Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre existência e não-existência de soluções para problemas elípticos que envolvem um operador não-linear do tipo Timoshenko

por

José Fernando Leite Aires

sob orientação do

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB
Março/2004

Sobre existência e não-existência de soluções para problemas elípticos que envolvem um operador não-linear do tipo Timoshenko

por

José Fernando Leite Aires

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Francisco Júlio S. de A. Corrêa

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Folho

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande

Centro de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Curso de Mestrado em Matemática

Março/2004

Agradecimentos

À Deus, pela graça de nossa existência.

À minha tia Vilani Aires por ter me acolhido em sua residência nos últimos dois anos.

Às minhas irmãs Patrícia, Magna, Coelly, Karla e Nyara, e demais familiares por sempre estarem ao meu lado.

Ao Prof. Daniel Cordeiro por ter acreditado em mim e pela excelente orientação durante essa caminhada.

À todos os professores do DME/UFCG, entre eles, os professores Claudianor Alves, Marco Aurélio, Braúlio Maia e Antonio José, pelo inestimável apoio recebido durante minha trajetória como aluno desta Instituição.

Aos colegas de mestrado Cícero, Luis Paulo, Orlando, Thiciany, Rúbia, Dorival e Robson Jesus pela amizade e companheirismo.

Ao amigo Aldo pelas noções de como utilizar o Latex, meu muito obrigado.

Ao Prof. Dr. Francisco Julio por sua disponibilidade em participar da banca, como também pelas correções e sugestões.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UEPB, particularmente Samuel Duarte, Aldo Maciel e Osmundo Alves.

A todos os funcionários do DME/UFCG, entre eles destaco, Dona Argentina, Salete, Dalva, Valdir e Marcelino, pelos quais fui bem atendido quando os solicitei.

À Capes pelo suporte financeiro, que permitiu dedidar-me de modo integral e exclusivamente.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuiram para a realização deste trabalho.

Dedicatória

Aos meus pais Antônio Fernando Aires (In Memoriam) e Maria José Leite Aires, que não mediram esforços em educar-me e pelo incansável apoio no dia-a-dia.
À minha filha Ana Flávia fonte de inspiração e a minha esposa Isolda pelo incentivo e, principalmente, por compreender a minha ausência.

Resumo

Neste trabalho apresentamos alguns resultados relativos, tanto com a existência, como a não-existência de solução de certos problemas elípticos que envolvem o seguinte operador não-linear do tipo Timoshenko

$$Lu = M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u,$$

onde $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N\,(N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira regular. As técnicas usadas foram o Método de Sub e Supersolução e Métodos Variacionais.

Abstract

In this work we study some questions related to assure the existence and non-existence of solutions of some elliptic problems involving the following non-linear operator of Timoshenko type

$$Lu = M\Big(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u,$$

where $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is a continuous functions and $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ is a smooth bounded domain. The techniques employed were the Sub and supersolution Method and Variational Methods.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho estudamos a existência e a não-existência de solução de alguns problemas elípticos que envolvem o seguinte operador não-linear

$$Lu = M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u,$$

onde $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Este operador não-linear é denominado por alguns autores de operador do tipo de Timoshenko e aparece em várias aplicações relacionadas com problemas de evolução, principalmente aqueles associados com os modelos de Kirchhoff-Carrier (Limaco & Medeiros [18] e suas referências). Ele aparece também em problemas de vibração não-linear (Lions [21]) e em problemas que envolvem certas equações de Shröndinger não-lineares do tipo

$$\begin{cases} iW_t + \Delta W = M\Big(\int_\Omega |Re\nabla W|^2 dx\Big) ReW, x \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty) \\ W(x,0) = w_0(x) = \phi(x) + i\psi(x), em\ \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

(Astaburuaga, Fernandez & Perla Menzala [4]).

Esta dissertação está dividida da seguinte maneira:

O capítulo 1 é dedicado ao estudo de existência e não-existência de solução para o problema (Alves & Corrêa [2]):

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u &= f(x,u), \quad \Omega \\ u &= 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas não-negativas e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular (suave). Iniciamos obtendo o modelo matemático, especificamente o modelo de Kirchhoff-Carrier, que representa

o fenômeno físico descrito por pequenas vibrações transversais de uma corda elástica fixa nos extremos.
Em seguida, apresentamos um resultado de existência e unicidade (**Teorema 1.1**) para o caso em que a função f independe de u.

Na segunda parte, provamos um Princípio de Comparação (**Teorema 1.2**) para o operador L. Devido a este princípio, conseguimos mostrar, usando argumentos similares aos do caso em que $M \equiv 1$ (ver por exemplo referência [12]), um resultado de sub e supersolução (**Teorema 1.3**), conhecido na literatura como *Método da Sub e Supersolução (ou Método da Iteração Monotônica)* para o operador de Timoshenko.

Na terceira parte do capítulo, fazemos duas aplicações do Método de Sub e Supersolução. Na primeira delas provamos a existência de solução para o caso em que a função f é sublinear, ou seja, $f(x,u) = u^q$, $0 < q < 1$. Ainda neste caso, usando um resultado de unicidade mostrado por Brezis & Oswald [7], conseguimos obter unicidade de solução (**Teorema 1.4**). Já a outra aplicação, é um resultado de existência de solução (**Teorema 1.5**), onde a função é soma de não-linearidades côncava e convexa, isto é, $f(x,u) = \lambda u^q + u^p$, λ é um parametro positivo e $0 < q < 1 < p$.

Na sequência do capítulo, apresentamos um resultado de não-existência de solução positiva (**Teorema 1.6**) do problema acima referido e finalizamos relacionando o conjunto de autovalores do operador Δ Laplaciano com o do operador não-linear de Timoshenko.

No capítulo 2 estudamos, via métodos variacionais, o seguinte problema de transmissão elíptico não-linear (Ma & Rivera [22])

$$\begin{aligned} -a\Big(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u &= f(x,u), \quad \Omega_1 \\ -b\Big(\int_{\Omega_2} |\nabla v|^2 dx\Big)\Delta v &= g(x,v), \quad \Omega_2 \\ v &= 0, \quad \Gamma = \partial\Omega \end{aligned}$$

com as seguintes condições de transmissão

$$\begin{aligned} u &= v, \quad \Sigma = \partial\Omega_1 \\ a\Big(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx\Big)\frac{\partial u}{\partial \nu} &= b\Big(\int_{\Omega_2} |\nabla v|^2 dx\Big)\frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad \Sigma = \partial\Omega_1 \end{aligned}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ é um domínio limitado suave em que Γ designa sua fronteira, $\Omega_1 \subset \Omega$ é um subdomínio com fronteira Σ suave satisfazendo $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ e $\Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$.

Neste caso, as funções $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas, crescentes e positivas e as funções $f : \overline{\Omega}_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \overline{\Omega}_2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são localmente Lipschitzianas. Além dessas hipóteses, veremos no decorrer do capítulo que serão acrescentadas outras.

Problemas desse tipo aparecem em várias aplicações da Física e Biologia. Como exemplo ilustrativo, ele está relacionado com o problema estacionário do seguinte sistema de duas equações de ondas do tipo Kirchhoff

$$\begin{aligned} u_{tt} - a\Big(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u &= f(x,u), \quad \Omega_1, \\ v_{tt} - b\Big(\int_{\Omega_2} |\nabla v|^2 dx\Big)\Delta v &= g(x,v), \quad \Omega_2, \end{aligned}$$

as quais modelam as vibrações transversais de uma membrana composta por dois materiais diferentes, neste caso, designadas por Ω_1 e Ω_2.

Iniciamos o capítulo 2 apresentando o problema a ser estudado e os resultados que serão obtidos. Em seguida fazemos uma caracterização variacional através da análise no seguinte espaço de Sobolev

$$E = \left\{(u,v) \in H^1(\Omega_1) \times H^1_\Gamma(\Omega_2);\ u = v \ \text{ sobre } \ \Sigma = \partial\Omega_1\right\},$$

onde

$$H^1_\Gamma(\Omega_2) = \left\{v \in H^1(\Omega_2);\ v = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma = \partial\Omega\right\}.$$

Dando continuidade, provamos que o funcional associado ao problema é fracamente semicontínuo inferiormente e de classe C^1, e finalizamos apresentando um resultado de regularidade para o problema de transmissão.

Na seção final do capítulo 2 nos dedidamos às demonstrações dos principais resultados referentes ao estudo do problema de transmissão.

O capítulo 3, destina-se ao estudo de regularização das soluções, que encontramos nos capítulos anteriores.

Apêndice A

Neste apêndice fazemos uma descrição do espectro para o operador $-\Delta$, no caso do problema homogêneo de Dirichlet.

Apêndice B

Apresentamos um resultado de unicidade, provado por Brezis & Oswald em [7], que faremos uso na demonstração da unicidade do problema sublinear (1.48) no Teorema 1.4.

Apêndice C

Já neste apêndice, apresentamos os principais resultados utilizados no decorrer de nosso trabalho. Indicamos também as referências onde podem ser encontradas as demonstrações dos resultados citados.

Notações

Vamos fixar algumas notações que usaremos no decorrer do nosso trabalho.

O termo domínio e o símbolo Ω denotará um conjunto aberto, N-dimensional, do espaço euclidiano real $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Designando $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \Omega$, a norma euclidiana será denotada por

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^{N} x_j^2 \right)^{1/2}.$$

Seja $1 \leq p < \infty$. Consideraremos $L^p(\Omega)$ como a classe de todas as funções mensuráveis u, definidas sobre Ω, tal que

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty,$$

com norma $|| \cdot ||_{L^p(\Omega)}$ definida por

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Para o caso particular, $p = 2$, esse espaço é de Hilbert com produto escalar dado por

$$((u, v)) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \forall\ u, v \in L^2(\Omega).$$

Sendo $m \in \mathbb{N}$, representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ os espaços de Sobolev, munido com a norma

$$||u||_{m,p;\Omega} = \left(\int_\Omega |u|^p dx + \sum_{1 \leq |j| \leq m} \int_\Omega |D^j u|^p dx \right)^{1/p},$$

onde $j = (j_1, j_2, \ldots, j_N) \in \mathbb{N}^N$, $|j| = \sum_{r=1}^{N} j_r$ e $D^j = \frac{\partial^{|j|}}{\partial_{x_1}^{j_1} \ldots \partial_{x_N}^{j_N}}$ é o operador de derivação fraca.

Quando $p = 2$, para simplicar a notação, denotaremos estes espaços de Sobolev por $H^m(\Omega)$ com norma

$$||u||_{m,2;\Omega} = \left(\int_\Omega |u|^2 dx + \sum_{1 \le |j| \le m} \int_\Omega |D^j u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Por $H_0^1(\Omega)$ representamos o espaço $W_0^{1,2}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{|| \cdot ||_{1,2;\Omega}}$ com norma

$$||u|| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2},$$

induzida pelo produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \quad \forall \ u, v \in H_0^1(\Omega).$$

E por $W^{-m,q}(\Omega)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, representamos o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ com norma $|| \cdot ||_{-m,p;\Omega}$ dada por

$$||J'||_{-m,q;\Omega} = \sup_{||\varphi||_{m,p;\Omega} \le 1} | \langle J', \varphi \rangle |.$$

Dizemos que uma função $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é Hölder contínua de expoente μ, $0 < \mu \le 1$, se

$$H_\mu [u] = \sup_{x \ne y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\mu} < +\infty.$$

Seja k um inteiro positivo. Designamos por $C^{k,\mu}(\overline{\Omega})$ o espaço das funções reais cujas derivadas possuem extensões contínuas em $\overline{\Omega}$ até a ordem k e suas k-ésimas derivadas são uniformemente Hölder contínuas em $\overline{\Omega}$, com expoente de Hölder μ, $0 < \mu \le 1$. Esses espaços são munidos com as normas

$$||u||_{k,\mu} = \sum_{|j| \le k} ||D^j u||_{C^0(\overline{\Omega})} + \sum_{|j| = k} H_\mu \left[D^j u \right].$$

Por $C, C_1, C_2, \ldots, K_1, K_2, \ldots,$ denotamos constantes reais positivas.

Capítulo 1

Soluções de uma classe de equações elípticas não-lineares

Neste capítulo estudamos a existência e não-existência de soluções para o seguinte problema (Alves & Corrêa [2]):

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u &= f(x,u), \quad \Omega \\ u &= 0, \qquad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas não-negativas e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular (suave). No decorrer deste capítulo a função M satisfaz também a seguinte condição:

$$M(t) \geq m_0 > 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{1.2}$$

onde m_0 é uma constante real. Denotaremos por $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função contínua dada por

$$H(t) = M(t^2)t, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Dizemos que uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma **solução fraca** do problema (1.1) se

$$M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.4}$$

1.1 Motivação Física

Com o objetivo de relacionar a Matemática com outras áreas do conhecimento humano, preferimos iniciar este trabalho obtendo o modelo Matemático, ou seja, a equação diferencial, que representa o fenômeno físico descrito por pequenas vibrações transversais de uma corda elástica fixa nos extremos, com o qual o problema (1.1) está relacionado.

Para isto, consideremos uma corda elástica, flexível, de comprimento $l > 0$, a qual repousa sobre o eixo horizontal(eixo Ox) e tem extremos fixos em $x = 0$ e $x = l$, conforme mostra a figura abaixo, porém com tensão $\vec{\tau}$ ao longo da corda.

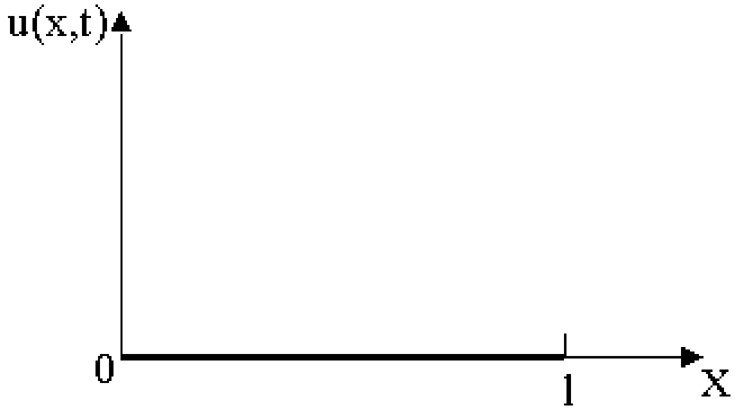

Figura 1.1: Situação de repouso

Agora perturbemos esta situação de repouso, permitindo a corda vibrar livremente no plano xOu, de modo que cada uma de suas partículas mova-se sobre uma reta perpendicular ao eixo Ox (oscilações transversais). Isto é possível, supondo-se a amplitude de vibração da corda tão pequena que sua inclinação, relativa ao eixo Ox, seja pequena quando comparada com a situação de repouso.

Visto que as vibrações são perpendiculares ao eixo Ox, considera-se apenas a componente vertical do vetor tensão $\vec{\tau}$, ou seja,

$$\tau \sin\theta,$$

onde τ denota o módulo do vetor $\vec{\tau}$.

Representamos por $u(x,t)$ o deslocamento transversal de cada ponto x da corda no instante t, a partir de sua posição de equilibrio. Assim, ao variar x no intervalo $[0,\ l]$, para cada t, $u(x,t)$ descreve a deformação da corda no plano xOu durante o movimento vibratório. Desse modo, $u = u(x,t)$, com $x \in [0,\ l]$ e $t \in [0,\ t_1]$, representa uma família de curvas planas em t passando por $x = 0$ e $x = l$, cujo comprimento é dado por (Carmo [8], p.6)

$$S = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx. \tag{1.5}$$

Por outro lado, podemos considerar, devido a hipótese de que ocorrem apenas pequenas vibrações, que

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} \approx \tan\theta \approx \sin\theta,$$

isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \sin\theta. \tag{1.6}$$

A variação da tensão, isto é, $\frac{\partial}{\partial x}(\tau \sin\theta)$ gera uma força na corda. Aplicando a segunda Lei de Newton segue-se que

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau \sin\theta) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.7}$$

onde $\rho = \dfrac{m}{l}$ representa a massa por unidade de comprimento(densidade).
Esta equação é o Modelo de Carrier para pequenas vibrações verticais da corda elástica. Da hipótese de que as vibrações são perpendiculares ao eixo Ox resulta que a tensão $\vec{\tau}$ não depende de x. Daí,

$$\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial x} = 0,$$

que por sua vez, usando (1.6) e (1.7), resulta

$$\tau \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1.8}$$

a qual é conhecida como a Equação (unidimensional) das ondas.

Representando por τ_0 a tensão no instante inicial $(t = 0)$ e sendo S a deformação da corda num instante $t > 0$, segue-se que a deformação por unidade de comprimento é dada por $\frac{S-l}{l}$. A variação de tensão é dada por $\tau - \tau_0$.

Logo, pela Lei de Hooke, temos

$$\tau - \tau_0 = K \cdot \frac{S - l}{l}, \tag{1.9}$$

sendo que $K = a \cdot E$, onde a representa a área da seção da corda, que estamos supondo constante e E é o módulo de Young[1] do material.

[1]Módulo de Young de alguns materiais (em Kqf/c^2m):
Cobre - $E = 1,2 \times 10^6$
Aço - $E = 2/2,1 \times 10^6$
Latão - $E = 1/1,2 \times 10^6$

Agora, resulta do desenvolvimento do binômio de Newton e da hipótese de que ocorrem apenas pequenas oscilações, que

$$\left(1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)^{1/2} \approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2.$$

Conseqüentemente,

$$S=\int_0^l \left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) dx,$$

isto é,

$$\frac{S-l}{l}=\frac{1}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{1.10}$$

Substituindo (1.10) em (1.9), decorre que

$$\tau=\tau_0+\frac{K}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{1.11}$$

Combinando (1.11) com (1.8) teremos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Big[\frac{\tau_0}{\rho}+\frac{K}{2\rho l}\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Fazendo $P_0=\frac{\tau_0}{\rho}$ e $P_1=\frac{K}{2\rho l}$, obtemos para o modelo de Carrier

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Big[P_0+P_1\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{1.12}$$

Este modelo foi também obtido por Kirchhoff em 1886. Por isso, a equação (1.12) é chamada de Modelo de Kirchhoff-Carrier unidimensional para pequenas vibrações transversais de uma corda elástica de comprimento l.

Para o caso bidimensional teremos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-P_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=P_1\Big[\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx\Big]\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

E de modo geral, obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-P_0\cdot\Delta u=P_1\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u,$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u=f(x,u),$$

onde, neste caso, $M(s)=P_0+P_1 s$.

1.2 Existência e Unicidade da Solução

Nesta seção apresentaremos um resultado de existência e unicidade da solução para o problema (1.1) em que a função f independe de u.

Teorema 1.1 *Se H é monótona com $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, então para cada $f \in L^2(\Omega)$, existe uma única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$ para o problema*

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u &= f(x), \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.13}$$

Demonstração.
Segundo a Teoria Espectral de $(-\Delta;\ H_0^1(\Omega))$ (ver Apêndice A), podemos considerar uma base ortonormal $\beta = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots\}$ de $H_0^1(\Omega)$ consistindo das autofunções ϕ_j associadas aos autovalores λ_j do problema de autovalor do laplaciano com condições de Dirichlet sobre $\partial\Omega$

$$\begin{cases} -\Delta\phi &= \lambda\phi, \quad \Omega, \\ \phi &= 0, \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

com

$$||\phi_j|| = 1 \qquad e \qquad ||\phi_j||^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\lambda_j}. \tag{1.14}$$

Para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, existe uma única seqüência $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} a_j\phi_j. \tag{1.15}$$

Uma vez que $f \in L^2(\Omega)$, existe também uma seqüência $(f_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} f_j\phi_j. \tag{1.16}$$

Conseqüentemente, as séries

$$||u||^2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \ \ e \ \ ||f||^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j^2}{\lambda_j} \ , \tag{1.17}$$

convergem (Identidade de Bessel-Parseval).
Nosso objetivo é encontrar $\mathbf{a_j's}$ convenientes de modo que $\mathbf{u}$ dada em (1.15) seja a solução que estamos procurando. Para isto, suponha que o problema (1.13) possua

uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$ da forma dada em (1.15). Assim, considerando $\varphi = \phi_j$ em (1.4), para algum j fixo obtemos

$$M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\int_\Omega \nabla u \nabla \phi_j dx = \int_\Omega f(x)\phi_j dx,$$

Daí, de (1.15) e (1.16),

$$M\Big(||u||^2\Big)\cdot a_j||\phi_j||^2 = f_j \cdot ||\phi_j||^2_{L^2(\Omega)},$$

e substituindo (1.14) e (1.17) teremos,

$$M\Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\Big)\cdot a_j = \frac{f_j}{\lambda_j}. \tag{1.18}$$

Donde segue-se, em face da hipótese (1.2), que $f_j = 0$ se, e somente se, $a_j = 0$. Logo, se $f = 0$, então a solução do problema (1.13) é a trivial $u \equiv 0$, pois $u = 0$ se, e somente se, $f = 0$.

Agora, consideremos o conjunto $\{j \in \mathbb{N}; f_j \neq 0\}$, no qual, pelo Princípio da Boa Ordenação (Elon [19], p.31), existe $j_0 \in \mathbb{N}$, o primeiro indíce para o qual $f_j \neq 0$ (ou equivalentemente $a_j \neq 0$). Com essa escolha, estamos interessados na solução não-trivial do problema.

