

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

# Solução das Equações da Cinética Pontual pelo Método da Decomposição de Adomian

por

Eduardo da Silva Schneider

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena  
Orientador

Prof. Dr. Rubem Mário Figueiró Vargas  
Co-orientador

Porto Alegre, Fevereiro de 2006.

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO**

Schneider, Eduardo da Silva

Solução das Equações da Cinética Pontual pelo Método da Decomposição de Adomian / Eduardo da Silva Schneider.—  
Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2006.

51 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2006.

Orientador: Vilhena, Marco Túlio Menna Barreto de; Co-orientador: Vargas, Rubem Mário Figueiró

Dissertação: Matemática Aplicada

Cinética de Reatores, Método da Decomposição, Problemas Stiff

**Solução das Equações da Cinética Pontual pelo  
Método da Decomposição de Adomian**

por

Eduardo da Silva Schneider

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

**Mestre em Matemática Aplicada**

Linha de Pesquisa: Teoria de Transporte e Transformadas Integrais

Orientador: Prof. Dr. Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena

Co-orientador: Prof. Dr. Rubem Mário Figueiró Vargas

Banca examinadora:

Prof. Dr. Augusto Vieira Cardona  
FAMAT/PUC-RS

Prof. Dr. Mark Thompson  
PPGMAp/IM/UFRGS

Prof. Dr. Ricardo Carvalho de Barros  
IPRJ/UERJ

Prof.Dr. Sérgio Leite Boggado  
CNEN

Dissertação apresentada e aprovada em  
03 de Fevereiro de 2006.

Profa. Dra. Maria Cristina Varriale  
Coordenador

## AGRADECIMENTO

Agradeço ao professor Marco Túlio Menna Barreto de Vilhena que muito mais que um orientador acadêmico foi meu orientador pessoal. Nesta mesma linha, agradeço a professora Cynthia Feijó Segatto. Estes dois professores me ensinaram muito mais que teorias, teoremas e fórmulas: acredito que me ensinaram a ser uma pessoa melhor.

Agradeço a Sabrina Bobsin Salazar, minha esposa, que foi minha companhia constante durante o mestrado. Passamos pelas mesmas aulas, noites de estudos, provas, trabalhos, alegrias e tristezas. Sei que temos muito mais para passar juntos!

Agradeço aos meus pais e irmã.

Agradeço, também, a toda banca examinadora e ao meu co-orientador, professor Rubem Mário Figueiró Vargas, pela atenção e comentários valiosos na elaboração deste trabalho.

## RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos uma solução analítica, aplicando o método da decomposição de Adomian, para as equações da cinética pontual para reatividade arbitrária, um sistema de equações diferenciais ordinárias do tipo "Stiff". Apresentaremos, ainda, simulações numéricas para as reatividades do tipo constante, linear, senoidal e exponencial, bem como faremos comparações com resultados disponíveis na literatura.

## ABSTRACT

In this work we present an analytical solution applying the decomposition method of Adomian to the point kinetics equations with arbitrary reactivity, a stiff system of ordinary differential equations. We show numerical results to reactivities: constant, linear, sinusoidal and exponential; and we will make comparison with available results in the literature.

## Lista de Tabelas

Tabela 4.1	Densidade de nêutrons obtida pelo método da decomposição utilizando computação simbólica, pelo método da série de Taylor e pelo método de Hansen considerando a reatividade do tipo linear com $\rho(t) = 0,001t$ . . . . .	32
Tabela 4.2	Concentrações dos precursores de nêutrons atrasados obtidas pelo método da decomposição utilizando computação simbólica considerando a reatividade do tipo linear com $\rho(t) = 0,001t$ . . . . .	32
Tabela 4.3	Densidade de nêutrons obtida pelo método da decomposição utilizando a solução exata truncada para o caso em que a reatividade é considerada constante por partes, pelo método da série de Taylor e pelo método de Hansen considerando a reatividade do tipo linear com $\rho(t) = 0,001t$ . . . . .	33
Tabela 4.4	Concentrações dos precursores de nêutrons atrasados obtidas pelo método da decomposição utilizando a solução exata truncada para o caso em que a reatividade é considerada constante por partes considerando a reatividade do tipo linear com $\rho(t) = 0,001t$ . . . . .	33
Tabela 4.5	Densidade de nêutrons obtida pelo método da decomposição utilizando computação simbólica, pelo método da série de Taylor e pelo método de Hansen considerando a reatividade do tipo senoidal com $\rho(t) = 0,00073 \sin(t)$ . . . . .	34
Tabela 4.6	Concentrações dos precursores de nêutrons atrasados obtidas pelo método da decomposição utilizando computação simbólica considerando a reatividade do tipo senoidal com $\rho(t) = 0,00073 \sin(t)$ . . . . .	35
Tabela 4.7	Densidade de nêutrons obtida pelo método da decomposição utilizando a solução exata truncada para o caso em que a reatividade é considerada constante por partes, pelo método da série de Taylor e pelo método de Hansen considerando a reatividade do tipo senoidal com $\rho(t) = 0,00073 \sin(t)$ . . . . .	36
Tabela 4.8	Concentrações dos precursores de nêutrons atrasados obtidas pelo método da decomposição utilizando a solução exata truncada para o caso em que a reatividade é considerada constante por partes considerando a reatividade do tipo senoidal com $\rho(t) = 0,00073 \sin(t)$ . . . . .	37
Tabela 4.9	Densidade de nêutrons obtida pelo método da decomposição considerando a reatividade do tipo exponencial $\rho(t) = 0,0001 \exp(t)$ . . . . .	38



Tabela 4.10	Concentrações dos precursores de nêutrons atrasados obtidas pelo método da decomposição utilizando computação simbólica considerando a reatividade do tipo exponencial $\rho(t) = 0,0001 \exp(t)$ .	38
Tabela 4.11	Concentrações dos precursores de nêutrons atrasados obtidas pelo método da decomposição utilizando a solução exata truncada para o caso em que a reatividade é considerada constante por partes considerando a reatividade do tipo exponencial $\rho(t) = 0,0001 \exp(t)$ .	38
Tabela A.1	Parâmetros dos grupos precursores de nêutrons atrasados. . .	41

## Conteúdo

RESUMO . . . . .	II
ABSTRACT . . . . .	III
LISTA DE TABELAS . . . . .	IV
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
2 AS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL DE UM REATOR NUCLEAR . . . . .	4
2.1 A Equação Geral de Difusão de Nêutrons . . . . .	4
2.2 A Equação de Difusão de Nêutrons Monoenergéticos com Nêutrons Atrasados . . . . .	6
2.3 Derivação das Equações da Cinética Pontual . . . . .	9
2.4 Formulação Matricial . . . . .	14
3 MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN . . . . .	17
3.1 O Método da Decomposição . . . . .	18
3.2 Solução das Equações da Cinética Pontual pelo Método da De- composição de Adomian . . . . .	20
3.3 Reatividade Constante . . . . .	23
3.4 Reatividade Linear . . . . .	27
4 ANÁLISE DOS RESULTADOS . . . . .	31
4.1 Reatividade Linear . . . . .	31
4.2 Reatividade Senoidal . . . . .	34
4.3 Reatividade Exponencial . . . . .	37
5 CONCLUSÕES . . . . .	39
APÊNDICE A . . . . .	41

APÊNDICE B	42
BIBLIOGRAFIA	49

# 1 INTRODUÇÃO

Nos últimos vinte anos, o método da decomposição de Adomian vem sendo aplicado para a obtenção de soluções formais para uma grande classe de problemas. Atualmente, o método da decomposição emergiu como um método alternativo para resolver uma grande variedade de problemas cujos modelos matemáticos envolvem equações ou sistemas de equações algébricas, diferenciais, integrais e integro-diferenciais.

Existe uma vasta literatura que seria difícil de enumerá-la por completo. Para exemplificar, mencionamos os seguintes trabalhos: em [Guellal e Cherruault, 1995], foi utilizada a técnica de Adomian para resolver um problema de valor de contorno elíptico com uma condição auxiliar; em [Adomian et al., 1996], foram resolvidos modelos matemáticos de interação dinâmica; em [Guellal et al., 1997], foi utilizado o método da decomposição para resolver sistemas diferenciais vindos da física, sendo que os autores fizeram uma comparação entre o método de Runge-Kutta e o método da decomposição; em [Abbaoui e Cherruault, 1999], foi usado o método da decomposição para resolver o problema de Cauchy sem utilizar a forma canônica de Adomian. [Abbaoui e Cherruault, 1999] também forneceram uma prova da convergência utilizando uma nova formulação dos polinômios de Adomian e compararam o método da decomposição com o método de Picard. De acordo com [Adomian, 1994], o método da decomposição fornece soluções em séries que convergem rapidamente utilizando poucas iterações tanto para equações lineares e não-lineares, determinísticas ou estocásticas. A vantagem deste método é que ele fornece um esquema direto para resolver o problema sem a necessidade de linearização, técnicas de perturbação, computação massiva ou qualquer transformação no problema original.

No nosso conhecimento, o método da decomposição de Adomian foi aplicado pela primeira vez na solução das equações de transporte de partículas por [Vargas e Vilhena, 1997]; e, recentemente, [Vargas et al., 2005] obtiveram uma

fórmula de recorrência para os coeficientes da solução do problema de cinética pontual para reatividade linear  $\rho(t) = at$ .

Já a solução numérica do problema da cinética pontual tem sido estudada por vários pesquisadores ao longo de muitos anos. Este problema ainda é de interesse pois fornece uma "amplitude" para a função fluxo escalar. Em função da grande quantidade de estudos realizados sobre este problema pretendemos citar somente aqueles que consideramos relevantes para o desenvolvimento deste trabalho. Em [Hansen et al., 1965], as equações da cinética pontual foram formuladas de uma maneira matricial conveniente e foi desenvolvida uma técnica integral que fornece uma solução numérica estável; em [Vilhena, 1988], foi utilizada uma inversão numérica de equações matriciais de ordem elevada, que é uma técnica matricial, e, também, foi utilizado o método de expansão em série de Taylor, o que fornece uma fórmula de recorrência para os termos da série solução do problema; em [Sánchez, 1989], foi planejado e implementado um método de Runge-Kutta A-estável que elimina o problema de escalas; em [Aboanber e Nahla, 2002] e [Aboanber e Nahla, 2004], são derivadas técnicas baseadas na inversão numérica de polinômios e utilizadas aproximações de Padé para auxiliar na resolução do problema; em [Kinard e Allen, 2003], a reatividade foi aproximada por uma função escada o que possibilita resolver as equações da cinética pontual de forma exata e eliminar, também, o problema de escalas; recentemente, em [Hayes e Allen, 2005], o sistema de equações determinísticas da cinética pontual é transformado em um sistema de equações estocásticas que modelam mais precisamente o comportamento do processo. Esta formulação generaliza a formulação determinística já existente.

Neste trabalho, avançaremos na idéia proposta por [Vargas et al., 2005], que consiste na aplicação do método da decomposição para a resolução do problema da cinética pontual. O principal objetivo é seguirmos construindo soluções para reatividades arbitrárias e apresentarmos simulações para reatividades do tipo constante, linear, senoidal e exponencial. Para tal, faremos uso, fortemente, de computação simbólica com a utilização do software Maple.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no capítulo 2, será feita uma revisão acerca da equação da difusão de nêutrons, derivação das equações da cinética pontual a partir da equação da difusão com nêutrons atrasados e formulação matricial para tais equações. No capítulo 3, é descrito o método da decomposição de Adomian e este é aplicado na resolução das equações da cinética pontual. Neste mesmo capítulo, o problema foi resolvido para diferentes tipos de reatividades, a saber, constante, linear, senoidal e exponencial. No capítulo 4, apresentaremos os resultados obtidos com este método e faremos uma análise destes resultados, comparando com resultados disponíveis na literatura. No capítulo 5, apresentaremos as conclusões bem como sugestões para trabalhos futuros.

## 2 AS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL DE UM REATOR NUCLEAR

As equações gerais que descrevem o comportamento, no tempo, dos nêutrons em um reator nuclear térmico são estabelecidas em termos da Teoria da Difusão de Nêutrons, após algumas simplificações, conforme [Glasstone e Edlund, 1966], [Henry, 1975] e [Duderstadt e Hamilton, 1976], sendo conhecidas como equações da cinética pontual.

De outro lado, o controle do nível de potência num reator nuclear é um problema de engenharia muito importante, porém complexo. Matematicamente, este problema é, usualmente, considerado através da construção de modelos simplificados, que simulam, aproximadamente, os aspectos da realidade física.

O objetivo deste capítulo é entender a derivação das equações da cinética pontual de um reator. Como ponto de partida, tomaremos a equação geral da difusão de nêutrons.

