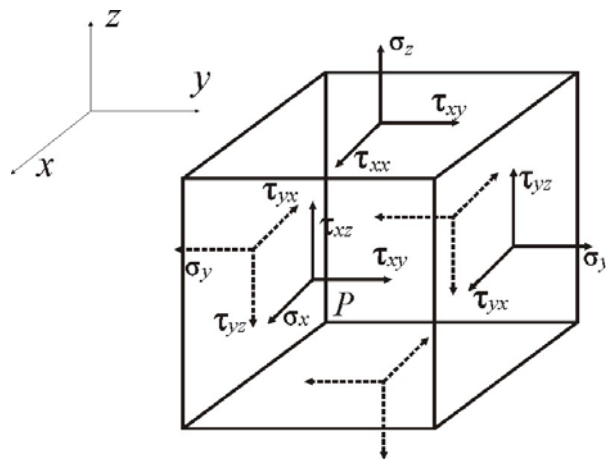


Fig. 3.1. Elemento cúbico sujeito a tensões nas faces

Para as faces do elemento perpendiculares ao eixo y , por exemplo, as componentes normais da tensão são designadas por σ_y . o índice y indica a ação da tensão num plano normal ao eixo y . A tensão normal será positiva quando produzir tração, e negativa no caso de compressão.

A tensão de cisalhamento é decomposta em duas componentes que são paralelas aos outros dois eixos coordenados. Usam-se duas letras subscritas, a primeira indica a direção da normal ao plano considerado e a segunda a direção da componente da tensão. Os sentidos positivos das componentes da tensão cisalhante em uma face do elemento cúbico são tomados

como os sentidos positivos dos eixos coordenados se uma tensão de tração na mesma face tiver o sentido do eixo correspondente. Se a tensão de tração tiver sentido oposto ao eixo positivo, os sentidos positivos das componentes da tensão de cisalhamento devem ser invertidos.

3.2 Componentes de tensões

O estado de tensões em um ponto é um tensor de 9 componentes no espaço: σ_x , σ_y e σ_z para indicar as tensões normais e τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} e τ_{zy} para as tensões cisalhantes. Em cima de cada uma das seis faces de um cubo elementar há uma tensão normal e duas tensões de cisalhamento. Quando não houver momento corporal, pode-se provar que somente três das seis de tensões de cisalhamento são independentes. Portanto, para duas faces perpendiculares de um elemento cúbico, as componentes da tensão de cisalhamento perpendiculares à linha de intersecção destas faces são iguais (Fig. 3.2). Isto é:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \quad (3.1)$$

Fig. 3.2. Tensões em uma face de um elemento cúbico

Diante disso, as seis *componentes de tensão* σ_x , σ_y , σ_z , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ são suficientes para descrever o estado de tensões de um ponto.

3.3 Componentes de deformação

Considera-se a deformação de um cubo elementar. A Fig. 3.3 mostra a face infinitesimal $dx dy$, enquanto a Fig. 3.4 observa-se o que acontece com este corpo após sofrer a deformação no plano xy , onde

$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$: é o deslocamento linear de A na direção x ;

$v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$: é o deslocamento linear de B na direção y ;

$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$: é o deslocamento angular de A na direção y ;

$u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$: é o deslocamento angular de B na direção x ;

u : é a componente do deslocamento de P na direção x ;

v : é a componente do deslocamento de P na direção y .

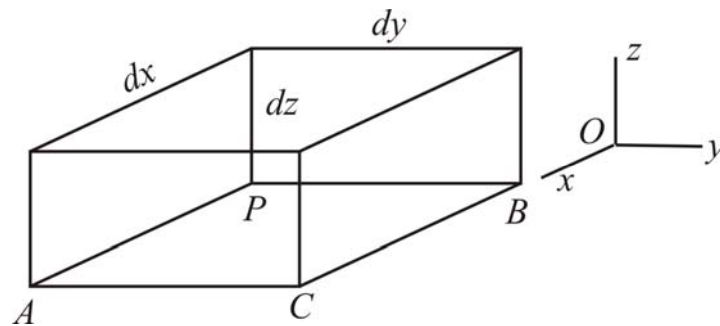


Fig. 3.3. Elemento infinitesimal $dx dy$ de um corpo elástico.

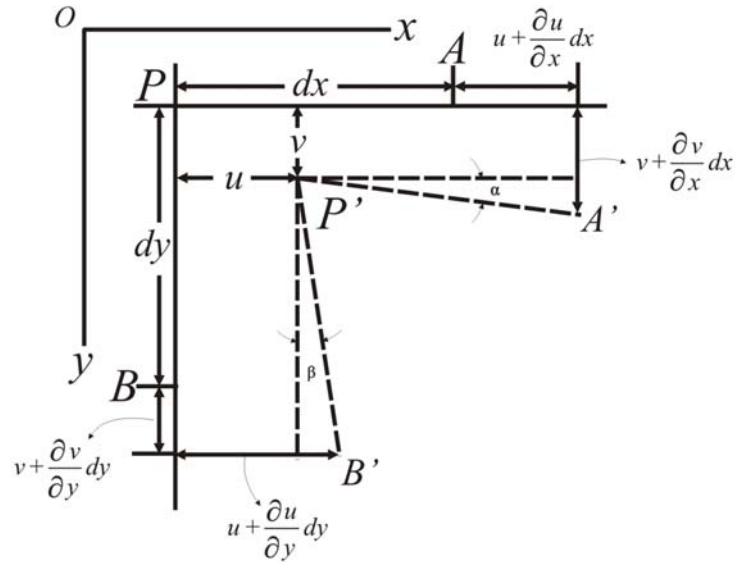


Fig. 3.4. Deformações no plano xy

Observa-se pela figura acima que o aumento no comprimento do elemento PA devido à deformação é $(\partial u / \partial x) dx$. Consequentemente, o alongamento unitário ou deformação linear unitária no ponto P , na direção x é $\partial u / \partial x$. Do mesmo modo, os alongamentos unitários nas direções y e z , são, respectivamente, $\partial v / \partial y$ e $\partial w / \partial z$.

Verifica-se ainda que o ângulo inicialmente reto APB sofreu redução do ângulo $\partial v / \partial x + \partial u / \partial y$, chamado de *deformação angular* ou *deformação por cisalhamento* ou *distorção* entre os planos xy e yz . Da mesma maneira pode-se obter as distorções entre os planos xy e xz e entre os planos yx e yz .

Representando o alongamento unitário ou *deformação normal específica* pela letra ϵ e a deformação angular por γ e, ainda usando os mesmo índices das componentes de tensão para indicar as direções tem-se as *componentes de deformação*

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.4 Equações Constitutivas: Lei de Hooke

As relações lineares entre as componentes de tensão e as componentes de deformação são conhecidas como *Lei de Hooke*. Por exemplo, no ensaio de tração tem-se um alongamento unitário na direção x na forma

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (3.3)$$

Onde E é o *módulo de elasticidade longitudinal* na tração. Na engenharia estrutural, os materiais utilizados possuem módulos de elasticidade muito grandes comparados com as tensões admissíveis, sendo o alongamento unitário (3.3) uma quantidade muito pequena.

O alongamento unitário na direção x é acompanhado por componentes laterais de deformação (contrações) nas direções y e z

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (3.4)$$

em que ν é o *coeficiente de Poisson*, em que em muitos materiais é considerado igual a 0,25.

Se o elemento considerado estiver sujeito à ação simultânea das tensões normais σ_x , σ_y e σ_z , uniformemente distribuídas sobre as faces, e se os alongamentos e contrações produzidos por cada uma das três tensões forem superpostos, então obtém-se as componentes de deformação lineares

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z) \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Que estabelecem a relação entre as deformações lineares e as tensões normais, definidas pelas constantes físicas E e ν .

Tem-se também a relação entre as deformações angulares e as tensões cisalhantes em função de E e ν que são do modo

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (3.6)$$

Onde $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ é o *módulo de elasticidade transversal* ou *módulo de rigidez* ou *de corte*.

No caso de um *estado plano de tensão*, ou seja, quando atuam no corpo somente as componentes de tensão σ_x , σ_y e τ_{xy} , são consideradas somente as componentes de deformação

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.5 Equações diferenciais de equilíbrio

Considera-se agora um pequeno bloco retangular em equilíbrio com espessura unitária e arestas h e k (Fig. 3.5). As tensões que atuam nas faces 1, 2, 3 e 4 e seus sentidos positivos, são indicados na figura.

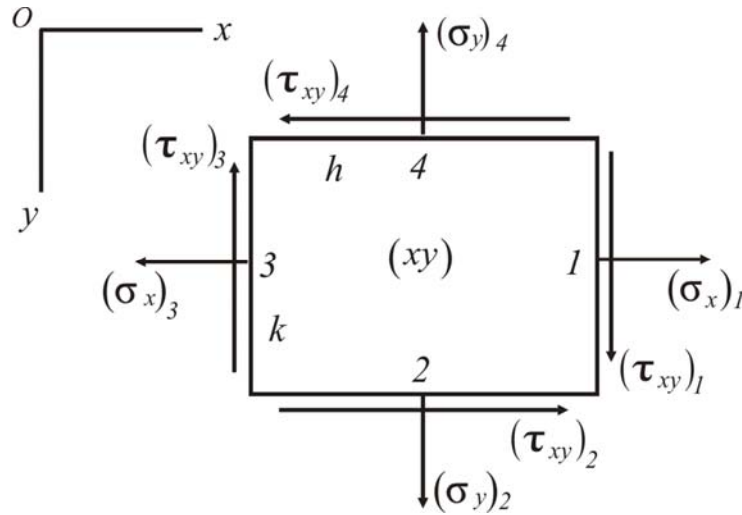


Fig. 3.5. Tensões em um bloco retangular

Neste caso a força de massa no bloco deve ser considerada por ser da mesma ordem de grandeza que os termos relativos às variações das componentes de tensão que agora são considerados.

Notando por X e Y as componentes da força de massa por unidade de volume, a equação de equilíbrio para as forças na direção x : $\sum F_x = 0$, é da forma

$$(\sigma_x)_1 k - (\sigma_x)_3 k + (\tau_{xy})_2 h - (\tau_{xy})_4 h + Xhk = 0 \quad (3.8)$$

Ou, dividindo por hk ,

$$\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{h} + \frac{(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4}{k} + X = 0 \quad (3.9)$$

Se à medida que o tamanho do bloco fica cada vez menor, isto é, $h \rightarrow 0$ e $k \rightarrow 0$, pela definição de derivada tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3]}{h} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{[(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4]}{k} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde σ_x , σ_y , τ_{xy} se referem ao ponto de centro do retângulo da Fig. 3.5, de coordenadas x e y .

De mesmo modo pode ser obtido a equação de equilíbrio para as forças nas direção y : $\sum F_y = 0$, ou seja

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0\end{aligned}\tag{3.11}$$

Geralmente, em muitas aplicações práticas, peso do corpo é a única força de massa. Então, tomando o eixo y dirigido para baixo e chamando ρ a massa por unidade de volume do sólido, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g &= 0\end{aligned}\tag{3.12}$$

Sendo estas as equações diferenciais de equilíbrios para problemas bidimensionais.

3.6 Condições de contorno

É necessário que as Equações (3.11) ou (3.12) sejam satisfeitas em todos os pontos do corpo. As componentes de tensão variam ao longo do volume e, no contorno, é preciso que elas estejam em equilíbrio com as forças externas, e de tal forma que estas se confundam com uma continuação da distribuição interna de tensões. Tomando o pequeno prisma triangular PBC (Fig. 3.6), de tal modo que o lado BC coincida com o bordo do elemento, como mostra a Fig. 3.7, e denotando por $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ as componentes das forças de superfícies por unidade de área neste ponto do contorno, tem-se

$$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} \quad (3.13)$$

$$\bar{Y} = m\sigma_y + l\tau_{xy}$$

nos quais l e m são os co-senos diretores da normal N ao contorno. As equações (3.13) representam as condições de contorno a serem consideradas.

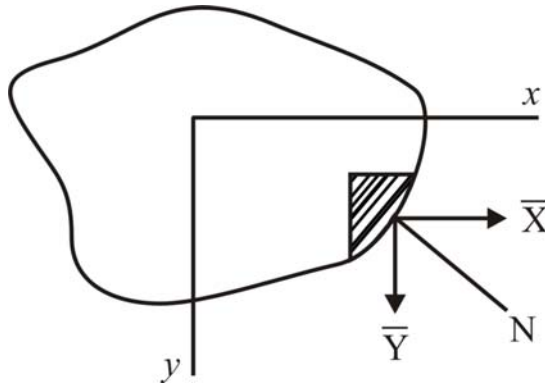


Fig. 3.6. Tensões no contorno

3.7 Equações e compatibilidade

Determinar o estado de tensões num corpo submetido à ação de determinadas forças é um problema fundamental da teoria da elasticidade.

No problema bidimensional é necessário resolver as equações diferenciais de equilíbrio, cuja solução deve satisfazer as condições de contorno e também considerar a deformação elástica do sólido.

As funções u e v que determinam as deformações $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ através das expressões (3.2), devem satisfazer a *condição de compatibilidade* em termos das componentes de deformação, da forma

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.14)$$

Na verdade, essa condição garante a continuidade do campo de deslocamentos.

Pode-se representar a equação de compatibilidade numa relação entre as componentes de tensão. Para isso deve-se substituir na equação (3.14), as equações (3.7) – Lei de Hooke. Assim,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = 2(1 + \nu)\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \quad (3.15)$$

Esta equação pode ser escrita numa forma diferente usando-se as equações diferenciais de equilíbrio. Para isso, derivando a primeira equação das equações (3.12) em relação à x, a segunda em relação à y e, somando-as, temos

$$2\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} \quad (3.16)$$

Substituindo a equação (3.16) na equação (3.15) chega-se em

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (3.17)$$

Que é a equação de compatibilidade em termos das componentes de tensão.

3.8 Resolução de problemas de mecânica elástica

As equações de equilíbrio (3.12) juntamente com as condições de contorno (3.13) e uma das equações de compatibilidade, (3.14) ou (3.17), fornecem um sistema de equações que usualmente é suficiente para a completa determinação da distribuição de tensões no problema bidimensional.

3.8.1 Função de tensão

Foi mostrado que a solução de problemas bidimensionais se reduz à integração das equações diferenciais de equilíbrio de forma à equação de compatibilidade e às condições de contorno. O método usual de resolução destas equações consiste na introdução de uma nova função, denominada *função de tensão de Airy*.

Assim, desprezando o peso do sólido, introduz-se a tensão de Airy $\psi(x, y)$ e adota-se para as componentes de tensão as expressões

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \quad (3.18)$$

que, como se pode provar, satisfazem as equações (3.12).

Desta forma, pode-se obter várias soluções das equações de equilíbrio (3.12). no entanto, a solução verdadeira do problema é aquela que satisfaz as condições de contorno (3.13) e a equação de compatibilidade (3.17) .

Então, substituindo as expressões (3.18) na equação (3.17), verifica-se que a função de tensão $\psi(x, y)$ deve satisfazer a equação

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0 \quad (3.19)$$

Designado o operador Laplaciano $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ por ∇^2 tem-se, da equação (3.17), que $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$. Portanto, a equação (3.19) pode ser escrita como uma equação bi-harmônica da forma

$$\nabla^4 \psi = \nabla^2(\nabla^2 \psi) = 0 \quad (3.20)$$

FUNDAMENTO DA MECÂNICA DA FRATURA

Devido às necessidades da humanidade de evitar grandes tragédias como pontes que desabam, tanques que se rompem, rupturas em navios, entre outras, causadas por propagação de trincas gerada por fadiga, corrosão, propagação de microtrincas existentes no material, surgiu a Mecânica da Fratura, com o intuito de estudar sobre a lei de propagação de trincas em materiais, bem como avaliar a resistência de estruturas que contêm trincas.

Em geral, os materiais são susceptíveis ao desenvolvimento de danos, ou seja, micro defeitos distribuídos continuamente na matéria. De diâmetro milimétrico, são danos como discordância, micro fissuras, micro poros e originados da plasticidade do material. Microtrincas podem ser iniciadas por desenvolvimento de dano como também da fadiga, erosão e radiação.

Alan Arnold Griffith (1926) iniciou os estudos da mecânica da fratura com base na lei de conservação de energia, estabelecendo uma relação entre a fratura e o comprimento da trinca. Anos após, o estudo da fratura tomou nova dimensão com o grande desenvolvimento da indústria de navios e aviões. A mecânica da fratura obteve avanço rápido com o conceito introduzido por George Rankin Irwin (1948), de fator de intensidade de tensão, reformulando as idéias de Griffith, permitindo sua aplicação na engenharia. Na década de 1960, Paris, Sih e Erdogan mostraram que, no processo de fadiga, a velocidade de propagação de uma trinca pode ser expressa utilizando-se o conceito de variação do fator de intensidade de tensão e Rice & Hutchinson (1968), formularam as bases da Mecânica da Fratura não linear.

4.1. Resistência dos materiais – Paradoxo

Conforme Inglis (1913), num corpo infinito com um furo elíptico, a tensão na extremidade do furo vale (fig. 4.1)

$$\sigma|_A = (\sigma_y)_{\text{máx}} = \sigma \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) \approx \sigma \left(1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (4.21)$$

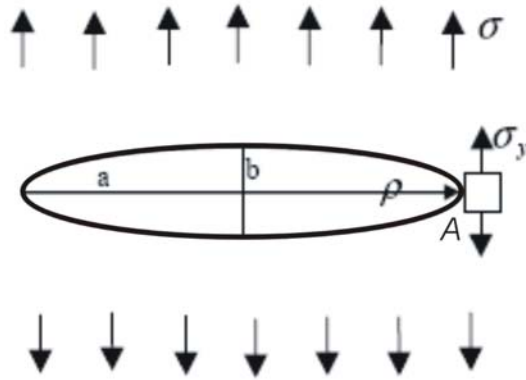


Fig. 4.1. Concentração de tensão na extremidade da trinca (A).

Se pensarmos que tal furo é redondo ($a = b$), temos $\sigma_y = 3\sigma$. No entanto, quando $\rho = 0$ temos $\sigma_y \rightarrow \infty$. Portanto, independente do tamanho da trinca, sua orientação, carga externa, as tensões atingiriam valores infinitamente altos. Tal afirmação põe em cheque todos os conceitos da Resistência dos Materiais, pois se sabe que todos os corpos possuem algum tipo de defeito. Logo todos os materiais entrariam em colapso sob qualquer solicitação, o que não faz sentido físico.

Tal paradoxo, que sugere que nenhuma estrutura com defeitos, por menor que sejam, é capaz de resistir a mínimos esforços, só se desfez com o estabelecimento dos princípios da Mecânica da Fratura. A idéia fundamental da Mecânica da Fratura, lançada em 1926 por Griffith, consiste em estabelecer uma relação da resistência à fratura com o tamanho da trinca, fato ignorado na dedução de Inglis, pois era unicamente baseada nos conceitos clássicos da Resistência dos Materiais.

4.2. Teoria Griffith

Na década de 1920 [50][51], Griffith estudou as trincas em material frágil, mais especificamente no vidro (fig. 4.2).

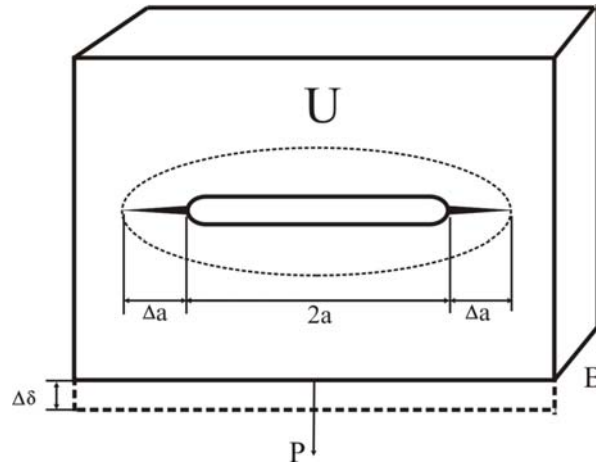


Fig. 4.2. Trinca em material frágil – Vidro, Material testado por Griffith.

A energia referente às superfícies novas é dada por

$$\Delta R = \gamma_s \Delta S = \gamma_s 4B\Delta a \quad (4.22)$$

onde γ_s é a energia de superfície por unidade de área (depende do material) e ΔS é a nova superfície total formada pela propagação da trinca.

Pelo equilíbrio de energia tem-se

$$P\Delta\delta = \Delta R + \Delta U \quad (4.23)$$

Onde $P\Delta\delta$ é o trabalho feito pela força externa; ΔU é a variação da energia de deformação.

Pela equação (4.23) obtém-se

$$-(\Delta U - P\Delta\delta) = \Delta R \quad (4.24)$$

Notando $\Delta A = 2B\Delta a$ como o incremento da área da seção fraturada, pode-se ter

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} - \left(\frac{\Delta U - P \Delta \delta}{\Delta A} \right) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta S} \quad (4.25)$$

Notando agora G_I como sendo o lado esquerdo da equação (4.25), chega-se em

$$G_I = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} - \left[\frac{(\Delta U - P \Delta \delta)}{\Delta A} \right] = - \frac{\partial U}{\partial A} + P \frac{\partial \delta}{\partial A} \quad (4.26)$$

E obtém-se

$$G_I = 2\gamma_s \quad (4.27)$$

Sendo G_I a taxa de liberação da energia de deformação quando a trinca propaga e representa fisicamente a resistência à fratura do material (ou *tenacidade*). É a força motriz da trinca.

Assim, a condição necessária para o início de propagação da trinca é

$$G_I > G_{IC} \quad (4.28)$$

mas não permite saber se a propagação continuará.

Uma propagação continuada denomina-se de propagação instável, e ocorrerá desde que a próxima equação seja satisfeita

$$\frac{\partial G}{\partial A} > \frac{\partial G_{IC}}{\partial A} \quad (4.29)$$

No entanto, observa-se que para um material que obedece a Griffith, $\partial G_{IC} / \partial A$ é sempre igual à zero. Isto quer dizer que, desde que o primeiro termo da equação (4.29) seja positivo, a propagação será sempre instável. Porém, ocorre na prática a propagação estável (trinca para de crescer) mesmo com tal termo positivo.

As conclusões de Griffith não tiveram aplicação imediata na engenharia, pois simplesmente forneciam tamanhos muito pequenos para os materiais usuais de engenharia.

Para o vidro, material originalmente testado por Griffith, esses comprimentos críticos da trinca eram válidos.

Observa-se ainda que se δ for mantido após um determinado valor, a equação (4.26) pode se escrita como

$$G_I = - \frac{\partial U}{\partial A} \Big|_{\delta=const}$$

a qual determina a quantidade de propagação da trinca (Δa) baseada no equilíbrio de energia

4.3. Correções propostas por Irwin e Orowan

De forma independente, Irwin e Orowan concluíram que G_I era muito pequeno, pois não considerava a dissipação plástica e outros efeitos não lineares na ponta da trinca, e redefiniram G_I como

$$G_I = 2(\gamma_s + \gamma_p) \quad (4.30)$$

onde γ_p é o trabalho de deformação plástica por unidade de área, dado por

$$\gamma_p = \sigma_{esc} \varepsilon_{esc} \rho \quad (4.31)$$

sendo σ_{esc} e ε_{esc} a tensão de escoamento e deformação plástica na ponta da trinca quando o escoamento acontece. E $\sigma_{esc} \varepsilon_{esc}$ é considerado como a energia por unidade de volume na ponta da trinca.

Tal energia será em geral muito maior que γ_s , o que corrige as discrepâncias encontradas nos cálculos de Griffith.

A resistência à fratura, parâmetro mecânico do material, que representa a sua resistência à fratura é notada agora por

$$G_{IC} = 2(\gamma_s + \gamma_p) \quad (4.32)$$

Alem da correção acima, Irwin foi o responsável por resgatar a teoria de Griffith e aplicá-la a casos reais da engenharia.

4.4. Modos de propagação de trincas

Há três modos básicos de propagação de uma trinca. Estes modos são caracterizados pelo movimento das superfícies inferior e superior da trinca, como mostra a fig. 4.3, e são chamados: *opening mode* ou modo “abrindo” (modo I), *sliding mode* ou modo “deslizamento” (modo II) e *tearing mode* ou modo “rasgando” (modo III).

A grande maioria dos estudos da engenharia envolvendo trincas é baseada no Modo I.

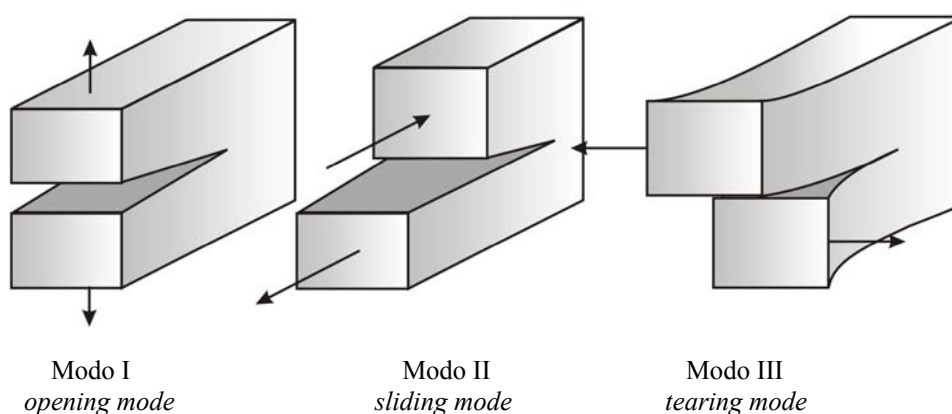


Fig. 4.3. Modos de carregamentos que podem ser aplicados para uma trinca.

4.4.1 Distribuição de tensões na ponta de uma trinca

De WESTERGAARD [52] e WILLIAMS [53] tem-se as tensões e os deslocamentos nos sistemas de coordenação polar e retangular.

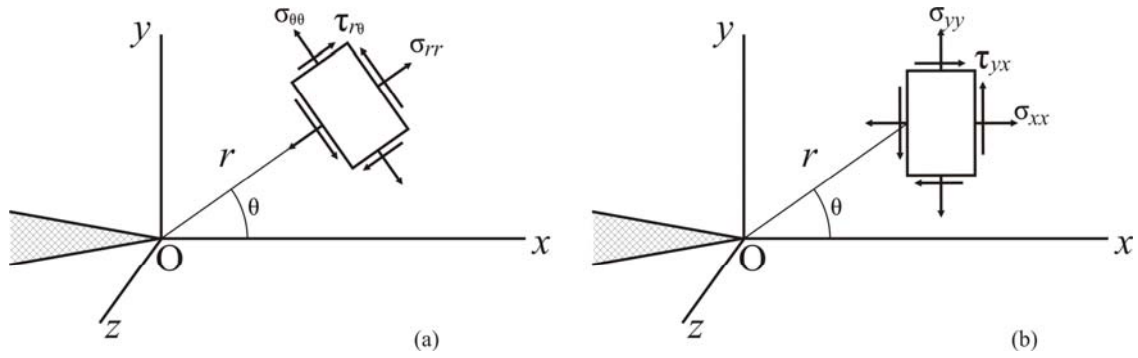


Fig. 4.4. Distribuição de tensões na ponta da trinca; (a) coordenadas polares e (b) coordenadas retangulares.

Para o Modo I, tem-se no sistema de coordenação polar (Fig. 4.4a), as tensões são

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \cos^3 \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

e os deslocamentos

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} (1+\nu) \left[(2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ (1+\nu) \left[-(2k+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

Para o Modo II

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ -3 \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} (1+\nu) \left[-(2k-1) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + 3 \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \\ (1+\nu) \left[-(2k+1) \cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right] \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

E para o Modo III

$$\begin{Bmatrix} \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\begin{Bmatrix} u_r = u_\theta \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{K_{III}}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[2(1+\nu) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right] \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

Já no sistema de coordenação retangular (Figura 4.4b) tem-se

Para o Modo I

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} (1+\nu) \left[(2k-1) \cos \frac{\theta}{2} - 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right] \\ (1+\nu) \left[(2k+1) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - 3 \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

Para Modo II

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} (1+\nu) \left[(2k+3) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \\ -(1+\nu) \left[(2k-3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

E, para o Modo III

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

$$\begin{Bmatrix} u_x = u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{K_{III}}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[2(1+\nu) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right] \end{Bmatrix} \quad (4.44)$$

De modo geral, pelo método da superposição, pode-se expressar os campos de tensão e de deslocamento, respectivamente, por

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I f_{ij}^I(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\theta) \right] \quad (4.45)$$

$$u_i(r, \theta) = \frac{1}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[K_I g_i^I(\theta) + K_{II} g_i^{II}(\theta) + K_{III} g_i^{III}(\theta) \right] \quad (4.46)$$

onde f e g são funções do θ ; E é o módulo de elasticidade longitudinal de Young; ν é a razão de Poisson; e ainda, $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ (caso de tensões no plano) ou $k = 3 - 4\nu$ (caso de deformação no plano).

4.4.2 Fatores de intensidade de tensões

Indica-se os fatores de intensidade de tensões correspondentes aos modos I, II e III por K_I , K_{II} e K_{III} , respectivamente. Estes fatores são funções da geometria da configuração da trinca e do carregamento, sendo independente do material.

Observa-se que o campo de tensão (4.45) tem singularidade de $\frac{1}{2}$ ordem, pois, se $r \rightarrow 0$, ou seja, muito próximo da ponta da trinca, então $\sigma_{ij} \rightarrow \infty$. Isto é causado devido ao contorno não ser liso matematicamente na ponta da trinca, fazendo com que a derivada na ponta ao longo do contorno da trinca seja contínua.

Pelas equações (4.33) a (4.44) pode-se obter

$$K_{I,II,III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \left[\frac{\sigma_{ij}(r, \theta)}{f_{ij}(\theta)} \right] \bigg|_{\theta=0} \quad (4.47)$$

Se $f_{ij}(\theta)|_{\theta=0} \neq 0$.

4.5. Critérios de propagação de trincas

No estudo de trincas, há três questões que podem ser analisadas:

- i) Quando uma trinca vai propagar (condição crítica)?
- ii) Qual a direção da propagação?
- iii) Qual a quantidade propagada?

Para responder a estas perguntas existem critérios já consagrados na literatura mundial, alguns dos quais serão abordados a seguir de forma geral.

4.5.1 Critério do fator de intensidade de tensões

$$K(K_I, K_{II}, K_{III}) > K_C \text{ (valor crítico)} \quad (4.48)$$

Este critério é utilizado comumente apenas para o modo I de propagação. Assim, a condição crítica é

$$K_I > K_{IC} \quad (4.49)$$

onde K_{IC} é a tenacidade da fratura para deformação no plano.

Esta tenacidade é um importante parâmetro do material, pois representa a capacidade de resistência à fratura do mesmo.

Pode-se provar ainda a equivalência entre K_{IC} e G_{IC} .

4.5.2 Critério da máxima tensão circunferencial ($(\sigma_\theta)_{\max}$, Erdogan e Sih [54])

Por este critério uma trinca começa a propagar-se

$$(\sigma_{\theta\theta})_{\max} > \sigma_t \text{ (condição crítica)} \quad (4.50)$$

onde σ_t é a resistência à tração do material.

Na verdade a condição crítica é dada por

$$\cos \frac{\theta_0}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \frac{\theta_0}{2} \right) = K_{IC} \quad (4.51)$$

onde θ_0 é o ângulo que representa a direção de propagação da trinca e satisfaz as condições

$$\left. \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} < 0 \quad (4.52)$$

ou seja,

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (4.53)$$

O ângulo θ_0 é obtido numericamente e pode assumir dois valores. Será considerado aquele que representar a direção à frente da trinca.

4.5.3 Critério de intensidade de energia de deformação mínima (critério S, Sih [55])

Seja

$$w = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{S}{r} \quad (4.54)$$

onde w é a densidade de energia de deformação; S é o fator de densidade de energia de deformação, cujo valor é determinado por

$$a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 + a_{33} K_{III}^2 \quad (4.55)$$

com

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{16G} [(3 - 4\nu - \cos \theta)(1 + \cos \theta)] \\ a_{12} &= \frac{1}{16G} (2 \sin \theta) [\cos \theta - (1 - 2\nu)] \\ a_{22} &= \frac{1}{16G} [4(1 - \nu)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)] \\ a_{33} &= \frac{1}{4G} \end{aligned} \quad (4.56)$$

As equações (4.56) são aplicadas no caso de deformação no plano. Para o caso de tensões no plano deve-se fazer a troca de ν por $\frac{\nu}{1+\nu}$ nas mesmas equações.

De acordo com o critério, a condição crítica, sendo S_C dependente do material, é

$$S_{min} > S_C \text{ (valor crítico)} \quad (4.57)$$

onde

$$S_C = \frac{1-2\nu}{4\pi G} K_{IC}^2 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} K_{IC}^2 \quad (4.58)$$

Na equação (4.58) pode-se usar K_I , K_{II} ou K_{III} e é aplicada para deformações no plano. Para tensões no plano deve-se, da mesma forma anterior, realizar a troca de ν por $\frac{\nu}{1+\nu}$.

O critério ainda determina que a trinca propague na direção θ_0 , que satisfaz

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} > 0 \quad (4.59)$$

4.5.4 Critério da taxa máxima de liberação de energia de deformação (critério G_{max} , Irwin [56])

Neste caso a condição crítica é

$$G_{max} > G_E \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial G_{max}}{\partial A} > \frac{\partial G_C}{\partial A}$$

onde

$$G_c = \frac{1}{E'} K_{IC}^2 \quad (4.61)$$

e $E' = E$ (caso de deformação no plano); $E' = E/(1 - \nu^2)$ (caso de tensão no plano).

A primeira equação de (4.60) representa a condição necessária, mas não suficiente, enquanto que a segunda é a condição suficiente.

Para os modos I + III a condição crítica para deformações no plano pode ser dada por

$$\left(\frac{K_I}{K_{IC}} \right)^2 + \left(\frac{K_{III}}{\sqrt{1 - \nu} K_{IC}} \right)^2 \quad (4.62)$$

Para tensão no plano deve-se trocar ν por $\frac{\nu}{1 + \nu}$.

No caso dos modos I + II, o critério $G_{\max}$ é igual ao critério $(\sigma_{\theta})_{\max}$ e, os casos II + III e I + II + III são muito raros.

4.5.5 Critério COD (Crack-tip-Open Displacement)

O critério COD é utilizado para regiões de materiais dúcteis que apresentam pequena plasticidade. A condição crítica é

$$\delta = \delta_c \quad (4.63)$$

onde δ_c é o parâmetro do material e pode ser determinado conforme a norma inglesa DD-19, e δ a abertura na ponta da trinca. Há duas maneiras de estimar o valor de δ .

4.5.5.1. COB sob condição de escoamento pequeno de Irwin [56]

Irwin supôs o comprimento efetivo da trinca, notado por $a^* = a + r_0$ (fig. 3.7).