Além disso, usando (1.18), encontramos, para todo indíce k com $a_k \neq 0$, a identidade

$$a_k = \frac{a_{j_0}\cdot\lambda_{j_0}\cdot f_k}{\lambda_k \cdot f_{j_0}}. \tag{1.19}$$

De (1.18) e (1.19), obtemos

$$M\left(a_{j_0}^2 + \frac{a_{j_0}^2\cdot\lambda_{j_0}^2}{f_{j_0}^2}\sum_{k=j_0+1}^{\infty}\frac{f_k^2}{\lambda_k^2}\right)a_{j_0} = \frac{f_{j_0}}{\lambda_{j_0}}\ ,$$

isto é,

$$M\left(a_{j_0}^2\left[1 + \frac{\lambda_{j_0}^2}{f_{j_0}^2}\sum_{k=j_0+1}^{\infty}\frac{f_k^2}{\lambda_k^2}\right]\right) = \frac{f_{j_0}}{\lambda_{j_0}}. \tag{1.20}$$

Desde que (1.17) ocorre e $\lambda_j \to +\infty$, temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f_j^2}{\lambda_j^2} < \infty$$

e, conseqüentemente,
$$\sum_{k=j_0+1}^{\infty} \frac{f_k^2}{\lambda_k^2} < \infty.$$
Daí, podemos considerar
$$0 < \lambda = 1 + \frac{\lambda_{j_0}^2}{f_{j_0}^2} \sum_{k=j_0+1}^{\infty} \frac{f_k^2}{\lambda_k^2},$$
e reescrever (1.20) da forma
$$M\Big(\big(\sqrt{\lambda} a_{j_0}\big)^2\Big)\sqrt{\lambda} a_{j_0} = \sqrt{\lambda}\frac{f_{j_0}}{\lambda_{j_0}}. \tag{1.21}$$
Portanto, $t = \sqrt{\lambda} a_{j_0}$ é a uníca solução da equação
$$M(t^2)t = \sqrt{\lambda}\frac{f_{j_0}}{\lambda_{j_0}},$$
devido as hipóteses sobre a função $H(t) = M(t^2)t$. Logo, sendo t_0 a única raiz dessa equação, temos que
$$a_{j_0} = \frac{t_0}{\sqrt{\lambda}}.$$
Por conseguinte, utilizamos (1.19) para determinar a_k, para todo $k \geq j_0$. Donde concluímos, que u dada em (1.15) e com a sequência $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ verificando (1.19) e (1.21) é a única solução para o problema (1.13). ***C.q.d.***

Apresentamos a seguir, exemplos de funções M e H em que as condições do Teorema acima são satisfeitas:

(i) $M(t) = 1$, e $H(t) = t$;(Caso Laplaciano)

(ii) $M(t) = \arctan(t) + \pi$, e $H(t) = t(\arctan(t^2) + \pi)$;

(iii) $M(t) = \exp(-t^2) - \arctan(t) + C_1$ e $H(t) = t(\exp(-t^4) - \arctan(t^2) + C_1)$;

(iv) $M(t) = \exp(t) + 1$ e $H(t) = t\exp(t^2) + t$;

(v) $M(t) = \exp(-t) + C_2$ e $H(t) = t\exp(-t^2) + C_2 t$,

para algumas constantes positiva C_1 e C_2.

Observação 1.1 (Regularidade da Solução) *Para o caso em que a função M satisfaz (1.2), observamos que se $u \in H_0^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (1.1), então u satisfaz*
$$\begin{cases} -\Delta u &= kf(x,u), & \Omega, \\ u &= 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde

$$k = \frac{1}{M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)}.$$

Consequentemente, os resultados usuais de regularidade elíptica, que veremos no capítulo 3, podem ser usados.

1.3 O Método de Sub e Supersoluções

Iniciamos esta seção, provando um Princípio de Comparação, que em seguida aplicaremos na demonstração do principal resultado. A partir daqui, a função M satisfaz a seguinte condição:

$$M \text{ é não-crescente em } [0, \infty). \tag{1.22}$$

Teorema 1.2 (Um Princípio de Comparação) *Suponha que M satisfaz (1.22), H seja crescente com $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e que $u, w \in C^2(\overline{\Omega})$ sejam funções não-negativas verificando*

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u & \leq & -M\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\Big)\Delta w, & \Omega \\ u & = & w \;=\; 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.23}$$

Então,

$$u \quad \leq \quad w \quad em \quad \overline{\Omega}.$$

Demonstração.

Multiplicando ambos os membros da desigualdade em (1.23) por u e w, respectivamente, teremos

$$-M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u \cdot u \quad \leq -M\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\Big)\Delta w \cdot u, \text{ em } \Omega,$$

e

$$-M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u \cdot w \quad \leq -M\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\Big)\Delta w \cdot w, \text{ em } \Omega.$$

Integrando por partes em Ω, obtemos

$$M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)||u||^2 \quad \leq M\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\Big) < u, w >, \text{ em } \Omega, \tag{1.24}$$

e

$$M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big) < u, w > \; \leq M\Big(\int_\Omega |\nabla w|^2 dx\Big)||w||^2, \text{ em } \Omega. \tag{1.25}$$

Multiplicando (1.24) por $\dfrac{1}{M\big(||w||^2\big)}$ e (1.25) por $\dfrac{1}{M\big(||u||^2\big)}$, encontramos

$$\frac{M\big(||u||^2\big)||u||^2}{M\big(||w||^2\big)} \leq \frac{M\big(||w||^2\big)||w||^2}{M\big(||u||^2\big)},$$

o que implica ,

$$M\big(||u||^2\big)||u|| \leq M\big(||w||^2\big)||w||. \tag{1.26}$$

Uma vez que H é crescente, segue-se de (1.26), que

$$||u|| \ \leq \ ||w|| \ ,$$

e conseqüentemente,

$$||u||^2 \ \leq \ ||w||^2.$$

E por (1.22), a última desigualdade implica que

$$M\big(||u||^2\big) \geq \ M\big(||w||^2\big). \tag{1.27}$$

Por outro lado, aplicando no problema (1.23) o Princípio de Máximo Forte (ver Teorema C.4, Apêndice C), obtemos

$$M\big(||u||^2\big)u \ \leq \ M\big(||w||^2\big)w \quad \text{em} \quad \overline{\Omega},$$

e por (1.27), concluímos que

$$u \ \leq \ w, \quad \text{em} \ \ \overline{\Omega}.$$

C.q.d.

Agora, apresentaremos o Método de Sub e Supersolução. Na demonstração do proxímo resultado, usaremos argumentos similares aos do caso em que $M \equiv 1$ (Figueiredo [12]), quando temos à nossa disposição um Princípio de Comparação. Além disso, veremos que a idéia central do método encontra-se na própria demonstração do resultado. Antes de apresentarmos o já referido método, faz-se necessário as definições abaixo:

Dizemos que uma função $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbf{C^2}(\overline{\mathbf{\Omega}})$ é uma **Subsolução** do problema (1.1) se

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^2 dx\Big)\Delta \underline{u} \ \leq \ f(x,\underline{u}), & \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{u} \ = \ 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Similarmente, dizemos que $\overline{\mathbf{u}} \in \mathbf{C^2(\overline{\Omega})}$ é uma **Supersolução** do problema (1.1) se

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2 dx\Big)\Delta \overline{u} & \geq & f(x,\overline{u}), & \Omega \\ \overline{u} & = & 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Observação 1.2 *No caso em que $M(t) \equiv 1$ e $f = 0$, a subsolução é justamente uma função subharmônica em Ω e a supersolução é uma função superharmônica em Ω (Gilbarg & Trudinger [14], p.23).*

Teorema 1.3 *Suponha que as funções H e M satisfaçam as hipóteses do Teorema 1.2 e que $\underline{u}$, $\overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ sejam tais que*

$$0 \leq \underline{u} \leq \overline{u}, \text{ em } \Omega \qquad e \qquad \underline{u} = \overline{u} = 0, \text{ em } \partial\Omega, \tag{1.28}$$

$$-M\Big(\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^2 dx\Big)\Delta \underline{u} \leq f(x,\underline{u}), \text{ em } \Omega, \tag{1.29}$$

$$-M\Big(\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2 dx\Big)\Delta \overline{u} \geq f(x,\overline{u}), \text{ em } \Omega. \tag{1.30}$$

Além disso, suponha que $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente na variável t para cada $x \in \Omega$ fixado, isto é,

$$t_1 > t_2 \Rightarrow f(x,t_1) \geq f(x,t_2), \forall x \in \Omega. \tag{1.31}$$

Então, existem $U, V \in H_0^1(\Omega)$ soluções de (1.1) com

$$0 \leq \underline{u} \leq U \leq V \leq \overline{u} \text{ em } \overline{\Omega}.$$

Demonstração.

Fixando uma dada função $u \in C^2(\overline{\Omega})$, segue-se que $f(x,u(x)) \in L^2(\Omega)$ e por conseguinte o problema

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\Big)\Delta v & = & f(x,u(x)), & \Omega \\ v & = & 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

devido ao Teorema 1.1, tem uma única solução fraca $v \in H_0^1(\Omega)$. Por resultados de regularidades de solução (ver capítulo 3), resulta que $v \in C^2(\overline{\Omega})$. Dessa forma, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} T \ : \ C^2(\overline{\Omega}) \ &\longrightarrow \ C^2(\overline{\Omega}) \\ u \ &\longmapsto \ Tu = v, \end{aligned}$$

a qual demonstraremos que é monótona no intervalo $[\underline{u}, \ \ \overline{u}]$, isto é,

$$\underline{u} \ \leq \ u_1 \leq \ u_2 \ \leq \overline{u} \ \ \Rightarrow \ Tu_1 \ \leq \ Tu_2. \tag{1.32}$$

De fato, considere $u_1, \ u_2 \ \in C^2(\overline{\Omega})$ com $\underline{u} \ \leq \ u_1 \leq \ u_2 \ \leq \overline{u}$ em Ω. Fazendo $v_1 = Tu_1$ e $v_2 = Tu_2$, teremos

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla v_1|^2 dx\Big)\Delta v_1 &= f(x, u_1(x)), \quad \Omega \\ v_1 &= 0, \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla v_2|^2 dx\Big)\Delta v_2 &= f(x, u_2(x)), \quad \Omega \\ v_2 &= 0, \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Por (1.31), obtemos

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla v_1|^2 dx\Big)\Delta v_1 \ \leq \ -M\Big(\int_\Omega |\nabla v_2|^2 dx\Big)\Delta v_2, \quad \Omega \\ v_1 \ = \ v_2 \ = \ 0, \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

e, pelo Princípio de Comparação (Teorema 1.2), concluímos que

$$v_1 \ \leq \ v_2 \text{ em } \overline{\Omega},$$

isto é,

$$Tu_1 \ \leq \ Tu_2,$$

mostrando assim a monotonicidade de T. Agora consideraremos seqüências $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ definidas por:

$$\begin{cases} u_0 \ = \ \underline{u} \quad e \ \ u_n \ = \ Tu_{n-1} \\ v_0 \ = \ \overline{u} \quad e \ \ v_n \ = \ Tv_{n-1}. \end{cases}$$

Afirmação:

$$\underline{u} \ = \ u_0 \ \leq u_1 \ \leq \ u_2 \ \leq \ u_3 \ \leq \ \ldots \ \leq \ v_3 \leq \ v_2 \ \leq \ v_1 \ \leq \ v_0 \ = \ \overline{u} \ \ em \ \ \overline{\Omega}. \tag{1.33}$$

Como podemos observar, por definição $u_1 \ = \ Tu_0$, isto é,

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla u_1|^2 dx\Big)\Delta u_1 &= f(x, u_0(x)), \quad \Omega \\ u_1 &= 0, \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.34}$$

Por outro lado, $u_0 = \underline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma subsolução de (1.1), ou seja,

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^2 dx\Big)\Delta \underline{u} & \leq & f(x,\underline{u}), & \Omega \\ \underline{u} & = & 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.35}$$

Combinando (1.34) com (1.35) e aplicando o Princípio de Comparação (Teorema 1.2), temos que

$$0 \leq \underline{u} \leq u_1 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}.$$

De modo análogo, considerando $v_1 = Tv_0$ e $v_0 = \overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ uma supersolução de (1.1), obtemos

$$v_1 \leq v_0 = \overline{u} \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}.$$

Uma vez que, $0 \leq \underline{u} \leq \overline{u}$, em Ω, resulta, pela monotonicidade de T (1.32), que

$$Tu_0 \leq Tv_0 \;\; \text{em} \;\; \overline{\Omega},$$

isto é,

$$u_1 \leq v_1 \;\; \text{em} \;\; \overline{\Omega}.$$

De onde segue-se que,

$$\underline{u} = u_0 \leq u_1 \leq v_1 \leq v_0 = \overline{u} \;\; \text{em} \;\; \overline{\Omega}.$$

Daí, aplicando sucessivamente a monotonicidade de T, chegamos ao resultado desejado. Portanto, encontramos duas seqüências $\{u_n\}, \{v_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ satisfazendo (1.33), com

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx\Big)\Delta u_n & = & f(x,u_{n-1}(x)), & \Omega \\ u_n & = & 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.36}$$

e

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx\Big)\Delta v_n & = & f(x,v_{n-1}(x)), & \Omega \\ v_n & = & 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.37}$$

Mostraremos que as seqüências $\{u_n\}$ e $\{v_n\}$ convergem para U e V (não necessariamente distintas), soluções de (1.1), respectivamente.

Note que, multiplicando ambos os membros da primeira igualdade em (1.36) por u_n e integrando por partes (Teorema C.2, Apêndice C), temos

$$M\big(||u_n||^2\big)||u_n||^2 = \int_\Omega f(x,u_{n-1}(x))u_n dx. \tag{1.38}$$

Ora, pela Desigualdade de Hölder (ver Teorema C.5, Apêndice C), segue-se que

$$\int_\Omega f(x,u_{n-1}(x))u_n dx \leq \int_\Omega |f(x,u_{n-1}(x))||u_n|dx \leq ||f(\cdot,u_{n-1})||_{L^2(\Omega)} \cdot ||u_n||_{L^2(\Omega)},$$

o que implica,

$$M\big(||u_n||^2\big)||u_n||^2 \leq ||f(\cdot,u_{n-1})||_{L^2(\Omega)} \cdot ||u_n||_{L^2(\Omega)}. \tag{1.39}$$

Por outro lado, como Ω é limitado, segue da Desigualdade de Poincaré (ver Teorema C.6, Apêndice C), que existe uma constante $C_1 = C_1(\Omega)$ tal que

$$||u_n||_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \cdot ||u_n||, \quad \forall\ u_n \in H_0^1(\Omega),$$

e esta desigualdade substituida em (1.39) produz,

$$M\big(||u_n||^2\big)||u_n|| \leq C_1 \cdot ||f(\ \cdot\ ,u_{n-1})||_{L^2(\Omega)}. \tag{1.40}$$

Além disso, desde que f é não-negativa e (1.31) ocorre, resulta que

$$||f(\cdot,u_{n-1})||_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |f(x,u_{n-1}(x))|^2 \leq \int_\Omega |f(x,\overline{u}(x))|^2 = C_2,$$

ou seja,

$$||f(\cdot,u_{n-1})||_{L^2(\Omega)} \leq C_2.$$

Conseqüentemente, de (1.40) teremos,

$$H(||u_n||) = M\big(||u_n||^2\big)||u_n|| \leq C_3.$$

Portanto, como a função H é crescente e $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, concluímos que u_n é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Assim, pela reflexividade de $H_0^1(\Omega)$ (ver Teorema C.22, Apêndice C), existem uma subsequência de u_n (que continuaremos denotando por u_n) e $U \in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$u_n \rightharpoonup U \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega). \tag{1.41}$$

Da Imersão Compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ (ver Teorema C.16,itens *(i) e (ii)*, Apêndice C), resulta que existe uma subsequência da subsequência $\{u_n\}$ (que também denotaremos por $\{u_n\}$) tal que

$$u_n \to U \quad \text{em} \quad L^p(\Omega) \ \ \text{para} \begin{cases} p \in [1,\ 2^*), & \text{se} \quad N \geq 3, \\ \quad \text{ou} & \\ p \in [1,\ \infty), & \text{se} \quad N = 2, \end{cases} \tag{1.42}$$

onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ é o expoente crítico de Sobolev.

Agora, observe que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n(x)| \leq C_4, \quad \forall \;\; x \in \overline{\Omega}.$$

Por conseguinte, sendo f contínua, existe uma constante $C_5 > 0$ tal que

$$|f(x, u_n(x))| \leq C_5, \quad \forall \;\; x \in \overline{\Omega}, \quad \forall \;\; n \in \mathbb{N}, \tag{1.43}$$

e assim,

$$f(\;\cdot\;, u_n) \;\in L^{p_1}(\Omega), \quad \forall \;\; p_1 \geq 1.$$

Logo, considerando $\widetilde{u}_n = M\big(||u_n||^2\big)u_n$, temos, devido a (1.36), que

$$\begin{cases} -\Delta \widetilde{u}_n &= f(x, u_{n-1}(x)), \quad \Omega \\ \quad \widetilde{u}_n &= 0, \qquad\qquad\qquad \partial\Omega, \end{cases}$$

com $f(\;\cdot\;, u_{n-1}) \;\in L^{p_1}(\Omega), \quad \forall \;\; p_1 \geq 1$. Donde segue-se (ver Teorema C.20, Apêndice C), que

$$\widetilde{u}_n \in W^{2,p_1}(\Omega)(\text{ou seja,} \quad u_n \in W^{2,p_1}(\Omega))$$

e existe $C_6 > 0$ tal que

$$||\widetilde{u}_n||_{2,p_1;\Omega} \leq C_6 \cdot ||f(\cdot, u_{n-1})||_{L^{p_1}(\Omega)}.$$

Daí, usando a hipótese (1.2) e a limitação uniforme dada por (1.43), chegamos a

$$||u_n||_{2,p_1;\Omega} \leq C_7, \quad \forall \; n \in \mathbb{N} \;\; \text{e} \;\; \forall \; p_1 \geq 1. \tag{1.44}$$

Considerando $p_1 > N$ e aplicando a Imersão Contínua $W^{2,p_1}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\mu}(\overline{\Omega})$ (ver Teorema C.15, item *(iv)*, Apêndice C), obtemos

$$\{u_n\} \subset C^{1,\mu}(\overline{\Omega}) \;\; \text{com} \;\; ||u_n||_{1,\mu;\Omega} \leq K_1 \;\; (\text{para algum} \;\; K_1 > 0 \;).$$

Agora, desde que $\{u_n\}$ é limitada em $W^{2,p_1}(\Omega)$, então pela Imersão Compacta $W^{2,p_1}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,2}(\Omega)$, para $p_1 > N$ (ver Teorema C.16, item *(iii)*, Apêndice C), existe $\hat{U} \in W^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$u_n \to \hat{U} \quad \text{em} \quad W^{1,2}(\Omega).$$

Como,

$$||u_n - \hat{U}||_{L^2(\Omega)} \ \leq \ ||u_n - \hat{U}||_{1,2;\Omega},$$

então,

$$u_n \to \hat{U} \quad \text{em} \quad L^2(\Omega).$$

Da convergência dada em (1.42) e da unicidade de limite obtemos que $U = \hat{U}$. De onde concluímos que

$$u_n \to U \quad \text{em} \quad W^{1,2}(\Omega).$$

Por outro lado,

$$|\ ||u_n|| - ||U||\ | \leq ||u_n - U|| \leq ||u_n - U||_{1,2;\Omega},$$

o que implica,

$$u_n \to U \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega),$$

e

$$||u_n||^2 \to ||U||^2 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Da continuidade da função M, resulta na convergência

$$M\big(||u_n||^2\big) \to M\big(||U||^2\big). \tag{1.45}$$

Da convergência fraca em $H_0^1(\Omega)$ resulta, para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, que

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi dx \to \int_\Omega \nabla U \nabla \varphi dx, \tag{1.46}$$

e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver Teorema C.7, Apêndice C), teremos

$$\int_\Omega f(x,\ u_{n-1}(x))\varphi dx \to \int_\Omega f(x,\ U(x))\varphi dx. \tag{1.47}$$

Uma vez que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in H_0^1(\Omega)$ satisfaz (1.36), temos que

$$M\Big(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx\Big)\int_\Omega \nabla u_n \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x, u_{n-1}(x))\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto, das convergências dadas em (1.45), (1.46) e (1.47) concluímos que

$$M\Big(\int_\Omega |\nabla U|^2 dx\Big)\int_\Omega \nabla U \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x, U(x))\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

mostrando que $U \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema (1.1) com

$$0 \leq \underline{u} \leq U \leq \overline{u} \ \text{ em } \ \overline{\Omega}.$$

De modo análogo, encontramos $V \in H_0^1(\Omega)$ como limite da seqüência $\{v_n\}$ tal que

$$M\Big(\int_\Omega |\nabla V|^2 dx\Big)\int_\Omega \nabla V \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x, V(x))\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

com

$$0 \leq \underline{u} \leq U \leq V \leq \overline{u} \ \text{ em } \ \overline{\Omega}.$$

C.q.d.

Observação 1.3 *Se M é diferenciável e*

$$2sM'(s) + M(s) > 0.$$

Então, H é crescente. Nos exemplos de iii) a v) a função M é não-crescente e satisfaz esta última condição. Daí, concluímos que os exemplos iii), iv) e v) satisfazem as condições dos Teorema 1.2 e 1.3.

1.4 Aplicações do método de Sub e Supersoluções

Nesta seção faremos duas aplicações do Método da Sub e Supersoluções.

No primeiro resultado que segue mostraremos a existência e a unicidade de solução positiva para o **problema sublinear**

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u = u^q, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.48}$$

com $0 < q < 1$.

Teorema 1.4 *Seja $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua não-crescente satisfazendo (1.2) e suponha que $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é crescente com $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Se a função*

$$G(t) = \big[M(t^2)\big]^{\frac{1}{1-q}}\, t$$

é injetora em $[0, +\infty)$, então o problema (1.48) possui uma única solução positiva.

Demonstração.

Existência:

Seja $\phi_1 > 0$ a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_1 > 0$ de $(-\Delta;\ H_0^1(\Omega))$ com $\|\phi_1\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Então,

$$-\Delta\phi_1 = \lambda_1\phi_1, \qquad \Omega$$

e

$$\int_\Omega |\nabla\phi_1|^2 dx = \lambda_1.$$

Daí, segue-se que

$$-M\Big(\int_\Omega |\nabla\epsilon\phi_1|^2 dx\Big)\Delta(\epsilon\phi_1) \ = \ M\left(\epsilon^2\lambda_1\right)\lambda_1(\epsilon\phi_1), \qquad \Omega \tag{1.49}$$

para todo $\epsilon > 0$.

