MONICA KARRER

ARTICULAÇÃO ENTRE ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA

UM ESTUDO SOBRE AS TRANSFORMAÇÕES LINEARES NA PERSPECTIVA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2006

MONICA KARRER

ARTICULAÇÃO ENTRE ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA

UM ESTUDO SOBRE AS TRANSFORMAÇÕES LINEARES NA PERSPECTIVA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de DOUTOR EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação da Professora Doutora Ana Paula Jahn.

PUC/SP

São Paulo

2006

Banca Examinadora

Dedico este trabalho a todos os professores e pesquisadores da área de Educação Matemática, que com idealismo desempenham um papel primordial na sociedade.

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora Ana Paula Jahn, pelo trabalho de orientação desenvolvido com dedicação, empenho e amizade.

Aos Professores Doutores Tânia Maria Mendonça Campos, Benedito Antonio da Silva e Maria Cristina Bonomi Barufi, pelas sugestões, comentários e críticas que tanto contribuíram para a elaboração e evolução dessa tese.

Ao Professor Doutor Michel Henry, da Universidade de Franche-Comté (França), que muito nos honrou em aceitar o convite para a participação da banca de defesa.

Aos professores doutores Siobhan Victoria Healy, Vincenzo Bongiovanni, Sílvia Dias Alcântara Machado, Bárbara Lutaif Bianchini e Júlio Arakaki, pelas sugestões e apoio fornecidos durante a elaboração desse estudo.

Aos professores do Programa de Ensino de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP, por todo o incentivo dado durante o curso.

À direção e aos estudantes voluntários da Instituição *Faculdades Associadas de São Paulo*, que contribuíram no desenvolvimento do *Design Experiment*.

A todos os estudantes que participaram do questionário preliminar.

Aos amigos do Doutorado, pelo companheirismo e sugestões e, em especial, aos integrantes do Grupo de Pesquisa TecMEM (Tecnologias e Meios de Expressão em Educação Matemática), pelas contribuições fornecidas durante as discussões do grupo.

A CAPES, pela bolsa de estudos que permitiu uma maior dedicação ao Programa de Pós-Graduação.

Aos meus pais, irmão, cunhada, sobrinho, avós e demais familiares, os quais forneceram apoio e estímulo na condução da pesquisa.

Em especial ao meu namorado, que em todos os momentos me incentivou, demonstrando compreensão, carinho e respeito pelo trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

RESUMO

Este estudo trata de questões relativas ao ensino e à aprendizagem de conceitos da Álgebra Linear no ensino superior. Mais precisamente, esta pesquisa envolveu o *design* de atividades sobre o objeto matemático "transformação linear", explorando a conversão de registros em um ambiente de geometria dinâmica. Com isso buscou-se investigar as trajetórias de aprendizagem de estudantes universitários e o impacto dessas escolhas na abordagem de ensino. O trabalho foi organizado em duas fases. Na primeira, realizaram-se estudos preliminares e desenvolvimentos teóricos para a formulação de hipóteses de trabalho e identificação de ferramentas conceituais para a análise das trajetórias. Com base na teoria dos registros de representação semiótica de DUVAL (1995, 2000, 2003), analisou-se a exploração dos registros e conversões presentes no conteúdo das transformações, tanto nos livros didáticos de Álgebra Linear quanto nos de Computação Gráfica. Ainda, aplicou-se um questionário sobre transformações lineares a oitenta e seis (86) estudantes da área de Computação. Estes estudos apontaram deficiências e dificuldades com relação à exploração de diferentes registros por parte dos estudantes, principalmente os registros matricial e gráfico. Na segunda fase, com base na metodologia de *Design Experiments* (COBB et al., 2003), foram concebidas atividades de exploração das diversas representações de transformações lineares planas, nos ambientes *Cabri-Géomètre* e *papel&lápis*. Seis (6) estudantes do curso de Engenharia da Computação de uma instituição particular de ensino superior da cidade de São Paulo participaram do experimento. Os resultados revelaram evoluções dos sujeitos na compreensão das condições de determinação de transformações lineares e de particularidades gráficas inerentes a estas, além de um domínio mais amplo das diversas representações e de suas conversões. Por fim, foram observados efeitos específicos nas estratégias dos estudantes relacionados às características das tarefas e do ambiente computacional.

Palavras-Chave: Transformações Lineares. Registros de Representação Semiótica. Trajetórias de Aprendizagem. *Cabri-Géomètre.* Livros Didáticos.

ABSTRACT

This study addressed questions related to the teaching and learning of Linear Algebra in Higher Education. More precisely, it involved the design of activities which concerned the mathematical object “linear transformations” and which engaged learners in exploring the conversion of registers in a dynamic geometry environment. The aim was to investigate the learning trajectories of university students and the impact of the didactical choices which characterized the teaching approach. The study was organized into two phases. In the first, preliminary studies along with theoretical considerations led to the formulation of hypotheses and to the identification of the conceptual tools to be used in the analysis of the learning trajectories. Using as a theoretical framework Duval’s theory of semiotic representation registers (1995, 2000, 2003), during this phase the registers and conversions present in sections on linear transformations in both Linear Algebra and Computational Graphics textbooks were analyzed. In addition, eighty-six students of Computer Science completed a questionnaire about linear transformation. These studies highlighted difficulties in relation to the exploration of different semiotic registers on the part of the students, particularly as concerned matrixial and graphical registers. In the second phase, which employed the methodology of *Design Experiments* (COBB et al., 2003), activities were developed to explore the diverse representation of planar linear transformations using *Cabri-Géomètre* and *paper&pencil* environments. Six students of Computational Engineering at a private university in the city of São Paulo participated in the experiment. The results indicated evolutions in the subjects’ understandings of the conditions for determinating linear transformations and of the particularities of their graphs, as well as a more comprehensive mastery of diverse representations and conversions. Analysis of students’ trajectories also revealed how students’ strategies were mediated by characteristics of the tasks and the computational environment.

Keywords: Linear Transformations. Semiotic Representation Registers. Learning Trajectories. *Cabri-Géomètre.* Textbooks.

1. INTRODUÇÃO

Esta pesquisa representa um estudo a respeito das transformações lineares, conteúdo normalmente presente na disciplina de Álgebra Linear de vários cursos superiores da área de Exatas, dentre eles os de Computação. Atualmente, o campo da Educação Matemática conta com diversas pesquisas que tratam do ensino e da aprendizagem de Álgebra Linear. Em DORIER (1998), é apresentada uma síntese de estudos nesta temática, provenientes de vários países. Destacam-se, dentre outros, os trabalhos do grupo francês, liderado inicialmente por Jean-Luc Dorier, Marc Rogalski, Aline Robert e Jacqueline Robinet, os do grupo dos Estados Unidos, representado em particular pelas pesquisas de Guershon Harel, e os do Canadá, constituídos pelos estudos de Joel Hillel e Anna Sierpinska. Na referida obra, as pesquisas apontaram principalmente as dificuldades dos estudantes decorrentes do caráter formal e abstrato da Álgebra Linear, revelando a importância da relação da aprendizagem desta disciplina com a questão da linguagem matemática. Nesse sentido, nossa atenção voltou-se aos estudos que tratavam dos registros de representação semiótica.

Por exemplo, identificamos, neste contexto, o trabalho de PAVLOPOULOU (1994) sobre as representações semióticas no conteúdo de vetores, que trata, dentre outras questões, da análise da diferença de desempenho dos estudantes nas transformações de um registro para outro. Além disso, observamos que certas pesquisas, como a de DIAS (1998) e a de PAVLOPOULOU (1993), referentes aos conteúdos de sub-espaços vetoriais e vetores respectivamente, explicitam que os livros didáticos de Álgebra Linear frequentemente privilegiam um tipo de registro nos conteúdos analisados.

A nossa prática profissional com estudantes da área computacional revelou que, em termos curriculares, as transformações lineares representam um conteúdo considerado como pré-requisito para o estudo da disciplina de Computação Gráfica. Inicialmente, em contato com docentes desta área, tivemos a oportunidade de observar a importância atribuída à questão da visualização em modelos geométricos ou gráficos no entendimento desta disciplina.

Desta forma, as constatações preliminares obtidas pela nossa atuação docente no Ensino Superior, ainda que empíricas, e as leituras iniciais dos trabalhos citados anteriormente, forneceram a motivação para uma pesquisa científica sobre o ensino de um importante conceito da Álgebra Linear, o de transformação linear, em uma perspectiva que considera as aplicações em Computação Gráfica.

Apesar de concordarmos com ROBERT, A.; ROBINET, J. (1989) quanto à afirmação de que a Álgebra Linear desempenha um papel de formalização, unificação e generalização de conceitos, também consideramos que o trabalho com modelos geométricos e figurativos pode revelar numerosas perspectivas de ensino para essa disciplina. Tal consideração apóia-se não só em CHARTIER (2004), a qual realizou uma pesquisa sobre o uso de modelos geométricos e figurativos em Álgebra Linear, mas também em DORIER et al. (1997). Este último, em seu estudo histórico sobre a gênese da Álgebra Linear, constatou que o seu desenvolvimento não ocorreu desvinculado da Geometria. Assim, sem ter a pretensão de garantir que um trabalho com a Geometria seja suficiente para capacitar o estudante a realizar generalizações em espaços vetoriais de dimensão maior que três, direcionamos nossa abordagem dessa temática para a articulação entre a Álgebra Linear e a Geometria, particularmente no conteúdo das transformações lineares.

Inicialmente, optamos por realizar dois estudos preliminares, os quais serviram para melhor delimitar nossa problemática de pesquisa e para avaliar a metodologia mais adequada para o desenvolvimento do estudo. Do ponto de vista institucional, foi realizada uma análise dos livros didáticos tanto da área de Álgebra Linear como de Computação Gráfica. Do ponto de vista dos estudantes da área computacional, foram avaliadas as suas produções escritas a partir de um questionário sobre transformações lineares planas. Os resultados desses dois estudos motivaram e subsidiaram o investimento em um trabalho de elaboração de um experimento de ensino, com a preocupação didática de embasar ou modificar a prática desta área.

Com o objetivo de situar o leitor na problemática desse estudo e para facilitar o acompanhamento do desenvolvimento deste trabalho, apresentamos sua estrutura, descrevendo, de forma resumida, os principais pontos de cada capítulo. Durante esta exposição, em momento oportuno, serão apresentados o objetivo do trabalho, a questão de pesquisa e as hipóteses iniciais de estudo.

No **Capítulo 2**, intitulado "**Fundamentação Teórica e Revisão Bibliográfica**", apresentamos as pesquisas que fundamentaram e motivaram a elaboração deste estudo. A base principal norteadora deste trabalho é a teoria de Raymond DUVAL (1995, 2000, 2003) a respeito dos registros de representação semiótica, na qual é destacada a importância de considerar, sob o ponto de vista do ensino e da aprendizagem matemática, as especificidades inerentes a cada registro, bem como os tipos de transformação existentes na passagem de uma representação para outra.

O autor afirma que a Matemática possui uma singularidade em relação às outras ciências, dada a sua natureza não real. Desta forma, para acessar qualquer objeto matemático, é necessária a utilização de representações de registros semióticos, tais como as representações algébricas, gráficas, numéricas, dentre outras. Esta particularidade pode desencadear no estudante, a confusão entre um objeto matemático e uma de suas representações, caso não haja no ensino de um conteúdo desta área a preocupação de coordenar diferentes registros durante o seu desenvolvimento.

Na visão deste pesquisador, o ensino atual da Matemática e a maior parte das pesquisas em Educação Matemática não levam em conta tal especificidade. Descrevendo de forma resumida, o ponto central de sua teoria está representado pela atividade de conversão, a qual consiste na transformação de uma representação em determinado registro para uma representação em outro registro. É o caso, por exemplo, de se determinar a lei algébrica de uma função partindo de sua representação gráfica, atividade que consiste em uma conversão de uma representação do registro gráfico para uma representação do registro simbólico-algébrico.

Segundo o pesquisador, as conversões podem ser congruentes ou não congruentes. Se na comparação da representação do registro de partida com a representação final do registro de chegada notar-se que a transformação está mais próxima de uma situação de simples codificação, ou seja, se a passagem de uma representação para outra se faz de maneira espontânea, a conversão é classificada como congruente. Caso contrário, ela é não-congruente. DUVAL (2003) afirma que é na conversão não-congruente que o estudante apresenta maior dificuldade. Deste modo, o autor ressalta que se o ensino da Matemática não se preocupar em explorar a atividade de conversão e, principalmente, as conversões não-congruentes, este fato pode acarretar no estudante prejuízos para a compreensão do conceito estudado.

Várias pesquisas (PAVLOPOULOU, apud DUVAL 2000; HILLEL, SIERPINSKA, 1995; BITTAR, 1998; DORIER, 1998), descritas ainda no segundo capítulo, comprovam que a maioria dos estudantes, independente do nível de ensino, apresenta dificuldades no estabelecimento de conversões, problemas na distinção entre um objeto matemático e uma de suas representações e diferenças de desempenho em questões que exploram os dois sentidos de conversão, tendo em vista que uma conversão pode ser congruente em um sentido e não congruente no sentido oposto. Ainda, conforme já exposto anteriormente, estudos realizados em livros didáticos de Álgebra Linear, tais como os de PAVLOPOULOU (1993) e de DIAS (1998), revelaram que as obras observadas freqüentemente privilegiam um tipo de registro.

Além desses estudos, também analisamos pesquisas que tratam da utilização de recursos computacionais no ensino da Matemática, como os estudos de BALACHEFF e KAPUT (1996), HOYLES e NOSS (1996) e SIERPINSKA, DREYFUS e HILLEL (1999). De uma forma geral, esses pesquisadores mostram que a introdução de recursos computacionais no ensino acarretou na análise de novas questões inerentes aos resultados específicos do uso dessas ferramentas. Por este motivo, ampliou-se a necessidade de estabelecer estudos relacionados ao impacto da utilização de *software* no ensino de Matemática.

Partindo destas pesquisas, apoiando-nos nos pressupostos de DUVAL (1995) sobre as relações entre *noesis* (apreensão conceitual de um objeto) e *semiosis* (produção de uma representação semiótica) em Matemática e, considerando a necessidade de uma aprendizagem específica para a coordenação de registros, optamos, inicialmente, por caracterizar as transformações lineares como objetos de ensino, a partir de uma análise de livros didáticos.

Desta forma, questionamo-nos como as obras didáticas de Álgebra Linear constantemente referenciadas nos cursos da área de Computação de universidades do país lidam com os registros de representação semiótica no conteúdo das transformações lineares. Ainda, tivemos o interesse de analisar o papel que as mesmas atribuem aos recursos computacionais. O detalhamento desse estudo e um comparativo com os dados obtidos nas pesquisas apresentadas em nossa revisão bibliográfica estão descritos no **Capítulo 3**, intitulado **“Análise dos Livros Didáticos”**.

Apesar de não constituírem a única fonte de trabalho da prática docente, partimos da premissa de que os livros didáticos desempenham um papel de referência na atividade do professor. Com esta escolha, não tivemos a intenção de minimizar o papel do docente no processo de ensino e nem a pretensão de esgotar as inúmeras variáveis que possam interferir neste processo. Assim, a análise dos livros didáticos constituiu-se em uma opção para esta pesquisa, uma vez que os mesmos representam um dos referenciais para a elaboração de conjecturas a respeito do tipo de ensino que está sendo desenvolvido.

A nossa pesquisa, em conformidade com DUVAL (2003) e os outros estudos já citados anteriormente, revelou que tais obras também privilegiam certos registros, principalmente o simbólico-algébrico e o numérico, sendo o registro gráfico o menos desenvolvido. Nesta análise, observamos que não há uma preocupação em explorar conversões entre diferentes registros ou a intenção de se trabalhar com questões que analisem a não congruência da atividade de conversão. Ainda, o nosso estudo apontou que as conversões que partem do registro gráfico são as menos exploradas em todas as obras analisadas. Notamos, também, que tais referências pouco valorizam a utilização de *software* matemático e, quando há menção ao uso de alguma ferramenta computacional, constatamos que a sua utilização não é direcionada para fins geométricos.

Nos currículos dos cursos de Computação, a disciplina de Álgebra Linear antecede a de Computação Gráfica, sendo a primeira considerada pré-requisito para o desenvolvimento da segunda. Sendo assim, partindo das evidências das análises realizadas até então, tivemos o interesse de investigar que tipo de domínio, em termos de registros e conversões no conteúdo das transformações, é necessário para que estudantes desta área adquiram as competências desejadas ao atendimento das especificidades de seu curso.

Diante desse interesse, realizamos uma análise dos livros didáticos mais referenciados na disciplina de Computação Gráfica dos cursos de Engenharia da Computação e Ciência da Computação de universidades do país, sob o ponto de vista dos registros presentes e das conversões estabelecidas no conteúdo das transformações geométricas. Tal análise permitiu concluir que é fundamental ao estudante desta área dominar os registros gráfico e matricial, bem como as conversões que partem de representações gráficas, exatamente as menos exploradas nos livros didáticos de Álgebra Linear analisados. Um detalhamento desse estudo também está presente no capítulo 3, referente à análise dos livros didáticos.

Prosseguindo a pesquisa, com o objetivo de observar o desempenho de alunos da área de Computação que, ao cursarem a disciplina de Álgebra Linear, foram introduzidos ao conceito de transformação linear segundo abordagens próximas às evidenciadas nos livros didáticos analisados, foi aplicado um questionário contendo cinco exercícios sobre as transformações lineares no plano.

Este instrumento procurou explorar a coordenação dos diferentes registros e de suas conversões, sendo aplicado a estudantes que ainda não haviam cursado a disciplina de Computação Gráfica. O **Capítulo 4**, intitulado **"Apresentação e Análise da Aplicação do Questionário",** contém uma descrição desse instrumento de avaliação, acompanhada da análise dos resultados obtidos pela sua aplicação, sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica. Além disso, estabelecemos ainda neste capítulo, um comparativo entre as evidências obtidas e os resultados das pesquisas presentes em nossa revisão bibliográfica. Este questionário foi aplicado a oitenta e seis (86) estudantes provenientes dos cursos de Engenharia da Computação ou Ciência da Computação de quatro instituições particulares de ensino superior do Estado de São Paulo.

Resumidamente, a análise das produções dos estudantes indicou que estes não possuem uma apreensão satisfatória das diversas representações, bem como um domínio da coordenação entre os diversos registros apresentados. Diante deste panorama, os resultados obtidos colocaram-nos na perspectiva de elaboração de uma abordagem de ensino das transformações lineares, englobando um trabalho de exploração dos diversos registros e das possíveis conversões, com ênfase naquelas que envolvem o registro gráfico.

Esses resultados preliminares balizaram a escolha da metodologia de pesquisa e a delimitação de nosso estudo. Sendo assim, essa pesquisa tem por questão avaliar em que medida situações que envolvem a exploração de diversos registros e conversões (congruentes ou não-congruentes), principalmente as que integram o registro gráfico, influenciam na conceitualização das transformações lineares no plano por parte de estudantes universitários da área de Computação. Além disso, temos um interesse especial em analisar o papel desempenhado pelo ambiente de geometria dinâmica *Cabri-Géomètre* neste processo, uma vez que tal *software* permite explorar diferentes representações, com a particularidade de agregar o registro gráfico.

Com isso, o objetivo deste trabalho consiste na elaboração, aplicação e avaliação de uma abordagem de ensino do objeto matemático "transformações lineares planas", incorporando mudanças de registros e o auxílio do *software* *Cabri-Géomètre*, tendo por foco as conversões envolvendo principalmente o registro gráfico.

Para isso, adotamos a metodologia de pesquisa de *Design Experiments* proposta por COBB et al. (2003), cuja descrição está presente no **Capítulo 5**, denominado **"Metodologia da Pesquisa"**. O objetivo deste tipo de metodologia consiste em analisar processos de aprendizagem inovadores de domínios específicos, de forma a representar um sistema complexo e interativo, envolvendo múltiplos elementos de diferentes tipos e níveis. Deste modo, em coerência com esta perspectiva metodológica, foram elaboradas atividades sobre as transformações geométricas no plano, desenvolvidas nos ambientes *papel&lápis* e *Cabri-Géomètre*, com o objetivo de fornecer uma abordagem que dê suporte ao desenvolvimento de um cenário destinado à Álgebra Linear, que integre o geométrico e forneça subsídios para reorganizar as práticas existentes nesse domínio.

Pretendemos, assim, observar que tipo de mecanismo cognitivo de compreensão será desencadeado pelo estudante, quando este se depara com uma abordagem diferenciada do conteúdo das transformações lineares planas. As atividades no ambiente *Cabri* foram elaboradas de modo a permitir o tratamento do objeto matemático tanto no seu aspecto objeto como em questões nas quais as transformações lineares são ferramentas de resolução de situações-problema, possibilitando efetuar um trabalho dinâmico e interativo entre várias representações, de modo a evidenciar as propriedades dos registros envolvidos bem como as suas relações. Ressaltamos que o desenvolvimento de tais situações não seria possível no ambiente tradicional do *papel&lápis*.

Esta metodologia possui a característica de representar o ponto de partida para futuras inovações, tendo por base a análise das pesquisas já existentes. Por este motivo, o nosso desenho inicial foi proposto a partir das necessidades apontadas pelos resultados das pesquisas presentes nas referências bibliográficas analisadas e pelo estudo que realizamos até então, os quais fundamentalmente apontaram os seguintes fatores com relação ao objeto matemático “transformações lineares”: as dificuldades dos estudantes diante das suas diversas representações e conversões; a carência, nos livros didáticos de Álgebra Linear, da diversificação dos registros e da exploração consciente das conversões congruentes e não congruentes, principalmente as que envolvem o registro gráfico; a necessidade do domínio deste registro para o estudo das transformações geométricas em Computação Gráfica; o desconhecimento dos alunos quanto aos aspectos geométricos de uma transformação linear e a modesta, ou até inexistente, utilização de recursos computacionais nos livros didáticos de Álgebra Linear.

Optamos por delimitar as atividades para as transformações lineares no plano e não em outros espaços devido a três fatores. Em primeiro lugar, este tipo de transformação constitui a base inicial de estudo das transformações lineares, antes de se expandir para o estudo em outros espaços vetoriais. Ainda, o trabalho no plano possibilita a visualização decorrente do trabalho com o registro gráfico no *Cabri.* Por fim, como o objetivo está voltado para o estudante da área de Computação, foi verificado, na análise dos livros didáticos desta área, que o entendimento do mecanismo dos registros inerentes às transformações geométricas no plano é primordial para a extensão do estudo das transformações no espaço.

Design Experiments têm natureza intervencionista e pragmática, no sentido de que a teoria é desenvolvida durante o processo prático. Um desenho inicial é implementado como um processo de aprendizagem hipotetizado, porém, durante a condução do experimento, conjecturas antigas podem ser rejeitadas e novas hipóteses são realizadas e testadas. Com isso, o pesquisador interage no sistema dotando-o de características cíclica, dinâmica e iterativa. Neste contexto, partindo de nosso desenho preliminar, estabelecemos as hipóteses iniciais apresentadas a seguir:

a) as atividades que compõem o *Design* podem favorecer tanto o conhecimento das diversas representações de uma transformação linear no plano, quanto a habilidade em coordenar os diversos registros;
b) o aspecto dinâmico do *software Cabri-Géometre* pode fornecer elementos para o estudante estabelecer conjecturas e validá-las experimentalmente, o que pode favorecer o entendimento de certos aspectos matemáticos das transformações lineares do plano, tais como, o aspecto geométrico das condições de linearidade e a determinação de uma transformação linear partindo de um registro gráfico;
c) as atividades do *Design* podem permitir ao estudante entender as especificidades de cada registro, bem como as relações entre eles, ou seja, o tipo de impacto que ocorre em certo registro quando é realizada uma mudança em outro registro.