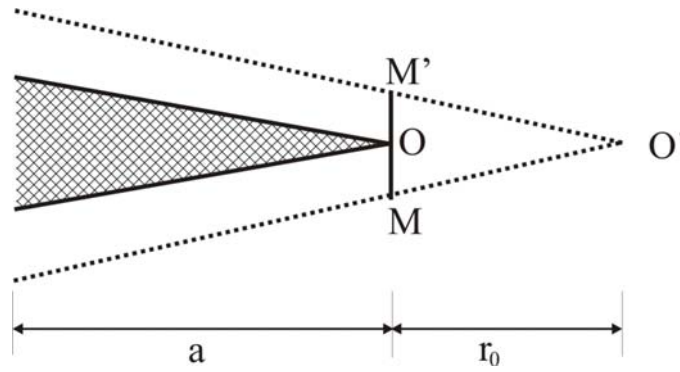


Fig. 4.5. Comprimento efetivo da trinca $(a+r_0)$ [56]

Na verdade o acréscimo r_0 é o tamanho da região plástica na ponta da trinca [57]

$$r_0 \approx \begin{cases} \frac{\left(\frac{K_I}{\sigma_s}\right)^2}{2\pi} & \text{(para tensões no plano)} \\ \frac{\left(\frac{K_I}{\sigma_s}\right)^2}{6\pi} & \text{(para deformações no plano)} \end{cases}$$

onde σ_s é a tensão de escoamento do material. Assim, tem-se, para o caso de deformação no plano,

$$\delta = MM' = \frac{4K_I^2}{\pi E \sigma_s} \quad (4.64)$$

Este caso é aplicável tanto para o fator K_I quanto para o fator K_{II} e K_{III} , sendo estes determinados considerando o comprimento efetivo a^* da trinca.

4.5.5.2. COD da região de escoamento tipo cunha (Dugdale-Barenblatt modelo)

Neste caso, a ponta da trinca tem forma de cunha. Conforme se verifica na Figura 4.6.

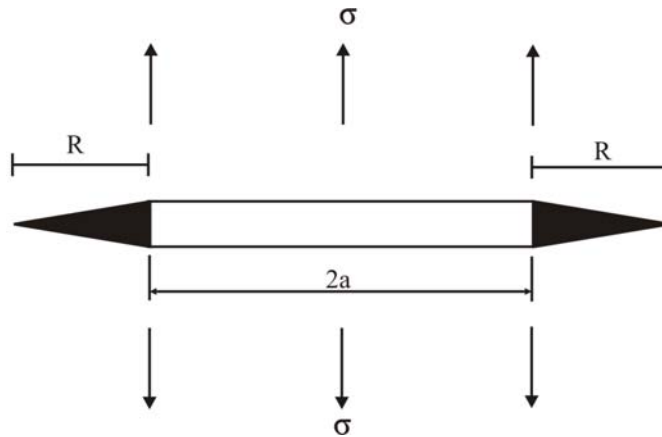


Fig. 4.6. Região de escoamento tipo cunha

Somente K_I pode ser considerado neste caso e

$$\delta = \frac{\sigma^2 \pi a}{E \sigma_s} = \frac{K_I^2}{E \sigma_s} \quad (4.65)$$

4.5.6 Critério da J-Integral

O critério da J-Integral é válido para material elástico não linear. É usado em plasticidade quando se considera que há carregamento monótono crescente [2].

4.5.6.1. Conceito de J-Integral

A J-Integral é utilizada principalmente na mecânica elasto-plástica da fratura, é uma integral de linha em torno da ponta da trinca, invariante para qualquer percurso utilizado desde que se inicie na face inferior e termine na face superior da trinca. Em 1968, Rice introduziu o conceito da J-Integral bidimensional

$$J = \int_{\Gamma} \left(w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS \right) \quad (4.66)$$

onde a energia de deformação específica (por unidade de volume) é

$$w = \int_0^{\varepsilon_{mn}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (4.67)$$

sendo σ e ε a tensão e a deformação, respectivamente, conforme a Figura 4.7, a equação (4.67) é válida para casos elasto-plásticos até o limite do início da propagação da trinca, ou seja, o corpo não pode ser descarregado.

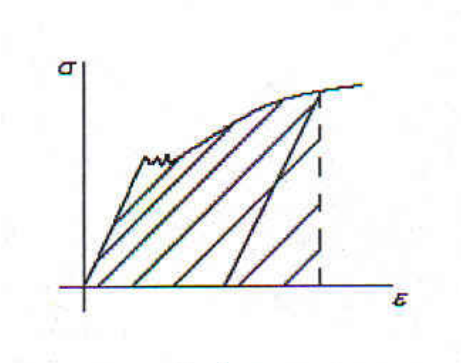


Fig. 4.7. Tensão x Deformação

A Figura 4.8 representa uma trinca no qual é aplicado um caminho para utilização da integral, onde Γ é o caminho da integral a partir de qualquer ponto na superfície inferior da trinca (A) até um ponto qualquer na superfície superior (B); T_i , é o componente do vetor tensão; u_i , é a componente do vetor deslocamento; dS , é o comprimento da curva que representa caminho (em Γ).

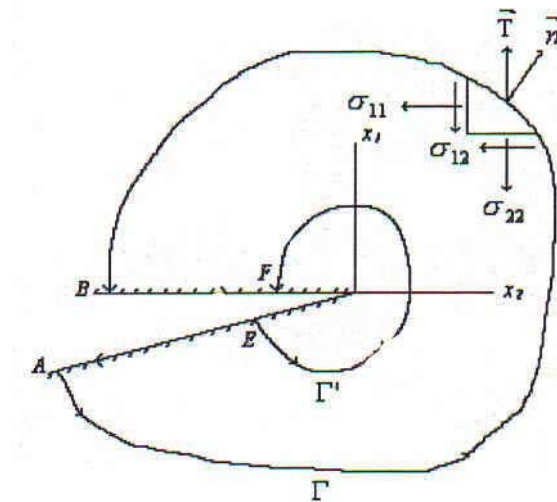


Fig. 4.8. Caminho da J-Integral

4.5.6.2. O Critério do J-Integral

Quando a força corporal é desprezível, as deformações da “peça” são pequenas (em geral, menores que 1%) e o carregamento cresce de forma monotônica (crescimento monótono). Pode-se provar que

$$J_{\Gamma} = J_{\Gamma'} = \text{constante} = J_C \quad (4.68)$$

da seguinte maneira:

Considera-se a integral ao longo do caminho fechado

$$C = AB + \overline{BF} + FE + \overline{EA} = \Gamma + \overline{BF} - \Gamma' + \overline{EA}$$

como sendo

$$I = \oint_C \left(w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS \right) \quad (4.69)$$

Da mecânica elástica,

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{p} = (T_1, T_2, T_3) = T_1 \vec{i} + T_2 \vec{j} + T_3 \vec{k} = T_i \vec{\alpha}_i = \sigma_{ij} n_j \vec{\alpha}_i$$

$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ (vetor normal unitário do plano inclinado – corte no cubo da Figura 3.1)

Assim, observa-se que

$$T_{ij} = \sigma_{ij} n_j \quad (4.70)$$

Desta forma, o segundo termo da equação (4.69) pode ser escrito com

$$\oint_C T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS = \oint_C \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) n_j dS \quad (4.71)$$

Aplicando o teorema de Gauss-Green bidimensional obtém-se

$$\oint_C \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) n_j dS = \iint_A \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)_{,j} dx_1 dx_2 \quad (4.72)$$

Pela equação de equilíbrio, não há força corporal e $\sigma_{ij,j} = 0$. Então,

$$\iint_A \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)_{,j} dx_1 dx_2 = \iint_A \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right)_{,1} dx_1 dx_2 \quad (4.73)$$

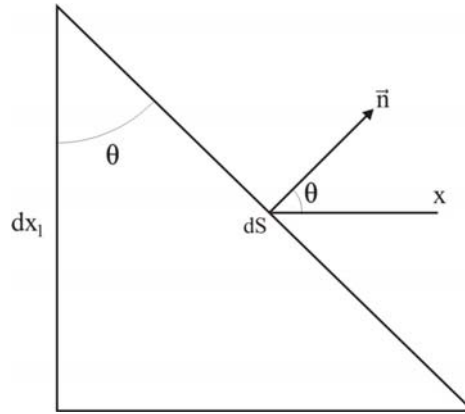


Fig. 4.9. Vetor Normal ao plano inclinado

De outro modo, o primeiro termo da mesma equação (4.69) pode ser escrito da forma (fig. 4.9)

$$\oint_C w dx_2 = \oint_C w n_1 dS = \iint_A \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \quad (4.74)$$

onde $dx_2 = n_1 dS$. Mas, pela equação (4.67),

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} \quad (4.75)$$

Para deformações pequenas

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.76)$$

Como o produto $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ é muito pequeno e pode ser desprezado, tem-se

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]_{,1} \quad (4.77)$$

Assim,

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{,1} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} = \sigma_{ji} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.78)$$

Levando a equação acima na (4.74), chega-se em

$$\oint_C w dx_2 = \iint_A \sigma_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_1 dx_2 \quad (4.79)$$

Comparando as equações (4.73) e (4.79), pode-se ver que

$$\oint_C T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS = \oint_C w dx_2 \quad (4.80)$$

ou seja,

$$I = \oint_C \left(w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS \right) = 0 \quad (4.81)$$

Mas, como se pode observar na Figura 4.8, não há tensões na região acima do trecho $\overline{EA}$ e abaixo do $\overline{BF}$. Isto implica que $T_i = 0$ e $dx_2 = 0$. Então

$$\int_{EA} \left(w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS \right) + \int_{BF} \left(w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS \right) = 0 \quad (4.82)$$

$$\int_{AB} \left(w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS \right) + \int_{FE} \left(w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS \right) = 0 \quad (4.83)$$

ou

$$\int_{\Gamma} \left(w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS \right) - \int_{\Gamma'} \left(w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS \right) = 0 \quad (4.84)$$

e, conseqüentemente,

$$\int_{\Gamma} \left(w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS \right) = \int_{\Gamma'} \left(w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dS \right) \quad (4.85)$$

Assim, está provada a equação (4.68).

4.5.6.3. Relação entre J_C e K_{IC}

No caso elástico linear, Rice provou que

$$J = G_I = \frac{1}{E'} K_I^2 \quad (4.86)$$

Sabe-se que há dois critérios idênticos para deformação no plano

$$J_C = J_{IC} = G_{IC} = \frac{1-\nu^2}{E} K_{IC}^2 \quad (4.87)$$

Para plasticidade pequena valem as equações

$$J = \frac{\pi}{4} \sigma_s \delta \quad (\text{Modelo Irwin}) \quad (4.88)$$

$$J = \sigma_s \delta \quad (\text{Modelo D-B}) \quad (4.89)$$

MODELO MATEMÁTICO PARA TENACIFICAÇÃO POR MICROFIBRAS

5.1. A Trinca

Será considerado a trinca tipo *opening mode* ou modo “abrindo” (Modo I). Trinca com superfície plana e propagação paralela.

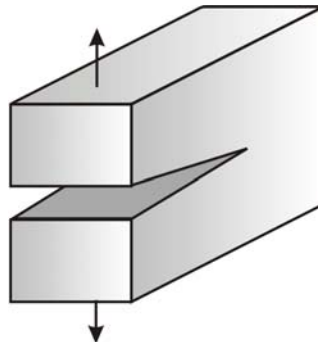


Fig. 5.1. Trinca considerada – Modo I.

5.2. Fibras

Fibras com geometria circular, considerando o diâmetro e comprimento, e propriedades como módulo de elasticidade (Módulo Young, E_f) e resistência (σ_{fu}).

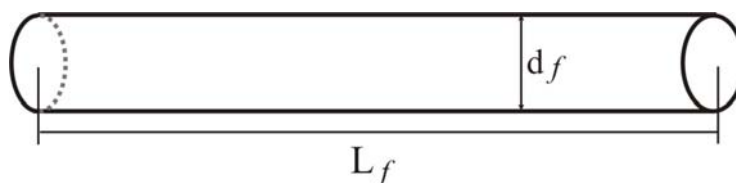


Fig. 5.2. Geometria da fibra

Tanto a matriz quanto a fibra serão considerados materiais elásticos, isotrópicos e homogêneos.

5.3. Material composto

Considerado a composição da matriz com fibras, sabendo a porcentagem volumétrica da fibra no composto (V_f), resistência cisalhante de atrito entre as interfaces fibra/matriz (τ_0), coeficiente de atrito do efeito de snubbing (f) e módulo de elasticidade da matriz (E_m).

As fibras têm distribuição aleatória, com ângulo $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ com a normal do plano da trinca (Fig. 5.3).

5.4. Metodologia e conceitos para elaboração dos modelos

Serão considerados e aplicados conceitos típicos na mecânica de elasticidade como uma viga em balanço, rigidez e Lei de Hooke.

Simulações e resultados são obtidos através de implementação computacional em MATLAB. Para a solução numérica de integração tripla, é usada a fórmula de Simpson e próprias funções numéricas do MATLAB para soluções de algumas equações de terceira e segunda ordem.

5.5. Delimitações de dimensões e funções de distribuição da fibra

A distribuição randômica das fibras de acordo com LI et al [6] considera o ângulo de inclinação da fibra referente a normal ao plano da trinca, sendo que a distribuição randômica da fibra na matriz equivale a dizer que a probabilidade da parte final da fibra que está enterrada na matriz está em algum ponto da superfície hemisférica como mostra a Figura 5.3.

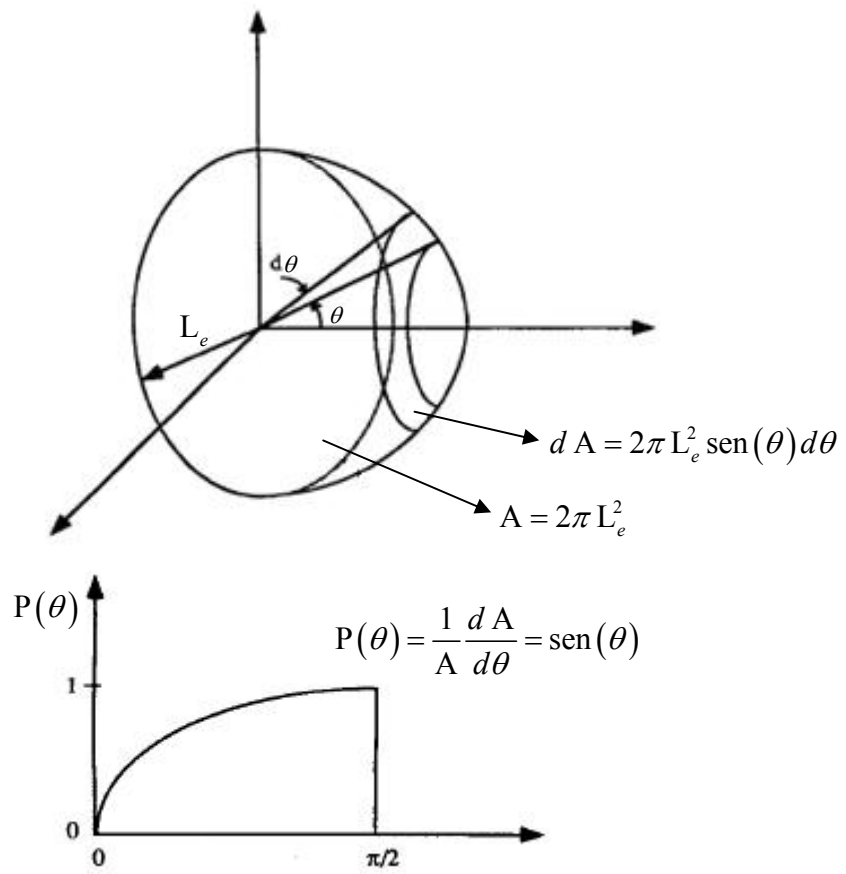


Fig. 5.3. Orientação 3-D randômica da fibra onde o comprimento enterrado tem sua parte final na superfície hemisférica e a probabilidade $P(\theta)$.

Observando a figura abaixo que mostra uma fibra antes da deformação pela propagação da trinca, podemos considerar que o comprimento livre inicial (descolado) é $2l_0$.

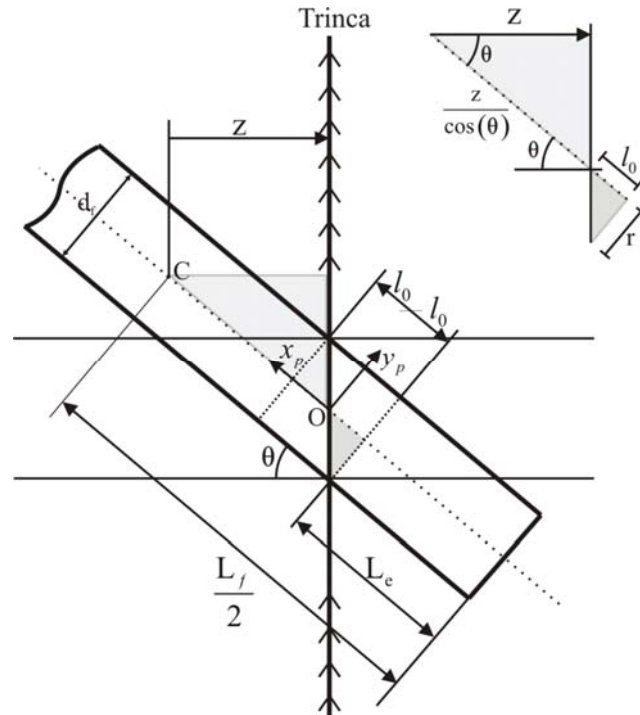


Fig. 5.4. Fibra antes da trinca abrir.

Claramente, pela geometria, tem-se o comprimento enterrado da fibra inicialmente dado por

$$L_e = \frac{L_f}{2} - \frac{Z}{\cos \theta} - l_0 \quad (5.1)$$

observado l_0 na figura, temos que

$$\tan(90 - \theta) = \frac{r}{l_0} \quad (5.2)$$

pelas relações trigonométricas

$$l_0 = r \tan \theta \quad (5.3)$$

então

$$L_e = \frac{L_f}{2} - \frac{z}{\cos \theta} - \frac{d_f \tan \theta}{2} \quad (5.4)$$

para $L_e > 0$, obtemos

$$0 < z < \frac{L_f}{2} \cos \theta - \frac{d_f \sin \theta}{2} \quad (5.5)$$

onde z é a distância do centro da fibra até o plano da trinca.

De $l_0 = r \tan \theta$, temos

$$d_f \tan \theta = 2l_0 < \frac{L_f}{2} \quad (5.6)$$

LI et al [6], sugere que

$$\theta \leq \frac{\pi}{2}$$

mas observando a figura, verificamos que o ângulo de inclinação da fibra que realmente contribuirá com a tenacidade é limitado por

$$\theta < \arctan \frac{L_f}{2d_f} \quad (5.7)$$

Assim as probabilidades de que o ângulo θ e a distância z aconteçam é dada por

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \sin(\theta) \quad \text{para} \quad 0 \leq \theta \leq \arctan \frac{L_f}{2d_f} \\ p(z) &= \frac{2}{L_f} \quad \text{para} \quad 0 \leq z \leq \frac{L_f \cos(\theta) - d_f \sin(\theta)}{2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Quando os planos da trinca abrir para $2w$, uma parte da fibra se deformará (ABGH) como mostra a Figura 5.5

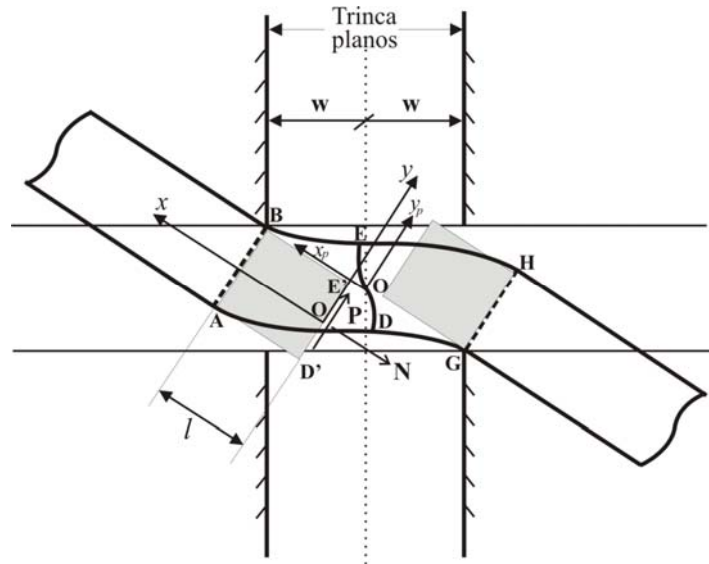


Fig. 5.5. Deformação da fibra após abertura da trinca.

Imagina-se que ao cortar a fibra por uma trajetória DOE, que passa pelo centro O, a parte ABDE irá voltar como um bloco retangular ABD'E' com comprimento l . Podemos considerar que se aplicarmos uma força cisalhante P e uma força normal N ao lado D'E', o bloco irá deformar para ABDE.

Então podemos utilizar a solução elástica de um bloco em balanço com comprimento l submetido a uma força transversal P e uma força axial N , com uma relação de aspecto $l/d_f = 1$.

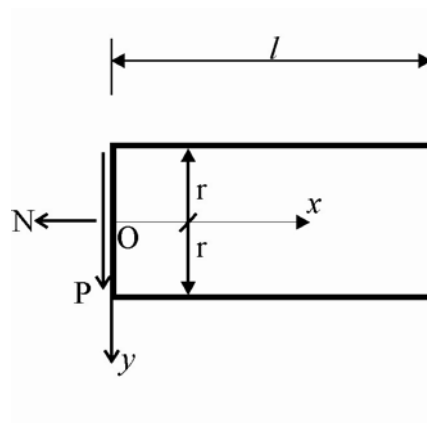


Fig. 5.6. Fibra tratada como uma viga em balanço.

Para uma viga em balanço submetida a uma força transversal P e uma força axial N , a solução de descolamento elástico é dada por [49]

$$u(x, y) = -\frac{P x^2 y}{2 E I} - \frac{\nu P y^3}{6 E I} + \frac{P y^3}{6 I G} + \left(\frac{P l^2}{2 E I} - \frac{P r^2}{2 I G} \right) y - \frac{N(l-x)}{E A} \quad (5.9)$$

$$v(x, y) = \frac{\nu P x y^2}{2 E I} + \frac{P x^3}{6 E I} - \frac{P l^2 x}{2 E I} + \frac{P l^3}{3 E I} - \frac{\nu N y}{E A} \quad (5.10)$$

onde ν é o coeficiente de *Poisson*, l é o comprimento inicial da parte livre, r é o raio da fibra, $E = E_f$ é o módulo de elasticidade da fibra, $A = A_f$ é a área da seção da fibra, e I é o momento de inércia na fibra, dado por

$$I = \frac{\pi r^2}{4} \quad (5.11)$$

e G , denominado módulo de elasticidade transversal ou módulo de elasticidade ao cisalhamento, associado com ν e E_f dado por

$$G = \frac{E_f}{2(1+\nu)} \quad (5.12)$$

O centro $O(u_0, v_0)$ tem os deslocamentos

$$u_0 = u(0, 0) = -\frac{N l}{E A} \Rightarrow -\frac{N}{E A} = \frac{u_0}{l} \quad (5.13)$$

$$v_0 = v(0, 0) = \frac{P l^3}{3 E I} \Rightarrow \frac{P}{E I} = \frac{3 v_0}{l^3} \quad (5.14)$$

Observando a Figura 5.7

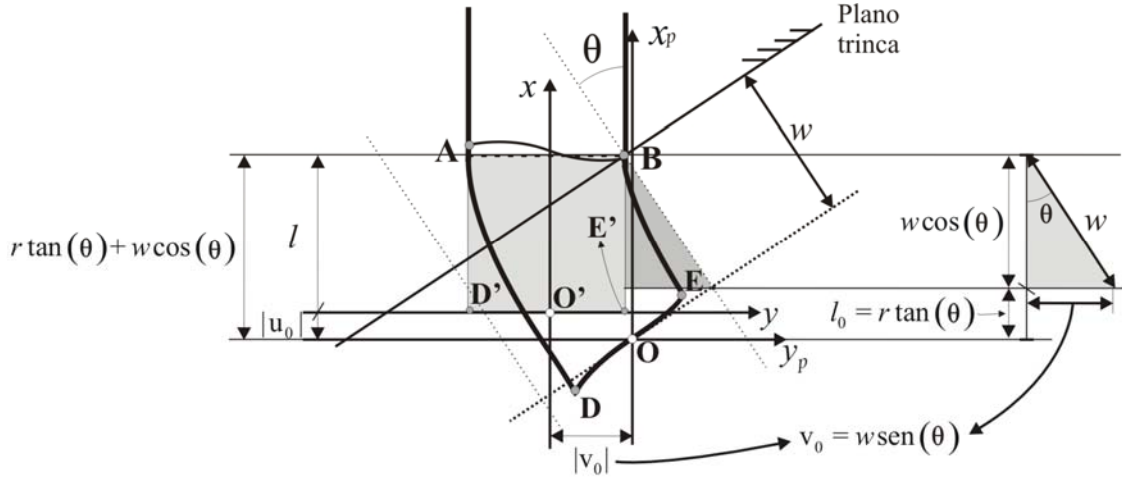


Fig. 5.7. Análise geométrica do deslocamento do centro O.

com a abertura da trinca para $2w$, temos $|u_0| + l = r \tan(\theta) + w \cos(\theta)$. Como u_0 desloca no eixo x no sentido negativo, temos

$$u_0 = l - r \tan \theta - w \cos \theta \quad (5.15)$$

$$v_0 = w \sin \theta \quad (5.16)$$

Levando as equações (5.13) e (5.14) às equações (5.9) e (5.10), obtêm-se

$$u(x, y) = \left\{ -\frac{x^2 y}{2} - \frac{\nu y^3}{6} + \frac{y^3}{6} \left(\frac{E}{G} \right) + \left[\frac{l^2}{2} - \frac{r^2}{2} \left(\frac{E}{G} \right) \right] y \right\} \frac{3 v_0}{l^3} + \frac{u_0}{l} (l - x) \quad (5.17)$$

$$v(x, y) = \left(\frac{\nu x y^3}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{l^2 x}{2} + \frac{l^3}{3} \right) \frac{3 v_0}{l^3} + \frac{u_0 \nu y}{l} \quad (5.18)$$

pela relação

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \text{ tem-se } \frac{E}{G} = 2(1+\nu) \quad (5.19)$$

então a equação (5.17) muda para

$$u(x, y) = \left\{ -\frac{x^2 y}{2} - \frac{\nu y^3}{6} + \frac{y^3}{3}(1+\nu) + \left[\frac{l^2}{2} - \frac{r^2}{2}(1+\nu) \right] y \right\} \frac{3v_0}{l^3} + \frac{u_0}{l}(l-x) \quad (5.20)$$

5.6. Forma deformada da fibra

Pelas equações (5.9) e (5.20) podemos obter a forma da fibra deformada após a abertura da trinca.

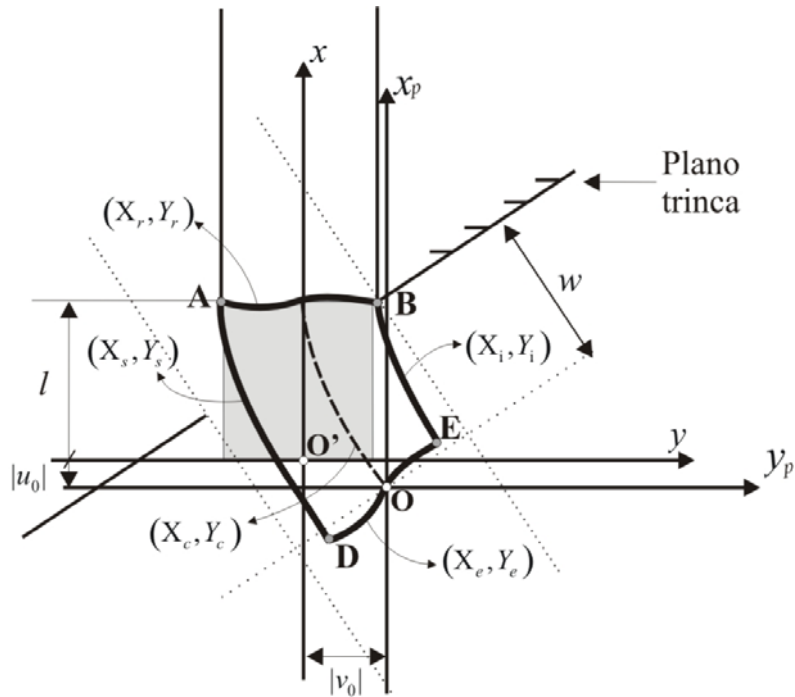


Fig. 5.8. Curvas de deformação.

$$X_i(x) = x + u(x, r)$$

$$Y_i(x) = r + u(x, r)$$

$$\begin{cases} X_i(x) = x + \left(-\frac{x^2 r}{2} - \frac{\nu r^3}{6} + \frac{r^3(1+\nu)}{3} + \left(\frac{l^2}{2} - r^2(1+\nu) \right) r \right) \frac{3v_0}{l^3} + \frac{u_0(1-x)}{l} \\ Y_i(x) = r + \left(\frac{\nu x r^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{l^2 x}{2} + \frac{l^3}{3} \right) \frac{3v_0}{l^3} + \frac{\nu u_0 r}{l} \end{cases} \quad (5.21)$$

$$X_s(x) = -r + u(x, -r)$$

$$Y_s(x) = -r + v(x, -r)$$

$$\begin{cases} X_s(x) = x + \left(\frac{x^2 r}{2} + \frac{\nu r^3}{6} - \frac{r^3(1+\nu)}{3} - \left(\frac{l^2}{2} - r^2(1+\nu) \right) r \right) \frac{3v_0}{l^3} + \frac{u_0(1-x)}{l} \\ Y_s(x) = -r + \left(\frac{\nu x r^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{l^2 x}{2} + \frac{l^3}{3} \right) \frac{3v_0}{l^3} - \frac{\nu u_0 r}{l} \end{cases} \quad (5.22)$$

$$X_e(x) = u(0, y)$$

$$Y_e(x) = y + v(0, y)$$

$$\begin{cases} X_s(x) = \left(-\frac{y^3 \nu}{6} + \frac{y^3(1+\nu)}{3} + \left(\frac{l^2}{2} - r^2(1+\nu) \right) y \right) \frac{3v_0}{l^3} + u_0 \\ Y_e(x) = y + v_0 + \frac{\nu u_0 y}{l} \end{cases} \quad (5.23)$$

$$X_c(x) = x + u(x, 0)$$

$$Y_c(x) = v(x, 0)$$

$$\begin{cases} X_s(x) = x + \frac{u_0(1-x)}{l} \\ Y_c(x) = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2}{2} + \frac{l^3}{3} \right) \frac{3v_0}{l^3} \end{cases} \quad (5.24)$$

$$X_r(x) = l + u(l, y)$$

$$Y_r(x) = y + v(l, y)$$

$$\begin{cases} X_r(x) = l + \left(-\frac{l^2 y}{2} - \frac{\nu y^3}{6} + \frac{y^3(1+\nu)}{3} + \left(\frac{l^2}{2} - r^2(1+\nu) \right) r \right) \frac{3v_0}{l^3} \\ Y_r(x) = y + \frac{3\nu y^2 v_0}{2l^2} + \frac{\nu u_0 y}{l} \end{cases} \quad (5.25)$$

onde, das equações (5.13) e (5.15)

$$l = \frac{r \tan(\theta) + w \cos(\theta)}{1 + \frac{N}{EA}} \quad (5.26)$$

5.7. Identificação dos estados da fibra

Para identificar a situação de uma fibra na matriz, introduzem-se os estados da fibra chamados de “flags”.

Tabela 5.1. Situação da fibra na matriz – Flags identificações

<i>Flag 0</i>	Não há descolagem
<i>Flag I</i>	Há descolagem
<i>Flag II</i>	A fibra está sendo puxada para fora (uma parte está fora da matriz)
<i>Flag III</i>	A fibra está totalmente fora da matriz e não há tensão ou força na fibra
<i>Flag IV</i>	A fibra está quebrada, não há tensão ou força na fibra

Os *Flags* servirão como uma referência para saber qual a porcentagem de fibras estará em um determinado estado definido pelos processos sofridos pela fibra durante abertura da trinca. Ou seja, 100% das fibras estarão divididas em cinco estados, cada estado denominados de *flag* (*flag 0 ao IV*), sendo calculado para cada meia abertura w da trinca. Quando ocorre uma abertura w da trinca, todas as fibras se encontram em um dos estados definidos pela Tabela 5.1, no final, após certa abertura w , teremos a porcentagem de fibras que se encontra em cada *flag* para cada abertura w .

5.8. Efeito de *snubbing*, *spalling* e *bending*

De maneira geral, a fibra está enterrada na matriz sob um ângulo com o plano da trinca, e uma combinação de efeitos ocorre.

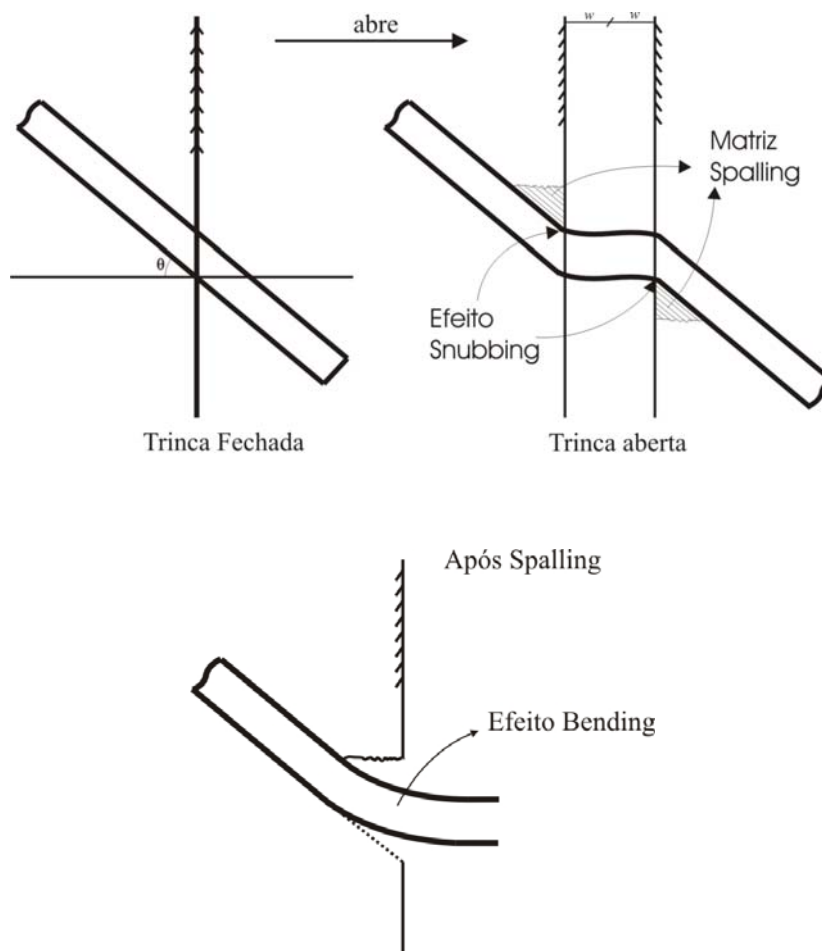


Fig. 5.9. Ilustração dos Efeitos Snubbing, Matriz Spalling e Bending.