Considerando

$$\epsilon^{1-q}||\phi_1||_\infty^{1-q} \leq \frac{1}{\lambda_1 \cdot k_0},$$

teremos

$$\epsilon^{1-q}\phi_1(x)^{1-q} \leq \frac{1}{\lambda_1 \cdot k_0}, \quad \forall\ x \in \Omega,$$

que por sua vez implica,

$$k_0\lambda_1(\epsilon\phi_1) \leq (\epsilon\phi_1)^q, \quad em \ \ \Omega, \tag{1.50}$$

onde $k_0 = M(0) \geq M(t) > 0,\ \forall\ t > 0$ (isto segue de(1.2) e da hipótese (1.22)).

Assim,

$$M(\epsilon^2\lambda_1)\lambda_1(\epsilon\phi_1) \leq k_0\lambda_1(\epsilon\phi_1),$$

e esta desigualdade comparada com (1.50) e substituida em (1.49) resulta

$$-M\Big(\int_\Omega |\nabla\epsilon\phi_1|^2 dx\Big)\Delta(\epsilon\phi_1) \ \leq (\epsilon\phi_1)^q, \quad em \ \ \Omega.$$

Verificando assim, que a função $\epsilon\phi_1$ é uma subsolução do problema (1.48), para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Agora, consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta e \ = \ 1, & \Omega \\ \quad\ e \ = \ 0, & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.51}$$

Mostra-se, usando o Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema C.21, Apêndice C), que este problema tem uma única solução fraca $e \in H_0^1(\Omega)$ (ver Apêndice A). Por resultados de regularidade mostra-se que $e \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ e Pelo Princípio de Máximo Forte (ver Teorema C.4, Apêndice C) concluímos que $e > 0$ em Ω.

Uma vez que $0 < q < 1$, podemos escolher $\gamma > 0$ tal que

$$\gamma \geq \gamma^q \cdot \frac{||e||_\infty^q}{m_0}.$$

De fato, basta considerar

$$\gamma \geq \left(\frac{||e||_\infty^q}{m_0}\right)^{\frac{1}{1-q}}.$$

Logo,

$$m_0\gamma \geq \gamma^q ||e||_\infty^q \geq (\gamma e)^q, \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{1.52}$$

Por outro lado,

$$-M\Big(\int_\Omega |\nabla \gamma e|^2 dx\Big)\Delta(\gamma e) = M(\gamma^2 ||e||^2)\gamma, \quad \text{em} \quad \Omega,$$

de onde segue-se, usando a hipótese (1.2) e a desigualdade (1.52), que

$$-M\Big(\int_\Omega |\nabla \gamma e|^2 dx\Big)\Delta(\gamma e) \geq (\gamma e)^q, \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Consequentemente, a função (γe) é uma supersolução do problema (1.48).

Nosso objetivo é usar o Método de Sub e Supersoluções (Teorema 1.3) para garantir a existência de solução para o problema (1.48). Para isto ser possível, devemos mostrar que

$$\epsilon\phi_1(x) \leq \gamma e(x), \quad \forall\ x \in \overline{\Omega}, \tag{1.53}$$

para algum $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Iniciamos definindo para $\delta > 0$(pequeno) o conjunto

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega; dist(x,\ \partial\Omega) < \delta\}.$$

Notamos que $\Omega \setminus \Omega_\delta$ é compacto. Assim, existe $K_1 > 0$ tal que

$$\frac{\gamma e(x)}{\phi_1(x)} \geq K_1, \quad \forall x \in \Omega \backslash \Omega_\delta. \tag{1.54}$$

Por outro lado, aplicando o Lema de Hopf-Giraund (Ver Teorema C.10 , Apêndice C), temos que

$$\frac{\partial e}{\partial \nu} < 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega,$$

onde ν denota o vetor normal exterior.

Como $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ é limitado, então $\partial\Omega$ é um conjunto compacto.

Daí, existe $C_0 < 0$ tal que

$$\frac{\partial e}{\partial \nu}(x) \leq C_0, \quad \forall\; x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Analogamente, existe $K_2 > 0$ tal que

$$\left|\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}(x)\right| \leq K_2, \quad \forall\; x \in \overline{\Omega}_\delta.$$

Considere

$$N_0 = \inf_{\overline{\Omega}_\delta} \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} < 0$$

e defina a função

$$P(x) = \theta \cdot \phi_1(x) - e(x) \quad \text{com} \quad x \in \overline{\Omega}_\delta \text{ e } \theta \in \mathbb{R} \text{ a ser escolhido.}$$

Por conseguinte,

$$\frac{\partial P}{\partial \nu}(x) = \theta \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial e}{\partial \nu}(x) \geq \theta \cdot N_0 - C_0 > 0, \quad \forall\; x \in \overline{\Omega}_\delta,$$

desde que $0 < \theta < \frac{C_0}{N_0}$.

Afirmação I: A função $P(x) \leq 0$ em $\overline{\Omega}_\delta$

De fato, fixado $x \in \overline{\Omega}_\delta$, consideremos a função

$$\varphi(s) = P(x + s\nu), \quad \forall\; s \in \mathbb{R}.$$

Note que $\varphi(0) = P(x)$.

Por outro lado, para cada $x \in \overline{\Omega}_\delta$, escolha um único $\overline{x} \in \partial\Omega$ de modo que a reta que passa por esses dois pontos coincida com a reta suporte do vetor normal exterior $\nu = \nu(\overline{x})$.

Logo, existe $\tilde{s} > 0$ tal que

$$x + \tilde{s}\nu = \overline{x} \in \partial\Omega.$$

Desde que $P(\partial\Omega) \equiv 0$, resulta que $\varphi(\tilde{s}) = 0$. Conseqüentemente, aplicando o Teorema do Valor Médio, existe $\xi \in (0,\; \tilde{s})$ tal que

$$\varphi(\tilde{s}) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)(\tilde{s} - 0),$$

ou seja,

$$-P(x) = \frac{\partial P}{\partial \nu}(x + \xi\nu) \cdot \tilde{s} > 0 \;\; \text{em} \;\; \Omega_\delta.$$

De onde concluímos que

$$P(x) \leq 0, \quad \forall\ x \in \overline{\Omega}_\delta,$$

provando a afirmação I.

Portanto,

$$\theta\phi_1(x) \leq e(x), \quad \forall\ x \in \overline{\Omega}_\delta,$$

isto é,

$$\frac{\gamma e(x)}{\phi_1(x)} \geq \gamma \cdot \theta > 0, \quad \forall\ x \in \Omega_\delta. \tag{1.55}$$

Juntando (1.54) e (1.55), obtemos

$$\frac{\gamma e(x)}{\phi_1(x)} \geq K_3 > 0, \quad \forall\ x \in \Omega,$$

onde $K_3 = min\,\{K_1,\ \gamma\theta\}$.

Conseqüentemente, para $0 < \epsilon < K_3$, chegamos a desigualdade desejada mostrando (1.53).

Desse modo, todas as hipóteses do Teorema 1.3 estão verificadas. Daí, existe $U, V \in H_0^1(\Omega)$ solução do problema (1.48) com

$$0 < \epsilon\phi_1(x) < U(x) \leq V(x) < \gamma e(x), \quad \forall\ x \in \Omega.$$

Unicidade:

Sejam U_1 e U_2 soluções do problema (1.48). Então,

$$M\Big(\int_\Omega |\nabla U_i|^2 dx\Big)\int_\Omega \nabla U_i \nabla\varphi dx = \int_\Omega U_i^q \varphi dx, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ e } i = 1,\ 2.$$

Devido a hipótese (1.2) podemos escrever

$$M\Big(\int_\Omega |\nabla U_i|^2 dx\Big) = \frac{\Big[M\Big(\int_\Omega |\nabla U_i|^2 dx\Big)\Big]^{\frac{1}{1-q}}}{\Big[M\Big(\int_\Omega |\nabla U_i|^2 dx\Big)\Big]^{\frac{q}{1-q}}} \quad \text{para} \quad i = 1,\ 2.$$

Daí,

$$\frac{\Big[M\Big(||U_i||^2\Big)\Big]^{\frac{1}{1-q}}}{\Big[M\Big(||U_i||^2\Big)\Big]^{\frac{q}{1-q}}} \int_\Omega \nabla U_i \nabla\varphi dx = \int_\Omega U_i^q \varphi dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla\Big(\Big[M(||U_i||^2)\Big]^{\frac{1}{1-q}} U_i\Big)\nabla\varphi dx = \int_\Omega \Big(\Big[M(||U_i||^2)\Big]^{\frac{1}{1-q}} U_i\Big)^q \varphi dx, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ e } i = 1,\ 2.$$

Donde segue-se que as funções

$$\widetilde{U}_1(x) = \Big[M(||U_1||^2)\Big]^{\frac{1}{1-q}} U_1(x) \text{ e } \widetilde{U}_2(x) = \Big[M(||U_2||^2)\Big]^{\frac{1}{1-q}} U_2(x)$$

são soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta v \;=\; v^q, & \Omega \\ v \;=\; 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.56}$$

com $0 < q < 1$.

Pelo resultado de unicidade mostrado por Brezis & Oswald (ver Apêndice B), o qual inclui o caso em que $f(x,\ v) = v^q$, com $0 < q < 1$, resulta que

$$\widetilde{U}_1(x) = \widetilde{U}_2(x), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{1.57}$$

Consequentemente,

$$||\widetilde{U}_1|| = ||\widetilde{U}_2||,$$

isto é,

$$\Big[M(||U_1||^2)\Big]^{\frac{1}{1-q}} ||U_1|| = \Big[M(||U_2||^2)\Big]^{\frac{1}{1-q}} ||U_2||.$$

Da injetividade da função G, obtemos que

$$||U_1|| = ||U_2||,$$

e por (1.57) concluímos que

$$U_1(x) = U_2(x), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

completando assim a prova do Teorema.

C.q.d.

Observação 1.4 *Os exemplos iii) e v) com algumas modificações e iv) satisfazem as condições do Teorema 1.4.*

Seguindo as mesmas idéias do Teorema 1.4, com o intuito de aplicar o método de sub e supersoluções, e ainda usando argumentos similares desenvolvidos por Ambrossetti, Brezis & Cerami [3], segue-se um resultado de existência de solução para o problema de **não-linearidades côncava e convexa**

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u \;=\; \lambda u^q + u^p, & \Omega \\ u \;>\; 0, & \Omega \\ u \;=\; 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.58}$$

onde, λ é um parâmetro positivo e $0 < q < 1 < p$.

Teorema 1.5 *Seja* $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua não-crescente satisfazendo (1.2) e suponha que* $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é crescente com* $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$*. Então, existe* $\lambda_* > 0$ *tal que o problema (1.58) tem uma solução para todo* $\lambda \in (0,\ \lambda_*)$ *.*

Antes de provamos o referido Teorema, iremos mostrar o seguinte Lema.

Lema 1.1 *Seja*

$$\lambda_* = \sup\{\lambda > 0;\ (1.58)\ \textit{tem uma solução}\}. \tag{1.59}$$

Então,

$$0 < \lambda_* < \infty.$$

Demonstração.

Consideremos $e > 0,\ e \in C^\infty(\overline{\Omega})$ a única solução do problema (1.51). Vamos mostrar inicialmente, para $0 < q < 1 < p$, que podemos encontrar $\lambda_0 > 0$ de modo que para todo $\lambda \in (0,\ \lambda_0]$, exista $\gamma(\lambda) = \gamma > 0$ satisfazendo

$$m_0\gamma \geq \lambda\gamma^q||e||_\infty^q + \gamma^p||e||_\infty^p, \tag{1.60}$$

onde $m_0 > 0$ é a constante presente na hipótese (1.2).
Observe que mostrar (1.60) é equivalente a provar

$$m_0 \geq \lambda\gamma^{q-1}||e||_\infty^q + \gamma^{p-1}||e||_\infty^p,\ \text{com } 0 < q < 1 < p,$$

Para isso considere a função $h : (0,\ \infty) \longrightarrow (0,\ \infty)$, definida por

$$h(\gamma) = \lambda\gamma^{q-1}||e||_\infty^q + \gamma^{p-1}||e||_\infty^p.$$

Desse modo, desejamos que exista λ_0 tal que para todo $\lambda \in (0,\ \lambda_0]$ ocorra

$$h(\gamma) \leq m_0.$$

Ora, através de um cálculo, deduzimos que o mínimo da função h ocorre no ponto de $\gamma(\lambda) = \gamma$ dado por

$$\gamma(\lambda) = \gamma = \lambda^{\frac{1}{p-q}} \left(\frac{1-q}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-q}} ||e||_\infty^{-1}$$

e mais

$$h(\gamma(\lambda)) \to 0 \ \text{ qdo. } \ \lambda \downarrow 0.$$

Daí, existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $\lambda \in (0,\ \lambda_0]$ ocorre o seguinte

$$h(\gamma) \leq m_0,$$

mostrando (1.60).

Usando (1.60) e as mesmas idéias desenvolvidas na demonstração do Teorema 1.4 para encontrar a supersolução, segue-se que a função γe satisfaz

$$-M\Big(\int_\Omega |\nabla \gamma e|^2 dx\Big)\Delta(\gamma e) \geq \lambda(\gamma e)^q + (\gamma e)^p, \quad em \quad \Omega,$$

ou seja, γe é uma supersolução de (1.58) para todo $\lambda \in (0,\ \lambda_0]$.
Agora considerando $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda_1 k_0}\right)^{\frac{1}{1-q}} ||\phi_1||_\infty^{-1},$$

onde $\lambda > 0$ é um parâmetro qualquer e as demais constantes são as mesmas que já foram apresentadas no Teorema 1.4, tem-se

$$k_0\lambda_1(\epsilon\phi_1(x)) \leq \lambda(\epsilon\phi_1(x))^q, \quad \forall x \in \Omega.$$

Daí, usando a igualdade (1.49) obtemos que

$$-M\Big(\int_\Omega |\nabla \epsilon\phi_1|^2 dx\Big)\Delta(\epsilon\phi_1) \ \leq \lambda(\epsilon\phi_1)^q + (\epsilon\phi_1)^p, \quad em \quad \Omega,$$

implicando que a função $(\epsilon\phi_1)$ é uma subsolução de (1.58) para algum $\epsilon > 0$ escolhido convenientemente e para todo $\lambda > 0$.

Analogamente ao que foi feito na demonstração do Teorema 1.4, temos que

$$0 < \epsilon\phi_1 < \gamma e \quad em \quad \Omega,$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Logo, aplicando o método de sub e supersoluções (Teorema 1.3) concluímos que para qualquer $\lambda \in (0,\ \lambda_0]$, o problema (1.58) tem uma solução $U \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$0 < \epsilon\phi_1 < U < \gamma e \quad em \quad \Omega.$$

Assim, devido a definição de λ_*, obtemos que

$$0 < \lambda_0 \leq \lambda_*.$$

Vamos mostrar que existe $\overline{\lambda} > 0$ tal que

$$\overline{\lambda} t^q + t^p > \lambda_1 k_0 t, \quad \forall t \in \mathbb{R} \;\text{ e }\; t > 0. \tag{1.61}$$

De fato, se considerarmos $t > (\lambda_1 k_0)^{\frac{1}{p-1}}$, então

$$t^p - \lambda_1 k_0 t = t\left(t^{p-1} - \lambda_1 k_0\right) > 0,$$

e conseqüentemente,

$$\lambda_1 k_0 t < t^p \leq \overline{\lambda} t^q + t^p, \quad \forall \overline{\lambda} \geq 0. \tag{1.62}$$

Por outro lado, considerando $0 < t \leq (\lambda_1 k_0)^{\frac{1}{p-1}}$ teremos,

$$\frac{\lambda_1 k_0 t - t^p}{t^q} < (\lambda_1 k_0)^{\frac{p-q}{p-1}}.$$

Daí, para $\overline{\lambda} \geq (\lambda_1 k_0)^{\frac{p-q}{p-1}}$, deduzimos que

$$\lambda_1 k_0 t < \overline{\lambda} t^q + t^p, \quad \text{sempre que } \; 0 < t \leq (\lambda_1 k_0)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{1.63}$$

Portanto, combinando (1.62) e (1.63) concluímos que existe $\overline{\lambda} > 0$ de modo que (1.61) seja verificada.

Agora, suponhamos que λ é tal que o problema (1.58) tem uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$. Logo,

$$M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big) \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \lambda \int_\Omega u^q \varphi dx + \int_\Omega u^p \varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

e em particular para $\varphi = \phi_1 > 0$, a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta;\; H_0^1(\Omega))$.

Daí,

$$\lambda_1 M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\Big) \int_\Omega u \phi_1 dx = \lambda \int_\Omega u^q \phi_1 dx + \int_\Omega u^p \phi_1 dx. \tag{1.64}$$

Desde que u é solução do problema (1.58), então $u(x) > 0, \;\; \forall x \in \Omega$. Assim, podemos considerar $t = u(x) > 0, \;\; \forall x \in \Omega$, em (1.61), isto é,

$$\overline{\lambda} u^q + u^p > \lambda_1 k_0 u, \quad \text{em } \; \Omega.$$

Multiplicando essa última desigualdade por $\phi_1 > 0$ e integrando em Ω, obtemos

$$\lambda_1 k_0 \int_\Omega u \phi_1 dx < \overline{\lambda} \int_\Omega u^q \phi_1 dx + \int_\Omega u^p \phi_1 dx,$$

que por (1.2) resulta em

$$\lambda_1 M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2dx\Big)\int_\Omega u\phi_1 dx < \overline{\lambda}\int_\Omega u^q\phi_1 dx + \int_\Omega u^p\phi_1 dx. \tag{1.65}$$

De (1.64) e (1.65), teremos

$$\lambda\int_\Omega u^q\phi_1 dx + \int_\Omega u^p\phi_1 dx < \overline{\lambda}\int_\Omega u^q\phi_1 dx + \int_\Omega u^p\phi_1 dx,$$

donde segue-se que,

$$0 < \lambda < \overline{\lambda},$$

e portanto,

$$0 < \lambda_* \leq \overline{\lambda},$$

concluindo a demonstração do lema.

C.q.d.

Demonstração do Teorema 1.5

Segue do Lema anterior, que existe uma seqüência (λ_ν) de parâmetros reais positivos tal que $\lambda_\nu \uparrow \lambda_*$ e o problema

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla u|^2dx\Big)\Delta u &= \lambda_\nu u^q + u^p, \qquad \Omega \\ \qquad\qquad\qquad u &> 0, \qquad\qquad\qquad \Omega \\ \qquad\qquad\qquad u &= 0, \qquad\qquad\qquad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.66}$$

tem uma solução.

Logo, dado qualquer $\lambda < \lambda_*$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$\lambda < \lambda_\nu < \lambda_*.$$

Seja u_{λ_ν} uma solução de (1.66). Então,

$$-M\Big(\int_\Omega |\nabla u_{\lambda_\nu}|^2dx\Big)\Delta u_{\lambda_\nu} = \lambda_\nu u_{\lambda_\nu}^q + u_{\lambda_\nu}^p > \lambda u_{\lambda_\nu}^q + u_{\lambda_\nu}^p, \quad \Omega,$$

isto é, u_{λ_ν} é uma supersolução de (1.58).

Por outro lado, sabemos que a função $(\epsilon\phi_1)$ é uma subsolução de (1.58). Além disso, mostra-se de modo análogo ao que fizemos na demonstração do Teorema 1.4, que

$$0 < \epsilon\phi_1 < u_{\lambda_\nu} \quad \text{em} \quad \Omega,$$

para $\epsilon > 0$ escolhido convenientemente. Portanto, aplicando novamente o método de sub e supersoluções (Teorema 1.3), resulta que o problema (1.58) tem uma solução para todo $\lambda \in (0,\ \lambda_*)$, provando o Teorema.

C.q.d.

1.5 Não-Existência de Solução

Aqui apresentaremos um resultado de não-existência de solução positiva para o problema (1.1)

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u &= f(x,u), \quad \Omega \\ u &= 0, \qquad \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema 1.6 *Seja* $n_0 = \inf_{t\in\mathbb{R}} M(t)$ *e* $f(x,t) > n_0\lambda_1 t$ $\forall x \in \Omega$ *e* $t \in \mathbb{R}$. *Então o problema (1.1) não tem solução positiva.*

Demonstração.

Supondo que o problema (1.1) tem solução positiva segue-se que

$$M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Em particular, para $\varphi = \phi_1 > 0$ em Ω, a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor $\lambda_1 > 0$ de $(-\Delta; H_0^1(\Omega))$.

Então,

$$M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla u \nabla \phi_1 dx = \int_\Omega f(x,u)\phi_1 dx.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega u\phi_1 dx.$$

Daí,

$$\lambda_1 M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\int_\Omega u\phi_1 dx = \int_\Omega f(x,u)\phi_1 dx.$$

Por hipótese, $n_0 \leq M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)$.

Assim,

$$\lambda_1 n_0 \int_\Omega u\phi_1 dx \leq \int_\Omega f(x,u)\phi_1 dx,$$

isto é,

$$\int_\Omega (\lambda_1 n_0 u - f(x,u))\,\phi_1 dx \leq 0,$$

o que implica,

$$f(x,u(x)) \leq \lambda_1 n_0 u(x),$$

para algum $x \in \Omega$. Contradizendo assim com uma das hipóteses do Teorema. Portanto, com as condições acima, o problema (1.1) não tem solução positiva. ***C.q.d.***

Observação 1.5 *O resultado continua valendo, se a função M é limitada superiormente, por exemplo,*

$$n_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} M(t)$$

e a função f satisfaz

$$f(x,t) < n_0\lambda_1 t \quad \forall(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

1.6 O Problema de Autovalor

Objetivamos nesta seção estudar o seguinte problema **não-linear de autovalor**

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla\Phi|^2 dx\Big)\Delta\Phi &= \lambda\Phi, \quad \Omega \\ \Phi &= 0, \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.67}$$

Seja λ_k e $\widetilde{\Phi}_k$ autovalor e autofunção, respectivamente de $(-\Delta; H_0^1(\Omega))$, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta\widetilde{\Phi}_k &= \lambda_k\widetilde{\Phi}_k, \quad \Omega \\ \widetilde{\Phi}_k &= 0, \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.68}$$

Daí,

$$\int_\Omega \nabla\widetilde{\Phi}_k \nabla\varphi dx = \lambda_k \int_\Omega \widetilde{\Phi}_k \varphi dx, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Fazendo $\varphi = \widetilde{\Phi}_k$ e usando (1.67), obtemos

$$-M\Big(\int_\Omega |\nabla\widetilde{\Phi}_k|^2 dx\Big)\Delta\widetilde{\Phi}_k = \lambda_k M\Big(\lambda_k \int_\Omega |\widetilde{\Phi}_k|^2 dx\Big)\widetilde{\Phi}_k.$$

Conseqüentemente, a seqüência $\Big\{\widetilde{\lambda}_k\Big\}$ dada por

$$\widetilde{\lambda}_k = \lambda_k M\Big(\lambda_k \int_\Omega \widetilde{\Phi}_k^2 dx\Big)$$

consiste de autovalores do operador L associados às autofunções $\widetilde{\Phi}_k$.