Segundo a perspectiva metodológica adotada, temos consciência de que determinadas conjecturas podem ser refutadas e/ou reformuladas durante o processo, tendo em vista que o objetivo maior consiste na capacidade de adaptação aos desenvolvimentos apresentados pelos estudantes. Sendo assim, pretendemos avaliar constantemente cada episódio de ensino, reformulando-o, caso seja necessário, e criando novas conjecturas que serão posteriormente detalhadas e testadas.

Ainda neste capítulo, além da teoria metodológica adotada, descreveremos as atividades elaboradas, acompanhadas dos objetivos, das escolhas didáticas, da análise *a priori* e das resoluções esperadas. Realizamos uma aplicação “piloto” com um estudante voluntário da área de Engenharia da Computação de uma Instituição Particular de Ensino Superior do Estado de São Paulo, o qual já havia cursado a disciplina de Álgebra Linear, mas não a de Computação Gráfica. Esta aplicação preliminar objetivou analisar se as questões estavam compreensíveis ou se necessitavam de reformulações.

No **Capítulo 6,** intitulado **“Apresentação dos Resultados da Aplicação Principal”**, descrevemos a análise das produções de seis (06) estudantes voluntários, provenientes do curso de Engenharia da Computação de uma Instituição Particular de Ensino Superior da cidade de São Paulo, os quais participaram do experimento elaborado. O *Design* foi composto de duas fases, sendo a primeira realizada individualmente, com o objetivo de analisar o conhecimento prévio de cada estudante. Já na segunda fase, os sujeitos foram organizados em duplas, e depararam-se com atividades diferenciadas sobre o conteúdo de transformações lineares planas. Com isso, ainda neste capítulo, avaliamos a evolução apresentada pelos estudantes, por meio de uma análise que procurou comparar os seus desempenhos em cada fase do experimento. O **Capítulo 7**, denominado **“Conclusão do Estudo”**, contém uma descrição das considerações finais de nosso estudo, além de perspectivas para futuras investigações.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, objetiva-se descrever os aspectos mais relevantes das teorias que embasarão este trabalho, além das pesquisas atuais existentes na área do ensino de Álgebra Linear. Serão apresentados, primeiramente, os pressupostos teóricos de DUVAL (1995, 2000, 2003) a respeito dos registros de representação semiótica, os quais representam o principal referencial teórico desta pesquisa. Além disso, serão apresentadas certas ferramentas conceituais que embasam algumas de nossas escolhas e permitem descrever ou interpretar fenômenos didáticos relativos às temáticas envolvidas em nosso estudo. Em particular, citamos os aspectos *ferramenta* e *objeto* de um conceito descritos nos trabalhos de DOUADY (1986), elementos da Antropologia Cognitiva de CHEVALLARD (1992) e considerações sobre a integração de ambientes computacionais no ensino e aprendizagem da Matemática, a partir das idéias de BALACHEFF e KAPUT (1996) e das pesquisas de HOYLES e NOSS (1996). Por fim, apresentaremos uma revisão bibliográfica contendo as principais pesquisas sobre o ensino de Álgebra Linear, as quais muito contribuíram para a elaboração de nossa proposta.

2.2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.2.1. Pressupostos Teóricos de Duval e suas Implicações para o Ensino e para a Aprendizagem de Conceitos Matemáticos

DUVAL (1995, 2000, 2003) salienta a importância da análise do papel das representações quando se considera um objeto matemático. Para o autor, não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação.

A base de sua teoria remete constantemente a dois grandes filósofos e lógicos, Charles Sanders Peirce (1839-1914) e Gottob Frege (1848-1925). Com isso, será apresentado um breve panorama das idéias principais dessas duas personalidades, a fim de melhor compreender e situar os pressupostos teóricos de Duval.

Segundo SANTAELLA (1983), Peirce foi um cientista-lógico-filósofo considerado como um dos precursores da Semiótica. Para melhor entender as suas contribuições, faz-se necessário descrever o que representa a Semiótica hoje. E mais, para compreender esta ciência, inicialmente é preciso estabelecer a distinção entre língua e linguagem.

A língua que falamos e que utilizamos em nossos escritos não pode ser vista como a única e exclusiva forma de linguagem que somos capazes de produzir e transformar. É possível estabelecer uma comunicação de outras formas, por meio de imagens, sinais, gráficos, números, sons, gestos, olhares, dentre outros. A língua é uma forma de linguagem, ou seja, a língua se manifesta como linguagem verbal oral ou escrita. Entende-se por linguagem algo muito amplo, ligado às formas sociais de comunicação e de significação. Deste modo, há outras linguagens, tais como as dos surdos-mudos, da culinária, dos sons, dos gestos, dentre inúmeras outras. Sendo assim, a semiótica é a ciência geral de todas as linguagens, ou mais precisamente: "A Semiótica é a ciência que tem por objeto de investigação todas as linguagens possíveis, ou seja, que tem por objetivo o exame dos modos de constituição de todo e qualquer fenômeno como fenômeno de produção de significação e de sentido"[1].

A semiótica teve origens quase simultâneas nos Estados Unidos da América, na União Soviética e na Europa Ocidental, sendo Peirce o pai desta ciência na sua origem norte-americana. Segundo NÖTH (2003), Peirce tinha uma visão universal da semiótica, já que o ponto de partida da teoria peirceana dos signos é o axioma de que as cognições, idéias e até o homem são essencialmente entidades semióticas, ou seja, signos não representam uma classe de fenômenos ao lado de outros objetos não semióticos.

Peirce definiu três categorias universais que, segundo ele, formariam um modelo capaz de explicar a multiplicidade dos fenômenos do mundo. Estas categorias foram classificadas como primeiridade, secundidade e terceiridade. A primeiridade representa a categoria do sentimento imediato, sem reflexão e sem

---

[1] SANTAELLA, 1983, p. 13.

referência à outra coisa qualquer. A categoria da secundidade já relaciona um fenômeno primeiro a um outro, representando, assim, a categoria da comparação, da ação, do fato, da realidade e da experiência. A terceiridade, que relaciona um fenômeno segundo a um terceiro, é a categoria da mediação, do hábito, da memória, da continuidade, da síntese, da comunicação, da representação, da semiose e dos signos. Com isso, a base do signo é uma relação triádica em que cada fenômeno pertence a uma categoria.

Baseado em NÖTH (2003), na descrição de signo presente nos trabalhos de Peirce, ele o concebe como algo que procura representar, pelo menos em parte, um objeto que é a causa ou determinante do signo. O fato de o signo representar um objeto implica na questão do mesmo afetar uma mente, determinando naquela mente algo que é mediado pelo objeto. Essa determinação é denominada “interpretante”. Ressalta-se que o signo não é o objeto, ele apenas está no lugar do objeto e, conseqüentemente, torna-o capaz de representar o objeto de um certo modo e em certa capacidade. Basta verificar que a natureza de uma fotografia não é a mesma de uma maquete de uma casa. O signo só pode representar seu objeto para um intérprete, produzindo na sua mente algo que está relacionado ao objeto mediado pelo signo.

Peirce desenvolveu uma rede de classificações dos signos, as quais eram sempre triádicas. Dentre elas, há uma relação mais conhecida e divulgada que procura relacionar o signo (ou *representamen*) consigo mesmo, ele com o seu objeto e ele com o seu interpretante, conforme tabela apresentada a seguir.

TABELA 1 – CLASSIFICAÇÃO PEIRCEANA DOS SIGNOS

TRICOTOMIAS CATEGORIAS	**I REPRESENTAMEN EM SI**	**II RELAÇÃO AO OBJETO**	**III RELAÇÃO AO INTERPRETANTE**
PRIMEIRIDADE	QUALI-SIGNO	ÍCONE	REMA
SECUNDIDADE	SIN-SIGNO	ÍNDICE	DICENTE
TERCEIRIDADE	LEGI-SIGNO	SÍMBOLO	ARGUMENTO

FONTE: NÖTH, 2003, p. 90

O *representamen* é o nome *peirceano* do objeto perceptível que serve como signo para o receptor. Na fase I da tricotomia, são apresentadas as classificações segundo as categorias de primeiridade, secundidade e terceiridade. Neste caso, o *quali-signo* é uma qualidade do signo ainda não corporificado, como, por exemplo, a “sensação de vermelho”. Quando este é um existente concreto, ou seja, quando se corporifica, ele passa a pertencer à categoria da secundidade, sendo assim denominado por *sin-signo*, exemplificado por um grito espontâneo como signo de dor. Na terceira classe dos signos, temos o *legi-signo*, o qual é uma lei que é um signo, exemplificado por uma palavra de uma língua.

Na fase II da tricotomia, descreve-se o signo sob o ponto de vista da relação entre ele e o objeto, sendo este último correspondente ao referente. Nesta classificação, tem-se o ícone como representante da primeiridade, o qual é um signo cuja qualidade significante provém meramente da sua qualidade. Como exemplos, podemos citar uma pintura, uma fotografia, diagramas, dentre outros. O índice participa da categoria de secundidade porque é um signo que estabelece relações diádicas entre o signo e o objeto de causalidade, espacialidade e temporalidade. Como exemplos deste grupo, podemos citar o cata-vento, a fita métrica, os pronomes pessoais da linguagem, dentre outros. Os símbolos, pertencentes à categoria da terceiridade, relacionam-se ao objeto de acordo com convenções sociais. Como exemplos, temos o hábito, a regra, a lei, uma senha, um credo religioso, dentre outros.

Na fase III da tricotomia, na qual se analisa a relação entre o símbolo e o interpretante, este último considerado a significação do signo, tem-se a rema como representante da primeiridade. Esta representa qualquer signo que não é verdadeiro nem falso, como as palavras, exceto sim e não. O dicente, correspondente à categoria lógica da proposição, consiste em exprimir idéias que podem ser verdadeiras ou falsas, como, por exemplo, a proposição “A é B”. O argumento, pertencente à categoria da terceiridade, representa o signo de uma lei, ou seja, nesta fase o signo supera o quadro proposicional e participa de um discurso racional. Como exemplo, tem-se o argumento “A é B, B é C, logo A é C”.

FREGE (1978) introduz a distinção entre sentido e referência de expressões singulares. Em sua obra, oferece uma explicação semanticamente satisfatória da diferença existente entre o valor cognitivo de um enunciado de identidade “a=a” e o de um enunciado verdadeiro de igualdade “a=b”. Segundo o autor, um sinal ou nome próprio é a união de uma referência e um sentido. Cabe salientar que ele concebe o nome próprio consistindo de uma ou mais palavras ou mesmo de outros sinais. Na verdade, para que uma expressão pertença à categoria dos nomes próprios, certos critérios devem ser cumpridos. Em primeiro lugar, uma expressão não pode começar com artigo indefinido. Além disso, ela não pode assumir, em uma oração, a posição lógica de uma expressão predicativa, embora possa fazer parte de tal expressão. Em terceiro lugar, a expressão pode ocorrer em ambos os lados do signo de igualdade, mas a mesma deve ser saturada, ou seja, sem carência de complementação. Por exemplo, o signo conceitual "$x^2=1$" não é uma expressão saturada, pois possuiu um "lugar vazio", identificado por "x" , o qual pode ser "preenchido".

Enquanto a referência de um nome próprio é o objeto por ele designado, o sentido é aquilo no qual está contido o modo em que o objeto é dado pelo nome. Desta forma, no sentido está embutido um valor cognitivo. Por exemplo, as expressões "4" e "8/2" têm a mesma referência, mas expressam diferentes sentidos, ou seja, diferentes modos de conceber o mesmo número.

Além do sentido e da referência, FREGE (1978) introduz outro componente, ou seja, a representação associada ao sinal ou nome próprio. Enquanto o sentido do sinal é uma imagem apreendida coletivamente, a representação já assume um caráter individual e subjetivo.

> Se a referência de um sinal é um objeto sensorialmente perceptível, minha representação é uma imagem interna, emersa das lembranças de impressões sensíveis passadas e das atividades, internas e externas, que realizei. (...). A representação é subjetiva: a representação de um homem não é a mesma de outro. (...) A representação, por tal razão, difere essencialmente do sentido de um sinal, o qual pode ser a propriedade comum de muitos e, portanto, não é uma parte ou modo da mente individual... (FREGE, 1978, p. 64-65).

Com base em SCHIRN (1997), na semântica de Frege, as orações podem ter apenas dois valores de verdade: verdadeiro ou falso. Na concepção do autor, uma oração interrogativa e a sua correspondente oração declarativa contêm o mesmo pensamento. Enquanto a oração declarativa contém uma asserção, a interrogativa possui uma exortação, para que se reconheça o pensamento como verdadeiro ou o recuse como falso. Neste sentido, Frege apresenta a classificação de três ações. A primeira seria o captar do pensamento (ou o pensar), a segunda o reconhecimento da verdade de um pensamento (ou o julgar) e, por fim, a manifestação deste juízo (o asserir). Enquanto o pensar e o julgar são atos internos e psíquicos, a manifestação do juízo, seja na forma oral ou escrita, é um ato exterior.

Um aspecto essencial da teoria do juízo, defendida pelo autor, consiste no fato de que não se pode reconhecer um pensamento como verdadeiro antes que ele seja captado, mas pode-se captá-lo e exprimi-lo, sem reconhecê-lo como verdadeiro. Ressaltamos que Frege se opõe a suposição de que reconhecer como verdadeiro e recusar como falso sejam dois modos distintos de julgar, pois quando se julga, faz-se uma escolha entre pensamentos opostos, ou seja, o reconhecimento de um coincide com a rejeição do outro. Este fato se faz presente na sua linguagem lógico-formal, na qual não é necessário um signo especial para a rejeição de um pensamento, apenas para a negação sem força assertórica.

Tanto Peirce como Frege são personalidades constantemente citadas por DUVAL (1995, 2000, 2003), tendo em vista que a sua teoria baseia-se no conceito de representação semiótica. Historicamente, de acordo com DUVAL (1995), entre 1924 e 1926, Piaget introduziu a noção de representação mental em seu estudo sobre a representação do mundo pela criança, a fim de analisar as suas crenças e explicações sobre os fenômenos naturais e psíquicos. Entre 1955 e 1960, surgiu a noção de representação interna ou computacional, dada por um sistema de informações, analisado de modo a produzir uma resposta adaptada. Este tipo de representação foi desenvolvido pelas teorias que privilegiavam o tratamento. Por fim, surgiu a noção de representação semiótica, nos trabalhos sobre a aquisição de conhecimentos matemáticos.

As representações semióticas provêm de sistemas particulares de signos, como, por exemplo, a língua, a escrita algébrica e os gráficos cartesianos, acompanhados de operações cognitivas de mudança de representação de um sistema a outro. Com relação a esta última noção de representação, Duval cita as pesquisas de KAPUT[2] (1987, apud DUVAL, 1995) sobre a importância dada aos símbolos na atividade matemática, além dos estudos de DOUADY[3] (1984, apud DUVAL, 1995) sobre o jogo de quadros, o qual consiste em organizar as situações de aprendizagem, privilegiando a diversidade de formas de

[2] KAPUT, J.J. Towards a theory of simbol used in mathematics. In: JANVIER, C. (org). *Problems of representation in mathematics learning and solving.* Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1987.

[3] DOUADY, R. Jeux des cadres et dialectique outil-objet dans l´enseignement des mathématiques.Tese de doutorado: Universidade de Paris VII, 1984.

representação de um mesmo conteúdo. O pesquisador ainda destaca que, além dos objetivos percorridos pelos dois pesquisadores citados anteriormente, há na representação semiótica, o interesse da mudança de forma de representação por razões de economia de tratamento.

O autor expressa questões relativas à aprendizagem matemática relacionando, fundamentalmente, os processos de *semiosis* e *noesis*. Entende-se por *semiosis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e, por *noesis,* os atos cognitivos, como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência. Segundo o pesquisador, "não há *noesis* sem *semiosis*"[4], ou seja, não há aquisição conceitual (conhecimento) de um objeto sem recorrer a sistemas semióticos (representações). Com isso, as representações mentais e as representações semióticas não podem ser vistas como dois domínios totalmente diferentes, ao contrário, há uma estreita interdependência entre elas, de tal maneira que para garantir o primeiro passo na direção da *noesis* é necessária a *semiosis*.

Há uma distinção entre os diferentes sistemas semióticos, de acordo com as atividades cognitivas que os mesmos são capazes de cumprir. Estas atividades são classificadas como atividades de formação, de tratamento e de conversão. Na atividade de formação de representações em um registro semiótico particular, tem-se a finalidade de exprimir uma representação mental ou evocar um objeto real. Quando se faz uma transformação de uma representação para outra, no interior de um mesmo registro, tem-se uma atividade de tratamento. Já na atividade de conversão, realiza-se uma transformação que produz uma outra representação, em um registro distinto do qual se partiu.

Deste modo, o registro de representação semiótica é o sistema semiótico capaz de cumprir estas três atividades cognitivas. Como exemplos de registros de representação semiótica, podemos destacar os registros algébrico e gráfico. Como contra-exemplo, temos os códigos, os quais representam um sistema semiótico que não cumpre as três atividades cognitivas citadas, logo, não constituem um registro de representação semiótica.

---

[4] Traduzido por nós do original em Francês, DUVAL, 1995, p.5.

Com relação ao objeto matemático "transformações lineares", entenderemos que o exemplo a seguir representa um tratamento no registro simbólico-algébrico, uma vez que o desenvolvimento da questão envolve manipulações no interior deste registro.

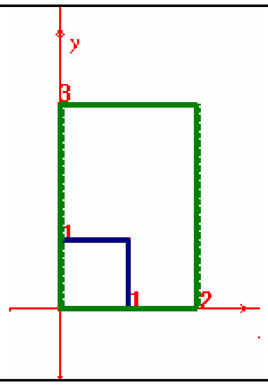
QUADRO 1 – EXEMPLO DE TRATAMENTO NO INTERIOR DO REGISTRO SIMBÓLICO-ALGÉBRICO

T: $R^2 \rightarrow R^2$ e S: $R^2 \rightarrow R^2$/ T(x,y) = (2x, 2y) e S(x,y)= (-x,y). SoT(x,y) = S(2x,2y) = (-2x,2y).

Como exemplos de conversões, podemos citar a construção de um gráfico a partir de uma equação, a escrita de uma equação partindo de um gráfico, a tradução de uma afirmação, dada em língua natural, para a simbologia algébrica ou a interpretação, em língua natural, de uma sentença dada em simbologia algébrica. Isto porque, nestes casos, parte-se de uma representação em determinado sistema semiótico, sendo produzida uma outra representação em um sistema semiótico distinto daquele que se partiu.

Com relação ao objeto matemático de nossa pesquisa, entenderemos que o exemplo a seguir representa uma conversão do registro simbólico-algébrico para o gráfico.

QUADRO 2 – EXEMPLO DE CONVERSÃO DO REGISTRO SIMBÓLICO-ALGÉBRICO PARA O GRÁFICO

REGISTRO SIMBÓLICO-ALGÉBRICO	REGISTRO GRÁFICO
$F(x, y) = (2x, 3y)$	

Se na comparação da representação do registro de partida com a representação final do registro de chegada notar-se que a transformação está mais próxima de uma situação de simples codificação, ou seja, se a passagem de uma representação para outra se faz de maneira espontânea, a conversão é classificada como congruente. De acordo com DUVAL (1995), para que exista congruência na conversão, três condições devem ser satisfeitas: correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, uma mesma ordem possível de apreensão das unidades das duas representações e conversão de uma unidade significante de representação de partida para uma unidade significante correspondente no registro de chegada. Quando essas condições não ocorrem desta maneira, temos uma conversão não-congruente. A tabela seguinte contém exemplos, presentes em DUVAL (2000), que ilustram este tipo de fenômeno, característico da atividade de conversão.

TABELA 2 – PRIMEIRO EXEMPLO DE ANÁLISE DA CONGRUÊNCIA DA ATIVIDADE DE CONVERSÃO

TIPO DE CONVERSÃO	SISTEMA OU REGISTRO DA ESCRITA NATURAL	SISTEMA SIMBÓLICO-ALGÉBRICO
Conversão congruente	Conjunto de pontos com ordenada maior que abscissa.	y>x
Conversão não congruente	Conjunto de pontos cujas ordenadas e abscissas têm o mesmo sinal.	x.y>0

FONTE: DUVAL, 2000, p. 63[5]

Ainda, cabe ressaltar que há conversões que podem ser congruentes em um sentido e não congruentes no sentido oposto, característica classificada pelo autor como “fenômeno da heterogeneidade da congruência”. DUVAL (2003) relata que é um grande equívoco considerar que, se um estudante estabelece uma conversão em um sentido, automaticamente terá condições de estabelecer a conversão no sentido oposto. Exemplificando, PAVLOPOULOU (1993), em seu estudo sobre vetores, aplicou uma questão que exigia a conversão da representação do registro tabular para o gráfico. Neste caso, o índice de acerto foi de 0,83. Ao solicitar a resolução da mesma questão requerendo a conversão no sentido contrário, o índice de acerto foi de 0,34. A descrição detalhada deste fato será apresentada em momento posterior, na ocasião do relato da revisão bibliográfica de nossa pesquisa.

Um outro estudo, presente em DUVAL (1995), a respeito da heterogeneidade das conversões, explorou a atividade de conversão entre a

[5] Traduzido por nós do original em Inglês.

língua natural e a representação simbólica nos dois sentidos. A tabela, a seguir, apresenta a taxa de acerto das conversões requeridas.

TABELA 3 – SEGUNDO EXEMPLO DE ANÁLISE DA CONGRUÊNCIA DA ATIVIDADE DE CONVERSÃO

I	II	I®II	II®I
1. A soma de dois produtos de dois inteiros, todos os inteiros são diferentes.	a.b+c.d	90%	90%
2. O produto de um inteiro pela soma de dois outros.	a.(b+c)	71%	74%
3. A soma dos produtos de um inteiro com dois outros inteiros	a.b+a.c	48%	87%
4. A intersecção dos complementares de dois conjuntos	$CA \cap CB$	91%	81%
5. A união das intersecções de um conjunto com dois outros conjuntos	$(A\cap B)\cup(A\cap C)$	41%	81%

FONTE: DUVAL, 1995, p. 53[6]

Podemos observar que a conversão II→I, que parte de uma expressão simbólica para uma expressão em língua natural, apresenta um grande sucesso, o que pode ser explicado pelo fato da transformação ser congruente. Já a conversão em sentido contrário mostrou um contraste de resultados nas questões similares 1 e 3 e também nas questões similares 4 e 5. Este contraste, segundo o pesquisador, pode ser explicado pelo fenômeno da não congruência entre o registro de partida e o de chegada.

No decorrer de nosso trabalho de pesquisa, o leitor observará que temos um interesse particular de explorar e analisar este fenômeno da atividade de conversão, principalmente nas transformações que envolvem o registro gráfico.

As dificuldades relacionadas à não-congruência das conversões podem ser agravadas pelo desconhecimento das características intrínsecas de um determinado registro. Segundo DUVAL (2003), não é dada a devida atenção a estes dois fenômenos da congruência nas pesquisas relacionadas à Educação Matemática. Na sua visão, é essencial, para a aprendizagem matemática, o reconhecimento de conversões não-congruentes e o domínio de uma efetiva coordenação entre os registros, pois são atividades que constituem condição de

[6] Traduzido por nós do original em Francês.

