

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**Três métodos para o cálculo  
da série Zeta( $2n$ ) de Riemann**

por

Denise Elena Fagan Zanon

Dissertação submetida como requisito parcial  
para a obtenção do grau de  
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo  
Orientador

Prof. Dr. João Paulo Lukaszczyk  
Co-orientador

Porto Alegre, Janeiro de 2006.

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

## CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Zanon, Denise Elena Fagan

Três métodos para o cálculo da série Zeta( $2n$ ) de Riemann / Denise Elena Fagan Zanon.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2006.

51 p.;

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2006.

Orientador: Barrionuevo, José Afonso; Co-orientador: Lukaszczyk, João Paulo

Dissertação: Matemática Aplicada  
Sommas de Euler, funções geradoras, mudança de variáveis de E. Calabi, operadores compactos

# Três métodos para o cálculo da série Zeta( $2n$ ) de Riemann

por

Denise Elena Fagan Zanon

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

## Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica de Fluidos

Orientador: Prof. Dr. José Afonso Barrionuevo

Co-orientador: Prof. Dr. João Paulo Lukaszczyk

Banca examinadora:

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Vanilde Bisognin  
UNIFRA

Prof. Dr. Leonardo Prange Bonorino  
PPGMAT/UFRGS

Prof. Dr. Paulo Ricardo Zíngano  
PPGMAp/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em  
9 de Janeiro de 2006.

Prof<sup>a</sup>. Maria Cristina Varriale, Dr<sup>a</sup>.  
Coordenadora

*Para meu marido: Rubens,  
meus pais: Osvaldo (in memoriam) e Claudina , meus irmãos: Denilso,  
Edson e Vanise, minhas cunhadas: Denise e Mirtes, meu cunhado: Fabricio,  
e meus sobrinhos: Amadeo, Lucas e Vinicius.*

## AGRADECIMENTOS

*A Deus, pois "mais importante que o lugar que ocupas em mim, é a intensidade de sua presença em tudo que faço".*

*A meus pais que me deram a vida e me ensinaram a vivê-la com dignidade, que mesmo distante estiveram sempre comigo, obrigada por tudo.*

*Ao meu marido Rubens, e aos meus familiares que sempre estiveram comigo, acolheram minhas queixas, meus sofrimentos, meu desânimo ... pelo amor dedicado, pelo conforto nos momentos difíceis, pela presença e sorriso amigo.*

*Ao professor José Afonso, pelos ensinamentos, orientação e compreensão.*

*Em especial ao professor João Paulo, que além de um instrutor foi um grande amigo, sempre disposto a auxiliar no que fosse necessário, obrigada pelo seu apoio, compreensão, dedicação, ensinamentos e orientação.*

*As amigas Jô, Veraci, Marzoé e ao amigo Rubens pelo apoio, carinho, cumplicidade, por todo o incentivo principalmente nos momentos mais difíceis. Valeu a força!*

*A Sabrina e ao Marnei pela amizade, carinho, incentivo e por toda a ajuda de vocês.*

*Aos demais amigos e a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para esta minha conquista, aqui citados ou não, saibam que serão sempre lembradas com muito carinho.*

*Muito obrigada a todos!*

## SUMÁRIO

NOTAÇÃO . . . . .	vi
RESUMO . . . . .	vii
ABSTRACT . . . . .	viii
1 INTRODUÇÃO . . . . .	1
2 FUNÇÕES GERADORAS . . . . .	5
3 A MUDANÇA DE VARIÁVEIS DE E. CALABI . . . . .	14
4 OPERADORES INTEGRAIS LINEARES . . . . .	26
5 CONCLUSÃO . . . . .	46
APÊNDICE A . . . . .	47
BIBLIOGRAFIA . . . . .	50

## NOTAÇÃO

$\zeta(n)$  é a série Zeta de Riemann

$L(n)$  é a série  $L$  de Dirichlet

$\Pi_n$  é o politopo em  $\mathbb{R}^n$

$Vol(\Pi_n)$  é o volume do politopo  $\Pi_n$

$T^n$  é a composição do operador  $T$  consigo mesmo,  $n$  vezes

$$L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \left\{ f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é integrável a Lebesgue e } \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa o produto interno em  $L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$tr(T)$  é o traço do operador  $T$



## RESUMO

Neste trabalho apresentamos três métodos distintos provando que  $S(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (4k+1)^{-n}$  é um múltiplo racional de  $\pi^n$  para todos os inteiros  $n = 1, 2, 3, \dots$ . O primeiro utiliza a teoria das funções analíticas e funções geradoras. No segundo reduzimos o problema, via mudança de variável devida a E. Calabi, ao cálculo do volume de certos polítopos em  $\mathbb{R}^n$  enquanto que no terceiro usamos a teoria dos operadores integrais compactos. Cada um dos métodos tem um interesse intrínseco e está sujeito a generalizações para aplicações em novas situações.

## ABSTRACT

In this work we present three different methods to show that  $S(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (4k+1)^{-n}$  is a rational multiple of  $\pi^n$  for all integers  $n = 1, 2, 3, \dots$ . The first uses analytic function theory and generating functions. The second relates the problem, via a change of variables due to E. Calabi, to the volume of a certain polytope in  $\mathbb{R}^n$  while the third uses the theory of compact integral operators. Each of these methods has its own interest and is subject to generalizations as well as applications to different situations.

# 1 INTRODUÇÃO

Nesta dissertação é mostrado que a série

$$S(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (4k + 1)^{-n},$$

com  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  é um múltiplo racional de  $\pi^n$  conforme o artigo de Noam D. Elkies [9].

A série acima tem uma relação estreita com a série Zeta de Riemann que é dada por

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n},$$

com  $n = 2, 4, 6, \dots$  e a série  $L$  de Dirichlet (definida por Lejeune Dirichlet em 1837), mais especificamente por

$$L(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k + 1)^{-n},$$

com  $n = 3, 5, 7, \dots$

Tal relação é dada por (conforme veremos no Capítulo 2):

$$S(n) = \begin{cases} (1 - 2^{-n}) \zeta(n) & \text{se } n \text{ é par} \\ L(n) & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (1.1)$$

De acordo com Boyer, em 1748, Leonard Euler publicou o tratado *Introductio in Analysin Infinitorum* em dois volumes. O primeiro volume do *Introductio* versa sobre processos infinitos, em particular, apresenta inúmeras séries infinitas.

Um dos notáveis resultados de Euler é a soma dos recíprocos dos quadrados perfeitos

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

A questão sobre a soma desta série começa numa carta de 1673 de Oldenburg a Leibniz indagando sobre a soma dessa série, a qual Leibniz não respondeu. Em 1689 Jacques Bernoulli confessou sua incapacidade de achar a tal soma. No entanto, Euler conseguiu resolver este problema e sua idéia parte da série de Taylor para o seno

$$\text{senz} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Fazendo uma generalização não rigorosa das propriedades dos zeros de funções polinomiais para os zeros de funções analíticas, Euler pensou em  $\text{senz} = 0$  como uma expansão polinomial infinita, isto é,

$$0 = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

Substituindo  $z^2 = w$  na equação acima temos:

$$0 = 1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \frac{w^3}{7!} + \dots$$

Da teoria das equações algébricas sabemos que se o termo constante é 1, a soma dos recíprocos das raízes é o oposto do coeficiente do termo linear, neste caso  $\frac{1}{3!}$ . Além disto,  $\text{senz} = 0 \Rightarrow z = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Logo  $w = k^2\pi^2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Assim,

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \dots,$$

ou seja,

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

Tal resultado parece datar de 1736 e mais tarde ele publicou a soma dos recíprocos de outras potências de inteiros. De acordo com Edwards [8], Euler estabeleceu em [10] a relação

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}(-1)^{n+1}B_{2n}}{2 \cdot (2n)!},$$

onde  $B_n$  são os números de Bernoulli que são definidos por:

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

É fácil provar que  $B_n$  satisfazem  $B_0 = 1$  e que  $B_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k$  pois substituindo a série de  $e^z$  obtemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k!} z^k \right) \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{B_l}{l!} z^l \right) = z.$$

Entre as relações notáveis da análise e a teoria de números Euler mostrou que a divergência da série harmônica  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  implica o teorema de Euclides sobre a existência de infinitos primos.

Uma conexão profunda entre os números primos e a série Zeta é obtida através da função Zeta definida por:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s},$$

com  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s > 1$ .

Euler definiu esta função no artigo *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 9, 88-160, no ano de 1737. Entre as notáveis propriedades desta função, Euler provou que

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{-s}} \times \frac{1}{1-3^{-s}} \times \frac{1}{1-5^{-s}} \times \frac{1}{1-7^{-s}} \times \dots,$$

isto é,

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

O valor de  $\zeta(s)$  para  $s$  ímpar é ainda um problema em aberto, por exemplo, somente em 1979 foi provado que  $\zeta(3)$  é um número irracional, ref. [1] e [3]. Por outro lado, os valores de  $\zeta(s)$  para  $s$  par são conhecidos desde os tempos de Euler.

Tal função,  $\zeta(s)$  quando definida para  $s \in \mathbb{C}$  é conhecida por função Zeta de Riemann em homenagem ao matemático que definiu a função Zeta para os

números complexos. Entre alguns problemas estudados por Riemann, destacamos o da hipótese de que todos os zeros da função Zeta na faixa  $0 \leq x \leq 1$  estão na linha  $x = \frac{1}{2}$  o qual, é ainda um problema em aberto.

Atualmente, apesar de a função Zeta ter sido definida originalmente por Euler, ela é conhecida por função Zeta de Riemann.

A dissertação está dividida em quatro capítulos:

No capítulo 2, provamos a relação apresentada em (1.1) entre  $S(n)$  e as séries Zeta de Riemann e  $L$  de Dirichlet. Em seguida provamos que  $S(n)$  é múltiplo de  $\pi^n$  com o auxílio da teoria de funções analíticas.

No capítulo 3, definimos politopos e apresentamos algumas propriedades elementares. Uma mudança de variáveis, atribuída a E. Calabi, reduz o problema original ao cálculo do volume de um politopo em  $\mathbb{R}^n$ , que mostramos diretamente ser um múltiplo de  $\pi^n$ .

No capítulo 4, associamos o volume do politopo  $\Pi_n$  ao traço das potências  $T^n$  de um operador integral  $T$ , isto é, mostramos que  $S(n) = tr(|T^n|)$  para um  $T$  apropriado.