Proposição 1.7 *Se λ é um autovalor de L, então existem λ_k e $\widetilde{\Phi}_k$ tais que*

$$\lambda = \lambda_k M\Big(\lambda_k \int_\Omega \widetilde{\Phi}_k^2 dx\Big).$$

Demonstração:

Desde que λ é um autovalor de L, então

$$\begin{cases} -M\Big(\int_\Omega |\nabla\Phi|^2 dx\Big)\Delta\Phi &= \lambda\Phi, \quad \Omega \\ \Phi &= 0, \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

para alguma $\Phi \neq 0$.

Logo,

$$M\Big(\int_\Omega |\nabla\Phi|^2 dx\Big)\int_\Omega |\nabla\Phi|^2 dx = \lambda \int_\Omega \Phi^2 dx,$$

o que implica,

$$\lambda = M(||\Phi||^2)||\widehat{\Phi}||^2, \tag{1.69}$$

onde

$$\widehat{\Phi} = \frac{\Phi}{||\Phi||_{L^2(\Omega)}}.$$

Conseqüentemente,

$$\left\{\begin{array}{rcll} -M(||\Phi||^2)\Delta\Phi & = & M(||\Phi||^2)||\widehat{\Phi}||^2\Phi, & \Omega \\ \Phi & = & 0, & \partial\Omega. \end{array}\right.$$

ou seja,

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta\Phi & = & ||\widehat{\Phi}||^2\Phi, & \Omega \\ \Phi & = & 0, & \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Portanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$||\widehat{\Phi}||^2 = \lambda_k \quad e \quad \Phi = \widetilde{\Phi}_k,$$

para alguma autofunção associada a λ_k. Resulta de (1.67) que

$$\lambda = \lambda_k M\Big(\int_\Omega |\nabla\widetilde{\Phi}_k|^2 dx\Big),$$

ou seja,

$$\lambda = \lambda_k M\Big(\lambda_k \int_\Omega \widetilde{\Phi}_k^2 dx\Big).$$

C.q.d.

Capítulo 2

Soluções positivas para um problema de transmissão elíptico não-local e não-linear

2.1 Preliminares

Neste capítulo estudamos a existência e não-existência de soluções positivas utilizando métodos variacionais para o seguinte sistema de equações elípticas não-lineares (Ma & Rivera [22]):

$$\begin{cases} -a\Big(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx\Big)\Delta u &=& f(x,u), \quad \Omega_1 \\ -b\Big(\int_{\Omega_2} |\nabla v|^2 dx\Big)\Delta v &=& g(x,v), \quad \Omega_2 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$v \;=\; 0, \quad \Gamma = \partial\Omega \tag{2.2}$$

com as seguintes condições de transmissão

$$u \;=\; v, \quad \Sigma = \partial\Omega_1 \tag{2.3}$$

$$a\Big(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx\Big)\frac{\partial u}{\partial \nu} \;=\; b\Big(\int_{\Omega_2} |\nabla v|^2 dx\Big)\frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad \Sigma = \partial\Omega_1 \tag{2.4}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ é um domínio limitado suave e $\Omega_1 \subset \Omega$ um subdomínio com fronteira Σ suave satisfazendo $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$. Escrevendo $\Gamma = \partial\Omega$ e $\Omega_2 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$ teremos

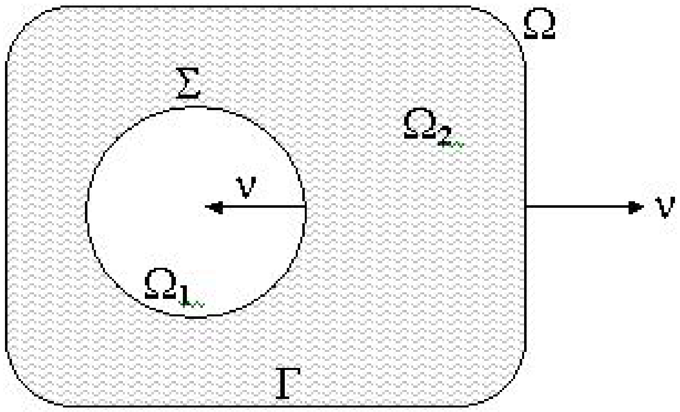

Figura 2.1:

$\Omega = \overline{\Omega}_1 \cup \Omega_2$ *e* $\partial\Omega_2 = \Gamma \cup \Sigma$. Além disso, ν denota o vetor normal exterior a Ω_2, como podemos observar na figura ilustrativa.

Neste capítulo as funções a *e* b são contínuas positivas crescentes satisfazendo: existem constantes $a_0, a_1, b_0, b_1 > 0$ e $\sigma \geq 1$ tais que

$$a(s) \geq a_0 + a_1 s^{\sigma-1} \quad \text{e} \quad b(s) \geq b_0 + b_1 s^{\sigma-1}, \quad \forall\ s > 0. \tag{2.5}$$

Já as funções $f : \overline{\Omega}_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \overline{\Omega}_2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são localmente Lipschitzianas com o seguinte crescimento subcrítico:
existe $\rho \leq 2\sigma$ satisfazendo $1 \leq \rho < 2N/N-2$ se $N \geq 3$ ou $\rho > 1$ se $N = 2$, tal que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{\rho-1}} = 0 \quad \text{se} \quad \lim_{|s|\to\infty} \frac{g(x,s)}{|s|^{\rho-1}} = 0. \tag{2.6}$$

Agora apresentaremos os principais resultados deste capítulo.

Teorema 2.1 *Supondo (2.5) e (2.6), o sistema tem pelo menos uma solução não-negativa se* $f(x,0) = g(x,0) = 0$.

Teorema 2.2 *Assumindo as hipóteses do Teorema anterior e as seguintes condições locais:*
existem constantes $a_2, a_3, r > 0$ *e* $\tau \geq \sigma$ *tais que*

$$a(s) \leq a_2 + a_3 s^{\tau-1}, \quad \textit{se} \quad 0 < s < r \tag{2.7}$$

e

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{f(x,s)}{s} \geq \eta > \lambda_1(a_2 + a_3\tau^{-1}), \quad x \in \Omega_1, \tag{2.8}$$

onde $\lambda_1 > 0$ *é o primeiro autovalor de* $(-\Delta;\ H_0^1(\Omega_1))$. *Então, o sistema (2.1) − (2.4) tem pelo menos uma solução positiva.*

Teorema 2.3 *Seja* $0 < m < inf_{s\geq 0}\{a(s), b(s)\}$ *fixado e considere* $\lambda^1 > 0$ *o primeiro autovalor* $(-\Delta;\ H_0^1(\Omega))$. *Então se*

$$0 \leq f(x,u) \leq m\lambda^1 u \quad \text{ e } \quad 0 \leq g(x,v) \leq m\lambda^1 v, \tag{2.9}$$

para todo $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$, *e* $u, v > 0$, *o problema (2.1)-(2.4) não tem solução positiva.*

2.2 O Tratamento Variacional

Nesta seção, com o intuito de demonstrar os resultados enunciados anteriormente, faremos uma análise no seguinte Espaço de Sobolev

$$E = \left\{(u,v) \in H^1(\Omega_1) \times H^1_\Gamma(\Omega_2);\ u = v \ \text{ sobre } \ \Sigma = \partial\Omega_1\right\},$$

onde

$$H^1_\Gamma(\Omega_2) = \left\{v \in H^1(\Omega_2);\ v = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma = \partial\Omega\right\}.$$

Agora observe que, sendo $\partial\Omega_2 = \Gamma \cup \Sigma$ regular, se $v \in H^1_\Gamma(\Omega_2)$ faz sentido falar em traço de v sobre Γ, isto é, $v_{|\Gamma}$, o qual pertence a $L^2(\Gamma)$. A aplicação $v \to v_{|\Gamma}$ é contínua de $H^1(\Omega_2)$ em $L^2(\Gamma)$, logo o subespaço $H^1_\Gamma(\Omega_2)$ é fechado em $H^1(\Omega_2)$, com a norma induzida pela de $H^1(\Omega_2)$. Temos também

$$H^1_0(\Omega_2) \subset H^1_\Gamma(\Omega_2) \subset H^1(\Omega_2).$$

Consideremos em $H^1_\Gamma(\Omega_2)$ a aplicação $v \to ||\nabla v||_{L^2(\Omega_2)}$ de $H^1_\Gamma(\Omega_2)$ em $\mathbb{R}$, definida por

$$||\nabla v||_{L^2(\Omega_2)} = \left(\int_{\Omega_2} |\nabla v|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Se $||\nabla v||_{L^2(\Omega_2)} = 0$, então $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} = 0$, logo v é constante nas componentes conexas de Ω_2. Sendo $v_{|\Gamma} = 0$, resulta que $v = 0$ em Ω_2. Portanto a aplicação acima define uma norma em $H^1_\Gamma(\Omega_2)$.

Na proposição abaixo segue um resultado de normas equivalentes que usaremos em seguida.

Proposição 2.4 *Em* $H^1_\Gamma(\Omega_2)$ *as normas* $||\nabla v||_{L^2(\Omega_2)}$ *e* $||v||_{1,2;\Omega_2}$ *são equivalentes, isto é, existem constantes* $C_1, C_2 > 0$*, tais que*

$$C_1||v||_{1,2;\Omega_2} \leq ||\nabla v||_{L^2(\Omega_2)} \leq C_2||v||_{1,2;\Omega_2}, \quad \forall v \in H^1_\Gamma(\Omega_2).$$

Demonstração:
É claro que

$$||\nabla v||_{L^2(\Omega_2)} \leq C_2||v||_{1,2;\Omega_2}, \quad \forall v \in H^1_\Gamma(\Omega_2), \tag{2.10}$$

onde, neste caso, $C_2 = 1$.

Resta provar o outro lado da desigualdade. Suponha-se falso, ou seja, não existe constante $C_1 > 0$ tal que

$$C_1||v||_{1,2;\Omega_2} \leq ||\nabla v||_{L^2(\Omega_2)}, \quad \forall v \in H^1_\Gamma(\Omega_2).$$

Negar-se esta desigualdade para todo $v \in H^1_\Gamma(\Omega_2)$, equivale a afirmar que fixado $C_1 > 0$ qualquer, existe ao menos um vetor v_1 de $H^1_\Gamma(\Omega_2)$ tal que

$$C_1||v_1||_{1,2;\Omega_2} > ||\nabla v_1||_{L^2(\Omega_2)}. \tag{2.11}$$

Resulta, daí, que fixadas as constantes $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \ldots,$ para cada uma existe ao menos um vetor $v \in H^1_\Gamma(\Omega_2)$, para o qual vale a desigualdade (2.11). Dito de modo explícito, existe uma seqüência $(\widetilde{v}_m) \subset H^1_\Gamma(\Omega_2)$, tais que

$$\frac{1}{m}||\widetilde{v}_m||_{1,2;\Omega_2} > ||\nabla \widetilde{v}_m||_{L^2(\Omega_2)} \quad \text{para} \quad m = 1, 2, \ldots \,.$$

Fazendo-se

$$v_m = \frac{\widetilde{v}_m}{||\widetilde{v}_m||_{1,2;\Omega_2}},$$

obtemos

$$||v_m||_{1,2;\Omega_2} = 1 \quad \text{para} \quad m = 1, 2, \ldots \,,$$

e

$$||\nabla v_m||_{L^2(\Omega_2)} = \frac{||\nabla \widetilde{v}_m||_{L^2(\Omega_2)}}{||\widetilde{v}_m||_{1,2;\Omega_2}} < \frac{1}{m} \quad \text{para} \quad m = 1, 2, \ldots \,.$$

A seqüência (v_m) é limitada em $H^1(\Omega_2)$. Sendo a fronteira $\Gamma \cup \Sigma$ de Ω_2 suposta bem regular, segue, do Teorema de Rellich-Kondrachov (ver Teorema C.16, Apêndice C), que a imersão $H^1(\Omega_2) \hookrightarrow L^2(\Omega_2)$ é compacta. Conclui-se que existe uma subseqüência (v_ν) de (v_m) tal que

$$v_\nu \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad H^1(\Omega_2) \tag{2.12}$$

e

$$v_\nu \to v \quad \text{em} \quad L^2(\Omega_2).$$

Por outro lado, sabemos que

$$||\nabla v_\nu||_{L^2(\Omega_2)} < \frac{1}{\nu}, \qquad \nu = 1, 2, 3, \dots \ ,$$

assim a seqüência numérica $\left(||\nabla v_\nu||_{L^2(\Omega_2)}\right)$ converge para zero, donde obtemos que

$$\left(\frac{\partial v_\nu}{\partial x_i}\right) \to 0 \quad \text{em} \quad L^2(\Omega_2), \qquad 0 \le i \le N.$$

Agora observamos que $H^1_\Gamma(\Omega_2)$ com a norma de $H^1(\Omega_2)$ é completo. Logo, da convergência dada em (2.12), segue-se que $v \in H^1_\Gamma(\Omega_2)$. Assim, $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega_2)$ e $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} = 0$, concluindo desse modo que v é constante em Ω_2.
Como $v \in H^1_\Gamma(\Omega_2)$, $v_{|\Gamma} = 0$, temos que

$$v = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_2.$$

Daí, obtemos que as seqüências (v_ν) e $\left(\dfrac{\partial v_\nu}{\partial x_i}\right)$ convergem forte para zero em $L^2(\Omega_2)$.
E, portanto

$$(v_\nu) \to 0 \quad \text{em} \quad H^1(\Omega_2),$$

o que é uma contradição já que

$$||v_\nu||_{1,2;\Omega_2} = 1 \quad \text{para} \quad \nu = 1, 2, \dots \ ,$$

e desse modo fica provado a equivalência entre as normas $||\nabla v||_{L^2(\Omega_2)}$ e $||v||_{1,2;\Omega_2}$.

C.q.d.

O lema a seguir nos permitirá fazer um estudo variacional do sistema (2.1)-(2.4).

Lema 2.1

(i) A aplicação $||\cdot||_E : H^1(\Omega_1) \times H^1_\Gamma(\Omega_2) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$||(u,v)||_E^2 = ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega_1)} + ||\nabla v||^2_{L^2(\Omega_2)} \tag{2.13}$$

define uma norma em E*, equivalente a norma* $||(u,v)||_D = ||u||_{1,2;\Omega_1} + ||v||_{1,2;\Omega_2}$ *usual de* $D = H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$.

(ii) E *é um subespaço fechado de* $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$.

Demonstração.

(i) Note que (2.13) define uma seminorma. Resta-nos apenas mostrar que

$$||(u,v)||_E = 0 \Leftrightarrow (u,v) = 0.$$

De fato, primeiramente se $(u,v) = 0$, então temos claramente que $||(u,v)||_E = 0$.
Agora suponha que $||(u,v)||_E = 0$.
Logo, por definição,

$$||\nabla u||_{L^2(\Omega_1)} = ||\nabla v||_{L^2(\Omega_2)} = 0.$$

Como vimos anteriormente, a aplicação $||\nabla v||_{L^2(\Omega_2)}$ define uma norma em $H^1_\Gamma(\Omega_2)$.
Então,

$$v = 0 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}_2.$$

Logo, pela condição de transmissão (2.3) segue-se que

$$u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma = \partial\Omega_1.$$

Por outro lado, usando a Teoria do Traço das funções de $H^1(\Omega_1)$, sobre a fronteira Σ de um aberto limitado Ω_1 do $\mathbb{R}^N$ (Miranda & Medeiros [24], p. 71-87), temos que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & H^1(\Omega_1) & \longrightarrow & L^2(\Sigma) \\ & u & \longmapsto & \gamma_0(u) = u_{|\Sigma} \end{array}$$

é linear contínua, ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$||\gamma_0(u)||_{L^2(\Sigma)} \le C||u||_{1,2;\Omega_1}, \quad \forall\ u \in H^1(\Omega_1). \tag{2.14}$$

Além disso, $Ker(\gamma_0) = H^1_0(\Omega_1)$.
Assim , $u \in H^1_0(\Omega_1)$ e, conseqüentemente,

$$u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_1.$$

Portanto, mostramos que (2.13) define uma norma em E.

Agora vamos provar a equivalência entre as normas. Inicialmente observe que

$$\begin{aligned} ||(u,v)||_D^2 &= (||u||_{1,2;\Omega_1} + ||v||_{1,2;\Omega_2})^2 \\ &\geq ||u||_{1,2;\Omega_1}^2 + ||v||_{1,2;\Omega_2}^2 \\ &\geq ||\nabla u||_{L^2(\Omega_1)}^2 + ||\nabla v||_{L^2(\Omega_2)}^2, \end{aligned}$$

o que implica que

$$||(u,v)||_E \leq ||(u,v)||_D. \tag{2.15}$$

Note que aplicando a Teoria do Traço de funções de $H^1(\Omega_2)$, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$||v||_{1,2;\Omega_2} \geq C_1 ||v||_{L^2(\Gamma\cup\Sigma)}, \quad \forall\ v \in H^1(\Omega_2), \tag{2.16}$$

e em particular,

$$||v||_{1,2;\Omega_2} \geq C_1 ||v||_{L^2(\Sigma)}, \quad \forall\ v \in H^1_\Gamma(\Omega_2). \tag{2.17}$$

Pela Proposição 2.4, temos que

$$||v||_{1,2;\Omega_2} \leq C_2 ||\nabla v||_{L^2(\Omega_2)} \quad \forall\ v \in H^1_\Gamma(\Omega_2). \tag{2.18}$$

Combinando essas duas últimas desigualdades teremos que existe uma constante $\theta > 0$ tal que

$$||\nabla v||_{L^2(\Omega_2)} \geq \theta ||v||_{L^2(\Sigma)}. \tag{2.19}$$

Para completarmos a demonstração da equivalência entre as normas precisamos da seguinte afirmação:

Afirmação: A aplicação $||| \cdot ||| : H^1(\Omega_1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$|||u||| = ||\nabla u||_{L^2(\Omega_1)} + ||u||_{L^2(\Sigma)}$$

define uma norma equivalente à norma usual de $H^1(\Omega_1)$, ou seja, existem constantes $K_1, K_2 > 0$ tais que

$$\underbrace{K_2 ||u||_{1,2;\Omega_1} \leq |||u|||}_{(*)_2} \qquad \text{e} \qquad \overbrace{|||u||| \leq K_1 ||u||_{1,2;\Omega_1}}^{(*)_1}. \tag{2.20}$$

De fato, como podemos observar $|||\ \cdot\ |||$ define uma norma. De (2.14) existe $C > 0$ tal que

$$||u||_{L^2(\Sigma)} \leq C||u||_{1,2;\Omega_1}, \quad \forall\ u \in H^1(\Omega_1).$$

Daí,

$$|||u||| = ||\nabla u||_{L^2(\Omega_1)} + ||u||_{L^2(\Sigma)} \leq ||\nabla u||_{L^2(\Omega_1)} + C||u||_{1,2;\Omega_1},$$

donde segue-se que

$$|||u||| \leq K_1||u||_{1,2;\Omega_1}. \tag{2.21}$$

Por outro lado, resulta do Teorema C.24 (Ver Apêndice C), que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{\Omega_1} |u|^2 dx \leq C \left(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Sigma} |u|^2 ds \right), \quad \forall\ u \in H^1(\Omega_1).$$

Daí,

$$||u||^2_{1,2;\Omega_1} = \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_1} |u|^2 dx \leq C_1 \left(||\nabla u||^2_{L^2(\Omega_1)} + ||u||^2_{L^2(\Sigma)} \right),$$

o que implica por sua vez, que

$$||u||^2_{1,2;\Omega_1} \leq C_1 \left(||\nabla u||_{L^2(\Omega_1)} + ||u||_{L^2(\Sigma)} \right)^2.$$

Donde concluímos que existe uma constante $K_2 > 0$ tal que

$$K_2||u||_{1,2;\Omega_1} \leq |||u|||. \tag{2.22}$$

Juntando (2.21) e (2.22) obtemos (2.20), mostrando assim a afirmação.

Agora usaremos essa afirmação e outros fatos para obtermos a equivalência desejada.

Por definição,

$$\begin{aligned} ||(u,v)||^2_D &= \left(||u||_{1,2;\Omega_1} + ||v||_{1,2;\Omega_2} \right)^2 \\ &= ||u||^2_{1,2;\Omega_1} + 2||u||_{1,2;\Omega_1}||v||_{1,2;\Omega_2} + ||v||^2_{1,2;\Omega_2}. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade $(*_2)$ dada em (2.20) teremos

$$\begin{aligned} ||(u,v)||^2_D &\leq C_3 \left(||\nabla u||_{L^2(\Omega_1)} + ||u||_{L^2(\Sigma)} \right)^2 + 2C_4 \left(||\nabla u||_{L^2(\Omega_1)} + ||u||_{L^2(\Sigma)} \right) ||v||_{1,2;\Omega_2} + ||v||^2_{1,2;\Omega_2} \\ &\leq C_3||\nabla u||^2_{L^2(\Omega_1)} + 2C_3||\nabla u||_{L^2(\Omega_1)}||u||_{L^2(\Sigma)} + C_3||u||^2_{L^2(\Sigma)} + 2C_4||\nabla u||_{L^2(\Omega_1)}||v||_{1,2;\Omega_2} \\ &\quad +2C_4||u||_{L^2(\Sigma)}||v||_{1,2;\Omega_2} + ||v||^2_{1,2;\Omega_2}, \end{aligned}$$

donde usando a condição de transmissão (2.3), substituindo as desigualdades (2.18) e (2.19), obtemos que

$$||(u,v)||_D^2 \leq C_5||\nabla u||^2_{L^2(\Omega_1)} + 2C_6||\nabla u||_{L^2(\Omega_1)}||\nabla v||_{L^2(\Omega_2)} + C_7||\nabla v||^2_{L^2(\Omega_2)},$$

o que implica, devido a uma simples desigualdade de números reais, que

$$||(u,v)||_D^2 \leq C_8||\nabla u||^2_{L^2(\Omega_1)} + C_9||\nabla v||^2_{L^2(\Omega_2)}.$$

Escrevendo $C_{10} = \max\{C_8, C_9\}$, temos que

$$||(u,v)||_D^2 \leq C_{10}||(u,v)||_E^2,$$

ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$C||(u,v)||_D \leq ||(u,v)||_E. \tag{2.23}$$

Essa última desigualdade juntamente com (2.15) resulta na equivalência das normas, concluindo com a prova do item *(i)*.