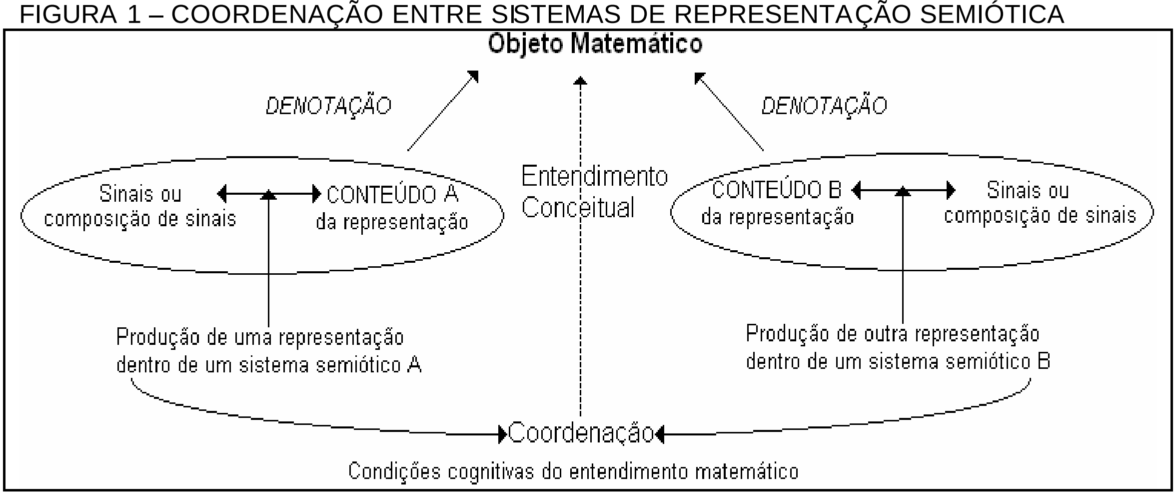
acesso à compreensão matemática.

Ainda, um trabalho de aprendizagem centrado na diversidade dos sistemas de representação, com a preocupação de explorar as conversões em duplo sentido, promove não somente o sucesso, mas também modificações na qualidade das produções dos estudantes.

Coerente com esta teoria, a nossa pesquisa envolverá um estudo sobre as transformações lineares planas, acompanhado da proposta de um experimento de ensino, que terá a preocupação de diversificar os registros e explorar os fenômenos da atividade de conversão.

DUVAL (2000) pressupõe, então, que a aprendizagem de um conceito matemático consiste em desenvolver coordenações progressivas entre vários sistemas de representação semiótica, o que pode ser resumido pelo esquema seguinte.

FIGURA 1 – COORDENAÇÃO ENTRE SISTEMAS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA



FONTE: PASSONI, 2002, p.12
NOTA: Traduzido do original em Inglês de DUVAL, 2000, composição da figura 2, p.59 e da figura 6, p.65.

Com relação à sua natureza, os registros são classificados em multifuncionais ou monofuncionais. Os registros multifuncionais são aqueles usados em vários campos da cultura, tanto para fins de comunicação como para tratamento. Apesar de este tipo de registro admitir várias formas de tratamento, estas não podem ser realizadas de modo algorítmico. Como exemplos de registros multifuncionais, temos a língua natural e a configuração de formas.

Já os registros monofuncionais têm sido desenvolvidos para um tipo específico de tratamento, com a finalidade de se obter melhores desempenhos, e, conseqüentemente, os mesmos admitem tratamentos mais algoritmizáveis. Como exemplos de registros monofuncionais, podemos citar os sistemas numéricos, as notações algébricas, os gráficos cartesianos, dentre outros.

Sendo assim, o pesquisador defende que, para o entendimento matemático, é importante estabelecer a coordenação entre pelo menos dois registros, em que um é multifuncional e o outro monofuncional, afirmando que "...se nós considerarmos os níveis mais avançados de ensino, a predominância de registros discursivos monofuncionais tende a aumentar"[7] (DUVAL, 2000, p. 66).

Esta situação será avaliada em nossa pesquisa no que tange à análise dos livros didáticos de Álgebra Linear, ou seja, observaremos se, na abordagem das transformações lineares, há também um predomínio dos registros monofuncionais em detrimento dos registros multifuncionais, fato que o leitor poderá verificar, posteriormente, na descrição do Capítulo 3, intitulado "Análise dos Livros Didáticos".

Na concepção do autor, desprezar o uso de registros multifuncionais nesta etapa, considerando a língua natural e as figuras geométricas como objetos óbvios, além de aumentar a confusão no entendimento de um conceito, pode conduzir a uma perda de significado. DUVAL (2003) destaca a diferença de análise da atividade matemática na perspectiva de ensino e aprendizagem e na perspectiva de pesquisa feita por matemáticos.

> Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. Em outros termos, a conversão não tem nenhum papel intrínseco nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois eles se fazem baseados num tratamento efetuado em um registro determinado, necessariamente discursivo. (Duval, 2003, p. 16).

É provável que, por este motivo, não se atribua uma atenção especial à conversão no ensino de conteúdos matemáticos, já que, para aqueles que têm a Matemática como foco principal, as atividades desenvolvidas requerem principalmente o uso de tratamentos no interior de um mesmo registro. Porém, na

---

[7] Traduzido por nós do original em Inglês.

perspectiva de ensino, a conversão representa uma atividade fundamental, uma vez que a mesma exige do indivíduo a capacidade de articular variáveis cognitivas específicas do funcionamento de cada um dos dois sistemas semióticos envolvidos. Isto porque duas representações do mesmo objeto matemático, produzidas em dois registros distintos, não têm o mesmo conteúdo.

Nesta obra, o autor ainda salienta que várias pesquisas apontam para o fato de que, no ensino da Matemática, há um "enclausuramento" de registro, e por conseqüência, raramente é dada uma atenção especial ao papel desempenhado pela atividade de conversão e aos fenômenos a ela relacionados. Com isso, segundo o pesquisador, uma aprendizagem que não explora as conversões não capacita o estudante a realizar transferências.

> Numerosas observações nos permitiram colocar em evidência que os fracassos ou os bloqueios dos alunos, nos diferentes níveis de ensino, aumentam consideravelmente cada vez que uma mudança de registro é necessária ou que a mobilização simultânea de dois registros é requerida. No caso de as conversões requeridas serem não-congruentes, essas dificuldades e/ou bloqueios são mais fortes. (DUVAL, 2003, p.21).

Partindo dessa problemática, uma das preocupações de nosso estudo é evidenciar se, no ensino das transformações lineares, especificamente no contexto nacional, também ocorre uma valorização de determinado registro em detrimento de outro. Além disso, observaremos que papel é dado às conversões e aos seus fenômenos.

As atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão, próprias de um registro de representação semiótica, estão associadas a certas regras. Por exemplo, a atividade de formação deve respeitar as regras próprias do sistema empregado, as quais serão denotadas por regras de conformidade. Tais regras estão associadas às possibilidades de comunicação e tratamento.

As regras de conformidade, essenciais para a determinação das unidades elementares do sistema, tais como os símbolos e vocábulos, promovem o estabelecimento das combinações admissíveis das unidades elementares, para formar unidades mais complexas, como por exemplo, as regras de formação para um sistema formal ou a gramática para a língua natural. Por fim, elas ainda garantem as condições para que uma representação de ordem superior seja uma produção pertinente e completa.

A atividade cognitiva do tratamento está subordinada às regras de expansão informacional, as quais são aplicadas em transformações de representações de um mesmo registro. As primeiras regras de expansão informacional foram criadas no quadro da lógica e denominadas regras de derivação. FREGE[8] (1971, apud DUVAL, 1995), foi o primeiro a analisar o funcionamento da transformação interna a um registro de representação, bem como a distinguir o sentido da referência.

Esta distinção, segundo DUVAL (1995), é primordial para o estabelecimento da atividade de conversão, pois se o indivíduo não diferencia o conteúdo de uma representação do objeto representado, a conversão torna-se impossível ou incompreensível.

O progresso do conhecimento é acompanhado pela criação e desenvolvimento de novos sistemas semióticos específicos. Com isso, os indivíduos pertencem a um meio cultural que diversifica os modos de representação. Para exemplificar tal afirmação, o pesquisador afirma que é suficiente comparar a evolução dos livros didáticos para constatar a ampliação da diversidade de sistemas semióticos presentes.

Partindo dessa afirmação, observaremos se os livros didáticos atuais de Álgebra Linear diferem das obras de edição mais antiga, quanto aos registros presentes e às conversões estabelecidas, fato que poderá ser observado no capítulo 3.

O fenômeno da compreensão do papel das representações no funcionamento do pensamento e no desenvolvimento dos conhecimentos já foi destacado por Peirce, ao distinguir três tipos de signos: os ícones, os símbolos e os índices. Conforme apresentado anteriormente, esta primeira classificação foi elaborada no quadro de uma reflexão sobre a lógica, e esta contribuiu para o nascimento da semiótica. Porém, as questões relativas à relação entre os sistemas semióticos e aos problemas de conversões de representações de um sistema a outro foram somente tratadas posteriormente, nos trabalhos propostos

---

[8] FREGE, G. Fonction et concept. Sens et denotation. *Écrits logiques et philosophiques*. Trad. de C. Impert. Paris: Seuil, 1971.

por CHOMSKY[9] (1965, apud DUVAL, 1995) e BENVENISTE[10] (1974, apud DUVAL, 1995).

DUVAL (1995) relata que, para Benveniste, a classificação realizada por Peirce era muito geral para tratar da língua natural, já que ele a considerava como a "organização semiótica por excelência". Neste caso, ele introduziu uma nova classificação que culminou na noção de sistema semiológico e mostrou a importância de se relacionar sistemas semióticos diferentes.

Neste contexto, a semiótica não implicava somente no uso de uma variedade de sistemas semióticos, mas também na possibilidade de estabelecer correspondências entre eles. Os estudos de Benveniste estabeleceram tais correspondências, porém limitadas entre a língua natural e outro sistema, como por exemplo, a língua natural e a arte da pintura, a língua natural e a música, dentre outras relações. Ele não realizou estudos sobre o papel da diversidade de sistemas semióticos no funcionamento do pensamento nem na complexidade da conversão das representações de um sistema para outro.

Segundo DUVAL (1995), a língua natural constitui um registro diferenciado, não somente pelo fato de sua grande complexidade e do número considerável de variações que oferece, mas por ela permitir o discurso. Como registros discursivos, temos, além da língua natural, os sistemas numéricos, as línguas formais e as notações algébricas. São registros não discursivos, as figuras geométricas e os gráficos cartesianos.

De acordo com o autor, a língua natural pode ser empregada de diversas maneiras. Ela pode ter um emprego comum ou social, literário, ou ainda pode ser utilizada de forma especializada nos diferentes domínios do conhecimento. Em nosso trabalho de pesquisa, utilizaremos a exploração da língua natural em dois tipos de emprego: o comum e o especializado, este último relacionado ao uso da língua natural especificamente no domínio da Matemática.

Ao se tratar de uma representação, há quatro aspectos a serem considerados. Em primeiro lugar, deve-se determinar em que sistema a representação é produzida, tendo em vista que o conteúdo da representação

[9] CHOMSKY, N. *Aspects of the Theory of Syntax.* Cambridge, MA: MIT Press, 1965.

[10] BENVENISTE, E. *Problèmes de linguistique générale*. Paris: Gallimard, 1974.

altera de acordo com o sistema de representação utilizado. Exemplificando, o conteúdo de um gráfico de uma função não é o mesmo do conteúdo de sua expressão analítica.

Um segundo aspecto a ser considerado é a relação entre representação e objeto representado. Se o sistema de produção for físico ou uma organização mental, a relação é de causalidade, baseada na ação do objeto no sistema. Por outro lado, se o sistema é semiótico, composto de palavras, símbolos e desenhos, a relação é somente de denotação.

O terceiro aspecto refere-se à análise da possibilidade de acessar o objeto representado sem o uso de uma representação semiótica. Por fim, como último aspecto, tem-se o motivo pelo qual a representação é necessária, ou seja, se é para fins de comunicação ou de tratamento.

Com relação a estes aspectos, o autor ressalta uma característica particular entre a atividade cognitiva requerida pela Matemática e a requerida em outros domínios do conhecimento. O acesso a objetos matemáticos não é possível por meios perceptivos ou instrumentais, dada a sua natureza “não real”. Sendo assim, para acessá-los, é necessária uma relação de denotação, a qual só é possível por meio de um sistema de representação semiótica.

Esta especificidade de acesso ao objeto matemático conduz à adoção de um modelo específico para descrever as condições da aquisição de conhecimentos matemáticos. De acordo com o pesquisador, os modelos clássicos de psicologia cognitiva – centrados nos tratamentos de informação, ou os modelos epistemológicos – centrados no desenvolvimento histórico dos diferentes domínios matemáticos, não atendem às necessidades específicas da aprendizagem matemática.

O modelo desenvolvimentista foca no crescimento do conhecimento. Por um lado, é dada uma importância ao modo histórico no qual objetos matemáticos foram descobertos e, por outro lado, analisa-se o modo pelo qual um indivíduo toma consciência de objetos matemáticos, tais como os números naturais, as formas geométricas, dentre outros. É feito um paralelo entre estes dois campos de fenômenos para explicar a aquisição do conhecimento matemático, ou seja, estabelece-se um elo entre a epistemologia e a psicologia do desenvolvimento. O modelo desenvolvimentista ainda engloba um terceiro campo de fenômeno, relacionado às interações entre os estudantes nas resoluções de problemas.

Para o autor, este modelo não atende à necessidade específica da Matemática, pelo fato de não responder à questão relacionada às condições cognitivas internas necessárias para qualquer estudante entender Matemática. Para a compreensão do processo de aprendizagem da Matemática, torna-se necessário, então, um modelo centrado nas condições cognitivas de compreensão, ou seja, nas restrições de acesso aos objetos matemáticos.

> Não podemos nos ater a um modelo geral comum de aquisição de conhecimentos centrado sobre a ação, as interações e os desequilíbrios como fatores principais da construção de conceitos matemáticos. (...) A diferença entre a atividade cognitiva requerida pela matemática e aquela requerida em outros domínios de conhecimento não deve ser procurada nos conceitos, mas nas duas características seguintes: a importância primordial das representações semióticas e a grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática. (DUVAL, 2003, p.12 a 14).

Neste caso, a teoria de Duval está apoiada no modelo cognitivo, o qual foca a complexidade cognitiva do pensamento humano, onde a diversidade dos registros de representação assume um papel central na compreensão matemática.

Se por um lado só é possível ter acesso a um objeto matemático por meio de um sistema semiótico, ao mesmo tempo, objetos matemáticos não podem ser confundidos com a representação semiótica utilizada. Neste aspecto, vale relembrar que DUVAL (1995) destaca a importância da distinção entre sentido e referência proposta por FREGE (1971, apud DUVAL, 1995), já que o objeto representado não pode ser identificado com o conteúdo da representação que o torna acessível.

> Sempre que um sistema semiótico é alterado, o conteúdo da representação muda, enquanto o objeto denotado permanece o mesmo. Mas como objetos matemáticos não podem ser identificados com nenhuma de suas representações, vários estudantes não podem discriminar o conteúdo da representação e o objeto representado. (DUVAL, 2000, p. 59)[11].

Em nossa revisão bibliográfica, presente ainda neste capítulo, apresentaremos pesquisas que comprovam que, independente do nível de

---

[11] Traduzido por nós do original em Inglês.

ensino, vários estudantes, ao converterem uma representação de um sistema semiótico a uma representação do mesmo objeto em outro sistema, concluem inadequadamente que tais representações referem-se a dois objetos distintos. Desta forma, como um estudante aprende a distinguir um objeto matemático de uma representação semiótica particular e como o estudante pode aprender a reconhecer um objeto matemático através das diferentes representações, são problemas que devem ser considerados quando se ensina um conteúdo matemático.

Tendo em vista que DUVAL (2003, p. 22) afirma que "... o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado", torna-se crucial, na compreensão matemática, dispor de ao menos dois registros de representação diferentes.

Na visão do autor, ao se deparar com um problema matemático, se o estudante possuir tais dificuldades, estas podem trazer como conseqüências, tanto a apresentação de dificuldades na transferência de conhecimentos como problemas na tradução de afirmações verbais em dados simbólicos ou numéricos. Com isso, a coordenação consciente dessa variedade de sistemas semióticos representa uma atividade essencial para a aprendizagem matemática.

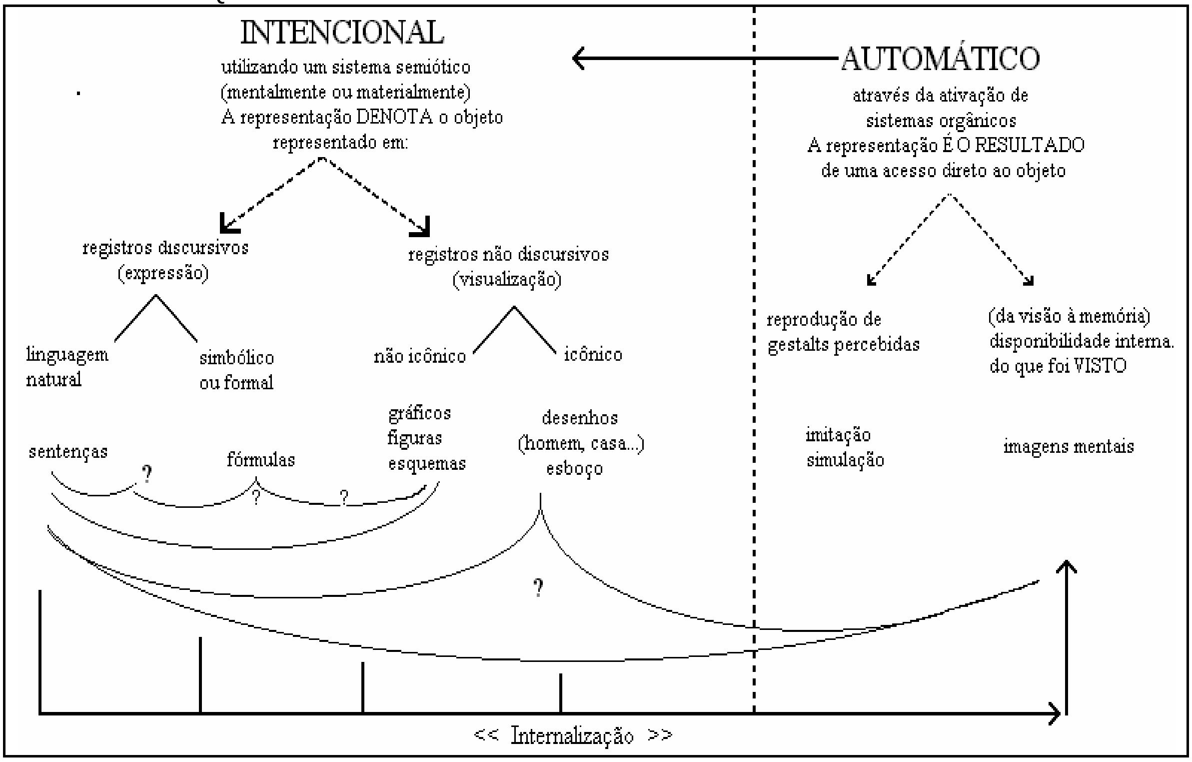
A teoria de Duval insere-se no modelo cognitivo do processo da aprendizagem matemática, cujo foco está na complexidade cognitiva do pensamento humano. Neste contexto, a preocupação resume-se em analisar as condições cognitivas internas necessárias para o estudante entender Matemática, as quais formam a sua arquitetura cognitiva.

> A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino. (Duval, 2003, p. 12)

O entendimento matemático depende, então, da mobilização de vários registros e, deste modo, um indivíduo aprende matemática se integra, em sua arquitetura cognitiva, todos os registros necessários como novos sistemas de representação.

O esquema a seguir, apresenta uma síntese da organização da arquitetura cognitiva proposta por DUVAL (2000).

FIGURA 2 – ARQUITETURA COGNITIVA



FONTE: PASSONI, 2002, p. 14
NOTA: Traduzido do original em Inglês de DUVAL, 2000, p. 66.

Os pressupostos teóricos de Duval representam a base principal de elaboração e análise desta pesquisa. O leitor observará que a sua teoria perpassa por todo o nosso estudo, uma vez que é utilizada na análise dos livros didáticos, na elaboração e análise do questionário aplicado em estudantes da área de Computação e, por fim, como base para a elaboração do *Design* e para a análise das interações dos sujeitos com as tarefas e ferramentas propostas.

2.2.2. Aspectos *Ferramenta* e *Objeto* de um Conceito

DOUADY (1986) elaborou um estudo que permite realizar uma análise didática das relações entre professor e aluno a respeito de certa noção matemática. A dialética ferramenta-objeto representa um processo cíclico, que organiza o papel do professor e de seus alunos em uma atividade matemática. Neste contexto, conceitos matemáticos aparecem sucessivamente como ferramentas, quando assumem o papel de auxiliares para a solução de um problema, e, como objetos, quando assumem o papel na construção de um conhecimento organizado. A pesquisadora ressalta a importância do jogo de quadros[12], o qual representa uma mudança na abordagem que permite obter formulações diferentes de um mesmo problema, com o intuito de buscar a superação das dificuldades encontradas.

O seu estudo tem os trabalhos de Piaget e da Escola de Psicologia Social de Génève como referências teóricas, principalmente quanto a três aspectos: a questão da importância da ação do estudante sobre o objeto, o papel do processo de reequilibração durante a aprendizagem de um conceito e a análise dos conflitos cognitivos entre interlocutores trabalhando em conjunto ou a distância.

A dialética ferramenta-objeto é composta por seis fases. A primeira é a fase do antigo, na qual conceitos matemáticos se apresentam como ferramentas explícitas para resolver ao menos parcialmente o problema. Sendo assim, o aluno compreende o enunciado do problema, mas seus conhecimentos são insuficientes para resolvê-lo completamente. Em seguida, vem a fase da pesquisa ou do novo implícito. Nesta, os alunos percebem que a estratégia utilizada não é suficiente para resolver o problema e, com isso, os mesmos organizam-se de forma a simular uma sociedade de pesquisadores em atividade. As novas questões conduzem os alunos a buscar meios de novas adaptações. Neste momento, destaca-se o papel do jogo de quadros, o qual representa um modo de avançar nesta fase, constituindo-se um fator de reequilibração.

A terceira fase é a da explicitação/institucionalização local, que representa o momento em que é realizada uma discussão em sala dos resultados obtidos, os quais são validados ou refutados. Em seguida, há a fase da institucionalização, quando o conceito assume o papel de objeto, uma vez que é estruturado na forma de definições, teoremas e demonstrações. Neste momento, estabelece-se o que é essencial e o que é secundário, ou seja, oficializa-se o conceito. Conseqüentemente, esta etapa representa um fator de homogeneização e constituição de um saber da classe.

A penúltima etapa é a da familiarização/reinvestimento, fase em que são propostos exercícios variados que necessitam das noções recentemente institucionalizadas. Por fim, temos a fase dos novos problemas, na qual são

[12] Exemplos de quadros: algébrico, geométrico e numérico.

apresentadas situações mais complexas. A partir daí, o objeto de estudo toma *status* de antigo para iniciar um novo ciclo da dialética ferramenta-objeto.