### 2.1 A Equação Geral de Difusão de Nêutrons

A equação geral multigrupo energia da difusão de nêutrons é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_g(\mathbf{r}, t) &= \nabla \cdot D_g(\mathbf{r}) \nabla \Phi_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{ag}(\mathbf{r}) \Phi_g(\mathbf{r}, t) - \Sigma_{sg}(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) + \\ &+ \sum_{g'=1}^G \Sigma_{sg'g}(\mathbf{r}) \Phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + \chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'}(\mathbf{r}) \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}) \Phi_{g'}(\mathbf{r}, t) + S_g^{ext} \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde

- $\Phi_g(\mathbf{r}, t)$  é o fluxo escalar de nêutrons na posição  $\mathbf{r}$  e no tempo  $t$  do grupo  $g$   
 $v_g$  é a velocidade dos nêutrons do grupo  $g$   
 $D_g(\mathbf{r})$  é o coeficiente de difusão na posição  $\mathbf{r}$  do grupo  $g$   
 $\Sigma_{ag}(\mathbf{r})$  é a seção de choque macroscópica de absorção de nêutrons do grupo  $g$  na posição  $\mathbf{r}$   
 $\Sigma_{sg}(\mathbf{r})$  é a seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons do grupo  $g$  para um grupo  $g'$ , diferente de  $g$ , na posição  $\mathbf{r}$   
 $\Sigma_{sg'g}(\mathbf{r})$  é a seção de choque macroscópica de espalhamento de nêutrons do grupo  $g'$  para o grupo  $g$  na posição  $\mathbf{r}$   
 $\chi_g$  é a fração de nêutrons que aparecem no grupo  $g$   
 $\nu_{g'}(\mathbf{r})$  é número médio de nêutrons emitidos na fissão no grupo  $g'$  e na posição  $\mathbf{r}$   
 $\Sigma_{fg'}(\mathbf{r})$  é a seção de choque macroscópica de fissão de nêutrons do grupo  $g'$  na posição  $\mathbf{r}$   
 $S_g^{ext}$  é a fonte externa

Se considerarmos somente um grupo de energia e ausência de fonte externa, a equação (2.1) assume a forma simplificada:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot D(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) + \nu(\mathbf{r}) \Sigma_f(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.2)$$

- $\Phi(\mathbf{r}, t)$  é o fluxo escalar de nêutrons na posição  $\mathbf{r}$  e no tempo  $t$   
 $v$  é a velocidade dos nêutrons  
 $D(\mathbf{r})$  é o coeficiente de difusão na posição  $\mathbf{r}$   
 $\Sigma_a(\mathbf{r})$  é a seção de choque macroscópica de absorção de nêutrons do grupo  $g$  na posição  $\mathbf{r}$   
 $\nu(\mathbf{r})$  é número médio de nêutrons emitidos na fissão na posição  $\mathbf{r}$   
 $\Sigma_f(\mathbf{r})$  é a seção de choque macroscópica de fissão de nêutrons na posição  $\mathbf{r}$



Nas equações (2.1) e (2.2), foi assumido que o aparecimento de todos os nêutrons acontece ao mesmo tempo em que as fissões ocorrem. Este fato está representado, na equação (2.1), pelo termo

$$\chi_g \sum_{g'=1}^G \nu_{g'}(\mathbf{r}) \Sigma_{fg'}(\mathbf{r}) \Phi_{g'}(\mathbf{r}, t) \quad (2.3)$$

e, na equação (2.2), pelo termo

$$\nu(\mathbf{r}) \Sigma_f(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.4)$$

Estes termos representam a taxa de produção de nêutrons por fissão. Contudo, na realidade, uma pequena fração de nêutrons vem, não diretamente da fissão, mas do decaimento subsequente de produtos de fissão (precursores de nêutrons atrasados).

## 2.2 A Equação de Difusão de Nêutrons Monoenergéticos com Nêutrons Atrasados

Se  $\nu(\mathbf{r})$  é o número total de nêutrons emitidos por fissão na posição  $\mathbf{r}$  e  $\beta_i(\mathbf{r})$  a fração deste total que é emitida como nêutrons atrasados pelo precursor do grupo  $i$  na posição  $\mathbf{r}$ , então  $\beta_i(\mathbf{r})\nu(\mathbf{r})$  é o número esperado de nêutrons atrasados na posição  $\mathbf{r}$  por precursores do grupo  $i$ .

Se definirmos

$$\beta(\mathbf{r}) = \sum_i \beta_i(\mathbf{r}) \quad (2.5)$$

então  $[1 - \beta(\mathbf{r})]\nu(\mathbf{r})$  é o número esperado de nêutrons prontos emitidos por fissão na posição  $\mathbf{r}$ .

Existe um grande número de isótopos, produtos de fissões, que decaem pela emissão de um nêutron. Contudo, com o propósito de modelar os efeitos na equação da cinética pontual, classicamente, consideramos seis grupos de precursores. Podemos encontrar na tabela (A.1) alguns valores para grupos de precursores, considerando diferentes combustíveis nucleares.

Em cada grupo, os precursores de nêutrons atrasados decaem exponencialmente de acordo com sua meia-vida, que determina a taxa de emissão de nêutrons atrasados.

A concentração de precursores de nêutrons atrasados no  $i$ -ésimo grupo é representada por  $c_i(\mathbf{r}, t)$  e  $\lambda_i$  é a correspondente constante de decaimento efetiva.

Assim, a equação (2.2), considerando os nêutrons atrasados torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \nabla \cdot D(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) + \\ &+ [1 - \beta(\mathbf{r})] \nu(\mathbf{r}) \Sigma_f(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Além disso, precisaremos das equações que governam as concentrações dos precursores. Para obtermos tais equações faremos o seguinte balanço para cada grupo:

$$\left| \begin{array}{l} \text{variação da} \\ \text{concentração} \\ \text{do precursor} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \text{produção} \\ \text{do} \\ \text{precursor} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{l} \text{decaimento} \\ \text{do} \\ \text{precursor} \end{array} \right|$$

Mas a produção do precursor do  $i$ -ésimo grupo é dada por  $\beta_i(\mathbf{r}) \nu(\mathbf{r}) \Sigma_f(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, t)$  e o decaimento do precursor do  $i$ -ésimo grupo é dada por  $\lambda_i c_i(\mathbf{r}, t)$ . Segue que as equações que governam as concentrações dos precursores são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}c_1(\mathbf{r}, t) &= \beta_1\nu(\mathbf{r})\Sigma_f(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, t) - \lambda_1c_1(\mathbf{r}, t) \\
\frac{\partial}{\partial t}c_2(\mathbf{r}, t) &= \beta_2\nu(\mathbf{r})\Sigma_f(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, t) - \lambda_2c_2(\mathbf{r}, t) \\
&\vdots \\
\frac{\partial}{\partial t}c_6(\mathbf{r}, t) &= \beta_6\nu(\mathbf{r})\Sigma_f(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, t) - \lambda_6c_6(\mathbf{r}, t)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

que podem ser escritas na forma condensada

$$\frac{\partial}{\partial t}c_i(\mathbf{r}, t) = \beta_i(\mathbf{r})\nu(\mathbf{r})\Sigma_f(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, t) - \lambda_i c_i(\mathbf{r}, t) \quad i = 1, 2, \dots, 6. \tag{2.8}$$

Como o nosso objetivo é construir as equações da cinética pontual, podemos considerar o domínio homogêneo de onde temos que  $D(\mathbf{r}) = D$ ,  $\Sigma_a(\mathbf{r}) = \Sigma_a$ ,  $\Sigma_f(\mathbf{r}) = \Sigma_f$ ,  $\nu(\mathbf{r}) = \nu$ ,  $\beta(\mathbf{r}) = \beta$  e  $\beta_i(\mathbf{r}) = \beta_i$ . As equações (2.6) e (2.8) tornam-se:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) &= D\nabla^2\Phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a\Phi(\mathbf{r}, t) + [1 - \beta]\nu\Sigma_f\Phi(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(\mathbf{r}, t) \\
\frac{\partial}{\partial t}c_i(\mathbf{r}, t) &= -\lambda_i c_i(\mathbf{r}, t) + \beta_i\nu\Sigma_f\Phi(\mathbf{r}, t) \quad i = 1, 2, \dots, 6.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Poderemos considerar

$$S = [1 - \beta]\nu\Sigma_f\Phi(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(\mathbf{r}, t) \tag{2.10}$$

como sendo a fonte de nêutrons prontos e atrasados. No caso estacionário, teremos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t}c_i(\mathbf{r}, t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 6; \tag{2.11}$$

portanto,

$$c_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\beta_i \nu \Sigma_f}{\lambda_i} \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.12)$$

### 2.3 Derivação das Equações da Cinética Pontual

Partindo das equações (2.9), a fim de chegarmos nas equações da cinética pontual, reescrevemos tais equações como:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = L(\beta) \Phi(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(\mathbf{r}, t) \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} c_i(\mathbf{r}, t) = -\lambda_i c_i(\mathbf{r}, t) + \beta_i \nu \Sigma_f \Phi(\mathbf{r}, t) \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

onde o operador diferencial de segunda ordem  $L(\beta)$  é dado por

$$L(\beta) = D\nabla^2 - \Sigma_a + (1 - \beta)\nu\Sigma_f. \quad (2.14)$$

As condições iniciais apropriadas para o sistema (2.13), envolvem a especificação do fluxo crítico de nêutrons e concentração dos grupos de precursores de nêutrons atrasados no tempo  $t = 0$ . As condições de contorno para o fluxo são consideradas como de fluxo escalar zero na fronteira, isto é, condições de Dirichlet homogêneas na fronteira do reator.

De (2.13),

$$\frac{\partial}{\partial t} c_i(\mathbf{r}, t) = 0 \Rightarrow \beta \nu \Sigma_f \Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(\mathbf{r}, t) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \Rightarrow D\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) - \Sigma_a \Phi(\mathbf{r}, t) + \nu \Sigma_f \Phi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

ou seja, no regime crítico de funcionamento de um reator, o sistema (2.13) reduz-se à

$$L(0)\Phi = 0 \quad (2.16)$$

isto é, a equação de Helmotz

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi + B^2\Phi &= 0 && \text{em } \Omega \\ \Phi &= 0 && \text{em } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.17)$$

onde

$$B^2 = \frac{(\nu\Sigma_f - \Sigma_a)}{D} \quad (2.18)$$

é chamado de "*buckling*" do material.

Com a introdução do comprimento de difusão de nêutrons

$$L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}}, \quad (2.19)$$

e do fator de multiplicação infinita

$$k_\infty = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a}, \quad (2.20)$$

relativo ao número de nêutrons produzidos por nêutrons absorvidos, a equação (2.17) pode ser escrita na forma

$$\nabla^2\Phi + \frac{k_\infty - 1}{L^2}\Phi = 0. \quad (2.21)$$

Como as geometrias usuais para os núcleos dos reatores (barras, cilindros, esfera) possuem simetria, a equação (2.21) pode ser resolvida por separação de variáveis.

Para obtermos as equações da cinética pontual, expandiremos  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  e  $c_i(\mathbf{r}, t)$  em série de autofunções:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = v \sum_{j=1}^{\infty} n_j(t) \Psi_j(\mathbf{r}) \quad (2.22)$$

$$c_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{i,j}(t) \Psi_j(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.23)$$

onde  $\Psi_j(\mathbf{r})$  satisfaz a equação (2.17).

Como em [Vilhena, 1988], consideraremos somente o primeiro termo da série, isto é,

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = vn_1(t) \Psi_1(\mathbf{r}) = vn(t) \Psi_1(\mathbf{r}) \quad (2.24)$$

$$c_i(\mathbf{r}, t) = c_{i,1}(t) \Psi_1(\mathbf{r}) = c_i(t) \Psi_1(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (2.25)$$

Substituindo (2.24) e (2.25) no sistema de equações (2.9) teremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n(t) \Psi_1(\mathbf{r}) - Dvn(t) \nabla^2 \Psi_1(\mathbf{r}) + \Sigma_a vn(t) \Psi_1(\mathbf{r}) &= (1 - \beta) \nu \Sigma_f vn(t) \Psi_1(\mathbf{r}) + \\ &+ \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t) \Psi_1(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{dt} c_i(t) \Psi_1(\mathbf{r}) = -\lambda_i c_i(t) \Psi_1(\mathbf{r}) + \beta_i \nu \Sigma_f vn(t) \Psi_1(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (2.27)$$

Isolando  $\frac{d}{dt}n(t)\Psi_1(\mathbf{r})$  na equação (2.26), obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t)\Psi_1(\mathbf{r}) &= (1 - \beta)\nu\Sigma_f v n(t)\Psi_1(\mathbf{r}) + Dv n(t)\nabla^2\Psi_1(\mathbf{r}) - \\ &- \Sigma_a v n(t)\Psi_1(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t)\Psi_1(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Utilizando que  $\Psi_1(\mathbf{r})$  satisfaz a equação (2.17) temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t)\Psi_1(\mathbf{r}) &= (1 - \beta)\nu\Sigma_f v n(t)\Psi_1(\mathbf{r}) + Dv n(t)(-B^2\Psi_1(\mathbf{r})) - \\ &- \Sigma_a v n(t)\Psi_1(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t)\Psi_1(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

ou ainda, colocando em evidência o termo  $n(t)\Psi_1(t)$ , teremos:

$$\frac{d}{dt}n(t)\Psi_1(\mathbf{r}) = [(1 - \beta)\nu\Sigma_f v - B^2 Dv - \Sigma_a v]n(t)\Psi_1(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t)\Psi_1(\mathbf{r}). \quad (2.30)$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}n(t) = [(1 - \beta)\nu\Sigma_f v - B^2 Dv - \Sigma_a v]n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t). \quad (2.31)$$

Se definirmos como em [Duderstadt e Hamilton, 1976],

$$l = [v\Sigma_a(1 + L^2 B^2)]^{-1} \quad (2.32)$$

como sendo o tempo médio de vida do nêutron no reator e

$$k = \frac{\nu\Sigma_f/\Sigma_a}{1 + L^2B^2} = \frac{k_\infty}{1 + L^2B^2} \quad (2.33)$$

como sendo o fator de multiplicação efetivo, então

$$\frac{d}{dt}n(t) = \left[ (1 - \beta)\frac{k}{l} - v(B^2D + \Sigma_a) \right] n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t) \quad (2.34)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}n(t) = \frac{(1 - \beta)k - 1}{l} n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i. \quad (2.35)$$

De forma análoga, colocando  $\Psi_1(r)$  em evidência, na equação (2.27), obteremos:

$$\frac{d}{dt}c_i(t)\Psi_1(\mathbf{r}) = [-\lambda_i c_i + \beta_i \nu \Sigma_f v n(t)]\Psi_1(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (2.36)$$

que pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt}c_i(t)\Psi_1(\mathbf{r}) = \left[ -\lambda_i c_i(t) + \beta_i \frac{k}{l} n(t) \right] \Psi_1(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (2.37)$$

Então,

$$\frac{d}{dt}c_i(t) = -\lambda_i c_i(t) + \beta_i \frac{k}{l} n(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (2.38)$$

Neste ponto, introduziremos duas novas definições:

$$\Lambda = \frac{l}{k} \quad (2.39)$$



que é o tempo médio de geração entre o nascimento de nêutrons e a subsequente absorção induzindo fissão, e

$$\rho(t) = \frac{k(t) - 1}{k(t)} \quad (2.40)$$

que é a reatividade.