(ii) Inicialmente, observamos que E é um subespaço de $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$. Então, resta-nos mostrar que E é fechado em $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$. Para isto, vamos considerar uma seqüência $(w_n) = ((u_n, v_n)) \subset E$ tal que

$$w_n \to w_0 = (u_0, v_0) \quad \text{em} \quad H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2).$$

Logo,

$$u_n = v_n \quad \text{sobre} \quad \Sigma = \partial\Omega_1 \tag{2.24}$$

e

$$v_n = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma = \partial\Omega \tag{2.25}$$

Temos também que,

$$u_n \to u_0 \quad \text{em} \quad H^1(\Omega_1) \tag{2.26}$$

e

$$v_n \to v_0 \quad \text{em} \quad H^1(\Omega_2). \tag{2.27}$$

Observe, usando a desigualdade (2.16), temos que

$$||v_n - v_0||_{1,2;\Omega_1} \geq C_1||v_n - v_0||_{L^2(\Sigma\cup\Gamma)},$$

o que implica, devido a (2.25), que

$$||v_n - v_0||_{1,2;\Omega_1} \geq C_1||v_0||_{L^2(\Gamma)},$$

ou seja,

$$||v_0||_{L^2(\Gamma)} \leq C_2||v_n - v_0||_{1,2;\Omega_1}.$$

Decorre da convergência dada em (2.27) que o lado direito desta última desigualdade tende a zero e, portanto,

$$v_0 = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma,$$

ou seja,

$$v_0 \in H^1_\Gamma(\Omega_2).$$

Por outro lado, segue-se que

$$\begin{aligned} ||u_0 - v_0||_{L^2(\Sigma)} &= ||(u_0 - u_n) + (v_n - v_0)||_{L^2(\Sigma)} \\ &\leq ||u_0 - u_n||_{L^2(\Sigma)} + ||v_n - v_0||_{L^2(\Sigma)} \\ &\leq ||\nabla u_0 - \nabla u_n||_{L^2(\Omega_1)} + ||u_0 - u_n||_{L^2(\Sigma)} + ||v_n - v_0||_{L^2(\Sigma)} \end{aligned}$$

donde, devido a desigualdade dada em (2.17), resulta em

$$||u_0 - v_0||_{L^2(\Sigma)} \leq |||u_0 - u_n||| + C||v_n - v_0||_{1,2;\Omega_2}.$$

De $(*_1)$ dada em (2.20), resulta que

$$||u_0 - v_0||_{L^2(\Sigma)} \leq K_1||u_0 - u_n||_{1,2;\Omega_1} + C||v_n - v_0||_{1,2;\Omega_2} \to 0, \quad \text{qdo.} \quad n \to +\infty,$$

uma vez que as convergências dadas em (2.26) e (2.27) ocorrem.

Conseqüentemente,

$$\int_\Sigma |u_0 - v_0|^2 ds = 0,$$

donde segue-se que

$$u_0 = v_0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma.$$

Mostrando desse modo que

$$w_0 = (u_0, v_0) \in E,$$

e assim concluímos com a demonstração do item *(ii)* e, conseqüentemente com a do lema 2.1. ***C.q.d.***

Desse modo, dizemos que uma dupla de funções $(u,v) \in E$ é solução fraca do sistema (2.1) - (2.4) se, $\forall\ (\varphi,\psi) \in E$, tivermos

$$a\left(||\nabla u||^2_{L^2(\Omega_1)}\right)\int_{\Omega_1}\nabla u\nabla\varphi dx + b\left(||\nabla v||^2_{L^2(\Omega_2)}\right)\int_{\Omega_2}\nabla v\nabla\psi dx = \int_{\Omega_1} f(x,u)\varphi dx + \int_{\Omega_2} g(x,v)\psi dx.$$

Observação 2.1 *Note que as soluções fracas do sistema (2.1)-(2.4) são pontos críticos do funcional $J : E \to \mathbb{R}$ dado por*

$$J(u,v) = \frac{1}{2}A\left(||\nabla u||^2_{L^2(\Omega_1)}\right) + \frac{1}{2}B\left(||\nabla v||^2_{L^2(\Omega_2)}\right) - \int_{\Omega_1} F(x,u)dx - \int_{\Omega_2} G(x,v)dx,$$

onde A, B, F e G denotam as primitivas das funções a, b, f e g, respectivamente.

Agora mostraremos que o funcional J, acima definido, é fracamente semicontínuo inferiormente (fracamente s.c.i.) e de classe C^1 com

$$\begin{aligned}\langle J'(u,v),(\varphi,\psi)\rangle = \ & a\left(||\nabla u||^2_{L^2(\Omega_1)}\right)\textstyle\int_{\Omega_1}\nabla u\nabla\varphi dx + b\left(||\nabla v||^2_{L^2(\Omega_2)}\right)\int_{\Omega_2}\nabla v\nabla\psi dx \\ & -\textstyle\int_{\Omega_1} f(x,u)\varphi dx - \int_{\Omega_2} g(x,v)\psi dx, \quad \forall\ (u,v),(\varphi,\psi) \in E.\end{aligned}$$

Primeiramente mostraremos que o funcional J é de classe C^1. Para isto, consideremos os seguintes funcionais:

- A aplicação

$$\begin{aligned} J_1\ :\ H^1(\Omega_1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u \quad &\longmapsto J_1(u) = \tfrac{1}{2}A\left(||\nabla u||^2_{L^2(\Omega_1)}\right)\end{aligned}$$

é de classe $C^1(H^1(\Omega_1);\mathbb{R})$ uma vez que é composição de aplicações de classe C^1, ou seja,

$$J_1 = \frac{1}{2}(A \circ \phi),$$

onde A é a primitiva da função contínua a e $\phi(u) = ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega_1)}$.
Daí, aplicando a regra da cadeia, obtemos

$$\langle J_1'(u),\varphi\rangle = a\left(||\nabla u||^2_{L^2(\Omega_1)}\right)\int_{\Omega_1}\nabla u\nabla\varphi dx, \quad \forall\ \varphi \in H^1(\Omega_1).$$

- Segue-se, como acima, que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} J_2 \ : \ H^1(\Omega_2) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & J_2(v) = \frac{1}{2}B\left(||\nabla v||^2_{L^2(\Omega_2)}\right) \end{array}$$

é de classe $C^1(H^1(\Omega_2);\mathbb{R})$ com

$$\langle J_2'(v),\varphi\rangle = b\left(||\nabla v||^2_{L^2(\Omega_2)}\right)\int_{\Omega_2}\nabla v\nabla\psi dx, \quad \forall\ \psi\in H^1(\Omega_2).$$

- Agora observe a aplicação dada por

$$\begin{array}{rcl} J_3 \ : \ H^1(\Omega_1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & J_3(u) = \int_{\Omega_1} F(x,u)dx. \end{array}$$

Antes de provarmos que este funcional é de classe C^1, recordando a hipótese (2.6), notamos que ela é equivalente a:
dado $\epsilon > 0$, existe uma constante $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq \epsilon|s|^{\rho-1} + C_\epsilon, \quad \forall\ (x,s)\in\overline{\Omega}_1\times\mathbb{R}. \tag{2.28}$$

Daí, deduzimos que a primitiva de f, que estamos denotando por F, satisfaz, para $\rho \leq 2\sigma$ com $1\leq\rho<2N/N-2$ se $N\geq 3$ ou $\rho>1$ se $N=2$, que

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{F(x,s)}{|s|^\rho} = 0$$

e, conseqüentemente, dado $\epsilon > 0$, existe uma constante $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|F(x,s)| \leq \epsilon|s|^{\rho} + C_\epsilon, \quad \forall\ (x,s)\in\overline{\Omega}_1\times\mathbb{R}. \tag{2.29}$$

Agora, mostraremos que o funcional J_3 é de classe C^1 com

$$\langle J_3'(u),\varphi\rangle = \int_{\Omega_1} f(x,u)\varphi dx.$$

Dividiremos a demonstração em dois casos:

1°CASO: $N \geq 3$.

Provaremos este caso, seguindo as seguintes etapas:

(i) J_3 é Fréchet Diferenciável com

$$\langle J_3'(u),\varphi\rangle = \int_{\Omega_1} f(x,u)\varphi dx, \quad \forall\ \varphi\in H^1(\Omega_1).$$

De fato, seja $u \in H^1(\Omega_1)$ fixado e para $\varphi \in H^1(\Omega_1)$, considere

$$r(\varphi) = J_3(u+\varphi) - J_3(u) - \int_{\Omega_1} f(x,u)\varphi dx. \tag{2.30}$$

Nosso objetivo é mostrar que

$$\lim_{||\varphi||_{1,2;\Omega_1}\to 0} \frac{r(\varphi)}{||\varphi||_{1,2;\Omega_1}} = 0,$$

ou seja, dado $\epsilon' > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$||\varphi||_{1,2;\Omega_1} < \delta \quad \Rightarrow \quad |r(\varphi)| \le \epsilon' ||\varphi||_{1,2;\Omega_1}.) \tag{2.31}$$

Segue da definição de J_3 e de (2.30) que

$$r(\varphi) = \int_{\Omega_1} \left[F(x,u+\varphi) - F(x,u)\right] dx - \int_{\Omega_1} f(x,u)\varphi dx. \tag{2.32}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$F(x,u+\varphi) - F(x,u) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(x,u+t\varphi)\ dt.$$

Além disso, temos que

$$\frac{d}{dt} F(x,u+t\varphi) = f(x,u+t\varphi)\varphi.$$

Conseqüentemente,

$$F(x,u+\varphi) - F(x,u) = \int_0^1 f(x,u+t\varphi)\varphi dt,$$

que substituida na identidade (2.32) produz

$$r(\varphi) = \int_{\Omega_1} \left[\int_0^1 \left(f(x,u+t\varphi) - f(x,u)\right)\varphi\ dt\right] dx.$$

Aplicando o Teorema de Fubini (ver Teorema C.17, Apêndice C), obtemos

$$|r(\varphi)| \le \int_0^1 \left[\int_{\Omega_1} |f(x,u+t\varphi) - f(x,u)|\,|\varphi|\, dx\right] dt. \tag{2.33}$$

Afirmação 1: $f(\ \cdot, u) \in L^{q'}(\Omega_1)$,

onde $q' = \frac{2N}{N+2}$ é o conjugado de $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

De fato, usando (2.28) teremos

$$\begin{aligned}
\textstyle\int_{\Omega_1} |f(x,u)|^{q'} dx &\le \textstyle\int_{\Omega_1} \left[\epsilon |u|^{\rho-1} + C_\epsilon\right]^{q'} dx \\
&\le \textstyle\int_{\Omega_1} \left[2\max\{\epsilon|u|^{\rho-1}, C_\epsilon\}\right]^{q'} dx \\
&\le \Big(C_1 \textstyle\int_{\Omega_1} |u|^{(\rho-1)\cdot q'} dx + C_2 \int_{\Omega_1} dx\Big) < \infty,
\end{aligned}$$

devido Ω_1 ser limitado e a imersão contínua $H^1(\Omega_1) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega_1)$, $1 \leq q_1 \leq \frac{2N}{N-2} = 2^*$ (ver Teorema C.14,item*(i)* Apêndice C), ficando assim justificada a afirmação 1.

Por outro lado, uma vez que $\varphi \in H^1(\Omega_1)$ resulta, também da imersão contínua $H^1(\Omega_1) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega_1)$ (ver Teorema C.14,item*(i)* Apêndice C), que

$$\varphi \in L^{2^*}(\Omega_1),$$

onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $\frac{1}{2^*} + \frac{1}{q'} = 1$.

Daí, aplicando a Desigualdade de Hölder (ver Teorema C.5, Apêndice C) em (2.33), teremos

$$|r(\varphi)| \leq \int_0^1 \Big(||f(\ \cdot, u + t\varphi) - f(\ \cdot, u)||_{L^{q'}(\Omega_1)} \cdot ||\varphi||_{L^{2^*}(\Omega_1)} \Big)\, dt. \tag{2.34}$$

Afirmação 2: Vale a convergência

$$f(x, u + t\varphi) \longrightarrow f(x, u) \quad em \quad L^{\frac{2^*}{\rho-1}}(\Omega_1)$$

uniforme em $t \in [0,1]\,, \forall x \in \Omega_1$.

Observamos que esta afirmação equivalente a

$$f(x, u + t\varphi_n) \longrightarrow f(x, u) \quad \text{em} \quad L^{\frac{2^*}{\rho-1}}(\Omega_1)$$

uniforme em t, com $\varphi_n \to 0$ em $H^1(\Omega_1)$ qdo $n \to +\infty$.

Demonstração da Afirmação 2:

Consideremos $(\varphi_n) \subset H^1(\Omega_1)$ *com* $\varphi_n \to 0$ *em* $H^1(\Omega_1)$. Segue da imersão contínua $H^1(\Omega_1) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega_1)$ (ver Teorema C.14, item*(i)* Apêndice C) que

$$\varphi_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^{2^*}(\Omega_1),$$

onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

Logo (ver Teorema C.13, Apêndice C), existe uma subseqüência de (φ_n) (que continuaremos denotando por (φ_n)) e $h \in L^{2^*}(\Omega_1)$ de modo que

$$|\varphi_n(x)| \leq h(x) \quad q.t.p. \quad \text{em} \quad \Omega_1.$$

e

$$(u + t\varphi_n)(x) \longrightarrow u(x) \quad q.t.p. \quad \text{em} \quad \Omega_1. \tag{2.35}$$

Daí,

$$|(u+t\varphi_n)(x)| \leq (|u|+h)(x) \;\; q.t.p., \quad \Omega_1 \quad \forall\, t \in [0,\ 1]\,. \tag{2.36}$$

Agora usando a continuidade de f e (2.35), temos que

$$f(x, u+t\varphi_n) \longrightarrow f(x,u) \; q.t.p. \quad \text{em} \;\; \Omega_1,$$

ou seja,

$$|f(x,(u+t\varphi_n)(x)) - f(x,u(x))|^{\frac{2^*}{\rho-1}} \longrightarrow 0 \;\; q.t.p. \;\; \text{em} \;\; \Omega_1.$$

Além disso, usando a condição de crescimento dada em (2.28), a limitação uniforme em (2.36) e o fato de Ω_1 ser limitado, resulta que existe uma função $\Phi \in L^1(\Omega_1)$ tal que

$$|f(x,(u+t\varphi_n)(x)) - f(x,u(x))|^{\frac{2^*}{\rho-1}} \leq \Phi,$$

donde segue-se, aplicando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue (Ver Teorema C.7, Apêndice C), que

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_{\Omega_1} |f(x,(u+t\varphi_n)(x)) - f(x,u(x))|^{\frac{2^*}{\rho-1}} dx\Big) = 0$$

isto é,

$$f(x, u+t\varphi) \longrightarrow f(x,u) \;\; \text{em} \;\; L^{\frac{2^*}{\rho-1}}(\Omega_1),$$

mostrando a afirmação 2.

Isto também significa, dado $\epsilon' > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$||\varphi||_{1,2;\Omega_1} < \delta \;\Rightarrow\; ||f(\,\cdot, u+t\varphi) - f(\,\cdot, u)||_{L^{\frac{2^*}{\rho-1}}(\Omega_1)} < \epsilon',$$

uniforme em t.

Desde que $1 < q' < \frac{2^*}{\rho-1}$ e Ω_1 é limitado (ver Teorema C.20, Apêndice C), então vale a seguinte imersão contínua

$$L^{\frac{2^*}{\rho-1}}(\Omega_1) \hookrightarrow L^{q'}(\Omega_1),$$

onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ e $q' = \frac{2N}{N+2}$.

Daí,

$$||\varphi||_{1,2;\Omega_1} < \delta \;\Rightarrow\; ||f(\,\cdot, u+t\varphi) - f(\,\cdot, u)||_{L^{q'}(\Omega_1)} < C\epsilon',$$

uniforme em t.

Substituindo isto em (2.34) encontramos

$$|r(\varphi)| \leq C\epsilon' \cdot ||\varphi||_{L^{2^*}(\Omega_1)},$$

que pela imersão contínua $H^1(\Omega_1) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega_1)$, $1 \leq q_1 \leq \frac{2N}{N-2} = 2^*$ (ver Teorema C.14, item *(i)* Apêndice C) resulta em

$$|r(\varphi)| \leq C_1\epsilon' ||\varphi||_{1,2;\Omega_1} \quad \text{sempre que} \quad ||\varphi||_{1,2;\Omega_1} < \delta,$$

mostrando (2.31) e, concluindo desse modo que o funcional J_3 definido anteriormente é Fréchet diferenciável com

$$\langle J_3'(u), \varphi\rangle = \int_{\Omega_1} f(x,u)\varphi dx, \ \forall \varphi \in H^1(\Omega_1).$$

(ii) J_3' é contínuo.

De fato, seja

$$(v_n) \subset H^1(\Omega_1) \ \text{ com } \ v_n \longrightarrow 0.$$

Como no item anterior, usando o Teorema da convergência dominada de Lebesgue(ver Teorema C.7, Ap.C), temos que

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_{\Omega_1} |f(x,(u+v_n)(x)) - f(x,u(x))|^{\frac{2^*}{\rho-1}} dx\Big) = 0$$

Uma vez que $1 < q' < \frac{2^*}{\rho-1}$ e Ω_1 é limitado (ver Teorema C.20, Apêndice C), então

$$||f(\ \cdot, u+v_n) - f(\ \cdot, u)||_{L^{q'}(\Omega_1)} \longrightarrow 0 \ \text{ qdo. } \ v_n \to 0 \ \ em \ \ H^1(\Omega_1). \tag{2.37}$$

Por outro lado, sabemos que

$$||J_3'(u+v_n) - J_3'(u)||_{-1,2;\Omega_1} = \sup_{||\varphi||_{1,2;\Omega_1} \leq 1} |\langle J_3'(u+v_n) - J_3'(u), \varphi\rangle|. \tag{2.38}$$

No entanto, usando a desigualdade de Hölder (ver Teorema C.5, Apêndice C) e em seguida a imersão contínua $H^1(\Omega_1) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega_1)$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ (ver Teorema C.14, item*(i)* Apêndice C), decorre que

$$|\langle J_3'(u+v_n) - J_3'(u), \varphi\rangle| \leq K_1 ||f(\ \cdot, u+v_n) - f(\ \cdot, u)||_{L^{q'}(\Omega_1)} \cdot ||\varphi||_{1,2;\Omega_1}. \tag{2.39}$$

Combinando (2.39) com (2.38) e usando a convergência dada em (2.37) chegamos que

$$||J_3'(u+v_n) - J_3'(u)||_{-1,2;\Omega_1} \longrightarrow 0,$$

mostrando assim a continuidade do funcional J_3', $\quad para \quad N \geq 3$.

Portanto, pelos itens **(i)** e **(ii)**, mostramos, para $N \geq 3$, que o funcional $J_3 \in C^1\left(H^1(\Omega_1);\mathbb{R}\right)$ com

$$\langle J_3'(u), \varphi\rangle = \int_{\Omega_1} f(x,u)\varphi dx, \ \forall \varphi \in H^1(\Omega_1).$$

2ºCASO: $\quad N = 2$.

Neste caso, procedemos de maneira análoga ao 1ºcaso, fazendo apenas algumas modificações que elencaremos abaixo:

Primeiramente, substituimos a imersão contínua $H^1(\Omega_1) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega_1)$, $1 \leq q_1 \leq \frac{2N}{N-2} = 2^*$ (ver Teorema C.14, item *(i)* Apêndice C),pela imersão $H^1(\Omega_1) \hookrightarrow L^{q_1}(\Omega_1)$, $1 \leq q_1 < \infty$ (ver Teorema C.14, item *(ii)* Apêndice C).

Em seguida, utilizando a imersão acima citada mostra-se que

$$f(\ \cdot, u) \in L^{\frac{\rho}{\rho-1}}(\Omega_1),$$

onde $\frac{\rho}{\rho-1}$ é o conjugado de ρ,

e

$$f(x, u + t\varphi) \longrightarrow f(x,u) \ \text{ em } \ L^{\frac{\rho}{\rho-1}}(\Omega_1).$$

uniforme em t.

- De modo análogo segue-se que o funcional

$$\begin{array}{rcl} J_4 \ : \ H^1(\Omega_2) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & J_4(v) = \int_{\Omega_2} G(x,v)dx, \end{array}$$

é de classe $C^1\left(H^1(\Omega_2);\mathbb{R}\right)$ com

$$\langle J_4'(v), \psi\rangle = \int_{\Omega_2} g(x,v)\psi dx, \ \forall \psi \in H^1(\Omega_2).$$

Desse modo, concluímos que o funcional $J \in C^1(E;\mathbb{R})$ com

$$\begin{aligned} \langle J'(u,v), (\varphi,\psi)\rangle = \ & a\left(||\nabla u||^2_{L^2(\Omega_1)}\right)\int_{\Omega_1} \nabla u \nabla \varphi dx + b\left(||\nabla v||^2_{L^2(\Omega_2)}\right)\int_{\Omega_2} \nabla v \nabla \psi dx \\ & - \int_{\Omega_1} f(x,u)\varphi dx - \int_{\Omega_2} g(x,v)\psi dx, \quad \forall \ (u,v), (\varphi,\psi) \in E. \end{aligned}$$

C.q.d.