Desta teoria, utilizaremos em nosso estudo apenas a noção dos aspectos ferramenta e objeto do conceito, conforme distinção apresentada por Douady: "... um conceito é ferramenta quando o interesse é focalizado sobre seu uso para resolver um problema (...). Por objeto, entendemos o objeto cultural tendo seu lugar em um edifício mais amplo que é o saber científico em um dado momento, reconhecido pela comunidade de matemáticos"[13].

Assim, entenderemos que, se o conceito for utilizado como meio de resolução de problemas, o mesmo estará sendo tratado no seu aspecto ferramenta. O quadro a seguir apresenta uma situação na qual o conceito de transformação linear será considerado assumindo tal aspecto.

QUADRO 3 – EXEMPLO DA TRANSFORMAÇÃO LINEAR TRATADA NO SEU ASPECTO FERRAMENTA

Um espelho plano está apoiado em uma parede vertical formando um ângulo de 45^o com ela. Se um feixe de luz de raios paralelos for emitido verticalmente (do teto para o chão), determine a direção dos raios refletidos.

FONTE: BOLDRINI et al., 1980, p. 175

Por outro lado, se o foco do estudo estiver no próprio conceito, o mesmo estará sendo apresentado no seu aspecto objeto. A questão a seguir exemplifica a exploração do conceito de transformação linear nesse aspecto.

QUADRO 4 – EXEMPLO DA TRANSFORMAÇÃO LINEAR TRATADA NO SEU ASPECTO OBJETO

Seja $F: U \to V$ uma transformação linear com a seguinte propriedade: Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, então $\{F(u_1), \ldots, F(u_n)\}$ é linearmente independente em V. Provar que F é injetora.

FONTE: CALLIOLI et al., 1990, p. 111

Partindo desta classificação, avaliaremos, então, como os livros didáticos de Álgebra Linear trabalham estes aspectos no conteúdo das transformações lineares (cf. Cap. 3) e incluiremos, nas atividade do *Design*, situações explorando esses aspectos (cf. Cap 5) .

Apesar disso, focaremos o estudo no aspecto objeto desse conceito, uma

[13] DOUADY, 1986, p. 9 , Traduzido por nós do original em Francês.

vez que os estudantes participantes do experimento foram introduzidos anteriormente a este conteúdo.

2.2.3. A Antropologia Cognitiva de Chevallard

A antropologia cognitiva de CHEVALLARD (1992) está baseada nas relações existentes entre objetos (*O*), indivíduos (*X*) e instituições (*I*). Na concepção do autor, tudo é objeto, e tal noção ocupa uma posição privilegiada na teoria antropológica, uma vez que representa a base de sua construção. No caso, os indivíduos, as instituições e outras entidades também são objetos, porém de um tipo particular.

Um objeto existe a partir do momento em que um indivíduo *X* ou uma instituição *I* o reconheça como existente. Na simbologia introduzida por CHEVALLARD (1992), *O* existe para *X* se houver uma relação pessoal de *X* com *O*, indicada por R(*X,O*) e *O* existe para *I* se houver a relação institucional de *I* com *O*, indicada por R_I (*O*). Uma outra noção desta teoria é a de conhecimento. Segundo o autor, um indivíduo conhece *O* se existe R(*X*,*O*) e, uma instituição conhece *O*, se existe R_I (*O*). Deste modo, a existência de um objeto está condicionada ao fato do mesmo ser reconhecido por pelo menos um indivíduo ou uma instituição. Exemplificando, podemos considerar como Instituição, a Escola, a classe, a instituição das “leituras”, da “família”, dentre outros.

Nesta visão antropológica, não se pode afirmar que o conceito de um objeto matemático é aquele que se encontra somente na mente dos membros da comunidade científica da área. Em CHEVALLARD (1992), para cada Instituição *I*, está associado um conjunto de objetos O_I, ou seja, um conjunto de objetos *O* conhecido por *I*. A relação pessoal R(*X,O*) será construída ou alterada de acordo com as condições da relação institucional R_I (*O*). Ainda, a aprendizagem ocorrerá se a relação pessoal R(*X,O*) for modificada na perspectiva de R_I(*O*).

Nessas relações, este autor ressalta a importância de se considerar o tempo, no momento em que para cada instituição *I*, existe o que se chama de tempo institucional t_I. Será designado por C_I (*t*), o contrato institucional relativo a *I* em um tempo *t* que representa o conjunto dos pares (*O*, R_I *(O,t)*), onde *O* é um elemento de O_I *(t).*

Por fim, o autor também destaca a importância de se considerar a posição *p* do indivíduo nestas relações. Não há apenas uma relação institucional R_I (*O*) particular com o objeto. Na verdade, para cada posição *p* do indivíduo em *I*, se estabelece uma relação institucional com *O*, denotada por R_I (*p,O*). Exemplificando, as relações estabelecidas entre o estudante e o objeto matemático são diferentes das relações provenientes entre o professor e o mesmo objeto matemático.

Dada uma Instituição *I* e considerando p_u a posição de um estudante em *I*, pode-se dizer que *I* é relativamente didático à posição p_u se existe um conjunto não vazio indicado por S_I (*e*) contido em O_I, cujos elementos são chamados de entradas didáticas para os sujeitos em posição *e*, tal que *I* manifesta intenção de deixar R(*X,O*) consistente com R_I (p_u,*0*), para todo *X* em posição p_u e para todo *O* em S_I (*e*). Dada uma instituição *I*, didática ou não, denomina-se educação institucional o conjunto de mudanças trazidas nas relações pessoais R(*X,O*), onde *O* é um objeto institucional para *I* e *X* um indivíduo de *I*.

Na análise de um sistema didático, é necessário considerar que há um ou mais sujeitos de *I* que ocupam a posição de professor, um ou mais sujeitos de *I* que ocupam a posição de estudante e um objeto *O* pertencente ao conjunto S_I (*e*). Para um sistema didático funcionar, em relação a um tempo específico do sistema didático como uma Instituição, um conjunto de objetos institucionais deve existir, de modo que estes sejam evidentes para os sujeitos desse sistema. Porém, objetos *O*, bem como as relações institucionais R_I (*p,O*), são localmente estáveis.

A teoria da antropologia cognitiva de CHEVALLARD (1992) representa uma base tanto para a análise dos livros didáticos como para mapear as concepções dos estudantes desta pesquisa. Inicialmente, consideraremos as obras de Álgebra Linear como representantes da Instituição *I* analisadas em um tempo *t*. O objeto *O* de estudo será representado pelo conteúdo de transformações lineares e os indivíduos *X* serão os estudantes de cursos superiores da área de Computação. Em um segundo momento, estabeleceremos a análise das relações entre os sujeitos e o objeto matemático em questão, considerando o experimento elaborado como representante de outra Instituição *I*.

Como na visão antropológica a relação pessoal R(*X,O*) é construída ou alterada de acordo com as condições da relação institucional R_I (*O*), objetivamos verificar que tipo de relação pessoal os estudantes da área de Computação estabelecem com o objeto matemático representado pelas transformações lineares, partindo das especificidades existentes na relação entre os livros didáticos analisados e adotados nesta área e o objeto matemático em questão.

Temos por hipótese que as Instituições representadas pelos livros didáticos de Álgebra Linear e as obras de Computação Gráfica possuem diferentes relações com o objeto matemático transformação linear. É provável que tal fato não seja considerado no ensino deste conteúdo. Temos, então, um interesse em avaliar essa situação por meio de uma análise dos livros didáticos destas duas áreas, sendo tal estudo desenvolvido no capítulo 3.

Segundo interpretação de D'AMORE (2005), a teoria antropológica de Chevallard é fundamentada na atividade dos sujeitos diante da resolução problemas. Desta atividade emergem os objetos, os quais estão relacionados aos contextos institucionais e pessoais, que por sua vez são definidos de acordo com os campos de problemas e com os sistemas semióticos disponíveis. É nesse sentido que articulamos as idéias de Chevallard e Duval, visando discutir em que medida um contexto institucional que integra diferentes registros de representação de um objeto matemático, permite construir ou alterar as relações pessoais a este objeto. É o que pretendemos investigar em nosso experimento, sendo tal estudo apresentado nos capítulos 5 e 6.

2.2.4. O Ensino de Matemática Mediado por Ferramenta Computacional

BALACHEFF e KAPUT (1996) analisam o impacto da tecnologia no ensino da Matemática. Os pesquisadores discutem as novas questões que emergem com a introdução do computador no ensino e ressaltam a significativa necessidade de mudanças de currículo e de desenvolvimento de pesquisas nesta área. Ampliando a noção de transposição didática de CHEVALARD[14] (1985, apud BALACHEFF e KAPUT, 1996), os autores incluem um novo foco para a

---

[14] CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique.* Editions la Pensée Sauvage: Grenoble, 1985.

transposição informática, conforme descrição apresentada a seguir.

> Decisões necessárias a serem tomadas para o projeto do *software*, como as escolhas de uma estrutura de conhecimento e de representação, ou dos algoritmos a serem aplicados, ou a origem para a descrição dos objetos, implicam na transposição computacional (BALACHEFF, 1996), cujas conseqüências no conhecimento são tão cruciais como as da já conhecida transposição didática (CHEVALLARD, 1985; KANG & KILPATRICK[15], 1992)." (BALACHEFF, KAPUT, 1996: 480)[16].

A fim de que o estudante interaja com o computador para a aprendizagem de um conteúdo matemático, é necessário que o mesmo domine o sistema formal inerente ao *software* que está utilizando. Os autores afirmam que o uso do computador no ensino ainda é modesto, mas o impacto epistemológico ocorrido nas últimas décadas é muito significativo, tendo em vista que não se projetava o fato do computador tornar possível o estabelecimento de manipulações diretas de objetos matemáticos e relações.

Um conceito importante neste contexto é o de micromundo matemático. O micromundo consiste de um conjunto de objetos primitivos, operações elementares sobre estes objetos e regras que expressam os modos em que estas operações podem ser feitas e associadas, o que é classificado como sistema formal do programa. Ainda, o micromundo possibilita novas construções, transformando operações complexas ou objetos em novos recursos disponíveis para uso futuro.

O grande diferencial entre o micromundo e os outros sistemas de simulação tradicionais é que só o primeiro pode evoluir de acordo com a ampliação do conhecimento do aprendiz. Os micromundos oferecem ao estudante mundos abertos nos quais eles podem explorar problemas, o que resulta no oferecimento de um amplo e rico conjunto de experiências, já que o tipo de *feedback* que o micromundo produz é conseqüência direta das ações e decisões do usuário. Cabe ressaltar, porém, que só a interação com a máquina não é suficiente para garantir que a aprendizagem matemática ocorra. Neste contexto, a análise e a compreensão das interpretações do estudante frente à resolução de

---

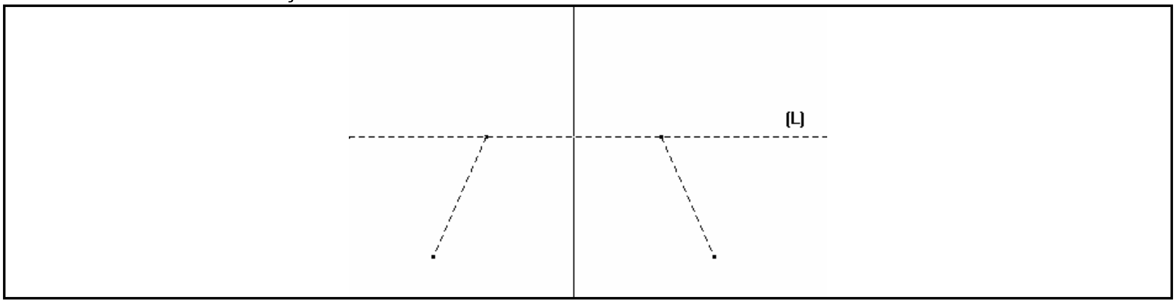
[15] KANG, W.& KILPATRICK, J. Didactical Transposition in Mathematics Textbooks. *For the learning of mathematics,* 12 (1), 2-7, 1992.

[16] Traduzido por nós do original em Inglês.

um problema matemático são necessárias.

O *software Cabri-Géomètre* é um exemplo de micromundo no qual é possível realizar manipulações diretas de desenhos ou representações geométricas na tela do computador. Para ilustrar a problemática citada anteriormente, apresentamos um exemplo presente em BALACHEFF e KAPUT (1996, p. 485) que relata a resolução de um problema por um aluno. A atividade solicitava a construção da imagem de um segmento por meio de uma reflexão, dados dois eixos e utilizando o *software Cabri*. O estudante apresentou a seguinte resolução.

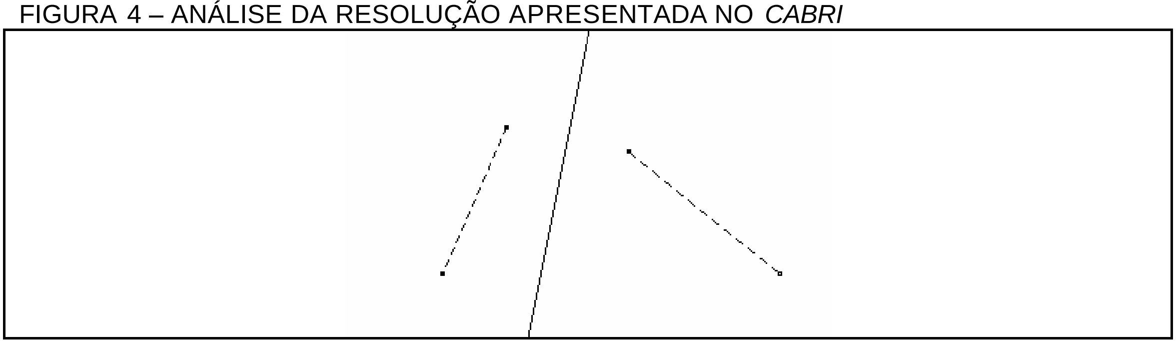
FIGURA 3 – RESOLUÇÃO APRESENTADA NO *CABRI*



FONTE: BALACHEFF, KAPUT, 1996, p. 485

Aparentemente, visualizando a resolução apresentada na tela, tem-se a impressão de que a mesma está correta, porém, ao se mover o eixo de simetria, nota-se que o conjunto se “desfaz”, no sentido de perder suas características iniciais aparentes, como exemplificado a seguir.

FIGURA 4 – ANÁLISE DA RESOLUÇÃO APRESENTADA NO *CABRI*



FONTE: BALACHEFF e KAPUT, 1996, p. 485

Tal situação decorre do fato de o aluno não ter construído a reta auxiliar (L) como perpendicular ao eixo, mas como uma reta perceptualmente horizontal ao eixo vertical dado inicialmente.

Este exemplo evidencia características intrínsecas do uso do computador em sala de aula, ou seja, o ambiente informatizado permite uma interação entre o usuário e o computador baseada na interpretação simbólica e computacional do que o estudante digita ou “clica”, o que resulta em desenvolvimentos cognitivos particulares. Conseqüentemente, o professor deve estar preparado para compreender o pensamento de seu aluno na resolução do problema no ambiente informatizado e as suas formas de comunicação com a máquina, bem como o papel assumido pelo computador no processo didático.

Segundo NOSS e HOYLES (1996), o computador desempenha um papel extremamente importante na aprendizagem e no ensino, pois promove mudanças fundamentais nestes processos. Os autores ressaltam que existem dois tipos de *software* de ensino de Matemática. Por um lado há aqueles que reproduzem o conhecimento matemático presente nos livros e outros que trazem aplicações computacionais novas, promovendo diferentes formas de conceber a Matemática e, conseqüentemente, oferecendo ao estudante novas formas de expressar suas idéias matemáticas. Os recursos computacionais do segundo tipo são os que oferecem mais vantagens pedagógicas, constituindo-se em ferramentas que abrem novas *janelas de pensamento* no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos.

Assim, para esses autores, uma ferramenta computacional não deve apenas desempenhar o papel de simulador. De fato, um *software* deve estabelecer um ambiente favorável à expressão de idéias e à articulação das relações envolvidas em um processo de aprendizagem. Nesta perspectiva, eles enfatizam a idéia de micromundo, que consiste em um sistema matemático criado com a intenção de promover desenvolvimentos e investigações por meio de interações com o *software*. Assim, a concepção de um micromundo envolve, como elemento essencial, previsões sobre as possíveis concepções e ações dos estudantes.

Conforme relatado na introdução deste trabalho, faz parte de nosso estudo o desenvolvimento e a aplicação de atividades sobre as transformações lineares planas. O leitor observará que estas atividades propostas aos estudantes da área de Computação, constantes no capítulo 5 deste trabalho, foram elaboradas com o objetivo de analisar suas interpretações diante de um experimento construído com base na exploração da diversidade de registros e de suas conversões. As atividades que englobam conversões com os registros gráfico e geométrico, segundo nossa interpretação, são possibilitadas por um ambiente de geometria dinâmica como o *Cabri-Géomètre*. Além disso, consideramos que esse software insere-se na perspectiva defendida por NOSS e HOYLES (1996), ou seja, ele permite constituir um ambiente favorável à expressão de idéias e à articulação de relações, a fim de promover novas formas de conceber o objeto matemático em questão. Deste modo, temos a intenção de caracterizar o papel desta ferramenta informática durante o processo, objetivando detectar quais as possibilidades e interações intrínsecas da utilização de seus recursos, especificamente no ensino das transformações lineares do plano.

2.3 PESQUISAS NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA LINEAR

A dificuldade dos alunos no estudo de conteúdos de Álgebra Linear não é um problema específico do contexto brasileiro. DORIER (1997, 2000) relata os resultados de estudos sobre o ensino de Álgebra Linear realizados por diversos pesquisadores de diferentes países. Dentre eles, destacamos o grupo de pesquisadores franceses, liderado inicialmente por Jean Luc Dorier, Marc Rogalski, Aline Robert e Jacqueline Robinet, o qual tem se dedicado a investigar questões sobre o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear desde o final da década de 80. Este grupo constatou que os estudantes apresentam uma forte dificuldade em compreender o funcionamento dos conceitos de Álgebra Linear nos quadros formais, fato que classificaram como “obstáculo do formalismo”. De fato, a abordagem axiomática e as características formal, unificadora e generalizadora inerentes a esta disciplina, apontadas por ROBERT, A; ROBINET, J. (1989), constituem uma fonte de dificuldades para os estudantes. DORIER (1998), em seu estudo epistemológico da Álgebra Linear, constatou que historicamente também houve resistência no seu processo de axiomatização.

Esse grupo de pesquisadores também verificou que não existem situações-problema acessíveis a alunos de um primeiro curso de Álgebra Linear, tendo em vista que, ou estas são tão elementares que podem ser resolvidas sem os conhecimentos desta disciplina, ou são tão complexas, que exigem conhecimentos aprofundados de outras disciplinas. Diante dessa situação, uma das orientações dadas pelo grupo para a busca do tratamento destas dificuldades é a utilização de recursos informatizados e do que eles denominaram de "alavancas meta".

As alavancas meta são meta-conhecimentos matemáticos que atuam sobre os conhecimentos dos estudantes, possibilitando a reflexão sobre objetos matemáticos da Álgebra Linear. Em outras palavras, quando no ensino se fala "sobre" a Matemática, tal fato representa um recurso meta que poderá se tornar uma alavanca para o estudante compreender a noção abordada. Como exemplos de recursos que podem se tornar alavancas meta, temos o discurso do professor, o tipo de atividade proposta pelo professor, o tipo de apresentação de um tema no livro didático, dentre outros.

> A palavra alavanca se relaciona à idéia de introduzir, em um momento apropriado da aprendizagem, um elemento permitindo aos estudantes melhor compreenderem a natureza epistemológica da Álgebra Linear. O prefixo substantivado "meta" significa que essa alavanca favorece uma reflexão sobre a própria atividade matemática[17] (DORIER, 1998, p.216).

Os estudos de ARAÚJO (2002) e PADREDI (2003) sobre alavancas meta fazem referência à HAREL (1997). Desta forma, apresentaremos primeiramente as idéias desse pesquisador.

HAREL (1997) destaca, em seu trabalho, três princípios necessários para o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear: o da concretização, o da necessidade e o da possibilidade de generalização. Para este pesquisador, a geometria de duas e três dimensões representa a fase de concretização para a introdução de vários conceitos da Álgebra Linear.

O princípio da necessidade refere-se ao fato do estudante sentir a necessidade intelectual da aprendizagem de certo conceito, quando deparado com situações didáticas desequilibradoras. É nesse sentido que esse princípio pode ser situado na teoria Piagetiana, desencadeando desequilíbrios para que o estudante se reorganize, a fim de buscar novas formas de resolução. Por fim,

---

[17] Traduzido por nós do original em Francês.

estes dois princípios são complementados pela possibilidade de generalização.

Segundo o pesquisador, "quando o ensino tem relação com um modelo concreto, isto é, um modelo que satisfaz o princípio da concretização, as atividades didáticas no interior deste modelo devem permitir e encorajar a generalização de conceitos"[18] (HAREL, 1997, p. 228).

Como são princípios que, ao serem utilizados, podem gerar reflexões sobre a Matemática, as duas pesquisas apresentadas na seqüência consideraram que os mesmos representam recursos de caráter "meta".

ARAÚJO (2002) elaborou uma dissertação de Mestrado baseada principalmente nas pesquisas de HAREL (1997), procurando destacar os metaconhecimentos matemáticos presentes no discurso de autores de três livros didáticos de Álgebra Linear sobre a noção de base de um espaço vetorial. A pesquisadora concluiu que há pouco metaconhecimento matemático passível de se tornar alavanca meta para o estudante. Somente em uma obra ela evidenciou indícios de que os autores partiriam de conhecimentos de Geometria Analítica para generalizar os conceitos de Álgebra Linear, o que corresponderia aos princípios da concretização e da possibilidade de generalização propostos por HAREL (1997).

PADREDI (2003) realizou um estudo sobre as "alavancas meta" no discurso do professor de Álgebra Linear relativo ao conceito de base de um espaço vetorial. Para isso, entrevistou seis professores universitários. Dentre os resultados, destacou na análise dos discursos dos pesquisados, a importância da Álgebra Linear como ferramenta para outros cursos e o fato de não existirem situações-problema possíveis de serem propostas em um curso inicial de Álgebra Linear. Além disso, tais professores comumente utilizam analogias com palavras de uso cotidiano e este fato pode tornar-se uma alavanca-meta para o ensino e aprendizagem de certas noções. Certos professores, em seus discursos, evidenciaram um trabalho que comporta relações com os três princípios já citados de HAREL (1997), sendo o uso da Geometria Analítica um meio de concretização do estudo de conceitos de Álgebra Linear. A partir das transcrições das entrevistas (apresentadas na íntegra), identificamos que apenas um professor cita

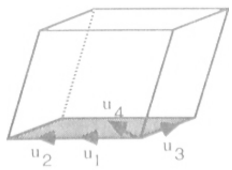
[18] Traduzido por nós do original em Francês.

a utilização das transformações lineares em Computação Gráfica, e apenas um outro menciona o uso de recursos computacionais em sua atividade docente, no caso, o *software Matlab*.

KALLIA PAVLOPOULOU (1993), citada por DORIER (1998) e DUVAL (2000), realizou um estudo sobre vetores apoiado na teoria dos registros de representação semiótica de Duval. A autora trabalhou com três sistemas distintos: gráfico, simbólico e tabular, conforme ilustrado a seguir.