Isto permite reescrever as equações (2.35) e (2.38) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n(t) &= \frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda}n(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_i(t) \\ \frac{d}{dt}c_i(t) &= \frac{\beta_i}{\Lambda}n(t) - \lambda_i c_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned} \quad (2.41)$$

que são conhecidas como equações da cinética pontual.

Esse sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas dependentes do tempo descreve o comportamento da população de nêutrons e o decaimento dos precursores de nêutrons atrasados. Segundo [Duderstadt e Hamilton, 1976], este sistema não pode ser resolvido facilmente por métodos numéricos padrões como, por exemplo, os métodos de Runge-Kutta clássicos de quarta e sexta ordens. Esta dificuldade é caracterizada pela grande diferença nas escalas dos parâmetros ou, ainda, pela incompatibilidade de escalas do problema físico com o problema matemático. De acordo com [Vilhena, 1988], este problema é do tipo Stiff (rígidos) e técnicas mais sofisticadas são necessárias para se obter uma solução numérica satisfatória.

## 2.4 Formulação Matricial

As equações (2.41) da cinética pontual para 6 grupos de precursores de nêutrons atrasados podem ser escritas de maneira mais compacta na forma matricial.

Consideremos as matrizes:

$$X(t) = \begin{bmatrix} n(t) \\ c_1(t) \\ \vdots \\ c_6(t) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

e

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\rho(t)-\beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_6 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Então as equações da cinética pontual são simplesmente o sistema matricial de primeira ordem

$$\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t). \quad (2.44)$$

No caso em que a reatividade  $\rho(t)$  é uma constante, ou seja,

$$\rho(t) = \rho_0, \quad (2.45)$$

a solução analítica do sistema é dada por:

$$X(t) = e^{At}X(0) \quad (2.46)$$

onde

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} \quad (2.47)$$

e

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & 0 & \dots & -\lambda_6 \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

### 3 MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN

A modelagem de vários problemas da física, matemática ou engenharia recaem em sistemas de equações diferenciais ordinárias ou parciais, lineares ou não-lineares. Assim, precisamos ser capazes de resolver estes sistemas que, em geral, dependem do espaço e tempo e que podem ser fortemente não-lineares.

Geralmente, procedimentos analíticos linearizam o sistema ou assumem que as não-linearidades são relativamente insignificantes. Tais procedimentos mudam o problema para torná-los tratáveis por métodos convencionais. Estes procedimentos, algumas vezes, modificam a solução do sistema.

Já os métodos numéricos como os métodos clássicos de Runge-Kutta são baseados em técnicas de discretização e somente permitem calcular a solução aproximada para alguns valores das variáveis. Sistemas dinâmicos não-lineares apresentam uma estrutura delicada: dependendo do passo escolhido na discretização, pode ocorrer a negligência de alguns fenômenos importantes tais como caos e bifurcações. Ademais, alguns métodos numéricos requerem computação intensiva.

A habilidade de resolver sistemas não-lineares por um método analítico é importante pois linearização altera o problema, perturbação somente é razoável quando os efeitos não-lineares são muito pequenos e os métodos numéricos precisam de uma grande quantidade de computação para a obtenção de informações limitadas.

Na década de 1980, Adomian desenvolveu o método da decomposição para resolver sistemas lineares e não-lineares. Esse método consiste em quebrar uma equação na sua parte linear e não-linear. Utilizar o operador inverso da parte linear, que, na maioria dos casos, pode ser encontrado com facilidade. Decompor as funções desconhecidas em séries cujos termos serão determinados de acordo com fórmulas de recorrência. E finalmente, os valores iniciais ou condições de contorno inicializam as fórmulas de recorrência.

Assim, utilizando o método da decomposição, obteremos uma solução em série, na prática, uma solução em série truncada. Essa série, freqüentemente, coincide com a expansão de Taylor da solução.

### 3.1 O Método da Decomposição

Consideremos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2, \dots, y_m) + g_1 \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2, \dots, y_m) + g_2 \\ &\vdots \\ y_m' &= f_m(y_1, y_2, \dots, y_m) + g_m, \end{aligned} \tag{3.1}$$

que pode ser escrito na forma condensada

$$y_i' = f_i(y_1, y_2, \dots, y_m) + g_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{3.2}$$

onde  $f_i$  são funções não-lineares,  $g_i$  são funções conhecidas. Estaremos procurando soluções  $y_1, y_2, \dots, y_m$  que satisfaçam o sistema de equações (3.2).

Assumiremos que para qualquer  $g_i$ , o sistema (3.2) possui somente uma solução.

Aplicando o método da decomposição, como foi em [Adomian, 1994], [Adomian, 1988] e [Mahmood et al., 2005], poderemos escrever o sistema (3.2) como

$$Ly_i = N_i(y_1, y_2, \dots, y_m) + g_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{3.3}$$

onde  $L = \frac{d}{dt}$  é um operador linear e  $N_i(y_1, y_2, \dots, y_m) = f_i(y_1, y_2, \dots, y_m)$  são operadores não lineares. Operando de ambos os lados da equação (3.3) com o operador inverso de  $L$ , digamos  $L^{-1}$  que neste caso é dado por  $L^{-1}[\cdot] = \int_0^t [\cdot] dt'$ , teremos

$$y_i = y_i(0) + L^{-1}N_i(y_1, y_2, \dots, y_m) + L^{-1}g_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.4)$$

O método da decomposição de Adomian consiste em aproximar a solução de (3.4) por uma série infinita da forma

$$y_i = \sum_{n=0}^{\infty} y_{i,n}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.5)$$

e decompor o operador não-linear  $N_i$  como

$$N_i(y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{i,n}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.6)$$

onde  $A_{i,n}$  são polinômios de  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , chamados de Polinômios de Adomian.

Substituindo as equações (3.5) e (3.6) em (3.4) teremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_{i,n} = y_i(0) + L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_{i,n} + L^{-1}g_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.7)$$

Então, propomos fazer a identificação

$$y_{i,0} = y_i(0) + L^{-1}g_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.8)$$

e

$$y_{i,n+1} = L^{-1}A_{i,n}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.9)$$

assim definindo um procedimento iterativo.

Vários autores investigaram, e ainda é assunto de pesquisa, a convergência do método da decomposição de Adomian.

O tratamento teórico da convergência do método da decomposição foi considerado por [Cherruault, 1989] e [Répaci, 1990]. Em [Cherruault, 1989], foi proposta uma nova definição da técnica e então a idéia que torna possível provar a convergência do método da decomposição. [Répaci, 1990] mostrou a convergência do método baseado em uma sutil conexão com técnicas de ponto fixo. Esta é, essencialmente, a mesma conclusão derivada por [Cherruault, 1989]. Estes resultados foram melhorados por [Cherruault e Adomian, 1993], que propuseram uma nova prova da convergência para a técnica de Adomian baseados em propriedades da convergência de séries.

### 3.2 Solução das Equações da Cinética Pontual pelo Método da Decomposição de Adomian

O método da decomposição de Adomian foi principalmente desenvolvido para a solução de problemas não-lineares mas tem se mostrado efetivo na resolução de problemas lineares de transporte de partículas com coeficientes constantes e variáveis ([Vargas e Vilhena, 1997] e [Vargas e Vilhena, 2004]).

Aplicando o operador  $\int_0^t [\cdot] dt'$  no sistema de equações (2.41), obteremos:

$$n(t) = n_0 + \frac{1}{\Lambda} \int_0^t \rho(t') n(t') dt' - \frac{\beta}{\Lambda} \int_0^t n(t') dt' + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \int_0^t c_i(t') dt' \quad (3.10)$$

$$c_i(t) = c_{i0} + \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_0^t n(t') dt' - \lambda_i \int_0^t c_i(t') dt' \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.11)$$

Agora, como sugere o método da decomposição, iremos supor que  $n(t)$  e  $c_i(t)$  podem ser expressos como séries da forma:

$$n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t) \quad (3.12)$$

$$c_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n}(t) \quad (3.13)$$

e levando (3.12) e (3.13) na equação (3.10), obteremos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t) = n_0 + \frac{1}{\Lambda} \int_0^t \rho(t') \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t') dt' - \frac{\beta}{\Lambda} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t') dt' + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n}(t') dt'. \quad (3.14)$$

Permutando o somatório com a integral, segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t) = n_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{\Lambda} \int_0^t \rho(t') \phi_n(t') dt' - \frac{\beta}{\Lambda} \int_0^t \phi_n(t') dt' + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \int_0^t \alpha_{i,n}(t') dt' \right]. \quad (3.15)$$

Neste ponto, faremos a identificação

$$\phi_0(t) = n_0 \quad (3.16)$$

o que resultará

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{\Lambda} \int_0^t \rho(t') \phi_n(t') dt' - \frac{\beta}{\Lambda} \int_0^t \phi_n(t') dt' + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \int_0^t \alpha_{i,n}(t') dt' \right]. \quad (3.17)$$

Por fim, faremos uma mudança no índice do somatório, de tal forma que os dois índices iniciem em  $n = 0$  e obteremos



$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_{n+1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{\Lambda} \int_0^t \rho(t') \phi_n(t') dt' - \frac{\beta}{\Lambda} \int_0^t \phi_n(t') dt' + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \int_0^t \alpha_{i,n}(t') dt' \right] \quad (3.18)$$

Da equação (3.18), poderemos identificar termo a termo os somatórios obtendo:

$$\phi_{n+1}(t) = \frac{1}{\Lambda} \int_0^t \rho(t') \phi_n(t') dt' - \frac{\beta}{\Lambda} \int_0^t \phi_n(t') dt' + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \int_0^t \alpha_{i,n}(t') dt' \quad (3.19)$$

De forma análoga, levando (3.12) e (3.13) na equação (3.11), obteremos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n}(t) = c_{i,0} + \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t') dt' - \lambda_i \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n}(t') dt' \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.20)$$

e permutando o somatório com a integral, teremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n}(t) = c_{i,0} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_0^t \phi_n(t') dt' - \lambda_i \int_0^t \alpha_{i,n}(t') dt' \right] \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.21)$$

então, fazemos a indentificação

$$\alpha_{i,0}(t) = c_{i0} = \frac{n_0 \beta_i}{\lambda_i \Lambda}, \quad (3.22)$$

como em [Vargas et al., 2005].

A equação (3.21) resultará em

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{i,n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_0^t \phi_n(t') dt' - \lambda_i \int_0^t \alpha_{i,n}(t') dt' \right] \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.23)$$

e, finalmente, faremos uma mudança no índice do somatório para que os dois índices iniciem em  $n = 0$ ; obteremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n+1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_0^t \phi_n(t') dt' - \lambda_i \int_0^t \alpha_{i,n}(t') dt' \right] \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (3.24)$$

Identificando termo a termo os somatórios da equação (3.24) concluímos que:

$$\alpha_{i,n+1}(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_0^t \phi_n(t') dt' - \lambda_i \int_0^t \alpha_{i,n}(t') dt' \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (3.25)$$

Assim, tendo as fórmulas de recorrência (3.19) e (3.25), o problema da cinética pontual fica completamente determinado quando são calculados os termos das séries correspondentes. Neste trabalho, serão consideradas várias formas para a reatividade  $\rho(t)$ .