Durante o processo de descolagem, altas tensões são aplicadas na fibra, com isso, a força concentrada no local de saída da fibra da matriz faz com que a matriz quebre (*spalling*). Após descolagem completa, entra no processo *pull-out*, onde o atrito entre a superfície da fibra e a matriz (τ_0) assume total controle do processo. Também durante o processo de arrancamento, a fibra é puxada para fora da matriz do mesmo modo que uma corda passa por um polia, o que aumenta o atrito (efeito de *snubbing* f), faz a fibra mudar à direção (efeito *bending*) além de possibilitar a incidência de deformação plástica na fibra no ponto da saída da matriz. O efeito *spalling*, assim como a deformação plástica, não são considerados neste trabalho.

O coeficiente *Snubbing* (f) tem valor entre 0 e 1, sendo determinado experimentalmente para cada composto, numa série de testes de pull-out para diferentes ângulos de inclinação entre 0° a 90° . Na literatura, KATZ e LI [17], LI et al [44][22], entre outros, tem obtidos valores típicos do coeficiente de atrito para compostos de cimentos com fibras de carbonos ou fibras sintéticas (polivinil) igual 0,5, compostos de cimentos com fibras

de nylon, $f = 0,99$, fibras de polipropileno e cimento, $f = 0,7$, fibras de aço e cimento, $f = 0,8$, para SiC/Glass, $f = 0,1$ assumido por KERANS, PARTHASARATHY [39].

Não foram encontrados dados sobre o coeficiente de atrito em compostos cerâmicos na literatura. A razão possível é o que a dificuldade de realizar este tipo de experimento é muito grande, pois a confecção de cerâmica é através de sinterização e as fibras têm comprimentos muito pequenos.

5.9. Relação entre a força axial N e a meia abertura w da trinca, antes da ocorrência de descolagem na interface fibra/matriz

Antes da descolagem, o alongamento da fibra só ocorre na parte do comprimento livre da fibra, $l_0 = r \tan(\theta)$ e não há o efeito de atrito (*snubbing*). O alongamento é dado por

$$\Delta l_0 = \frac{N}{E_f A_f} l_0 = \frac{N}{E_f A_f} r \tan(\theta) \quad (5.27)$$

pela relação geométrica (Figura 5.7), temos

$$w \cos(\theta) = \Delta l_0 = \frac{N}{E_f A_f} l_0 \quad (5.28)$$

ou seja

$$N = \frac{E_f A_f w \cos(\theta)}{l_0} \quad (5.29)$$

ou

$$\sigma = \frac{E_f w \cos(\theta)}{l_0} \quad (5.30)$$

A tensão máxima ocorre no ponto imediatamente depois da saída da fibra na matriz, cujo valor é

$$\sigma_f = \sigma + \frac{|M|r}{I} \quad (5.31)$$

Onde M é o momento fletor na seção da saída da fibra, expresso por

$$M = Pl - Nv_0 \quad (5.32)$$

Para o caso de flexão de uma viga em balanço, pelas equações (5.14) e (5.16), temos

$$P = \frac{3v_0 E_f I}{l^3} \quad (\text{Modelo 0}) \quad (5.33)$$

Para o caso quando l muito pequeno

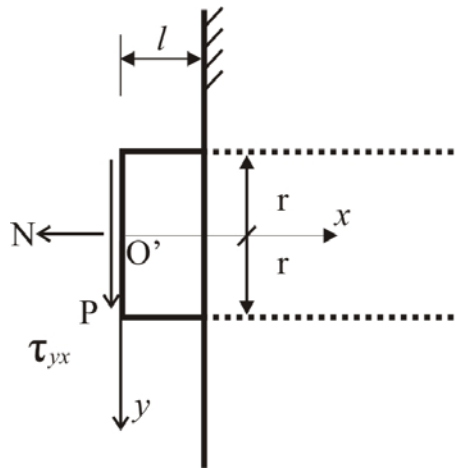


Fig. 5.10. Tratamento para l muito pequeno.

pela relação entre tensão de cisalhamento e a deformação angular, temos

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (\text{Lei de Hooke}) \quad (5.34)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal definido na equação (5.19) e a deformação dada por

$$w \cos(\theta) = l \cdot \gamma_{xy} = l \cdot \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (5.35)$$

como a tensão de cisalhamento é a força dividida pela área da seção de fibra, temos

$$w \cos(\theta) = l \frac{P}{A_f G} \quad (5.36)$$

e implica em

$$P = \frac{v_0 A_f G}{l} \quad (5.37)$$

Definimos aqui o segundo modelo, na qual terá dois tratamentos para tamanhos diferentes de l , denominado Modelo I:

Para $l \leq 2d_f$, tratamento por cisalhamento, eq. (5.37).

Para $l > 2d_f$, tratamento por viga em balanço (Modelo 0), mas considerando a deformação localizada na matriz, na saída da fibra (Figura 5.11).

A razão de escolher $2d_f$ como a faixa de divisão do comprimento longo ou curto para l é porque consideramos o efeito causado pela força cortante P na distribuição da tensão na saída da matriz. Na verdade a força P é o resultante dos esforços internos na seção transversal na direção da P . A distribuição de tensões e deslocamentos na saída da matriz determinada pela equação da viga em balanço é válida somente quando P não está perto da saída, ou seja, a fibra é comprida, segundo o princípio de Saint-Venant [60]. Quando o comprimento l é curto, o deslocamento v_0 pode ser obtido pela equação (5.36), que terá mais precisão que o pela equação (5.14).

Podemos ainda considerar que a força P que comprime a matriz é distribuída na largura do diâmetro da fibra, provocando uma deflexão y_b na matriz no local comprimido (Figura 5.11), ou seja, deformação localizada.

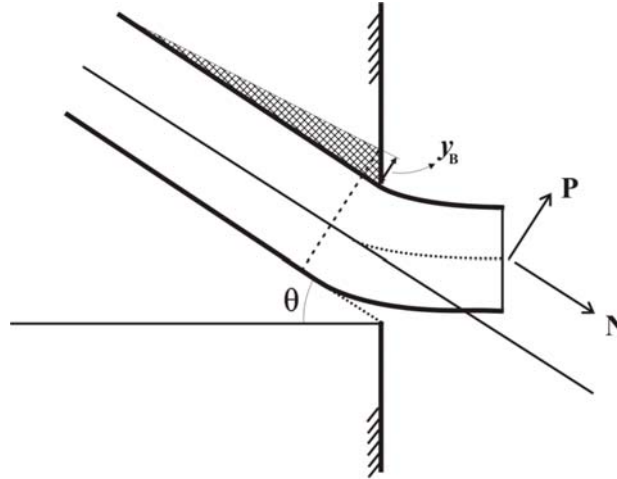


Fig. 5.11. Deflexão y_B provocada na matriz.

A força por unidade de comprimento que produz uma deflexão unitária, definida como rigidez da matriz, e com a mesma unidade de tensão é dada por

$$K_m = \frac{q}{y} \quad (5.38)$$

Assim

$$y_B = \frac{q}{K_m} = \frac{P}{d_f K_m} \quad (5.39)$$

Se a fibra está sobre a superfície da matriz infinita, podemos considerar que a rigidez da matriz é aproximada ao módulo de elasticidade da matriz, E_m .

Como a fibra é inclinada ($<90^\circ$), então a rigidez na direção de P deve ser reduzida, uma vez que a base fosse cortada, portanto podemos considerar essa rigidez como

$$K_m = E_m \cos(\theta) \quad (5.40)$$

Apesar de a expressão ser apenas uma aproximação ao caso real (que pode ser bem mais complicada que imaginada), a equação (5.40) vale racionalmente, uma vez que $\theta = 0$, a

fibra tem suporte totalmente, $K_m = E_m$, enquanto que para $\theta = 90^\circ$, a fibra não tem nenhum suporte fisicamente.

A deflexão y_B alivia o deslocamento v_0 do centro O onde P está atuando e, consequentemente, relaxa a tensão de flexão provocada por P. Podemos reformular v_0 por

$$v_0 = w \sin(\theta) - y_B = w \sin(\theta) - \frac{P}{d_f E_m \cos(\theta)} \quad (5.41)$$

pela equação (5.14) temos

$$\frac{P}{E_f I} = \frac{3 v_0}{l^3} = \frac{3 w \sin(\theta) - \frac{3 P}{d_f E_m \cos(\theta)}}{l^3} \quad (5.42)$$

pela qual obtemos

$$P = \frac{3 w E_f E_m I d_f \sin(\theta) \cos(\theta)}{d_f E_m l^3 \cos(\theta) + 3 E_f I} \quad (5.43)$$

A equação (5.43), com v_0 definida pela equação (5.41), forma o Modelo II.

Tabela 5.2. Diferentes Modelos para tratamento da Tensão σ_f

σ_f	Modelo	P	v_0
$\sigma + \frac{ P l - N v_0 r}{I}$	0	$\frac{3 v_0 E_f I}{l^3}$	$w \sin \theta$
	I	$\frac{v_0 A_f G}{l}$ para $l \leq 2 d_f$ $\frac{3 v_0 E_f I}{l^3}$ para $l > 2 d_f$	$w \sin \theta$
	II	$\frac{3 w E_f E_m I d_f \sin(\theta) \cos(\theta)}{d_f E_m l^3 \cos(\theta) + 3 E_f I}$	$w \sin(\theta) - \frac{P}{d_f E_m \cos(\theta)}$

Para todos os modelos, há quatro possibilidades nesta etapa, a qual define o estado da fibra (flags).

- i. $N = N(w) < N_d$ e $\sigma_f(N) < \sigma_{fu} \Rightarrow \text{flag 0}$
- ii. $N(w) < N_d$ e $\sigma_f(N) \geq \sigma_{fu} \Rightarrow \text{flag IV}$
- iii. $N(w) \geq N_d$ e $\sigma_f(N) < \sigma_{fu} \Rightarrow \text{flag I}$
- iv. $N(w) \geq N_d$ e $\sigma_f(N) \geq \sigma_{fu} :$

$$\text{Se } \frac{N(w)}{N_d} > \frac{\sigma_f(N)}{\sigma_{fu}} \Rightarrow \text{flag I, ao contrário, } \Rightarrow \text{flag IV}$$

Acima, N_d é a força axial necessária para iniciar a descolagem da fibra (tratado na próxima seção) e σ_{fu} é a resistência da fibra.

5.10. A relação N-w no processo de descolagem

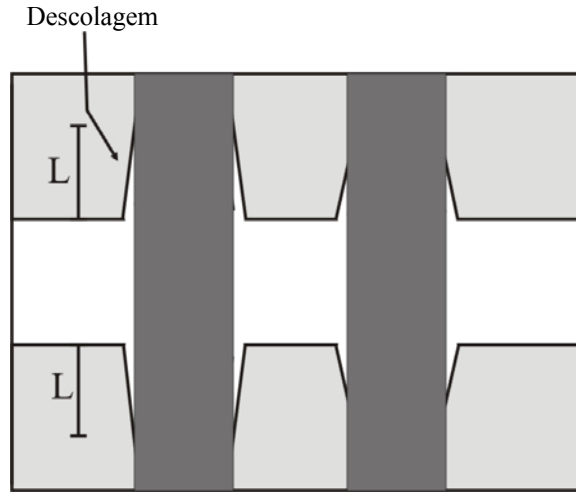


Fig. 5.12. Fibra/matriz descolagem (debonding).

Para o caso em que uma parte da fibra tenha descolado L ($L \leq L_e$, L_e é o comprimento inicial enterrado), a tensão média da seção transversal imediatamente antes da saída da matriz é dada por (Apêndice A)

$$\sigma = \frac{4\tau_0 L(1+\eta)}{d_f} + \sqrt{\frac{8G_d E_f (1+\eta)}{d_f}} = \frac{4\tau_0 L(1+\eta)}{d_f} + \sigma_d \quad (5.44)$$

onde $\eta = \frac{E_f V_f}{E_n V_m}$, σ_d pode ser considerada como sendo a tensão produzida pela descolagem, denotamos por

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{8G_d E_f (1+\eta)}{d_f}} \quad (5.45)$$

G_d é a tenacidade da interface fibra/matriz por unidade de área (J/m^2) (Apêndice B).

A força axial para iniciar o processo de descolagem é definida por

$$N_d = \sigma_d A_f e^{f\theta} = \sqrt{\frac{8G_d E_f (1+\eta)}{d_f}} \cdot \frac{\pi d_f^2}{4} e^{f\theta} = \sqrt{\frac{G_d E_f d_f (1+\eta)}{2}} \pi e^{f\theta} \quad (5.46)$$

Pela equação (5.46), podemos obter a abertura w_d da trinca no momento do início da descolagem, ou seja

$$w_d = \frac{N_d l_0}{E_f A_f w \cos(\theta)} \quad (5.47)$$

A tensão σ provoca um alongamento δ da descolagem L na saída da fibra na matriz

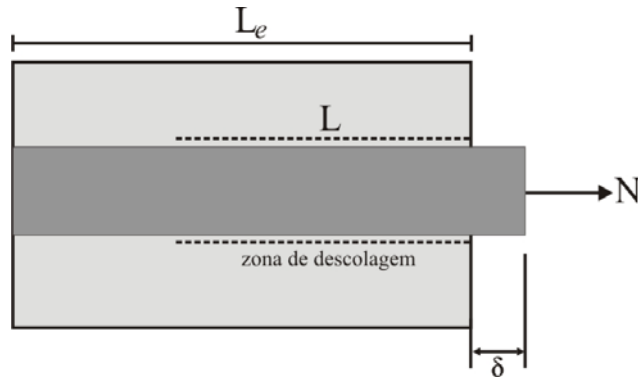


Fig. 5.13. Alongamento da fibra durante descolagem.

dado por

$$\delta = \frac{\sigma L}{E_f} - \frac{2\tau_0 L^2 (1+\eta)}{E_f d_f} = \frac{2\tau_0 L^2 (1+\eta)}{E_f d_f} + \sqrt{\frac{8G_d L^2 (1+\eta)}{E_f d_f}} \quad (5.48)$$

Considerando o efeito *snubbing*, a força axial depois da saída imediatamente da matriz é (Apêndice A)

$$N = \sigma A_f e^{f\theta} = \left[\pi d_f \tau_0 (1+\eta) L + \pi d_f \sqrt{\frac{G_d d_f E_f (1+\eta)}{2}} \right] e^{f\theta} \quad (5.49)$$

pela relação trigonométrica, temos

$$w \cos(\theta) = \delta + \Delta\delta + \Delta l_0 \quad (5.50)$$

onde o alongamento do comprimento livre inicial l_0 é

$$\Delta l_0 = \frac{N}{E_f A_f} l_0 \quad (5.51)$$

e o alongamento de δ (que está fora da matriz) é provocado pela diferença da força axial entre a matriz e fora da matriz

$$\Delta\delta = \frac{\sigma e^{f\theta} - \sigma}{E_f} \delta = \frac{\sigma(e^{f\theta} - 1)}{E_f} \delta \quad (5.52)$$

Então temos que

$$w \cos(\theta) = \delta \left[1 + \frac{\sigma(e^{f\theta} - 1)}{E_f} \right] + \Delta l_0 \quad (5.53)$$

Levando as equações (5.48), (5.44) e (5.51) à equação (5.53), temos

$$w \cos(\theta) = \left[\frac{2\tau_0 L^2 (1+\eta)}{E_f d_f} + L \sqrt{\frac{8G_d (1+\eta)}{E_f d_f}} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{4\tau_0 L (1+\eta)}{d_f} + \sigma_d \right) \frac{e^{f\theta} - 1}{E_f} \right] + \left[\frac{4\tau_0 L (1+\eta)}{d_f} + \sigma_d \right] \frac{l_0}{E_f} e^{f\theta} \quad (5.54)$$

Considerando w_0 a abertura da trinca para quando $L = L_e$, ou seja, descolagem completa, então

$$w_0 \cos(\theta) = \left[\frac{2\tau_0 L_e^2 (1+\eta)}{E_f d_f} + L_e \sqrt{\frac{8G_d (1+\eta)}{E_f d_f}} \right] \cdot \left[1 + \left(\frac{4\tau_0 L_e (1+\eta)}{d_f} + \sigma_d \right) \frac{e^{f\theta} - 1}{E_f} \right] + \left[\frac{4\tau_0 L_e (1+\eta)}{d_f} + \sigma_d \right] \frac{l_0}{E_f} e^{f\theta} \quad (5.55)$$

Se $w > w_0$, a fibra entra no processo de pull-out. Se $w \leq w_0$, está no processo de descolagem e pela equação (5.54) podemos obter o tamanho da parte descolada

$$L = L(w) = A \cdot L^3 + B \cdot L^2 + C \cdot L + D \quad (5.56)$$

sendo

$$\begin{aligned} A &= \frac{8\tau_0^2 (1+\eta)^2 (e^{f\theta} - 1)}{E_f^2 d_f^2} \\ B &= \frac{2\tau_0 (1+\eta)}{E_f^2 d_f} \left[E_f + 3\sigma_d (e^{f\theta} - 1) \right] \\ C &= \frac{\sigma_d}{E_f} \left(1 + \sigma_d \frac{e^{f\theta} - 1}{E_f} \right) + \frac{4l_0 \tau_0 (1+\eta) e^{f\theta}}{E_f d_f} \\ D &= \frac{\sigma_d \pi d_f l_0 e^{f\theta}}{4E_f} - w \cos(\theta) \end{aligned}$$

Levando $L(w)$ à equação (5.49), obtemos a relação $N-w$ como

$$N = N(w) = \left[\pi d_f \tau_0 (1 + \eta) L(w) + \pi d_f \sqrt{\frac{G_d d_f E_f (1 + \eta)}{2}} \right] e^{f\theta} \quad (5.57)$$

A tensão máxima no ponto imediatamente depois da saída da matriz é expressa pela equação (5.31), ou seja

$$\sigma_f = \sigma_f(w) = \frac{N}{A_f} + \frac{|M|r}{I} \quad (5.58)$$

No fim desta etapa, as identificações dos estados das fibras são as seguintes:

- i. para $w < w_0$
 - se $\sigma_f(w) < \sigma_{fu} \Rightarrow \text{flag I}$
 - se $\sigma_f(w) \geq \sigma_{fu} \Rightarrow \text{flag IV}$
- ii. para $w \geq w_0$
 - se $\sigma_f(w_0) < \sigma_{fu} \Rightarrow \text{flag II}$
 - se $\sigma_f(w_0) \geq \sigma_{fu} \Rightarrow \text{flag IV}$

5.11. A relação N-w no processo de Pull-Out

No processo pull-out não existe mais σ_d e o terminal da fibra com maior comprimento enterrado não move mais. A força de atrito assume controle totalmente.

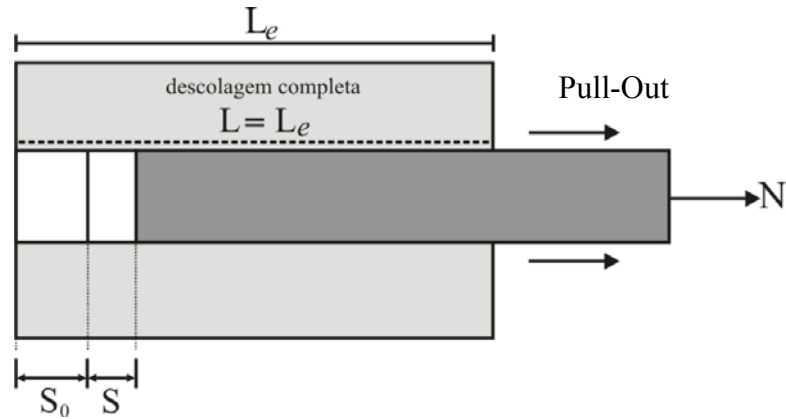


Fig. 5.14. Processo pull-out: fibra sendo puxada para fora da matriz.

Podemos supor que o terminal móvel teve deslocamento S_0 no início do processo de pull-out, então a força axial depois da saída imediatamente da matriz é

$$N = \pi d_f (L_e - S_0) \tau_0 e^{f\theta} \quad (5.59)$$

A relação geométrica exige que

$$w_0 \cos(\theta) = \frac{S_0}{2} + \Delta \frac{S_0}{2} + \Delta l_0 = \frac{S_0}{2} + \left(\frac{S_0}{2} + l_0 \right) \frac{N}{E_f d_f} \quad (5.60)$$

ou seja

$$w_0 \cos(\theta) = \frac{S_0}{2} + \left(\frac{S_0}{2} + l_0 \right) \frac{4\tau_0 (L_e - S_0) e^{f\theta}}{E_f d_f} \quad (5.61)$$

Pela equação (5.61), podemos obter S_0

$$S_0 = S_0(w_0) = A \cdot S_0^2 + B \cdot S_0 + C \quad (5.62)$$

com

$$\begin{aligned}
A &= \frac{-2\tau_0 e^{f\theta}}{E_f d_f} \\
B &= \frac{1}{2} + \frac{4\tau_0 e^{f\theta}}{E_f d_f} \left(\frac{L_e}{2} - l_0 \right) \\
C &= \frac{4\tau_0 e^{f\theta} L_e l_0}{E_f d_f} - w \cos(\theta)
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Se $S_0 \geq L_e$, a fibra está totalmente fora da matriz (*flag* III) e se $S_0 < L_e$, então podemos ainda supor que o terminal tem mais um deslocamento S e a força inicial é dado por

$$N = \pi d_f (L_e - (S_0 + S)) \tau_0 e^{f\theta} \tag{5.64}$$

Pela relação geométrica, para $w > w_0$, temos

$$\begin{aligned}
w \cos(\theta) &= \frac{S_0 + S}{2} + \left(\frac{S_0 + S}{2} + l_0 \right) \frac{N}{E_f d_f} = \\
&= \frac{S_0 + S}{2} + \left(\frac{S_0 + S}{2} + l_0 \right) \frac{4\tau_0 (L_e - S_0 - S) e^{f\theta}}{E_f d_f}
\end{aligned} \tag{5.65}$$

A equação (5.65) possui mesma forma que a equação (5.62), e, portanto a mesma solução, apenas mudando S_0 por $S_0 + S$ e w_0 por w .

$$S_0 + S = (S_0 + S)(w_0) = A \cdot (S_0 + S)^2 + B \cdot (S_0 + S) + C \tag{5.66}$$

A, B e C definidos por (5.63).

Se $S_0 + S \geq L_e$, a fibra está totalmente fora da matriz, *flag* III. Se $S_0 + S < L_e$, continua no processo de pull-out, *flag* II.

Levando $S_0 + S$ à equação (5.64), temos a relação

$$N = N(S_0 + S) = N(w) \tag{5.67}$$

Que é a força axial no processo pull-out.

5.12. Resistência aparente da fibra

É possível calcular a força na fibra, resultante das forças **N** e **P** na seção transversal da fibra, perpendicular ao plano da trinca, por

$$F_{ar} = N \cos(\theta) + P \sin(\theta) \quad (5.68)$$

A resistência aparente representa a tensão máxima na fibra antes de seu rompimento. Sendo calculada pela divisão da força resultante máxima (sofrida até quebrar) da fibra pela área da seção da fibra, isto é:

$$\sigma_{ap} = \frac{F_{ar}}{A_f} = \frac{N \cos(\theta) + P \sin(\theta)}{A_f} \quad (5.69)$$

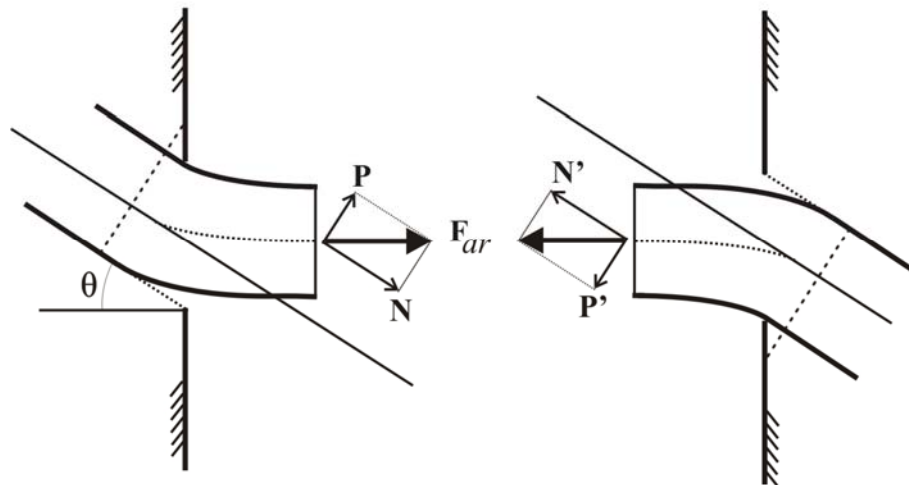


Fig. 5.15. Força aparente resultante.

5.13. Tensão proveniente das fibras no plano trincado (Bridging stress)

A tensão no composto é obtida pela soma das contribuições individuais que cada fibra atribui ao composto, então, um material reforçado com uma fração volumétrica V_f de fibras distribuídas aleatoriamente na matriz com um ângulo θ à normal ao plano da trinca, a tensão proveniente das fibras no plano trincado (*bridging stress*), em relação à meia abertura w , é dada por

$$\sigma_c(w) = \frac{V_f}{A_f} \int_0^{\arctan(L_f/2d_f)} \int_0^{(L_f \cos(\theta) - d_f \sin(\theta))/2} N(w, \theta, z) P(\theta) p(z) dz d\theta \quad (5.70)$$

onde $N(w, \theta, z)$ é a força axial na fibra em seu respectivo processo.

$P(\theta)$ e $p(z)$ são as probabilidades de ocorrer a distância z do centro da fibra até o plano da trinca e a orientação do ângulo θ entre a fibra e o plano perpendicular ao plano da trinca, definidos por [6]

$$p(z) = \frac{2}{L_f} \quad \text{para } 0 \leq z \leq \frac{L_f \cos(\theta) - d_f \sin(\theta)}{2} \quad (5.71)$$

$$P(\theta) = \sin(\theta) \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \arctan\left(\frac{L_f}{2d_f}\right) \quad (5.72)$$

5.14. Energia de fratura (Tenacidade)

O aumento de energia de fratura G_c , com unidade J/m^2 , é encontrada através da área formada pela curva $\sigma_c - w$, ou seja

$$G_c = \int_0^{w^*} \sigma_c(w) dw \quad (5.73)$$

onde w^* é uma abertura suficiente para que todas as tensões nas fibras estejam zeradas (fibras quebradas ou fora da matriz).

SIMULAÇÕES E RESULTADOS

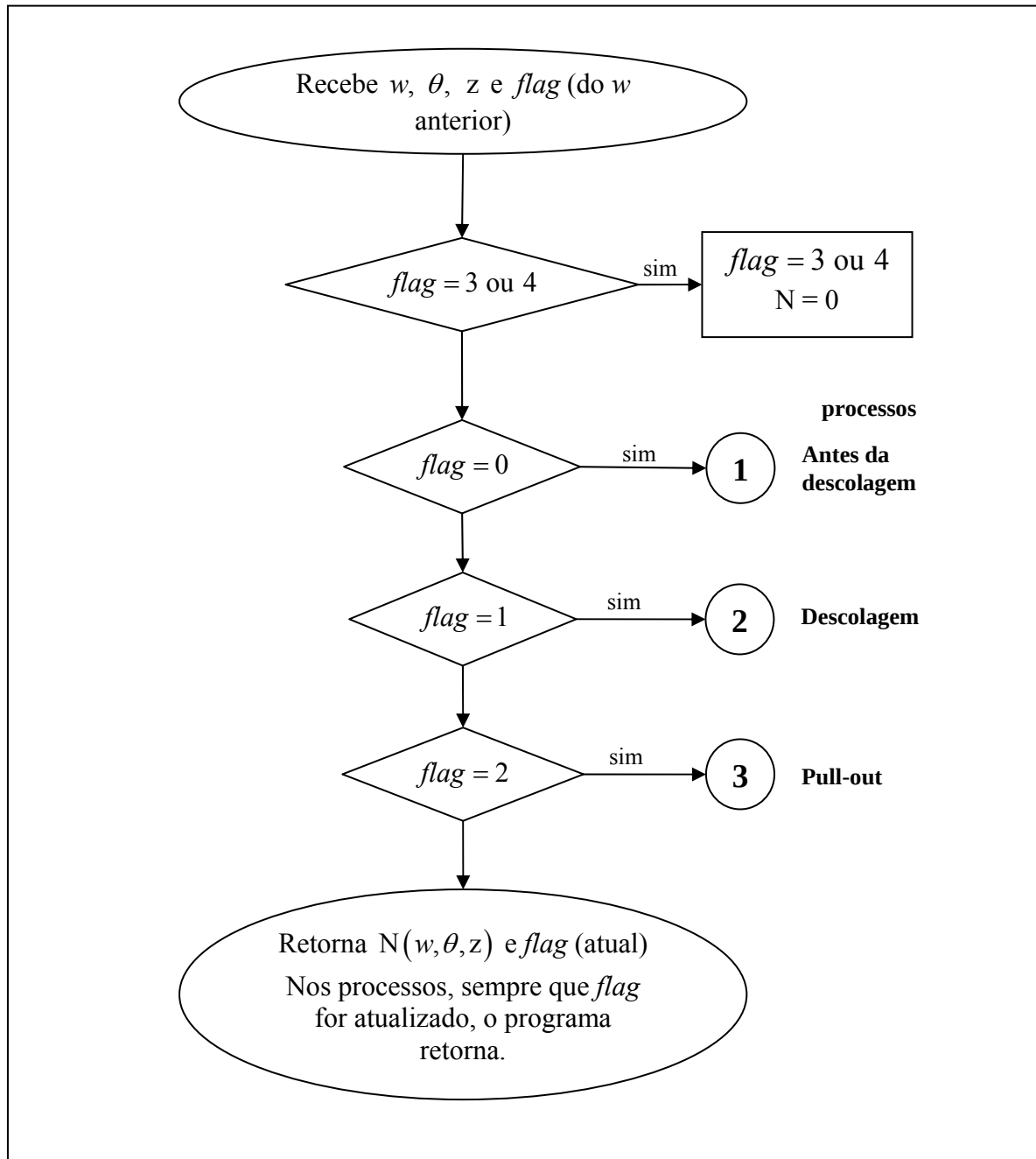
6.1. Fluxograma para desenvolvimento do programa para calcular tensão originada das fibras

O pensamento para desenvolver o programa é pensar no estado anterior da fibra e tratá-la para ver qual o estado seguinte, se continua no mesmo estado, ou se quebra.

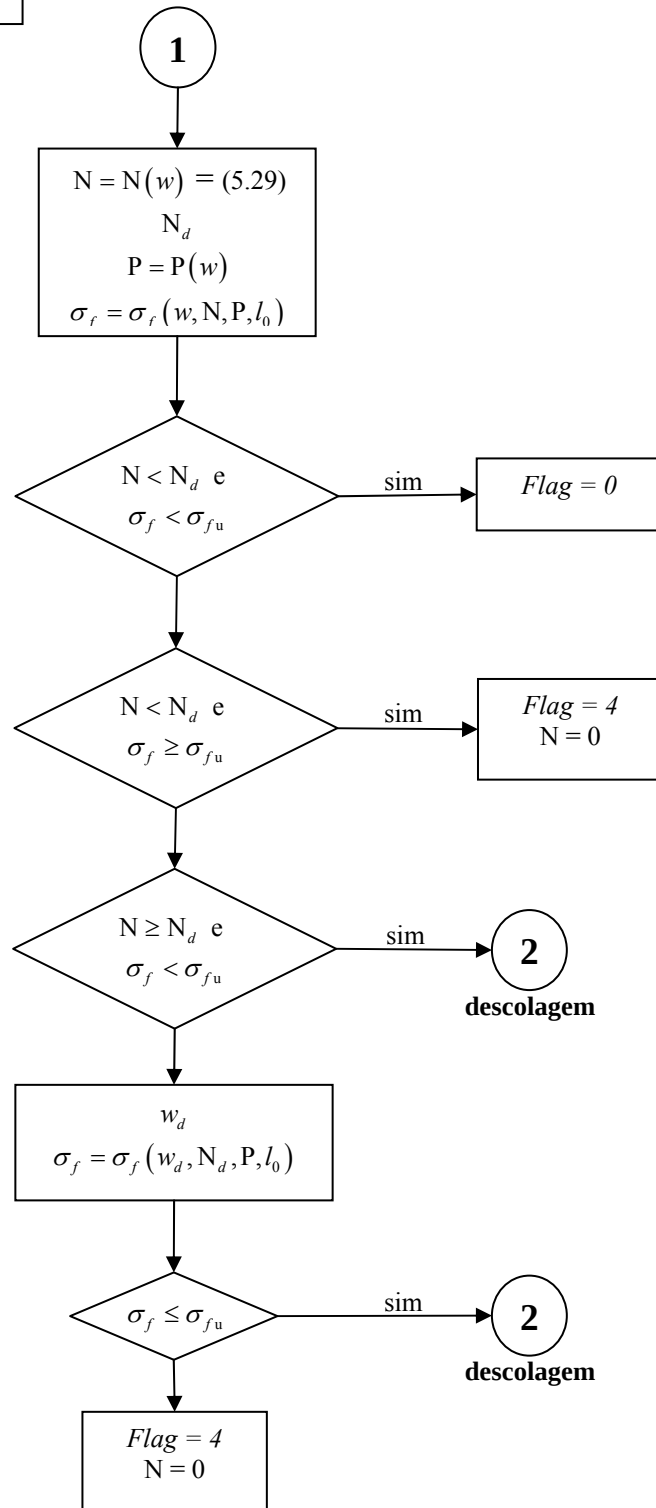
Para uma fibra de inclinação θ , com uma distancia z do centro da fibra ao plano trincado, a fibra irá sofrer um processo para cada meia abertura w que a trinca se abrir, quando a mesmo se propaga.