Agora objetivamos mostrar que o funcional J, definido anteriormente, é fracamente semicontínuo inferiormente (fracamente s.c.i.). De fato, seja $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u_0, v_0)$ em E,isto é,

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad em \quad H^1(\Omega_1)$$

e

$$v_n \rightharpoonup v_0 \quad em \quad H^1_\Gamma(\Omega_2).$$

Conseqüentemente, devido a imersão compacta $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ (ver Teorema C.16, itens (i) e (ii), Apêndice C), temos que existe uma subseqüência de (u_n) (que continuaremos denotando por (u_n)) tal que

$$u_n \longrightarrow u_0 \ \ em \ \ L^\rho(\Omega),$$

para $1 \leq \rho < \frac{2N}{N-2} = 2^*$ se $N > 2$ ou $1 < \rho < +\infty$ se $N = 2$.
Logo (ver Teorema C.13, Apêndice C), existe uma subseqüência da subseqüência (u_n)(que novamente continuamos denotando por (u_n))de modo que

$$u_n(x) \longrightarrow u_0(x) \ \ q.t.p. \ \text{em} \ \ \Omega_1$$

e

$$|u_n(x)| \leq h(x) \ \ q.t.p. \ \text{em} \ \ \Omega_1, \quad h \in L^\rho(\Omega_1).$$

Assim, usando a continuidade da função F e sua condição de crescimento dada em (2.29), obtemos

$$F(x, u_n(x)) \longrightarrow F(x, u_0(x)) \ \ q.t.p. \ \ em \ \ \Omega_1 \tag{2.40}$$

e

$$F(x, u_n(x)) \leq (\epsilon h(x)^\rho + C_\epsilon) \in L^1(\Omega_1), \tag{2.41}$$

Segue então, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\int_{\Omega_1} F(x, u_n(x)) \ dx \longrightarrow \int_{\Omega_1} F(x, u_0(x)) \ dx. \tag{2.42}$$

De modo inteiramente análogo, teremos

$$\int_{\Omega_2} G(x, v_n(x)) \ dx \longrightarrow \int_{\Omega_2} G(x, v_0(x)) \ dx. \tag{2.43}$$

Agora recordando a definição do funcional J, usando a continuidade das funções A e B e propriedades de limite, temos

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} J(u_n, v_n) \geq \; & \tfrac{1}{2}A\left(\liminf_{n\to\infty} ||\nabla u_n||^2_{L^2(\Omega_1)}\right) + \tfrac{1}{2}B\left(\liminf_{n\to\infty} ||\nabla v_n||^2_{L^2(\Omega_2)}\right) \\ & - \limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega_1} F(x, u_n(x))dx - \limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega_2} G(x, v_n(x))dx, \end{aligned}$$

donde decorre, usando o fato de as funções A e B serem crescentes, a convexidade da norma $||.||^2_{L^2}$, (2.42) e (2.43), que

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} J(u_n, v_n) \geq \; & \tfrac{1}{2}A\left(||\nabla u_0||^2_{L^2(\Omega_1)}\right) + \tfrac{1}{2}B\left(||\nabla v_0||^2_{L^2(\Omega_2)}\right) \\ & - \int_{\Omega_1} F(x, u_0(x))dx - \int_{\Omega_2} G(x, v_0(x))dx, \end{aligned}$$

isto é,

$$\liminf_{n\to\infty} J(u_n, v_n) \geq J(u_0, v_0),$$

mostrando que o funcional J é fracamente semicontínuo inferiormente.

Finalizamos esta secão apresentando um resultado de regularidade para o problema de transmissão elíptico. Seja $(u, v) \in E$ um ponto crítico de J em E e escrevamos $\alpha = a\left(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx\right)$ e $\beta = b\left(\int_{\Omega_2} |\nabla v|^2 dx\right)$. Agora observe que as funções

$$f_1(x) = f(x, u(x)) \quad e \quad g_1(x) = g(x, v(x))$$

são L^2 na variável x. Daí, segue-se (Ladyzhenskaya & Ural'tseva [17], p.386-403) que (u, v) é a única solução em $H^2(\Omega_1) \times H^2(\Omega_2)$ do sistema

$$-\alpha\Delta u = f_1, \quad em \quad \Omega_1, \tag{2.44}$$

$$-\beta\Delta v = g_1, \quad em \quad \Omega_2, \tag{2.45}$$

$$v = 0, \quad sobre \quad \Gamma, \tag{2.46}$$

$$u = v \quad e \quad \alpha\frac{\partial u}{\partial \nu} = \beta\frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad sobre \quad \Sigma. \tag{2.47}$$

Se além disso, f, g são localmente Lipschitzianas, então (u, v) é uma solução de classe C^2.

2.3 Provas dos Teoremas

Nesta seção apresentaremos as demonstrações dos Teoremas enunciados no início do capítulo.

Demonstração do teorema 2.1:

A demonstração desse teorema é baseada em um argumento de minimização. Especificamente, caminharemos com o objetivo de aplicarmos o Teorema C.8 (ver Apêndice C) para assegurar a existência de um mínimo para o funcional J. Como J é de classe C^1, segue-se então, que esse mínimo será ponto crítico do funcional J associado ao problema (2.1)-(2.4) e, portanto asseguramos a existência de pelo menos uma solução.

Vejamos: Sabemos que

$$A(s) = \int_0^s a(\varpi)d\varpi \quad e \quad B(s) = \int_0^s b(\varpi)d\varpi.$$

Logo, usando a hipótese (2.5), obtemos que

$$A(s) \geq \frac{a_1}{\sigma}s^\sigma \quad \text{e} \quad B(s) \geq \frac{b_1}{\sigma}s^\sigma, \quad \forall\ s > 0. \tag{2.48}$$

Consequentemente,

$$J(u,v) \geq \frac{a_1}{2\sigma}||\nabla u||^{2\sigma}_{L^2(\Omega_1)} + \frac{b_1}{2\sigma}||\nabla v||^{2\sigma}_{L^2(\Omega_2)} - \int_{\Omega_1} F(x,u)dx - \int_{\Omega_2} G(x,v)dx. \tag{2.49}$$

Como vimos anteriormente, da hipótese (2.6) decorre (2.29), que por sua vez, resulta que

$$\int_{\Omega_1} F(x,u(x))dx \leq \epsilon_1||u||^\rho_{L^\rho(\Omega_1)} + C_{\epsilon_1}|\Omega_1|.$$

Da imersão contínua $H^1(\Omega_1) \hookrightarrow L^q(\Omega_1)$, com $1 \leq q \leq \frac{2N}{N-2} = 2^*$ se $N \geq 3$ e $1 \leq q < \infty$ se $N = 2$(ver Teorema C.14, itens *(i)* e *(ii)* Apêndice C), temos que

$$||u||_{L^\rho(\Omega_1)} \leq \gamma_1||u||_{1,2;\Omega_1},$$

donde segue

$$\int_{\Omega_1} F(x,u(x))dx \leq \epsilon_1\gamma_1||u||^\rho_{1,2;\Omega_1} + C_{\epsilon_1}|\Omega_1|.$$

De modo análogo, obtemos a desigualdade abaixo para a função G,

$$\int_{\Omega_2} G(x,v(x))dx \leq \epsilon_2\gamma_2||u||^\rho_{1,2;\Omega_2} + C_{\epsilon_2}|\Omega_2|.$$

Substituindo essas duas últimas desigualdades em (2.49), implica que

$$J(u,v) \geq C_1\Big(||\nabla u||^{2\sigma}_{L^2(\Omega_1)} + ||\nabla v||^{2\sigma}_{L^2(\Omega_2)}\Big) - \epsilon\gamma\Big(||u||^\rho_{1,2;\Omega_1} + ||u||^\rho_{1,2;\Omega_2}\Big) - C_3$$

Daí, fazendo alguns cálculos e usando o Lema 2.1(item ii), deduzimos que

$$J(u,v) \geq C_1||(u,v)||_E^{2\sigma} - \epsilon C_2||(u,v)||_E^{\rho} - C_3. \tag{2.50}$$

Uma vez que $\rho \leq 2\sigma$ e, escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, concluímos que

$$J(u,v) \longrightarrow +\infty \quad \text{qdo.} \quad ||(u,v)||_E \to +\infty,$$

ou seja, o funcional J é coercivo em E. Além disso, sabemos que o funcional $J : E \to \mathbb{R}$, *onde* E é um espaço de Banach reflexivo, é fracamente s.c.i. e de classe C^1. Conseqüentemente (ver Teorema C.8, Apêndice C), existe $(u_0, v_0) \in E$ tal que

$$J'(u_0, v_0) = 0,$$

donde resulta que o sistema (2.1) - (2.4) tem pelo menos uma solução.

Para finalizarmos a demonstração resta-nos mostrar que as soluções são não-negativas. Para isto, definamos as funções:

$$\widetilde{f}(x,u) = \begin{cases} f(x,u), & se \quad u \geq 0, \\ 0, & se \quad u < 0, \end{cases}$$

e

$$\widetilde{g}(x,v) = \begin{cases} g(x,v), & se \quad v \geq 0, \\ 0, & se \quad v < 0. \end{cases}$$

Podemos observar que as funções $\widetilde{f}$ *e* $\widetilde{g}$ satisfazem as mesmas e respectivas hipóteses das funções f *e* g. Daí, segue-se que existe uma solução $(u,v) \in E$ do sistema (2.1) - (2.4), ponto crítico do funcional $\widetilde{J}$, onde $\widetilde{J}$ é o mesmo funcional J, trocando f por $\widetilde{f}$ e g por $\widetilde{g}$.

Por outro lado, observamos que

$$\int_{\Omega_1} \widetilde{f}(x,u)u^- dx = \int_{\Omega_2} \widetilde{g}(x,v)v^- dx = 0,$$

onde $u^- = -\min\{0,u\}$ *e* $v^- = -\min\{0,v\}$(com essa consideração, temos que $u = u^+ - u^-$ e $v = v^+ - v^-$).

Multiplicando (2.45) e (2.46) por u^- *e* v^-, respectivamente, e integrando por partes, obtemos

$$\alpha \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla u^- dx = \int_{\Omega_1} \widetilde{f}(x,u)u^- dx = 0$$

e

$$\beta \int_{\Omega_2} \nabla v \nabla v^- dx = \int_{\Omega_2} \widetilde{g}(x,v) v^- dx = 0,$$

isto é,

$$\alpha \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla u^- dx + \beta \int_{\Omega_2} \nabla v \nabla v^- dx = 0.$$

Ora, uma vez que $u = u^+ - u^-$ e $v = v^+ - v^-$, resulta que

$$\alpha \int_{\Omega_1} |\nabla u^-|^2 dx + \beta \int_{\Omega_2} |\nabla v^-|^2 dx = 0.$$

Como $\alpha = a\left(\int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx\right)$, $\beta = b\left(\int_{\Omega_2} |\nabla v|^2 dx\right)$ e as funções a e b são positivas, segue-se que

$$||\nabla u^-||_{L^2(\Omega_1)} = ||\nabla v^-||_{L^2(\Omega_2)} = 0,$$

ou seja,

$$||(u^-, v^-)||_E = 0.$$

Portanto, $u, v \geq 0$, e conseqüentemente

$$\widetilde{f}(x,u) = f(x,u) \quad e \quad \widetilde{g}(x,v) = g(x,v).$$

Assim, concluímos que (u,v) é de fato uma solução não-negativa do sistema (2.1) - (2.4). ***C.q.d.***

Agora com esse resultado em mãos, faremos uso do princípio de máximo forte de Hopf, para garantir que a solução é positiva.

Demonstração do teorema 2.2:

Seja (u,v) uma solução não-negativa dada pelo Teorema 2.1 a qual é, de fato, um mínimo global do funcional

$$\widetilde{J}(u,v) = \frac{1}{2} A\left(||\nabla u||^2_{L^2(\Omega_1)}\right) + \frac{1}{2} B\left(||\nabla v||^2_{L^2(\Omega_2)}\right) - \int_{\Omega_1} \widetilde{F}(x,u) dx - \int_{\Omega_2} \widetilde{G}(x,v) dx \qquad (2.51)$$

Objetivamos mostrar que $u \neq 0$. Para isso, considere $\varphi_1 > 0$ a primeira autofunção de $(-\Delta; H_0^1(\Omega_1))$ com $||\nabla \varphi_1||_{L^2(\Omega)} = 1$. Então,

$$(t\varphi_1, 0) \in E, \quad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Segue da hipótese (2.8), que existem $\epsilon, r' > 0$ tal que

$$\widetilde{f}(x,u) \geq \lambda_1 \left(a_2 + a_3 \tau^{-1} + \epsilon\right) u, \quad \text{se} \quad 0 < u < r',$$

por conseguinte,

$$\widetilde{F}(x,u) \geq \frac{\lambda_1}{2}\left(a_2 + \frac{a_3}{\tau} + \epsilon\right)u^2, \quad \text{se} \quad 0 < u < r'. \tag{2.52}$$

Agora observamos que se $0 < t < r'/||\varphi_1||_\infty$, então $0 < t\varphi_1 < r'$. Conseqüentemente, fazendo $u = t\varphi_1$ em (2.52) e integrando em Ω_1, obtemos

$$\int_{\Omega_1} \widetilde{F}(x, t\varphi_1(x))dx \geq \frac{\lambda_1}{2}\left(a_2 + \frac{a_3}{\tau} + \epsilon\right)t^2 \int_{\Omega_1} |\varphi_1|^2 dx.$$

Por outro lado, recordamos que

$$\int_{\Omega_1} |\nabla\varphi_1|^2 dx = \lambda_1 \int_{\Omega_1} |\varphi_1|^2 dx,$$

isto é,

$$\int_{\Omega_1} |\varphi_1|^2 dx = \frac{1}{\lambda_1}.$$

Logo,

$$\int_{\Omega_1} \widetilde{F}(x, t\varphi_1(x))dx \geq \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{a_3}{\tau} + \epsilon\right)t^2. \tag{2.53}$$

Já da hipótese (2.7) resulta que

$$A(s) \leq a_2 s + \frac{a_3}{\tau}s^\tau, \quad \text{se} \quad 0 < s < r. \tag{2.54}$$

Fazendo $u = t\varphi_1$ *e* $v = 0$ em (2.51) e usando (2.53) e (2.54), teremos

$$\widetilde{J}(t\varphi_1, 0) \leq \frac{a_3}{2\tau}\left(t^{2\tau} - t^2\right) - \epsilon\frac{t^2}{2},$$

donde deduzimos, para $t > 0$ suficientemente pequeno, que

$$\widetilde{J}(t\varphi_1, 0) < 0.$$

Considerando $w \in H_0^1(\Omega_2)$, temos que $(t\varphi_1, w), (0, w) \in E$ e além disso,

$$\widetilde{J}(t\varphi_1, w) - \widetilde{J}(0, w) = \widetilde{J}(t\varphi_1, 0) < 0.$$

Conseqüentemente, para $t > 0$ pequeno o suficiente, obtemos que

$$\widetilde{J}(t\varphi_1, w) < \widetilde{J}(0, w), \quad \forall w \in H_0^1(\Omega_2),$$

e por conseguinte, $(0, v)$ não é um mínimo global de $\widetilde{J}$. Portanto, concluímos que $u \neq 0$.

Agora vamos definir a função $c(x)$ por

$$c(x) = \begin{cases} \dfrac{f^-(x,u)}{u}, & \text{se} \;\; u \neq 0, \\ 0, & \text{se} \;\; u = 0, \end{cases}$$

que substituida em (2.1), resulta que

$$-\alpha\Delta u + c(x)u = f^+(x,u) \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega_1.$$

Então, aplicando o Princípio do Máximo Forte de Hopf (ver Teorema C.11, Apêndice C) e o Teorema C.12 (ver Apêndice C), temos que

$$u > 0 \quad \text{em} \quad \Omega_1 \;\; \text{e} \;\; \frac{\partial u}{\partial \nu} \neq 0 \quad \text{sobre} \quad \Sigma.$$

Pela condição de transmissão (2.4), segue-se que $v \neq 0$, pois caso contrário aplicando o Teorema do Divergente (Ver Teorema C.1, Apêndice C) implicaria que $\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ sobre $\partial\Omega_2 = \Gamma \cup \Sigma$, o que é um absurdo.

Portanto, fazendo como antes, concluímos que $v > 0$ em Ω_2, mostrando assim que o sistema (2.1) - (2.4) tem pelo menos uma solução positiva. ***C.q.d.***

Por fim, mostramos um resultado de não existência de solução.

Demonstração do teorema 2.3:

Faremos a demonstração argumentando por contradição, isto é, suponhamos que exista $(u,v) \in E$ solução positiva do sistema (2.1) - (2.4). Então,

$$\alpha \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla \varphi dx + \beta \int_{\Omega_2} \nabla v \nabla \psi dx = \int_{\Omega_1} f(x,u)\varphi dx + \int_{\Omega_1} g(y,v)\psi dx, \quad \forall (\varphi,\psi) \in E.$$

Seja $\varphi^1 > 0$ a primeira autofunção de $(-\Delta; H_0^1(\Omega))$. Observamos que $(\varphi^1, \varphi^1) \in E$, e conseqüentemente,

$$\alpha \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla \varphi^1 dx + \beta \int_{\Omega_2} \nabla v \nabla \varphi^1 dy = \int_{\Omega_1} f(x,u)\varphi^1 dx + \int_{\Omega_2} g(y,v)\varphi^1 dy,$$

donde, uma vez que $m < inf_{s\geq 0}\{a(s), b(s)\}$, segue-se que

$$m \int_{\Omega_1} \nabla u \nabla \varphi^1 dx + m \int_{\Omega_2} \nabla v \nabla \varphi^1 dy < \int_{\Omega_1} f(x,u)\varphi^1 dx + \int_{\Omega_2} g(y,v)\varphi^1 dy. \quad (2.55)$$

Por outro lado, sabemos que

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi^1 \nabla \phi dx = \lambda^1 \int_{\Omega} \varphi^1 \phi dx, \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega).$$

Definindo

$$\xi(x) = u(x) \cdot \mathcal{X}_{\Omega_1}(x) + v(x) \cdot \mathcal{X}_{\Omega_2}(x) + v(x) \cdot \mathcal{X}_{\Sigma \cup \Gamma}(x),$$

observamos, segundo a Teoria do Traço de funções de $H^1(\Omega)$, que $\xi \in H_0^1(\Omega)$.
Logo,

$$\int_{\Omega} \nabla\varphi^1 \nabla\xi dx = \lambda^1 \int_{\Omega} \varphi^1 \xi dx,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega_1} \nabla\varphi^1 \nabla u dx + \int_{\Omega_2} \nabla\varphi^1 \nabla v dy = \lambda^1 \int_{\Omega_1} \varphi^1 u dx + \lambda^1 \int_{\Omega_2} \varphi^1 v dy.$$

Multiplicando esta última igualdade por m e comparando com (2.55), teremos

$$m\lambda^1 \int_{\Omega_1} \varphi^1 u dx + m\lambda^1 \int_{\Omega_2} \varphi^1 v dy < \int_{\Omega_1} f(x,u)\varphi^1 dx + \int_{\Omega_2} g(y,v)\varphi^1 dy,$$

contradizendo a hipótese (2.9). Portanto, mostramos com as condições descritas nesse teorema, que o sistema (2.1) - (2.4) não tem solução positiva. ***C.q.d.***

Capítulo 3

Regularização ou Bootstrap

Neste capítulo apresentaremos o procedimento usado para provar que uma solução fraca de uma equação é uma solução clássica. Este procedimento chama-se **Regularização ou Bootstrap**.

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), & \Omega \\ u &= 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ é um domínio limitado com fronteira de classe $C^{2,\mu}$, $0 < \mu < 1$ e $f(x,u) : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo

$$|f(x,s)| \leq c|s|^\sigma + d, \qquad c, d \in \mathbb{R}^+, \tag{3.2}$$

com $0 \leq \sigma < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ e $0 \leq \sigma < \infty$ se $N = 2$. Uma vez que a função f tem este crescimento, usando a teoria dos espaços L^p de Lebesgue, a teoria de Schauder das equações elípticas e as imersões de Sobolev, conseguimos obter o resultado de regularidade que segue:

Teorema 3.1 *Seja $u \in H_0^1(\Omega)$ uma solução fraca do problema (3.1), então*

$$u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega}) \quad \textit{se} \quad f \quad \textit{for de Carathéodory.}$$

Além disso, se $f \in C^{0,1}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, temos que $u \in C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$.

Demonstração:

Parte I:

Vamos mostrar o resultado inicialmente para $N > 2$.

Como, $1 < \frac{N}{2}$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, segue-se da imersão contínua (Ver Teorema C.14, item i Apêndice C) que $u \in L^{2^*}(\Omega)$.

Por outro lado, uma vez que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de Caratheódory, então a função (Figueiredo [11])

$$x \mapsto f(x, u(x))$$

é mensurável para qualquer função $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ mensurável.

Daí, usando o crescimento da função f mostraremos que a aplicação (Operador de Nemytiskii) definida por

$$\begin{array}{rcl} N_f \; : \; L^{2^*}(\Omega) & \longrightarrow & L^{\frac{2^*}{\sigma}}(\Omega) \\ u & \longmapsto & N_f(u) = f(x, u(x)), \end{array}$$

está bem definida.

De fato, usando (3.2), resulta em

$$\begin{aligned} \int_\Omega |N_f(u)|^{2^*/\sigma} dx &= \int_\Omega |f(x, u(x))|^{2^*/\sigma} dx \\ &\leq \int_\Omega [c|u(x)|^\sigma + d]^{2^*/\sigma} dx \\ &\leq \int_\Omega \left[2 \max\{c|u(x)|^\sigma, d\} \right]^{2^*/\sigma} dx \\ &\leq C_1 \int_\Omega |u(x)|^{2^*} dx + C_2 \int_\Omega dx < \infty, \end{aligned}$$

mostrando que a aplicação acima está bem definida.