### 3.3 Reatividade Constante

A primeira forma de reatividade a ser considerada é a reatividade constante, ou seja, da forma:

$$\rho(t) = \rho_0. \quad (3.26)$$

Substituindo (3.26) em (3.19), obteremos:

$$\phi_{n+1}(t) = \frac{\rho_0}{\Lambda} \int_0^t \phi_n(t') dt' - \frac{\beta}{\Lambda} \int_0^t \phi_n(t') dt' + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \int_0^t \alpha_{i,n}(t') dt' \quad (3.27)$$

onde poderemos agrupar os termos chegando em:

$$\phi_{n+1} = \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} \int_0^t \phi_n(t') dt' + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \int_0^t \alpha_{i,n}(t') dt' \quad (3.28)$$

Neste ponto, utilizaremos as condições iniciais para inicializar as fórmulas de recorrência. Apresentamos os três primeiros termos de cada série a fim de podermos identificar um padrão. Assim,

$$\phi_0(t) = n_0 = C_0 \quad (3.29)$$

$$\alpha_{i0}(t) = c_{i0} = C_{i0}$$

são as condições iniciais.

Fazendo  $n = 0$  e substituindo (3.29) em (3.28) e (3.25), obteremos:

$$\phi_1(t) = \left( \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} n_0 + \sum_{i=1}^6 \lambda_i c_{i,0} \right) t = C_1 t \quad (3.30)$$

$$\alpha_{i,1}(t) = \left( \frac{\beta_i n_0}{\Lambda} - \lambda_i c_{i,0} \right) t = C_{i1} t, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Fazendo  $n = 1$  e substituindo (3.30) em (3.28) e (3.25), obteremos:

$$\phi_2(t) = \left( \frac{\rho_0 - \beta}{2\Lambda} C_1 + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i C_{i1}}{2} \right) t^2 = C_2 t^2 \quad (3.31)$$

$$\alpha_{i,2}(t) = \left( \frac{\beta_i}{2\Lambda} C_1 - \frac{\lambda_i}{2} C_{i1} \right) t^2 = C_{i2} t^2, \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Fazendo  $n = 2$  e substituindo (3.31) em (3.28) e (3.25), obteremos:

$$\begin{aligned}\phi_3(t) &= \left( \frac{\rho_0 - \beta}{3\Lambda} C_2 + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i C_{i2}}{3} \right) t^3 = C_3 t^3 \\ \alpha_{i,3}(t) &= \left( \frac{\beta_i C_2}{3\Lambda} - \frac{\lambda_i C_{i2}}{3} \right) t^3 = C_{i3} t^3, \quad i = 1, 2, \dots, 6.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Por um processo indutivo, concluímos que a solução do problema da cinética pontual com reatividade constante, encontrada pelo método da decomposição, é dada por:

$$\begin{aligned}n(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n \\ c_i(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{in} t^n, \quad i = 1, 2, \dots, 6,\end{aligned}\tag{3.33}$$

onde

$$\begin{aligned}C_{n+1} &= \frac{\rho_0 - \beta}{(n+1)\Lambda} C_n + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i}{n+1} C_{in} \\ C_{in+1} &= \frac{\beta_i}{(n+1)\Lambda} C_n - \frac{\lambda_i}{n+1} C_{in}.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Nesse caso, onde a reatividade é constante, podemos comparar a solução analítica exata dada por (2.46) e a solução obtida pelo método da decomposição dada por (3.33) e (3.34).

Por (2.46),  $X(t)$  pode ser expresso em série de Taylor como

$$X(t) = \left( I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \dots \right) X(0) = IX(0) + AtX(0) + \frac{(At)^2}{2!} X(0) + \dots \tag{3.35}$$

Mas,

$$IX(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_{10} \\ C_{20} \\ \vdots \\ C_{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_{10} \\ C_{20} \\ \vdots \\ C_{60} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_6 \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} & -\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} & 0 & -\lambda_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_6 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$AX(0) = \begin{bmatrix} \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} C_0 + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_{i0} \\ \frac{\beta_1}{\Lambda} C_0 - \lambda_1 C_{10} \\ \frac{\beta_2}{\Lambda} C_0 - \lambda_2 C_{20} \\ \vdots \\ \frac{\beta_6}{\Lambda} C_0 - \lambda_6 C_{60} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

e

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{(\rho_0 - \beta)^2}{\Lambda^2} + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_i}{\Lambda} & \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} \lambda_1 - \lambda_1^2 & \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} \lambda_2 - \lambda_2^2 & \cdots & \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} \lambda_6 - \lambda_6^2 \\ \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda^2} \beta_1 - \frac{\lambda_1 \beta_1}{\Lambda} & \frac{\lambda_1 \beta_1}{\Lambda} + \lambda_1^2 & \frac{\lambda_2 \beta_1}{\Lambda} & \cdots & \frac{\lambda_6 \beta_1}{\Lambda} \\ \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda^2} \beta_2 - \frac{\lambda_2 \beta_2}{\Lambda} & \frac{\lambda_1 \beta_2}{\Lambda} & \frac{\lambda_2 \beta_2}{\Lambda} + \lambda_2^2 & & \frac{\lambda_6 \beta_2}{\Lambda} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda^2} \beta_6 - \frac{\lambda_6 \beta_6}{\Lambda} & \frac{\lambda_1 \beta_6}{\Lambda} & \frac{\lambda_2 \beta_6}{\Lambda} & \cdots & \frac{\lambda_6 \beta_6}{\Lambda} + \lambda_6^2 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$A^2 X(0) = \begin{bmatrix} \left( \frac{(\rho_0 - \beta)^2}{\Lambda^2} + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_i}{\Lambda} \right) C_0 + \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} \lambda_i - \lambda_i^2 \right) C_{i0} \\ \left( \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda^2} - \frac{\lambda_1}{\Lambda} \right) \beta_1 C_0 + \lambda_1^2 C_{10} + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_1}{\Lambda} C_{i0} \\ \left( \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda^2} - \frac{\lambda_2}{\Lambda} \right) \beta_2 C_0 + \lambda_2^2 C_{20} + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_2}{\Lambda} C_{i0} \\ \vdots \\ \left( \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda^2} - \frac{\lambda_6}{\Lambda} \right) \beta_6 C_0 + \lambda_6^2 C_{60} + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_6}{\Lambda} C_{i0} \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Por outro lado, a partir de (3.33) e (3.34), teremos

$$C_1 = \frac{1}{1!} \left[ \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} C_0 + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_{i0} \right] \quad (3.41)$$

$$C_{j1} = \frac{1}{1!} \left[ \frac{\beta_j}{\Lambda} C_0 - \lambda_j C_{j0} \right] \quad (3.42)$$

$$C_2 = \frac{1}{2!} \left[ \left( \frac{(\rho_0 - \beta)^2}{\Lambda^2} + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_i}{\Lambda} \right) C_0 + \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda} \lambda_i - \lambda_i^2 \right) C_{i0} \right] \quad (3.43)$$

$$C_{j2} = \frac{1}{2!} \left[ \left( \frac{\rho_0 - \beta}{\Lambda^2} - \frac{\lambda_j}{\Lambda} \right) \beta_j C_0 + \lambda_j^2 C_{j0} + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i \beta_j}{\Lambda} C_{i0} \right] \quad (3.44)$$

que, se escrita em notação matricial, coincide com a expansão de Taylor.

### 3.4 Reatividade Linear

O próximo caso a ser considerado é o caso linear, ou seja, onde a reatividade é da forma:

$$\rho(t) = \rho_0 t. \quad (3.45)$$

Este caso foi estudado por [Vargas et al., 2005], que procederam da seguinte maneira: levando (3.45) em (3.19), obtiveram:

$$\phi_{n+1}(t) = \frac{\rho_0}{\Lambda} \int_0^t t' \phi_n(t') dt' - \frac{\beta}{\Lambda} \int_0^t \phi_n(t') dt' + \sum_{i=1}^6 \lambda_i \int_0^t \alpha_{i,n}(t') dt'. \quad (3.46)$$

De forma análoga ao caso constante, apresentaram os três primeiros termos destas séries.

Fazendo  $n = 0$  e utilizando (3.29) para inicializar as fórmulas (3.46) e (3.25), obtiveram:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\rho_0}{2\Lambda} n_0 t^2 + \left( \sum_{i=1}^6 \lambda_i \alpha_{i,0} - \frac{\beta}{\Lambda} n_0 \right) t = C_{12} t^2 + C_{11} t \\ \alpha_{i,1}(t) &= \left( \frac{\beta_i}{\Lambda} n_0 - \lambda_i \alpha_{i,0} \right) t = C_{i,11} t, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Fazendo  $n = 1$  e substituindo (3.47) em (3.46) e (3.25), obtiveram:

$$\begin{aligned} \phi_2(t) &= \frac{\rho_0}{4\Lambda} C_{12} t^4 + \left( \frac{\rho_0 C_{11}}{3\Lambda} - \frac{\beta C_{12}}{3\Lambda} \right) t^3 + \left( \sum_{i=1}^6 \lambda_i \frac{C_{i,11}}{2} - \frac{\beta C_{11}}{2\Lambda} \right) t^2 = \\ &= C_{24} t^4 + C_{23} t^3 + C_{22} t^2 \\ \alpha_{i,2}(t) &= \frac{\beta_i C_{12}}{3\Lambda} t^3 + \left( \frac{\beta_i C_{11}}{2\Lambda} - \frac{\lambda_i C_{i,11}}{2} \right) t^2 = C_{i,22} t^2 + C_{i,23} t^3, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Fazendo  $n = 2$  e substituindo (3.48) em (3.46) e (3.25), obtiveram:

$$\begin{aligned}
\phi_3(t) &= \frac{\rho_0}{6\Lambda} C_{24} t^6 + \left( \frac{\rho_0 C_{23}}{5\Lambda} - \frac{\beta C_{24}}{5\Lambda} \right) t^5 + \left( \frac{\rho_0 C_{22}}{4\Lambda} - \frac{\beta C_{23}}{4\Lambda} + \sum_{i=1}^6 \frac{\lambda_i C_{i,23}}{4} \right) t^4 + \\
&+ \left( \sum_{i=1}^6 \lambda_i \frac{C_{i,22}}{3} - \frac{\beta C_{22}}{3\Lambda} \right) t^3 = C_{36} t^6 + C_{35} t^5 + C_{34} t^4 + C_{33} t^3
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{i,3}(t) &= \frac{\beta_i C_{24}}{5\Lambda} t^5 + \left( \frac{\beta_i C_{23}}{4\Lambda} - \frac{\lambda_i C_{i,23}}{4} \right) t^4 + \left( \frac{\beta_i C_{22}}{3\Lambda} - \frac{\lambda_i C_{i,22}}{3} \right) t^3 = \\
&= C_{i,35} t^5 + C_{i,34} t^4 + C_{i,33} t^3, \quad i = 1, 2, \dots, 6
\end{aligned}$$

Também por indução, obtiveram a solução do problema da cinética pontual, agora com reatividade linear, pelo método da decomposição. A solução é dada por:

$$n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=n}^{2n} C_{nj} t^j \tag{3.50}$$

$$c_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n}(t) = c_{i,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n}^{2n-1} C'_{i,nj} t^j$$

onde

$$\begin{aligned}
C_{nj} &= -\frac{\beta}{\Lambda} (1 - \delta_{j,2n}) \frac{C_{n-1,j-1}}{j} + \frac{\rho_0}{\Lambda} (1 - \delta_{j,n}) \frac{C_{n-1,j-2}}{j} + \\
&+ \sum_i \lambda_i (1 - \delta_{j,2n}) (1 - \delta_{j,2n-1} (1 - \delta_{n,1})) \frac{C'_{i,n-1,j-1}}{j}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$C'_{i,nj} = \frac{\beta_i}{j\Lambda} C_{n-1,j-1} - \frac{\lambda_i}{j} (1 - \delta_{j,2n-1} (1 - \delta_{n,1})) C'_{i,n-1,j-1}, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

com  $\delta_{ij}$ , o delta de Kroenecker,  $C_{1j}$  e  $C'_{i,1j}$  são dados nas equações (3.47),  $C_{00} = n_0$  e  $C'_{i,00} = c_{i0}$ .



Finalmente, cumpre observar que em alguns casos é possível, mas não prático, construir fórmulas de recorrência para reatividade arbitrária. No entanto, acreditamos que o caráter analítico da solução permite a obtenção da fórmula de recorrência para uma reatividade arbitrária utilizando computação simbólica.

## 4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo, apresentaremos os resultados numéricos, bem como faremos a comparação destes resultados com os existentes na literatura [Vilhena, 1988]. Os resultados foram obtidos de duas maneiras: a primeira, utilizando computação simbólica e as fórmulas de recorrência para a solução via método da decomposição, que permitem implementar a solução para uma reatividade arbitrária; a segunda, onde foi utilizada a solução exata truncada obtida também com computação simbólica para o caso em que a reatividade é considerada constante por partes.