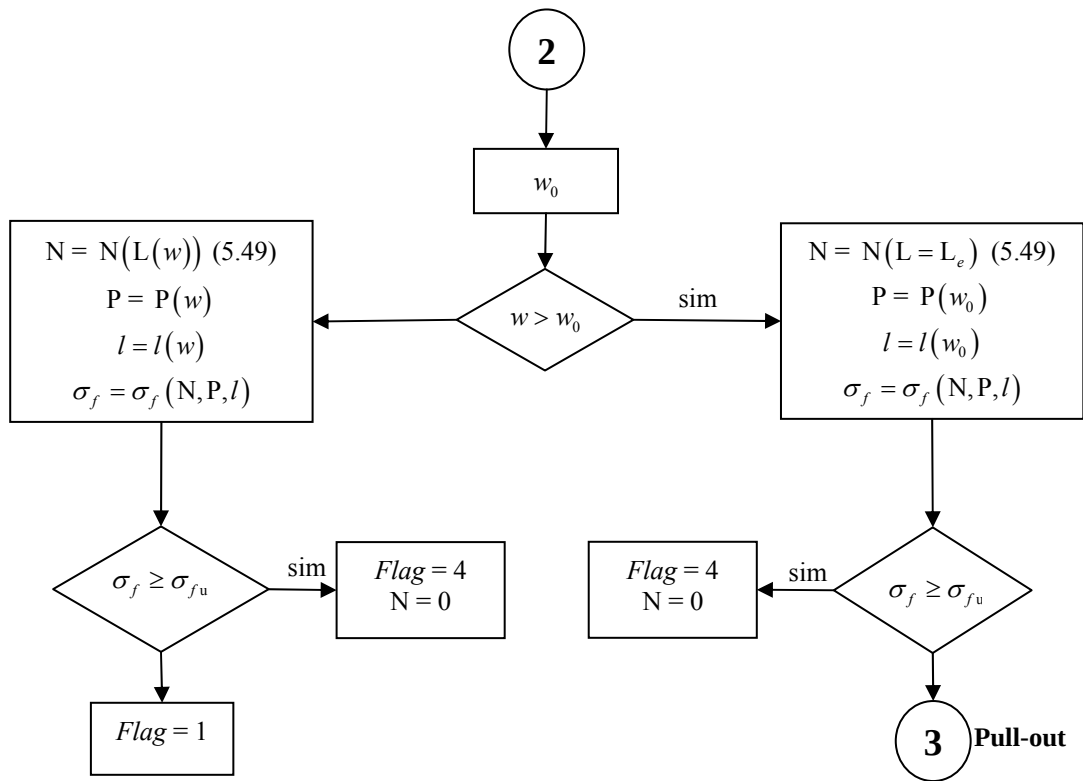
No início, todas as fibras estão no *flag 0*, então a trinca abre para w e verifica-se se cada fibra continua em *flag 0* (mesmo estado), se passou para o próximo estado (*flag I*), se está quebrada (*flag IV*) ou se está fora da matriz (*flag III*), guardando sempre a força axial N e atualizando o *flag* para essa abertura w . A trinca se propaga novamente para um novo w , e levará o *flag* do w anterior para ser analisado e então atualizar o estado para o novo w . E assim sucessivamente, para cada ângulo e z , toda vez que a trinca se propagar. Quando retornar do tratamento dos processos, a força N é levada para a integral de $\sigma_c(w)$, temos então a tensão proveniente de todas as fibras que estão em todos os ângulos θ e distâncias possíveis para o corrente w . Fazendo a integração de $\sigma_c(w)$, obtemos o aumento da energia de fratura (tenacidade) do material que foi adicionado pelas fibras.

Fluxograma para tratamento de $N(w, \theta, z)$.

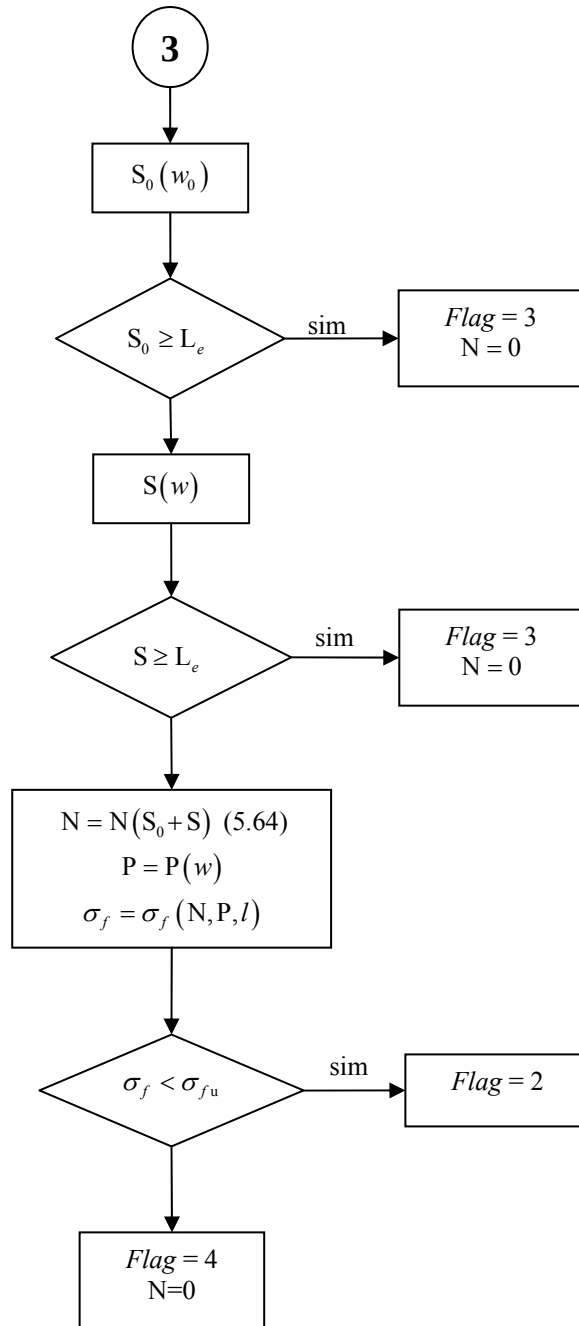


Antes da descolagem



Processo de descolagem


Processo de Pull-out



Os resultados foram obtidos pela programação no Software MATLAB, cujos programas estão em anexos.

6.2. Formas de deformação da fibra

Fazendo a translação das equações (5.21) a (5.25) do sistema (x, y) para o sistema (x_p, y_p) , $y_p = X - u_0$ e $x_p = Y - v_0$ e pela simetria da fibra, podemos simular a deformação da fibra para quando a trinca propagar para w .

Parâmetros usados: $E_f = 175\text{GPa}$, $\nu = 0.25$, $d_f = 0.046\text{mm}$, ZHANG e Li [15], e força axial assumida $N = 10\text{MPa}$.

As figuras abaixo representam a deformação da fibra para quando a trinca se abre até $w = 0.6d_f$.

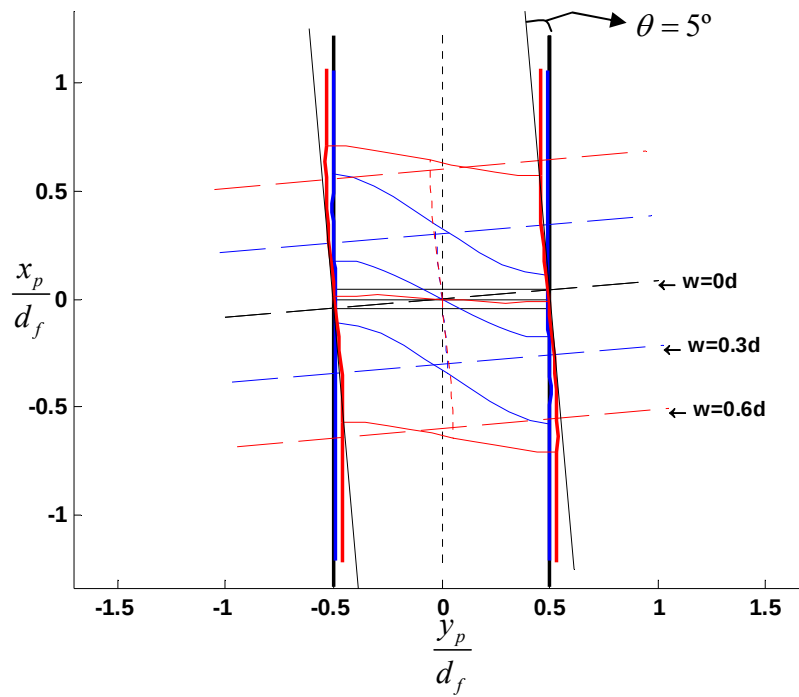


Fig. 6.1. A forma deformada de uma fibra inclinada 5° ao normal do plano da trinca.

As figuras seguintes foram simuladas para uma abertura maior do que o diâmetro da fibra, para alguns ângulos.

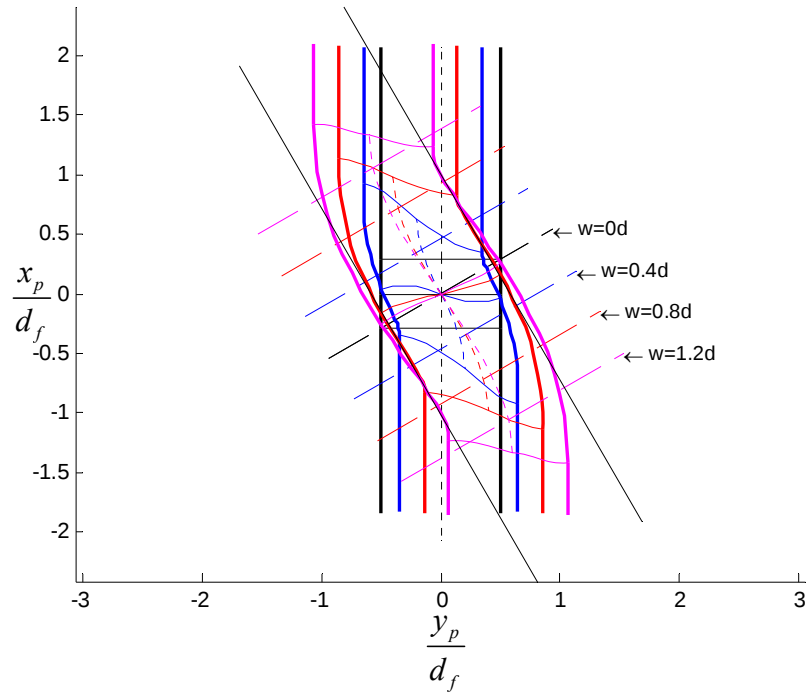


Fig. 6.6. Para w variando até $1,2d_f$ ângulo igual a 30° .

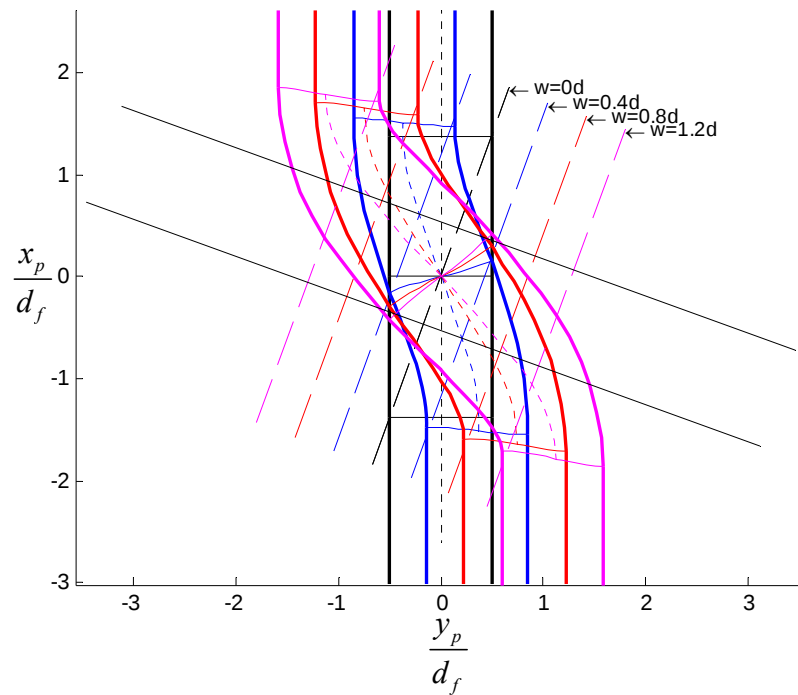


Fig. 6.7. Para w variando até $1,2d_f$ ângulo igual a 70° .

Podemos observar que quanto menor o ângulo θ , a fibra fica mais próxima de estar perpendicular ao plano da trinca, e, obviamente, há pouca distorção na forma da fibra, facilitando a saída da fibra da matriz. Consequentemente, a fibra com θ pequeno terá menos contribuição à resistência de propagação da trinca do que uma fibra com ângulo de inclinação um pouco maior. As figuras acima são apenas para visualizar como a fibra se deforma em relação à meia abertura w da trinca, fato confirmado em testes e, também de fácil imaginação geométrica e física.

6.3. Tensão axial numa fibra nos processos *Debonding* e *Pull-out*

A Figura 6.8 mostra a curva típica para relação $\sigma - w$ para uma fibra.

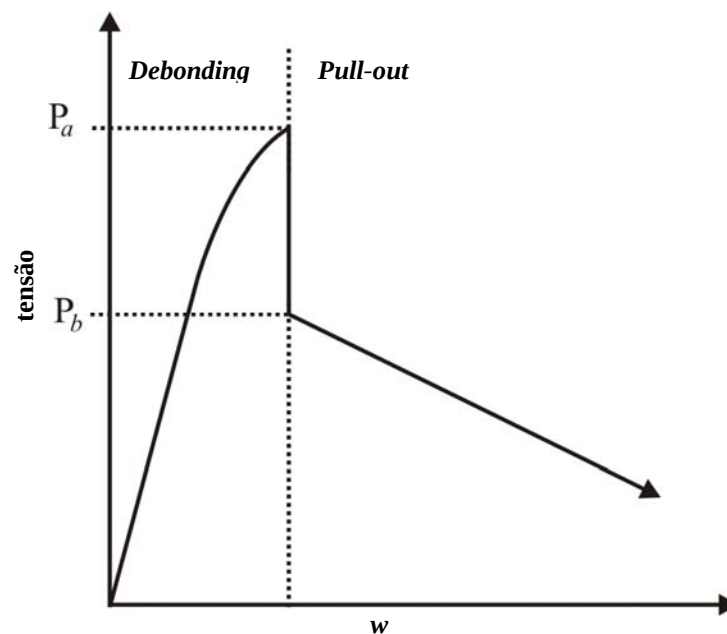
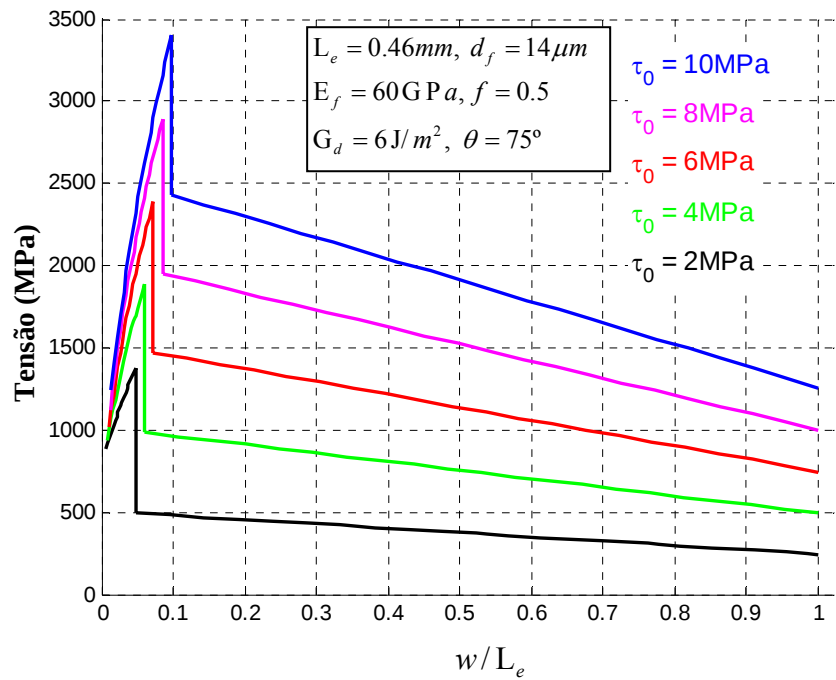
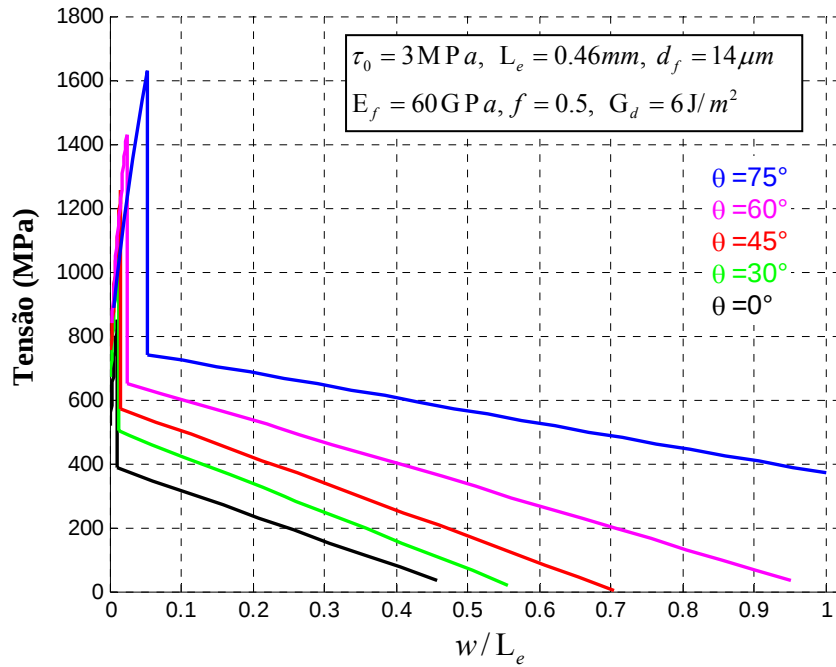


Fig. 6.8. Típica curva de tensão-deslocamento para *debonding* e *pull-out* processos.

No processo de descolagem, a ligação entre a fibra e a interface da matriz é quebrada e a força de atrito começa a atuar.

Quando a descolagem é completa, a tensão máxima P_a é alcançada. Logo após, acontece um relaxamento na tensão, caindo para P_b , e a fibra começa a ser puxada para fora, sendo arrancada da matriz (*pull-out* processo).

As figuras 6.9 a 6.15 mostram resultados da tensão σ_f (5.58) para uma simples fibra.



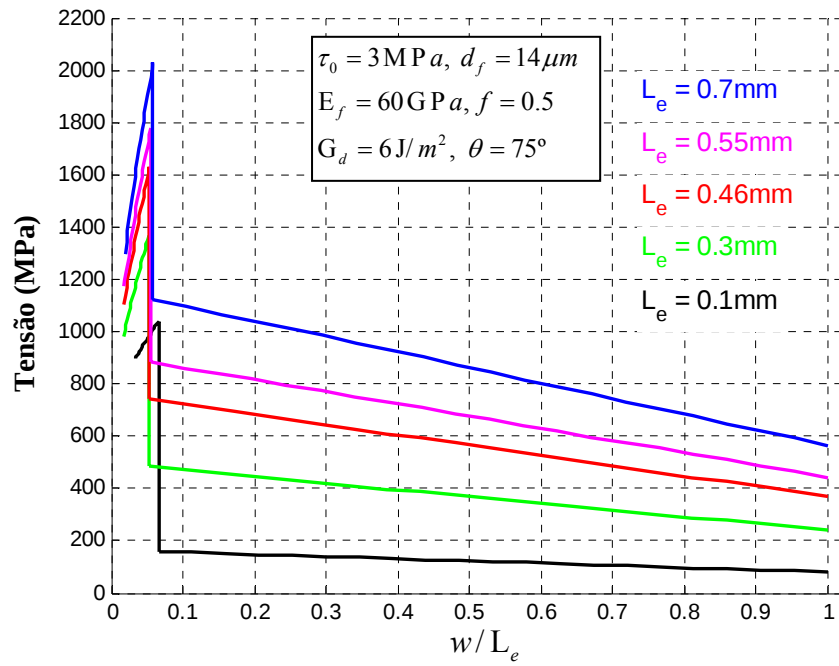


Fig. 6.11. Influência do comprimento enterrado L_e nos processos Debonding e Pull-Out.

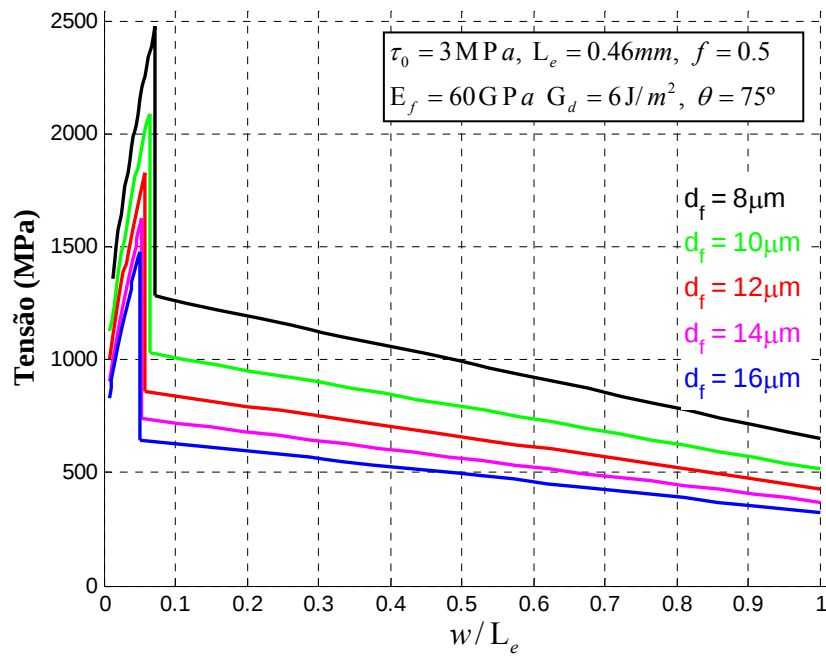


Fig. 6.12. Influência do diâmetro d_f da fibra nos processos Debonding e Pull-Out.

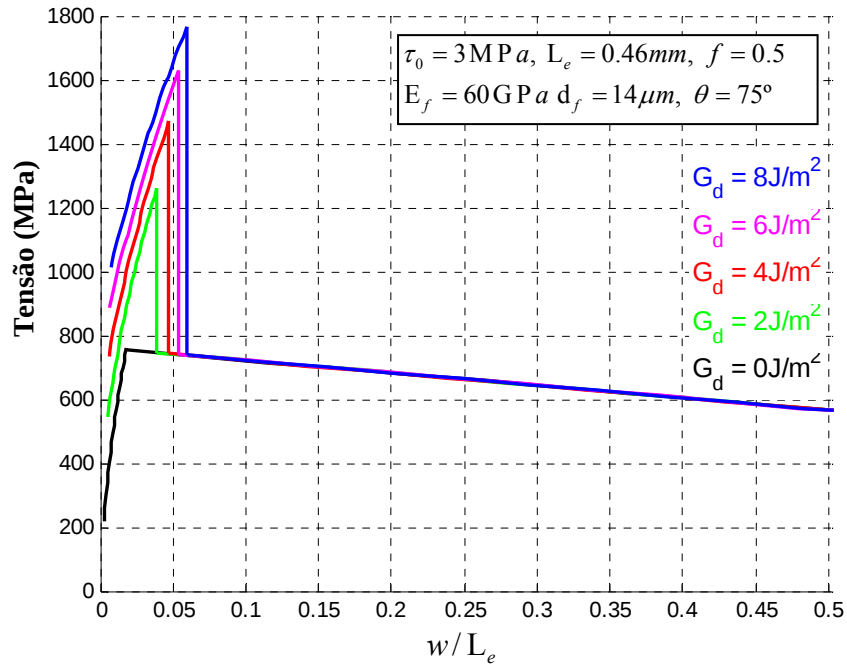


Fig. 6.13. Influência da tenacidade da interface G_d nos processos Debonding e Pull-Out.

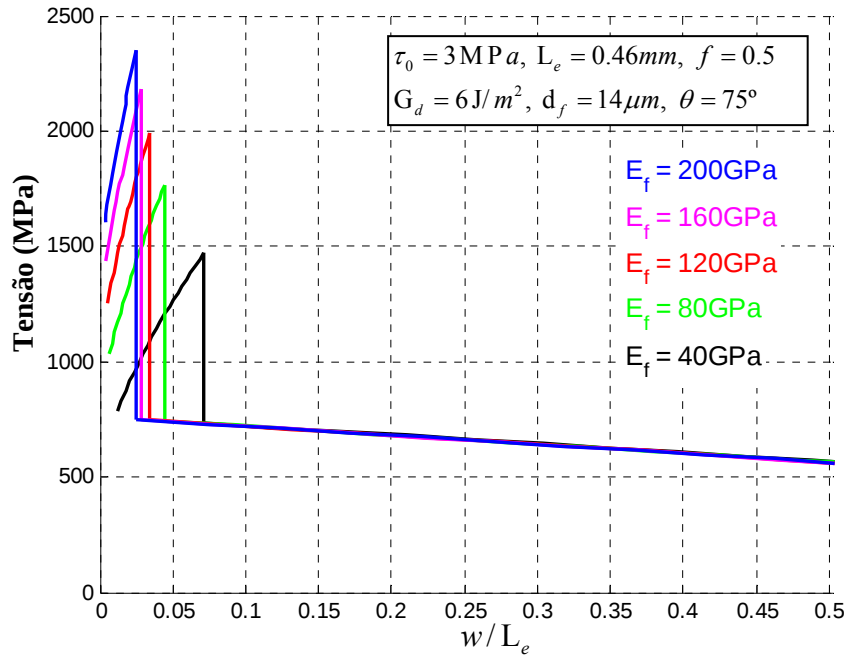


Fig. 6.14. Influência do módulo de elasticidade da fibra E_f nos processos Debonding e Pull-Out.

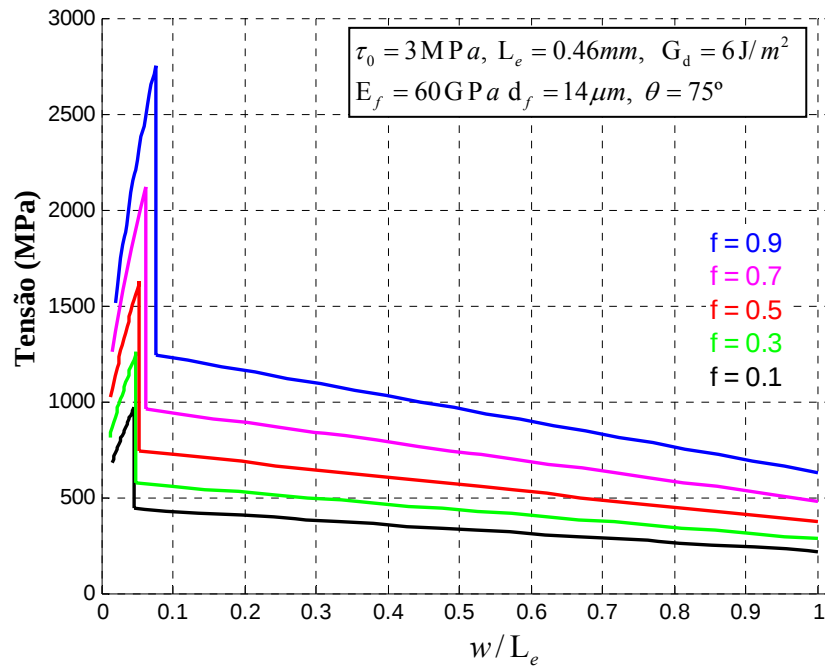


Fig. 6.15. Influência do coeficiente de snubbing f nos processos Debonding e Pull-Out.

As figuras mostram o efeito do estudo dos parâmetros (inclinação, resistência cisalhante, comprimento embutido da fibra, diâmetro da fibra, tenacidade da interface, módulo de elasticidade da fibra e coeficiente de atrito). A tabela 6.1 mostra a Influência dos parâmetros na tensão nos processos debonding e pull-out.

Tabela 6.1. Influência dos parâmetros na tensão dos processos debonding e pull-out.

Parâmetro	Debonding	Pull-out
$\theta \uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$\tau_0 \uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$L_e \uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$d_f \uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$G_d \uparrow$	$\uparrow$	Não afeta
$E_f \uparrow$	$\uparrow$	Não afeta
$f \uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

Com exceção do módulo de elasticidade e da tenacidade da interface, todos os outros parâmetros influenciam tanto na descolagem quanto no pull-out, mas somente o diâmetro da fibra que ao ser aumentando diminui as tensões nos processos, obviamente, pois quanto maior a área a ser aplicada força, menor a tensão. A resistência de atrito na interface τ_0 é o parâmetro que mais influenciou no aumento da tensão nos processos, principalmente no *pull-out*, quanto maior a força cisalhante, forças atuantes maiores serão necessárias para que os processos se desenvolvam, então, maiores tensões. A tenacidade da interface e o módulo de elasticidade da fibra atuam somente no processo de descolagem.

6.4. Tensão aparente

A resistência aparente é dada pela equação (5.69).

A força axial N é calculada em três estágios da fibra de acordo com a abertura da trinca

- antes da descolagem da fibra, $w < w_d$
- descolagem da fibra, $w_d \leq w < w_0$
- pull-out, $w_0 \leq w < L_e$

sendo w_d a abertura da trinca no início da descolagem e w_0 início do pull-out. Foi usado incremento pequeno para cada trecho, variando de 10.000 a 150.000 pontos calculados em cada estágio, dependendo do parâmetro variado em cada figura..

Não foram encontrados trabalhos sobre tensão aparente em compostos cerâmicos, com isso, para fim de comparações, será usado um exemplo matriz composta de cimento com fibra de carbono.

KATZ e LI [42] investigaram experimentalmente a influência do ângulo da fibra na força máxima antes da ruptura da fibra. As propriedades da fibra, matriz e interface são listadas na tabela seguinte. A força de ligação entre fibra/matriz τ_0 é obtida no teste de pull-out [20].

Tabela 6.2. Parâmetros usados na análise.

Item	d_f (mm)	E_f (GPa)	E_m (GPa)	σ_{fu} (MPa)	τ_0 (MPa)	f	L_e mm
Valor	0.046	175	20	930	0.4	0.5	25.7

A Figura 6.18 mostra a comparação entre os modelos propostos com dados experimentais e o modelo proposto por ZHANG e LI [15], tal modelo não leva em consideração as tensões geradas pela fibra antes do início do processo de descolagem, mas considerou a localização de deformação na saída da matriz pela teoria de uma viga sobre a base elástica infinita [16].

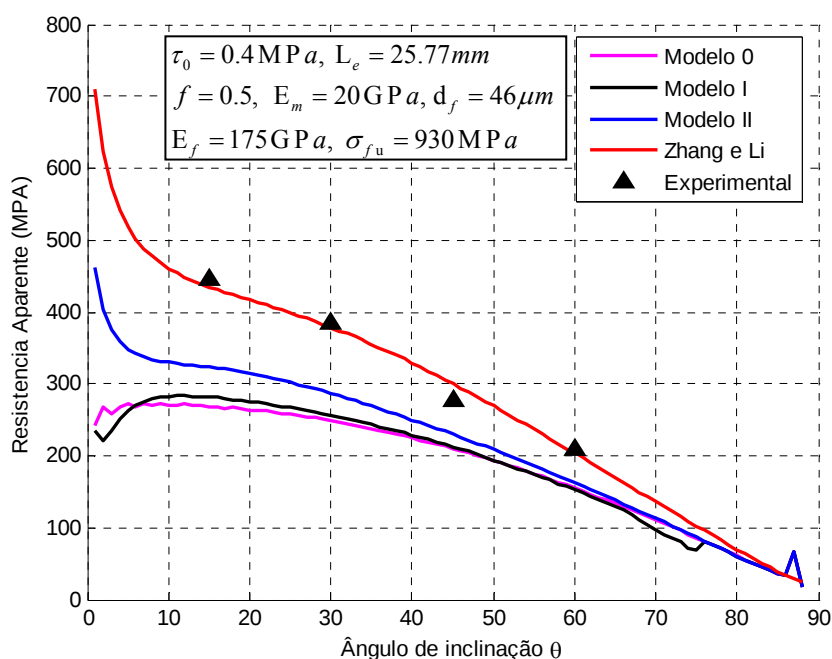


Fig. 6.16. Comparação entre os modelos propostos, dados experimentais e modelo de ZHANG e LI.

Pelas figuras seguintes, a mudança de alguns parâmetros ajusta os modelos adequadamente aos dados experimentais.

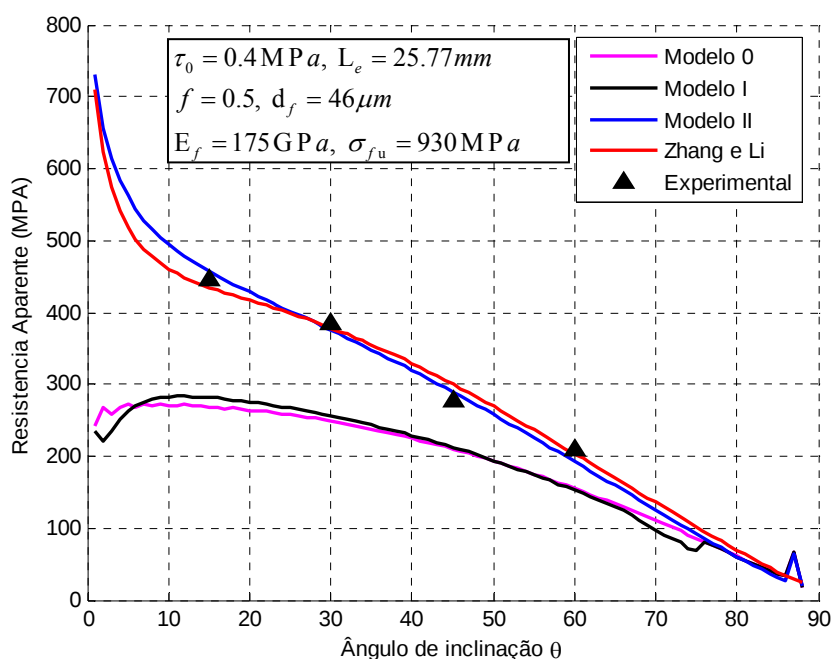


Fig. 6.17. Comparação entre os modelos propostos, dados experimentais e modelo de ZHANG e LI com $E_m = 2,5 \text{ GPa}$ para os Modelos propostos.

Para módulos de elasticidade da matriz baixos em relação à fibra e módulos altos da fibra em relação à matriz, a tensão aparente aumenta, uma vez que a deformação localizada na saída da matriz aumenta. Conseqüentemente a deflexão da fibra diminui e a fibra pode carregar mais.