Para manter o trabalho completo, incluímos em um apêndice alguns resultados clássicos de análise real bem como de operadores lineares em espaços de Hilbert.

## 2 FUNÇÕES GERADORAS

A seguinte soma

$$S(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{-k}^k \frac{1}{(4k+1)^n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)^n} \quad (2.1)$$

é um múltiplo racional de  $\pi^n$  para todos os inteiros  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$  para os quais a soma converge absolutamente. Isto é equivalente a dizer que quando  $n$  é par,  $n \geq 2$

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \quad (2.2)$$

é múltiplo racional de  $\pi^n$  e quando  $n$  é ímpar,  $n \geq 3$

$$L(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n} \quad (2.3)$$

também é múltiplo racional de  $\pi^n$ .

De fato, pois

$$S(n) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\zeta(n) & \text{se } n \text{ é par} \\ L(n) & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Inicialmente mostraremos que, para  $n$  par,  $S(n)$  dada em (2.1) é igual a  $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\zeta(n)$ .

$$\text{Seja } S(k) = \sum_{s=0}^k \frac{1}{(2s+1)^n}.$$

Assim, devemos mostrar que

$$S(n) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^n},$$

ou seja,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)^n}.$$

Para mostrar a igualdade acima, utilizamos o seguinte lema:

**Lema 2.1.** *Dado  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m$  ímpar, existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $m = |4k+1|$ .*

A partir do lema acima concluimos que as duas séries são iguais.

□

Agora vamos mostrar que para  $n$  ímpar,  $S(n)$  dada em (2.1) é igual a

$$L(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}.$$

Devemos mostrar que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)^n}. \quad (2.4)$$

Suponhamos  $k$  par em  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}$ . Seja  $k = 2t$ . Logo,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2t}}{(2 \cdot 2t+1)^n} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(4t+1)^n},$$

que corresponde a  $k \geq 0$  em  $S(n)$ .

Suponhamos  $k$  ímpar em  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}$ . Seja  $k = 2t-1$ ,  $t \geq 1$ . Logo,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2t-1}}{(2 \cdot (2t-1)+1)^n} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)}{(4t-1)^n}.$$

Fazendo a mudança de variável,  $t = -j$  temos:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{(-1)}{(4t-1)^n} = \sum_{j=-1}^{-\infty} \frac{(-1)}{(-4j-1)^n} = \sum_{j=-1}^{-\infty} \frac{(-1)}{(-1)^n(4j+1)^n} = \sum_{j=-1}^{-\infty} \frac{1}{(4j+1)^n},$$



pois  $n$  é ímpar, o que corresponde a  $k < 0$  em  $S(n)$ . Assim mostramos que a igualdade em (2.4) é verdadeira.

□

A primeira prova que abordaremos neste trabalho, da racionalidade de  $\pi^{-n}S(n)$ , a qual é considerada uma demonstração padrão, é via função geradora.

Seja

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} S(n)z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)^n} \right) z^n, \quad (2.5)$$

na qual a soma interna é tomada nas ordens  $k = 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$

Queremos mostrar que a série de potências que representa  $G(z)$  converge para todo  $z$  tal que  $|z| < 1$ .

Seja  $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} S(n)z^n$ , onde  $S(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)^n}$ . Primeiramente mostraremos que os  $S(n)$  são limitados.

i) Para  $n = 1$ , temos que  $S(1)$  é uma série alternada condicionalmente convergente.

ii) Para  $n \geq 2$ ,  $S(n)$  é absolutamente convergente, pois

$$|4k+1| > |k|, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow |4k+1|^n > |k|^n \Rightarrow \frac{1}{|4k+1|^n} < \frac{1}{|k|^n} < \frac{1}{k^2}.$$

Assim,  $|S(n)| < \sum_k \frac{1}{k^2}$  que converge. Logo os  $S(n)$  são limitados.

Observando novamente  $G(z)$ , vemos que esta é uma série de potências e seu raio de convergência é dado por

$$R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|S(n)|}.$$

Como  $S(n)$  é limitado, temos  $|S(n)| \leq k \Rightarrow \sqrt[n]{|S(n)|} \leq \sqrt[n]{k}$ . Assim,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|S(n)|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k} = 1,$$

logo  $R^{-1} \leq 1 \Rightarrow R \geq 1$ .

Portanto a série converge no intervalo  $(-1, 1)$ . Além disso, temos que  $G(z)$  converge uniforme e absolutamente dentro de qualquer círculo de raio  $R < 1$  centrado na origem.

Como  $S(n)$  é absolutamente convergente para  $n \geq 2$ , (pelo teorema A.1 do apêndice) podemos trocar a ordem dos somatórios em (2.5).

Assim, obtemos:

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(4k+1)^n} \right). \quad (2.6)$$

Mas, utilizando a série geométrica temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{4k+1} \right)^n = \frac{z}{4k+1-z}.$$

Logo,  $G(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{z}{4k+1-z}.$

Vamos mostrar que  $G(z)$  também é igual a

$$G(z) = \frac{\pi z}{4} \left( \sec \left( \frac{\pi z}{2} \right) + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi z}{2} \right) \right).$$

Sejam  $G_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)-z}$  e  $G_2(z) = \frac{\pi}{4} \left( \sec \left( \frac{\pi z}{2} \right) + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi z}{2} \right) \right).$

Mostraremos que  $G_1(z) = G_2(z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ . Neste caso  $z G_1(z) = z G_2(z)$  e, assim, em particular

$$\frac{\pi z}{4} \left( \sec \left( \frac{\pi z}{2} \right) + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi z}{2} \right) \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{z}{4k+1-z}, \quad \text{para } |z| < 1.$$

Vamos mostrar que a série em  $G_1(z)$  converge uniformemente para cada  $z$  contido num conjunto compacto  $C \subset \mathbb{C}$  com  $C \cap \{z \in \mathbb{C} : z = 4k+1, k \in \mathbb{Z}\} = \emptyset$ .

Temos,

$$\frac{1}{(4k+1-z)} = \frac{1}{(4k+1)} + \frac{z}{(4k+1)(4k+1-z)}.$$

Como a série  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)} = \frac{\pi}{4}$  então precisamos nos preocupar somente com a série

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{z}{(4k+1)(4k+1-z)}. \quad (2.7)$$

Temos que  $\exists M > 0$  tal que  $|z| \leq M$  para  $z \in C$ .

Logo  $|z - (4k+1)| \geq |4k+1| - |z| \geq |4k+1| - M$  e para índices  $k$  grandes, isto é,  $|k| \geq N$  para um certo  $N$  adequado temos  $|4k+1| - M \geq |k|$ .

Agora o conjunto  $\{4k+1, k \in \mathbb{Z}\}$  pode ser dividido em dois subconjuntos:

$A_1 = \{4k+1, k \in \mathbb{Z} : |k| < N\}$  e  $A_2 = \{4k+1, k \in \mathbb{Z} : |k| \geq N\}$ .

A série (2.7) com índices  $k$  em  $A_1$  é finita, pois temos um número finito de termos.

Para esta mesma série com índices  $k$  em  $A_2$  observemos que

$$\left| \frac{z}{(4k+1)(4k+1-z)} \right| \leq \frac{M}{|4k+1||k|} \leq \frac{M}{k^2}.$$

Como  $\sum_k \frac{M}{k^2}$  é convergente então pelo teste de Weierstrass a série (2.7) converge uniformemente. Portanto  $G_1(z)$  também converge uniformemente em  $C$ .

As singularidades de  $G_1(z)$  são os pontos da forma  $z = 4k+1, k \in \mathbb{Z}$ , isto é,  $z \in \{1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, \dots\}$ .

Para  $G_2(z)$  temos que,

$$G_2(z) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{\cos(\frac{\pi z}{2})} + \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi z}{2})}{\cos(\frac{\pi z}{2})} \right) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{1 + \operatorname{sen}(\frac{\pi z}{2})}{\cos(\frac{\pi z}{2})} \right).$$

Como  $G_2$  é um quociente de funções analíticas temos que os pontos candidatos as singularidades satisfazem a

$$\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow z = \pm(2n - 1), n \in \mathbb{N}, \text{ isto é, } z \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}.$$

Os pontos que exigem uma análise mais detalhada são aqueles onde

$$1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow z = 4k - 1, k \in \mathbb{Z}, \text{ isto é, } z \in \{-1, 3, -5, 7, -9, 11, -13, \dots\}.$$

Assim, temos que os pontos onde  $1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0$  e  $\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0$  tem a forma  $z = 4k - 1, k \in \mathbb{Z}$ . Mas, nestes pontos  $G_2(z)$  é analítica pois para cada circunferência  $c_\epsilon$  de raio  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno e centrada em  $z = 4k - 1, k \in \mathbb{Z}$  temos:

$$\int_{c_\epsilon} G_2(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{4k-1}(G_2),$$

onde  $\operatorname{Res}_{4k-1}(G_2)$  é o resíduo de  $G_2(z)$  em  $4k - 1$  (veja teorema 67 na página 147 do Churchill [7]).

Por outro lado,

$$G_2(z) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)} \right) + \frac{\pi}{4} \left( \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)} \right) = B_1(z) + B_2(z).$$

Assim tanto  $B_1(z)$  quanto  $B_2(z)$  são quocientes de funções analíticas onde o numerador não se anula em  $4k - 1$ , o denominador se anula e a derivada do denominador não se anula, então

$$\operatorname{Res}_{4k-1}(G_2) = \operatorname{Res}_{4k-1}(B_1) + \operatorname{Res}_{4k-1}(B_2) = \frac{1}{2} + \left(\frac{-1}{2}\right) = 0,$$

(veja página 152 do Churchill [7]).

Logo  $\int_{c_\epsilon} G_2(z) dz = 0$ . Assim  $z = 4k - 1$  é singularidade removível de  $G_2(z)$ .

Portanto  $G_1$  e  $G_2$  são analíticas em  $\mathbb{C}$  com exceção dos pontos da forma  $z = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}$ .