QUADRO 5 – CLASSIFICAÇÃO DOS REGISTROS POR PAVLOPOULOU

Registro gráfico:



Registro da escrita simbólica:

u1∈ ¡ ^{3}, u2∈ ¡ ^{3}, u3∈ ¡ ^{3}, u4∈ ¡ ^{3}
$u_1=1u_1+0u_3$
$u_2=ku_1+0u_3$
$u_3=0u_1+1u_3$
$u_4=mu_1+nu_3$

Registro das tabelas:

1	k	0	m
0	0	1	n
0	0	0	0

FONTE: DORIER, 1998, p. 201[19]

Em sua pesquisa, concluiu que os livros didáticos analisados privilegiam um tipo de registro, freqüentemente o simbólico, e que não é dada uma atenção particular às conversões.

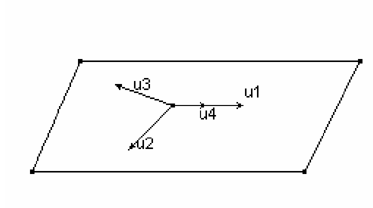
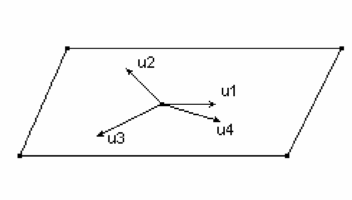
A pesquisadora ainda observou que os estudantes que participaram de seu estudo, provenientes do primeiro ano universitário do sistema educacional francês (DEUG), apresentaram confusões entre o objeto estudado e sua representação, além de problemas no estabelecimento de conversões.

Ainda, ela notou que o grau de dificuldade apresentado pelos alunos dependia do sentido da conversão, ou seja, em uma dada questão, na conversão da representação do registro tabular para o gráfico o índice de acerto foi de 0,83. Já no sentido contrário, o índice de acerto foi de 0,34, como pode ser observado a seguir.

---

[19] Traduzido por nós do original em Francês.

TABELA 4 – EXEMPLO DE CONVERSÃO – PAVLOPOULOU (1993, P. 84)

Conversão	Registro de partida	Registro de chegada	144 estudantes
(2D Rep.) T→G	1 0 k p 0 1 m 0		.83
G→T		1 0 a c 0 1 b d	.34

FONTE: DUVAL, 2000, p.64[20]

Para uma melhor compreensão da situação, pretendia-se, na conversão proposta no sentido do registro tabular para o gráfico, que o estudante partisse da análise dos vetores no plano (1,0), (0,1), (k,m) e (p,0), com as condições k<0, m<0 e p>0. Os vetores gráficos u_1 e u_2 eram identificados com os vetores (1,0) e (0,1), cabendo ao estudante identificar os vetores gráficos u_3 e u_4 nas condições dadas, ou seja, os vetores u_3=(k,m), com k<0 e m<0, e u_4=(p,0), com p>0. A maior parte dos estudantes não teve dificuldade em estabelecer este tipo de conversão, uma vez que o índice de acerto foi de 83%. Já na segunda conversão, proposta no sentido do gráfico para o tabular, com as condições, a<0, b<0, c>0 e d<0, o índice de acerto reduziu consideravelmente, o que foi justificado, pela pesquisadora, como um efeito do fenômeno da heterogeneidade da conversão.

HILLEL e SIERPINSKA (1995) realizaram um trabalho sobre as linguagens próprias da Álgebra Linear – abstrata, algébrica e geométrica -, fundamentando o estudo nos níveis de reflexão intra, inter e trans-operacional de PIAGET e GARCIA (1987). Estes autores classificaram a evolução da Álgebra em três etapas. A etapa intra-operacional caracteriza-se por ligações que se apresentam sob formas isoláveis, representando uma fase que comporta articulações internas que não se compõem e não se transformam de uma para

---

[20] Traduzido por nós do original em Inglês.

outra. Já a etapa inter-operacional caracteriza-se por correspondências e transformações entre as formas isoláveis presentes na fase intra-operacional, além da determinação dos invariantes inerentes a estas transformações. Na etapa trans-operacional, são construídas estruturas, cujas relações internas correspondem às transformações da fase anterior. A identificação dessas etapas não é um trabalho fácil, tendo em vista que o processo de algebrização da Matemática já se constitui em uma etapa trans-operacional, quando analisada nas ramificações algebrizadas. Ainda, tais etapas não ocorrem de forma linear, ou seja, cada etapa repete, nas suas próprias fases, o processo total. Deste modo, uma sucessão de sub-etapas intra, inter e trans ocorrem nas fases de construção do processo.

Segundo os pesquisadores, é necessário que o estudante pense em termos de estruturas completas para entender a Álgebra Linear. Neste caso, o ideal seria que o aluno trabalhasse no nível trans-operacional de reflexão, porém, o estudo concluiu que, a maior parte dos estudantes analisados dos cursos de Álgebra Linear, atinge, no máximo, o nível de reflexão inter-operacional, sendo que alguns ainda permanecem no nível intra-operacional.

Esta dificuldade está associada, segundo os pesquisadores, à complexidade das ligações entre os diversos tipos de linguagens próprias da Álgebra Linear. A linguagem abstrata é a inerente à teoria geral, associada aos espaços vetoriais, subespaços vetoriais, operadores, dentre outros. A linguagem algébrica está relacionada aos aspectos mais específicos do R^n, exemplificado pelas n-uplas, matrizes e soluções de um sistema linear. Já a linguagem geométrica engloba a geometria dos espaços de duas e três dimensões, representada pelos vetores geométricos, pontos, retas, planos e transformações geométricas.

Os pesquisadores afirmam que as noções específicas relacionadas ao R^n não representam um complicador ao estudante, tendo em vista que várias questões são resolvidas utilizando a noção central de sistema linear. Porém, os autores entendem que, trabalhar neste nível algébrico de descrição, torna-se um obstáculo à aprendizagem da teoria geral e ao entendimento de outros objetos como vetores, dentre eles, as funções, as matrizes ou os polinômios. Para vencer este obstáculo, torna-se necessário que a compreensão se dê no nível trans-operacional, o que requer do estudante a capacidade de estabelecer conversões de registros de representações, além de uma atitude reflexiva sobre suas produções.

DREYFUS, HILLEL E SIERPINSKA (1998), apresentaram uma proposta para o estudo de transformações lineares por meio de uma abordagem geométrica, utilizando o *software Cabri*. Segundo os autores, a Álgebra Linear utiliza-se de três tipos de linguagem e níveis de descrição, correspondentes a três modos de pensar. Um tipo de linguagem é a geométrica de duas ou três dimensões (retas, pontos, planos, transformações geométricas), correspondente ao modo sintético geométrico de pensar. Também há a linguagem aritmética do R^n (n-uplas, matrizes, soluções de sistemas), correspondente ao modo analítico-aritmético de pensar e, por fim, a linguagem algébrica da teoria (espaços vetoriais, sub-espaços, dimensão, dentre outros), correspondente ao modo estrutural-analítico de pensar.

Estas três linguagens e modos de pensar coexistem, mas não são equivalentes. A maior dificuldade dos estudantes consiste em discernir quando uma linguagem particular está sendo usada metaforicamente, como os diferentes modos de pensar são relacionados e quando um é mais apropriado que os outros na resolução de problemas em Álgebra Linear. Ir de um nível de descrição a outro está interligado ao problema de representação, ou seja, a representação dos vetores e dos operadores lineares implica na tradução de um nível de descrição a outro ou a uma tradução no interior do mesmo nível.

Os pesquisadores constataram que a forma mais comum de se ensinar esta disciplina consiste em começar com a abordagem aritmética (no R^2 ou R^3), considerando os vetores como duplas ou ternas e as transformações como matrizes. Em seguida, é feito o elo com a geometria, via geometria analítica. Um vetor (x,y) é representado como uma extensão da origem para o ponto P(x,y). Transformações lineares são freqüentemente introduzidas por uma definição formal, como transformações de espaços vetoriais, nas quais se preserva a combinação linear de vetores. Em seguida, multiplicações de matrizes que resultam em reflexões, projeções, dentre outros, são normalmente interpretadas geometricamente, com o intuito de auxiliar o estudante a fazer a ligação entre o novo e o conhecimento já adquirido.

Esta abordagem tem vários cortes e representa um meio confuso para os estudantes. Por exemplo, ela pode impedir que alguém pense sobre transformações não lineares. Ainda, para vários estudantes, a transição da visão aritmética para a estrutural da Álgebra Linear é algo que dificilmente conseguem construir. Desta forma, baseado no fato de que, historicamente, a geometria aparece como apoio para os conceitos algébricos, foi elaborada uma seqüência didática utilizando o *software Cabri II*, com abordagem mais conceitual do que técnica, para a introdução dos conceitos de Álgebra Linear partindo da geometria, com o intuito de auxiliar os estudantes no desenvolvimento de pensamentos analíticos a respeito dos conceitos elementares desta disciplina.

Apresentando de forma resumida certos aspectos da seqüência, observamos que a transformação decorreu da questão da relação entre um vetor e sua imagem. A seqüência foi trabalhada com dois estudantes, em seis encontros de duas horas cada. Nesta seqüência, os vetores foram modelados por pontos do plano Euclidiano, com um ponto chamado origem 0. Utilizou-se apenas um representante fixo para cada classe de eqüipolência. As operações entre vetores foram definidas com referência aos conceitos geométricos. Neste caso, a soma de dois vetores não colineares u e v de mesma origem 0 seria o vetor w se, unindo o ponto 0 e as extremidades de u, v e w, a figura obtida resultasse em um paralelogramo, ou seja, w deveria ser a diagonal de um paralelogramo de lados definidos pelos vetores u e v. O vetor kv foi definido como um vetor w, se w estivesse na reta 0v e fosse k vezes mais distante de 0 que v, com a convenção ligada ao sinal de k e a orientação comum de v e w. O vetor seria movido através de sua extremidade.

Antes de serem introduzidos na noção de transformação linear, os estudantes foram familiarizados com a linguagem e representação das transformações em geral no *Cabri*. Para isso, o professor escolheu um vetor v e uma transformação. Aplicou a transformação no vetor e obteve a imagem T(v). O professor puxou a extremidade do vetor v e pediu para que os alunos verificassem o que acontecia com T(v). Este tipo de atividade tinha a intenção de convencionar duas idéias, a de que a transformação é definida para qualquer vetor no plano e que há uma relação constante entre v e T(v). Depois de realizarem várias atividades com transformações, os estudantes foram postos a checar as aplicações e classificá-las em lineares ou não. Eles fizeram isso por meio da escolha de um vetor v e um número k, analisando se o vetor T(kv) coincidia com o vetor kT(v) . Mesmo existindo esta coincidência, os estudantes não perceberam que, ao puxar o vetor v pela tela, a relação continuava válida.

Quanto aos resultados, primeiramente pode-se ressaltar que a transformação foi entendida como o objeto vetor T(v) e não como uma relação ou dependência entre v e T(v), mas um objeto T(v) cuja posição depende da posição de outro objeto v. É possível que o uso do vetor v no *Cabri* tenha proporcionado aos estudantes, a idéia da transformação referir-se a um único vetor. A invariância da relação inerente à noção de transformação foi substituída, na mente dos estudantes, pela invariância de um objeto. Outro fator desta confusão pode ter ocorrido pelo fato de a seqüência negligenciar a questão de igualdade de transformações, ou seja, não foi dada a oportunidade para o estudante refletir se, dados dois vetores e suas imagens, eles foram transformados pela mesma aplicação. É lógico que a identidade entre duas transformações S e T pode ser estabelecida mostrando que elas coincidem em dois vetores linearmente independentes, mas para isso, um conhecimento mais sofisticado é necessário.

Sendo assim, concluiu-se que o *Cabri* possibilitou manipulações que não seriam possíveis no ambiente *papel&lápis*. Além disso, o trabalho do vetor variável (com origem, mas tamanho e direção variáveis) só existe enquanto ele está sendo desenhado e, desta forma, tal noção de vetor implica em descrever a transformação em termos do que vai ser transformado. O *Cabri* forneceu maior visibilidade da transformação do que o desenho no papel, pois a variável e sua imagem eram apresentadas simultaneamente na tela e, com isso, o efeito da transformação pôde ser observado diretamente. Com isso, conclui-se que houve grande dependência entre as noções construídas de vetor e transformação e o ferramental adotado.

SIERPINSKA, DREYFUS e HILLEL (1999), em um outro estudo, procuraram relatar a continuidade das pesquisas referentes à introdução aos conceitos de Álgebra Linear utilizando o *software Cabri-Géomètre*. Com o intuito de oferecer uma abordagem para os alunos superarem o obstáculo do formalismo, foi elaborado e aplicado um experimento, o qual ocorreu em três estágios. Neste artigo, os pesquisadores apresentaram apenas a avaliação do primeiro, realizado em 1997 com uma dupla que já havia estudado vetores e matrizes. O trabalho teve como base teórica a relação entre as representações semióticas e o conhecimento, tomando como referência principal a teoria de DUVAL (1995, 1996 e 1998). A avaliação foi interna, ou seja, procurou analisar a discrepância entre o esperado e o apresentado pelos estudantes. O *Cabri* foi utilizado para oferecer um contato mais direto com os objetos da teoria abstrata sem rapidamente substituí-los por procedimentos computacionais. Além disso, este recurso informático ofereceu a possibilidade do trabalho simultâneo com as representações geométrica e aritmética. O artigo descreve os resultados apresentados pelos alunos em atividades elaboradas sobre o conteúdo específico de transformações lineares.

A primeira atividade procurou explorar, no ambiente *Cabri-Géomètre*, uma forma de introduzir este conceito através de uma entrada geométrica. Após a discussão das possíveis maneiras que uma transformação pode se comportar em relação às operações de adição de vetores e multiplicação por escalar, as transformações lineares seriam definidas como aquelas que se comportam de uma forma especial nesta questão. Em seguida, os alunos deveriam apresentar a definição de transformação linear, por meio de uma escrita simbólica. Após várias explorações de transformações em relação a essas duas operações, foram propostos aos alunos, exercícios de construção de transformações lineares segundo determinadas condições.

Na avaliação deste experimento, aplicado em dois estudantes classificados como “bons alunos” e que já haviam realizado o curso elementar de Álgebra, observou-se que os mesmos tendem a analisar as transformações lineares somente pela condição da proporcionalidade $(T(kv)=k.T(v))$. Os pesquisadores conjeturaram que tal situação provavelmente seja decorrente do fato da proporcionalidade desempenhar um papel importante e extremamente desenvolvido no ensino secundário. Além disso, quando deparados com um problema, os alunos não utilizaram, espontaneamente, a definição de transformação linear, apesar de já terem realizado uma série de exercícios de análise deste tipo de aplicação, segundo as suas condições. Isto, segundo os autores, talvez tenha sido decorrente da dificuldade de se trabalhar com definições axiomáticas.

Uma segunda atividade envolveu um problema em que foram solicitados, somente na representação geométrica, dois vetores v_1 e v_2 linearmente independentes e suas respectivas imagens, por meio de uma transformação linear T. Em seguida, os estudantes deveriam determinar, por meio dessa transformação, a imagem geométrica de um vetor v qualquer. Esperava-se que eles representassem v como combinação linear de v_1 e v_2 para em seguida determinar T(v), utilizando a relação $T(v)=k_1T(v_1)+k_2T(v_2)$, com k_1 e k_2 reais. Os estudantes não conseguiram determinar a imagem de um vetor genérico utilizando o *Cabri-Géomètre*. Os pesquisadores levantam a hipótese de que tal inabilidade seja decorrente do fato dos estudantes não terem um contato formal com o aspecto de que dois vetores não colineares geram qualquer vetor no plano, o que é fundamental para entender que a transformação linear é completamente determinada pelas imagens de dois vetores de uma base do plano. Ainda, os autores conjeturaram que a dificuldade dos estudantes, naquele momento, talvez tenha ocorrido pelo fato de o experimento ter tratado das condições de linearidade de forma separada.

SIERPINSKA, TRGALOVÁ e HILLEL (1999), no artigo "*Teaching and Learnig Linear Algebra with Cabri*", apresentaram os resultados da aplicação da segunda e terceira fases do experimento citado anteriormente, etapas ocorridas em 1998 e 1999, respectivamente. O grupo da segunda fase foi composto de três pares de estudantes, cada qual com um professor distinto. Pretendia-se entender os objetos matemáticos que emergiriam nas interações com o ambiente *Cabri*.

Este grupo participou de um experimento que procurou focar nos conceitos sobre os quais os alunos do primeiro grupo apresentaram maiores dificuldades. Foram realizados o estudo de vetores e a introdução e construção do conceito de base utilizando o *Cabri*. A combinação linear foi apresentada na forma algébrica e os estudantes deveriam interpretá-la no ambiente computacional. Além disso, foram realizadas diversas atividades de exploração das propriedades da combinação linear e a construção de qualquer vetor na tela, como combinação linear de dois vetores não colineares. Por fim, os alunos realizaram a composição e a decomposição de vetores, tanto na tela do *Cabri* como no papel.

Como resultados, os pesquisadores relataram que os alunos tiveram sucesso em expressar um vetor dado como combinação linear de dois vetores não colineares na tela do *Cabri*, porém, a concepção que emergiu dos alunos foi que a combinação linear era a "soma de v_1 e v_2 com direções fixas e tamanhos variáveis", fato que levou a algumas confusões, tanto no estabelecimento da igualdade da combinação linear ao vetor nulo quanto na decomposição de vetores na resolução realizada no ambiente *papel&lápis*.

No terceiro grupo, os alunos deveriam construir, no *Cabri*, dois vetores v_1 e v_2 não colineares partindo da mesma origem, para, em seguida, construir novos eixos a partir deles. Posteriormente, eles deveriam construir os vetores $w_1 = 0{,}5v_1 + 0{,}3v_2$ e $w_2 = 0{,}8v_1 - 2{,}3v_2$ e colocar novos eixos nestes vetores também. Por fim, eles construiriam um vetor qualquer u, determinando as suas coordenadas nas bases $\{v_1, v_2\}$ e $\{w_1, w_2\}$.

Os alunos não tiveram dificuldade nesta etapa. Em seguida, foi requisitada aos estudantes, a determinação das coordenadas na base $\{w_1, w_2\}$ de um vetor u cujas coordenadas na base $\{v_1, v_2\}$ eram (100, 85). Não era possível resolver esta questão no *Cabri* e, conseqüentemente, eles deveriam resolver por processos algébricos no papel. Esta resolução não ocorreu sem o auxílio do professor. Concluindo, este estudo mostrou que o *software* assumiu um papel primordial na construção do conceito de combinação linear, na composição e decomposição de vetores e no conceito inicial de base no plano, porém, foi notado, também, que o fato de o experimento ter um número pequeno de questões, além de ser realizado em um tempo restrito, provavelmente limitou as produções dos estudantes.

DIAS (1998) elaborou uma pesquisa que analisou as dificuldades dos estudantes na resolução de questões que necessitavam da articulação de dois pontos de vista na representação de subespaços vetoriais. Em seu estudo, ela distinguiu dois quadros (o algébrico e o geométrico), quatro registros (simbólico intrínseco, representação por coordenadas, representação por equações e representação matricial) e dois pontos de vista (cartesiano e paramétrico). A pesquisadora observou que a articulação entre os dois pontos de vista se traduz semioticamente por duas grandes categorias de representação, as quais foram classificadas como paramétrica e cartesiana. A tabela a seguir contém exemplos dessa classificação.

TABELA 5 – EXEMPLOS DE PONTO DE VISTA POR DIAS (1998)

PONTO DE VISTA	EXEMPLO
Cartesiano	$E=\{(x,y,z,t,w)\in R^5/\ x+y+z+2t=0,\ 2x-y+3z-4t+5w=0, 8x-y+11z-8t+17w=0\}$
Paramétrico	$E=\{(x,y,z,t,w)\in R^5/x=-4/3z+2/3t-2w \text{ e } y=1/3z-8/3t+w\}$ (representação paramétrica no registro de equações) ou $E=\{(-4/3z+2/3t-2w,\ 1/3z-8/3t+w,z,t,w)\in R^5/z,t,w\in R\}$ (representação paramétrica no registro de quadro implícito) ou $E=\{z(-4/3,1/3,1,0,0)+t(2/3,-8/3,0,1,0)+w(-2,1,0,0,1)/z,t,w\in R\}$ (representação paramétrica no quadro explícito)

FONTE: DIAS, 1998, p. 53-54

Ela analisou os tipos usuais de questões presentes em um primeiro curso de Álgebra Linear e a forma como os livros didáticos franceses, brasileiros e anglo-saxões estabeleciam a articulação entre os dois pontos de vista. A pesquisadora notou que as questões usuais exigiam mais um domínio de técnicas algorítmicas do que um verdadeiro trabalho de reflexão. Ainda, verificou que os livros adotavam um quadro dominante, o que repercutia diretamente na questão dos registros semióticos privilegiados no contexto analisado. A maioria dos livros fazia a articulação entre os dois pontos de vista somente em nível técnico, privilegiando o quadro de resolução de sistemas lineares. Ela realizou, ainda, um estudo com alunos franceses do primeiro ano universitário (DEUG), alunos de um grupo de controle da Universidade de Paris e alunos brasileiros do mestrado em Educação Matemática, procurando levantar dados sobre os diferentes níveis de gestão da flexibilidade entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico.

De uma forma geral, ela concluiu que poucos estudantes justificavam corretamente o resultado obtido, vários estabeleciam associações errôneas entre vetores e equações e uma minoria apoiava-se no quadro geométrico. Ainda, tais estudantes apresentaram problemas no controle das manipulações de quadros, além de dificuldades nas questões que exigiam a interpretação da resolução de sistemas mediante um jogo de articulação de pontos de vista, ou seja, eles não apresentaram uma boa flexibilidade na coordenação das representações.

Este estudo levou a uma reflexão quanto aos meios didáticos que permitiriam explorar a interação dos dois pontos de vista e, como sugestão, a autora destaca a possibilidade de explorar tal articulação nos espaços de pequena dimensão, que permitem trabalhar tecnicamente e conceitualmente sobre diferentes quadros e registros.

A análise dos livros de três países distintos mostrou que, apesar da diversidade nas abordagens apresentadas, a forma como a articulação de pontos de vista ocorre é comum, ou seja, normalmente ela é desenvolvida de modo implícito. Os resultados obtidos, tanto na França como no Brasil, revelaram as dificuldades encontradas pelos estudantes na elaboração de uma relação individual eficaz e flexível entre os dois pontos de vista considerados. Destaca-se que a análise dos erros mostrou claramente que, para os exercícios propostos, as dificuldades são aquelas que necessitam, de um modo ou de outro, a habilidade de articulação de pontos de vista.

BITTAR (1998) realizou um estudo sobre o ensino dos vetores no sistema secundário francês. Ela constatou que, nesta etapa do ensino, os vetores são tratados como ferramentas para a resolução de problemas geométricos de configuração, sendo pouco explorado, no sentido de DOUADY (1986), o aspecto objeto deste conteúdo. Além disso, a autora verificou que os livros didáticos omitem a possibilidade de decomposição de um vetor no plano a partir de dois vetores não colineares e, com isso, concluiu que tais fatores contribuem para gerar dificuldades nos alunos, quando deparados com o ensino de vetores no curso superior de Álgebra Linear.

SIERPINSKA (2000), em seu artigo que analisa aspectos do pensamento do estudante de Álgebra Linear, apresenta diversas atividades que ilustram o fato de os alunos resolverem questões por uma tendência mais prática do que teórica. A pesquisadora apresenta, neste contexto, algumas atividades coincidentes com as citadas nas pesquisas já descritas nesta seção, além de outras tarefas relativas à introdução de conceitos de Álgebra Linear.