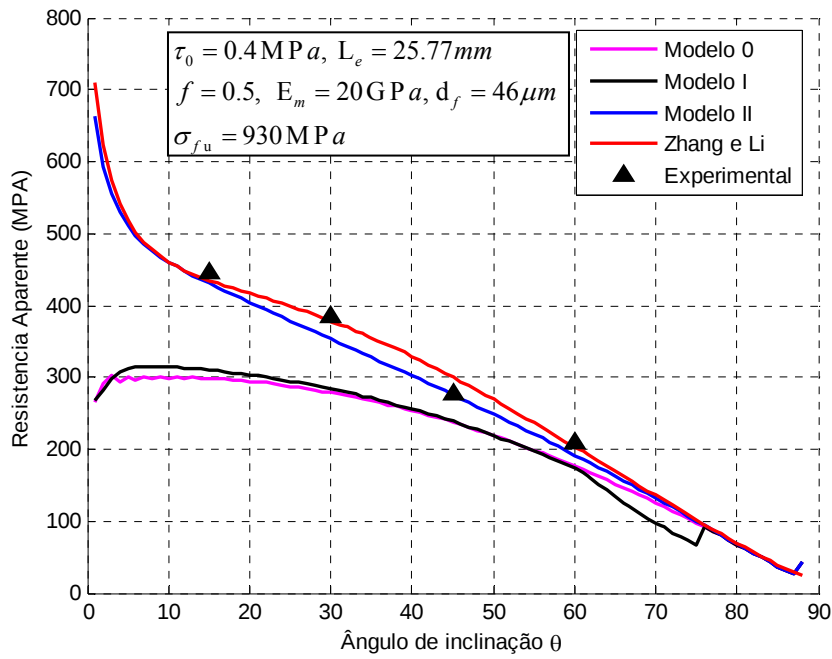


Fig. 6.18. Comparação entre os modelos propostos, dados experimentais e modelo de ZHANG e LI com $E_f = 480 \text{ GPa}$ para os Modelos propostos.

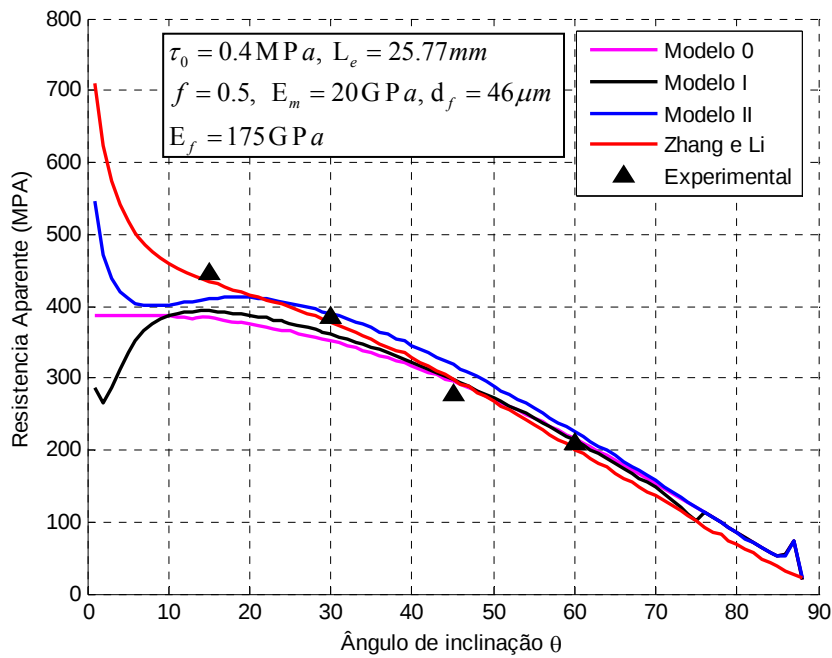


Fig. 6.19. Comparação entre os modelos propostos, dados experimentais e modelo de ZHANG e LI com $\sigma_{fu} = 1400 \text{ MPa}$ para os Modelos propostos.

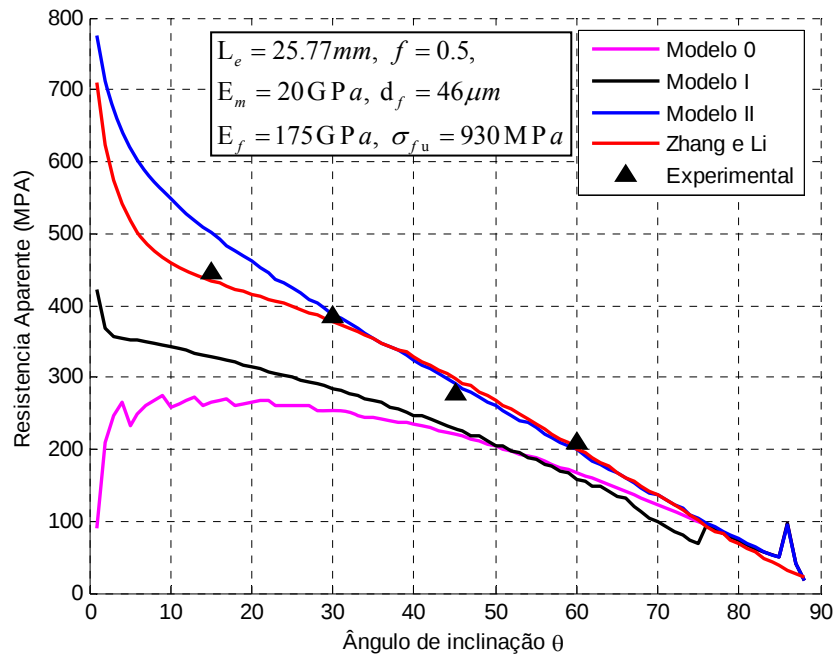


Fig. 6.20. Comparação entre os modelos propostos, dados experimentais e modelo de ZHANG e LI com $\tau_0 = 2 \text{ MPa}$ para os Modelos propostos.

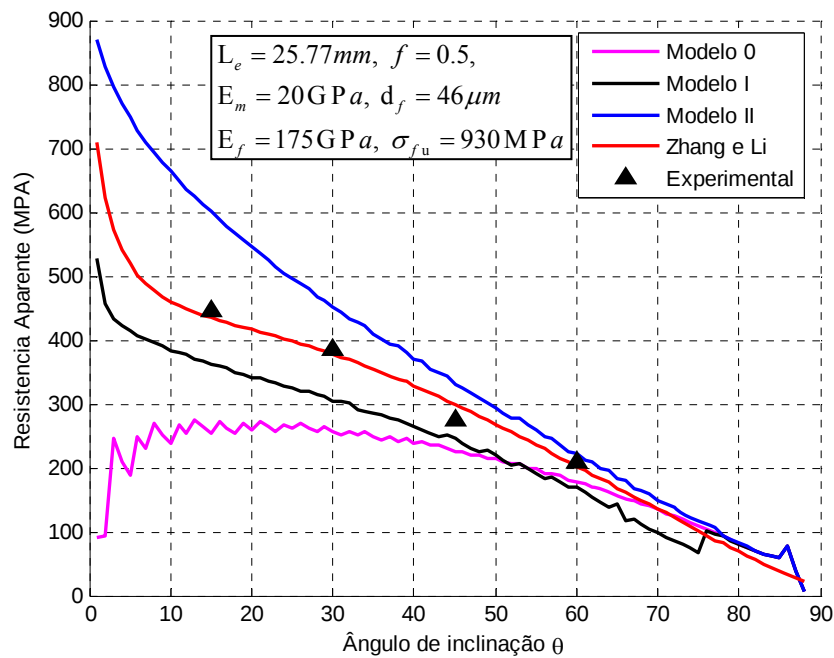


Fig. 6.21. Comparação entre os modelos propostos, dados experimentais e modelo de ZHANG e LI com $\tau_0 = 4 \text{ MPa}$ para os Modelos propostos.

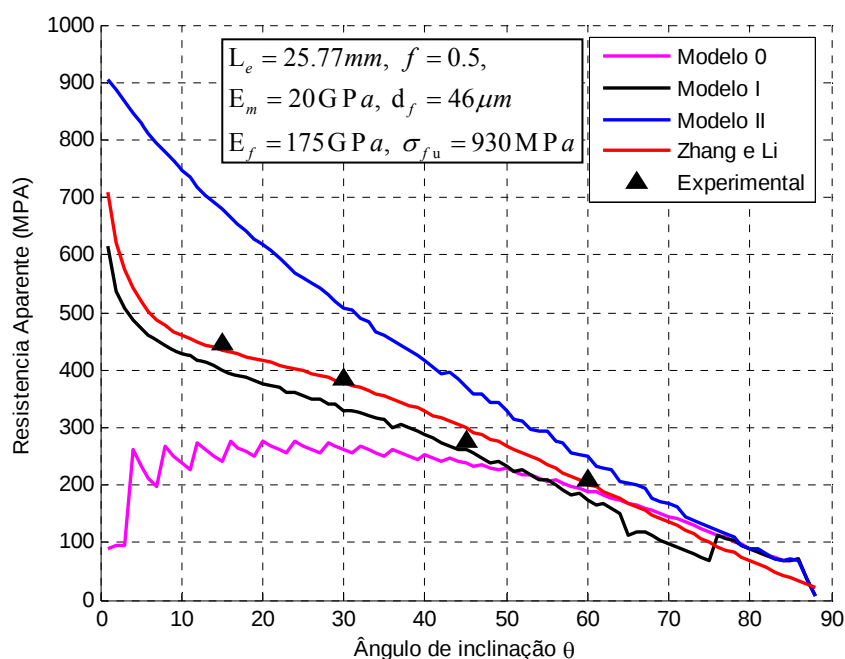


Fig. 6.22. Comparação entre os modelos propostos, dados experimentais e modelo de ZHANG e LI com $\tau_0 = 7 \text{ MPa}$ para os Modelos propostos.

Observamos que o Modelo II tem um comportamento mais próximo dos dados experimentais e ao Modelo de ZHANG e LI, justamente por considerar a localização de deformação na matriz. As propriedades consideradas nos gráficos acima, afetam diretamente a localização de deformação na matriz proposta no Modelo II. Acreditamos que se a deformação plástica e o efeito spalling forem considerados, certamente dará melhores resultados.

O Modelo 0 somente apresenta bons resultados quando a tensão de resistência da fibra é alto, pois exige uma maior aplicação da força para que a fibra se quebre. O modelo 0 somente pode ser considerado satisfatório quando a distribuição de tensão e os deslocamentos não são muito próximas do plano da trinca (Saint-Venant). Quando pensamos que a força de cisalhamento atua nas seções da fibra imediatamente após a saída da fibra na matriz, devemos aplicar tratamentos diferentes para a deformação de l , o que é sugerido no Modelo I, e com isso obtemos melhores resultados neste modelo.

O modelo de ZHANG e LI considera a tenacidade da interface G_d igual a 0. As comparações seguintes entre os Modelos 0-II e o modelo de ZHANG e LI mostram a significativa influência de G_d na tensão de ruptura da fibra.

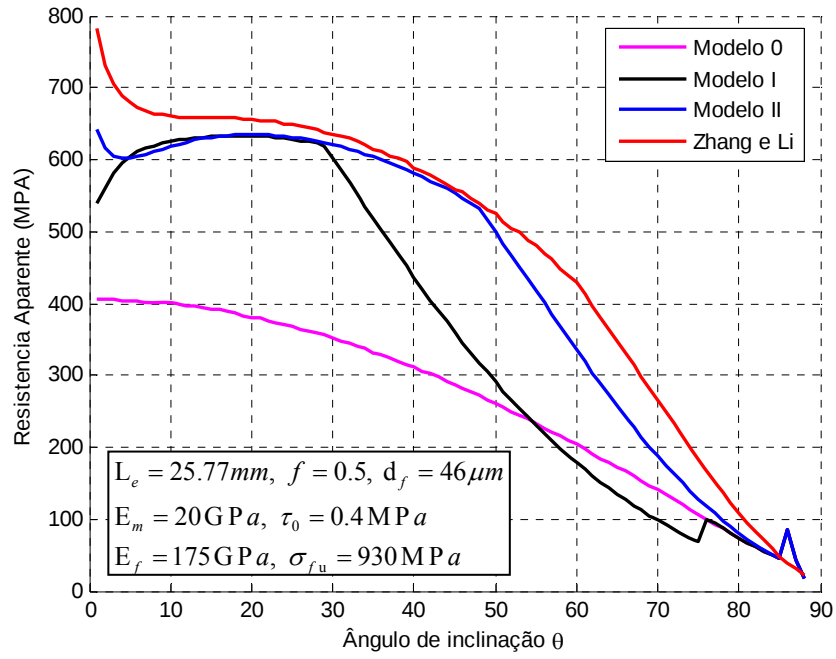


Fig. 6.23. Comparação entre os modelos propostos e o modelo de ZHANG e LI com $G_d = 8 \text{ J/m}^2$.

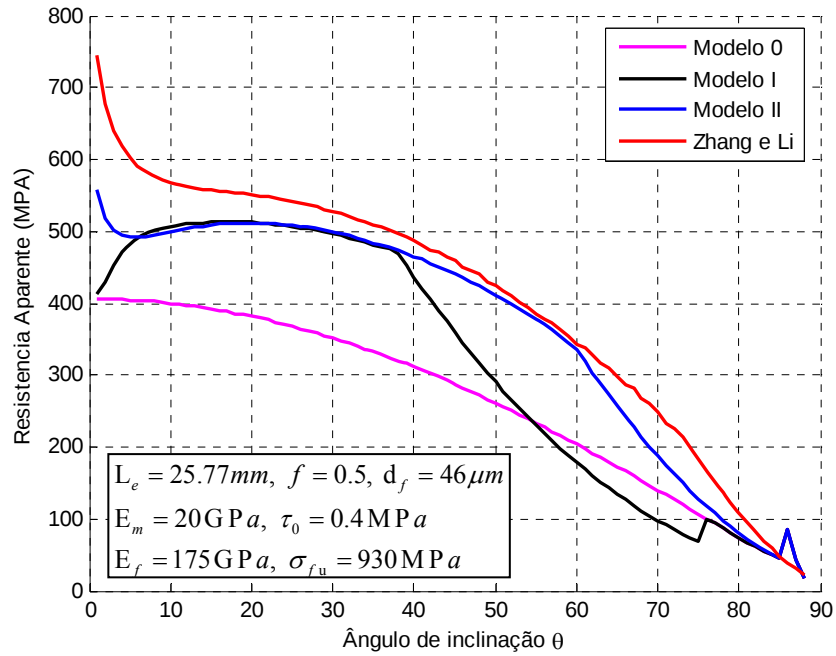


Fig. 6.24. Comparação entre os modelos propostos e o modelo de ZHANG e LI com $G_d = 4 \text{ J/m}^2$.

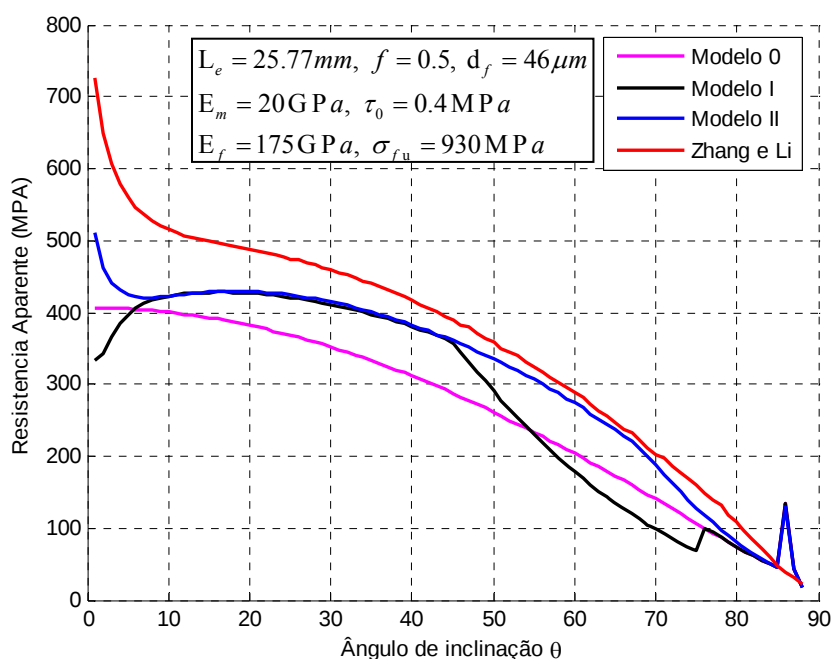


Fig. 6.25. Comparação entre os modelos propostos e o modelo de ZHANG e LI com $G_d = 2 \text{ J/m}^2$.

Pelas figuras 6.23 a 6.25 verificamos que com a tenacidade da interface maior, para que a fibra quebre, mais força é exigida. Como observado na seção anterior, G_d tem influência somente no processo de descolagem, atingindo picos altos nesse processo, e podemos concluir que quanto maior esse valor, maior será a contribuição à resistência de propagação da trinca, principalmente para ângulos menores.

As figuras 6.26 e 6.27 mostram a influência da menor parte embutida da fibra na matriz. Nota-se que quando a parte enterrada é pequena, a tensão aumenta e depois começa a cair, como era de se esperar, pois fibras pequenas deverão dar maiores contribuições para ângulos intermediários (30 a 60°), ainda que pouca tensão seja necessária para que a fibra quebre. Quando o ângulo de inclinação é muito pequeno ou muito grande, a fibra estará quase perpendicular ao plano da trinca ou quase que paralelo, e com tensões baixas irão quebrar. Ao contrário, L_e relativamente grande, as tensões de quebra serão bem maiores, e a fibra quebra com altas tensões para ângulos menores, pois para ângulos maiores a muita influência do efeito de bending, e a tensão de quebra diminui gradativamente.

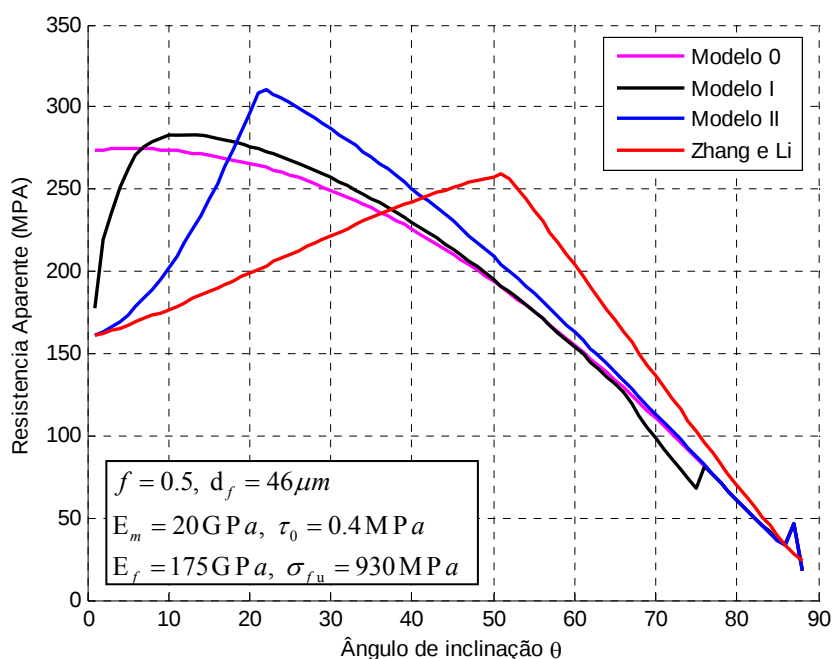


Fig. 6.26. Comparação entre os modelos propostos e o modelo de ZHANG e LI com $L_e = 3mm$.

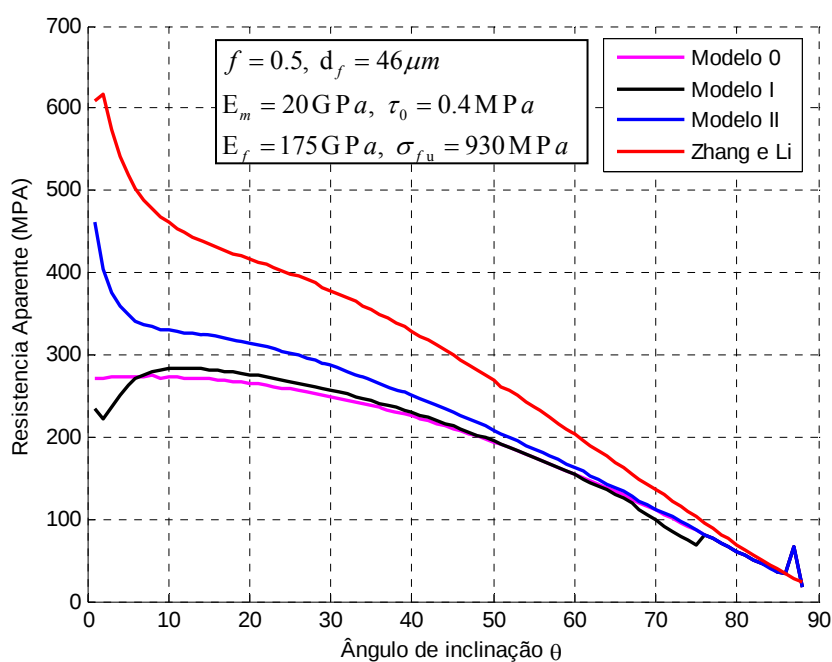


Fig. 6.27. Comparação entre os modelos propostos e o modelo de ZHANG e LI com $L_e = 15.7mm$.

Os modelos mostram um comportamento adequado aos dados experimentais e ao modelo de ZHANG e LI, mesmo desconsiderando alguns efeitos importantes da propagação da trinca. Assim, podemos claramente perceber que um tratamento mais adequado aos

modelos levando em conta esses efeitos, como à quebra da matriz na saída da fibra (*spalling*), plasticidade dos materiais, efeito de Poisson, resultará em modelos mais aperfeiçoados e eficientes.

6.5. Tensão na matriz composta (*Bridging stress*) e tenacidade

Para cada abertura da trinca (w), a tensão no composto é dada por (equação (5.70))

Abaixo, são comparados resultados com dados experimentais para um material de cimento composto por 2% de fibras de Kevlar (sintética) [13]. As propriedades mecânicas do material estão na tabela seguinte.

Tabela 6.1. Dimensões e propriedades mecânicas do composto de Kevlar/Cimento.

Item	d_f (mm)	L_f (mm)	E_f (GPa)	E_m (GPa)	σ_{fu} (MPa)	τ_0 (MPa)	f	V_f %
Valor	0,012	12,7	69,8	13	3310	4,5	0,6	2

A figura mostra os resultados do modelo de MAALEJ et al [13] comparado com dados experimentais. Segundo Maalej et al, a tensão máxima no composto medido pelos dados experimentais é de 4,2MPa, sendo que seu modelo chegou a 21MPa. Os dados experimentais foram obtidos em testes feitos por Youjiang Wang (1989).

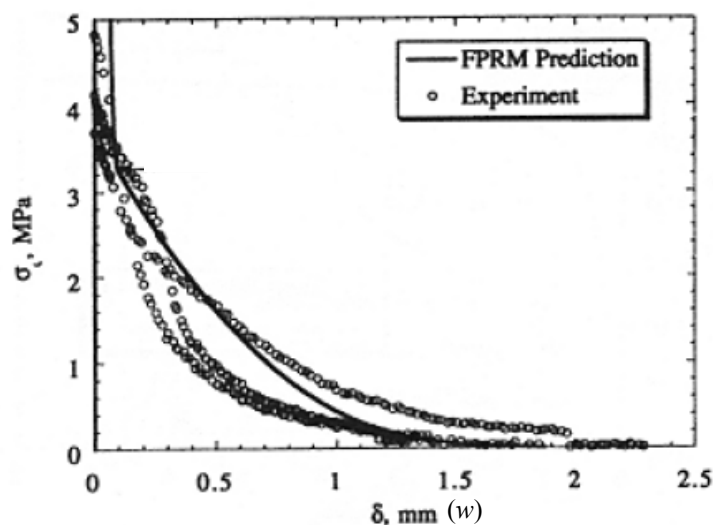


Fig. 6.28. Tensão da matriz composta, modelo proposto por MAALEJ et al com dados experimentais.

A Figura 6.29 mostra a comparação entre os modelos desenvolvidos neste trabalho com os dados experimentais observados na Figura 6.28.

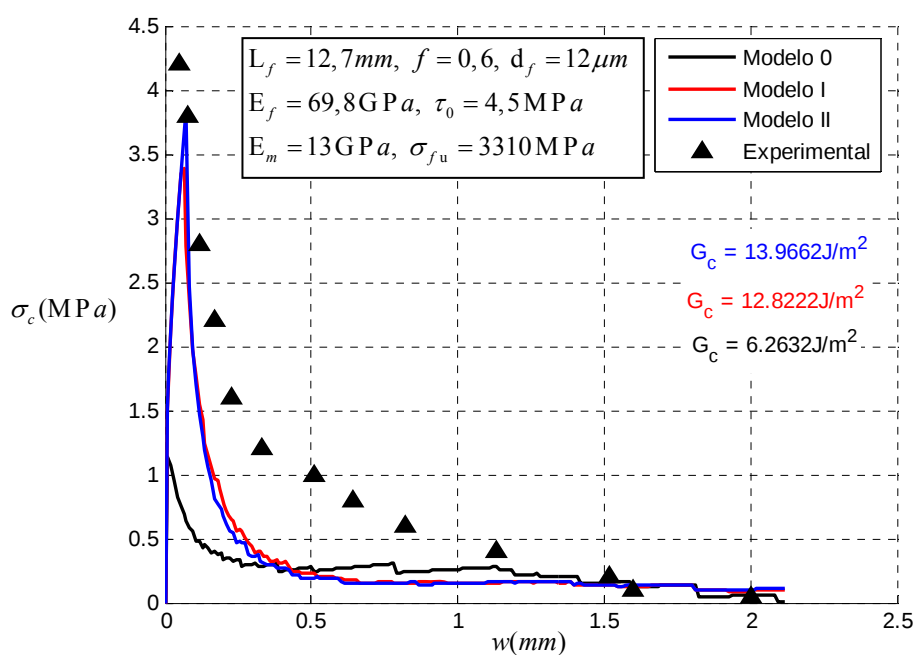


Fig. 6.29. Comparação da tensão dos Modelos 0-II propostos com dados experimentais. Matriz composta com 2% de fibras.

Podemos observar uma boa aproximação no pico da tensão (3,83MPa) com o pico de tensão dos dados experimentais (4,2MPa). Ao atingir o pico de tensão, o processo de

descolagem das fibras está completo, e as fibras que sobraram, ou seja, não quebraram, são puxadas para fora da matriz (*pull-out*).

Os modelos aqui desenvolvidos mostraram graficamente bastante diferença com dados experimentais, apesar de que tanto Modelo I como o II tiveram o pico de tensão muito próxima a dos dados experimentais. Após o pico de tensão, os Modelos 0-II mostram uma queda muito rápido da tensão, o que significa que há muito pouco *pull-out* das fibras (menos de 1%), estando grande maioria quebrada.

A algumas possibilidades que justificam tal discrepância com os dados experimentais:

- O fato de não consideramos a plasticidade do material, que certamente contribuirá muito para o aumento da tenacidade, pois após a tensão de escoamento ser atingida, a tensão não irá aumentar muito, mas a deformação pode crescer. Sem plasticidade, a tensão na fibra continua subindo até a fibra quebrar. Fibras sintéticas têm mais possibilidade na ocorrência de plasticidade.
- Uma possível quebra da matriz (efeito *spalling*) poderá causar um relaxamento da tensão na fibra imediatamente depois da saída da fibra na matriz, podendo a fibra não quebrar, e então ser puxada para fora da matriz. Nesse processo a força de atrito age contra a força axial, causando aumento na energia consumida pela fibra, e consequentemente aumento da tenacidade.
- Para fins de comparação, consideramos a tenacidade à fratura da interface $G_d = 0$, pois MAALEJ et al não cita tal propriedade. Isto é, sem o processo que precede a descolagem, as fibras não quebram. Por isso a tensão no pico do modelo de MAALEJ et al é muito alta (21 MPa), bem mais que o valor do experimento (4,2 MPa). Sendo que como vistos nos modelos de debonding/pull-out e resistência aparente, G_d tem influência diretamente no processo antes da descolagem e durante a descolagem e certamente deverá contribuir para o aumento da tenacidade.

Os gráficos seguintes representam as porcentagens das fibras em seus estados (*flags*, Tabela 5.1) para Figura 6.29. A maioria das fibras quebra logo no início da propagação. Os

Modelos I e II mostram no início da propagação mais 98% de fibras no processo de descolagem (Figuras 6.31 e 6.32), o que de fato acontece, pois consideramos, para fim de comparação, $G_d = 0$, e não temos *flag 0*. Infelizmente a maioria destas fibras quebram no processo de descolagem. As fibras em pull-out (*flag II*) chegam ao máximo a apenas 0,82%, consequentemente as fibras com pull-out completas (*flag III*) estão em mesma ordem.

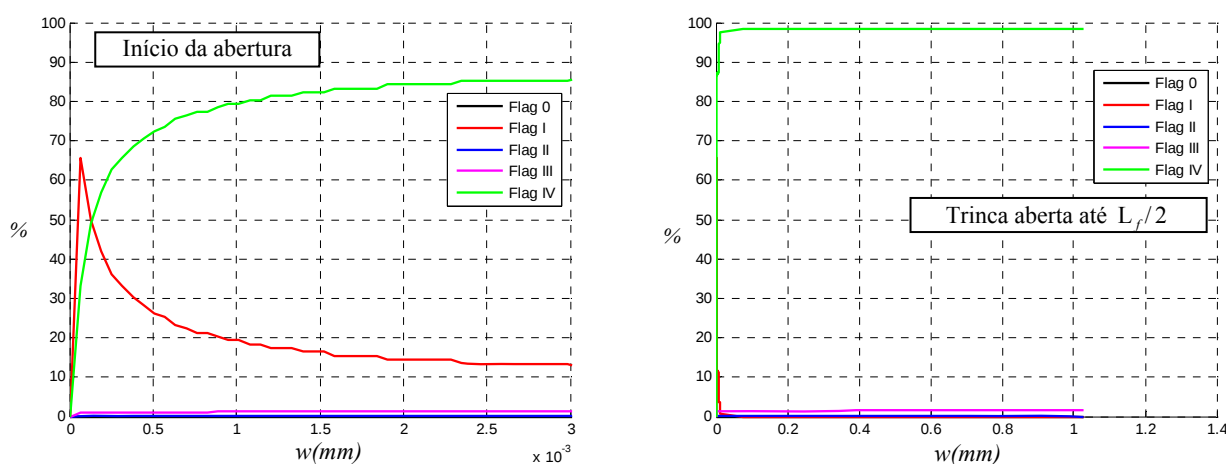


Fig. 6.30. Porcentagem dos estados das fibras para o Modelo 0, composto Kevlar/Cimento.

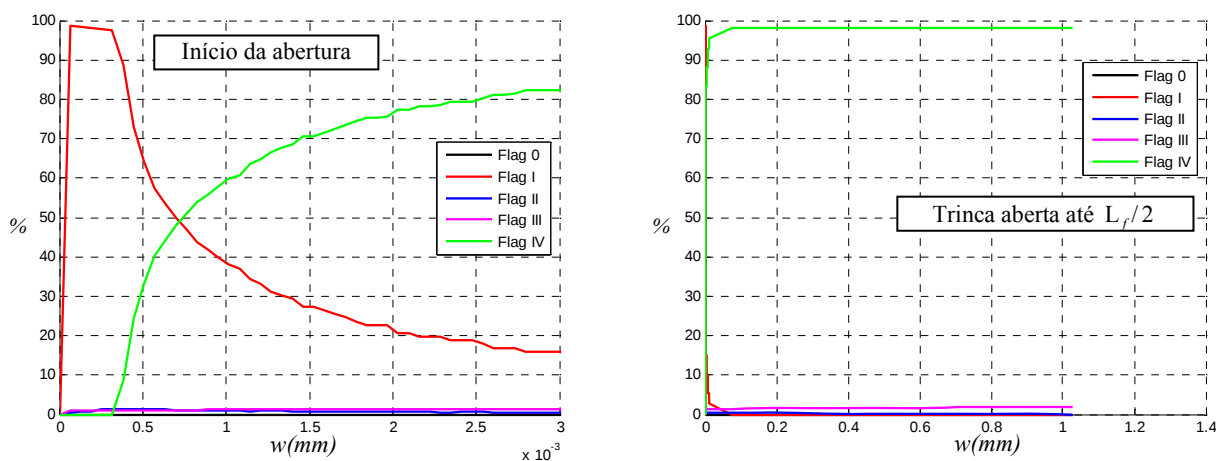


Fig. 6.31. Porcentagem dos estados das fibras para o Modelo I, composto Kevlar/Cimento.

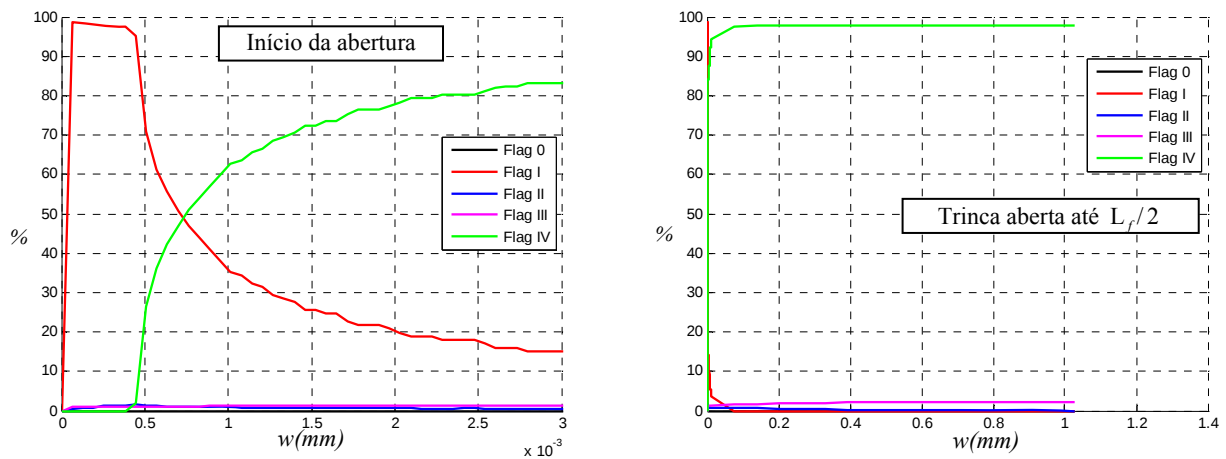


Fig. 6.32. Porcentagem dos estados das fibras para o Modelo II, composto Kevlar/Cimento.

O aumento de tenacidade encontrado pelos Modelos 0-II foram $6,26\text{J/m}^2$, $12,82\text{J/m}^2$ e $13,97\text{J/m}^2$, respectivamente, certamente muito baixo em relação aos dados experimentais.