Escrevendo $p_1 = \dfrac{2^*}{\sigma}$, temos que

$$f(\,\cdot,\; u(\cdot)) \in L^{p_1}(\Omega).$$

Conseqüentemente (Ver Teorema C.20,Apêndice C),

$$u \in W^{2,p_1}(\Omega).$$

Assim, analisaremos os seguintes casos:

1ºCASO: $N - 2p_1 < 0$ $(\frac{N}{p_1} < 2,\; m = 2)$

Como

$$u \in W^{2,p_1}(\Omega),$$

resulta da imersão compacta (Ver Teorema C.16, item iii apêndice C)que

$$u \in C^0(\overline{\Omega}).$$

Donde concluímos que

$$u \in L^r(\Omega), \quad \forall r \geq 1.$$

Segue-se como antes que a aplicação

$$\begin{aligned} N_f \ : \ L^r(\Omega) &\longrightarrow L^{\frac{r}{\sigma}}(\Omega) \\ u \quad &\longmapsto N_f(u) = f(x, u(x)), \end{aligned}$$

está bem definida com $\dfrac{r}{\sigma} > \dfrac{N-2}{N+2}$. Em particular,

$$f(x, u(x)) \in L^{\frac{r}{\sigma}} \quad com \quad r \geq 2\sigma.$$

Logo (Ver Teorema C.20, Apêndice C),

$$u \in W^{2,r/\sigma}(\Omega) \quad \text{com} \quad r \geq 2\sigma.$$

Daí, é possível escolher r_0/σ tal que $0 < \frac{N}{r_0/\sigma} < 1$.
Portanto da imersão de Sobolev (Ver Teorema C.15, item iv Apêndice C), temos que

$$u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega}), \quad \text{com} \quad 0 < \mu < 1 - \frac{N}{r_0/\sigma}.$$

2ºCASO: $N - 2p_1 = 0$ ($\frac{N}{p_1} = 2,\ m = 2$)
Desde que $u \in W^{2,p_1}(\Omega)$, $p_1 = \dfrac{2^*}{\sigma}$ temos, pela imersão de Sobolev (ver Teorema C.15, item ii Apêndice C), que

$$u \in L^q(\Omega), \quad com \ \ p_1 \leq q < +\infty.$$

Assim, para $q \geq \sigma$ a aplicação

$$\begin{aligned} N_f \ : \ L^q(\Omega) &\longrightarrow L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega) \\ u \quad &\longmapsto N_f(u) = f(x, u(x)), \end{aligned}$$

está bem definida, isto é,

$$f(x, u(x)) \in L^{\frac{q}{\sigma}}(\Omega) \quad \text{com} \quad p_1 \leq q < +\infty \ \text{ e } \ q \geq \sigma.$$

Conseqüentemente (ver Teorema C.20, Apêndice C)

$$u \in W^{2,\frac{q}{\sigma}}(\Omega) \quad \text{com} \quad p_1 \leq q < +\infty \ \ e \ \ q \geq \sigma.$$

Daí, é possível escolher q_0 de modo que $0 < \frac{N}{q_0/\sigma} < 1$, e portanto, como no caso anterior,

$$u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega}), \quad \text{com} \quad 0 < \mu < 1 - \frac{N}{q_0/\sigma}.$$

3°CASO: $N - 2p_1 > 0$ $(\frac{N}{p_1} > 2,\ m = 2)$

Uma vez que $u \in W^{2,p_1}(\Omega)$ e $\frac{N}{p_1} > 2$, temos pela imersão de Sobolev (ver Teorema C.15, item i Apêndice C), que

$$u \in L^{r_1}(\Omega) \ \text{ para } \ p_1 \leq r_1 \leq \frac{Np_1}{N - 2p_1} = p_1^*.$$

Em particular,

$$u \in L^{p_1^*}(\Omega).$$

Donde segue-se que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} N_f & : & L^{p_1^*}(\Omega) & \longrightarrow & L^{\frac{p_1^*}{\sigma}}(\Omega) \\ & & u & \longmapsto & N_f(u) = f(x, u(x)), \end{array}$$

está bem definida. Logo(ver Teorema C.20, Apêndice C)

$$u \in W^{2,p_2}(\Omega) \quad \text{onde} \quad p_2 = \frac{p_1^*}{\sigma}.$$

Agora observemos que:

- $p_1 > 1$.

  De fato,

  $$p_1 = \frac{2^*}{\sigma} > \left(\frac{2N}{N-2}\right) \cdot \left(\frac{N-2}{N+2}\right) = \frac{2N}{N+2} > 1,$$

  pois $N > 2$.

- $\dfrac{p_2}{p_1} > 1$.

  De fato,

  $$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1^*}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{2^*} = \frac{p_1^*}{2^*} = \left(\frac{p_1 N}{N - 2p_1}\right) \cdot \frac{N-2}{2N} > 1,$$

  pois, através de alguns cálculos, chegamos que a desigualdade anterior é equivalente a $\sigma < \frac{N+2}{N-2}$.

Assim, podemos escolher $A_0 > 1$ tal que

$$p_1 > A_0 > 1 \quad \text{e} \quad \frac{p_2}{p_1} > A_0. \tag{3.3}$$

Conseqüentemente,

$$p_2 > p_1 \cdot A_0 > A_0^2. \tag{3.4}$$

Recordando que $u \in W^{2,p_2}(\Omega)$ onde $p_2 = \dfrac{p_1^*}{\sigma}$, vamos considerar, nesta segunda etapa, os mesmos casos anteriores:

1ºCASO: $N - 2p_2 < 0$ $(\frac{N}{p_2} < 2,\ m = 2)$

De modo inteiramente análogo ao 1ºCASO do passo anterior, obtemos que

$$u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega}), \quad com \quad 0 < \mu < 1 - \frac{N}{t_0/\sigma},$$

para algum $t_0 \in \mathbb{R}^+$.

2ºCASO: $N - 2p_2 = 0$ $(\frac{N}{p_2} = 2,\ m = 2)$

Semelhantemente ao 2ºCASO do passo anterior, temos que

$$u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega}), \quad com \quad 0 < \mu < 1 - \frac{N}{q_0/\sigma},$$

para algum $q_0 \in \mathbb{R}^+$.

3ºCASO: $N - 2p_2 > 0$ $(\frac{N}{p_2} > 2,\ m = 2)$

Desde que $u \in W^{2,p_2}(\Omega)$ e $\frac{N}{p_2} > 2$, temos pela imersão de Sobolev (ver Teorema C.15, item i Apêndice C), que

$$u \in L^{p_2^*}(\Omega) \text{ onde } p_2^* = \frac{Np_2}{N - 2p_2}$$

Segue-se também que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} N_f \ : \ L^{p_2^*}(\Omega) & \longrightarrow & L^{\frac{p_2^*}{\sigma}}(\Omega) \\ u & \longmapsto & N_f(u) = f(x, u(x)), \end{array}$$

está bem definida, ou seja,

$$f(\ \cdot, u(\cdot)) \in L^{p_3}(\Omega), \text{ onde } p_3 = \frac{p_2^*}{\sigma}.$$

Logo (ver Teorema C.20, Apêndice C),

$$u \in W^{2,p_3}(\Omega).$$

Agora, provaremos que

- $\dfrac{p_3}{p_2} > \dfrac{p_2}{p_1}$.

De fato,

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{p_2^*}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{p_1^*} = \frac{p_1^*}{p_1^*} = \left(\frac{Np_2}{N-2p_2}\right) \cdot \left(\frac{N-2p_1}{Np_1}\right) = \frac{p_2}{p_1}\left(\frac{N-2p_1}{N-2p_2}\right) > \frac{p_2}{p_1},$$

se e somente se,

$$\frac{N-2p_1}{N-2p_2} > 1,$$

ou equivalentemente,

$$p_2 > p_1.$$

Portanto, mostramos que

$$\frac{p_3}{p_2} > \frac{p_2}{p_1},$$

e usando (3.3) e (3.4) obtemos que

$$p_3 > A_0^3.$$

Continuando com este processo encontramos uma seqüência $\{p_j\}$ tal que

$$A_0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_j < p_{j+1} < \cdots,$$

$$A_0 < \frac{p_2}{p_1} < \frac{p_3}{p_2} < \frac{p_4}{p_3} \ldots < \frac{p_{j+1}}{p_j} < \ldots$$

e

$$p_j > A_0^j.$$

Uma vez que $A_0 > 1$, segue-se que

$$p_j \to +\infty \quad qdo \quad j \to +\infty.$$

Daí, podemos escolher p_0 tal que $0 < \frac{N}{p_0} < 1$ e, conseqüentemente (ver Teorema C.15, item iv Apêndice C), num dos passos do 3ºCaso, resultará que

$$u \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega}) \quad com \quad 0 < \mu < 1 - \frac{N}{p_0}.$$

C.q.d.

Para o caso em que $N = 2$, segue-se usando a imersão de sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ (ver Teorema C.15, item *(ii)*, Apêndice C), o Teorema C.20 (ver Ap.C) e em seguida a imersão $W^{j+m,p} \hookrightarrow C^{j,\mu}(\overline{\Omega})$ (ver Teorema C.15, item iv).

Parte II:

Agora supondo que $f \in C^{0,1}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ segue-se que f é lipschitziana, isto é, $\exists\ C_1 > 0$ tal que $(x, u(x)), (y, u(y)) \in (\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ implica,

$$\begin{aligned} |f(x,u(x)) - f(y,u(y))| &\leq C_1|(x,u(x)) - (y,u(y))| \\ &\leq C_1|(x-y, u(x) - u(y))| \\ &\leq C_1\left(|x-y| + |u(x) - u(y)|\right). \end{aligned}$$

Considerando $x, y \in \overline{\Omega}$ *com* $x \neq y$ *e* $0 < \mu < 1$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{|f(x,u(x)) - f(y,u(y))|}{|x-y|^\mu} &\leq C_1\Big(\frac{|x-y|}{|x-y|^\mu} + \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\mu}\Big) \\ &\leq C_1\Big(|x-y|^{1-\mu} + \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\mu}\Big), \quad \forall x, y \in \overline{\Omega} \ \ com \ \ x \neq y. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x,u(x)) - f(y,u(y))|}{|x-y|^\mu} \leq C_1\Big(\sup_{x\neq y}|x-y|^{1-\mu} + \sup_{x \neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\mu}\Big),$$

o que implica,

$$H_\mu\left[f(\cdot,u)\right] \leq C_1\Big[\Big(\sup_{x\neq y}|x-y|\Big)^{1-\mu} + H_\mu\left[u\right]\Big],$$

donde segue-se que

$$H_\mu\left[f(\cdot,u)\right] \leq C_1\Big[\big(diam(\overline{\Omega})\big)^{1-\mu} + H_\mu\left[u\right]\Big] < \infty,$$

desde que a função u seja Hölder contínua de expoente μ.

Portanto,

$$f(\ \cdot, u) \in C^\mu(\overline{\Omega}), \quad com \quad 0 < \mu < 1.$$

Daí (ver Teorema C.18, Apêndice C), resulta que o problema

$$\begin{cases} -\Delta v &= f(x,u), \quad \Omega, \\ v &= 0, \qquad\quad \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução $v \in C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$.

Assim, temos que u e v são soluções fracas do problema (3.1), isto é,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x,u) \cdot \varphi dx, \forall \ \ \varphi \ \in \ H_0^1(\Omega)$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} f(x,u) \cdot \varphi dx, \forall \ \ \varphi \ \in \ H_0^1(\Omega).$$

Conseqüentemente,

$$\int_{\Omega} \nabla\left(u-v\right) \nabla \varphi dx = 0, \forall \ \ \varphi \ \in \ H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$u = v \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega)$$

e assim,

$$u = v \quad q.t.p. \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Por outro lado, uma vez que as funções u e v são contínuas em Ω resulta que

$$u \equiv v \quad \text{em} \quad \Omega.$$

E portanto,

$$u \in C^{2,\mu}(\overline{\Omega}), \quad 0 < \mu < 1.$$

C.q.d.

Apêndice A

Um pouco de Teoria Espectral

Neste apêndice, apresentaremos uma descrição do espectro do operador $-\Delta$, no caso do problema homogêneo de Dirichlet.

Iniciamos estudando a existência e unicidade de solução fraca para o problema linear

$$\begin{cases} -\Delta u &=& f(x), & \Omega \\ u &=& 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.1}$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ é um domínio limitado e $f \in L^2(\Omega)$.

Mostraremos a existência e unicidade da solução do problema linear (A.1) aplicando um resultado devido a Lax-Milgram, o qual é conhecido na Literatura como Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema C.21, Ap.C).

Solução do Problema (A.1):

Iremos fixar um Espaço de Hilbert($\mathbb{H}$), uma forma bilinear ($\mathbb{A}$) e um funcional linear continuo ($\mathbb{T}$) em $\mathbb{H}$ para aplicarmos o já referido resultado.

Consideramos:

- $\mathbb{H} = H_0^1(\Omega)$, com o produto interno definido por

$$< u, v >= \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

e norma induzida dada por

$$||u|| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}.$$

- A forma bilinear ($\mathbb{A}$) será dada por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A} \ : \ H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \mathbb{A}(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \end{array}$$

que também é simétrica.

Note que, devido a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a forma bilinear $\mathbb{A}$ é contínua, pois

$$|\mathbb{A}(u,v)| = |< u,v >| \leq ||u|| \cdot ||v||, \quad \forall \ u, \ v \ \in \ H_0^1(\Omega).$$

Temos também, que $\mathbb{A}$ é coerciva, pois

$$\mathbb{A}(u,u) =< u,v >= ||u||^2, \quad \forall \ u \in \ H_0^1(\Omega).$$

- O funcional linear contínuo ($\mathbb{T}$) é dado por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{T} \ : \ H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ v & \longmapsto & \mathbb{T}(v) = \int_\Omega f \cdot v dx. \end{array}$$

Podemos observar que a aplicação $\mathbb{T}$ está bem definida, devido a Desigualdade de Hölder(ver Teorema C.5, Apêndice C) e a Imersão Contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (ver Teorema C.15, Apêndice C), e é linear contínua em $\mathbb{H} = H_0^1(\Omega)$.

Daí, aplicando o Teorema de Lax-Milgram (ver Teorema C.21, Ap.C), existe uma única função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\mathbb{A}(u,v) = \mathbb{T}(v), \quad \forall \ v \ \in \ H_0^1(\Omega),$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f \cdot v dx, \forall \ \ v \ \in \ H_0^1(\Omega),$$

mostrando que o problema linear (A.1) tem uma única solução fraca $u \in \ H_0^1(\Omega)$.

Pelo que foi exposto até agora, podemos definir uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} S \ : \ L^2(\Omega) & \longrightarrow & H_0^1(\Omega) \\ f & \longmapsto & S(f) = u, \end{array}$$

isto é, uma aplicação que associa a cada $f \in L^2(\Omega)$ a única solução fraca do problema linear (A.1).

Além disso, observamos pela resolução do problema (A.1) que

$$\mathbb{A}(S(f), v) = ((f, v)), \quad \forall \; v \; \in \; H_0^1(\Omega),$$

onde $((\ ,\ ))$ denota o produto interno em $L^2(\Omega)$.
Vejamos agora as propriedades da aplicação S.

(i) S **é uma aplicação linear**, isto é,

$$S(\alpha_1 f + \alpha_2 g) = \alpha_1 S(f) + \alpha_2 S(g), \quad \forall\ f,\ g \in L^2(\Omega)\ e\ \forall\ \alpha_1,\ \alpha_2\ \in \mathbb{R}.$$

De fato; Consideremos uma dada $v \in H_0^1(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}(S(\alpha_1 f + \alpha_2 g),\ v) &= ((\alpha_1 f + \alpha_2 g,\ v)) = ((\alpha_1 f,\ v)) + ((\alpha_2 g,\ v)) = \\
&= \alpha_1((f,\ v)) + \alpha_2((g,\ v)) = \\
&= \alpha_1 \mathbb{A}(S(f),\ v) + \alpha_2 \mathbb{A}(S(g),\ v) = \\
&= \mathbb{A}(\alpha_1 S(f),\ v) + \mathbb{A}(\alpha_2 S(g),\ v) = \\
&= \mathbb{A}(\alpha_1 S(f) + \alpha_2 S(g), v), \quad \forall \; v \; \in \; H_0^1(\Omega),
\end{aligned}$$

o que implica,

$$S(\alpha_1 f + \alpha_2 g) = \alpha_1 S(f) + \alpha_2 S(g), \quad \forall\ f,\ g \in L^2(\Omega)\ e\ \forall\ \alpha_1,\ \alpha_2\ \in \mathbb{R},$$

mostrando a linearidade de S.

(ii) S **é contínua**, isto é, $\exists K > 0$ tal que

$$||S(f)|| \leq K||f||_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\ f \in L^2(\Omega).$$

De fato, como a forma bilinear $\mathbb{A}$ é coerciva em $H_0^1(\Omega)$, então considerando $u = S(f)$, temos que existe $\alpha > 0$ de modo que

$$\alpha||S(f)||^2 \leq \mathbb{A}(S(f),\ S(f)) = ((f,\ S(f))) \leq |\ ((f,\ S(f)))\ | \leq ||f||_{L^2(\Omega)} \cdot ||S(f)||_{L^2(\Omega)}.$$

Logo, usando a imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (ver Teorema C.15, Apêndice C), chegamos ao resultado desejado.

(iii) $S \; : \; H_0^1(\Omega) \; \to \; H_0^1(\Omega)$ **é um operador linear compacto.**
De fato, como a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (ver Teorema C.16, Apêndice C) além de ser contínua, também é compacta e $S \; : \; L^2(\Omega) \; \to \; H_0^1(\Omega)$ é contínua, segue-se que $S \circ i \; : \; H_0^1(\Omega) \; \to \; H_0^1(\Omega)$ é uma composição de uma aplicação compacta com uma contínua e, portanto, é um operador compacto.

(iv) $S\ :\ H_0^1(\Omega)\ \rightarrow\ H_0^1(\Omega)$ **é simétrico (ou auto-adjunto)**,

ou seja,

$$\mathbb{A}(S(u),\ v) = \mathbb{A}(u,\ S(v)), \quad \forall\ u,\ v\ \in\ H_0^1(\Omega).$$

De fato, estamos considerando o espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ com o produto interno dado por

$$\mathbb{A}(u,\ v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx,$$

o qual induz uma norma equivalente à norma original de $H_0^1(\Omega)$. Assim, dados $u,\ v\ \in\ H_0^1(\Omega)$, resulta da simetria dos produtos internos envolvidos, que

$$\mathbb{A}(S(u),\ v) = ((u,\ v)) = ((v,\ u)) = \mathbb{A}(S(v),\ u) = \mathbb{A}(u,\ S(v)).$$

(v) S **é definida estritamente positiva em** $H_0^1(\Omega)$, pois para cada $v \in H_0^1(\Omega)$, temos que

$$\mathbb{A}(S(v),\ v) = ((v,\ v)) = ||v||^2_{L^2(\Omega)} > 0 \quad \text{se} \quad v \neq 0.$$

Portanto, uma vez que $S\ :\ H_0^1(\Omega)\ \rightarrow\ H_0^1(\Omega)$ é um operador nas condições do Teorema Espectral para operadores compactos em um espaço de Hilbert, no caso simétrico(ou auto-adjunto) estritamente positivo, resulta que existe uma seqüência (μ_n) de números reais, que são os autovalores, verificando

$$\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_n > \ldots > 0$$

e

$$\mu_n \longrightarrow 0, \quad \text{qdo.} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Associados aos autovalotes, existe uma seqüência (ϕ_n) de funções de $H_0^1(\Omega)$, denominadas de autofunções de S, as quais constituem uma base Hilbertiana para $H_0^1(\Omega)$.

Em outras palavras, encontramos duas seqüências $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que

$$S(\phi_n) = \mu_n \phi_n, \quad \forall\ n = 1, 2, \ldots, \tag{A.2}$$

com $\mu_n > 0,\ \ \forall\ n = 1, 2, \ldots$ e $\mu_n \longrightarrow 0,\ $ qdo. $\ n \rightarrow +\infty$.

Fazendo $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n},\ \ \forall n$, resulta que (λ_n) é uma seqüência de números reais positivos tais que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

e

$$\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\ .$$

De (A.2) temos que

$$\phi_n = \lambda_n \cdot S(\phi_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

e, devido a linearidade de S, obtemos

$$S(\lambda_n \cdot \phi_n) = \phi_n, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que $\lambda_n\phi_n \in L^2(\Omega)$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, segue-se, pela definição de S, que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\phi_n & = & \lambda_n\phi_n, & \Omega, \\ \phi_n & = & 0, & \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Portanto, a seqüência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescente de números reais positivos constituem os autovalores do operador $-\Delta$ com $\lambda_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e a seqüência $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são as autofunções associadas do operador $-\Delta$, as quais formam uma base ortonormal em $H_0^1(\Omega)$ (conseqüência do Teorema Espectral).

Apêndice B

Um Resultado de Unicidade

Neste apêndice apresentamos um resultado de unicidade mostrado por Brezis & Oswald [7]. Esse resultado inclui, como um caso particular, o problema (1.55) usado na prova do Teorema 1.4.

Vejamos: Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u), \quad \Omega \\ u \geq 0 \quad , & u \neq 0, \quad \Omega \\ u &= 0, \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{B.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e $f(x,u) \, : \, \Omega \times [0, \, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo as seguintes hipóteses:

(i) Para quase todo $x \in \Omega$, a função $u \mapsto f(x,u)$ é contínua sobre o intervalo $[0,\infty)$ e a função $u \mapsto f(x,u)/u$ é decrescente sobre $(0,\infty)$;

(ii) Para cada $u \geq 0$ a função $x \mapsto f(x,u) \in L^\infty(\Omega)$.

Para o nosso objetivo, isto é, para mostrarmos a unicidade de solução para o problema (B.1) essas hipóteses são suficientes.