Nesta experimentação, ela detectou, nos estudantes, problemas com definições matemáticas, as quais foram apresentadas de forma incorreta ou incompleta. Ainda, ela relatou que os alunos não utilizavam conhecimentos prévios para a resolução das questões e apresentavam uma carência no domínio da simbologia exigida pelo conhecimento científico. Uma evidência forte desta experimentação foi caracterizada pelo fato dos estudantes apresentarem um pensamento baseado em protótipos e não em definições. Vários raciocínios foram baseados na lógica da ação e as generalizações dadas sobre percepções visuais.

SIERPINSKA e NNADOZIE (2001) realizaram uma pesquisa sobre o pensamento teórico de um grupo de 14 estudantes de alto êxito em Álgebra Linear e discutiram os problemas metodológicos na análise de dados de um pequeno grupo de estudantes. A base teórica foi sedimentada na definição de Boero sobre o conhecimento teórico, que por sua vez, foi inspirada na distinção feita por Vygotski sobre conhecimento científico e espontâneo. Em SIERPINSKA (2000), foi observado que os estudantes tentaram resolver os problemas de Álgebra Linear com uma mente prática em detrimento da teórica. Com base nesta constatação, essa pesquisa teve o objetivo de analisar se estudantes, com grande sucesso em Álgebra Linear, considerados como capazes de ter um bom entendimento dos conceitos básicos, tendem a pensar de modo que possa ser caracterizado como fortemente teórico.

Os autores fazem uma caracterização do pensamento teórico para analisar o comportamento dos estudantes, classificando-o em pensamento sistêmico, reflexivo, com necessidade de validação e provas, analítico e crítico. Os pesquisadores, a despeito da análise crítica em relação aos dados estatísticos apresentados, notaram que tais estudantes, classificados inicialmente como ótimos alunos em Álgebra Linear, apresentaram um índice significativo destes comportamentos.

PESONEN (2000) realizou um estudo sobre o trabalho dos conceitos centrais de função e operações binárias, baseado principalmente no conceito imagem de VINNER (1991)[21]. O seu objetivo era auxiliar os estudantes no entendimento das questões abstratas envolvidas no conceito de espaço vetorial. Para tal, utilizou uma abordagem baseada no uso de múltiplas representações (verbal, simbólica e gráfica), aliada ao uso do *software MAPLE*.

O pesquisador desenvolveu um curso que procurou utilizar inúmeros exemplos e contra-exemplos, envolvendo as representações verbal, simbólica e gráfica das operações, com o intuito de reforçar o conceito imagem e

[21] VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics: Tall, D. *Advanced mathematical thinking*, Mathematics Education Library, 11. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 65-81.

proporcionar, ao estudante, meios para reconhecer o conceito definição. Ainda, foram criadas atividades exploratórias no computador, utilizando o programa *Maple V*, para definir funções, operações binárias e construção de programas simples para verificação de propriedades. Foi realizado um teste com oitenta e nove (89) estudantes e entrevistas com seis (06) alunos voluntários. A pesquisa mostrou que idéias mal estruturadas sobre objetos matemáticos, tais como função e operação binária, representaram sérios obstáculos para a aprendizagem em Álgebra Linear.

As observações durante o curso e os resultados do teste e das entrevistas pontuaram dificuldades comuns entre o grupo de estudantes, dentre elas, a tentativa de discutir a validade de proposições de forma indutiva e para casos particulares, a confusão no tratamento da operação binária, principalmente na questão de soma de vetores e problemas com o conceito de subespaço. Neste último, tomando como exemplo um exercício envolvendo um subespaço V do R^2, notou-se que os alunos identificaram o sub-espaço V ao R^2, trabalhando com vetores definidos em todo o plano.

WINSLOW (2003) apresentou uma pesquisa a respeito da análise teórica da função lingüística do CAS (*Computer Algebra Systems*) no ensino da Matemática universitária, baseada na noção central de mediação e registro. Ressalta-se que, neste contexto, o termo “registro” não foi utilizado no sentido dado por DUVAL (1995). No contexto do ensino da Matemática, o pesquisador procurou mostrar os aspectos do uso do computador nos níveis de mediador e agente. A análise do papel atual do CAS na aprendizagem da Matemática está baseada em uma visão lingüística do conhecimento matemático e a sua aprendizagem.

Segundo o pesquisador, o conhecimento matemático consiste em certo tipo de competência lingüística, em particular, na habilidade do uso das linguagens simbólica e natural em um modo muito específico, chamado registro. Deste ponto de vista, o computador inicialmente apresenta-se como mediador deste discurso, quando a comunicação no registro matemático toma lugar. Porém, há casos em que o CAS atua como agente no discurso, como por exemplo, quando o indivíduo digita uma operação e o computador fornece o resultado.

Na sua pesquisa, WINSLOW (2003) analisa os efeitos do uso do CAS nos aspectos de mediador, de agente no trabalho individual, cooperativo e ostensivo (este último com várias pessoas, mas com um líder) e de ferramenta para o ensino e a aprendizagem. Em relação ao aspecto de ferramenta, não utilizado aqui no sentido de DOUADY (1986), foram detectados dois tipos de uso: na resolução de problemas de matemática avançada e na criação de novos e poderosos meios de aprender matemática. No primeiro caso, a função da ferramenta é ser ela mesma um objeto da aprendizagem, no segundo caso, ela suporta a aprendizagem.

A investigação de sua pesquisa está baseada no segundo uso do CAS, para facilitar a aprendizagem dos estudantes, mas também para promover aos alunos, experiências que serão válidas em suas próprias atividades como futuros professores. Segundo o pesquisador, um dos problemas do CAS é que ele foi tipicamente desenhado para pessoas com competências nos registros matemáticos e não para fornecer meios para que o usuário desenvolva isso.

Como mediadores, há várias maneiras nas quais os CAS podem proporcionar oportunidades de aprendizagem não possíveis no ambiente *papel&lápis*. Como exemplos, inscrições algébricas e geométricas podem ser processadas e combinadas e problemas matemáticos podem ser mudados somente com a alteração de alguns *inputs*. Porém, a maior vantagem, segundo o autor, é o fato da necessária distinção entre a linguagem simbólica e a natural para a comunicação nesse meio, ou seja, símbolos/figuras geométricas e textos têm diferentes *status*, que devem ser encarados como dois canais distintos de comunicação.

A interação entre a linguagem natural e simbólica não é suportada pelo CAS entendido como agente, ou seja, o CAS não reage ao texto da linguagem natural mesmo quando estruturada logicamente. Por exemplo, o computador não reage se um estudante digitar a afirmação “é falso que 1=1”. Um outro potencial consiste na possibilidade de se flexibilizar a estruturação do ensino, ou seja, uma ferramenta pode ser inicialmente apresentada como uma rotina de computador exigindo, dos estudantes, somente o entendimento de *input* e *output*. Por outro lado, é possível propor um tratamento mais teórico, no sentido da construção de rotinas de programação pelos estudantes, explorando o entendimento estruturado dos conceitos e propriedades subjacentes às mesmas.

O autor ainda comenta um projeto de ensino usando o *software MathCad* para Cálculo com Geometria Analítica. Ele notou que é difícil sustentar os trabalhos cooperativos com CAS, pois, como havia diferenças nos conhecimentos dos alunos em relação ao uso desse tipo de ambiente, o trabalho tendia para o caso do uso individual ou comandado por um único componente do grupo. Destacamos, conforme verificado pelo pesquisador, que o conhecimento do *software*, e não o conhecimento matemático, foi o fator determinante de quem dominou a comunicação.

BEHAJ e ARSAC (1998) realizaram uma pesquisa com cinco professores de Álgebra Linear da Universidade de Marrocos, sobre a natureza e a organização hierárquica dos imperativos que condicionam a preparação de um curso de Álgebra Linear. Eles analisaram os resultados obtidos no experimento à luz da teoria da transposição didática de CHEVALLARD (1985).

O estudo levou em conta as idéias individuais dos professores sobre a Matemática e sobre o ensino, bem como as variações que ocorrem em relação a essas idéias. Foi observado que os professores sentem-se relativamente livres em relação à ordem de apresentação dos conteúdos do curso sugerido pelo programa e pelos livros. Geralmente, o curso estrutura-se segundo suas próprias idéias sobre a aprendizagem, as quais são muito pessoais, e estas passam a ser as determinantes do processo de ensino.

O pesquisador constatou que os fatores que os professores levam em conta são muito mais complexos que os previstos pela teoria da transposição didática, o que coloca em dúvida a afirmação de que, no processo transpositivo, os docentes dispõem de uma pequena margem de liberdade a respeito do texto a ser selecionado para as suas atividades.

GUEUDET-CHARTIER (2000; 2004) fez um estudo sobre o uso dos modelos geométricos, provenientes da Geometria, e dos modelos de figuras, provenientes dos desenhos, pelos professores e estudantes de Álgebra Linear. A autora utilizou como base teórica os pressupostos de FISHBEIN[22] (1987, apud GUEUDET-CHARTIER, 2000) sobre intuição e modelos intuitivos, buscando explicitar o significado de intuição geométrica. Ela apoiou-se ainda em um estudo

---

[22] Fishbein, E. *Intuition in science and mathematics*. Riedel, Dodrecht, 1987.

histórico da gênese da Álgebra Linear, fortemente inspirado em DORIER et al. (1997), o qual revela que essa disciplina não foi construída de forma desvinculada da Geometria e que a unificação de diversos domínios foi um ponto central para a sua evolução. A partir daí, mesmo reconhecendo que a Álgebra Linear desenvolvida na Universidade deve ter um caráter unificador, generalizador e formal (cf. descrito por ROBERT, A; ROBINET, J. (1989)), o que necessariamente conduz ao estabelecimento de rupturas com situações definidas em espaços vetoriais específicos, ela expõe as possibilidades e vantagens de explorar os modelos geométricos e de figuras na introdução da Álgebra Linear.

Por meio de um questionário aplicado a vinte e cinco (25) professores franceses, a pesquisa mostrou que poucos utilizam o modelo de figuras no ensino de Álgebra Linear. Ainda, foram notadas duas principais tendências: um grupo de professores utiliza uma abordagem estrutural da Álgebra Linear, sem praticamente associá-la a um modelo de figuras, sendo a Geometria apresentada como uma mera aplicação da teoria geral. Já um outro grupo adota a apresentação da Geometria Afim, com um modelo de figuras associado, como apoio para introduzir os conceitos de Álgebra Linear.

A pesquisa ainda analisou este aspecto com estudantes que já haviam cursado a disciplina. Foi proposta uma questão que apresentava figuras classificadas em dois grupos. Os alunos deveriam analisar se havia a possibilidade de existir uma aplicação linear que relacionasse os desenhos do primeiro grupo com os do segundo. A análise dos dados mostrou que a maioria dos estudantes não teve êxito na associação proposta, indicando pouca compreensão do tipo de imagem geométrica possível por meio de uma transformação linear. Ainda, havia estudantes que não utilizavam modelo de figuras e outros que tentavam construir um modelo com apoio na Geometria do Ensino Médio, o que não se adequava aos problemas dados em Álgebra Linear.

OLIVEIRA (2002) realizou uma pesquisa ligada ao projeto “Um quadro de referência para disciplinas de Matemática em um curso de Licenciatura em Matemática”. A proposta do trabalho consistiu em analisar a produção de significados para a noção de transformação linear, de forma a subsidiar uma posterior reflexão sobre os processos de ensino e de aprendizagem dessa disciplina. Foi realizado um estudo histórico e crítico com o objetivo de levantar possíveis maneiras de tratar as transformações lineares, uma análise de livros-texto buscando identificar os possíveis significados que podem ser produzidos para transformações lineares e entrevistas com estudantes de um primeiro curso de Álgebra Linear da graduação em Matemática. O objetivo consistiu em investigar os significados que eles efetivamente produziam para a noção de transformação linear em diferentes contextos.

Na História, foi constatado um processo no qual se deram mudanças no que dizia respeito à idéia de transformação linear. Nesse processo, que culminou no final do século XIX e início do XX, com a definição de transformação linear como sendo uma função especial entre espaços vetoriais, foram destacados três momentos distintos. Inicialmente, os matemáticos, como Viète e Fermat, utilizavam determinadas substituições lineares para transformar uma expressão algébrica em outra com uma forma mais "tratável". Em seguida, notou-se o uso das transformações para o estudo do que permanecia invariante em certas classes de curvas quando submetidas a certas classes de transformações, característica presente nos trabalhos de Möbius. Em um terceiro momento, com Peano, as transformações lineares foram tratadas como aplicações particulares entre espaços vetoriais. Destaca-se o fato de que, em cada momento, a produção, as maneiras de operar e os efeitos dessas operações evidenciam a existência de uma distinção no caráter da transformação linear em cada fase da História.

Nos livros didáticos, a transformação linear aparece definida de várias maneiras. Este tipo de aplicação foi encontrado como matriz, sistema de equações lineares e função especial entre espaços vetoriais. Cada tipo de abordagem pode levar o aluno a produzir significados diferentes para a noção deste conceito, ou seja, é provável que os objetos constituídos por um leitor em sua fala, a partir de certo livro, sejam distintos daqueles constituídos a partir de outra obra.

Sendo assim, cabe ao professor desta disciplina proporcionar, ao licenciando em Matemática, situações nas quais ele possa perceber diferenças entre significados, possíveis relações entre alguns deles e a reflexão de quando utilizar um ou outro.

O estudo ainda envolveu uma pesquisa realizada com duas alunas do primeiro ano da graduação em Matemática que cursavam a disciplina de Introdução à Álgebra Linear. Elas tiveram contato com as transformações lineares por meio de uma abordagem que partia da seguinte idéia: uma transformação do plano usual no plano usual, uma aplicação dada por um sistema de equações lineares com duas equações e quatro variáveis, a definição de transformação linear, demonstrando, depois, a equivalência entre essa definição e a que relaciona a aplicação linear no plano com as duas condições. Em seguida, foi apresentada a definição de espaço vetorial e uma transformação linear T entre espaços vetoriais V e W quaisquer (de dimensão finita), com as propriedades relacionadas às operações usuais de adição de vetores e multiplicação por escalar.

Das entrevistas realizadas com essas alunas, observou-se que, na atividade de uma mesma tarefa, diferentes significados podem ser produzidos para a noção de transformação linear. Ainda, dependendo da noção junto a qual esteja a de aplicação linear, esta muda, podendo ser uma função que irá agir nos vetores ou ser proveniente de um sistema de equações lineares. As alunas buscaram fazer associações geométricas para produzir significados para as transformações lineares. Ainda, constatou-se uma forte influência das idéias naturalizadas de espaço vetorial (como lugar) e vetor (como segmento de reta orientado).

A seguir, apresentaremos uma síntese das relações entre as pesquisas descritas, procurando ressaltar os seus aspectos comuns.

2.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A revisão bibliográfica das pesquisas analisadas no ensino de Álgebra Linear apontou alguns pontos convergentes. Apresentando uma síntese desta análise, pode-se afirmar que as pesquisas de Marlene Alves DIAS (1998) e Kallia PAVLOPOULOU (1993, apud DORIER, 1998, apud DUVAL, 2000) evidenciaram o fato dos livros didáticos privilegiarem certos registros, dentre eles o simbólico. OLIVEIRA (2002) verificou que os livros brasileiros apresentam abordagens distintas para a introdução às transformações lineares, o que pode levar o estudante a produzir diferentes significados para este conceito.

As pesquisas de PAVLOPOULOU (1993, apud DORIER, 1998, apud DUVAL, 2000), HILLEL e SIERPINSKA (1995), SIERPINSKA, DREYFUS e HILLEL (1999), estabeleceram a relação entre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear e a deficiência na coordenação satisfatória dos diversos registros de representação semiótica.

As pesquisas de DREYFUS, HILLEL e SIERPINSKA (1998) e WINSLOW (2001) levantaram as especificidades do trabalho com recursos computacionais no ensino de conteúdos matemáticos. Por fim, GUEUDET-CHARTIER (2000) apresentou resultados que apontaram a deficiência no entendimento e no uso do registro geométrico das transformações lineares por parte dos estudantes.

Com base na pesquisa realizada até então, optamos por iniciar o nosso estudo pela análise dos livros didáticos de Álgebra Linear, a fim de mapear como tais obras tratam o objeto matemático "transformações lineares", em termos de registros e conversões. Conforme já relatado, um estudo dos livros didáticos de Álgebra Linear foi realizado por DIAS (1998), porém o objeto matemático era diferente, bem como o enfoque dado à teoria dos registros de representação semiótica de Duval. OLIVEIRA (2002) também realizou uma análise do conteúdo das transformações lineares em livros didáticos, evidenciando as maneiras como este conceito é apresentado. Apesar de o objeto matemático ser o mesmo de nosso estudo, temos por foco um outro tipo de análise, uma vez que pretendemos, com base nos pressupostos de DUVAL (1995, 2000, 2003), avaliar principalmente as conversões estabelecidas nestas obras.

A análise do conteúdo das transformações lineares foi subdividida nos seguintes aspectos: a verificação dos registros presentes e das conversões estabelecidas, a importância dada aos aspectos ferramenta e objeto deste conceito e o papel desempenhado pelos recursos computacionais. Para isso, foram selecionados os quatro livros didáticos de Álgebra Linear mais presentes nas referências bibliográficas dos cursos de Computação de uma amostra de doze universidades do país. Tendo em vista que a Álgebra Linear representa um pré-requisito para o estudo da disciplina de Computação Gráfica nos cursos de Computação, também foram selecionados três livros didáticos desta área. Foi realizada uma análise dos registros presentes e das conversões estabelecidas no tópico das transformações no plano e no espaço, efetuando, em seguida, um comparativo com as obras didáticas de Álgebra Linear.

A descrição detalhada desta análise e um comparativo com a revisão bibliográfica desta seção serão apresentados no próximo capítulo.

3. ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem por objetivo estudar o saber a ensinar relativo à noção de transformação linear, conteúdo desenvolvido em vários cursos de graduação, dentre eles, a Engenharia da Computação e a Ciência da Computação. A grade curricular dos cursos citados anteriormente inclui tanto a disciplina de Álgebra Linear como a de Computação Gráfica. As transformações no plano e no espaço são desenvolvidas em ambas as disciplinas, sendo a Álgebra Linear caracterizada como uma matéria pré-requisito para o estudo de conceitos de Computação Gráfica.

Com o intuito de analisar os registros presentes e as conversões estabelecidas pelos livros didáticos das duas disciplinas, foi realizado um levantamento da bibliografia mais freqüente citada nos cursos da área de Computação de doze Universidades do país. Em Álgebra Linear, foi detectada a presença significativa de quatro obras. Já em Computação Gráfica, foram destacadas duas literaturas.

Com relação aos livros didáticos de Álgebra Linear, as seguintes características nos conteúdos introdutórios das transformações lineares foram analisadas: a determinação dos registros presentes, a análise da maneira como coordenam estes registros, a forma de exploração do conceito de transformação linear nos seus aspectos ferramenta e objeto e a utilização de recursos computacionais. Nos livros didáticos de Computação Gráfica, foram analisados os registros mais freqüentes e as conversões mais requeridas.

Como opção de apresentação ao leitor, inicialmente será realizada uma descrição das características principais do tratamento dado às transformações lineares nos livros didáticos de Álgebra Linear. Em seguida, serão apresentadas as conclusões, acompanhadas de uma análise comparativa entre os resultados obtidos, a base teórica deste estudo e as pesquisas presentes em nossa revisão bibliográfica. A mesma dinâmica será utilizada na análise dos livros didáticos de Computação Gráfica.

Apesar de termos consciência de que os livros didáticos não constituem a única fonte de trabalho da atividade docente, partimos do fato de que os mesmos assumem um papel de destaque no processo de ensino. Com isso, a análise das obras didáticas de Álgebra Linear representou uma opção de pesquisa, com o intuito de obter um referencial para a elaboração de conjecturas com relação ao ensino que está sendo desenvolvido, sem, contudo, ter a pretensão de esgotar as diversas variáveis que possam intervir na prática docente.

Em seguida, partindo dos resultados obtidos, pretendemos avaliar a influência destas abordagens na formação dos alunos desta área, com relação à aprendizagem desta noção.

3.2 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DE ÁLGEBRA LINEAR

3.2.1. A Escolha dos Livros Didáticos e os Aspectos Analisados

Foi realizada uma pesquisa a respeito dos livros didáticos de Álgebra Linear adotados pelos cursos universitários da área de Computação de uma amostra de doze universidades do país. Tal estudo apontou uma freqüência significativa de quatro obras, sendo as duas primeiras as mais citadas. São elas:

CALLIOLI, C.A.; DOMINGUES, H.H.; COSTA, R.C.F. *Álgebra Linear e Aplicações*. 6 ed. São Paulo: Atual Editora, 1995.

BOLDRINI, J.L.; COSTA, S.I.R.; RIBEIRO, V.L.; WETZLER, H.G. *Álgebra Linear*. São Paulo: Ed. Harper e Row do Brasil Ltda, 1980.

ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações*. 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2001. trad. Claus Ivo Doering.

LAY, D.C. *Álgebra Linear e suas aplicações.* 1 ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1997 trad. Ricardo Camelier e Valéria de Magalhões Iório.

Para facilitar a leitura, tais obras serão identificadas por **Livro 1, Livro 2, Livro 3 e Livro 4**, respectivamente. A tabela a seguir contém a freqüência destas referências por universidade analisada.

TABELA 6 – BIBLIOGRAFIA BÁSICA DE ÁLGEBRA LINEAR DE CURSOS DA ÁREA DE COMPUTAÇÃO

INSTITUIÇÃO	CURSO	LIVRO 1	LIVRO 2	LIVRO 3	LIVRO 4
Universidade Estadual Paulista	Ciência da Computação	X	X		
Universidade Federal de Santa Maria	Ciência da Computação	X	X		
Universidade Federal do Rio Grande do Sul	Engenharia da Computação		X	X	X
Universidade de São Paulo	Ciência da Computação/Engenharia	X		X	
Faculdades Associadas de São Paulo	Ciência e Engenharia da Computação	X	X	X	
Universidade Federal de Uberlândia	Ciência da Computação	X			
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul	Engenharia Elétrica			X	X
Universidade Federal de Minas Gerais	Engenharia Elétrica		X	X	
Universidade do Vale do Rio dos Sinos	Ciência da Computação		X		X
Universidade de São Carlos	Ciência da Computação	X	X	X	X
Universidade Federal de Santa Catarina	Engenharias	X	X	X	
Universidade Federal de Pernambuco	Ciência da Computação		X		

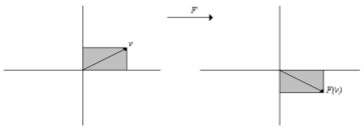
A análise foi dividida em duas fases: análise da parte teórica e análise dos exercícios propostos. Nos **Livros 1 e 4**, foi adotado como parte teórica, não só o texto relativo à apresentação teórica, mas também os exercícios resolvidos, tendo em vista que os **Livros 2 e 3** só apresentam exercícios propostos.

Como a intenção é a de explorar a “introdução” às transformações lineares, a análise será limitada aos seguintes conteúdos: transformações lineares (introdução, definição, exemplos), transformações geométricas no plano e no espaço e matriz de uma transformação linear.

Conforme relatado anteriormente, dos conteúdos selecionados, serão analisados quatro aspectos: os registros de representação semiótica detectados, o estabelecimento da coordenação de registros, o uso de recursos informatizados e a exploração dos aspectos ferramenta e objeto do conceito.

Quanto aos registros, utilizaremos, para a análise, a classificação apresentada na tabela seguinte.