Nestes pontos a singularidade é um pólo simples e seu resíduo é dado por:

$$\operatorname{Res}_{4k+1}(G_2) = -1 \text{ (veja página 152 do Churchill [7]).}$$

Para  $G_1(z)$  observemos que  $\phi(z) = (z - (4k + 1)) G_1(z)$  é analítica em  $4k + 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , assim  $G_1$  tem um pólo simples em  $4k + 1$  e seu resíduo neste pólo é dado por

$$\lim_{z \rightarrow 4k+1} (z - (4k + 1)) G_1(z) = -1 \text{ (veja página 151 do Churchill [7]).}$$

Desta forma  $H(z) = G_1(z) - G_2(z)$  é analítica  $\forall z \in \mathbb{C}$ , pois os pontos da forma  $z = 4k + 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  são singularidades removíveis de  $H(z)$ .

$$\text{Além disto, temos que } G_2(z + 4) = G_2(z)$$

e

$$\begin{aligned} G_1(z + 4) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{z}{4k + 1 - (z + 4)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{z}{4(k - 1) + 1 - z} \\ &= \frac{1}{-3 - z} + \frac{1}{-7 - z} + \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{-11 - z} + \dots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{z}{4k + 1 - z} = G_1(z). \end{aligned}$$

Assim,  $H(z)$  é periódica de período 4.

Mostraremos agora que  $H'(z) = 0$  e com isto  $H(z)$  é constante.

Temos que

$$H'(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{((4k + 1) - z)^2} + \frac{\pi^2}{8} \left( \sec\left(\frac{\pi z}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi z}{2}\right) + \sec^2\left(\frac{\pi z}{2}\right) \right).$$

Como  $H$  é inteira e periódica de período 4 então  $H'$  também é.

Consideremos  $x \in [0, 4]$  e  $|y| > 10$ , então para  $|k| > 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e  $z = x + iy$  temos:

$$|(4k + 1) - z|^2 = |(4k + 1 - x) + i(-y)|^2 = (4k + 1 - x)^2 + y^2.$$

Mas,  $|4k + 1 - x| \geq ||4k + 1| - |x|| \geq (|k| - 1)$  pois,

$$x^2 - 2(4k + 1)x + (4k + 1)^2 - (|k| - 1)^2 \geq 0.$$

Assim,  $\frac{1}{|(4k+1)-z|^2} \leq \frac{1}{(|k|-1)^2 + y^2}$ .

O lado direito da inequação acima pode ser reescrito como:

$$\frac{1}{(|k|-1)^2 + y^2} = \frac{1}{((|k|-1)^2 + y^2)^{\frac{2}{3}} ((|k|-1)^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}}. \quad (2.8)$$

Mas  $(|k|-1)^2 + y^2 \geq y^2 \Rightarrow ((|k|-1)^2 + y^2)^{\frac{1}{3}} \geq y^{\frac{2}{3}}$ .

Seja  $c \in \mathbb{R}$ ,  $0 < c < \frac{1}{4}$  então  $0 < \frac{1-\sqrt{c}}{1-c} < \frac{1+\sqrt{c}}{1-c} < 2$ .

Logo,  $(1-c)k^2 - 2|k| + 1 \geq 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,  $|k| > 1$ . De onde temos

$$(|k|-1)^2 \geq ck^2 \Rightarrow ((|k|-1)^2 + y^2)^{\frac{2}{3}} \geq c_1 k^{\frac{4}{3}}.$$

Portanto, usando a equação (2.8), temos que

$$\frac{1}{|(4k+1)-z|^2} \leq \frac{1}{y^{\frac{2}{3}} c_1 k^{\frac{4}{3}}}.$$

Logo a série  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{((4k+1)-z)^2}$  converge

e

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{((4k+1)-z)^2} = 0. \quad (2.9)$$

Além disto,

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{\pi^2}{8} \left( \sec\left(\frac{\pi z}{2}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi z}{2}\right) + \sec^2\left(\frac{\pi z}{2}\right) \right) = 0, \quad (2.10)$$

pois fazendo  $z = x + iy$  e calculando a norma na equação acima obtemos

$$\left| \sec^2\left(\frac{\pi z}{2}\right) \left( \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) + 1 \right) \right| = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \operatorname{senh}^2\left(\frac{\pi y}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cosh\left(\frac{\pi y}{2}\right) + 1}}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \operatorname{senh}^2\left(\frac{\pi y}{2}\right)}.$$

Como  $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left| \operatorname{senh}\left(\frac{\pi y}{2}\right) \right| = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left| \cosh\left(\frac{\pi y}{2}\right) \right| = \infty$ , após alguns cálculos, temos a equação (2.10).

Provamos assim que,  $H'(z)$  é limitada para  $0 \leq x \leq 4$  e  $|y| \geq 10$ . Como  $H'$  é contínua no compacto  $0 \leq x \leq 4$  e  $|y| \leq 10$ , portanto limitada, concluímos que  $H'$  é limitada na faixa  $0 \leq x \leq 4$ . Como ela é periódica obtemos que  $H'$  é limitada

em  $\mathbb{C}$ . Assim, de acordo com o teorema de Liouville concluimos que  $H'$  é constante, e, de acordo com (2.9) e (2.10), obtemos que  $H'(z) = 0$ . Portanto,  $H(z)$  é constante em  $z \in \mathbb{C}$ . Mas,  $H(0) = 0$  e, assim,  $G_1(z) = G_2(z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

Como o desenvolvimento em série de Taylor das funções seno e cosseno possuem coeficientes que são números racionais, a relação  $\operatorname{sen} z = \operatorname{tg} z \cos z$  implica o mesmo para os coeficientes da tangente. O raciocínio análogo mostra que a série da secante também possuem coeficientes racionais. Assim fazendo o desenvolvimento em série de Taylor para as funções  $\sec\left(\frac{\pi z}{2}\right)$  e  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi z}{2}\right)$  para obtermos a série de Taylor para  $G(z)$  obtemos que,

$$\sec\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi z}{2}\right)^2 + \frac{5}{24}\left(\frac{\pi z}{2}\right)^4 + \frac{61}{720}\left(\frac{\pi z}{2}\right)^6 + \dots; |z| < \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi z}{2}\right) = \frac{\pi z}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi z}{2}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{\pi z}{2}\right)^5 + \frac{17}{315}\left(\frac{\pi z}{2}\right)^7 + \dots; |z| < \frac{\pi}{2},$$

Substituindo em  $G(z)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{\pi z}{4} \left( \sec\left(\frac{\pi z}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi z}{2}\right) \right) \\ &= \frac{\pi z}{4} + \frac{(\pi z)^2}{2^3} + \frac{1}{2} \frac{(\pi z)^3}{2^4} + \frac{1}{3} \frac{(\pi z)^4}{2^5} + \frac{5}{24} \frac{(\pi z)^5}{2^6} + \dots; |z| < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Obtemos assim, duas expressões para a série de Taylor de  $G(z)$  em torno de  $z = 0$  e dentro de  $(-1, 1)$ , uma dada acima e a outra dada em (2.5). Como a série de Taylor é única obtemos que as expansões em série de Taylor devem ser iguais, e assim  $S(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)^n}$  é um múltiplo racional de  $\pi^n$ .

□

### 3 A MUDANÇA DE VARIÁVEIS DE E. CALABI

Neste capítulo, relacionamos  $S(n)$  e o volume de uma certa região em  $\mathbb{R}^n$  usando apenas a fórmula de mudança de variáveis de integrais múltiplas, sugerida por E. Calabi.

Inicialmente mostraremos que tal relação é válida para  $n = 2$ , isto é, provaremos que  $S(2)$  corresponde a área do triângulo retângulo isósceles dado por  $\left\{ (u, v) \in \mathbb{R} : u, v > 0, u + v < \frac{\pi}{2} \right\}$ .

Vimos anteriormente que, para  $n$  par

$$S(n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \zeta(n) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^n}.$$

Para  $n = 2$ , temos que

$$S(2) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Vamos escrever cada termo da série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$  como  $\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{2k} dx dy$ , pois, de fato, resolvendo a integral abaixo, temos que

$$\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{2k} dx dy = \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Logo podemos reescrever a série da seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{2k} dx dy,$$

ou seja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^{2k} dx dy. \quad (3.1)$$

Utilizando a série geométrica obtemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (xy)^{2k} = \frac{1}{1 - (xy)^2}, \quad 0 \leq x, y < 1.$$



Voltando à equação (3.1) temos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-(xy)^2} dx dy.$$

Note que em  $x = y = 1$  a série não converge, pois

$$\sum_{k=0}^{\infty} (xy)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty.$$

Definindo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1-(xy)^2} & \text{se } 0 \leq x, y < 1 \\ 0 & \text{se } x = y = 1, \end{cases}$$

segue que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-(xy)^2} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy. \quad (3.2)$$

Salientamos que o ponto  $(1, 1)$  tem medida zero e assim não interfere no valor da integral.

Pelo Teorema da Mudança de Variável temos que:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int \int_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) J du dv.$$

A mudança de variáveis de Calabi é dada por:

$$x = \frac{\text{sen } u}{\cos v} \quad y = \frac{\text{sen } v}{\cos u} \quad (3.3)$$

Assim,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante da matriz jacobiana  $J$  temos:

$$J = 1 - \frac{(\text{sen } v)^2 (\text{sen } u)^2}{(\cos u)^2 (\cos v)^2}.$$

Voltando em (3.2) e aplicando a mudança de variáveis, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-(xy)^2} dx dy &= \int \int_{R'} \frac{\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 v \operatorname{sen}^2 u}{\cos^2 u \cos^2 v}\right)}{1 - \left(\frac{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v}{\cos v \cos u}\right)^2} du dv \\ &= \int \int_{R'} 1 du dv. \end{aligned}$$

Assim o integrando  $\frac{1}{1-(xy)^2} dx dy$  da fórmula (3.2), transforma-se em  $1 du dv$ , e a região de integração  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < 1\}$  corresponde ao triângulo retângulo isósceles  $R' = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u, v > 0, u + v < \frac{\pi}{2}\right\}$ , como podemos verificar facilmente.

Agora, calculando a área do triângulo retângulo isósceles dado por  $\left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u, v > 0, u + v < \frac{\pi}{2}\right\}$ , temos que sua área é igual a  $\frac{\pi^2}{8}$ .

$$\text{Assim, } S(2) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-(xy)^2} dx dy = \int \int_{R'} 1 du dv = \frac{\pi^2}{8}.$$

Concluimos então que, para  $n = 2$  a correspondência feita anteriormente é válida.

Mostraremos que esta correspondência também vale para  $n = 3, 4, 5, \dots$

Em primeiro lugar vamos definir o politopo  $\Pi_n$  e listar algumas propriedades.