Vamos começar com o seguinte lema:

Lema B.1 *Supondo (i) e (ii) e considerando $u \in H_0^1(\Omega)$(e por regularização, $u \in C^2(\Omega)$) uma solução do problema (B.1).*
Então,

$$u > 0, \qquad \Omega \tag{B.2}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0, \qquad \partial\Omega, \tag{B.3}$$

onde η *denota a direção normal exterior a fronteira* $\partial\Omega$*.*

Demonstração:

Sendo u solução de (B.1), tem-se que

$$u \geq 0, \quad u \neq 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Uma vez que $u(x) \leq ||u||_\infty, \quad \forall x \in \Omega$, resulta, por (i), que

$$\frac{f(x,u)}{u} \leq \frac{f(x,||u||_\infty)}{||u||_\infty}.$$

Por outro lado, devido a hipótese (ii), existe $C_1 > 0$ tal que

$$|f(x,||u||_\infty)| \leq C_1.$$

Juntando essas duas últimas desigualdades, obtemos

$$f(x,u) \geq -C_2 u, \quad \text{em} \quad \Omega,$$

para alguma constante $C_2 > 0$.

Por conseguinte a função u satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u + C_2 u & \geq & 0, & \Omega \\ u & = & 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

e usando o princípio do máximo forte (Ver Teoremas C.10 e C.12), decorre (B.2) e (B.3).

C.q.d.

Prova da Unicidade:

Suponha que u_1 *e* u_2 sejam duas soluções de (B.1). Então, para $i = 1, 2$ temos

$$\begin{cases} -\Delta u_i & = & f(x,u_i), & \Omega \\ u_i \geq 0 & , & u_i \neq 0, & \Omega \\ u_i & = & 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

e portanto, podemos escrever

$$-\frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2} = \frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}, \quad \Omega. \tag{B.4}$$

Usando o Lema B.1, e raciocinando de maneira análoga ao que fizemos na demonstração do Teorema 1.4, deduzimos que

$$\frac{u_2}{u_1}, \frac{u_1}{u_2} \in L^\infty(\Omega). \tag{B.5}$$

Afirmação:

$$\frac{u_2^2}{u_1}, \frac{u_1^2}{u_2} \in H_0^1(\Omega), \tag{B.6}$$

$$\nabla\left(\frac{u_2^2}{u_1}\right) = 2\frac{u_2}{u_1}\nabla u_2 - \frac{u_2^2}{u_1^2}\nabla u_1 \quad e \quad \nabla\left(\frac{u_1^2}{u_2}\right) = 2\frac{u_1}{u_2}\nabla u_1 - \frac{u_1^2}{u_2^2}\nabla u_2. \tag{B.7}$$

De fato, desde que $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$, temos $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$. Assim, devido a (B.5), segue-se que

$$\frac{u_2^2}{u_1}, \frac{u_1^2}{u_2} \in L^2(\Omega).$$

Sabemos também que $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_i}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, para $i = 1, 2, 3, \ldots,$.
Por outro lado, depois de alguns cálculos, obtemos

$$\frac{\partial\left(\frac{u_2^2}{u_1}\right)}{\partial x_i} = \left(2\frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x_i} - \frac{u_2^2}{u_1^2}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right) \in L^2(\Omega),$$

donde decorre (B.7) e que $\dfrac{u_2^2}{u_1}, \dfrac{u_1^2}{u_2} \in H^1(\Omega)$.

Resta-nos apenas concluir (B.6). Para isto, observe que, por (B.5), para $x_0 \in \partial\Omega$ encontramos

$$\lim_{x \to x_0}\left(\frac{u_2^2(x)}{u_1(x)}\right) = \lim_{x \to x_0}\left(\frac{u_1^2(x)}{u_2(x)}\right) = 0.$$

Pela continuidade das funções, podemos defini-lás sobre a fronteira $\partial\Omega$ do seguinte modo:

$$\frac{u_2^2}{u_1} = \frac{u_1^2}{u_2} = 0.$$

Além disso,

$$\frac{u_2^2}{u_1}, \frac{u_1^2}{u_2} \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),$$

implicando assim (ver Teorema C.9, Apêndice C), na validade de (B.6).

Agora, multiplicando (B.4) por $(u_1^2 - u_2^2)$ e integrando em Ω, obtemos a seguinte identidade

$$\int_\Omega \Big(-\frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2}\Big)(u_1^2 - u_2^2)dx = \int_\Omega \Big(\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\Big)(u_1^2 - u_2^2)dx, \quad \Omega. \quad \text{(B.8)}$$

Por outro lado obtemos também, usando as duas igualdades presentes em (B.7) e a integração por partes, que

$$\int_\Omega \Big(-\frac{\Delta u_1}{u_1} + \frac{\Delta u_2}{u_2}\Big)(u_1^2 - u_2^2)dx = \int_\Omega \Big(\Big|\nabla u_1 - \frac{u_1}{u_2}\nabla u_2\Big|^2 + \Big|\nabla u_2 - \frac{u_2}{u_1}\nabla u_1\Big|^2\Big)dx.$$

Consequentemente, em virtude dessas duas últimas igualdades, temos que

$$\int_\Omega \Big(\frac{f(x,u_1)}{u_1} - \frac{f(x,u_2)}{u_2}\Big)(u_1^2 - u_2^2)dx \geq 0, \quad \Omega,$$

de onde concluimos, devido a hipótese (i), que $u_1 = u_2$.

C.q.d.

Como podemos observar, esse resultado de unicidade para o problema (B.1) inclui o caso em que $f(x,u) = u^q$, $0 < q < 1$, haja vista que as hipóteses (i) e (ii) são verificadas. Conseqüentemente, o problema (1.55) tem unicidade de solução assegurada.

Apêndice C

Resultados Utilizados

Neste apêndice apresentaremos os resultados utilizados em nosso trabalho. Indicaremos também as referências onde podem ser encontradas as respectivas demonstrações.

Teorema C.1 (Teorema do divergente) (ver [13], p. 2)
Sejam Ω um domínio limitado cuja $\partial\Omega$ é uma hiperfície de classe C^1 e ν o vetor unitário normal a $\partial\Omega$. Para qualquer função $W : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $W \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega divW dx = \int_{\partial\Omega} (W \cdot \nu) ds.$$

Teorema C.2 (1a Identidade de Green) (ver [13], p. 47)
Considere Ω um domínio no qual seja válido o Teorema do Divergente. Se a funções $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, então

$$\int_\Omega v\Delta u dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} ds.$$

Teorema C.3 (Princípio de Máximo Fraco) (ver [14], p. 15)
Seja $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ com $\Delta u \geq 0 (\Delta u \leq 0)$ em Ω. Então, se Ω é limitado,

$$\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u \left(\inf_\Omega u = \inf_{\partial\Omega} u \right).$$

Teorema C.4 (Princípio de Máximo Forte) (ver [14], p. 15)
Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tal que $\Delta u \geq 0 (\Delta u \leq 0)$ em Ω e suponha que existe um ponto $y \in \Omega$ tal que $u(y) = \sup_{\Omega} u \left(\inf_{\partial\Omega} u\right)$. Então, u é constante.

Teorema C.5 (Desigualdade de Hölder) (ver [6], p. 56)
Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $p > 1$. Então,

$$f \cdot g \in L^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |f \cdot g| dx \leq ||f||_{L^p(\Omega)} ||g||_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema C.6 (Desigualdade de Poincaré) (ver [6], p. 174)
Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$. Então, existe uma constante $C = C(\Omega, p)$ tal que

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Teorema C.7 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) (ver [6], p.54)
Seja (f_n) uma sequência de funções integravéis. Suponha que

(i) $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω;

(ii) existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n, |f_n(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω.

Então,

$$f \in L^1(\Omega) \quad e \quad ||f_n - f||_{L^1(\Omega)} \to 0.$$

Teorema C.8 (ver [9], p. 2)
Seja E um espaço de Hilbert (ou um espaço de Banach reflexivo) e suponha que o funcional $\phi : E \to \mathbb{R}$ é

(i) fracamente semicontínuo inferiormente (fracamente s.c.i.);

(ii) coercivo, isto é, $\phi(u) \to +\infty$ quando $||u|| \to +\infty$.

Então ϕ *é limitado inferiormente e existe* $u_0 \in E$ *tal que*

$$\phi(u_0) = \inf_E \phi.$$

Além disso, se o funcional $\phi : E \to \mathbb{R}$ *é diferenciável, então qualquer ponto de mínimo* u_0 *é um ponto crítico de* ϕ, *isto é,*

$$\phi'(u_0) = 0 \in E'.$$

Teorema C.9 (ver [6], p. 171)
Suponha que Ω *é de classe* C^1. *Seja* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *com* $1 \leq p < \infty$. *Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $u = 0$ *sobre* $\partial\Omega$;

(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema C.10 (ver [14], p. 34)
Suponha que L *é uniformemente elíptico,* $c = 0$ *e* $Lu \geq 0$ *em* Ω. *Seja* $x_0 \in \partial\Omega$ *tal que*

(i) u *é contínua em* x_0;

(ii) $u(x_0) > u(x)$ *para todo* $x \in \Omega$;

(iii) $\partial\Omega$ *satisfaz uma condição da esfera interior em* x_0.

Então, a derivada normal exterior de u *em* x_0, *se ela existe, satisfaz a desigualdade estrita*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Se $c \leq 0$ *e* c/λ *é limitado, a mesma conclusão vale desde que* $u(x_0) \geq 0$, *e se* $u(x_0) = 0$ *amesma conclusão ainda vale independente do sinal de* c.

Teorema C.11 (Princípio de Máximo Forte de E. Hopf) (ver [14], p. 35)
Seja L *um operador uniformemente elíptico,* $c = 0$ *e* $Lu \geq 0 (\leq 0)$ *em* Ω*(não necessariamente limitado). Se* u *assume um máximo(ou mínimo) no interior de* Ω, *então* u *é constante.*
Se $c \leq 0$ *e* c/λ *for limitado, então* u *não pode assumir um máximo não-negativo(mínimo não-positivo) no interior de* Ω, *a menos que* u *seja constante.*

Teorema C.12 (ver [14], p. 35)
Seja $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *uma solução de* $Lu = 0$ *em um domínio limitado* Ω, *onde* L *é uniformemente elíptico,* $c \leq 0$, c/λ *é limitado e* Ω *satisfaz a condição da esfera interior em cada ponto da fronteira* $\partial\Omega$. *Se a derivada normal é definida por toda parte sobre* $\partial\Omega$ *e* $\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ *sobre* $\partial\Omega$, *então* u *é constante em* Ω. *Se também,* $c < 0$ *em algum ponto de* Ω, *então* $u \equiv 0$.

Teorema C.13 (ver [6], p. 58)
Seja (f_n) *uma sequência em* L^p *e* $f \in L^p$, *tal que* $||f_n - f||_{L^p} \to 0$.
Então, existe uma subsequência (f_{n_k}) *tal que*

(i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p. em* Ω;

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$, *q.t.p. em* Ω *com* $h \in L^p$.

Teorema C.14 (ver [23], p. 75)
Sejam Ω *um subconjunto limitado do* $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$, Ω *de classe* C^m *e* $1 \leq p < \infty$. *Então as imersões abaixo são contínuas:*

(i) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*$ *se* $mp < N$.

(ii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$ *se* $mp = N$.

(iii) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\mu}(\overline{\Omega})$ *se* $mp > N$,

onde k *é um inteiro verificando* $k < m - Np \leq k+1$ *e* μ *um número real satisfazendo* $0 < \mu \leq m - k - \frac{N}{p} = \mu_0$ *se* $\mu_0 < 1$ *e* $0 < \mu < 1$ *se* $\mu_0 = 1$.

Teorema C.15 (Imersão de Sobolev) (ver [10], p. 102)
Sejam Ω *um domínio suave em* $\mathbb{R}^N$, $m \geq 0$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Então, para qualquer* $j \geq 0$ *as imersões abaixo são contínuas:*

(i) Se $m < \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p} \hookrightarrow W^{j,q}$, $p \leq q \leq \frac{Np}{N-mp} = p^*$;

(ii) Se $m = \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p} \hookrightarrow W^{j,q}$, $p \leq q < +\infty$;

(iii) Se $\frac{N}{p} < m$, $W^{j+m,p} \hookrightarrow C^j_\beta$;

(iv) Se $m - 1 < \frac{N}{p} < m$,

$$W^{j+m,p} \hookrightarrow C^{j,\mu}(\overline{\Omega}),\ 0 < \mu < m - \frac{N}{p}.$$

Teorema C.16 (Imersão Compacta de Rellich-Kondrachov) (ver [10], p. 103)
Sejam Ω *um domínio limitado com fronteira suave em* $\mathbb{R}^N$, $j \geq 0$, $m \geq 1$ *e* $1 \leq p < +\infty$. *Então, as imersões abaixo são compactas:*

(i) Se $m < \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $1 \leq q < \frac{Np}{N-mp} = p^*$;

(ii) Se $m = \frac{N}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $1 \leq q < +\infty$;

(iii) Se $\frac{N}{p} < m$,

- $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $1 \leq q < +\infty$;
- $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_\beta(\Omega)$ *e*
- $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega})$.

(iv) Se $m - 1 < \frac{N}{p} < m$,

$$W^{j+m,p} \hookrightarrow C^{j,\mu}(\overline{\Omega}),\ 0 < \mu < m - \frac{N}{p}.$$

Teorema C.17 (Teorema de Fubini) (ver [5], p.)
Suponhamos que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. *Então, para todo* $x \in \Omega_1$,

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad e \quad \left(\int_{\Omega_2} F(x,y)dy\right) \in L^1_x(\Omega_1).$$

De maneira análoga, para todo $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad e \quad \left(\int_{\Omega_1} F(x,y)dx\right) \in L^1_y(\Omega_2).$$

Além disso,

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)dx\,dy.$$

Teorema C.18 (ver [14], p. 107)
Sejam L *um operador estritamente elíptico em um domínio limitado* Ω, *com* $c \leq 0$, f *e os coeficientes de* L *pertencentes a* $C^\mu(\overline{\Omega})$. *Suponha que* Ω *é um domínio de classe* $C^{2,\mu}$ *e que* $\varphi \in C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$. *Então o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu &= f, \quad \Omega, \\ u &= \varphi, \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução situada em $C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$.

Teorema C.19 (ver [1], p. 25)
Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ *é um aberto limitado e* $1 \leq p \leq q$. *Se* $u \in L^q(\Omega)$, *então* $u \in L^p(\Omega)$ *e além disso a imersão*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é contínua.

Teorema C.20 (ver [14], p. 241-242)
Seja $f \in L^p(\Omega)$ *com* $1 < p < +\infty$. *Então existe uma única* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \quad \Omega, \\ u &= 0, \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, existe uma constante C *independente de* f *e* u *de modo que*

$$||u||_{2,p;\Omega} \leq C||f||_{L^p(\Omega)}.$$

Teorema C.21 (Teorema de Lax-Milgram) (ver [6], p. 84)
Sejam H *um espaço de Hilbert e* $a(u,v)$ *uma forma bilinear, contínua e coerciva em* H. *Então, para todo* $\varphi \in H'$, *existe um único* $u \in H$ *tal que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Teorema C.22 (ver [6], p.50)
Sejam E *um espaço de Banach reflexivo e* (x_n) *uma sequência limitada em* E. *Então existe uma subsequência* (x_{n_k}) *com* $x_{n_k} \rightharpoonup x$ *em* E.

Teorema C.23 (ver [6], p.38)
Seja $\varphi : E \rightarrow \;]-\infty, +\infty]$ *uma função convexa, s.c.i. (pela topologia forte). Então,* φ *é s.c.i. pela topologia fraca* $\sigma(E, E')$.
Em particular se $x_n \rightharpoonup x$ *pela* $\sigma(E, E')$, *então*

$$\varphi(x) \leq \liminf \varphi(x_n).$$

Teorema C.24
Seja
$$I_\infty := \inf_{u\in H^1(\Omega_1)} \left\{ \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx + \int_\Sigma |u|^2 ds; \int_{\Omega_1} |u|^2 = 1 \right\}.$$
Então, o número I_∞ *é atingido em algum* $u_0 \in H^1(\Omega_1)$ *e é estritamente positivo.*

Demonstração.

Consideremos o funcional $J : H^1(\Omega_1) \to \mathbb{R}$ definido por
$$J(u) = \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 dx + \int_\Sigma |u|^2 ds.$$
Notamos que:

(a) J está bem definido, devido a Teoria do Traço de funções em $H^1(\Omega_1)$;

(b) J é limitado inferiormente em $H^1(\Omega_1)$, pois
$$J(u) \geq 0, \quad \forall \; u \in H^1(\Omega_1).$$

(c) J é fracamente semicontínuo inferiormente, isto é,
$$u_n \rightharpoonup u_0 \;\; em \;\; H^1(\Omega_1) \quad \Rightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geq J(u_0).$$
De fato, como podemos observar o funcional J é soma das normas
$$J_1(u) = ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega_1)} \qquad \text{e} \qquad J_2(u) = ||u||^2_{L^2(\Sigma)},$$
as quais são convexas e contínuas. Conseqüentemente, devido ao Teorema C.23 acima, temos que o funcional J é fracamente s.c.i.

Agora de **(b)** decorre que
$$\inf_{\substack{u\in H^1(\Omega_1)\\ \int_{\Omega_1}|u|^2dx=1}} J(u) := I_\infty \geq 0.$$
Logo, existe uma sequência minimizante $(u_n) \subset H^1(\Omega_1)$, com $\int_{\Omega_1} |u_n|^2 dx = 1$, tal que
$$J(u_n) = \int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^2 dx + \int_\Sigma |u_n|^2 ds \to I_\infty.$$
Daí, segue-se que $J(u_n)$ é limitada e assim resulta que $\int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^2 dx$ também é limitada. Conseqüentemente
$$||u_n||^2_{1,2;\Omega_1} = \int_{\Omega_1} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{\Omega_1} |u_n|^2 dx \leq C,$$

ou seja, a sequência (u_n) é limitada em $H^1(\Omega_1)$. Como o espaço de Sobolev $H^1(\Omega_1)$ é reflexivo, então (ver Teorema C.21, Apêndice C) existe uma subseqüência de (u_n) (ainda denotada por (u_n)) tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad em \quad H^1(\Omega_1). \tag{C.1}$$

Por outro lado, uma vez que $H^1(\Omega_1) \hookrightarrow L^2(\Omega_1)$ compactamente (Ver Teorema C.16, Apêndice C), teremos

$$\int_{\Omega_1} |u_n|^2 dx \longrightarrow \int_{\Omega_1} |u_0|^2 dx,$$

assim,

$$\int_{\Omega_1} |u_0|^2 dx = 1,$$

resultando desse modo que,

$$I_\infty \leq J(u_0).$$

Ora, de (C.1) e de **(c)**, temos que

$$J(u_0) \leq \liminf_{n \to \infty} J(u_n) = I_\infty. \tag{C.2}$$

Dessas duas últimas desigualdades, teremos

$$J(u_0) = I_\infty.$$

Agora, se $I_\infty = 0$, então teríamos

$$\int_{\Omega_1} |\nabla u_0|^2 dx = \int_{\Sigma} |u_0|^2 ds = 0,$$

e daí,

$$\nabla u_0 = 0 \quad \text{e} \quad u_{0_{|_\Sigma}} = 0.$$

Logo,

$$u_0 \equiv 0,$$

o que é um absurdo pois $\int_{\Omega_1} |u_0|^2 dx = 1$. Portanto mostramos que $I_\infty > 0$.

C.q.d.

Bibliografia

[1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1975.

[2] Alves, C.O. & Corrêa, F.J.S.A., *On existence of solutions for class of problems involving a nonlinear operator*, Comm. Appl. Non. Anal. 8, 43-56(2001).

[3] Ambrosetti, A., Brezis, H. & Cerami, G., *Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems*, Journal of Functional Analysis 122, 519-543, 1994.

[4] Astaburuaga M. A., Fernandez C. & Perla Menzala G., *Local Smoothing effects for a nonlinear Timoshenko type equations*, Nonlinear Analysis TMA. 23, 1091-1103, 1994.

[5] Bartle, Robert G.,*The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.

[6] Brezis, H., *Analyse Fonnctionelle, Theorie et Applications.* Masson, Paris,New York, Barcelone, Milan, Mexico e Sao Paulo, 1987.

[7] Brezis, H. & Oswald, L., *Remarks on Sublinear Elliptic Equations*, Vol. 10, No 1, pp 55-64, 1986.

[8] Carmo, Manfredo P. do, *Differential geometry of curves and superfaces*, Prentice-Hall, Englewood cliffs, N. Jersey, 1976.

[9] Costa, David G., *Tópicos em Análise não-linear e aplicações às Equações Diferenciais*, VIII Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.

[10] Figueiredo, D. G. de, *Equações Elípticas não lineares*, 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Poços de Caldas, 1977.

[11] Figueiredo, D. G. de, *Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Tata Institute, Springer-Verlag, Heidelberg, 1989.

[12] Figueiredo, D. G. de, *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Pgs. 34-87, Lectures Notes in Mathematics, No. 957, Springer-Verlag, 1982.

[13] Figueiredo, D. G. de, *Teoria Clássica do Potencial*, Editora Universidade de Brasília, Brasília, 1963.

[14] Gilbarg, D. & Trudinger, Neil S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[15] Kavian, O., *Indroduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, Springer-Verlag, 1993.

[16] Kreyzkig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New York, 1989.

[17] Ladyzhenskaya, O. A., & Ural'tseva, N. N., *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York, 1968.

[18] Limaco Ferrel, J. & Medeiros, L. A., *Kirchhoff-Carrier elastic strings in noncylindrical domains*, Portugaliae Mathematica, Vol. 14, No. 04, 464-500, 1999.

[19] Lima, E.L., *Curso de Análise*, Vol. 1, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[20] Lima, E.L., *Curso de Análise*, Vol. 2 (6ª edição), Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.

[21] Lions, J. L., *On some questions in boundary value problems of Mathematical Physics, in: International Symposium on Continuum Mechanics and Partial Diffrential Equations*, Rio de Janeiro, 1977, North-Holland, 1978.

[22] Ma, T. F. & Rivera, J. E. Muñoz, *Positive Solutions for a Nonlinear Nonlocal Elliptic Transmission Problem*, Applied Mathematics Letters 16, 243-248, 2003.

[23] Medeiros, L. A. & Miranda, M. A. Milla, *Espaços de Sobolev e Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[24] Miranda, M. A. Milla & Medeiros, L. A., *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais (Textos de Métodos Matemáticos No 25)*, IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.