### 4.1 Reatividade Linear

**Problema 1:** Consideremos as equações (2.41) onde a reatividade é do tipo linear com  $\rho(t) = 0,001t$ . Também foram utilizados os seguintes parâmetros:  $\Lambda = 3 \times 10^{-5} s$ ,  $\beta = 6,473 \times 10^{-3}$ ,  $\beta_1 = 2,14 \times 10^{-4}$ ,  $\beta_2 = 1,423 \times 10^{-3}$ ,  $\beta_3 = 1,247 \times 10^{-3}$ ,  $\beta_4 = 2,568 \times 10^{-3}$ ,  $\beta_5 = 7,48 \times 10^{-4}$ ,  $\beta_6 = 2,73 \times 10^{-4}$ ,  $\lambda_1 = 1,24 \times 10^{-2} s^{-1}$ ,  $\lambda_2 = 3,05 \times 10^{-2} s^{-1}$ ,  $\lambda_3 = 1,11 \times 10^{-1} s^{-1}$ ,  $\lambda_4 = 3,01 \times 10^{-1} s^{-1}$ ,  $\lambda_5 = 1,14 s^{-1}$  e  $\lambda_6 = 3,01 s^{-1}$ . Estes parâmetros correspondem aos de um reator térmico. Os resultados foram obtidos utilizando 7 termos da série e um passo de tempo de 0,01s. A computação simbólica foi implementada no software Maple 8.

Conforme os resultados listados na tabela (4.1), podemos verificar a concordância dos resultados obtidos pelo método da decomposição: o erro relativo (entre parênteses na tabela) ficou entre  $8,23 \times 10^{-6}$  e  $1,08 \times 10^{-2}$ , quando comparamos o método da decomposição com o método da série de Taylor, e entre  $5,76 \times 10^{-5}$  e  $1,49 \times 10^{-2}$ , quando comparamos o método da decomposição com o método de Hansen [Hansen et al., 1965], no intervalo de tempo de 8s considerado. Esses resultados podem ser melhorados com o aumento do número de termos da série ou diminuição no passo de tempo. Como utilizamos o software Maple 8, tais melhorias não puderam ser realizadas em virtude da deficiência do software para computação científica.

Contudo a implementação simbólica do software é simples e o método se mostra eficiente mesmo com poucos termos da série.

Tabela 4.1: Densidade de nêutrons obtida pelo método da decomposição utilizando computação simbólica, pelo método da série de Taylor e pelo método de Hansen considerando a reatividade do tipo linear com  $\rho(t) = 0,001t$ .

t(s)	Método da Decomposição	Método de Taylor	Método de Hansen
0,0	$1,00000 \times 10^0$	$1,00000 \times 10^0$	$1,00000 \times 10^0$
1,0	$1,21423 \times 10^0$	$1,21422 \times 10^0$ ( $8,23 \times 10^{-6}$ )*	$1,21430 \times 10^0$ ( $5,76 \times 10^{-5}$ )*
2,0	$1,61567 \times 10^0$	$1,61556 \times 10^0$ ( $6,80 \times 10^{-5}$ )	$1,61564 \times 10^0$ ( $1,85 \times 10^{-5}$ )
3,0	$2,45099 \times 10^0$	$2,45054 \times 10^0$ ( $1,83 \times 10^{-4}$ )	$2,45065 \times 10^0$ ( $1,38 \times 10^{-4}$ )
4,0	$4,66537 \times 10^0$	$4,66338 \times 10^0$ ( $4,26 \times 10^{-4}$ )	$4,66360 \times 10^0$ ( $3,79 \times 10^{-4}$ )
5,0	$1,44552 \times 10^1$	$1,44440 \times 10^1$ ( $7,74 \times 10^{-4}$ )	$1,44421 \times 10^1$ ( $9,10 \times 10^{-4}$ )
6,0	$2,09027 \times 10^2$	$2,08436 \times 10^2$ ( $2,83 \times 10^{-3}$ )	$2,08589 \times 10^2$ ( $2,10 \times 10^{-3}$ )
7,0	$1,44817 \times 10^7$	$1,43718 \times 10^7$ ( $7,64 \times 10^{-3}$ )	$1,45095 \times 10^7$ ( $1,91 \times 10^{-3}$ )
8,0	$1,32749 \times 10^{23}$	$1,31322 \times 10^{23}$ ( $1,08 \times 10^{-2}$ )	$1,34769 \times 10^{23}$ ( $1,49 \times 10^{-2}$ )

\* erro relativo entre o método da decomposição e o método de Taylor.

\* erro relativo entre o método da decomposição e o método de Hansen.

Tabela 4.2: Concentrações dos precursores de nêutrons atrasados obtidas pelo método da decomposição utilizando computação simbólica considerando a reatividade do tipo linear com  $\rho(t) = 0,001t$ .

t(s)	$c_1(t)$	$c_2(t)$	$c_3(t)$	$c_4(t)$	$c_5(t)$	$c_6(t)$
0,0	$5,75268 \times 10^2$	$1,55519 \times 10^3$	$3,74474 \times 10^2$	$2,84385 \times 10^2$	$2,18713 \times 10^1$	$3,02325 \times 10^0$
1,0	$5,75964 \times 10^2$	$1,55979 \times 10^3$	$3,78406 \times 10^2$	$2,92026 \times 10^2$	$2,36311 \times 10^1$	$3,44519 \times 10^0$
2,0	$5,78732 \times 10^2$	$1,57797 \times 10^3$	$3,93535 \times 10^2$	$3,19734 \times 10^2$	$2,88365 \times 10^1$	$4,43489 \times 10^0$
3,0	$5,85622 \times 10^2$	$1,62304 \times 10^3$	$4,30279 \times 10^2$	$3,84321 \times 10^2$	$3,98059 \times 10^1$	$6,44583 \times 10^0$
4,0	$6,02195 \times 10^2$	$1,73120 \times 10^3$	$5,17797 \times 10^2$	$5,36354 \times 10^2$	$6,56966 \times 10^1$	$1,14013 \times 10^1$
5,0	$6,52581 \times 10^2$	$2,06079 \times 10^3$	$7,87189 \times 10^2$	$1,01618 \times 10^3$	$1,55378 \times 10^2$	$3,02928 \times 10^1$
6,0	$1,05954 \times 10^3$	$4,74418 \times 10^3$	$3,05597 \times 10^3$	$5,34821 \times 10^3$	$1,13900 \times 10^3$	$2,80946 \times 10^2$
7,0	$5,11858 \times 10^6$	$3,40007 \times 10^7$	$2,96673 \times 10^7$	$6,04910 \times 10^7$	$1,68934 \times 10^7$	$5,64682 \times 10^6$
8,0	$1,82349 \times 10^{22}$	$1,21211 \times 10^{23}$	$1,06062 \times 10^{23}$	$2,17674 \times 10^{23}$	$6,24843 \times 10^{22}$	$2,20568 \times 10^{22}$

**Problema 2:** Retomando o problema 1, consideremos as equações (2.41) onde a reatividade é do tipo linear com  $\rho(t) = 0,001t$ . Os parâmetros utilizados são os mesmos utilizados no problema 1. Para o problema 2, aproximamos a reatividade  $\rho(t) = 0,001t$  por uma função escada, constante e igual à média da função em cada intervalo de tempo. Os resultados foram obtidos utilizando 7 termos da série e um

passo de tempo de 0,01s. A computação simbólica foi implementada no software Maple 8.

Tabela 4.3: Densidade de nêutrons obtida pelo método da decomposição utilizando a solução exata truncada para o caso em que a reatividade é considerada constante por partes, pelo método da série de Taylor e pelo método de Hansen considerando a reatividade do tipo linear com  $\rho(t) = 0,001t$ .

t(s)	Método da Decomposição	Método de Taylor	Método de Hansen
0,0	$1,00000 \times 10^0$	$1,00000 \times 10^0$	$1,00000 \times 10^0$
1,0	$1,21389 \times 10^0$	$1,21422 \times 10^0$ ( $2,71 \times 10^{-4}$ )*	$1,21430 \times 10^0$ ( $3,37 \times 10^{-4}$ )*
2,0	$1,61523 \times 10^0$	$1,61556 \times 10^0$ ( $2,04 \times 10^{-4}$ )	$1,61564 \times 10^0$ ( $2,53 \times 10^{-4}$ )
3,0	$2,45032 \times 10^0$	$2,45054 \times 10^0$ ( $8,97 \times 10^{-5}$ )	$2,45065 \times 10^0$ ( $1,34 \times 10^{-4}$ )
4,0	$4,66409 \times 10^0$	$4,66338 \times 10^0$ ( $1,52 \times 10^{-4}$ )	$4,66360 \times 10^0$ ( $1,05 \times 10^{-4}$ )
5,0	$1,44512 \times 10^1$	$1,44440 \times 10^1$ ( $4,97 \times 10^{-4}$ )	$1,44421 \times 10^1$ ( $6,34 \times 10^{-4}$ )
6,0	$2,08969 \times 10^2$	$2,08436 \times 10^2$ ( $2,55 \times 10^{-3}$ )	$2,08589 \times 10^2$ ( $1,82 \times 10^{-3}$ )
7,0	$1,44777 \times 10^7$	$1,43718 \times 10^7$ ( $7,36 \times 10^{-3}$ )	$1,45095 \times 10^7$ ( $2,19 \times 10^{-3}$ )
8,0	$1,32712 \times 10^{23}$	$1,31322 \times 10^{23}$ ( $1,05 \times 10^{-2}$ )	$1,34769 \times 10^{23}$ ( $1,52 \times 10^{-2}$ )

\* erro relativo entre o método da decomposição e o método de Taylor.

\* erro relativo entre o método da decomposição e o método de Hansen.

Tabela 4.4: Concentrações dos precursores de nêutrons atrasados obtidas pelo método da decomposição utilizando a solução exata truncada para o caso em que a reatividade é considerada constante por partes considerando a reatividade do tipo linear com  $\rho(t) = 0,001t$ .

t(s)	$c_1(t)$	$c_2(t)$	$c_3(t)$	$c_4(t)$	$c_5(t)$	$c_6(t)$
0,0	$5,75268 \times 10^2$	$1,55519 \times 10^3$	$3,74474 \times 10^2$	$2,84385 \times 10^2$	$2,18713 \times 10^1$	$3,02325 \times 10^0$
1,0	$5,75949 \times 10^2$	$1,55969 \times 10^3$	$3,78321 \times 10^2$	$2,91864 \times 10^2$	$2,35972 \times 10^1$	$3,43813 \times 10^0$
2,0	$5,78732 \times 10^2$	$1,57797 \times 10^3$	$3,93535 \times 10^2$	$3,19734 \times 10^2$	$2,88365 \times 10^1$	$4,43489 \times 10^0$
3,0	$5,85622 \times 10^2$	$1,62304 \times 10^3$	$4,30279 \times 10^2$	$3,84321 \times 10^2$	$3,98059 \times 10^1$	$6,44583 \times 10^0$
4,0	$6,02195 \times 10^2$	$1,73120 \times 10^3$	$5,17797 \times 10^2$	$5,36354 \times 10^2$	$6,56966 \times 10^1$	$1,14013 \times 10^1$
5,0	$6,52581 \times 10^2$	$2,06079 \times 10^3$	$7,87189 \times 10^2$	$1,01618 \times 10^3$	$1,55378 \times 10^2$	$3,02928 \times 10^1$
6,0	$1,05954 \times 10^3$	$4,74418 \times 10^3$	$3,05597 \times 10^3$	$5,34821 \times 10^3$	$1,13900 \times 10^3$	$2,80946 \times 10^2$
7,0	$5,11858 \times 10^6$	$3,40007 \times 10^7$	$2,96673 \times 10^7$	$6,04910 \times 10^7$	$1,68934 \times 10^7$	$5,64682 \times 10^6$
8,0	$1,82349 \times 10^{22}$	$1,21211 \times 10^{23}$	$1,06062 \times 10^{23}$	$2,17674 \times 10^{23}$	$6,24843 \times 10^{22}$	$2,20568 \times 10^{22}$

Novamente, com base na tabela (4.3), os resultados obtidos foram considerados satisfatórios comparados com os métodos clássicos da série de Taylor e de Hansen, com a vantagem que, com a aproximação da reatividade por uma função escada, conseguimos reduzir o tempo computacional drasticamente. O erro relativo ficou entre  $2,71 \times 10^{-4}$  e  $1,05 \times 10^{-2}$ , quando comparamos o método da decomposição

com o método da série de Taylor, e entre  $3,37 \times 10^{-4}$  e  $1,52 \times 10^{-2}$ , quando comparamos o método da decomposição com o método de Hansen, no intervalo de tempo de 8s considerado. O aumento do erro relativo já era esperado pois foi tomada uma aproximação para a reatividade.

## 4.2 Reatividade Senoidal

**Problema 3:** Consideremos as equações (2.41) onde a reatividade é do tipo senoidal com  $\rho(t) = 0,00073 \sin(t)$ . Os parâmetros utilizados são os mesmos utilizados no problema 1. Os resultados foram obtidos utilizando 6 termos da série e um passo de tempo de 0,01s. A computação simbólica foi implementada no software Maple 8.