**Definição 3.1.** *O politopo  $\Pi_n$  é definido como a região em  $\mathbb{R}^n$  dada por:*

$$\Pi_n = \left\{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n : u_i > 0, u_i + u_{i+1} < \frac{\pi}{2}, (1 \leq i \leq n)\right\} \quad (3.4)$$

onde os  $u_i$  são indexados ciclicamente módulo  $n$ , assim  $u_{n+1} = u_1$ .

Em seguida veremos algumas definições e observações relativas ao politopo  $\Pi_n$  que serão utilizadas na demonstração do Corolário (3.1) adiante.

**Definição 3.2.** *(FACES DO POLITOPO)*

Uma face do politopo  $\Pi_n$  é um conjunto de pontos dado pela interseção do fecho de

$\Pi_n$  com um dos hiperplanos da forma:  $u_i = 0$ , com  $1 \leq i \leq n$  ou  $u_i + u_{i+1} = \frac{\pi}{2}$ ,  $1 \leq i \leq n-1$  ou  $u_1 + u_n = \frac{\pi}{2}$ .

**Definição 3.3.** (*Vértices do politopo*)

Um vértice do politopo  $\Pi_n$  é um ponto em  $\mathbb{R}^n$  que é comum a duas ou mais faces sem haver outros pontos em comum a estas faces.

**Definição 3.4.** (*Simplexo*)

Um simplexo  $K$  dimensional em  $\mathbb{R}^n$  com  $1 \leq k \leq n$  é um poliedro convexo com  $k+1$  vértices linearmente independentes.

**Observação 3.1.** Um simplexo é a generalização para  $\mathbb{R}^n$  de triângulos e tetraedros de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

Os seguintes resultados, cuja demonstração pode ser vista em [5], estabelecem algumas relações entre simplexos e politopos.

**Proposição 3.1.** Qualquer politopo pode ser particionado em simplexos.

**Observação 3.2.** Tal resultado é a generalização natural de que qualquer polígono pode ser particionado em triângulos e um poliedro pode ser particionado em tetraedros.

**Proposição 3.2.** O volume de um simplexo  $S$  cujos vértices são:  $v_0, v_1, \dots, v_n$  é

$$\text{Vol}(S) = \frac{\sqrt{|\det W \cdot \det W^t|}}{n!},$$

onde  $W$  é a matriz cujas linhas são:  $w_1 = v_1 - v_0$ ,  $w_2 = v_2 - v_0$ ,  $\dots$ ,  $w_n = v_n - v_0$  e  $W^t$  é a matriz transposta.

A transformação de Calabi em  $n$ -dimensões é dada por

$$x_1 = \frac{\text{sen } u_1}{\text{cos } u_2}, \quad x_2 = \frac{\text{sen } u_2}{\text{cos } u_3}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{\text{sen } u_{n-1}}{\text{cos } u_n}, \quad x_n = \frac{\text{sen } u_n}{\text{cos } u_1}. \quad (3.5)$$

Algumas de suas propriedades são estabelecidas nos dois lemas abaixo:

**Lema 3.1.** *O determinante jacobiano da transformação dada em (3.5) é*

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} = 1 \pm (x_1 x_2 \dots x_n)^2,$$

*usamos o sinal  $-$  quando  $n$  é par.*

**Demonstração:**

As derivadas parciais  $\frac{\partial(x_i)}{\partial(u_j)}$  são dadas por:

$$\frac{\partial(x_i)}{\partial(u_j)} = \begin{cases} \frac{\cos u_i}{\cos u_{i+1}} & \text{se } i = j \\ \frac{\sen u_i \sen u_{i+1}}{\cos^2 u_{i+1}} & \text{se } j = i + 1 \pmod n \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

A matriz jacobiana (A) é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_{n-1}}{\partial u_1} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}.$$

Substituindo os elementos da matriz  $A$  pelos valores numéricos correspondentes, temos:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\cos u_1}{\cos u_2} & \frac{\text{sen}u_1 \cdot \text{sen}u_2}{\cos^2 u_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos u_2}{\cos u_3} & \frac{\text{sen}u_2 \cdot \text{sen}u_3}{\cos^2 u_3} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\cos u_{n-1}}{\cos u_n} & \frac{\text{sen}u_{n-1} \cdot \text{sen}u_n}{\cos^2 u_n} \\ \frac{\text{sen}u_n \cdot \text{sen}u_1}{\cos^2 u_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\cos u_n}{\cos u_1} \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante da matriz  $A$ , usando o Teorema de Laplace,

$$\det A = 1 + (-1)^{n+1} \times \frac{\text{sen}^2 u_1}{\cos^2 u_2} \times \frac{\text{sen}^2 u_2}{\cos^2 u_3} \times \cdots \times \frac{\text{sen}^2 u_n}{\cos^2 u_1},$$

logo,

$$\det A = 1 + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^n x_i^2.$$

□

**Lema 3.2.** *A transformação dada em (3.5) leva bijetivamente o politopo  $\Pi_n$  no cubo unitário aberto  $(0, 1)^n$ .*

**Demonstração:**

Seja  $u = (u_1, \dots, u_n)$  no politopo  $\Pi_n$ , logo os  $u_i$  são positivos e  $u_i + u_{i+1} < \frac{\pi}{2}$ ,  $1 \leq i \leq n-1$  e  $u_1 + u_n < \frac{\pi}{2}$  então

$$\begin{aligned} 0 < x_i &= \frac{\text{sen } u_i}{\cos u_{i+1}} < \frac{\text{sen} \left( \frac{\pi}{2} - u_{i+1} \right)}{\cos u_{i+1}} \\ &= \frac{\text{sen} \frac{\pi}{2} \cos u_{i+1} - \text{sen} u_{i+1} \cos \frac{\pi}{2}}{\cos u_{i+1}} = \frac{\cos u_{i+1}}{\cos u_{i+1}} = 1. \end{aligned}$$

Logo,  $0 < x_i < 1$ . Assim,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  está no cubo unitário aberto.

Nos resta mostrar que dado arbitrariamente  $x$  no cubo unitário aberto, existe uma única  $n$ -upla  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  em  $\Pi_n$  que satisfaz (3.5).

Por (3.5) temos:

$$x_1 = \frac{\text{sen } u_1}{\cos u_2}, \quad x_2 = \frac{\text{sen } u_2}{\cos u_3}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{\text{sen } u_{n-1}}{\cos u_n}, \quad x_n = \frac{\text{sen } u_n}{\cos u_1}.$$

$$\text{Como } x_1 = \frac{\text{sen } u_1}{\cos u_2} \Rightarrow x_1 \cos u_2 = \text{sen } u_1 \Rightarrow u_1 = \arcsen(x_1 \cos u_2).$$

Logo, reescrevendo a equação (3.5),

$$u_1 = f_{x_1}(u_2), \quad u_2 = f_{x_2}(u_3), \quad \dots, \quad u_{n-1} = f_{x_{n-1}}(u_n), \quad u_n = f_{x_n}(u_1),$$

onde  $f_x(u) = \arcsen(x \cos u)$ , com  $0 < x < 1$ .

A função acima vai do intervalo  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  em si mesmo, pois para  $f_x(u) = \arcsen(x \cos u)$ ,

$$0 < u < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos u < 1 \quad e \quad 0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x \cos u < 1.$$

$$\text{Assim, } 0 < \arcsen(x \cos u) < \frac{\pi}{2}.$$

Além disso, como  $f_x(u) = \arcsen(x \cos u)$ , temos que

$$\frac{\partial}{\partial u} f_x(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 u}} (-x \text{sen } u).$$

Então,

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} f_x(u) \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 u}} (-x \text{sen } u) \right| = \frac{x \text{sen } u}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 u}}.$$

Mas,

$$\frac{x \text{sen } u}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 u}} < \frac{x \text{sen } u}{\sqrt{x^2 - x^2 \cos^2 u}} = \frac{x \text{sen } u}{x \sqrt{1 - \cos^2 u}} = \frac{x \text{sen } u}{x \text{sen } u} = 1.$$

Portanto,

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} f_x(u) \right| < 1, \quad \forall u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Para  $u = 0$  e  $u = \frac{\pi}{2}$  temos:

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} f_x(0) \right| = \left| \frac{-x \operatorname{sen} 0}{\sqrt{1-x^2} \cos^2 0} \right| = \left| \frac{-x \cdot 0}{\sqrt{1-x^2}} \right| = 0 < 1$$

e

$$\left| \frac{\partial}{\partial u} f_x\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| = \left| \frac{-x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{1-x^2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} \right| = \left| \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right| = x < 1.$$

Assim,  $\left| \frac{\partial}{\partial u} f_x(u) \right| < 1, \forall u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Logo cada  $f_{x_i}$  é contração no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , pois para  $u_1, u_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  temos:

$$f_x(u_1) - f_x(u_2) = \frac{\partial}{\partial u} f_x(\xi)(u_1 - u_2).$$

Assim,

$$\begin{aligned} |f_x(u_1) - f_x(u_2)| &= \left| \frac{\partial}{\partial u} f_x(\xi) \right| |u_1 - u_2| \\ &\leq M |u_1 - u_2|, \end{aligned}$$

onde  $M = \max_{(\xi \in [0, \frac{\pi}{2}])} \left| \frac{\partial}{\partial u} f_x(\xi) \right| < 1$ .

Pelo teorema do ponto fixo para contrações (teorema A.2 do apêndice), temos que cada  $f_{x_i}$  que é uma contração, e portanto, possui um único ponto fixo no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Este ponto não pode ser um ponto final do intervalo, visto que

$$f_x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{arcsen}\left(x \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

e

$$f_x(0) = \operatorname{arcsen}(x \cos 0) = \operatorname{arcsen} x \neq 0, \text{ pois } x \in (0, 1).$$

Mostraremos agora que a composta de contrações também é uma contração.

Para o caso de duas contrações  $f$  e  $g$ , com  $u, v \in \mathbb{R}$ , temos:

$$|f(u) - g(v)| < |u - v| \quad \text{e} \quad |g(u) - g(v)| < |u - v|.$$

Mas,

$$|(f \circ g)(u) - (f \circ g)(v)| = |f(g(u)) - f(g(v))| < |g(u) - g(v)| < |u - v|.$$

Portanto,  $f \circ g$  também é contração.

Por indução, verificamos que a composta de  $n$  contrações também é contração.

Então, dado  $x_1, \dots, x_n$  temos que existe um único  $t$  que é ponto fixo da função  $f_{x_1} \circ \dots \circ f_{x_n}$ , isto é,  $(f_{x_1} \circ \dots \circ f_{x_n})(t) = t$ .