6.6. Estudo da influência dos parâmetros na tenacidade em matriz cerâmica

Considerando um composto cerâmico com fibras de silício (SiC/Glass), os parâmetros são listados na tabela abaixo [39].

Tabela 6.2. Dimensões e propriedades mecânicas do composto SiC/Glass usados para testar os modelos.

Item	d_f (mm)	L_f (mm)	E_f (GPa)	E_m (GPa)	σ_{fu} (MPa)	τ_0 (MPa)	f	V_f %	G_d
Valor	0,142	6	415	60	3150	2	0,1	1	0

A Figura 6.33 mostra a curva $\sigma_f - w$ para o composto.

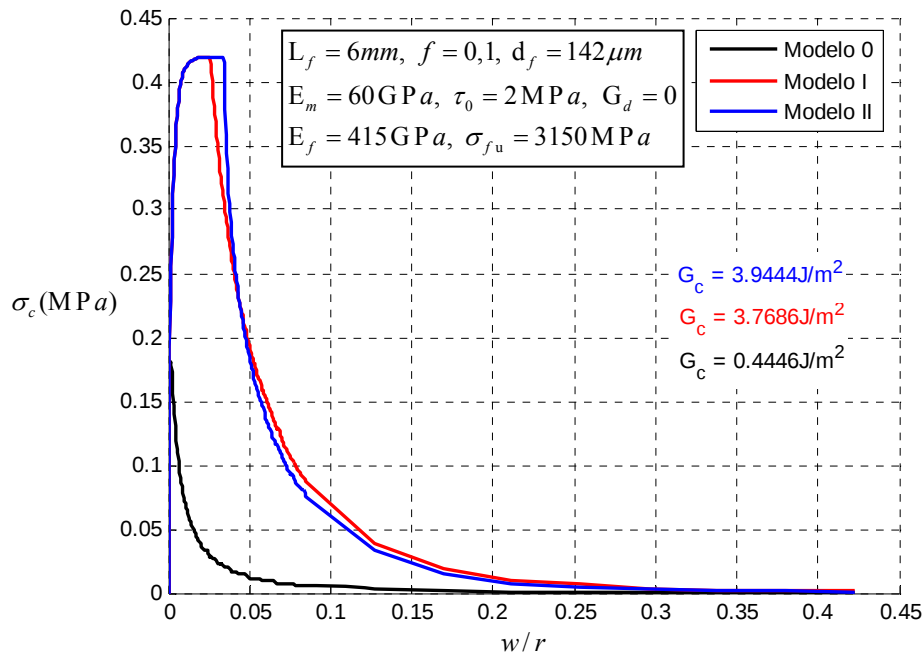


Fig. 6.33. Curvas de tensão-deformação para SiC/Glass com 1% de fibras.

Podemos observar a curvatura da tensão no pico: que a tensão aumenta muito pouco, e logo começa a cair, o que implica uma alta porcentagem de fibras em pull-out, confirmando nas Figuras 6.34 a 6.36, onde mostram os estados das fibras (flags). A resistência da fibra alta e força de cisalhamento baixa, pode ser um dos fatores a induzir bastante fibras em pull-out.

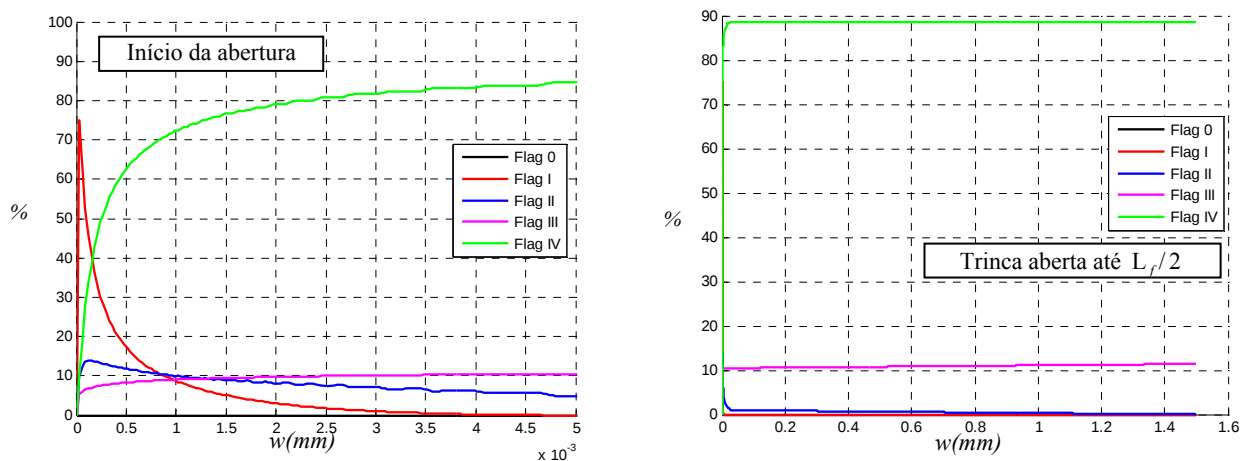


Fig. 6.34. Porcentagem dos estados das fibras para o Modelo 0, composto SiC/Glass.

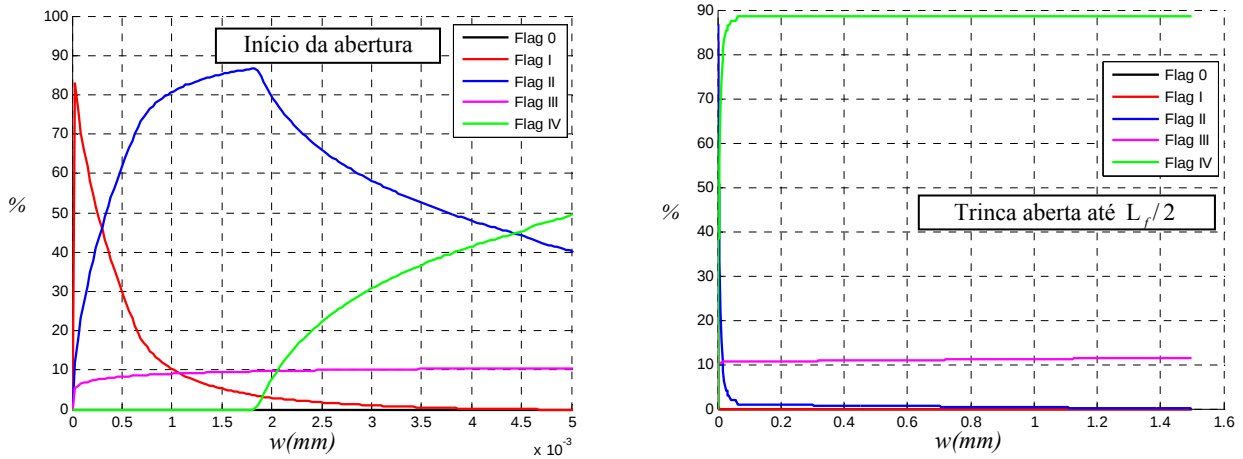


Fig. 6.35. Porcentagem dos estados das fibras para o Modelo I, composto SiC/Glass.

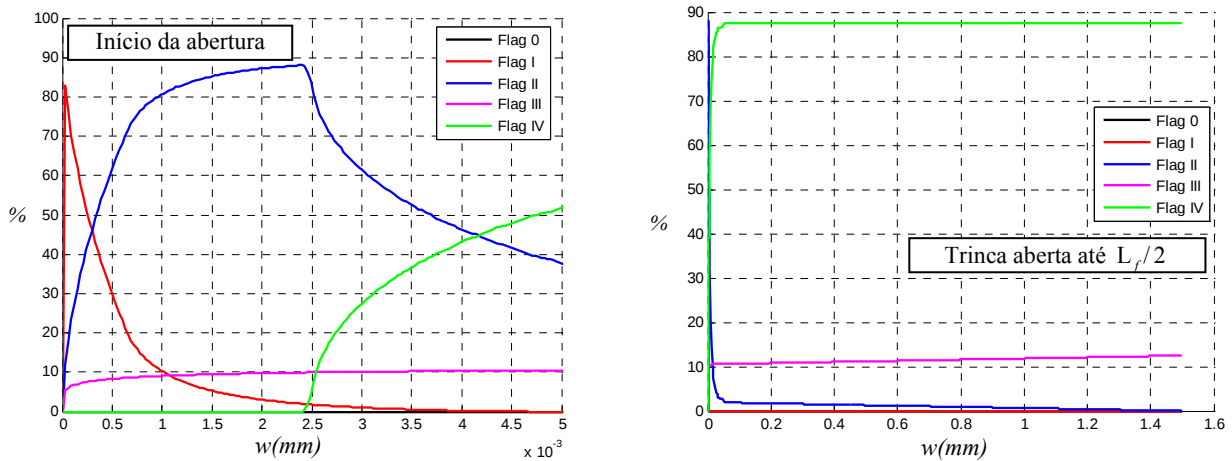


Fig. 6.36. Porcentagem dos estados das fibras para o Modelo II, composto SiC/Glass.

A Figura 6.37 mostra o efeito do comprimento da fibra na tenacidade do composto calculado pelo Modelo II. Inicialmente a tenacidade aumentou com o comprimento da fibra, até que a fibra alcance certo comprimento, e então, a tenacidade começa a cair.

Considerando um comprimento crítico $L_c = d_f \sigma_{fu} / 4\tau_0$ para a fibra, em que quando comprimento da fibra é maior que $2L_c$, a energia de fratura começa a cair significativamente. O comprimento ótimo para a fibra em um determinado composto pode ser menor que $2L_c$, também concluído por LI et al [6].

Podemos observar pela Figura 6.37 que o tamanho ótimo da fibra para o composto atinge cerca de 30% de L_c , para coeficiente de atrito $f = 0,1$.

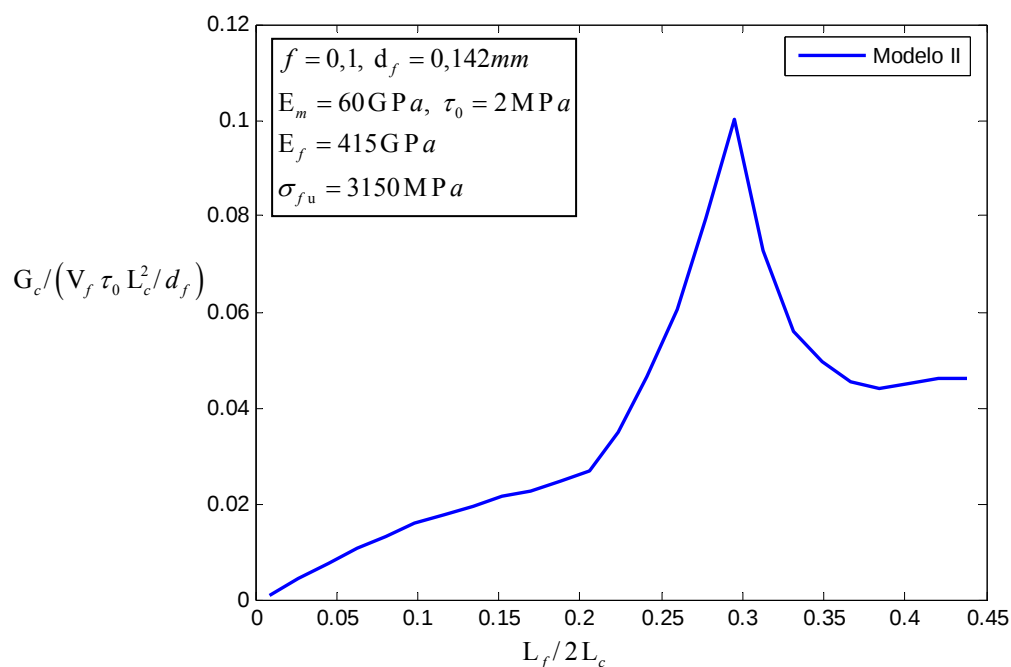


Fig. 6.37. Tenacidade pelo comprimento da fibra. Modelo II

Os resultados seguintes, para o composto SiC/Glass, consideram que todas as fibras têm o comprimento ótimo ($L_f = 33mm$) obtido pela figura acima. Verificamos um aumento na tenacidade 600% para o Modelo II (Figura 6.38).

Vale ressaltar um aumento de mais de 10 vezes na tenacidade calculada com o Modelo 0. Neste caso, com um comprimento grande para a fibra, o modelo tende a dar melhores resultados, estando mais de acordo com o Princípio de Saint-Venant.

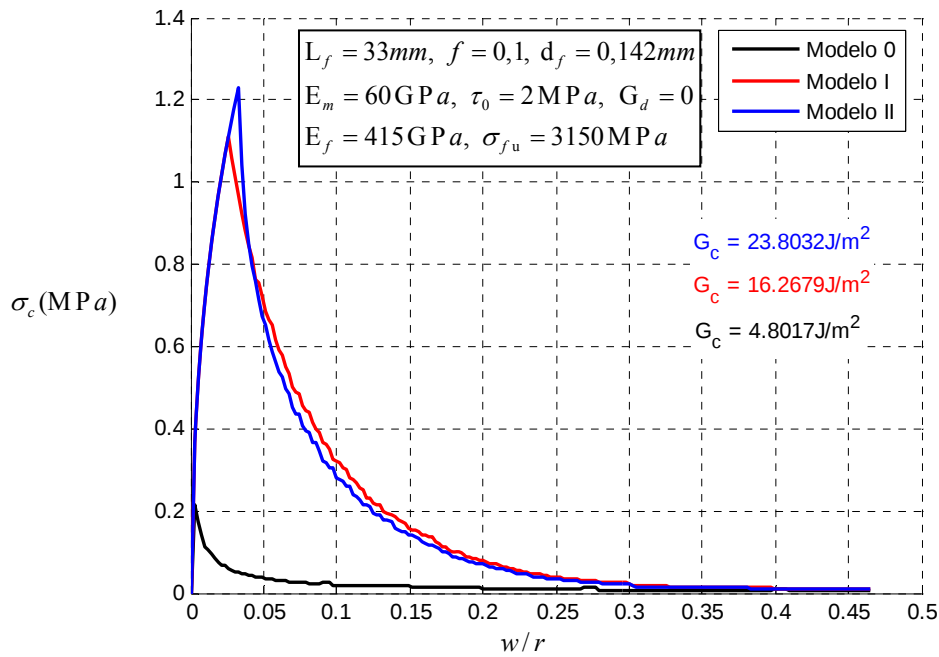


Fig. 6.38. Curvas de tensão-deformação para SiC/Glass com 1% de fibras e $L_f = 33mm$.

Podemos observar que o pico da tensão da figura acima praticamente triplicou em relação Figura 6.33. E pelas figuras abaixo (6.39 a 6.41), vemos que as fibras em *pull-out* diminuíram praticamente para $\frac{1}{4}$, aumentando as fibras em descolagem, obviamente. Também aumenta o número de fibras quebradas.

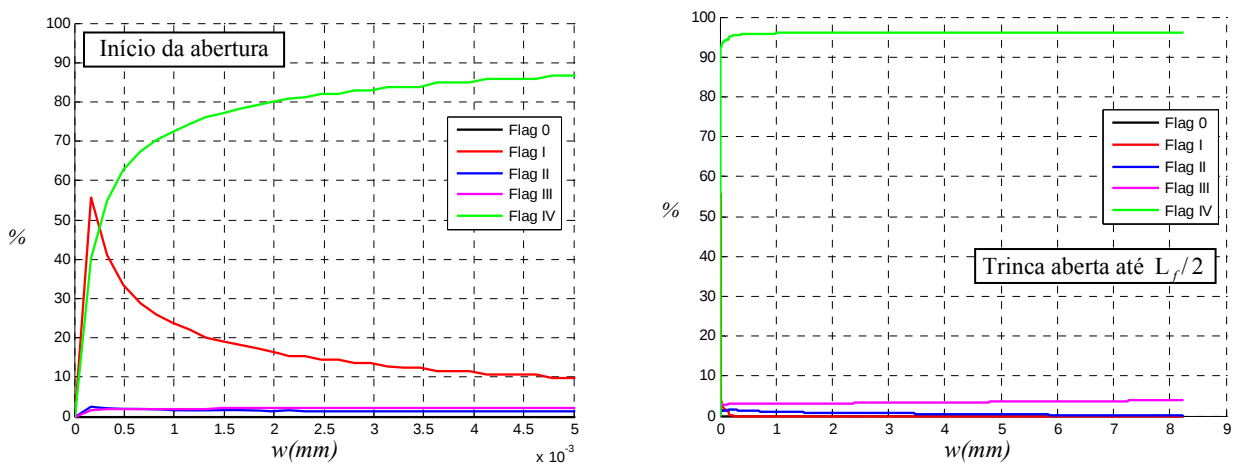


Fig. 6.39. Porcentagem dos estados das fibras para o Modelo 0, composto SiC/Glass.

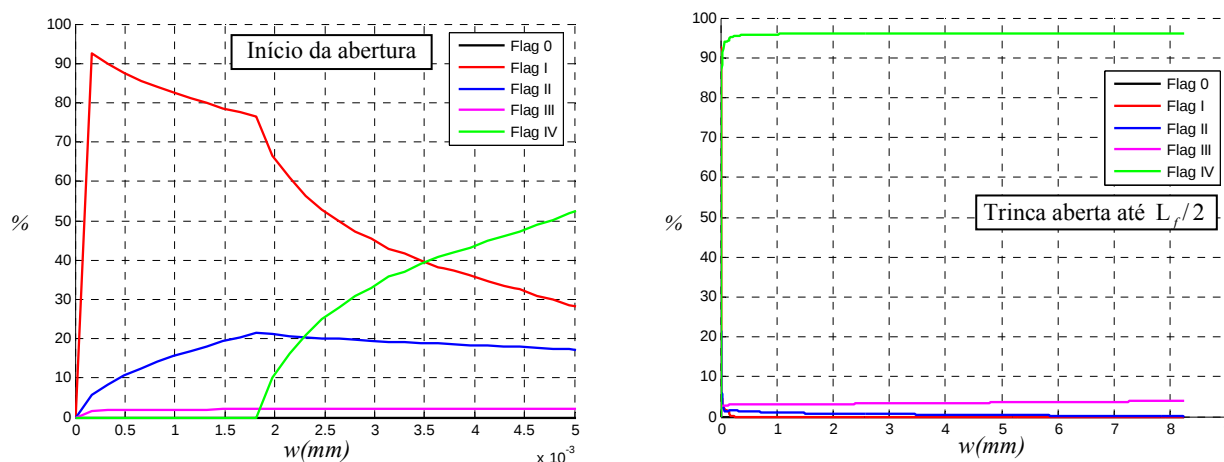


Fig. 6.40. Porcentagem dos estados das fibras para o Modelo I, composto SiC/Glass.

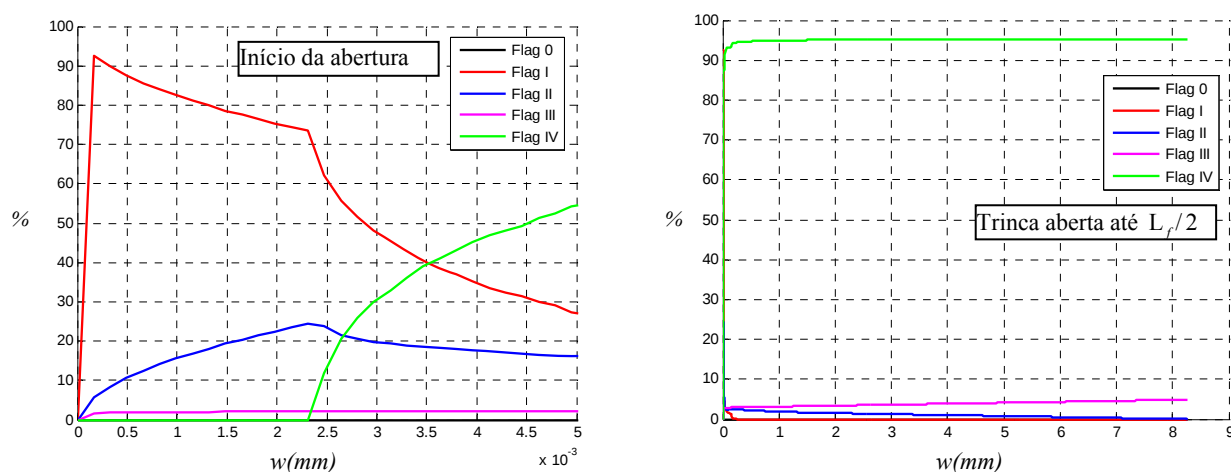


Fig. 6.41. Porcentagem dos estados das fibras para o Modelo II, composto SiC/Glass.

O aumento do comprimento da fibra em mais de cinco vezes, implica em aumento da área a ser descolada, necessitando de maior tensão para que a descolagem seja completa, praticamente o triplo em relação à fibra menor considerada anteriormente. Após, as fibras entram em pull-out, mas a porcentagem das fibras em pull-out caiu bastante, significando que muitas fibras quebram nesse processo. No entanto, a tenacidade aumentou quase proporcional ao aumento do comprimento da fibra, temos então que a maior contribuição para o aumento do pico da tensão de ponte foi o processo de descolagem e a resistência após o pico depende do comprimento da fibra. Por isso, fica evidente que para fibras curtas, a resistência após o pico cai rapidamente, comparando as figuras 6.33 e 6.38.

As figuras seguintes mostram a influência de alguns parâmetros na energia da fratura do composto, com L_f ótimo para o Modelo II. A Figura 6.42, mostra a influência de d_f na tenacidade do composto, A tenacidade aumenta até certo diâmetro da fibra, depois não tendo significativas mudanças para G_c .

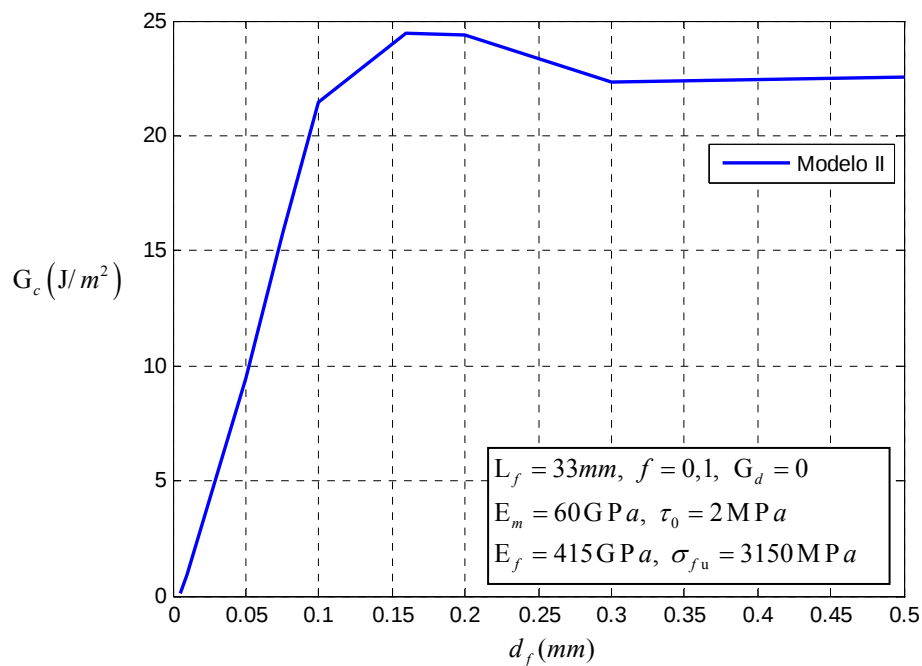


Fig. 6.42. Tenacidade e diâmetro da fibra.

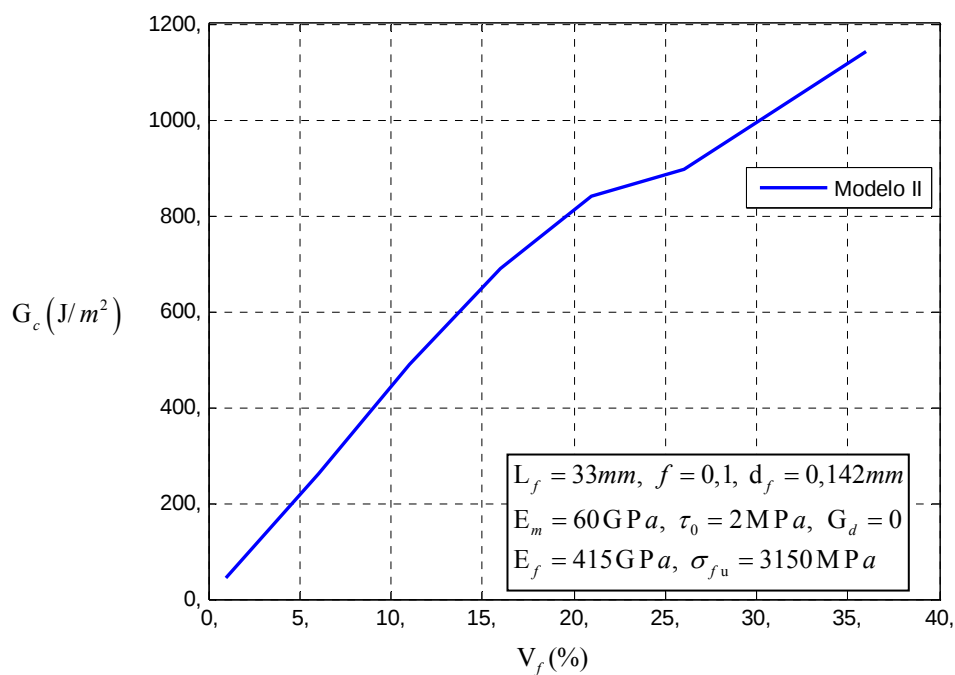


Fig. 6.43. Tenacidade e volume de fibras no composto.

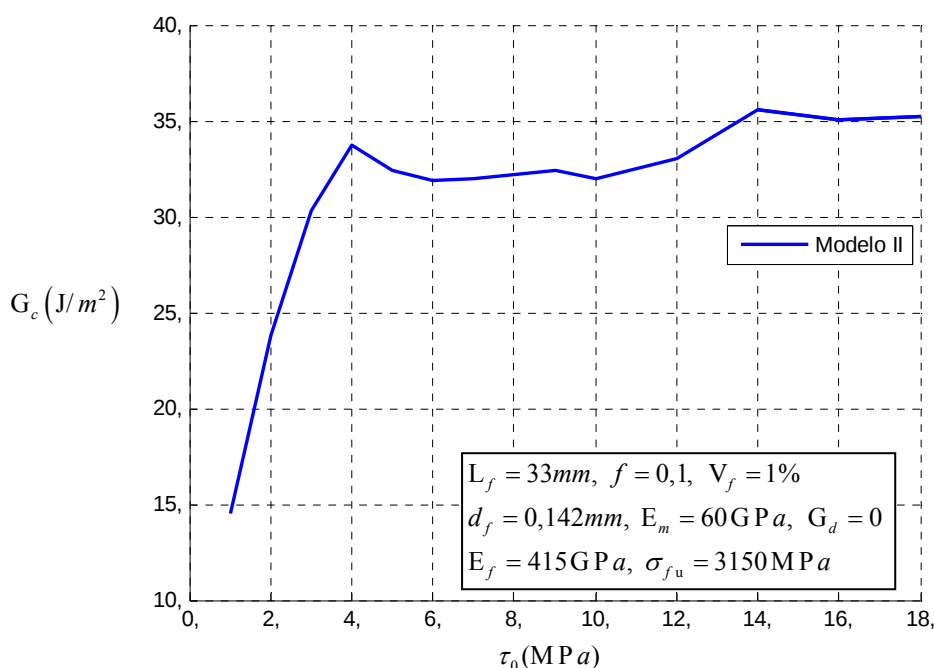


Fig. 6.44. Tenacidade e tensão cisalhante.

Aumentando a fração volumétrica de fibras no composto, obviamente a tenacidade aumenta muito, no entanto, quanto maior essa fração, maior serão as mudanças das propriedades da cerâmica. Portanto essa fração deve ser ponderada.

Pela Figura 6.44, verificamos que a tenacidade aumenta consideravelmente à medida que τ_0 aumenta, mas pela tendência da curva na Figura, esse aumento será limitado.

A tenacidade da interface fibra/matriz G_d é outro parâmetro importante para tenacificação por fibras. Para uma interface forte (G_d alta), a porcentagem de quebra das fibras no processo de descolagem é alta, consequentemente a tenacificação é baixa. Observando a Figura 6.45, existe um valor que irá dar máxima contribuição à tenacidade. Relativo ao cimento, o valor de G_d da cerâmica composta é pequeno, pois na prática há muita ocorrência de tensão residual. Por isso, para cerâmica, alto valor de G_d é desejável.

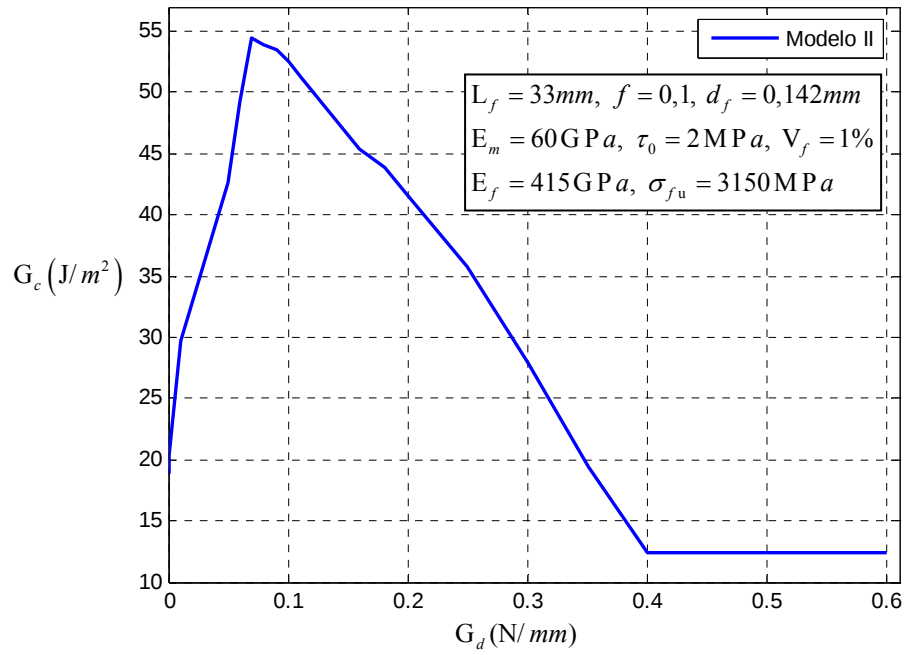


Fig. 6.45. Tenacidade e tenacidade da superfície.

A Figura 6.46 mostra a influência da resistência da fibra, logicamente que quanto maior esse valor, maior será o aumento da tenacidade.

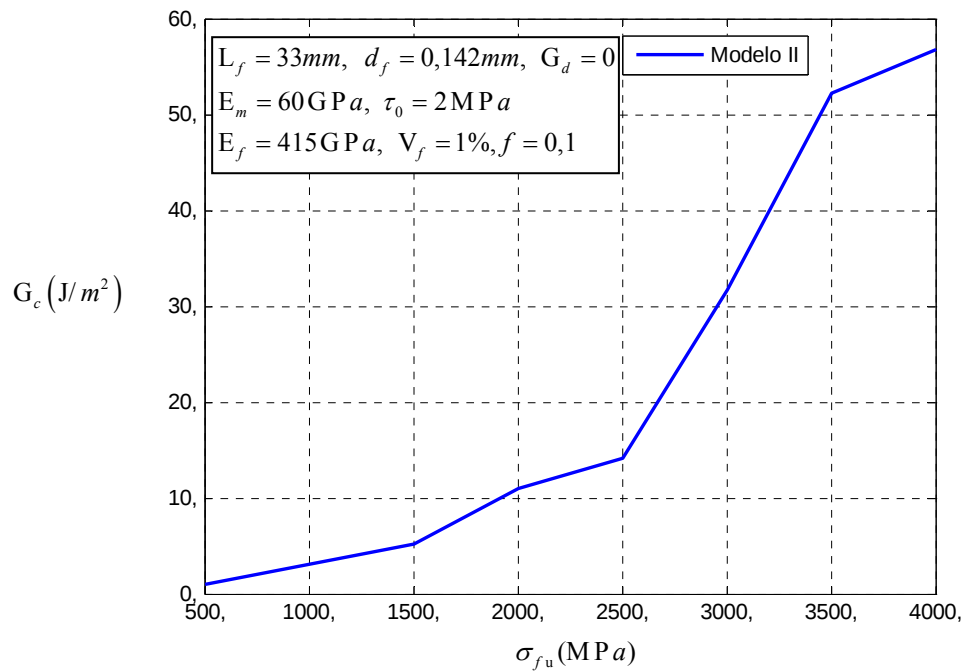


Fig. 6.46. Tenacidade e resistência da fibra.

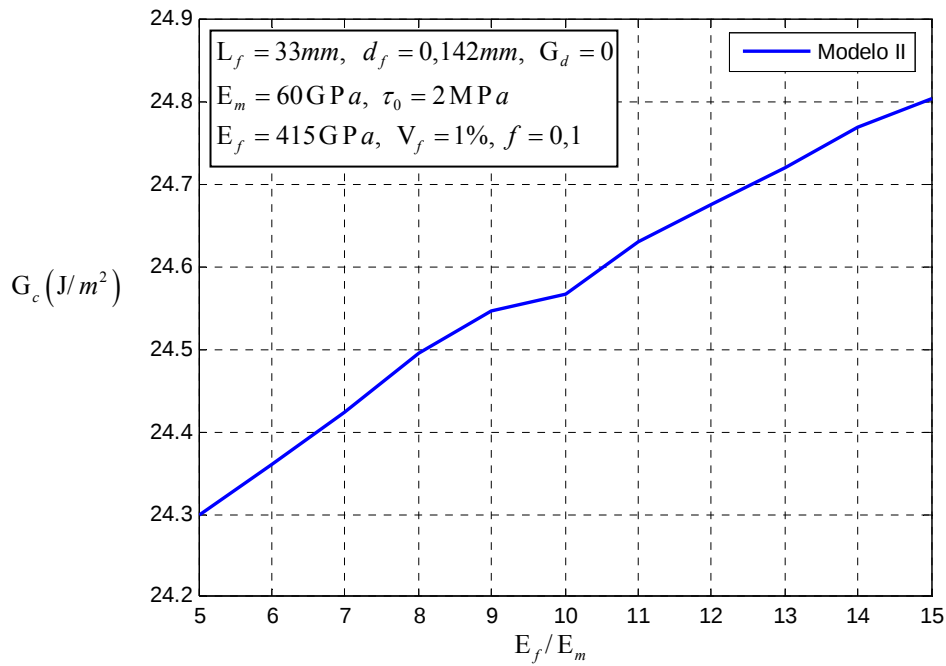


Fig. 6.47. Tenacidade e a razão E_f/E_m .