TABELA 7 – CLASSIFICAÇÃO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

TIPO DE REGISTRO	REPRESENTAÇÕES
Registro simbólico	*Representação simbólico-algébrica Ex: $T(x_1,x_2) = (-x_1+x_2,x_2)$ (Livro 3, p. 146) *Representação simbólico-matricial: Ex: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (Livro 2, p. 148)
Registro gráfico	*Representação gráfica Ex:  (Livro 2, p. 148)
Registro numérico	*Representação de n-uplas: Ex: F(1,2) = (3, -1) (Livro 1, p.108) *Representação tabular Ex: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (Livro 1, p. 140)
Registro da língua natural	*Representação da língua natural em emprego comum (analisada em situações-problema) Ex: Ache a transformação T do plano no plano que é uma reflexão em torno da reta x=y. (Livro 2, p. 171) *****Representação da língua natural em emprego especializado Seja F: U→V uma transformação linear com a seguinte propriedade: se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de U, então $\{F(u_1), \ldots F(u_n)\}$ é linearmente independente em V. Provar que F é injetora. (Livro 1, p. 111)

3.2.2. Análise da Parte Teórica

3.2.2.1. Transformações lineares: introdução, definição e exemplos.

No **Livro** 1, antes de introduzir a definição de transformação linear, os autores realizam uma revisão sobre aplicações. Em seguida, são tratados os conceitos de domínio e contradomínio de uma função, igualdade entre funções, conjunto imagem, as propriedades injetora, sobrejetora e bijetora e a existência da aplicação inversa. Após esta introdução, é apresentada a seguinte definição.

QUADRO 6 – DEFINIÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR DO LIVRO 1

Sejam U e V espaços vetoriais sobre R. Uma aplicação F: $U \to V$ é chamada transformação linear de U em V se, e somente se, (a)$F(u_1+u_2) = F(u_1) + F(u_2)$, $\forall u_1, u_2 \in U$, e (b)$F(\alpha u) = \alpha F(u)$, $\forall \alpha \in R$ e $\forall u \in U$. No caso em que U=V, uma transformação linear F: $U \to U$ é chamada também de operador linear.

FONTE: Livro 1, p.104

Dando continuidade, o livro traz uma série de exemplos de transformações lineares, explorando a aplicação nula de U em V, a aplicação identidade de U em U, uma transformação linear do R^3 em R^2, uma transformação linear do R^n em R^m e uma transformação linear de $P_n(R)$ em $P_n(R)$.

Há onze exercícios resolvidos relacionados a essa introdução, sendo dez de verificação da linearidade de uma transformação e um de determinação da transformação linear partindo das imagens dos elementos de uma base. Com isso, podemos observar que há uma preocupação dos autores em revisar conceitos que servirão de pré-requisitos para o entendimento de transformações lineares.

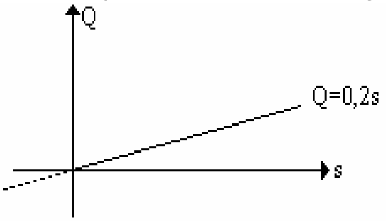
Na introdução deste conteúdo, nos exemplos apresentados e nos exercícios resolvidos, os registros dominantes são o simbólico-algébrico e o da língua natural especializada, ou seja, não há exploração dos registros gráfico, simbólico-matricial e da língua natural aplicada em situações-problema. Além disso, o registro numérico ocorre esporadicamente no cálculo da imagem de elementos.

Nesta introdução, pôde-se detectar, então, que as transformações lineares são tratadas exclusivamente no seu aspecto objeto. Além disso, em toda a abordagem deste livro, não há orientações ou sugestões para o uso de algum tipo de ferramenta computacional.

No **Livro 2**, os autores iniciam o capítulo de transformações lineares tratando das duas propriedades deste tipo de aplicação em dois problemas contextualizados, conforme ilustrado a seguir.

QUADRO 7 – SITUAÇÕES-PROBLEMA DE INTRODUÇÃO DO CONCEITO DO LIVRO 2

Problema 1: Se de um quilograma de soja são extraídos 0,2 litros de óleo, de uma produção de x kg de soja, seriam extraídos 0,2x litros de óleo. Escrevendo na forma de função, teremos Q(s)=0,2s, onde Q=quantidade em litros de óleo de soja e s=quantidade em kg de soja.
Estes dados podem ser colocados graficamente:



Vamos analisar neste exemplo duas características importantes
1)Para calcular a produção de óleo fornecida por (s_1+s_2) kg de soja, podemos tanto multiplicar (s_1+s_2) pelo fator de rendimento 0,2, como calcular as produções de óleo de cada uma das quantidades s_1 e s_2 e somá-las, isto é, $Q(s_1+s_2) = 0{,}2(s_1+s_2) = 0{,}2s_1+0{,}2s_2 = Q(s_1) + Q(s_2)$.
2)Se a quantidade de soja for multiplicada por um fator k, a produção de óleo será multiplicada por este mesmo fator, isto é, $Q(ks) = 0{,}2(ks) = k(0{,}2s)=k.Q(s)$.
Estas duas propriedades, que neste caso são óbvias, servirão para caracterizar o que denominaremos "transformação linear".
Problema 2: A quantidade em litros de óleo extraída por quilograma de cereal segundo um determinado processo pode ser descrita pela tabela:

	Soja	Milho	Algodão	Amendoim
Óleo (l)	0,2	0,06	0,13	0,32

A quantidade total de óleo produzida por x kg de soja, y kg de milho, z kg de algodão e w kg de amendoim é dada por $Q=0{,}2x+0{,}06y+0{,}13z+0{,}32w$. Observe que a quantidade de óleo pode ser dada pela multiplicação da "matriz rendimento" pelo vetor quantidade.

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}06 & 0{,}13 & 0{,}32 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0{,}2x + 0{,}06y + 0{,}13z + 0{,}32w$$

Formalmente, estamos trabalhando com a função Q: $A \subset R^4 \to R$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}06 & 0{,}13 & 0{,}32 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

que, como no exemplo anterior, goza das propriedades:

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = Q\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + Q\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$Q\left(k.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right) = k.Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

FONTE: Livro 2, p. 142-144

Em seguida, apresenta-se a definição matemática de transformação linear, como uma função entre espaços vetoriais que satisfaz as duas propriedades citadas nos problemas anteriores, destacando que tal função é a mais natural possível, pois respeita a estrutura de espaço vetorial.

QUADRO 8 – DEFINIÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR DO LIVRO 2

Definição: Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma transformação linear (aplicação linear) é uma função de V em W, F: $V \to W$, que satisfaz as seguintes condições: i)Quaisquer que sejam u e v em V, F(u+v) = F(u)+F(v) ii)Quaisquer que sejam $k \in R$ e $v \in V$, F(kv) = k.F(v)

FONTE: Livro 2, p. 144

Ilustrando esta definição, há uma série de exemplos. Nestes, os autores apresentam várias transformações lineares, explorando casos de aplicações de R em R, R^2 em R^3, $P_n(R)$ em $P_n(R)$, a aplicação nula de V em V e a transformação linear do R^n em R^m. Nesta última, a abordagem cita que tal transformação linear pode ser representada por uma matriz de ordem mxn, sendo que, a toda matriz mxn, está associada uma transformação linear do R^n em R^m.

Ainda nos exemplos, foi exposto o fato de que uma transformação linear T: $V \to W$ leva o vetor nulo de V no vetor nulo de W, mas que T(0)=0 não é suficiente para que T seja linear. Por fim, foi apresentado um caso de transformação não linear. Deste modo, podemos notar que os autores demonstram a preocupação de estabelecer uma abordagem que inicialmente contextualize as transformações lineares em situações reais, antes de apresentar a definição matemática, ou seja, apesar de o conteúdo ainda não ser tratado formalmente, as transformações lineares são introduzidas assumindo o caráter de ferramenta na interpretação desses problemas. Em contrapartida, a partir da definição matemática, o conceito de transformação linear é tratado exclusivamente no seu caráter objeto.

Podemos observar que, nos dois primeiros problemas, estão presentes o registro da língua natural, o registro numérico na forma tabular, o registro gráfico e o registro simbólico nas suas representações algébrica e matricial. No primeiro exemplo, nota-se a conversão do registro da língua natural para o registro simbólico-algébrico e a conversão deste para o registro gráfico. No segundo exemplo, está presente a conversão do registro numérico-tabular para o registro simbólico-algébrico. Ainda, é feito o tratamento da representação simbólico-algébrica para a simbólico-matricial.

Apesar de a abordagem incluir inicialmente as conversões, após a definição das transformações lineares, nota-se o predomínio do registro simbólico. Podemos observar que nesta obra também não há uso ou mesmo referências à utilização de recursos computacionais na introdução ou nos problemas apresentados.

No **Livro 3**, os autores dividiram o estudo das transformações lineares em dois capítulos independentes. No primeiro capítulo desse tema (Capítulo 4, p. 129), são tratados os seguintes tópicos: estudo de Espaços Vetoriais Euclidianos e as Transformações Lineares de R^n em R^m. No segundo capítulo (Capítulo 8, p. 257), o estudo das Transformações Lineares é realizado em espaços vetoriais arbitrários. Ainda, há um capítulo posterior (Capítulo 9, p. 291) intitulado "Tópicos Adicionais", o qual trata de vários temas, dentre eles a Geometria dos Operadores Lineares do R^2. Por fim, há um capítulo (Capítulo 11, p. 363) que aborda as aplicações gerais da Álgebra Linear em outros campos, dentre eles, a Computação Gráfica.

No primeiro capítulo que trata das transformações, inicialmente é feita uma breve introdução de funções de R^n em R e de R^n em R^m, destacando os conceitos de domínio, contradomínio, imagem e igualdade de funções. A construção de transformações é apresentada conforme descrito no quadro seguinte.

QUADRO 9 – DEFINIÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO DO LIVRO 3

Para ilustrar uma maneira importante pela qual podemos construir transformações, supondo que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ são funções reais de n variáveis reais, digamos

$$\begin{aligned} w_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ w_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1) \\ &\;\;\vdots \\ w_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Estas m equações associam um único ponto $(w_1, w_2, \ldots, w_m)$ em R^m a cada ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em R^n e portanto definem uma transformação de R^n em R^m. Denotando esta transformação por T, temos $T: R^n \to R^m$ com $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$

FONTE: Livro 3, p. 137

Após a apresentação de um exemplo que ilustra a construção de uma transformação do tipo acima, é dada a definição de transformação linear do R^n em R^m, segundo apresentado no quadro seguinte.

QUADRO 10 – PRIMEIRA DEFINIÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR DO LIVRO 3

Transformações Lineares de R^n em R^m. No caso especial em que as equações em (1) são lineares, a transformação T: $R^n \rightarrow R^m$ definida por estas equações é chamada uma **transformação linear** (ou **operador linear** se m = n). Assim, uma transformação linear T: $R^n \rightarrow R^m$ é definida por equações da forma:

$w_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n} x_n$
$w_2 = a_2x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n} x_n$
.
.
$w_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn} x_n$ ou então, em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ou, mais concisamente, por w=A.x.
A matriz A = $[a_{ij}]$ é chamada **matriz canônica** da transformação linear T e a transformação T é chamada **multiplicação por A.**

FONTE: Livro 3, p. 138

Nota-se, então, que a definição usual de transformação linear como uma aplicação especial entre espaços vetoriais não é dada nesta introdução. Somente após explorar os vários tópicos relacionados às transformações lineares do R^n em R^m, dentre eles a geometria das transformações, a transformação nula, o operador identidade, a análise da propriedade injetora e a obtenção da inversa, os autores apresentam as condições de linearidade, conforme descrito a seguir.

QUADRO 11 – SEGUNDA DEFINIÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR DO LIVRO 3

Propriedades da Linearidade Na seção precedente nós definimos uma transformação $T: R^n \rightarrow R^m$ como sendo linear se as equações relacionando x com w=T(x) são equações lineares. O teorema a seguir dá uma caracterização alternativa da linearidade. Este teorema é fundamental e será a base para estender, mais adiante neste texto, o conceito de transformação linear para contextos mais gerais.
Teorema 4.3.2. Propriedades de Transformações Lineares
Uma transformação T: $R^n \rightarrow R^m$ é linear se, e somente se, as seguintes relações valem para todos os vetores u e v em R^n e qualquer escalar c.
(a) T(u+v) = T(u) + T(v) (b) T(cv) = cT(v)

FONTE: Livro 3, p. 150

A definição geral, que trata das transformações lineares em espaços vetoriais quaisquer, só é apresentada no segundo capítulo desse tema, sendo que, neste momento, os autores retomam casos do plano e do espaço abordados no capítulo anterior, com a preocupação de relacioná-los com a nova definição mais geral. Na introdução do primeiro capítulo, a abordagem é dada nos registros da língua natural especializada, simbólico-algébrico, simbólico-matricial e numérico, sendo o conceito trabalhado somente no seu aspecto objeto. Já na parte introdutória do segundo capítulo há a inclusão de exemplos gráficos, sendo estabelecidas conversões entre este tipo de registro e o simbólico-algébrico.

Nesta obra, durante a exposição teórica, não há menção ao uso de recursos computacionais. Na apresentação do livro, torna-se evidente que não é dada uma grande importância ao uso de *software*, pois os autores apresentam a seguinte descrição, presente na capa do livro: “Recursos computacionais também não são exigidos, mas existem exercícios nos finais de capítulos para utilização do *MATLAB*, *Mathematica*, *Maple* ou calculadoras com funcionalidade de álgebra linear”. Destacamos, aqui, que esses exercícios ocorrem em número reduzido, o que poderá ser observado na descrição posterior da análise dos exercícios propostos.

No **Livro 4**, o autor não reserva um capítulo para o tratamento das transformações lineares, já que este conteúdo ocorre em diversos momentos do desenvolvimento de outros tópicos. Além disso, o que diferencia este livro dos demais é o fato de o mesmo tratar, durante a exposição teórica, de várias aplicações da Álgebra Linear em outras áreas. Com isso, nota-se que há uma grande preocupação em explorar o aspecto ferramenta deste conceito. No primeiro capítulo, há uma introdução às transformadas lineares analisadas somente do $R^n \rightarrow R^m$. Nesta parte, a abordagem das transformações lineares está intimamente relacionada ao tratamento com matrizes. Somente no quarto capítulo são tratados os espaços vetoriais e, nesta fase, as transformações lineares são definidas em espaços quaisquer.

No primeiro capítulo, o autor inicia o conteúdo por uma revisão de função do R^n no R^m, incluindo conceitos de domínio, contradomínio e imagem. Em seguida, trata das aplicações associadas à multiplicação de matrizes.

QUADRO 12 – INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE TRANSFORMAÇÃO DO LIVRO 4

Para cada x do R^n, T(x) é dado por Ax, onde A é uma matriz m x n. Para simplificar, muitas vezes denotamos essa transformação (ou transformada) matricial por $x \rightarrow Ax$. Observe que o domínio de T é o R^n quando A tem n colunas, e o contradomínio de T é o R^m quando cada coluna de A tem m elementos.

FONTE: Livro 4, p. 63

Pudemos notar que o registro numérico-tabular é extremamente valorizado no tratamento das transformações. Antes de introduzir o conceito de transformação linear, o autor apresenta três exemplos de transformação matricial, sendo dois relacionados com as transformações geométricas, no caso a projeção ortogonal do R^3 no plano xy e o cisalhamento horizontal de fator 3. O livro destaca, nesta fase, o fato da matriz possuir uma abordagem dinâmica, ou seja, de assumir o papel de um objeto que transforma vetores em outros vetores.

QUADRO 13 – INTRODUÇÃO ÀS TRANSFORMAÇÕES DO LIVRO 4

Se, $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, então a transformação $x \rightarrow Ax$ projeta pontos do R^3 no plano x_1x_2, pois

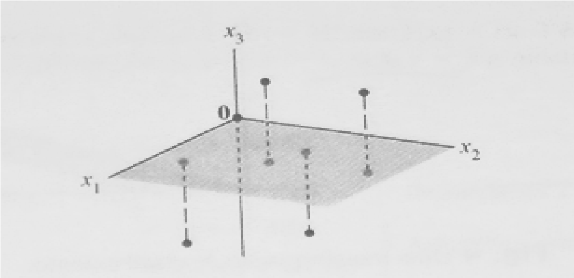


Fig. 3 Uma projeção.

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\0\end{bmatrix}$$

FONTE: Livro 4, p. 65

Para definir as transformadas lineares, o autor relembra que no estudo de matrizes foi visto que se A é uma matriz m x n, então a transformação $x \rightarrow Ax$ tem as propriedades $A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$ e $A(c\mathbf{u}) = cA\mathbf{u}$, para todo **u, v** em R^n e todos os escalares c (Item 1.4. da p. 35). Em seguida, cita que essas propriedades, reescritas em notação de funções, formam a classe mais importante de transformações em Álgebra Linear. O autor ainda relata que toda transformada matricial é linear. A seguir, será apresentada a definição inicial de transformação linear presente neste primeiro capítulo.

QUADRO 14 – DEFINIÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR DO LIVRO 4

Uma transformada (ou aplicação) T é linear se:
i. T(u+v) = T(u) + T(v) para todo u, v no domínio de T;
ii. T(cv) = cT(v) para todo v e todo escalar c.

FONTE: Livro 4, p. 66

De uma forma geral, o autor mostra que, se T é uma transformada linear, $T(c_1\mathbf{v}_1+...+c_p\mathbf{v}_p) = c_1T(\mathbf{v}_1) + ...+c_pT(\mathbf{v}_p)$. Ele também cita o fato de na Engenharia e na Física, tal equação ser conhecida como princípio da superposição, o que significa que, sempre que a entrada for representada como uma combinação linear de sinais que chegam a um sistema ou processo, a resposta desse sistema é representada pela mesma combinação linear das respostas dos sinais individuais.

Ainda nesta introdução, o autor fornece mais três exemplos. O primeiro trata da dilatação (ou contração) de um vetor no plano e o segundo de uma rotação no sentido anti-horário de 90^o. O terceiro consiste em um exemplo não geométrico de uma aplicação linear relacionada a um problema de economia. No primeiro exemplo, o autor explora os registros simbólico-algébrico e gráfico. No segundo, o simbólico-matricial, o numérico-tabular, o simbólico-algébrico e o gráfico. Em todos os exemplos está presente a preocupação de verificar a linearidade da transformação. A seguir, a título de ilustração, será apresentado o primeiro exemplo fornecido nesta seção.

QUADRO 15 – EXEMPLO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR DO LIVRO 4

Dado um escalar r, defina $T: R^2 \rightarrow R^2$ por $T(x) = rx$. T é chamada de uma contração quando $0 \leq r < 1$ e de uma dilatação quando $r > 1$. Seja $r=3$ e mostre que T é uma transformação linear.

Solução: Sejam u, v no R^2 e c, d escalares. Então

$T(cv+du) = 3(cv+du)$ Definição de T

$=3cv+3du$ Aritmética vetorial

$=c(3v)+d(3u)$

$= cT(v)+dT(u)$

Portanto, T é uma transformada linear porque satisfaz (4*). Veja a Fig. 5

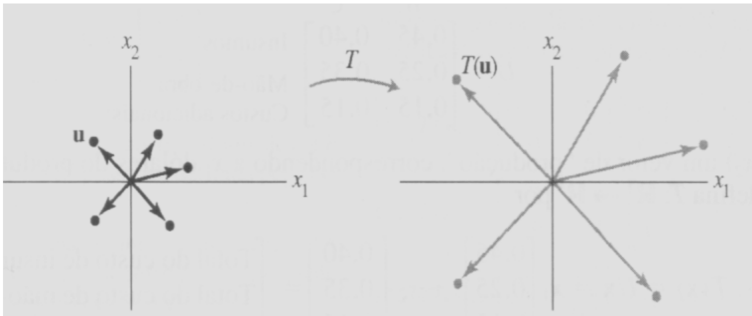


Fig. 5 Uma dilatação.

* (4) $T(cv+du) = cT(v) + dT(u)$ – propriedade definida anteriormente

FONTE: Livro 4, p. 67

Por fim o livro apresenta mais três problemas resolvidos, sendo dois com enfoque geométrico. O quadro a seguir apresenta um destes problemas.

QUADRO 16 – EXERCÍCIO RESOLVIDO NÚMERO 2 DO LIVRO 4

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Dê uma descrição geométrica da transformada $x \rightarrow Ax$.
Solução: Plote alguns pontos aleatórios (vetores) num papel milimetrado para ver o que acontece. Um ponto como (4,1) é transformado em (4,-1). A transformada $x \rightarrow Ax$ reflete pontos com respeito ao eixo x (ou eixo x_1).

FONTE: Livro 4, p. 68

Com isso, pôde-se notar que diversos registros são explorados nesta introdução teórica. Como aplicação de transformação linear, o autor apresenta o modelo de migração (movimento de populações), evidenciando o aspecto ferramenta do conceito de transformação linear.

Esta obra inclui exercícios que utilizam recursos computacionais, porém, da mesma forma que o **Livro 3**, estes são indicados em contextos suplementares e com utilização opcional.

3.2.2.2. Transformações geométricas no plano e no espaço

No **Livro 1**, este tópico praticamente não é explorado no tratamento das transformações lineares. Há um exemplo sobre homotetia, presente no bloco de exercícios resolvidos, porém sem apelo ao registro gráfico, como pode ser verificado a seguir.

QUADRO 17 – EXERCÍCIO RESOLVIDO NÚMERO 10 DO LIVRO 1

Seja V um espaço vetorial sobre R. Dado $\alpha \in R$ chama-se homotetia determinada pelo escalar α a aplicação $H_\alpha : V \rightarrow V$ tal que $H_\alpha(u) = \alpha . u$, $\forall u \in V$. Mostrar que H_α é um operador linear de V.
Solução: a) $H_a\ (u_1 + u_2) = a(u_1 + u_2) = a\ u_1 + a\ u_2 = H_a\ (u_1) + H_a\ (u_2)$;
b) $H_a\ (tu) = a(tu) = t(a\ u) = t.\ H_a\ (u)$

FONTE: Livro 1, p. 109

Destacamos que na pesquisa de ARAÚJO (2002), a qual analisou os metaconhecimentos matemáticos apresentados no discurso dos autores deste livro, foi comprovada a afirmação de que tal obra teria por característica partir de conhecimentos da geometria em duas e três dimensões, para, em seguida, estabelecer generalizações. Apesar deste fato, notamos que, no conteúdo das transformações lineares, o registro gráfico e as transformações geométricas do plano e do espaço são pouco explorados.

Sendo assim, nota-se que os autores não procuram estabelecer a conversão entre os possíveis registros. Além disso, o aspecto ferramenta do conceito não é tratado nesta seção.

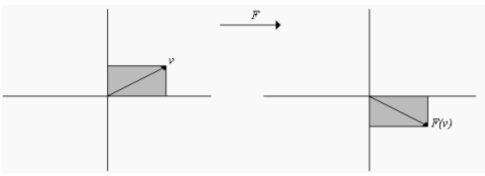
O **Livro 2** desenvolve um tópico específico das transformações do plano no plano (*"Transformações do plano no plano", p. 147),* tratando da expansão (ou contração) uniforme, da reflexão em torno do eixo x, da reflexão na origem (simetria central), da rotação de um ângulo θ e do cisalhamento horizontal. Ainda, esta obra apresenta a translação como um exemplo de uma aplicação não linear. No tratamento da composição das transformações lineares, exemplifica com a composta de duas transformações no plano, no caso, uma expansão uniforme de fator 2 seguida de um cisalhamento horizontal de fator 2. Em todos os casos, o livro apresenta os registros simbólico (nas duas representações) e gráfico, conforme ilustrado a seguir.