□

O seguinte resultado relaciona o volume do politopo  $\Pi_n$  com a soma  $S(n)$ .

**Teorema 3.1.** *O volume do politopo  $\Pi_n$  é  $S(n)$  para todo  $n \geq 2$ .*

**Demonstração:**

Aplicando a transformação de Calabi (3.5) na integral definindo o volume de  $\Pi_n$  temos

$$Vol(\Pi_n) = \int \dots \int_{\Pi_n} 1 du_1 \dots du_n = \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{1}{1 \pm (x_1 \dots x_n)^2} dx_1 \dots dx_n.$$

Mas,

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{1}{1 \pm (x_1 \dots x_n)^2} dx_1 \dots dx_n = \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{nk} (x_1 \dots x_n)^{2k} dx_1 \dots dx_n. \quad (3.6)$$

Devemos verificar que  $\frac{1}{1 \pm (x_1 \dots x_n)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{nk} (x_1 \dots x_n)^{2k}$ .

i) Para  $n$  par

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{nk} (x_1 \dots x_n)^{2k} = 1 + (x_1 \dots x_n)^2 + (x_1 \dots x_n)^4 + (x_1 \dots x_n)^6 \dots, \text{ que é uma}$$

PG de razão  $(x_1 \dots x_n)^2$  cuja soma é  $\frac{1}{1 - (x_1 \dots x_n)^2}$ .

ii) Para  $n$  ímpar



$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{nk} (x_1 \dots x_n)^{2k} = 1 + (-1)^n (x_1 \dots x_n)^2 + (-1)^{2n} (x_1 \dots x_n)^4 + \dots$ , que é uma PG de razão  $(-1)^n (x_1 \dots x_n)^2$ , cuja soma é  $\frac{1}{1 + (x_1 \dots x_n)^2}$ .

Logo,  $\frac{1}{1 \pm (x_1 \dots x_n)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{nk} (x_1 \dots x_n)^{2k}$  e a igualdade (3.6) é verdadeira.

Como a série converge absolutamente, trocando a soma pela integral múltipla em (3.6), obtemos:

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{1}{1 \pm (x_1 \dots x_n)^2} dx_1 \dots dx_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{nk} \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1 \dots x_n)^{2k} dx_1 \dots dx_n.$$

Como

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{nk} \int_0^1 \dots \int_0^1 (x_1 \dots x_n)^{2k} dx_1 \dots dx_n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{nk} \int_0^1 \dots \int_0^1 \left[ \frac{x_1^{2k+1}}{2k+1} (x_2 \dots x_n)^{2k} \right]_{x_1=0}^{x_1=1} dx_2 \dots dx_n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{nk} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{1}{2k+1} (x_2 \dots x_n)^{2k} dx_2 \dots dx_n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{nk} \int_0^1 \dots \int_0^1 \left[ \frac{x_2^{2k+1}}{(2k+1)^2} (x_3 \dots x_n)^{2k} \right]_{x_2=0}^{x_2=1} dx_3 \dots dx_n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{nk} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{1}{(2k+1)^2} (x_3 \dots x_n)^{2k} dx_3 \dots dx_n \\ &= \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{nk} \frac{1}{(2k+1)^n} = S(n) \end{aligned}$$

Portanto,  $Vol(\Pi_n) = S(n)$ .

□

**Corolário 3.1.**  $S(n)$  é um múltiplo racional de  $\pi^n$  para todo  $n \geq 2$ .

**Demonstração:**

Inicialmente vamos mostrar que o volume de  $\Pi_n$  é  $\left(\frac{\pi}{2}\right)^n$  vezes o volume do politopo

$\Pi'_n = \left(\frac{2}{\pi}\right) \Pi_n = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : v_i > 0, v_i + v_{i+1} < 1, (1 \leq i \leq n)\}$  e  $v_{n+1} = v_1$ .

Sabemos que:

$\Pi_n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n : u_i > 0, u_i + u_{i+1} < \frac{\pi}{2}, (1 \leq i \leq n)\}$  e  $u_{n+1} = u_1$ .

Assim,

$$\begin{aligned} Vol(\Pi'_n) &= \int_{\Pi'_n} 1 \, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\Pi_n} 1 \left(\frac{2}{\pi}\right)^n dy_1 \cdots dy_n \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_{\Pi_n} 1 \, dy_1 \cdots dy_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n Vol(\Pi_n) \end{aligned}$$

Logo,  $Vol(\Pi_n) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n Vol(\Pi'_n)$

Mostraremos que  $Vol(\Pi'_n)$  é um número racional.

Para tanto, primeiramente devemos mostrar que os vértices de  $\Pi'_n$  são pontos de  $\mathbb{R}^n$  com coordenadas racionais.

Para vermos isto, utilizamos a definição (3.3) que nos diz que um vértice de  $\Pi'_n$  será um ponto que está em  $\overline{\Pi'_n}$  e que é solução única de um sistema formado por  $n$  equações do seguinte grupo:

$$x_1 = 0, \dots, x_n = 0; x_1 + x_2 = 1, x_2 + x_3 = 1, \dots, x_{n-1} + x_n = 1; x_1 + x_n = 1.$$

Assim, por exemplo,  $(0, 0, \dots, 0)$  é um vértice de  $\Pi'_n$ , pois é a solução única do sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0. \end{cases}$$

Observe que independentemente das equações tomadas todas tem incógnitas com coeficientes racionais (0 ou 1) assim como o termo independente.

Utilizando o método de escalonamento para resolvermos o dito sistema podemos ver que a solução (quando existir) será sempre um ponto com coordenadas racionais, pois as operações que executamos na matriz estendida (matriz dos coeficientes mais a matriz dos termos independentes) serão trocas de linhas e multiplicação de uma linha por um número racional mais outra linha.

Em seguida, utilizamos a proposição (3.2) para calcularmos o volume de um simplexo contido em  $\Pi'_n$  que tenha vértices em comum com  $\Pi'_n$ . Neste caso  $W$  será uma matriz  $n \times n$ . Assim como  $\det W = \det W^t$ . Logo, temos que

$$\text{Vol}(S) = \frac{\sqrt{|\det W|^2}}{n!} = \frac{|\det W|}{n!}.$$

Mas,  $\det W$  será sempre um número racional, pois  $W$  é uma matriz com entradas racionais.

Finalmente, de acordo com a proposição (3.1) o volume de  $\Pi'_n$  será a soma do volume de certos simplexos contidos em  $\Pi'_n$  e todos com volume racional. Assim,  $\text{Vol} \Pi'_n$  é um número racional.

□

## 4 OPERADORES INTEGRAIS LINEARES

Neste capítulo, usaremos a teoria de operadores compactos para calcular  $S(n)$ , ou equivalentemente o  $Vol(\Pi_n)$ .

Para isto definimos  $k_1(u, v)$ , com  $(u, v)$  em  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , como a função característica do triângulo retângulo isósceles  $\left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u, v > 0, u + v < \frac{\pi}{2}\right\}$ , isto é,

$$k_1(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } u + v < \frac{\pi}{2}, u > 0, v > 0 \\ 0 & \text{outra possibilidade.} \end{cases}$$

O volume do politopo  $\Pi_n$  pode ser reescrito da seguinte forma:

$$Vol(\Pi_n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \prod_{i=1}^n k_1(u_i, u_{i+1}) du_1 du_2 \dots du_n, \quad (4.1)$$

onde  $u_{n+1} = u_1$ .

**Definição 4.1.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$  defina por recorrência

$$k_n(u, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) k_{n-1}(u_1, v) du_1 \quad (4.2)$$

O volume  $V_n$  do politopo  $\Pi_n$  está relacionado com  $k_n$  através da seguinte proposição:

**Proposição 4.1.** Para  $u, v \in \mathbb{R}$  tem-se

$$a) k_n(u, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) \prod_{i=1}^{n-2} k_1(u_i, u_{i+1}) k_1(u_{n-1}, v) du_1 du_2 \dots du_{n-1},$$

com  $n \geq 3$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$$b) Vol(\Pi_n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_n(u, u) du, \quad (4.3)$$

com  $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:**

a) Vamos provar usando o Princípio da Indução em  $n$ .

i) Para  $n = 3$ :

Por (4.2) temos que:

$$k_3(u, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) k_2(u_1, v) du_1.$$

Como  $k_2(u, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) k_1(u_1, v) du_1$ , fazendo a mudança de variáveis de  $u_1$  por  $u_2$ , temos:

$$k_2(u, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_2) k_1(u_2, v) du_2.$$

Assim,  $k_2(u_1, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u_1, u_2) k_1(u_2, v) du_2$ .

Logo,

$$k_3(u, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u_1, u_2) k_1(u_2, v) du_2 \right] du_1$$

$$k_3(u, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) k_1(u_1, u_2) k_1(u_2, v) du_2 du_1$$

$$k_3(u, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) k_1(u_1, u_2) k_1(u_2, v) du_1 du_2.$$

Portanto,

$$k_3(u, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) \prod_{i=1}^1 k_1(u_i, u_{i+1}) k_1(u_2, v) du_1 du_2.$$

Assim, para  $n = 3$ , temos a igualdade requerida.

ii) Supondo que a igualdade vale para  $n$  mostraremos que vale para  $n + 1$ .

Por hipótese,

$$k_n(u, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) \prod_{i=1}^{n-2} k_1(u_i, u_{i+1}) k_1(u_{n-1}, v) du_1 du_2 \dots du_{n-1}.$$

Por (4.2) temos:

$$k_{n+1}(u, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) k_n(u_1, v) du_1.$$

Como,

$$k_n(u, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) \prod_{i=1}^{n-2} k_1(u_i, u_{i+1}) k_1(u_{n-1}, v) du_1 du_2 \dots du_{n-1},$$

fazendo uma mudança de variável de  $(u_1 \dots u_{n-1})$  para  $(u_2 \dots u_n)$  e calculando  $k_n(u_1, v)$  obtemos:

$$k_n(u_1, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u_1, u_2) \prod_{i=2}^{n-1} k_1(u_i, u_{i+1}) k_1(u_n, v) du_2 \dots du_n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} k_{n+1}(u, v) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u_1, u_2) \prod_{i=2}^{n-1} k_1(u_i, u_{i+1}) k_1(u_n, v) du_2 \dots du_n \right] du_1 \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) k_1(u_1, u_2) \prod_{i=2}^{n-1} k_1(u_i, u_{i+1}) k_1(u_n, v) du_2 \dots du_n du_1. \end{aligned}$$

Mas,  $k_1(u_1, u_2) \prod_{i=2}^{n-1} k_1(u_i, u_{i+1}) = \prod_{i=1}^{n-1} k_1(u_i, u_{i+1})$ . Logo,

$$k_{n+1}(u, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) \prod_{i=1}^{n-1} k_1(u_i, u_{i+1}) k_1(u_n, v) du_1 du_2 \dots du_n.$$

□

b) A demonstração é feita utilizando-se o item (a).

i) Para  $n = 2$ .