Claramente, a Figura 6.47 mostra que a razão do módulo de elasticidade da fibra pela elasticidade da matriz (E_f/E_m), aumenta a tenacidade proporcionalmente. Acreditamos que essa razão dará grande influência na deformação localizada na saída da fibra na matriz.

A seguir, algumas combinações são mostradas, considerando os parâmetros acima avaliados.

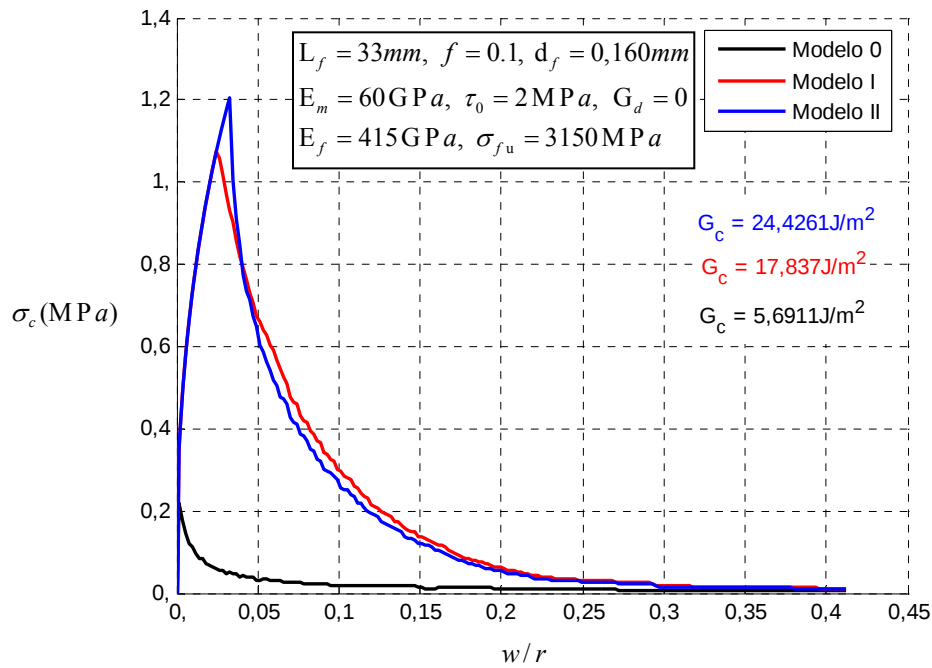


Fig. 6.48. Curvas de tensão-deformação para SiC/Glass com 1% de fibras, $L_f = 33mm$ e $d_f = 0,16mm$.

O diâmetro que deverá dar melhor resultado ao composto é $d_f = 0.160mm$ (Figura 6.42), muito próximo ao valor de KERANS e PARTHASARATHY [39], portanto verificamos pela Figura 6.48 que o aumento na tenacidade foi pequeno, cerca de 2,6%, 9.6% e 18,5% para os Modelos II, I e 0, respectivamente. Lembrando que a otimização dos parâmetros foi feita somente para o Modelo II.

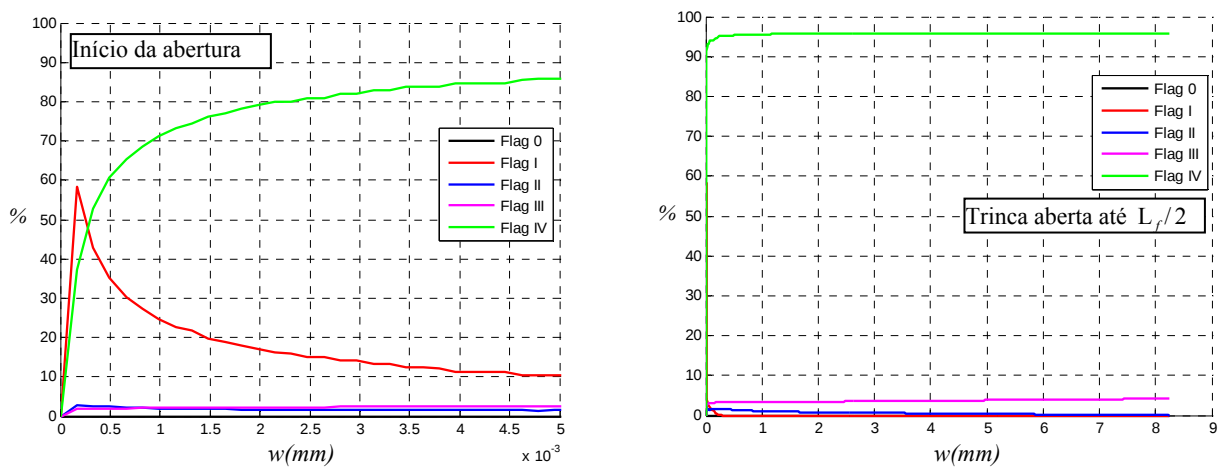
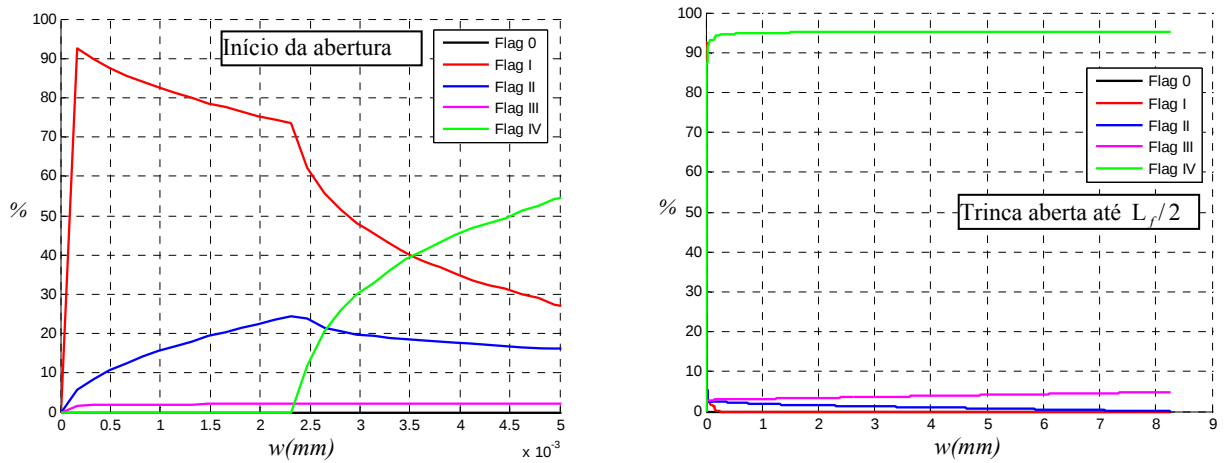
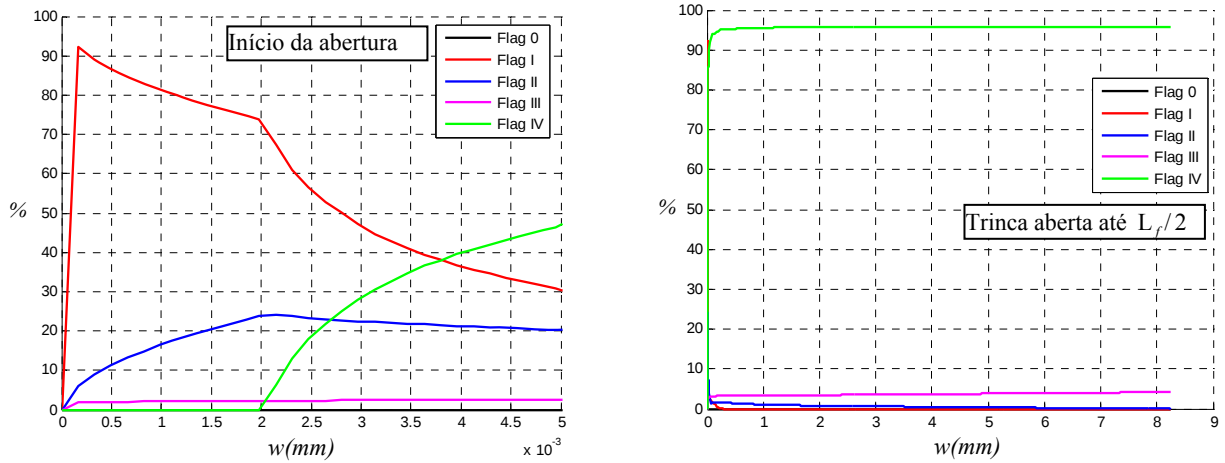


Fig. 6.49. Porcentagem dos estados das fibras para o Modelo 0, composto SiC/Glass.



A Figura 6.52 mostra resultados usando o comprimento, diâmetro da fibra e a tenacidade da interface G_d otimizados.

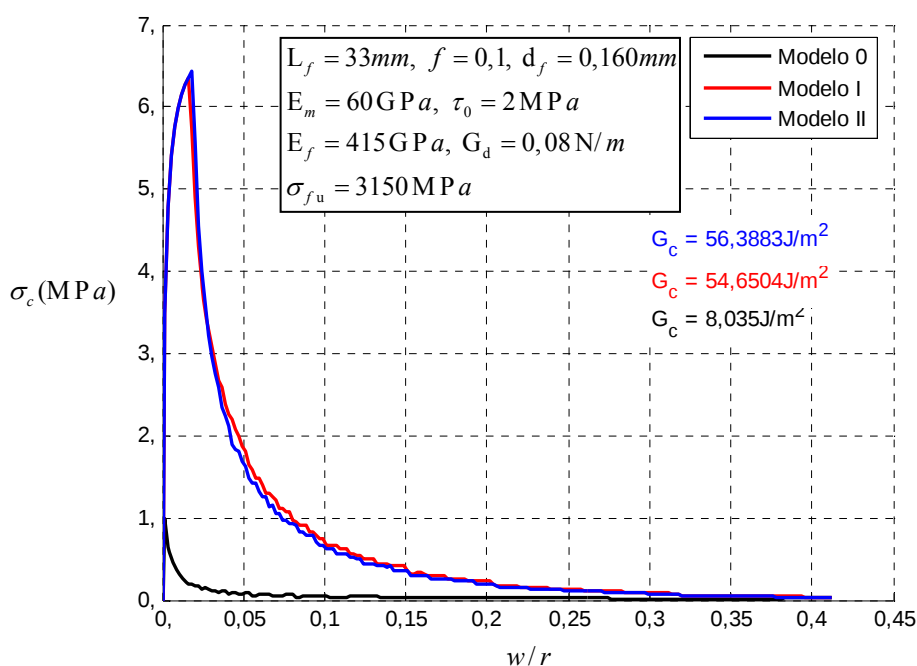


Fig. 6.52. Curvas de tensão-deformação para SiC/Glass com 1% de fibras, $L_f = 33mm$ e $d_f = 0,16mm$ e $G_d = 0,08 N/m$.

Pela figura, podemos ver a tenacidade do composto pode atingir $56,4 J/m^2$ quando a porcentagem volumétrica das fibras é apenas 1%.

As figuras 6.53 a 6.55 mostram as porcentagens dos estados de flags respectivamente aos três modelos. Comparado com a Figura 6.51, a Figura 6.55 mostra menor porcentagem de descolagem e pull-out, devido à ocorrência do processo antes descolagem (*flag* 0). Mas a tenacidade e o pico da tensão de ponte do composto considerando a tenacidade da interface $G_d = 0,08 N/m$ são bem maiores do que para $G_d = 0$. Isto justifica a importância da tenacidade da interface para o sistema composto, especialmente no processo inicial antes da descolagem que certamente contribui para o aumento da tenacidade do composto.

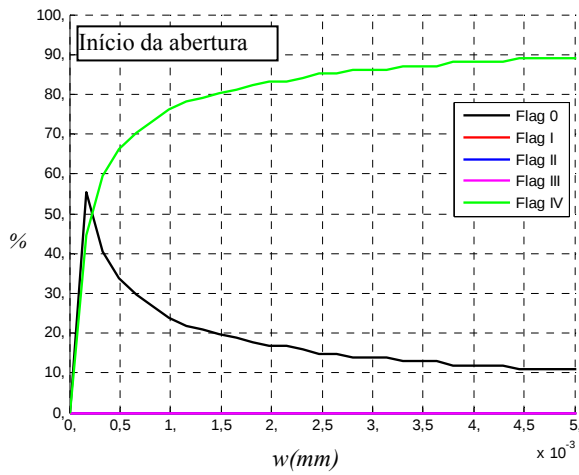


Fig. 6.53. Porcentagem dos estados das fibras para o Modelo 0, composto SiC/Glass.

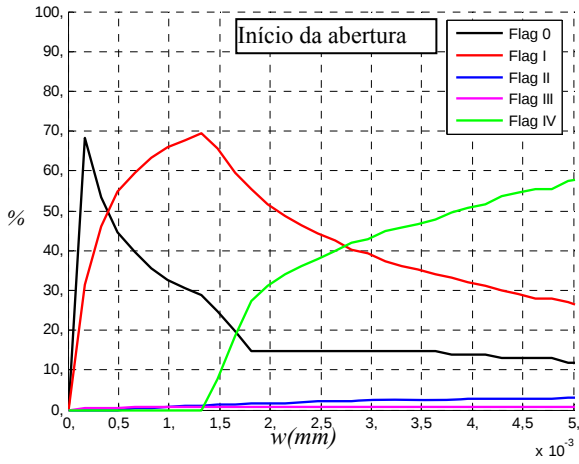
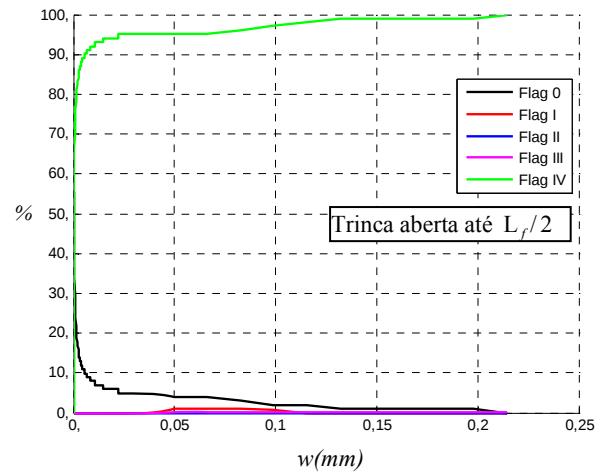


Fig. 6.54. Porcentagem dos estados das fibras para o Modelo I, composto SiC/Glass.

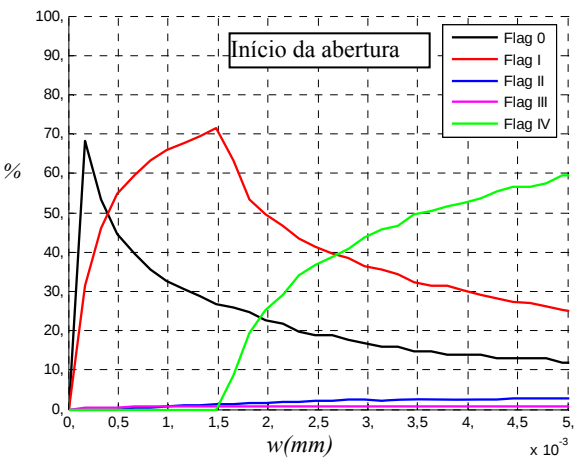
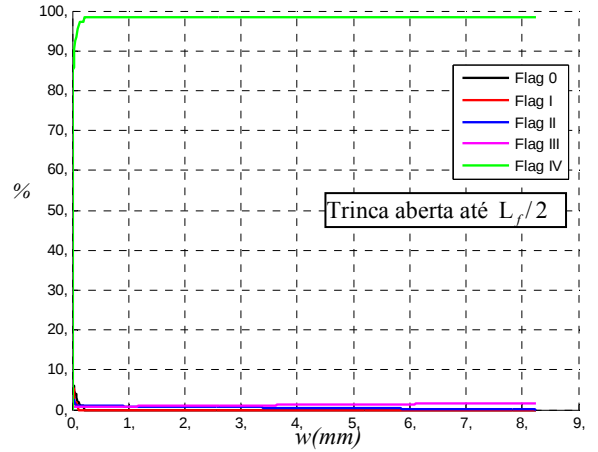
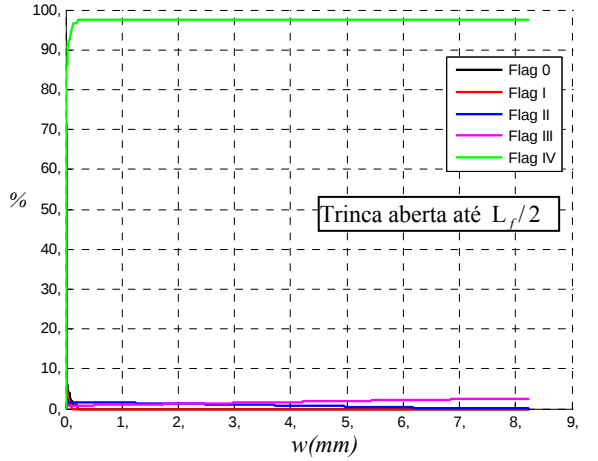


Fig. 6.55. Porcentagem dos estados das fibras para o Modelo II, composto SiC/Glass.



Por fim, a Figura 6.56 mostra a tensão no composto cerâmico com 2% do volume sendo fibras ($V_f = 0,02$), considerando os parâmetros otimizados da Figura 6.52. Tanto o pico da tensão quanto a tenacidade dobram em relação à combinação anterior, sendo esse acréscimo óbvio, como já mencionado, quanto maior essa fração volumétrica, maior será resistência à fratura, no entanto, deve-se pensar nas excelentes propriedades da cerâmica que são diretamente afetadas.

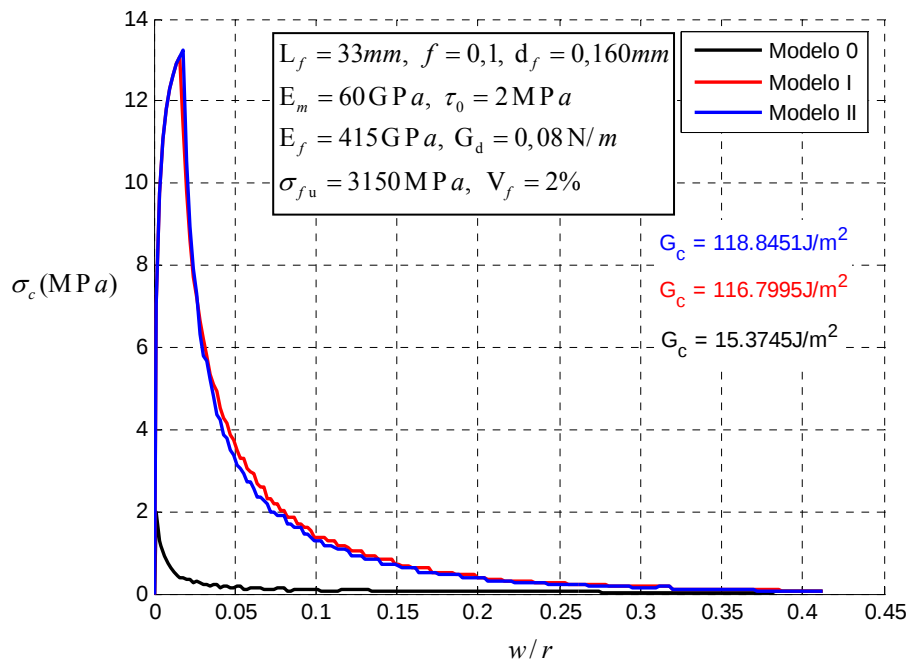


Fig. 6.56. Curvas de tensão-deformação para SiC/Glass com 2% de fibras, $L_f = 33mm$ e $d_f = 0,16mm$ e $G_d = 0,08 \text{ N/m}$.

CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram propostos modelos matemáticos para calcular a tenacidade de materiais compostos e prever o comportamento mecânico do mesmo. Através da implementação da programação numérica baseado nos três modelos, investigou-se a influência de alguns parâmetros na tenacidade do composto, principalmente como fração volumétrica, diâmetro e comprimento da fibra, resistência do atrito entre a superfície descolada da fibra e a matriz (τ_0) e tenacidade da interface fibra/matriz (G_d). Pelos resultados obtidos, podemos concluir pontos importantes:

- i. Dentre os três modelos propostos, o Modelo II foi o que apresentou melhor resultado. O mesmo considera uma deformação localizada no ponto da saída da fibra na matriz, acontecendo um relaxamento na curvatura da fibra na saída da matriz (bending) e conseqüentemente um relaxamento na tensão sobre a fibra, o que resulta na possibilidade da fibra não quebrar e continuar em pull-out, aumentando sua contribuição para tenacidade. A equação (5.39) é uma boa aproximação para estimar a deformação localizada.
- ii. A resistência do atrito entre a superfície descolada da fibra e a matriz (τ_0) é um parâmetro bastante sensível e tem grande influência ao processo de pull-out, conseqüentemente à tenacidade à fratura final do material composto. A tenacidade aumenta para até certo τ_0 , e depois o aumento é insignificante;

- iii. A tenacidade da interface fibra/matriz G_d é outro parâmetro importante para tenacificação por fibras. Para uma interface forte (G_d alto), a porcentagem de quebra de fibras no processo de descolagem é alta, conseqüentemente a tenacificação é baixa. Mas até descolagem completa, G_d pode aumentar o pico da tensão de ponte devido forças iniciais que atuam nas fibras no processo antes da descolagem, contribuindo para o aumento da tenacidade final do composto. Também existe certo valor de G_d que dará máxima contribuição à tenacidade. Em relação ao cimento, o valor de G_d da cerâmica é pequeno, por que na prática não consegue atingir alto valor pela razão de ocorrência da tensão residual. Por isso, para cerâmica, alto valor para G_d é desejável;
- iv. Sobre comprimento da fibra, existe também um valor ótimo por qual a tenacificação atinge o valor máximo. Antes deste valor, a tenacificação é crescente monotonicamente com o comprimento da fibra e depois deste ponto ótimo, a tenacificação cai monotonicamente com o comprimento;
- v. Como era esperado, quanto maior o volume de fibras no composto, maior é a tenacidade, no entanto, propriedades importantes da cerâmica são influenciadas. Por isso, a porcentagem volumétrica de fibras a ser agregada na matriz deve ser pensada prudentemente;
- vi. A razão do módulo de elasticidade da fibra pela elasticidade da matriz (E_f/E_m) aumenta a tenacidade proporcionalmente. Acredita-se que a razão dará grande influência na deformação localizada na saída da fibra da matriz.
- vii. Claramente, alta resistência da fibra sempre é boa para tenacificação. Já o diâmetro da fibra, a partir de certo tamanho, tem pouca influência na tenacidade à fratura no material composto.

Comparando com experimentos, os resultados numéricos tanto dos modelos propostos, como apresentado na literatura, ainda têm notável diferença. A razão disso, é que nos modelos numéricos não foi incorporado efeitos de spalling na matriz nem plasticidade

ocorrendo nas fibras além de não tratar bem a questão da deformação localizada no ponto da saída da fibra na matriz. Certamente acontece *spalling* quando a pressão no local da deformação localizada é alta, relativamente há pouco suporte para fibras com certa inclinação. A ocorrência de *spalling* alivia bastante a curvatura da fibra, conseqüentemente, a tensão na fibra, então, salvando muitas fibras do rompimento. Isto dará grande contribuição a tenacificação. O efeito *spalling* depende diretamente das tensões nos locais onde acontece a deformação localizada, que por sua vez, depende o ângulo de inclinação da fibra além das propriedades mecânicas da fibra e da matriz. A plasticidade também pode acontecer. Imaginando que uma fibra não quebrada for dobrada ao ângulo de inclinação, a plasticidade muito provável acontecerá se a fibra possuir boa plasticidade e a tensão de escoamento for baixa. Isto dará contribuição à tenacidade também. O efeito *spalling* pode diminuir a curvatura, então, diminuir a probabilidade de ocorrência de plasticidade. No processo de descolagem da interface fibra/matriz, o progresso da descolagem é complicado e os modelos numéricos atuais, não tratam adequadamente à relação entre a força axial na fibra e o comprimento descolado. Um modelo correto deve ser na base da mecânica da fratura, infelizmente há poucos trabalhos sobre isso.

A tenacificação da cerâmica por micro fibras é um problema muito complicado, envolvendo todas as propriedades mecânicas das fibras e matriz. Mas existe uma combinação otimizada entre tais parâmetros mecânicos e a modelagem matemática é imprescindível para encontrar essa combinação ótima. Precisa-se também de experimentos para determinar os parâmetros com máxima precisão possível.

SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Trabalhos sucessíveis devem focar em resolver os problemas como efeito *spalling*, a localização de deformação da matriz, plasticidade da fibra no ponto da saída da mesma da matriz e a relação entre a força axial na fibra e o comprimento descolado, entre outros. Somente com estes problemas resolvidos, poderemos prever as combinações adequadas para cerâmica avançada com as propriedades desejáveis.

REFERÊNCIAS

- [1] VLACK, Lawrence H. Van. **Princípios de Ciência dos Materiais**. Editora Edgar Blücher Ltda. São Paulo, 1998.
- [2] ANDERSON, T.L. **Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications**. 2th ed., CRC Press, 1994.
- [3] EVANS, A.G. **Fracture in ceramic materials Toughening Mechanisms, Machining Damage, Shock**. Noyes Publications, New Jersey, 1984.
- [4] SHAH, S.P.; BRANDT, A. M.; OUYANG, C.; BAGGOTT, R.; EIBL, J.; KRENCHER, H.; LAMBRECHTS, A.; MOBASHER, B.; TAERWE, L. **Toughness characterization and toughening mechanisms**. High Perf. Edited by A. E. Naaman and H.W. Reinhardt. Fiber Reinf. Cem. Comp. 2, 1996.
- [5] STAM, G.T.M. **A micromechanical Approach to transformation toughening in ceramics**. Doctoral thesis, 1994. ISBN: 90-370-0106-8.
- [6] LI Victor, C.; WANG, Youjiang; BACKER, Stanley. **A micromechanical model of tension softening and bridging toughening of short random fiber reinforced brittle matrix composites**. J. Mech. Phys. Solids, 1991; 39[5]:607-625.
- [7] LI Victor, C. **A Simplified Micromechanical Model of Compressive Strength of Fiber-Reinforced Cementitious Composites**. Cement & Concrete Composites, 1992; 14:131-141.
- [8] LIN, Zhong; LI, Victor C. **Crack bridging in fiber reinforced cementitious composites with slip-hardening interfaces**. J. Mech. Phys. Solids, 1997; 45[5] :763-787.
- [9] WANG, Youjiang; Li, Victor C.; BACKER, Stanley. **Modelling of fibre pull-out from a cement matrix**. Int. J. Cement Compos. Lightweight Concrete, 1988; 10[3]:143-149.
- [10] GAO, Yu-Chen; WING, Yiu. COTTERELL, Brian. **Fracture of fiber-reinforced materials**. J. of Apl. Math. And Phys., 1988; 39:550-572.

- [11] MARSHALL, D. B.; COX B. N. **Tensile fracture of brittle matrix composites influence of fiber strength.** Acta metal, 1987; 35[11]:2607-2619.
- [12] LIN, Z.; KANDA, T.; LI, V. C. **On interface property characterization and performance of fiber-reinforced cementitious composites.** Concrete Science and Engineering, 1999; 1:173-174.
- [13] MAALEJ, Mohamed; LI Victor C.; SASHIDA, Toshiyuki. **Effect of fiber rupture on tensile properties of short fiber composites.** J. of Eng. Mech, 1995; 121[8]:903-913.
- [14] LEUNG, Christopher K. Y.; LI, Victor C. **Effect of fiber inclination on crack bridging stress in brittle fiber reinforced brittle matrix composites.** J. Mech. Phys. Solids, 1992; 40[6]:1333-1362
- [15] ZHANG, Jun; LI, Victor C. **Effect of inclination angle on fiber rupture load in fiber reinforced cementitious composites.** Composites Science and Technology, 2002; 62:775-781.
- [16] TIMOSHENKO, S. P. **Strength of materials. II: Advanced.** 3.ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1976.
- [17] KATZ, A.; LI, Victor C. **A special technique for determining the bond strength of micro-fibres in cement matrix by pullout test.** J. of Mater. Science, 1996; 15:1821-1823.
- [18] MORTON, J.; GROVES, G. W. **The cracking of composites consisting of discontinuous ductile fibres in a brittle matrix – effect of fibre orientation.** J. of Mat. Science, 1974:1436-1445.
- [19] LI, Victor C.; WU, Hwai-Chung. **Conditions for pseudo strain-hardening in fiber reinforced brittle matrix composites.** Appl Mech, 1992; 45[8]:390-399
- [20] KATZ, A. LI V.C, KAZMER, A. **Bond properties of carbon fibers in cementitious matrix.** ASCE Journal of Materials in Civil Engineering, 1995; 2:125-128
- [21] STANG, Henrik; LI, Victor C.; KRENCHER, Herbert. **Design and structural applications of stress-crack width relations in fibre reinforced concrete.** Materials and Structures, 1995; 28:210-219.
- [22] LI, Victor C.; MAALEJ, Mohamed. **Toughening in cement based composites. Part II: Fiber reinforced cementitious composites.** Cement & Concrete Composites, 1996; 18:239-249.
- [23] LI, Victor C.; LEUNG, Christopher K. Y. **Steady-state and multiple cracking of short random fiber composites.** J. of Engen. Mechs, 1991; 118[11]:2246-2264.
- [24] LEUNG, C. K. Y. LI, V. C. **New strength-based model for the debonding of discontinuous fibres in an elastic matrix.** J. of Mater. Science, 1991; 26:5996-6010.
- [25] LEUNG, C. K. Y. LI, V. C. **First-cracking strength of short fiber-reinforced ceramics.** Ceram. Eng. Sci. Proc., 1989; 10[9-10]:1164-1178.

- [26] LEUNG, C.K. Y.; LI, V. C. **Applications of a two-way debonding theory to short fibre composites**. COMPOSITES, 1990; 21[4]:305-313.
- [27] BRANT, A. M. **On the optimal direction of short metal fibres in brittle matrix composites**. J. of Materials Science, 1985; 20:3831-3841.
- [28] BRANDT, A. M.; Stroeven, P. **Fracture energy in notched steel fiber reinforced concrete beams**. Proceedings of international symposium "Brittle Matrix Composites 3", Elsevier Applied Science, London and New York, 1992:72-82.
- [29] MOBASHER B.; OUYANG, C.; SHAH, S. P. **Modeling of fiber toughening in cementitious materials using an R-curve approach**. International Journal of Fracture, 1991; 50:199-219.
- [30] LI, Victor C.; CHAN, Yin-Wen. **Determination of interfacial debond mode for fiber-reinforced cementitious composites**. J. of Eng Mech., 1993; 120[4]:707-719.
- [31] SHAH, Surendra P.; OUYANG, Chengsheng. **Mechanical Behavior of fiber-reinforced cement-based composites**. J. Am. Ceram. Soc., 1991; 71[11]:2947-2953.
- [32] LI, V. C.; WANG, Y.; BACKER, S. **Effect of inclining angle, bundling and surface treatment on synthetic fibre pull-out from a cement matrix**. COMPOSITES, 1990; 21[2]:132-140.
- [33] NELSON, Patricia Kim; LI, Victor C.; KAMADA, Toshiro. **Fracture Toughness of Microfiber Reinforced Cement Composites**. J. of Mater. in civil Eng., 2002.14[5]:384-391
- [34] WANG, Shuxin; LI, Victor C. **High-Early-Strength Engineered Cementitious Composites**. ACI Materials Journal, 2006; 103[2]:97-105.
- [35] LIU, PEng-fei; TAO, Wei-ming, GUO, Yi-mu. **Properties of frictional bridging in fiber pull-out for fiber-reinforced composites**. Dep. of Eng. Mechs. Zhejiang University, Hangzhou, China, 2005.
- [36] CHARALAMBIDES, P. G.; EVANS Anthony G. **Debonding properties of residually stressed brittle-matrix composites**. J. A. Ceram. Soc, 1989; 72[5]:746-753.
- [37] BUDIANSKY, Bernard; JOHN, W. Hutchinson; EVANS Anthony G. **Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics**. J. Mech. Phys Solids, 1986; 34[2]:167-189.
- [38] MARSHALL, D. B; COX, B. N.; EVANS, A. G. **The mechanics of matrix cracking in brittle-natrix fiber composites**. Acta Metall, 1985; 33[11]:2013-2021.
- [39] KERANS, Ronald J.; PARTHASARATHY, Triplicane A. **Theoretical analysis of the fiber pullout and pushout tests**. J. Am. Ceram. Soc., 1991; 74[7]:1585-1596.
- [40] NAIR, Shanti V. **Crack-wake debonding and toughness in fiber-or-whisker-reinforced brittle-matrix composites**. J. Am. Ceram. Soc., 1990; 73[10]:2839-2847.

- [41] EVANS, Anthony G.; HE, Ming Y.; HUTCHINSON, John W. **Interface debonding and fiber cracking in brittle matrix composites**. J. Am. Ceram. Soc., 1989; 72[12]:2300-2303.
- [42] KATZ, Amnon; LI, Victor C. **Inclination angle effect of carbon fibers in cementitious composites**. J. of Eng. Mech., 1995; 121[12]:1340-1348.
- [43] OUYANG, C.; PACIOS, A.; SHAH, P. **Pullout of inclined fibers from cementitious matrix**. J. of Eng. Mech., 1994; 120[12]:2641-2659.
- [44] WANG, Youjiang; LI, Victor C.; BACKER, Stanley. **Tensile properties of synthetic fiber reinforced mortar**. Cement & Concrete Composites, 1990; 12:29-40.
- [45] YANG, C. C.; MURA, T.; SHAH, S. P. **Micromechanical theory and uniaxial tensile tests of fiber reinforced cement composites**. J. Mater. Res., 1991; 6[11]:2463-2473.
- [46] KANDA, Tetsushi; LI, Victor C. **Interface property and apparent strength of high-strength hydrophilic fiber in cement matrix**. J. of Mater. In Civ. Eng., 1998; 10[1]:5-13.
- [47] CAO, H. C.; BISCHOFF, E.; SBALZERO, O.; RÜHLE, Manfred; EVANS, Anthony G.; MARSHALL, David B. BRENNAN, J. J. **Effect of interfaces on the properties of fiber-reinforced ceramics**. J. Am. Ceram. Soc., 1990; 73[6]:1691-1699.
- [48] ZHAI, Honghiang; HUANG, Yong; WANG, Changan. WU, Xin. **Toughening multiple mechanisms in ceramic-matrix composites with discontinuous elongated reinforced**. J. Am. Ceram. Soc., 2000; 83[8]:2006-2016.
- [49] THIMOSHENKO, S. P. GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**. Guanabara DOIS: Rio de Janeiro, 1980.
- [50] GRIFFITH, A. A. **The phenomena of rupture and flow in solids**. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. [S.1.], A 221, 163, 1920.
- [51] GRIFFITH, A. A. **The theory of rupture**. In: PROC. FIRST. INTERNAT. CONG. APPL. MECH. Ed. C. B. Biezero & J. M. Burgers. 1924, Delft, J. Waltherman, 1924. p.55.
- [52] WESTERGAARD, H. M. Trans. ASME. J. Appl. Mech. [S.1.], 61, p.49, 1939.
- [53] WILLIAMS, M. L. J. Appli. Mech. [S.1.], 24, p.109, 1957
- [54] ERDOGAN, F.; SIH, G. C. J. of Basic Engrg. [S.1.], 85, p.519, 1963.
- [55] SIH, G. C. **Strain-Energy-Density Factor Applied to Mixed Mode Crack Problems**. Institute of Fracture and Solid Mechanics Technical Report – Lehigh University, 1972.
- [56] IRWIN, G. R. **Fracture in handbuch der physik springer-verlag**. v.6. Berlin, 1958. p.551.
- [57] HERTZBERG, Richard W. **Deformation and fracture mechanics of engineering materials**. 3ed. Library of Congress Cat. In Public. Data Canada, 1989.