Tabela 4.5: Densidade de nêutrons obtida pelo método da decomposição utilizando computação simbólica, pelo método da série de Taylor e pelo método de Hansen considerando a reatividade do tipo senoidal com  $\rho(t) = 0,00073 \sin(t)$ .

t(s)	Método da Decomposição	Método de Taylor	Método de Hansen
0,0	1,00000	1,00000	1,00000
1,0	1,12398	1,12394 ( $3,55 \times 10^{-5}$ )*	1,12396 ( $1,77 \times 10^{-5}$ )*
2,0	1,16889	1,16889	1,16884 ( $4,27 \times 10^{-5}$ )
3,0	1,07443	1,07448 ( $4,65 \times 10^{-5}$ )	1,07442 ( $9,30 \times 10^{-6}$ )
4,0	0,95377	0,95382 ( $5,24 \times 10^{-5}$ )	0,95380 ( $3,14 \times 10^{-5}$ )
5,0	0,90737	0,90735 ( $2,20 \times 10^{-5}$ )	0,90737
6,0	0,96160	0,96153 ( $7,28 \times 10^{-5}$ )	0,96158 ( $2,07 \times 10^{-5}$ )
7,0	1,08751	1,08745 ( $5,51 \times 10^{-5}$ )	1,08749 ( $1,83 \times 10^{-5}$ )
8,0	1,17169	1,17167 ( $1,70 \times 10^{-5}$ )	1,17164 ( $4,26 \times 10^{-5}$ )
9,0	1,11126	1,11130 ( $3,59 \times 10^{-5}$ )	1,11124 ( $1,79 \times 10^{-5}$ )
10,0	0,98461	0,98468 ( $7,10 \times 10^{-5}$ )	0,98464 ( $3,04 \times 10^{-5}$ )
20,0	1,14498	1,14493 ( $4,36 \times 10^{-5}$ )	1,14494 ( $3,49 \times 10^{-5}$ )
30,0	0,91874	0,91873 ( $1,08 \times 10^{-5}$ )	0,91873 ( $1,08 \times 10^{-5}$ )
40,0	1,17208	1,17208	1,17202 ( $5,11 \times 10^{-5}$ )
50,0	0,98588	0,98580 ( $8,11 \times 10^{-5}$ )	0,98584 ( $4,05 \times 10^{-5}$ )
60,0	1,04488	1,04493 ( $4,78 \times 10^{-5}$ )	1,04487 ( $9,57 \times 10^{-6}$ )

\* erro relativo entre o método da decomposição e o método de Taylor.

\* erro relativo entre o método da decomposição e o método de Hansen.

Observando a tabela (4.5), podemos, novamente, verificar a concordância dos resultados obtidos pelo método da decomposição: o erro relativo máximo ficou

na ordem de  $10^{-5}$  quando comparamos o método da decomposição tanto com o método da série de Taylor quanto com o método de Hansen no intervalo de tempo de 60s considerado. Acreditamos que esses resultados podem ser melhorados com o aumento do número de termos da série ou diminuição no passo de tempo.

Tabela 4.6: Concentrações dos precursores de nêutrons atrasados obtidas pelo método da decomposição utilizando computação simbólica considerando a reatividade do tipo senoidal com  $\rho(t) = 0,00073 \sin(t)$ .

$t(s)$	$c_1(t)$	$c_2(t)$	$c_3(t)$	$c_4(t)$	$c_5(t)$	$c_6(t)$
0,0	$5,75268 \times 10^2$	$1,55519 \times 10^3$	$3,74474 \times 10^2$	$2,84385 \times 10^2$	$2,18713 \times 10^1$	$3,02325 \times 10^0$
1,0	$5,75708 \times 10^2$	$1,55809 \times 10^3$	$3,76952 \times 10^2$	$2,89189 \times 10^2$	$2,29673 \times 10^1$	$3,28134 \times 10^0$
2,0	$5,76828 \times 10^2$	$1,56542 \times 10^3$	$3,82953 \times 10^2$	$2,99760 \times 10^2$	$2,46451 \times 10^1$	$3,51740 \times 10^0$
3,0	$5,77729 \times 10^2$	$1,57118 \times 10^3$	$3,87143 \times 10^2$	$3,05195 \times 10^2$	$2,45568 \times 10^1$	$3,35732 \times 10^0$
4,0	$5,77775 \times 10^2$	$1,57119 \times 10^3$	$3,86193 \times 10^2$	$3,00359 \times 10^2$	$2,27222 \times 10^1$	$2,99454 \times 10^0$
5,0	$5,77194 \times 10^2$	$1,56708 \times 10^3$	$3,81894 \times 10^2$	$2,90390 \times 10^2$	$2,09266 \times 10^1$	$2,77200 \times 10^0$
6,0	$5,76648 \times 10^2$	$1,56328 \times 10^3$	$3,78233 \times 10^2$	$2,83479 \times 10^2$	$2,05594 \times 10^1$	$2,83614 \times 10^0$
7,0	$5,76787 \times 10^2$	$1,56408 \times 10^3$	$3,78744 \times 10^2$	$2,85565 \times 10^2$	$2,19514 \times 10^1$	$3,15869 \times 10^0$
8,0	$5,77757 \times 10^2$	$1,57033 \times 10^3$	$3,83813 \times 10^2$	$2,95727 \times 10^2$	$2,40897 \times 10^1$	$3,48224 \times 10^0$
9,0	$5,78810 \times 10^2$	$1,57701 \times 10^3$	$3,88825 \times 10^2$	$3,03967 \times 10^2$	$2,47671 \times 10^1$	$3,44229 \times 10^0$
10,0	$5,79102 \times 10^2$	$1,57856 \times 10^3$	$3,89137 \times 10^2$	$3,02146 \times 10^2$	$2,33250 \times 10^1$	$3,09903 \times 10^0$
20,0	$5,79675 \times 10^2$	$1,57887 \times 10^3$	$3,83722 \times 10^2$	$2,99503 \times 10^2$	$2,30412 \times 10^1$	$3,34283 \times 10^0$
30,0	$5,82517 \times 10^2$	$1,59270 \times 10^3$	$3,88823 \times 10^2$	$2,94134 \times 10^2$	$2,13415 \times 10^1$	$2,81945 \times 10^0$
40,0	$5,85244 \times 10^2$	$1,60513 \times 10^3$	$3,94423 \times 10^2$	$3,06052 \times 10^2$	$2,51849 \times 10^1$	$3,57144 \times 10^0$
50,0	$5,86377 \times 10^2$	$1,60568 \times 10^3$	$3,88358 \times 10^2$	$2,89140 \times 10^2$	$2,10293 \times 10^1$	$2,90587 \times 10^0$
60,0	$5,90708 \times 10^2$	$1,62689 \times 10^3$	$4,01037 \times 10^2$	$3,11633 \times 10^2$	$2,45024 \times 10^1$	$3,28743 \times 10^0$

**Problema 4:** Retomando o problema 3, consideremos as equações (2.41) onde a reatividade é do tipo senoidal com  $\rho(t) = 0,00073 \sin(t)$ . Os parâmetros utilizados são os mesmos utilizados no problema 1. Para o problema 4, aproximamos a reatividade  $\rho(t) = 0,00073 \sin(t)$  por uma função escada, constante e igual à média da função em cada intervalo de tempo. Os resultados foram obtidos utilizando 10 termos da série e um passo de tempo de 0,01s. A computação simbólica foi implementada no software Maple 8.

Com base na tabela (4.7), os resultados obtidos foram considerados satisfatórios comparados com os métodos clássicos, visto que, com a reatividade sendo aproximada por uma função escada, conseguimos reduzir o tempo computacional embora, neste problema, o número de termos considerados foi maior que no anterior. O erro relativo máximo ficou na ordem de  $10^{-4}$  quando comparamos o método

da decomposição tanto com o método da série de Taylor quanto com o método de Hansen no intervalo de tempo de 60s considerado. O aumento do erro relativo já era esperado pois foi tomada uma aproximação para a reatividade.

Tabela 4.7: Densidade de nêutrons obtida pelo método da decomposição utilizando a solução exata truncada para o caso em que a reatividade é considerada constante por partes, pelo método da série de Taylor e pelo método de Hansen considerando a reatividade do tipo senoidal com  $\rho(t) = 0,00073 \sin(t)$ .

t(s)	Método da Decomposição	Método de Taylor	Método de Hansen
0,0	1,00000	1,00000	1,00000
1,0	1,12383	1,12394 (9,78x10 <sup>-5</sup> )*	1,12396 (1,15x10 <sup>-4</sup> )*
2,0	1,16901	1,16889 (1,02x10 <sup>-4</sup> )	1,16884 (1,45x10 <sup>-4</sup> )
3,0	1,07471	1,07448 (2,14x10 <sup>-4</sup> )	1,07442 (2,69x10 <sup>-4</sup> )
4,0	0,95395	0,95382 (1,36x10 <sup>-4</sup> )	0,95380 (1,57x10 <sup>-4</sup> )
5,0	0,90730	0,90735 (5,51x10 <sup>-5</sup> )	0,90737 (7,71x10 <sup>-5</sup> )
6,0	0,96135	0,96153 (1,87x10 <sup>-4</sup> )	0,96158 (2,39x10 <sup>-4</sup> )
7,0	1,08730	1,08745 (1,37x10 <sup>-4</sup> )	1,08749 (1,74x10 <sup>-4</sup> )
8,0	1,17173	1,17167 (5,12x10 <sup>-5</sup> )	1,17164 (7,68x10 <sup>-5</sup> )
9,0	1,11152	1,11130 (1,97x10 <sup>-4</sup> )	1,11124 (2,51x10 <sup>-4</sup> )
10,0	0,98484	0,98468 (1,62x10 <sup>-4</sup> )	0,98464 (2,03x10 <sup>-4</sup> )
20,0	1,14486	1,14493 (6,11x10 <sup>-5</sup> )	1,14494 (6,98x10 <sup>-5</sup> )
30,0	0,91870	0,91873 (3,26x10 <sup>-5</sup> )	0,91873 (3,26x10 <sup>-5</sup> )
40,0	1,17227	1,17208 (1,62x10 <sup>-4</sup> )	1,17202 (2,13x10 <sup>-4</sup> )
50,0	0,98562	0,98580 (1,82x10 <sup>-4</sup> )	0,98584 (2,23x10 <sup>-4</sup> )
60,0	1,04515	1,04493 (2,10x10 <sup>-4</sup> )	1,04487 (2,68x10 <sup>-4</sup> )

\* erro relativo entre o método da decomposição e o método de Taylor.

\* erro relativo entre o método da decomposição e o método de Hansen.

Tabela 4.8: Concentrações dos precursores de nêutrons atrasados obtidas pelo método da decomposição utilizando a solução exata truncada para o caso em que a reatividade é considerada constante por partes considerando a reatividade do tipo senoidal com  $\rho(t) = 0,00073 \sin(t)$ .

$t(s)$	$c_1(t)$	$c_2(t)$	$c_3(t)$	$c_4(t)$	$c_5(t)$	$c_6(t)$
0,0	5,75268x10 <sup>2</sup>	1,55519x10 <sup>3</sup>	3,74474x10 <sup>2</sup>	2,84385x10 <sup>2</sup>	2,18713x10 <sup>1</sup>	3,02325x10 <sup>0</sup>
1,0	5,75707x10 <sup>2</sup>	1,55809x10 <sup>3</sup>	3,76952x10 <sup>2</sup>	2,89189x10 <sup>2</sup>	2,29674x10 <sup>1</sup>	3,28136x10 <sup>0</sup>
2,0	5,76828x10 <sup>2</sup>	1,56542x10 <sup>3</sup>	3,82953x10 <sup>2</sup>	2,99760x10 <sup>2</sup>	2,46452x10 <sup>1</sup>	3,51743x10 <sup>0</sup>
3,0	5,77729x10 <sup>2</sup>	1,57118x10 <sup>3</sup>	3,87143x10 <sup>2</sup>	3,05195x10 <sup>2</sup>	2,45568x10 <sup>1</sup>	3,35733x10 <sup>0</sup>
4,0	5,77775x10 <sup>2</sup>	1,57119x10 <sup>3</sup>	3,86193x10 <sup>2</sup>	3,00360x10 <sup>2</sup>	2,27222x10 <sup>1</sup>	2,99450x10 <sup>0</sup>
5,0	5,77194x10 <sup>2</sup>	1,56708x10 <sup>3</sup>	3,81894x10 <sup>2</sup>	2,90390x10 <sup>2</sup>	2,09264x10 <sup>1</sup>	2,77194x10 <sup>0</sup>
6,0	5,76648x10 <sup>2</sup>	1,56328x10 <sup>3</sup>	3,78233x10 <sup>2</sup>	2,83479x10 <sup>2</sup>	2,05492x10 <sup>1</sup>	2,83612x10 <sup>0</sup>
7,0	5,76787x10 <sup>2</sup>	1,56408x10 <sup>3</sup>	3,78744x10 <sup>2</sup>	2,85565x10 <sup>2</sup>	2,19514x10 <sup>1</sup>	3,15870x10 <sup>0</sup>
8,0	5,77757x10 <sup>2</sup>	1,57033x10 <sup>3</sup>	3,83813x10 <sup>2</sup>	2,95727x10 <sup>2</sup>	2,40898x10 <sup>1</sup>	3,48226x10 <sup>0</sup>
9,0	5,78810x10 <sup>2</sup>	1,57701x10 <sup>3</sup>	3,88825x10 <sup>2</sup>	3,03967x10 <sup>2</sup>	2,47672x10 <sup>1</sup>	3,44230x10 <sup>0</sup>
10,0	5,79102x10 <sup>2</sup>	1,57856x10 <sup>3</sup>	3,89137x10 <sup>2</sup>	3,02146x10 <sup>2</sup>	2,33250x10 <sup>1</sup>	3,09901x10 <sup>0</sup>
20,0	5,79675x10 <sup>2</sup>	1,57887x10 <sup>3</sup>	3,83722x10 <sup>2</sup>	2,90502x10 <sup>2</sup>	2,30412x10 <sup>1</sup>	3,34285x10 <sup>0</sup>
30,0	5,82517x10 <sup>2</sup>	1,59270x10 <sup>3</sup>	3,88823x10 <sup>2</sup>	2,94133x10 <sup>2</sup>	2,13413x10 <sup>1</sup>	2,81938x10 <sup>0</sup>
40,0	5,85244x10 <sup>2</sup>	1,60513x10 <sup>3</sup>	3,94422x10 <sup>2</sup>	3,06052x10 <sup>2</sup>	2,51849x10 <sup>1</sup>	3,57146x10 <sup>0</sup>
50,0	5,86376x10 <sup>2</sup>	1,60568x10 <sup>3</sup>	3,88357x10 <sup>2</sup>	2,89139x10 <sup>2</sup>	2,10291x10 <sup>1</sup>	2,90584x10 <sup>0</sup>
60,0	5,90707x10 <sup>2</sup>	1,62689x10 <sup>3</sup>	4,01036x10 <sup>2</sup>	3,11632x10 <sup>2</sup>	2,45024x10 <sup>1</sup>	3,28740x10 <sup>0</sup>

### 4.3 Reatividade Exponencial

**Problema 5:** Consideremos as equações (2.41) onde a reatividade é do tipo exponencial com  $\rho(t) = 0,0001e^t$ . Os parâmetros utilizados são os mesmos utilizados no problema 1. Os resultados foram obtidos de duas formas: a primeira (Decomposição 1), considerando a reatividade como  $\rho(t) = 0,0001e^t$  e utilizando 9 termos da série; a segunda (Decomposição 2), a reatividade  $\rho(t) = 0,0001e^t$  foi aproximada por uma função escada e foram utilizados 9 termos da série. Nos dois casos, foi tomado um passo de tempo de 0,01s. A computação simbólica foi implementada no software Maple 8.