Pela equação (4.1) temos:

$$\begin{aligned}
Vol(\Pi_2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \prod_{i=1}^2 k_1(u_i, u_{i+1}) du_1 du_2 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u_1, u_2) k_1(u_2, u_3) du_1 du_2 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u_1, u_2) k_1(u_2, u_1) du_1 du_2,
\end{aligned}$$

pois  $u_3 = u_1$ .

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} k_2(u, u) du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) k_1(u_1, u) du_1 \right) du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) k_1(u_1, u) du_1 du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) k_1(u_1, u) du du_1 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u_1, u_2) k_1(u_2, u_1) du_1 du_2.
\end{aligned}$$

Logo, para  $n = 2$ , temos a igualdade requerida.

ii) Para  $n \geq 3$ , devemos mostrar que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} k_n(u, u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \prod_{i=1}^n k_1(u_i, u_{i+1}) du_1 du_2 \dots du_n.$$

Pela proposição 4.1 a) fazendo  $v = u$  temos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} k_n(u, u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, u_1) \prod_{i=1}^{n-2} k_1(u_i, u_{i+1}) k_1(u_{n-1}, u) du_1 du_2 \dots du_{n-1}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
k_1(u, u_1) \prod_{i=1}^{n-2} k_1(u_i, u_{i+1}) k_1(u_{n-1}, u) &= k_1(u, u_1) k_1(u_1, u_2) \dots k_1(u_{n-2}, u_{n-1}) k_1(u_{n-1}, u) \\
&= \prod_{i=1}^n k_1(u_i, u_{i+1}).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} k_n(u, u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \prod_{i=1}^n k_1(u_i, u_{i+1}) du_1 du_2 \dots du_n .$$

□

Agora vamos interpretar  $k_n$  na integral (4.3) em termos de operadores integrais lineares em  $L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Seja  $T$  o operador linear em  $L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , com núcleo  $k_1$ , onde

$$L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \left\{ f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} : \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

$$\begin{aligned} T : L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ f &\rightarrow T(f), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} T(f) : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow (Tf)(v), \end{aligned}$$

$$\text{com } (Tf)(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) k_1(u, v) du.$$

Afirmação:  $Tf \in L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Para tanto devemos mostrar que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |Tf(v)|^2 dv < \infty$ .



Nesta demonstração usaremos a Desigualdade de Cauchy-Schwartz (proposição B.1 do apêndice).

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} |Tf(v)|^2 dv &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) k_1(u, v) du \right|^2 dv \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(u)| k_1(u, v) du \right)^2 dv \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(u)|^2 du \right) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} |k_1(u, v)|^2 du \right) \right] dv \\
&< \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(u)|^2 du \\
&< \infty .
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que  $Tf \in L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Lembrando a definição de  $k_1(u, v)$  feita no início deste capítulo:

$$k_1(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } u + v < \frac{\pi}{2}, u, v > 0 \\ 0 & \text{em outro caso,} \end{cases}$$

que pode ser reescrita como:

$$k_1(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < u < \frac{\pi}{2} - v, v > 0 \\ 0 & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Assim, podemos reescrever  $Tf$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(Tf)(v) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) k_1(u, v) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u) k_1(u, v) du + \int_{\frac{\pi}{2}-v}^{\frac{\pi}{2}} f(u) k_1(u, v) du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u) \cdot 1 du + \int_{\frac{\pi}{2}-v}^{\frac{\pi}{2}} f(u) \cdot 0 du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u) du .
\end{aligned} \tag{4.4}$$

**Proposição 4.2.** *Utilizando a definição (4.1), tem-se*

$$(T^n f)(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) k_n(u, v) du, \quad (4.5)$$

onde  $T^n = T \circ T \circ T \circ \dots \circ T$ ,  $n$  vezes .

**Demonstração:**

Vamos provar (4.5), usando o Princípio da Indução em  $n$ .

i) Para  $n = 1$ , temos que

$$(Tf)(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) k_1(u, v) du ,$$

que é a própria definição de  $(Tf)(v)$ .

ii) Para  $n = 2$  também vale.

Note que

$$\begin{aligned} T^2 : L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ f &\rightarrow (T^2 f) = T(Tf), \end{aligned}$$

onde  $(T^2 f)(v) = (T(Tf))(v) = T((Tf)(v))$ .

Mas,  $(Tf)(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) k_1(u, v) du$ .

Então:

$$\begin{aligned} T((Tf)(v)) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (Tf)(u) k_1(u, v) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) k_1(t, u) dt \right) k_1(u, v) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) k_1(t, u) k_1(u, v) dt du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) k_1(t, u) k_1(u, v) du dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(t, u) k_1(u, v) du \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) k_2(t, v) dt, \end{aligned}$$

pois pela equação (4.2) temos:

$$k_2(t, v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(t, u) k_1(u, v) du.$$

Assim, concluímos que  $k_2$  é o núcleo de  $T^2$ .

iii) Supondo que (4.5) vale para  $n$  mostraremos que vale para  $n + 1$ .

Por hipótese,

$$(T^n f)(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) k_n(u, v) du.$$

Devemos mostrar que:

$$(T^{n+1} f)(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) k_{n+1}(u, v) du.$$

De fato,

$$\begin{aligned} (T^{n+1} f)(v) &= (T(T^n f))(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (T^n f)(u) k_1(u, v) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) k_n(t, u) dt \right) k_1(u, v) du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) k_1(u, v) k_n(t, u) dt du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) k_1(u, v) k_n(t, u) du dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(u, v) k_n(t, u) du \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(v, u) k_n(u, t) du \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) k_{n+1}(v, t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) k_{n+1}(t, v) dt. \end{aligned}$$

□

O seguinte teorema dá uma decomposição espectral do operador  $T$ , e também de suas potências  $T^n$ .

**Teorema 4.1.** *O operador  $T$  é compacto e auto-adjunto em  $L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Seus autovalores cada um com multiplicidade um, são  $\frac{1}{4k+1}$  com  $k \in \mathbb{Z}$  e as correspondentes autofunções ortogonais são  $\Phi_k(u) = \cos((4k+1)u)$ .*

**Demonstração:**

Lembrando que

$$\begin{aligned} T(f) : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow (Tf)(v), \end{aligned}$$

e também

$$\langle Tu, v \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} T(u)(x) \overline{v(x)} dx.$$

Vamos mostrar que  $T$  é auto-adjunto, isto é,  $\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle Tu, v \rangle &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} T(u)(x) \overline{v(x)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(y) k_1(y, x) dy \right) \overline{v(x)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(y) \overline{v(x)} k_1(y, x) dy dx, \end{aligned}$$

fazendo a mudança de variáveis  $y$  por  $t$  e  $x$  por  $s$ , temos:

$$\langle Tu, v \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t) \overline{v(s)} k_1(t, s) dt ds. \quad (4.6)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle u, Tv \rangle &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x) \overline{T(v)(x)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x) \overline{\left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(y) k_1(y, x) dy \right)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x) \overline{v(y)} k_1(y, x) dy dx, \end{aligned}$$

(4.7)

fazendo a mudança de variáveis  $x$  por  $t$  e  $y$  por  $s$ , temos:

$$\langle u, Tv \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t) \overline{v(s)} k_1(s, t) dt ds.$$

Como  $k_1$  é simétrico, temos que  $k_1(t, s) = k_1(s, t)$ . Logo as integrais em (4.6) e (4.7) são iguais e assim

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle.$$

Portanto,  $T$  é auto-adjunto.

Vamos calcular os autovalores e as autofunções de  $T$ .

Seja  $\lambda$  um autovalor de  $T$  e  $f$  a correspondente autofunção. Logo,

$$\begin{aligned} T(f) &= \lambda f \\ T(f)(v) &= \lambda f(v), \quad \forall v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Por (4.4), temos que

$$T(f)(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u) du.$$

Logo devemos ter

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u) du = \lambda f(v). \quad (4.8)$$

Se  $\lambda = 0$  então  $\int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u) du = 0$ ;  $\forall v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Como  $f \in L^1\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , de acordo com o Teorema A.4 do Apêndice, a função

$$F(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(x) dx$$

é absolutamente contínua e derivável com  $F'(v) = f\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ . Mas, por hipótese  $F(v) = F'(v) = 0$  e, assim,  $f\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$  quase sempre.

Portanto,  $\lambda$  é diferente de zero. Daí podemos dividir toda a equação (4.8) por  $\lambda$ .

Assim,

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u) \, du = f(v).$$

Para derivar a equação acima, em  $v$ , devemos verificar se  $f$  é contínua e derivável.

a) Devemos mostrar que  $f$  é contínua, ou seja,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $\forall v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$|v - v_0| < \delta \Rightarrow |f(v) - f(v_0)| < \epsilon.$$

De fato,

$$\begin{aligned} |f(v) - f(v_0)| &= \left| \frac{1}{\lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u) \, du - \frac{1}{\lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}-v_0} f(u) \, du \right| \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \left| \int_{\frac{\pi}{2}-v_0}^{\frac{\pi}{2}-v} f(u) \, du \right| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \int_{\frac{\pi}{2}-v_0}^{\frac{\pi}{2}-v} |f(u)| \, du \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \left( \int_{\frac{\pi}{2}-v_0}^{\frac{\pi}{2}-v} 1^2 \, du \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\frac{\pi}{2}-v_0}^{\frac{\pi}{2}-v} |f(u)|^2 \, du \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\|f\|_2}{|\lambda|} |v - v_0|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Tomando  $\delta = \left(\frac{|\lambda| \epsilon}{\|f\|_2}\right)^2$ , temos  $|v - v_0| < \delta \Rightarrow |f(v) - f(v_0)| < \epsilon$ .

Logo  $f$  é contínua.

b) Devemos mostrar que  $f$  é derivável. Para tanto, basta utilizarmos o teorema A.5 do apêndice, logo concluímos que  $f$  é derivável.