- [58] LI, H. **Mecânica da Fratura**. Sandong: Ciência e Tecnologia, 1980 (em chinês).
- [59] HERTZBERG, Richard W. **Deformation and fracture mechanics of engineering materials**. 3ed. Library of Congress Cat. In Public. Data Canada, 1989.
- [60] BEER, Ferdinand P.; JOHNSTON, E. Russell. **Resistência dos Materiais**. 2.ed. Editora McGraw-Hill Ltda. São Paulo, 1989.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Força axial N com energia da fratura G_d e tensão de cisalhamento τ_0

Considerando o comprimento L_e da fibra que está embutido na matriz (fig A1), assumindo τ_0 e considerando G_d a energia de fratura para o tamanho L da zona de descolagem, obtemos as equações (5.43), (5.48) e (5.47).

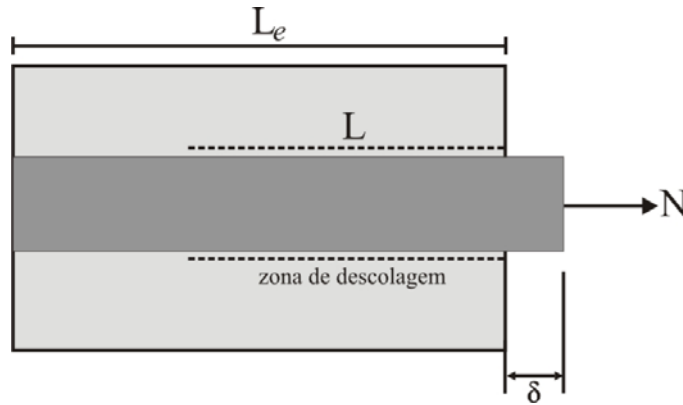


Fig. A1.

Para haver um equilíbrio das tensões na zona de descolagem, a distribuição das tensões é dada por

$$\sigma_f(z) = \sigma_{f0} + \frac{z(\sigma - \sigma_{f0})}{L} \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_m(z) = \left(1 - \frac{z}{L}\right) \sigma_{m0} \quad (\text{A.2})$$

onde σ_{f0} e σ_{m0} são a tensão normal na fibra e na matriz para quando $z=0$

$$\sigma_{f0} = \sigma - \frac{4\tau_0 L}{d_f} \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma_{m0} = \frac{4\tau_0 L V_f}{d_f V_m} \quad (\text{A.4})$$

V_f é o volume de fibras na matriz e V_m o volume da matriz.

O deslocamento relativo entre a fibra e matriz na região de descolagem é

$$\Delta(z) = u_f(z) - u_m(z) \quad (\text{A.5})$$

Então

$$\frac{d\Delta(z)}{dz} = \frac{du_f(z)}{dz} - \frac{du_m(z)}{dz} = \frac{\sigma_f(z)}{E_f} - \frac{\sigma_m(z)}{E_m} \quad (\text{A.6})$$

Levando as equações de (A.1) a (A.4) na equação (A.6) e aplicando a condição de contorno $\Delta(z=0) = 0$, temos

$$\Delta z = \frac{\sigma z}{E_f} - \frac{4\tau_0 L z}{E_f d_f} (1 + \eta) + \frac{2\tau_0 z^2}{E_f d_f} (1 + \eta) \quad (\text{A.7})$$

sendo $\eta = \frac{V_f E_f}{V_m E_m}$.

O alongamento na saída da matriz, enquanto a fibra é descolada, é dado por

$$\delta = \Delta(L) = \frac{\sigma L}{E_f} - \frac{2\tau_0 L^2 (1 + \eta)}{E_f d_f} \quad (\text{A.8})$$

Para um avanço infinitesimal dA da zona de descolagem, pela conservação da energia temos

$$P du_f = dU + dW_f + G_d dA \quad (A.9)$$

Onde u_f é o deslocamento axial do final da fibra, dU é a mudança da energia de deformação do sistema, dW_f mudança de energia dissipada pelo atrito na interface, e $G_d dA$ é a energia consumida no avanço da zona de descolagem. Por outro lado, se a zona de descolagem for considerada como a tensão no contorno do sistema, podemos mostrar que [10]

$$dU = \frac{1}{2}(P du_f - dW_f) \quad (A.10)$$

Por (A.9) e (A.10), obtemos

$$G_d dA = \frac{1}{2}(P du_f - dW_f) \quad (A.11)$$

Podemos obter u_f por

$$u_f = \int_0^L \frac{\sigma_f(z)}{E_f} dz + \frac{V_f \sigma}{V_f E_f + V_m E_m} (L_e - L) \quad (A.12)$$

e

$$W_f = \int_0^L \pi d_f \tau_0 \Delta(z) dz \quad (A.13)$$

Levando as equações acima na equação (A.11), temos

$$\sigma^2 - \frac{8\tau_0 L(1+\eta)}{d_f} \sigma + \frac{16\tau_0^2 L^2 (1+\eta)^2}{d_f} - \frac{8G_d E_f (1+\eta)}{d_f} = 0 \quad (A.14)$$

de (A.14) temos que

$$\sigma = \frac{4\tau_0 L(1+\eta)}{d_f} + \sqrt{\frac{8G_d E_f(1+\eta)}{d_f}} \quad (\text{A.15})$$

e

$$N = \sigma A_f e^{f\theta} = \left[\pi d_f \tau_0 (1+\eta) L + \pi d_f \sqrt{\frac{G_d d_f E_f (1+\eta)}{2}} \right] e^{f\theta} \quad (\text{A.16})$$

η pode ser desconsiderado para uma fibra em pull-out.

Para $L = L_e$, o máximo da tensão no processo de descolagem é atingido, e o alongamento da fibra será

$$\delta = \frac{2\tau_0 L^2(1+\eta)}{E_f d_f} + \sqrt{\frac{8G_d L^2(1+\eta)}{E_f d_f}} \quad (\text{A.17})$$

E pelas equações (A.8) e (A.16), temos a relação força axial e deslocamento no processo de descolagem

$$N = \sqrt{\frac{\pi^2 \tau_0 E_f d_f^3 (1+\eta)}{2}} \delta + \frac{\pi^2 G_d E_f d_f^3}{2} \quad (\text{A.18})$$

APÊNDICE B - Determinação da tenacidade da superfície G_d

Para descolagem completa, $L = L_e$, a força máxima é dada por

$$P_a = P_b + \sqrt{\frac{\pi^2 G_d E_f d_f^3}{2}} \quad (\text{B.1})$$

Sendo P_b a força inicial do processo pull-out, dado por

$$P_b = \pi d_f \tau_0 L_e \quad (\text{B.2})$$

As equações (B.1) e (B.2) podem ser usadas para calibrar este valor.

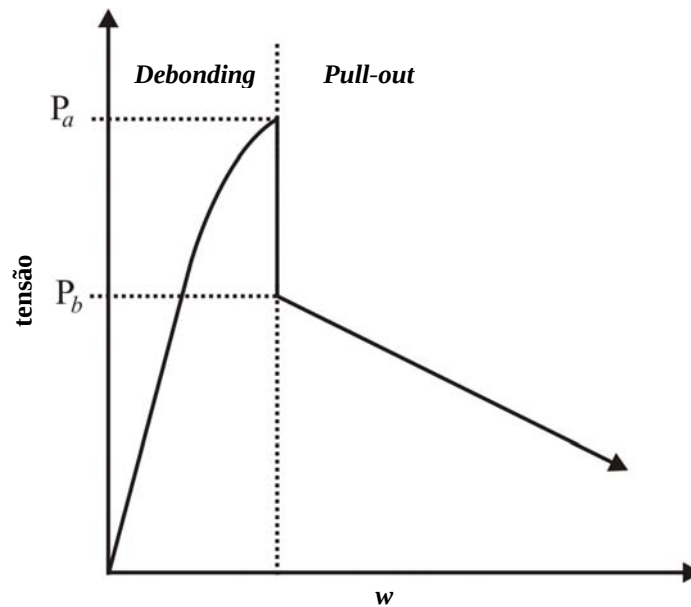


Fig. B.1. Máxima tensão de debonding e tensão inicial para o processo *pull-out*.

ANEXOS

ANEXO A - Programa para calcular a resistência aparente de uma fibra

```

%PROGRAMA PARA CALCULAR A RESISTÊNCIA APARENTE DE UMA FIBRA
%
%UNIJUÍ
%MESTRADO EM MODELAGEM MATEMÁTICA
%DISSERTAÇÃO: "MODELAGEM MATEMÁTICA DE TENACIFICAÇÃO DE MATERIAIS CERÂMICOS
%              ATRAVÉS DA ADIÇÃO DE MICROFIBRAS"
%Autor:        ALCIONE RAFAEL PAVAN
%ORIENTADOR:   Prf. Dr. WANG CHONG
%
clear; clc;
%----- Dados de entrada
tau0=0.4;      % Tensão de cisalhamento (N/mm^2=MPa)
df=0.046;      % Diametro da fibra (%mm)
Ef=175000;     % Modulo de Elasticidade da fibra (MPa)
Em=20000;      % Modulo de Elasticidade da matriz (MPa)
Vf=0;          % fração de volume de fibras
Gd=6e-3;       % Tenacidade a fratura da superficei(N/mm^2)
Le=25.77;      % Parte embutida da fibra na matriz(mm)
f=0.5;         % Coeficiente de Snubbing
upsilon=0.3;% Coeficiente de Poisson
Sfu=930;       % Resistencia da fibra (MPa)
r=df/2;        Af=pi*r^2;    inercia=0.25*pi*r^4; % o momento inercia.
Vm=1-Vf;       eta=Vf*Ef/Vm/Em;
cont=2*df;     %Sf controle para Modelo I
MAX=2000; MAX0=50000; MAX1=20000; %Quant. de intervalos a ser calculado
sigmad=sqrt(8*Gd*Ef*(1+eta)/df);
G=Ef/(2*(1+upsilon)); % modulo de elasticidade transversal
Norm=1/df;     %NORMALIZADOR
cor='mkbr';
for modelo=0:2 % Modelos
    k=0;
    for i=1:1:88 %Faixa do angulo de inclinação (theta)
        k=k+1;
        flag(k)=0; % flag eh 1 no inicio.
        Spa(k)=0; % Resistencia aparente eh 0 no inicio.
        teta(k)=i;
        theta=(0.0+i/1.0)*pi/180;
        l0=r*tan(theta);
        Nd=sigmad*Af*exp(f*theta);
        wd=Nd*l0/(Ef*Af*cos(theta));
        % ----- w0
        P1=2*tau0*Le^2*(1+eta)/(Ef*df)+Le*sqrt(8*Gd*(1+eta)/(Ef*df));
        P2=(4*tau0*Le*(1+eta)/df+sigmad)/Ef;
        P3=P1*(1+P2*(exp(f*theta)-1))+P2*l0*exp(f*theta)*pi*df/4;
        w0=P3/cos(theta);
        for trecho=1:3 %antes da descolagem, descolagem e pull-out
            if flag(k)==3
                break
            end
            if flag(k)==4
                break
            end
            if trecho==1

```

```

wi=0;    wf=wd; jwmax=MAX; %w antes da descolagem
if modelo==0
    jwmax=MAX0/1000;
elseif modelo==1
    jwmax=MAX1/100;
end
elseif trecho==2
    wi=wd; wf=w0; jwmax=MAX; %w para descolagem
    if modelo==0
        jwmax=MAX0;
    elseif modelo==1
        jwmax=MAX1;
    end
else
    wi=w0;    wf=Le;    jwmax=MAX;    %w para pull-out
    if modelo==0
        jwmax=MAX0;
    elseif modelo==1
        jwmax=MAX1/100;
    end
end
dwif=wf-wi-1e-8; %0 ajustar trechos.
for j=1:jwmax
    w=wi+j*dwif/jwmax;
    if flag(k)==3
        break
    end
    if flag(k)==4
        break
    end
    if flag(k)==1
        descolagem %chama processo de descolagem
        continue
    end
    if flag(k)==2
        pullout %chama processo de pull-out
        continue
    end
    N=Ef*Af*cos(theta)*w/l0;
    l=(l0+w*cos(theta))/(1+N/(Af*Ef));
    switch modelo
        case 0
            % calculada pela flexao
            P=3*w*sin(theta)*Ef*inercia/(l^3);
            Sf=N/Af+abs(P*l-N*w*sin(theta))*r/inercia;
        case 1
            % calculada pela tensao de cisalhamento
            if l<cont
                P=w*sin(theta)*G*Af/l;
            else
                P=3*w*sin(theta)*Ef*inercia/(l^3);
            end
            Sf=N/Af+abs(P*l-N*w*sin(theta))*r/inercia;
        case 2
            % calculada pela rigidez
            dom=l^3*df*Em*cos(theta)+3*Ef*inercia;
            P=3*Em*Ef*df*cos(theta)*w*sin(theta)*inercia/dom;
            Sf=N/Af+r*abs(P*(l+1/(Em*df*cos(theta)))-
N*w*sin(theta))/inercia;
    end
    %-----Flags identificacoes

```

```

if N<Nd & Sf<Sfu
    flag(k)=0;
    Sc=(N*cos(theta)+P*sin(theta))/Af;
    Spa(k)=max(Sc, Spa(k));
    continue
elseif N<Nd & Sf>=Sfu
    flag(k)=4;
    break
elseif N>=Nd & Sf<Sfu
    %-----Processo de descolagem parcial
    descolagem %chama processo de descolagem
    continue
else %N>=Nd e Sf>=Sfu
    l=(l0+wd*cos(theta))/(1+Nd/(Af*Ef));
    switch modelo
        case 0
            % calculada pela flexao
            P=3*wd*sin(theta)*Ef*inercia/(l^3);
            sfd=Nd/Af+abs(P*l-Nd*wd*sin(theta))*r/inercia;
        case 1
            % calculada pela tensao de cisalhamento
            if l<cont
                P=wd*sin(theta)*G*Af/l;
            else
                P=3*wd*sin(theta)*Ef*inercia/(l^3);
            end
            sfd=Nd/Af+abs(P*l-Nd*wd*sin(theta))*r/inercia;
        case 2
            % calculada pela rigidez
            dom=l^3*df*Em*cos(theta)+3*Ef*inercia;
            P=3*Em*Ef*df*cos(theta)*wd*sin(theta)*inercia/dom;
            sfd=Nd/Af+r*abs(P*(l+1/(Em*df*cos(theta)))-
            Nd*wd*sin(theta))/inercia;
        end
        if sfd<Sfu
            descolagem %chama processo de descolagem
            continue
        else
            flag(k)=4;
            break
        end
    end
end
end % end por j
end % end por trecho
end %end por i
fra=zeros(5,1);
for i=1:k %contar Flagd
    switch flag(i)
        case 0
            fra(1)=fra(1)+1;
        case 1
            fra(2)=fra(2)+1;
        case 2
            fra(3)=fra(3)+1;
        case 3
            fra(4)=fra(4)+1;
        case 4
            fra(5)=fra(5)+1;
    end
end
end

```

```
        hold on
        plot(teta, Spa, cor(modelo+1), 'LineWidth', 2)
    end %fim modelos
    ylabel('Resistencia Aparente (MPa)');
    xlabel('Ângulo de inclinação \theta')
    legend('Modelo 0', 'Modelo I', 'Modelo II')
    grid
```

ANEXO B - Programa para calcular a tensão em relação à abertura da trinca e tenacidade para as fibras no composto

```
%PROGRAMA PARA CALCULAR A TENSÃO-ABERTURA DA TRINCA E TENACIDADE
%
%UNIJUÍ
%MESTRADO EM MODELAGEM MATEMÁTICA
%DISSERTAÇÃO: "MODELAGEM MATEMÁTICA DE TENACIFICAÇÃO DE MATERIAIS CERÂMICOS
%              ATRAVÉS DA ADIÇÃO DE MICROFIBRAS"
%Autor:        ALCIONE RAFAEL PAVAN
%ORIENTADOR:   Prf. Dr. WANG CHONG
%
% PROGRAMA DE INTERGRAÇÃO
% Alguns dados tem entrada aqui para determinar os limites de intergração
% outros Dados são entrados no programa função Nf.m - Tratamento para Flags

clear; clc;
mk=1;
for modelo=0:2; %Modelos
    % -----Dados de entrada para calcular os Limites de integração
    Lf=12.7; %Comprimento da fibra (mm)
    df=0.012; %diametro da fibra (mm)
    Vf=0.02; %Volume de fibras no composto(% em valor unitário)
    % outros dados no programa função Nf
    %-----
    r=df/2;
    Af=pi*r^2;
    %-----Delimitações do intervalo para abertura da trinca
    wn1=200; wn2=200;
    wn=wn1+wn2+1;
    win=0; wfi1=Lf/1000; dw1=(wfi1-win)/wn1;
    win1=wfi1+dw1; wfi=Lf/2; dw=(wfi-win1)/wn2;
    w=[win:dw1:wfi1 win1:dw:wfi]; %w
    %-----
    n=200; %divisões de theta para integral de fora (n=par)
    m=200; %divisões de z para integral (m=par)
    a=0.00000001; %limite inferior theta
    b=atan(Lf/2/df)-0.01; %limite superior, theta máximo que contribui
    c=0.00000001; %limite inferior de z
    dt=(b-a)/n; %passo de theta
    theta=a:dt:b; %theta definido
    flags=zeros(n+1,m+1); %matriz flag inicial
    ssum=0; %soma da integral final
    for wi=2:wn+1 % w - abertura da trinca
        St1=0; St2=0; %somas para theta
        for ti=1:n+1 %theta
            d=(Lf*cos(theta(ti))-df*sin(theta(ti)))/2-1e-6; % limite
superior de z
            dz=(d-c)/m; %passo de z
            z=c:dz:d; %z definido para theta(ti)
            Sz1=0; Sz2=0; %somas de z
            flag=flags(ti,1);
            [Nfi, flagai]=Nf(w(wi), theta(ti), z(1), flag, modelo);
            % -----
            for zi=2:m % z
                flag=flags(ti,zi);
                [Nfm1, flaga]=Nf(w(wi), theta(ti), z(zi), flag, modelo);
                flags(ti,zi)=flaga;
                tes=rem(zi,2);
                if tes==0
```

```

        Sz1=Sz1+Nfm1;
    else
        Sz2=Sz2+Nfm1;
    end
end %fim z
% -----
flag=flaqs(ti,m+1);
[Nff,flagaf]=Nf(w(wi),theta(ti),z(m+1),flag,modelo);
flaqs(ti,m+1)=flagaf;
% -----
tes1=rem(ti,2);
if tes1==0 & ti>1 & ti<n+1
    St1=St1+dz/3*(Nfi+Nff+4*Sz1+2*Sz2)*sin(theta(ti));
elseif tes1==1 & ti>1 & ti<n+1
    St2=St2+dz/3*(Nfi+Nff+4*Sz1+2*Sz2)*sin(theta(ti));
else
    St(ti)=dz/3*(Nfi+Nff+4*Sz1+2*Sz2)*sin(theta(ti));
end
end % fim theta(ti)
tensao(wi)=dt/3*(St(1)+St(n+1)+4*St1+2*St2)*Vf/Af*2/Lf; %tensao
para w
%----- integração para Gc - tenacidade
ip=rem(wi,2);
kcoe=2;
if ip==0
    kcoe=4;
end
if wi==wn1+1
    kcoe=4;
end
if wi<=wn1+1
    ssum=ssum+tensao(wi)*kcoe*dw1/3;
else
    kcoe=4;
    if ip==0
        kcoe=2;
    end
    if wi==wn1+2 | wi==wn+1
        kcoe=1;
    end
    ssum=ssum+tensao(wi)*kcoe*dw/3;
end
% -----
% ----- conta flags - porcentagens
cta0=0; cta1=0; cta2=0; cta3=0;cta4=0;
for i=1:n+1
    for j=1:m+1
        switch flaqs(i,j)
            case 0
                cta0=cta0+1;
            case 1
                cta1=cta1+1;
            case 2
                cta2=cta2+1;
            case 3
                cta3=cta3+1;
            case 4
                cta4=cta4+1;
        end
    end
end
end

```

```

        talN=(n+1)*(m+1);
        per(wi,1)=w(wi);
        per(wi,2)=cta0/talN*100; per(wi,3)=cta1/talN*100;
per(wi,4)=cta2/talN*100;
        per(wi,5)=cta3/talN*100; per(wi,6)=cta4/talN*100;
        %-----
        if tensao(wi)==0
            break
        end
    end % fim w
    %parte grafica, flags e tensao-abertura
    tt=length(tensao);
    % -----
    figure(mk+1)
    grid
    hold on
    cor='krbmg';
    for tti=1:5
        plot(per(1:tt,1),per(1:tt,tti+1),cor(tti),'LineWidth',2)
    end
    legend('Flag 0','Flag I','Flag II','Flag III','Flag IV')
    text(per(tt-3,1),70,['Modelo = ',num2str(modelo)],'fontsize',10)
    %-----
    figure(mk+2)
    tt=tt-2;
    grid
    hold on
    for tti=1:5
        plot(per(1:tt,1),per(1:tt,tti+1),cor(tti),'LineWidth',2)
    end
    axis([0 0.003 0 100])
    legend('Flag 0','Flag I','Flag II','Flag III','Flag IV')
    %-----
    figure(1)
    hold on
    plot(w(1:wn1+1)*2/df,tensao(1:wn1+1),cor(modelo+1),'LineWidth',2)
    text(1.8,2+0.3*modelo,['G_c = ',num2str(2*ssum*1000),'J/m^2'],'fontsize',10,'color',cor(modelo+1))
    grid
    %-----
    mk=mk+2;
end % fim modelos
legend('Modelo 0','Modelo I','Modelo II')

```

ANEXO C - O programa para fazer o tratamento dos *flags* (fluxograma)

```
% PROGRAMA FUNÇÃO CHAMADO PELO PROGRAMA PRINCIPAL
% FAZ TRATAMENTOS DE FLAGS E CALCULA A FORÇA AXIAL NA FIBRA

function [N, flaga]=Nf(w, theta, z, flag, modelo);
%recebe dados corrente: w, theta, z
% recebe flag do w anterior: flag
% recebe modelo que se vai calcular

%retorna a força axial N e o flag atualizado (flaga)
%-----dados de entrada
tau0=4.5;      %Força cisalhante (N/mm^2=MPa)
Lf=12.7;      %Comprimento das fibras (mm)
df=.012;      %Diametro das fibras (mm)
Ef=69800;     %Modulo de elasticidade da fibra (MPa)
Em=13000;     %Modulo de elasticidade da matriz (MPa)
Gd=0;         %Tenacidade a fratura da interface (mmN/mm^2)
Vf=0.02       %Volume de fibras no composto (%, valor unitário)
f=0.6;        %Coeficiente de snubbing
Sfu=3310      %Resistencia da fibra (MPa)
upsilon=0.3   %coeficiente de poisson (usado pelo mdelo I no carregamento P)
%-----
Vm=1-Vf;
r=df/2;       %mm
Af=pi*r^2;
inercia=0.25*pi*r^4;
eta=Vf*Ef/(Vm*Em);
sigmad=sqrt(8*Gd*Ef*(1+eta)/df);
l0=r*tan(theta);
cont=2*df;
G=Ef/(2*(1+upsilon)); % modulo de elasticidade transversal
%----calculo de Le para z corrente - Parte enterrada da fibra
Le=Lf/2-z/cos(theta)-df*tan(theta)/2;
%----
if Le<0
    Le=0;
end
Nd=sigmad*Af*exp(f*theta);
wd=Nd*l0/(Ef*Af*cos(theta));
% ----- calculo w0
P1=2*tau0*Le^2*(1+eta)/(Ef*df)+Le*sigmad/Ef;
P2=(4*tau0*Le*(1+eta)/df+sigmad)/Ef;
P3=P1*(1+P2*(exp(f*theta)-1))+P2*l0*exp(f*theta)*pi*df/4;
w0=P3/cos(theta);
%----- Flags testes e tratamento w
switch flag
    case {3,4} %teste inicial
        flaga=flag;
        N=0;
    case 0
        N=Ef*Af*cos(theta)*w/l0;
        l=(l0+w*cos(theta))/(1+N/(Af*Ef));
        switch modelo
            case 0
                % calculada pela flexao
                P=3*w*sin(theta)*Ef*inercia/(l^3);
                sfw=N/Af+abs(P*l-N*w*sin(theta))*r/inercia;
```

```

        case 1
            % calculada pela tensao de cisalhamento
            if l<cont
                dom=l*df*Em*cos(theta)+Af*G;
                P=Em*df*cos(theta)*w*sin(theta)*Af*G/dom;
                sfw=N/Af+r*abs(P*(1+1/(Em*df*cos(theta)))-
N*w*sin(theta))/inercia;
            else
                dom=l^3*df*Em*cos(theta)+3*Ef*inercia;
                P=3*Em*Ef*df*cos(theta)*w*sin(theta)*inercia/dom;
                sfw=N/Af+r*abs(P*(1+1/(Em*df*cos(theta)))-
N*w*sin(theta))/inercia;
            end
        case 2
            % calculada pela rigidez
            dom=l^3*df*Em*cos(theta)+3*Ef*inercia;
            P=3*Em*Ef*df*cos(theta)*w*sin(theta)*inercia/dom; %Eq.
(35)
            sfw=N/Af+r*abs(P*(1+1/(Em*df*cos(theta)))-
N*w*sin(theta))/inercia; %Eq. (38)
        end %fim switch modelo
        %-----
        if N<Nd & sfw<Sfu
            flaga=0;
        elseif N<Nd & sfw>=Sfu
            flaga=4;
            N=0;
        elseif N>=Nd & sfw<Sfu
            descolagem
        else % N>=Nd & sfw>=Sfu
            l=(l0+wd*cos(theta))/(1+Nd/(Af*Ef));
            switch modelo
                case 0
                    % calculada pela flexao
                    P=3*wd*sin(theta)*Ef*inercia/(l^3);
                    sfd=Nd/Af+abs(P*l-Nd*wd*sin(theta))*r/inercia;
                case 1
                    % calculada pela tensao de cisalhamento
                    if l<cont
                        dom=l*df*Em*cos(theta)+Af*G;
                        P=Em*df*cos(theta)*wd*sin(theta)*Af*G/dom;
                        sfd=Nd/Af+r*abs(P*(1+1/(Em*df*cos(theta)))-
Nd*wd*sin(theta))/inercia;
                    else
                        dom=l^3*df*Em*cos(theta)+3*Ef*inercia;
                        P=3*Em*Ef*df*cos(theta)*wd*sin(theta)*inercia/dom;
                        sfd=Nd/Af+r*abs(P*(1+1/(Em*df*cos(theta)))-
Nd*wd*sin(theta))/inercia;
                    end
                case 2
                    % calculada pela rigidez
                    dom=l^3*df*Em*cos(theta)+3*Ef*inercia;
                    P=3*Em*Ef*df*cos(theta)*wd*sin(theta)*inercia/dom;
                    sfd=Nd/Af+r*abs(P*(1+1/(Em*df*cos(theta)))-
Nd*wd*sin(theta))/inercia;
                end
            % -----
            if sfd<=Sfu
                descolagem
            else
                flaga=4;
            end
        end
    end
end

```

```
        N=0;
    end
end
case 1 % flag==1
    descolagem %chama processo descolagem
case 2 %flag==2
    %calcula processo pullout
    pullout
end %fin testes de flag inicial - fim switch
```

ANEXO D - Programa para tratar o processo de descolagem

```

%PROCESSO DE DESCOLAGEM
%CHAMADO PELO PROGRAMA PRINCIPAL
if w>w0
    Nwo=(pi*df*tau0*Le*(1+eta)+sigmad*Af)*exp(f*theta);
    eli=(10+w0*cos(theta))/(1+Nwo/(Ef*Af));
    switch modelo
        case 0
            % calculada pela flexao
            P=3*w0*sin(theta)*Ef*inercia/(eli^3);
            sigmaw0=Nwo/Af+abs(P*eli-Nwo*w0*sin(theta))*r/inercia;
        case 1
            % calculada pela tensao de cisalhamento
            if eli<cont
                P=w0*sin(theta)*G*Af/eli;
            else
                P=3*w0*sin(theta)*Ef*inercia/(eli^3);
            end
            sigmaw0=Nwo/Af+abs(P*eli-Nwo*w0*sin(theta))*r/inercia;
        case 2
            % calculada pela rigidez
            dom=eli^3*df*Em*cos(theta)+3*Ef*inercia;
            P=3*Em*Ef*df*cos(theta)*w0*sin(theta)*inercia/dom;
            sigmaw0=Nwo/Af+r*abs(P*(eli+1/(Em*df*cos(theta)))-
Nwo*w0*sin(theta))/inercia;
        end
        if sigmaw0>=Sfu
            flag(k)=4;
            break
        else
            pullout %chama processo de pull-out
            return
        end
    else
        P12=(1+eta)/(Ef*df);    P1=2*tau0*P12;    P2=sqrt(8*Gd*P12);
        P3=2*Ef*P1;
        P45=exp(f*theta)/Ef;
        P4=P45-1/Ef;
        P5= P45*10*pi*df/4;
        pol=[P1*P3*P4 P1+P1*P4*sigmad+P2*P3*P4 P2+P2*P4*sigmad+P3*P5
sigmad*P5-w*cos(pol)];
        solu=roots(pol);
        ns=size(solu);
        imagi=imag(solu);
        isk=1;
        for is=1:ns
            if imagi(is)==0 & solu(is)>0
                sol1(isk)=solu(is);
            else
                sol1(isk)=2*Le;
            end
            isk=isk+1;
        end
        sol=min(sol1);
        if sol>Le
            error('Atencao:          L>Le\n');
        end
    end
end

```

```

N=(pi*df*tau0*soL*(1+eta)+sigmad*Af)*exp(f*theta);
l=(l0+w*cos(theta))/(1+N/(Af*Ef));
switch modelo
case 0
    % calculada pela flexao
    P=3*w*sin(theta)*Ef*inercia/(l^3);
    Sf=N/Af+abs(P*l-N*w*sin(theta))*r/inercia;
case 1
    % calculada pela tensao de cisalhamento
    if l<cont
        P=w*sin(theta)*G*Af/l;
    else
        P=3*w*sin(theta)*Ef*inercia/(l^3);
    end
    Sf=N/Af+abs(P*l-N*w*sin(theta))*r/inercia;
case 2
    % calculada pela rigidez
    dom=l^3*df*Em*cos(theta)+3*Ef*inercia;
    P=3*Em*Ef*df*cos(theta)*w*sin(theta)*inercia/dom;
    Sf=N/Af+r*abs(P*(l+1/(Em*df*cos(theta)))-
N*w*sin(theta))/inercia;
end
if Sf<Sfu
    flag(k)=1;
    Sc=(N*cos(theta)+P*sin(theta))/Af;
    Spa(k)=max(Sc, Spa(k));
    return
else
    flag(k)=4;
    break
end
end
end

```

ANEXO E - Programa para tratar o processo de pull-out

```

%PROCESSO DE PULL-OUT
%CHAMADO PELO PROGRAMA PRINCIPAL
%-----Calculo S0 para o inicio de pull-out
A=-2*tau0*exp(f*theta)/Ef/df;
B=-2*(-l0+1/2*Le)*A+1/2;
C=-w0*cos(theta)-2*l0*Le*A;
delta=B*B-4*A*C;
if delta<0
    error('sem solucao real para S0 quando w=%f\n',w0);
end
S1=(-B-sqrt(delta))*0.5/A;
S2=(-B+sqrt(delta))*0.5/A;
if S1<0 & S2<0
    error('sem solucao positiva para S0 quando w=%f\n',w0);
end
if S1*S2<0
    S0=max(S1,S2);
else
    S0=min(S1,S2);
end
if S0>=Le
    fprintf('pull-out completa quando w=%f\n',w0);
    flag(k)=3;
    break
end
% Calcular S-----
C=-w*cos(theta)-2*l0*Le*A;
delta=B*B-4*A*C;
if delta<0
    error('sem solucao real para S e pull-out completa quando w=%f\n',w);
end
S1=(-B-sqrt(delta))*0.5/A;
S2=(-B+sqrt(delta))*0.5/A;
if S1<0 & S2<0
    error('sem solucao positiva para S e pull-out completa quando
w=%f\n',w);
end
if S1*S2<0
    S=max(S1,S2);
else
    S=min(S1,S2);
end
if S>=Le %s=s0+s
    fprintf('pull-out completa quando w=%f\n',w);
    flag(k)=3;
    break
end
if S<S0
    error('S<S0, a fibra draw back quando w=%f\n',w\n');
end
N=pi*df*tau0*(Le-S)*exp(f*theta);
l=(l0+S+w*cos(theta))/(1+N/(Af*Ef));
switch modelo
    case 0
        % calculada pela flexao
        P=3*w*sin(theta)*Ef*inercia/(l^3);
        Sf=N/Af+abs(P*l-N*w*sin(theta))*r/inercia;
    case 1

```

```

% calculada pela tensao de cisalhamento
if l<cont
    P=w*sin(theta)*G*Af/l;
else
    P=3*w*sin(theta)*Ef*inercia/(l^3);
end
Sf=N/Af+abs(P*l-N*w*sin(theta))*r/inercia;
case 2
% calculada pela rigidez
dom=l^3*df*Em*cos(theta)+3*Ef*inercia;
P=3*Em*Ef*df*cos(theta)*w*sin(theta)*inercia/dom;
Sf=N/Af+r*abs(P*(1+1/(Em*df*cos(theta)))-N*w*sin(theta))/inercia;
end

if Sf<Sfu
    flag(k)=2;
    Sc=(N*cos(theta)+P*sin(theta))/Af;
    Spa(k)=max(Sc, Spa(k));
else
    flag(k)=4;
end

```

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)