Neste caso, diferentemente dos casos anteriores, não temos resultados disponíveis na literatura para podermos comparar com os resultados gerados. Contudo, acreditamos que estes resultados são confiáveis já que o método se mostrou eficiente para os demais casos estudados.



Tabela 4.9: Densidade de nêutrons obtida pelo método da decomposição considerando a reatividade do tipo exponencial  $\rho(t) = 0,0001 \exp(t)$ .

<b>t(s)</b>	<b>Decomposição 1</b>	<b>Decomposição 2</b>
0,0	1,00000x10 <sup>0</sup>	1,00000x10 <sup>0</sup>
1,0	1,05232x10 <sup>0</sup>	1,05225x10 <sup>0</sup>
2,0	1,16211x10 <sup>0</sup>	1,16189x10 <sup>0</sup>
3,0	1,59538x10 <sup>0</sup>	1,59453x10 <sup>0</sup>
4,0	9,40638x10 <sup>0</sup>	9,39260x10 <sup>0</sup>
5,0	5,49459x10 <sup>45</sup>	5,48475x10 <sup>45</sup>

Tabela 4.10: Concentrações dos precursores de nêutrons atrasados obtidas pelo método da decomposição utilizando computação simbólica considerando a reatividade do tipo exponencial  $\rho(t) = 0,0001 \exp(t)$ .

<i>t(s)</i>	<i>c</i> <sub>1</sub> ( <i>t</i> )	<i>c</i> <sub>2</sub> ( <i>t</i> )	<i>c</i> <sub>3</sub> ( <i>t</i> )	<i>c</i> <sub>4</sub> ( <i>t</i> )	<i>c</i> <sub>5</sub> ( <i>t</i> )	<i>c</i> <sub>6</sub> ( <i>t</i> )
0,0	5,75268x10 <sup>2</sup>	1,55519x10 <sup>3</sup>	3,74474x10 <sup>2</sup>	2,84385x10 <sup>2</sup>	2,18713x10 <sup>1</sup>	3,02325x10 <sup>0</sup>
1,0	5,75488x10 <sup>2</sup>	1,55663x10 <sup>3</sup>	3,75703x10 <sup>2</sup>	2,86736x10 <sup>2</sup>	2,23825x10 <sup>1</sup>	3,13618x10 <sup>0</sup>
2,0	5,76171x10 <sup>2</sup>	1,56112x10 <sup>3</sup>	3,79417x10 <sup>2</sup>	2,93474x10 <sup>2</sup>	2,36259x10 <sup>1</sup>	3,37853x10 <sup>0</sup>
3,0	5,78458x10 <sup>2</sup>	1,57611x10 <sup>3</sup>	3,91784x10 <sup>2</sup>	3,15810x10 <sup>2</sup>	2,78383x10 <sup>1</sup>	4,25218x10 <sup>0</sup>
4,0	5,93945x10 <sup>2</sup>	1,67818x10 <sup>3</sup>	4,77893x10 <sup>2</sup>	4,79343x10 <sup>2</sup>	6,43561x10 <sup>1</sup>	1,34843x10 <sup>1</sup>
5,0	1,41251x10 <sup>44</sup>	9,39208x10 <sup>44</sup>	8,22992x10 <sup>44</sup>	1,69488x10 <sup>45</sup>	4,94185x10 <sup>44</sup>	1,79954x10 <sup>44</sup>

Tabela 4.11: Concentrações dos precursores de nêutrons atrasados obtidas pelo método da decomposição utilizando a solução exata truncada para o caso em que a reatividade é considerada constante por partes considerando a reatividade do tipo exponencial  $\rho(t) = 0,0001 \exp(t)$ .

<i>t(s)</i>	<i>c</i> <sub>1</sub> ( <i>t</i> )	<i>c</i> <sub>2</sub> ( <i>t</i> )	<i>c</i> <sub>3</sub> ( <i>t</i> )	<i>c</i> <sub>4</sub> ( <i>t</i> )	<i>c</i> <sub>5</sub> ( <i>t</i> )	<i>c</i> <sub>6</sub> ( <i>t</i> )
0,0	5,75268x10 <sup>2</sup>	1,55519x10 <sup>3</sup>	3,74474x10 <sup>2</sup>	2,84385x10 <sup>2</sup>	2,18713x10 <sup>1</sup>	3,02325x10 <sup>0</sup>
1,0	5,75488x10 <sup>2</sup>	1,55663x10 <sup>3</sup>	3,75703x10 <sup>2</sup>	2,86736x10 <sup>2</sup>	2,23825x10 <sup>1</sup>	3,13618x10 <sup>0</sup>
2,0	5,76171x10 <sup>2</sup>	1,56112x10 <sup>3</sup>	3,79417x10 <sup>2</sup>	2,93474x10 <sup>2</sup>	2,36260x10 <sup>1</sup>	3,37853x10 <sup>0</sup>
3,0	5,78458x10 <sup>2</sup>	1,57611x10 <sup>3</sup>	3,91784x10 <sup>2</sup>	3,15810x10 <sup>2</sup>	2,78384x10 <sup>1</sup>	4,25219x10 <sup>0</sup>
4,0	5,93945x10 <sup>2</sup>	1,67919x10 <sup>3</sup>	4,77896x10 <sup>2</sup>	4,79349x10 <sup>2</sup>	6,43574x10 <sup>1</sup>	1,34847x10 <sup>1</sup>
5,0	1,41513x10 <sup>44</sup>	9,40951x10 <sup>44</sup>	8,24519x10 <sup>44</sup>	1,69803x10 <sup>45</sup>	4,95110x10 <sup>44</sup>	1,80287x10 <sup>44</sup>

## 5 CONCLUSÕES

Da análise dos resultados, podemos concluir que os objetivos deste trabalho foram atingidos, pois estendemos os resultados obtidos por [Vargas et al., 2005] ao construirmos soluções para outros tipos de reatividade. Também podemos testar a precisão e facilidade computacional do método da decomposição. Em todos os casos estudados, podemos observar que o número de termos utilizados não foi grande e que, mesmo assim, conseguimos bons resultados numéricos comparados com os da literatura disponível [Vilhena, 1988] [Hansen et al., 1965]. Além disso, parece que o software Maple 8 não foi tão eficiente na parte de computação científica para o problema resolvido, embora tenha mostrado grandes facilidades com a parte referente a computação simbólica. Acreditamos que a utilização conjunta da computação simbólica do Maple 8 com um código computacional em FORTRAN pode minimizar os tempos de cálculo.

Comparando os resultados obtidos nos casos em que a reatividade é tomada linear e senoidal, observamos que o caso senoidal, aparentemente, apresenta melhores resultados. Este fato já era esperado e pode ser compreendido pela observação da taxa de variação da reatividade que, no caso senoidal, era menor.

Também podemos ressaltar que o método da decomposição coincide com a solução exata do problema da cinética pontual no caso em que a reatividade é considerada constante. Isto permite, quando aproximamos a reatividade por uma função escada, como feito por [Kinard e Allen, 2003], obtermos bons resultados para a solução deste problema conforme foi constatado nos casos estudados anteriormente. Além disso, foi observada uma drástica redução no tempo de computação. Para os resultados gerados neste trabalho foi utilizado um computador equipado com processador Intel® Celeron® M 1,30 GHz com 224 MB de memória RAM, o que nos permite crer que em um equipamento melhor teremos um tempo ainda menor.

Como sugestão para trabalhos futuros, é nossa intenção combinar o método da decomposição com a técnica da transformada de Laplace para a resolução das equações espaciais da cinética de reatores.

## Apêndice A

Tabela A.1: Parâmetros dos grupos precursores de nêutrons atrasados.

Grupo	$\lambda_i (s^{-1})$	$\beta_i$ (nêutrons atrasados/fissão)
$U^{25} (\beta^{25} = 0,0065)$		
1	0,0124	0,00022
2	0,0305	0,00142
3	0,111	0,00127
4	0,301	0,00257
5	1,14	0,00075
6	3,01	0,00027
$Pu^{49} (\beta^{49} = 0,0020)$		
1	0,0129	0,000076
2	0,0311	0,000560
3	0,134	0,000432
4	0,331	0,000656
5	1,26	0,000206
6	3,21	0,000070
$U^{23} (\beta^{23} = 0,0027)$		
1	0,0126	0,00023
2	0,0337	0,00081
3	0,139	0,00068
4	0,305	0,00075
5	1,13	0,00014
6	2,50	0,00009

## Apêndice B

Linhas de comando utilizadas para encontrar a solução pelo método da decomposição no software Maple para o caso em que a reatividade é linear.

```
restart:
> Digits:=30:

>#Parâmetros
>
> gama:=0.006473:
> beta[1]:=0.000214:
> beta[2]:=0.001423:
> beta[3]:=0.001247:
> beta[4]:=0.002568:
> beta[5]:=0.000748:
> beta[6]:=0.000273:
> Lambda:=0.00003:
> lambda[1]:=0.0124:
> lambda[2]:=0.0305:
> lambda[3]:=0.111:
> lambda[4]:=0.301:
> lambda[5]:=1.14:
> lambda[6]:=3.01:
> rho:=0.001*t:

> phi[0]:=n0:
> alpha[1][0]:=alpha01:
> alpha[2][0]:=alpha02:
> alpha[3][0]:=alpha03:
```

```

> alpha[4][0]:=alpha04:
> alpha[5][0]:=alpha05:
> alpha[6][0]:=alpha06:

>#Cálculo de phi[1], alpha[1][1], alpha[2][1], ...
>
> phi[0+1]:=int(rho*phi[0],t=t0..h)/Lambda
    -int(phi[0],t=t0..t)*gama/Lambda+sum('lambda[i]
    *int(alpha[i][0],t=t0..t)', 'i'=1..6):
> alpha[1][0+1]:=int(phi[0],t=t0..t)*beta[1]/Lambda
    -int(alpha[1][0],t=t0..t)*lambda[1]:
> alpha[2][0+1]:=int(phi[0],t=t0..t)*beta[2]/Lambda
    -int(alpha[2][0],t=t0..t)*lambda[2]:
> alpha[3][0+1]:=int(phi[0],t=t0..t)*beta[3]/Lambda
    -int(alpha[3][0],t=t0..t)*lambda[3]:
> alpha[4][0+1]:=int(phi[0],t=t0..t)*beta[4]/Lambda
    -int(alpha[4][0],t=t0..t)*lambda[4]:
> alpha[5][0+1]:=int(phi[0],t=t0..t)*beta[5]/Lambda
    -int(alpha[5][0],t=t0..t)*lambda[5]:
> alpha[6][0+1]:=int(phi[0],t=t0..t)*beta[6]/Lambda
    -int(alpha[6][0],t=t0..t)*lambda[6]:
> phi[1]:=subs(h=t,phi[1]):

>#Cálculo de phi[2], alpha[1][2], alpha[2][2], ...
>
> phi[1+1]:=int(rho*phi[0+1],t=t0..h)/Lambda
    -int(phi[0+1],t=t0..h)*gama/Lambda+sum('lambda[i]
    *int(alpha[i][0+1],t=t0..h)', 'i'=1..6):
> alpha[1][1+1]:=int(phi[0+1],t=t0..h)*beta[1]/Lambda
    -int(alpha[1][0+1],t=t0..h)*lambda[1]:

```

```

> alpha[2][1+1]:=int(phi[0+1],t=t0..h)*beta[2]/Lambda
  -int(alpha[2][0+1],t=t0..h)*lambda[2]:
> alpha[3][1+1]:=int(phi[0+1],t=t0..h)*beta[3]/Lambda
  -int(alpha[3][0+1],t=t0..h)*lambda[3]:
> alpha[4][1+1]:=int(phi[0+1],t=t0..h)*beta[4]/Lambda
  -int(alpha[4][0+1],t=t0..h)*lambda[4]:
> alpha[5][1+1]:=int(phi[0+1],t=t0..h)*beta[5]/Lambda
  -int(alpha[5][0+1],t=t0..h)*lambda[5]:
> alpha[6][1+1]:=int(phi[0+1],t=t0..h)*beta[6]/Lambda
  -int(alpha[6][0+1],t=t0..h)*lambda[6]:
> phi[1+1]:=subs(h=t,phi[1+1]):
> alpha[1][1+1]:=subs(h=t,alpha[1][1+1]):
> alpha[2][1+1]:=subs(h=t,alpha[2][1+1]):
> alpha[3][1+1]:=subs(h=t,alpha[3][1+1]):
> alpha[4][1+1]:=subs(h=t,alpha[4][1+1]):
> alpha[5][1+1]:=subs(h=t,alpha[5][1+1]):
> alpha[6][1+1]:=subs(h=t,alpha[6][1+1]):

>#Cálculo de phi[3], alpha[1][3], alpha[2][3], ...
>
> phi[2+1]:=int(rho*phi[1+1],t=t0..h)/Lambda
  -int(phi[1+1],t=t0..h)*gama/Lambda+sum('lambda[i]
  *int(alpha[i][1+1],t=t0..h)', 'i'=1..6):
> alpha[1][2+1]:=int(phi[1+1],t=t0..h)*beta[1]/Lambda
  -int(alpha[1][1+1],t=t0..h)*lambda[1]:
> alpha[2][2+1]:=int(phi[1+1],t=t0..h)*beta[2]/Lambda
  -int(alpha[2][1+1],t=t0..h)*lambda[2]:
> alpha[3][2+1]:=int(phi[1+1],t=t0..h)*beta[3]/Lambda
  -int(alpha[3][1+1],t=t0..h)*lambda[3]:
> alpha[4][2+1]:=int(phi[1+1],t=t0..h)*beta[4]/Lambda

```

```

-int(alpha[4][1+1],t=t0..h)*lambda[4]:
> alpha[5][2+1]:=int(phi[1+1],t=t0..h)*beta[5]/Lambda
-int(alpha[5][1+1],t=t0..h)*lambda[5]:
> alpha[6][2+1]:=int(phi[1+1],t=t0..h)*beta[6]/Lambda
-int(alpha[6][1+1],t=t0..h)*lambda[6]:
> phi[2+1]:=subs(h=t,phi[2+1]):
> alpha[1][2+1]:=subs(h=t,alpha[1][2+1]):
> alpha[2][2+1]:=subs(h=t,alpha[2][2+1]):
> alpha[3][2+1]:=subs(h=t,alpha[3][2+1]):
> alpha[4][2+1]:=subs(h=t,alpha[4][2+1]):
> alpha[5][2+1]:=subs(h=t,alpha[5][2+1]):
> alpha[6][2+1]:=subs(h=t,alpha[6][2+1]):

>#Cálculo de phi[4], alpha[1][4], alpha[2][4], ...
>
> phi[3+1]:=int(rho*phi[2+1],t=t0..h)/Lambda
-int(phi[2+1],t=t0..h)*gama/Lambda+sum('lambda[i]
*int(alpha[i][2+1],t=t0..h)', 'i'=1..6):
> alpha[1][3+1]:=int(phi[2+1],t=t0..h)*beta[1]/Lambda
-int(alpha[1][2+1],t=t0..h)*lambda[1]:
> alpha[2][3+1]:=int(phi[2+1],t=t0..h)*beta[2]/Lambda
-int(alpha[2][2+1],t=t0..h)*lambda[2]:
> alpha[3][3+1]:=int(phi[2+1],t=t0..h)*beta[3]/Lambda
-int(alpha[3][2+1],t=t0..h)*lambda[3]:
> alpha[4][3+1]:=int(phi[2+1],t=t0..h)*beta[4]/Lambda
-int(alpha[4][2+1],t=t0..h)*lambda[4]:
> alpha[5][3+1]:=int(phi[2+1],t=t0..h)*beta[5]/Lambda
-int(alpha[5][2+1],t=t0..h)*lambda[5]:
> alpha[6][3+1]:=int(phi[2+1],t=t0..h)*beta[6]/Lambda
-int(alpha[6][2+1],t=t0..h)*lambda[6]:

```



```

> phi [3+1] :=subs (h=t, phi [3+1]) :
> alpha [1] [3+1] :=subs (h=t, alpha [1] [3+1]) :
> alpha [2] [3+1] :=subs (h=t, alpha [2] [3+1]) :
> alpha [3] [3+1] :=subs (h=t, alpha [3] [3+1]) :
> alpha [4] [3+1] :=subs (h=t, alpha [4] [3+1]) :
> alpha [5] [3+1] :=subs (h=t, alpha [5] [3+1]) :
> alpha [6] [3+1] :=subs (h=t, alpha [6] [3+1]) :

>#Cálculo de phi [5], alpha [1] [5], alpha [2] [5], ...
>
> phi [4+1] :=int (rho*phi [3+1], t=t0..h)/Lambda
      -int (phi [3+1], t=t0..h)*gama/Lambda+sum ('lambda [i]
      *int (alpha [i] [3+1], t=t0..h)', 'i'=1..6):
> alpha [1] [4+1] :=int (phi [3+1], t=t0..h)*beta [1]/Lambda
      -int (alpha [1] [3+1], t=t0..h)*lambda [1]:
> alpha [2] [4+1] :=int (phi [3+1], t=t0..h)*beta [2]/Lambda
      -int (alpha [2] [3+1], t=t0..h)*lambda [2]:
> alpha [3] [4+1] :=int (phi [3+1], t=t0..h)*beta [3]/Lambda
      -int (alpha [3] [3+1], t=t0..h)*lambda [3]:
> alpha [4] [4+1] :=int (phi [3+1], t=t0..h)*beta [4]/Lambda
      -int (alpha [4] [3+1], t=t0..h)*lambda [4]:
> alpha [5] [4+1] :=int (phi [3+1], t=t0..h)*beta [5]/Lambda
      -int (alpha [5] [3+1], t=t0..h)*lambda [5]:
> alpha [6] [4+1] :=int (phi [3+1], t=t0..h)*beta [6]/Lambda
      -int (alpha [6] [3+1], t=t0..h)*lambda [6]:
> phi [4+1] :=subs (h=t, phi [4+1]) :
> alpha [1] [4+1] :=subs (h=t, alpha [1] [4+1]) :
> alpha [2] [4+1] :=subs (h=t, alpha [2] [4+1]) :
> alpha [3] [4+1] :=subs (h=t, alpha [3] [4+1]) :
> alpha [4] [4+1] :=subs (h=t, alpha [4] [4+1]) :

```

```

> alpha[5][4+1]:=subs(h=t,alpha[5][4+1]):
> alpha[6][4+1]:=subs(h=t,alpha[6][4+1]):

>#Expansões obtidas pelo método da decomposição
> potência:=sum('phi[n]','n'=0..5):
> concentração1:=sum('alpha[1][m]',m=0..5):
> concentração2:=sum('alpha[2][m]',m=0..5):
> concentração3:=sum('alpha[3][m]',m=0..5):
> concentração4:=sum('alpha[4][m]',m=0..5):
> concentração5:=sum('alpha[5][m]',m=0..5):
> concentração6:=sum('alpha[6][m]',m=0..5):

>#Condições iniciais
> n0:=1.;
> alpha01:= 575.268817204301075268817204300;
> alpha02:= 1555.19125683060109289617486339;
> alpha03:= 374.474474474474474474474474473;
> alpha04:= 284.385382059800664451827242525;
> alpha05:= 21.8713450292397660818713450292;
> alpha06:= 3.02325581395348837209302325581;
> t0:=0.;
> t:=0.01;

> for i from 1 to 800 do
> n1:=potência;
> alpha01:=concentração1;
> alpha02:=concentração2;
> alpha03:=concentração3;
> alpha04:=concentração4;
> alpha05:=concentração5;

```

```
> alpha06:=concentração6;
> n0:=n1;
> alpha1:=alpha01;
> alpha2:=alpha02;
> alpha3:=alpha03;
> alpha4:=alpha04;
> alpha5:=alpha05;
> alpha6:=alpha06;
> t:=t+0.01;
> t0:=t0+0.01;
> end do;
```

## Bibliografia

- [Abbaoui e Cherruault, 1999] Abbaoui, K. e Cherruault, Y. (1999). The decomposition method applied to the Cauchy problem. *Kybernetes*, Vol. 28:p. 68–74.
- [Aboanber e Nahla, 2002] Aboanber, A. E. e Nahla, A. A. (2002). Generalization of the analytical inversion method for the solution of the point kinetics equations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Vol. 35:p. 3245–3263.
- [Aboanber e Nahla, 2004] Aboanber, A. E. e Nahla, A. A. (2004). On Padé approximations to the exponential function and application to the point kinetics equations. *Progress in Nuclear Energy*, Vol. 44:p. 347–368.
- [Adomian, 1988] Adomian, G. (1988). A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 135:p. 501–544.
- [Adomian, 1994] Adomian, G. (1994). *Solving Frontier Problems of Physics: the Decomposition Method*. Kluwer Academic Publishers.
- [Adomian et al., 1996] Adomian, G., Cherruault, Y., e Abbaoui, K. (1996). A nonperturbative analytical solution of immune response with time-delays and possible generalization. *Math. Comput. Modell.*, Vol. 20:p. 89–96.
- [Cherruault, 1989] Cherruault, Y. (1989). Convergence of Adomian’s method. *Kybernetes*, Vol. 18:p. 31–38.
- [Cherruault e Adomian, 1993] Cherruault, Y. e Adomian, G. (1993). Decomposition methods: a new proof of convergence. *Math. Comput. Modell.*, Vol. 18:p. 103–106.
- [Duderstadt e Hamilton, 1976] Duderstadt, J. e Hamilton, L. (1976). *Nuclear Reactor Analysis*. John Wiley and Son.

- [Glasstone e Edlund, 1966] Glasstone, S. e Edlund, M. (1966). *The Elements of Nuclear Reactor Theory*. D. Van Nostrand.
- [Guellal e Cherruault, 1995] Guellal, S. e Cherruault, Y. (1995). Application of the decomposition method to identify the distributed parameters of an elliptical equation. *Math. Comput. Modell.*, Vol. 21:p. 51–55.
- [Guellal et al., 1997] Guellal, S., Grimalt, P., e Cherruault, Y. (1997). Numerical study of Lorentz’s equation by the Adomian method. *Comput. Math. Appl.*, Vol. 33:p. 25–29.
- [Hansen et al., 1965] Hansen, K. F., Koen, B. V., e Little, W. W. (1965). Stable numerical solutions of the reactor kinetics equations. *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 22:p. 51–59.
- [Hayes e Allen, 2005] Hayes, J. G. e Allen, E. J. (2005). Stochastic point-kinetics equations in nuclear reactor dynamics. *Annals of Nuclear Energy*, Vol. 32:p. 572–587.
- [Henry, 1975] Henry, A. (1975). *Nuclear-Reactor Analysis*. Columbia Press.
- [Kinard e Allen, 2003] Kinard, M. e Allen, E. J. (2003). Efficient numerical solution of the point kinetics equations in nuclear reactor dynamics. *Annals of Nuclear Energy*, Vol. 31:p. 1039–1051.
- [Mahmood et al., 2005] Mahmood, A., Casasús, L., e Al-Hayani, W. (2005). The decomposition method for stiff systems of ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computations*, Vol. 167:p. 964–975.
- [Répaci, 1990] Répaci, A. (1990). Nonlinear dynamical systems: on the accuracy of Adomian’s decomposition method. *Appl. Math. Lett.*, Vol. 3:p. 35–39.
- [Sánchez, 1989] Sánchez, J. (1989). On the numerical solution of the point kinetics equations by generalized Runge-Kutta methods. *Nuclear Science and Engineering*, Vol. 103:p. 94–99.

- [Vargas e Vilhena, 1997] Vargas, R. M. F. e Vilhena, M. T. (1997). Analytical solution of the discrete ordinates problem by decomposition method. *Annals of Nuclear Energy*, Vol. 24:p. 785–791.
- [Vargas e Vilhena, 2004] Vargas, R. M. F. e Vilhena, M. T. (2004). Solution of the Sn radiative transfer equation in an inhomogenous plane parallel atmosphere by the decomposition method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, Vol. 92:p. 121–127.
- [Vargas et al., 2005] Vargas, R. M. F., Vilhena, M. T., e Cardona, A. (2005). Solução via método da decomposição do problema de cinética pontual de um reator nuclear. International Nuclear Atlantic Conference - INAC 2005, Santos - SP.
- [Vilhena, 1988] Vilhena, M. T. (1988). Estudo de difusão de nêutrons e calor dependente do tempo num reator nuclear a leito fluidizado. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - PROMEC - Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)