Agora vamos derivar a equação (4.8), que é igual a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u) \, du = \lambda f(v).$$

Seja  $F(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-v} f(u) \, du$ , vamos encontrar  $F'(v)$ .

Tome  $H(v) = \int_0^v h(u) \, du$ , onde  $h(u) = f(u)$  e  $g(v) = \frac{\pi}{2} - v$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 F(v) = H(g(v)) &= \int_0^{g(v)} f(u) \, du, \text{ logo} \\
 F'(v) &= H'(g(v)) g'(v) \\
 &= h(g(v)) (-1) \\
 &= -f\left(\frac{\pi}{2} - v\right).
 \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$f\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = -\lambda f'(v). \quad (4.9)$$

Derivando a equação (4.9), em  $v$  temos:

$$-f'\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = -\lambda f''(v) \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = \lambda f''(v).$$

Mas,

$$f'\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = -\frac{1}{\lambda} f\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - v\right)\right) = -\frac{1}{\lambda} f(v).$$

Logo,  $\lambda^2 f''(v) = -f(v)$ .

Assim temos a seguinte equação:

$$\lambda^2 f''(v) + f(v) = 0,$$

que é uma Equação Diferencial Ordinária, cuja solução geral é

$$f(v) = A \cos\left(\frac{v}{\lambda}\right) + B \sin\left(\frac{v}{\lambda}\right), \text{ com } A \text{ e } B \text{ constantes arbitrárias.}$$

Utilizando (4.8), vamos calcular  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . Note que,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} f(u) \, du = \lambda f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Agora, fazendo  $v = 0$  na equação (4.9), temos  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\lambda f'(0) \Rightarrow f'(0) = 0$ .

Mas,

$$f'(v) = -\frac{A}{\lambda} \sin\left(\frac{v}{\lambda}\right) + \frac{B}{\lambda} \cos\left(\frac{v}{\lambda}\right).$$

Logo,

$$f'(0) = -\frac{A}{\lambda} \operatorname{sen}(0) + \frac{B}{\lambda} \cos(0) = 0 \Rightarrow \frac{B}{\lambda} = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Assim,  $f(v) = A \cos\left(\frac{v}{\lambda}\right)$ . Logo,  $0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = A \cos\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)$ .

Supondo  $A \neq 0$  para evitar a solução nula, então

$$\cos\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Portanto,  $\lambda = \frac{1}{1 + 2k}$ .

Concluimos que  $\lambda$  deve ser o inverso de um inteiro ímpar. Agora  $\lambda$  e  $-\lambda$  podem dar origem a mesma autofunção  $f(v) = \cos\left(\frac{v}{\lambda}\right)$ . Para escolher o sinal de  $\lambda$ , vamos tomar  $v = 0$  na equação (4.8). Assim,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) \, du = \lambda f(0).$$

Mas,

$$f(u) = A \cos\left(\frac{u}{\lambda}\right) \Rightarrow f(u) = A \cos((2k + 1)u) \text{ e } f(0) = A \cos(0) \Rightarrow f(0) = A$$

Logo,  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} A \cos((2k + 1)u) \, du = \lambda A \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2k + 1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(2k + 1)\right) = \frac{(-1)^k}{2k + 1}$ .

Pela seguinte tabela podemos observar melhor o comportamento de  $\lambda$  e de  $f(v)$ .



$K$	$\lambda = 1/(2k + 1)$	$\lambda = (-1)^k/(2k + 1)$	$f(v) = \cos(v/\lambda)$
-4	-1/7	-1/7	$\cos(7v)$
-3	-1/5	1/5	$\cos(5v)$
-2	-1/3	-1/3	$\cos(3v)$
-1	-1	1	$\cos(v)$
0	1	1	$\cos(v)$
1	1/3	-1/3	$\cos(3v)$
2	1/5	1/5	$\cos(5v)$
3	1/7	-1/7	$\cos(7v)$
4	1/9	1/9	$\cos(9v)$ .

Da terceira coluna na tabela acima concluímos que os autovalores são:  $\lambda = 1, -1/3, 1/5, \dots$  e têm sua correspondente autofunção  $f(v) = \cos\left(\frac{v}{\lambda}\right)$  satisfazendo a equação (4.8), para todo  $v$  em  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Pelo teorema A.7 do apêndice temos que  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} (\cos(v), \cos(3v), \cos(5v), \dots)$  formam uma base em  $L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Vamos mostrar que  $T$  é compacto. Para fazer isto, usaremos o teorema A.6 do apêndice.

Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência limitada em  $L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Inicialmente mostraremos que  $T(f_n)$  é limitada, ou seja,  $\|T(f_n)\|_2^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |T(f_n)(x)|^2 dx \leq c$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Mostramos anteriormente que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |(Tf)(v)|^2 dv \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(u)|^2 du.$$

Logo,  $\|T(f_n)\|_2 \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(v)|^2 dv} \leq \frac{\pi}{2} c$ . Assim,  $T(f_n)$  é limitada.

Vamos mostrar que  $T(f_n)$  é equicontínua, ou seja,  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que  $\forall x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  temos que  $|x - y| < \delta \Rightarrow |T f_n(x) - T f_n(y)| < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Mas,

$$\begin{aligned}
|Tf_n(x) - Tf_n(y)| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(u) k_1(u, x) du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(u) k_1(u, y) du \right| \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(u)| |k_1(u, x) - k_1(u, y)| du \\
&\leq \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} |k_1(u, x) - k_1(u, y)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como  $\left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_1$  e

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} |k_1(u, x) - k_1(u, y)|^2 du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} |k_1(u, x) - k_1(u, y)|^2 du \\
&+ \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}-y} |k_1(u, x) - k_1(u, y)|^2 du \\
&+ \int_{\frac{\pi}{2}-y}^{\frac{\pi}{2}} |k_1(u, x) - k_1(u, y)|^2 du \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}-y} 1 du \\
&= x - y = |x - y|, \quad \text{onde } x > y.
\end{aligned}$$

Logo,  $|Tf_n(x) - Tf_n(y)| \leq c_1 \sqrt{|x - y|}$ .

Assim, tomando  $\delta = \frac{\epsilon^2}{c_1^2}$ , temos que para  $|x - y| < \delta \Rightarrow |Tf_n(x) - Tf_n(y)| < \epsilon$ ,

portanto  $T(f_n)$  é equicontínua.

Pelo teorema A.6 do apêndice, temos que  $T(f_n)$  possui uma subsequência que converge uniformemente e, assim, de acordo com a definição D.2 do apêndice,  $T$  é um operador compacto.

□

**Corolário 4.1.** *O operador  $T^n$  é compacto e auto-adjunto em  $L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Os autovalores, cada um com multiplicidade um são  $\frac{1}{(4k+1)^n}$ , onde  $k \in \mathbb{Z}$  com as correspondentes autofunções ortogonais  $\Phi_k(u) = \cos((4k+1)u)$ .*

**Demonstração:**

Como  $T$  é compacto então  $T^n = T \circ T \circ \dots \circ T$  também é compacto de acordo com a proposição B.2 do apêndice.

Além disso,  $T^n$  é auto-adjunto, pois  $T$  é auto-adjunto. De fato, para  $n = 2$  temos:

$$\langle T^2(u), v \rangle = \langle T(T(u)), v \rangle = \langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, T^2(v) \rangle,$$

analogamente para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Note que, se  $\lambda$  e  $f$  são autovalor e autofunção de  $T$ , respectivamente, isto é,  $T(f) = \lambda f$  então,

$$T^2(f) = T(T(f)) = T(\lambda f) = \lambda T(f) = \lambda^2 f.$$

Assim  $\lambda^2$  e  $f$  são os autovalores e autofunções de  $T^2$ , respectivamente.

Analogamente para  $n \in \mathbb{N}$  fixado.

□

**Corolário 4.2.** *Toda função  $f$  em  $L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  é da forma*

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \cos((4k+1)u)$$

com coeficientes  $f_k$  dados por

$$\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) \cos((4k+1)u) du$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , temos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) (T^n f)(u) du = \frac{\pi}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_k^2}{(4k+1)^n} \quad (4.10)$$

**Demonstração:**

De acordo com o teorema (4.1) e o teorema A.7 do apêndice, as autofunções de  $T$  formam uma base Hilbertiana em  $L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , isto é,  $\forall f \in L^2\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , temos que  $f(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \cos((4k+1)u)$ , onde  $f_k \in \mathbb{R}$ .

O cálculo dos coeficientes  $f_k$  é feito como em Brézis [6]. Para  $i \in \mathbb{Z}$  fixado temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) \cos((4i+1)u) du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \cos((4k+1)u) \cos((4i+1)u) du \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((4k+1)u) \cos((4i+1)u) du \\ &= f_i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((4i+1)u) \cos((4i+1)u) du \\ &= f_i \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Então,  $f_i = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) \cos((4i+1)u) du$ .

Agora mostraremos a igualdade (4.10), onde

$$\begin{aligned} (T^n f)(u) &= T^n \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \cos((4k+1)u) \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T^n(f_k \cos((4k+1)u)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k T^n(\cos((4k+1)u)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_k}{(4k+1)^n} \cos((4k+1)u). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) (T^n f)(u) du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_k}{(4k+1)^n} \cos((4k+1)u) du \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) \frac{f_k}{(4k+1)^n} \cos((4k+1)u) du \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_k}{(4k+1)^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u) \cos((4k+1)u) du \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_k}{(4k+1)^n} f_k \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f_k^2}{(4k+1)^n}.
\end{aligned}$$

□

Finalmente, através da proposição abaixo, estabelecemos uma relação entre o traço de um operador  $T^n$  da classe do traço e o volume do politopo  $\Pi_n$ . Para a definição de operador da classe do traço veja definição *D.5* do apêndice.

**Proposição 4.3.**  *$T^n$  é da classe do traço.*

**Demonstração:**

De acordo com o corolário (4.1) temos:

$$T^n(\Phi_k) = \frac{1}{(4k+1)^n} \Phi_k, \text{ onde } \Phi_k(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos((4k+1)u) \text{ é a autofunção.}$$

De acordo com as definições *D.3* e *D.4* do apêndice temos:

$$tr(|T^n|) = \sum_k \langle \Phi_k, \sqrt{(T^n)^* T^n}(\Phi_k) \rangle.$$

Mas  $T^n$  é autoadjunto, logo  $\sqrt{(T^n)^* T^n} = \sqrt{T^n T^n} = T^n$ .

$$\text{Assim, } \sqrt{(T^n)^* T^n}(\Phi_k) = T^n(\Phi_k) = \frac{1}{(4k+1)^n} \Phi_k.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(|T^n|) &= \sum_k \left\langle \Phi_k, \frac{1}{(4k+1)^n} \Phi_k \right\rangle \\
 &= \sum_k \frac{1}{(4k+1)^n} \|\Phi_k\|^2 \\
 &= \sum_k \frac{1}{(4k+1)^n} \\
 &< \infty
 \end{aligned}$$

□

Logo,  $T^n$  é da classe do traço e além disso  $\text{tr}(|T^n|) = S(n)$ .

Os resultados vistos acima nos permitem apresentar uma nova demonstração do teorema (3.1) que relaciona o volume do politopo  $\Pi_n$  com a soma  $S(n)$ .

O traço de um operador da classe do traço também é a integral do seu núcleo (no nosso caso  $k_n$ ) sobre a diagonal.

De fato, temos que  $Tf(x) = \int k_1(y, x)f(y)dy$ . Como  $T$  é auto-adjunto e compacto,  $T$  tem uma base de autovetores, isto é, podemos representar  $T$  da seguinte forma:

$$Tf(x) = \sum_n \lambda_n \langle f, \Phi_n \rangle \Phi_n(x), \text{ onde a soma converge em } L^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(T) &= \sum_n \langle \Phi_n, T\Phi_n \rangle = \sum_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_n(x) \overline{T\Phi_n(x)} dx \\
 &= \sum_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overline{k_1(y, x)} \Phi_n(y) \Phi_n(x) dy dx
 \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que  $\{\Phi_n(x)\Phi_m(y)\}_{m,n}$  é base ortonormal de  $L^2\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2\right)$ . Logo,  $k_1(y, x) = \sum_{m,n} c_{m,n} \Phi_n(x)\Phi_m(y)$ . Após alguns cálculos, obtemos  $c_{m,n} = 0$

quando  $m \neq n$  e  $c_{n,n} = \lambda_n$ . Substituindo a expressão para  $k_1(y, x)$  na expressão para o traço dada acima, obtemos que

$$\text{tr}(T) = \sum_n \lambda_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_1(x, x) dx.$$

Em nosso caso, utilizando o resultado acima, temos:

$$\text{tr}(|T^n|) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k_n(u, u) du.$$

Assim, de acordo com a proposição 4.1 b) e com a proposição 4.3, temos:

$$\text{Vol}(\Pi_n) = \text{tr}(|T^n|) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(4k+1)^n}.$$

□

## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho estudamos a série  $S(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (4k+1)^{-n}$ . Uma importância desta série está na sua relação com as séries Zeta de Riemann e  $L$  de Dirichlet.

Mostramos que  $S(n)$  é um múltiplo racional de  $\pi^n$  de três maneiras diferentes, isto é, através do uso de funções geradoras com a teoria de variáveis complexas; relacionando  $S(n)$  através da mudança de variáveis de E. Calabi com o volume de um politopo em  $\mathbb{R}^n$  e finalmente utilizando-se da teoria de operadores integrais lineares.

Pensamos que possivelmente tais métodos podem ser utilizados para obtermos conclusões a respeito de outras séries.

Finalmente gostaríamos de ressaltar que a série Zeta de Riemann ainda apresenta problemas em aberto, por exemplo, nenhuma soma da Zeta é conhecida para os valores ímpares.



## APÊNDICE A

**Teorema A.1.** *Seja a série dupla  $\sum (x_{ij})$  absolutamente convergente em  $\mathbb{R}^p$ . Então ambas as séries iteradas  $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_{ij}$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_{ij}$  convergem para o mesmo valor anterior.*

**Demonstração:** Veja BARTLE [2] na página 283.

**Definição D.1.** *Seja  $F \subset \mathbb{R}^m$  e  $f : F \rightarrow F$  uma função. Dizemos que  $f$  é uma contração se  $\exists 0 < \gamma < 1$  tal que  $|f(x) - f(y)| \leq \gamma |x - y|; \forall x, y \in F$ .*

**Teorema A.2.** *Teorema do Ponto Fixo para Contrações: Seja  $F \subset \mathbb{R}^m$  um subconjunto fechado e  $f : F \rightarrow F$  uma contração. Dado qualquer ponto  $x_0 \in F$ , a seqüência  $x_1 = f(x_0)$ ,  $x_2 = f(x_1)$ , ...,  $x_{k+1} = f(x_k)$ , ... converge para um ponto  $a \in F$ , que é o único ponto fixo de  $f$ .*

**Demonstração:** Veja LIMA [12] na página 279.

**Teorema A.3.** *Teorema de Mudança de Variáveis: Sejam  $h : U \rightarrow V$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  entre abertos,  $U, V \subset \mathbb{R}^m$ ,  $X \subset U$  um compacto  $J$ -mensurável e  $f : h(X) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Então  $f \circ h : X \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável e*

$$\int_{h(X)} f(y) dy = \int_X f(h(x)) \cdot \det|h'(x)| dx$$

**Demonstração:** Veja LIMA [12] na página 387.

**Teorema A.4.** *Seja  $g \in L^1(a, b)$  e  $f(x) = \int_a^x g(t) dt$ . Então  $f$  é absolutamente contínua e  $f'(x) = g(x)$  quase sempre em  $(a, b)$ .*

**Demonstração:** Veja RUDIN [15] na página 176.

**Teorema A.5.** *Seja  $f$  uma função integrável a Riemann em  $[a, b]$ . Para  $a \leq x \leq b$ , definimos  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ . Então  $F$  é contínua em  $[a, b]$ . Além disso, se  $f$  é contínua em um ponto  $x_0$  de  $[a, b]$ ,  $F$  é derivável em  $x_0$  e  $F'(x_0) = f(x_0)$ .*

**Demonstração:** Veja RUDIN [14] na página 130.

**Teorema A.6.** *Seja  $K$  um conjunto compacto em  $\mathbb{R}^n$ .*

- (a) *Se  $(f_n)$  é uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas em  $K$ , então  $(f_n)$  é equicontínua em  $K$ .*
- (b) *Se  $(f_n)$  é limitada e equicontínua em  $K$ , então  $(f_n)$  contém uma subsequência uniformemente convergente e  $(f_n)$  é uniformemente limitada em  $K$ .*

**Demonstração:** Veja RUDIN [14] na página 163.

**Teorema A.7.** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert separável e  $T : H \rightarrow H$  um operador auto-adjunto e compacto. Então  $H$  admite uma base Hilbertiana formada pelos vetores próprios de  $T$ . Além disso, o único ponto de acumulação possível para o conjunto de autovalores é  $\lambda_0 = 0$  e cada autoespaço associado a um autovalor não nulo tem dimensão finita.*

**Demonstração:** Veja BRÉZIS [6] na página 97.

**Proposição B.1.** *Desigualdade de Cauchy-Schwartz: Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f, g \in L^2(\Omega)$ , então:*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \int_{\Omega} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Demonstração:** Veja BRÉZIS [6] na página 56.

**Proposição B.2.** *Sejam  $E, F, G$  três espaços de Banach,  $T : E \rightarrow F$  linear contínua e  $S : F \rightarrow G$  um operador compacto. Então  $SoT : E \rightarrow G$  é um operador compacto.*

**Demonstração:** Veja BRÉZIS [6] na página 90.

**Definição D.2.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach. Dizemos que o operador  $T \in L(X, Y)$  é compacto se para toda sequência  $(x_n) \subset X$ ,  $(Tx_n)$  tem uma sub-sequência convergente em  $Y$ .*

**Definição D.3.** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert separável e  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma base ortonormal de  $H$ . Para cada operador positivo  $T \in L(h) = \{ T : H \rightarrow H \text{ tal que } T \text{ é linear e limitado} \}$  definimos seu traço como:*

$$\text{tr}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Phi_n, T\Phi_n \rangle$$

**Definição D.4.** *Dada  $T \in L(h)$ , definimos  $|T| = \sqrt{T^*T}$  onde  $T^*$  é o adjunto de  $T$ .*

**Definição D.5.** *Dado  $T \in L(h)$ , dizemos que  $T$  é da classe do traço se  $\text{tr}(|T|) < \infty$ .*

## BIBLIOGRAFIA

- [1] APÉRY, R. *Irrationalité de  $\zeta(2)$  and  $\zeta(3)$* . Astérisque, 61, 1979.
- [2] BARTLE, Robert G. *Elementos de análise real*. Rio de Janeiro : Campus, 1983.
- [3] BEUKERS, F. *A note on the irrationality of  $\zeta(2)$  and  $\zeta(3)$* . Bull London Math. Soc., 1979.
- [4] BOYER, Carl B. *História da matemática*. São Paulo : Edgard Blücher, 1974.
- [5] BISZTRICZKY, T. *Polytopes: abstract, convex, and computational*. Kluwer Academic, 1994.
- [6] BRÉZIS, Haïm. *Análisis funcional: teoría y aplicaciones*. Madrid : Alianza Editorial, 1983.
- [7] CHURCHILL, Ruel V. *Variáveis complexas e suas aplicações*. São Paulo : McGraw-Hill do Brasil, 1975.
- [8] EDWARDS, H. M. *Riemann's zeta function*. Academic Press, 1974.
- [9] ELKIES, Noam D. On the sums  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (4k + 1)^{-n}$ . *Amer. Math. Monthly*, 110, 7, 2003.
- [10] EULER, L. *Institutiones calculi differentialis*. St. Petesburg : Acad. Imp. Sci. Petropolitanae, 1755.
- [11] KLINE, Morris. *Mathematical thought from ancient to modern times*. v. 3. New York : Oxford University Press, 1972.
- [12] LIMA, Elon Lages. *Curso de análise*. 2. ed. Rio de Janeiro : Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1989, v. 2.

- [13] REED, Michael ; SIMON, Barry. *Méthods of modern mathematical physics*. New York : Academic Press, 1972.
- [14] RUDIN, W.. *Princípios de análise matemática*. Rio de Janeiro : Livro técnico S. A., 1971.
- [15] RUDIN, Walter. *Real and complex analysis*. 2.ed. Nova York : MacGraw-Hill Book Company, 1974.
- [16] SPIEGEL, Murray R. *Manual de fórmulas e tabelas matemáticas*. São Paulo : McGraw-Hill, 1973.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)