QUADRO 18 – TRANSFORMAÇÕES LINEARES DO PLANO NO PLANO DO LIVRO 2

Reflexão em Torno do Eixo- x:

F: $R^2 \rightarrow R^2$

$(x,y) \rightarrow (x,-y)$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

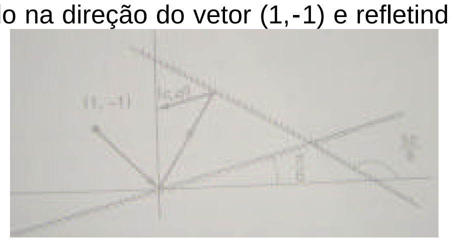
FONTE: Livro 2, p. 148

Na maioria dos casos, a abordagem parte do registro simbólico-algébrico para o gráfico. Somente ao tratar da rotação de um ângulo θ, é feita a dedução da representação simbólico-algébrica partindo da representação gráfica. Com isso, nota-se que há uma preocupação em apresentar o conceito explorando registros distintos, oferecendo ao leitor uma visão mais abrangente do tema estudado. Apesar disso, verifica-se que nesta apresentação teórica, a abordagem não favorece ao aluno a construção do tratamento da representação simbólico-algébrica para a matricial ou das conversões dos registros simbólico para o gráfico ou deste para o simbólico, uma vez que tais transformações são estabelecidas pelos autores sem a descrição de como são realizadas. Ainda, o registro simbólico-matricial é tratado antes de formalizar o conceito de que, fixadas duas bases, a toda matriz mxn está associada uma transformação linear do R^n em R^m – e a veracidade da implicação inversa -, embora o autor observe este fato na exposição do conteúdo.

As transformações lineares do plano no plano também são tratadas após o estudo da relação entre as aplicações lineares e matrizes, principalmente em questões de composição de funções. Neste contexto, o livro explora conversões que partem da língua natural e também trata o conceito no seu aspecto ferramenta, de acordo com o exemplo a seguir.

QUADRO 19 – PROBLEMA DE APLICAÇÃO À ÓPTICA

Um feixe de luz se propagando na direção do vetor (1,-1) e refletindo nos espelhos da figura:



Em que direção estará o feixe após as reflexões?

FONTE: Livro 2, p. 169

Quanto ao **Livro 3,** no primeiro capítulo que trata das transformações lineares do R^n em R^m, é dedicada uma seção especial para a "Geometria das Transformações Lineares". Os autores exploram os aspectos geométricos das reflexões, projeções, rotações e dilatações tanto no plano como no espaço. A garantia da linearidade de tais transformações é dada pelo fato das equações que a compõem serem lineares, sendo que não são trabalhadas as duas condições inerentes à transformação linear, como pode ser verificado no exemplo a seguir.

QUADRO 20 – TRANSFORMAÇÕES DO PLANO NO PLANO DO LIVRO 3

continua

Projeções: Considere o operador T: $R^2 \to R^2$ que leva cada vetor na sua projeção ortogonal sobre o eixo x (Figura 4.2.3). As equações relacionando as componentes de x e de w=T(x) são

$w_1 = x = x + 0y$ (12)

$w_2 = 0 = 0x + 0y$

ou em formato matricial,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (13)$$

QUADRO 20 – TRANSFORMAÇÕES DO PLANO NO PLANO DO LIVRO 3

conclusão

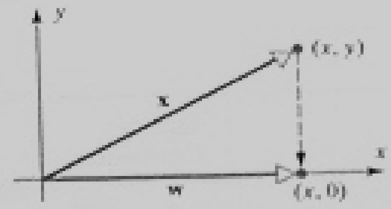


Figura 4.2.3

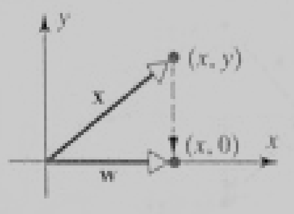
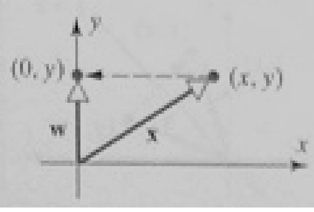
Como as equações em (12) são lineares, T é um operador linear e, por (13), a matriz canônica de T é

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

FONTE: Livro 3, p. 141

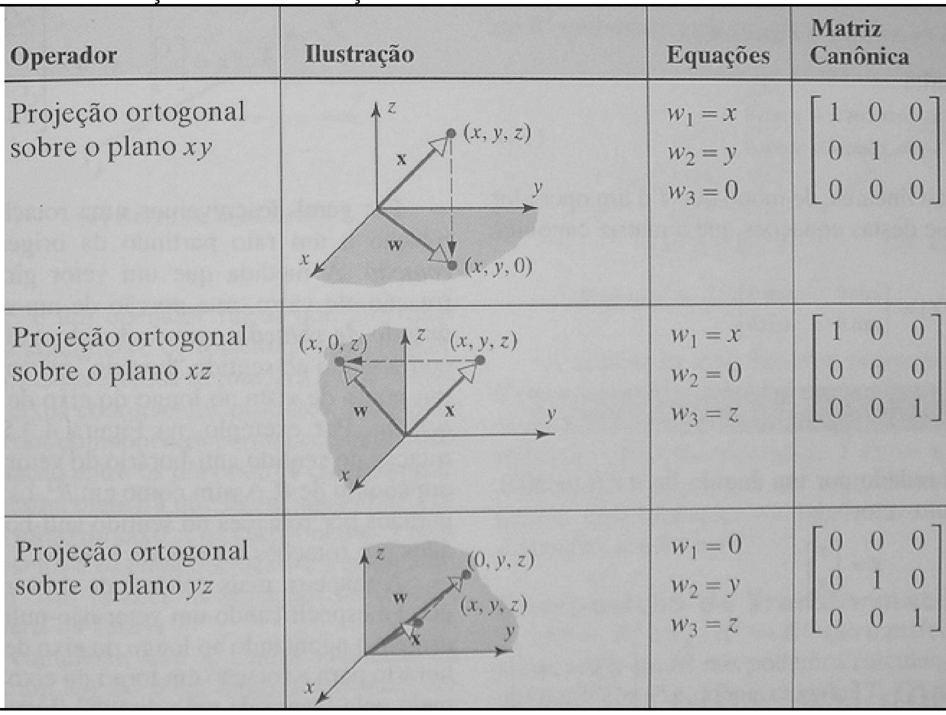
As figuras apresentadas a seguir, presentes na abordagem deste livro, contêm as projeções ortogonais mais comuns.

FIGURA 5 – PROJEÇÕES NO PLANO DO LIVRO 3

Operador	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Projeção ortogonal sobre o eixo x		$w_1 = x$ $w_2 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o eixo y		$w_1 = 0$ $w_2 = y$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

FONTE: Livro 3, p. 140

FIGURA 6 – PROJEÇÕES NO ESPAÇO DO LIVRO 3



Operador	Ilustração	Equações	Matriz Canônica
Projeção ortogonal sobre o plano xy		$w_1 = x$ $w_2 = y$ $w_3 = 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o plano xz		$w_1 = x$ $w_2 = 0$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Projeção ortogonal sobre o plano yz		$w_1 = 0$ $w_2 = y$ $w_3 = z$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

FONTE: Livro 3, p. 141

Esta dinâmica também é utilizada para apresentar as reflexões, rotações e dilatações. Deste modo, podemos notar que, neste tópico, há uma preocupação em apresentar os registros gráfico, simbólico e numérico, porém, da mesma forma que o **Livro 2**, observa-se que o texto apresenta estas situações finalizadas, sem um detalhamento das passagens de um registro para outro. Após a apresentação destas transformações, são dados exemplos de composições de transformações lineares. Nesta seção, os autores procuram desenvolver a resolução da composta por meio dos registros simbólico-algébrico, gráfico e numérico (multiplicação de matrizes), conforme ilustrado a seguir.

QUADRO 21 – COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES DO LIVRO 3

continua

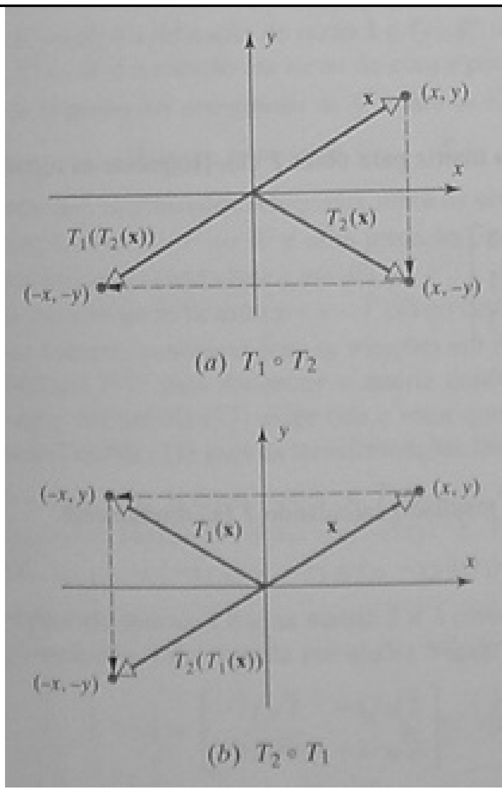
Exemplo 8 A Composição de Duas Reflexões
Sejam T_1: $R^2 \to R^2$ a reflexão em torno do eixo y e T_2: $R^2 \to R^2$ a reflexão em torno do eixo x. Neste caso, $T_1 o T_2$ e $T_2 o T_1$ são idênticas; ambas aplicam cada vetor x = (x,y) em seu negativo – x = (-x,-y) (Figura 4.2.9):

$(T_1 o T_2)$ (x,y) = T_1 (x,-y) = (-x, -y)

$(T_2 o T_1)$ (x,y) = T_2 (-x,y) = (-x, -y)

QUADRO 21 – COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES DO LIVRO 3

conclusão



A igualdade de $T_1 o T_2$ e $T_2 o T_1$ também pode ser deduzida mostrando que as matrizes canônicas de T_1 e T_2 comutam:

$$[T_1 o T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[T_2 o T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O operador T(x) = -x em R^2 ou R^3 é chamado reflexão em torno da origem. Como mostram as contas acima, a matriz canônica deste operador em R^2 é

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

FONTE: Livro 3, p. 145

Com isso, notamos que o conceito é explorado tanto no seu aspecto objeto como no caráter ferramenta. Além disso, são realizadas as conversões entre os registros numérico, gráfico e simbólico.

No capítulo sobre “Tópicos Adicionais” (Capítulo 9, p. 291), o qual trata de aplicações da Álgebra Linear, há uma seção específica intitulada “Geometria dos Operadores Lineares de R^2”. Apesar de não ser parte integrante do capítulo de estudo das transformações lineares, há, neste contexto, uma grande preocupação em aprofundar o estudo dos operadores lineares no R^2 e de detalhar as transformações entre os diversos registros, sendo a representação gráfica constantemente requerida. Os autores retomam o tratamento das expansões, contrações, reflexões, rotações e cisalhamentos, procurando coordenar o trabalho com os registros gráfico, algébrico e numérico-tabular, fato exemplificado a seguir.

QUADRO 22 – TÓPICOS ADICIONAIS DO LIVRO 3

Expansões e Compressões Se a coordenada x de cada ponto no plano é multiplicada por uma constante positiva k, então o efeito é expandir ou comprimir cada figura plana na direção x. Se 0<k<1, o resultado é uma compressão e se k>1, uma expansão (Figura 9.2.2). Nós chamamos estes operadores de **compressão (ou expansão) pelo fator k na direção de x**.
Analogamente, se a coordenada y de cada ponto é multiplicada por uma constante positiva k, nós obtemos uma **compressão (ou expansão) pelo fator k na direção y**. Pode ser mostrado que expansões e compressões ao longo dos eixos coordenados são transformações lineares.

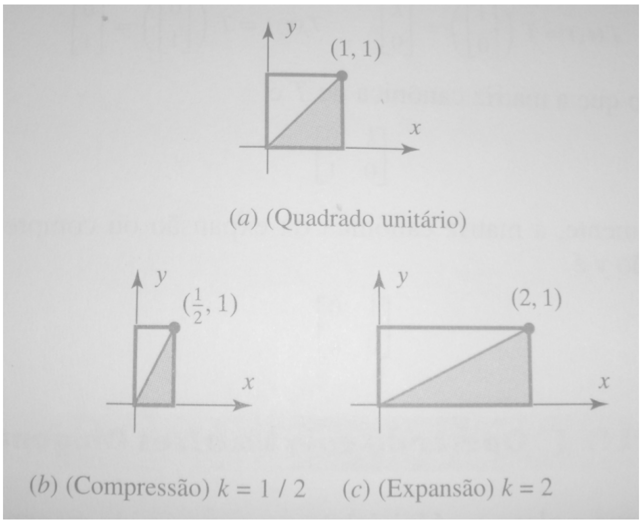


Figura 9.2.2.

Se T: $R^2 \rightarrow R^2$ é uma expansão ou compressão de fator k na direção x, então

$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}k\\0\end{bmatrix}$, $T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ de modo que a matriz canônica de T é $\begin{bmatrix}k & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

Analogamente, a matriz canônica da expansão ou compressão na direção y é

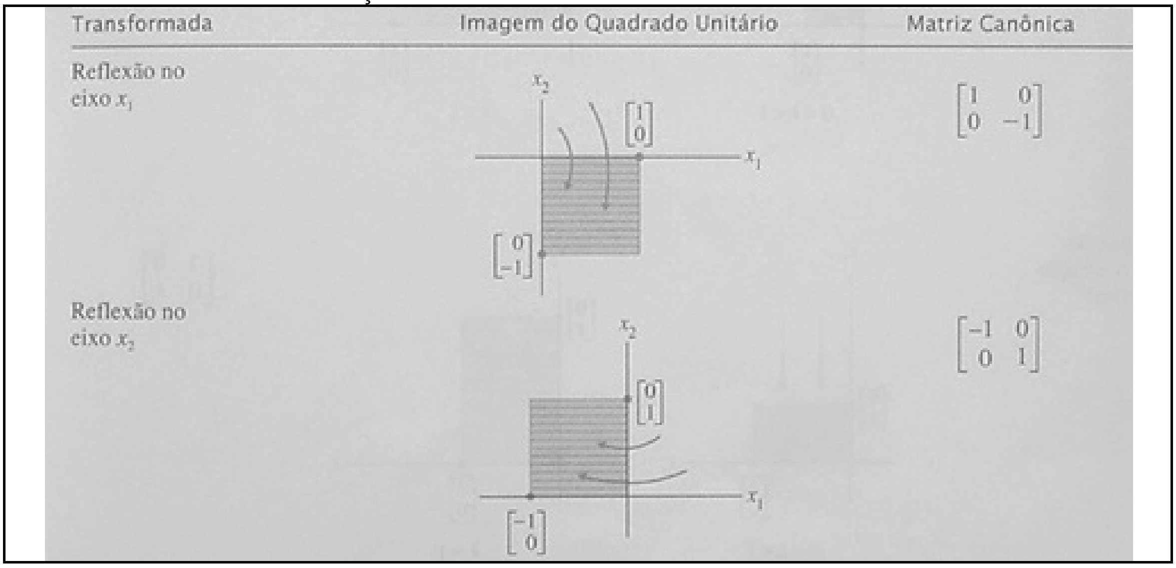
$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & k\end{bmatrix}$

FONTE: Livro 3, p. 295

Ainda neste capítulo, os autores exploram a determinação da matriz, em relação à base canônica, pela composição destas transformações usuais e o efeito geométrico destas operações.

No **Livro 4**, o autor apresenta uma tabela com as transformações lineares geométricas básicas aplicadas em um quadrado unitário. No caso, são apresentadas as seguintes transformações: reflexão nos eixos x e y, reflexões em relação à reta y=-x e em relação à origem, expansões ou contrações horizontais e verticais, cisalhamentos horizontal e vertical e projeções em relação aos eixos x e y. Nesta tabela, ele inclui a representação gráfica e a matriz, em relação à base canônica, de cada transformação, exemplificado a seguir para o caso das reflexões nos eixos x e y.

FIGURA 7 – TRANSFORMAÇÕES LINEARES GEOMÉTRICAS NO PLANO DO LIVRO 4



FONTE: Livro 4, p. 73

Todos os exemplos da tabela são transformações do plano no plano. Somente na introdução ao conceito, o livro aborda uma transformação no R^3, representada pela projeção de um ponto do espaço no plano x0y. Neste exemplo, são trabalhados os registros numérico-tabular, gráfico e simbólico-matricial. Podemos notar que, como nos **Livros 2 e 3,** as conversões são apresentadas de modo finalizado, ou seja, também não se oferece ao estudante a possibilidade de construí-las.

Ressaltamos, neste momento, que no capítulo que trata de matrizes, posterior ao primeiro capítulo das transformações lineares, há um tópico específico sobre as aplicações iniciais das transformações geométricas em Computação Gráfica, via notação matricial. Neste contexto, o autor mostra o efeito do cisalhamento horizontal de fator 0,25, seguido da contração de fator 0,75, na imagem de um objeto, realizando a composição por meio de multiplicação de matrizes. Em seguida, apresenta a necessidade de trabalhar com as coordenadas homogêneas de cada ponto, para que haja compatibilidade, na resolução de composição de transformações, entre o produto das matrizes das transformações lineares com a translação. Este tópico é tratado tanto no plano como no espaço.

3.2.2.3. Introdução ao estudo da matriz de uma transformação linear

O **Livro 1** apresenta a definição de matriz de uma transformação linear $F: U \to V$ em relação a duas bases B e C, de U e V respectivamente, seguida de um exemplo. Neste exemplo, estabelece-se a conversão do registro simbólico-algébrico para o numérico (n-uplas e tabular), conforme apresentado a seguir.

QUADRO 23 – MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR DO LIVRO 1

Qual a matriz de $F: R^3 \to R^2$ dada por $F(x,y,z) = (x+y,\ y+z)$ em relação às bases
$B=\{u_1= (1,0,0);\ u_2=(0,1,0);\ u_3=(0,0,1)\}$ e $C=\{v_1=(1,0);\ v_2=(1,1)\}$?
$F(u_1) = (1,0) = 1v_1+0v_2$
$F(u_2) = (1,1)= 0v_1+1v_2$
$F(u_3) = (0,1) = -v_1+v_2$ (verifique)
Logo, $(F)_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

FONTE: Livro 1, p.134

Em seguida, são apresentados os conceitos de matriz de mudança de base e de determinação de uma transformação linear, dada uma matriz em relação às bases do domínio e do contradomínio. Ainda, é tratada a correspondência entre as operações com transformações lineares e as operações entre suas matrizes. Os registros dominantes, neste tópico são o numérico (tanto na forma tabular como na representação de n-uplas), o simbólico-algébrico e o da língua natural especializada, sendo as conversões mais presentes aquelas desenvolvidas entre os registros simbólico e numérico e do registro da língua especializada para o numérico. O conceito é trabalhado somente no aspecto objeto e não há referências ao uso de ferramenta informática.

No **Livro 2**, na introdução às transformações lineares, foi mencionado o fato dos autores utilizarem a representação simbólico-matricial sem formalizar a relação entre as aplicações lineares e as matrizes. Após o estudo do tópico sobre núcleo e imagem, há uma seção específica sobre esta relação. Inicialmente, os autores apresentam a questão da determinação da transformação linear partindo de uma matriz e de duas bases dadas, conforme ilustrado a seguir.

QUADRO 24 – MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR DO LIVRO 2

Consideremos R^2 e as bases β={(1,0), (0,1)} e β'= {(1,1), (-1,1)} e a matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Queremos associar a esta matriz A uma aplicação linear que depende de A e das bases dadas β e β', isto é,

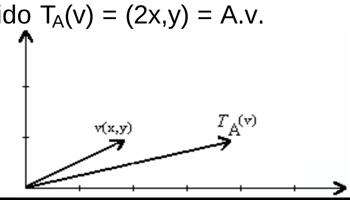
$$T_A : R^2 \to R^2$$
$$v \to T_A(v)$$

Considere v=(x,y).

Seja $X = [v]_b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} = [T_A(v)]_{b'}$.

Então, $T_A(v)$ = 2x(1,1) + y(-1,1) = (2x-y, 2x+y).

Por exemplo, se v=(2,1), então $T_A(2,1)$ = (3,5). Note que se tivéssemos partido de β =β'= {(1,0), (0,1)}, teríamos obtido $T_A(v)$ = (2x,y) = A.v.



FONTE: Livro 2, p. 157

Em seguida, eles mostram como obter a transformação linear associada a uma matriz, bem como o processo inverso, ou seja, a obtenção da matriz associada à transformação linear, fixadas as bases. Na introdução deste conceito, segundo o quadro anterior, a abordagem procura explorar a conversão do registro numérico-tabular para o simbólico e a conversão deste último para o registro gráfico.

Podemos observar que os autores chamam a atenção do leitor para a mudança entre as representações gráficas e algébricas quando as bases são alteradas. Já no momento de apresentar o processo de obtenção da transformação linear ou da determinação da matriz, são tratadas apenas as conversões entre os registros simbólico-algébrico e numérico-tabular. Ainda, são desenvolvidos os conceitos de matriz de mudança de base, a relação entre posto e nulidade com as dimensões da Imagem e do Núcleo, respectivamente, a composição entre transformações obtida através de matrizes e, por fim, a matriz da inversa, tendo esta fase, como representação predominante, a língua natural especializada.

Nesta seção, o conceito é tratado praticamente no seu aspecto objeto, uma vez que somente no momento de exemplificar a composição entre transformações, o livro aborda o conceito no seu aspecto ferramenta. Por fim, a possibilidade de uso de ferramenta informática não é mencionada nesta seção.

Quanto ao **Livro 3**, no primeiro capítulo que trata das transformações, pôde-se observar que a própria definição já era expressa na forma matricial e o conceito de matriz canônica de uma transformação linear despontava naturalmente desta definição. No segundo capítulo deste conteúdo, há uma seção específica para o estudo de matrizes de transformações lineares arbitrárias, em relação a duas bases do domínio e contradomínio respectivamente.

Nesta seção, os registros presentes são o da língua natural especializada, o simbólico (algébrico e matricial) e o numérico, sendo que as conversões mais freqüentes ocorrem entre os registros numérico e algébrico. O conceito é utilizado no seu aspecto objeto e, apesar de os autores ressaltarem o fato do trabalho com matrizes possibilitar o cálculo rápido de imagens de vetores por meio de computadores, não há, na apresentação teórica, qualquer menção ao uso de recurso informático.

Conforme exposto anteriormente, no **Livro 4**, o autor define inicialmente a transformação linear baseado na definição de transformada matricial, ou seja, ele mostra que toda transformação linear T do R^n para o R^m é, na verdade, uma transformação matricial $x \to Ax$, e, consequentemente, todas as propriedades importantes de T estão relacionadas a propriedades conhecidas da matriz A.

No primeiro capítulo que trata deste tema, há um item específico para a matriz de uma transformada linear em relação à base canônica. O livro apresenta o fato de que para determinar a matriz A de uma transformação linear T, basta verificar que T é completamente determinada pela sua ação nas colunas da matriz identidade nxn. Além disso, destaca que o termo “transformada linear” tem por foco a propriedade deste tipo de aplicação, enquanto a transformada matricial descreve como ela é implementada.

A seguir, será apresentado um dos exemplos deste tópico presente nesta obra.

QUADRO 25 – EXEMPLO DE MATRIZ DE UMA TRANSFORMADA LINEAR DO LIVRO 4

Exemplo 1: As colunas de $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Suponha que T seja uma transformada linear do R^2 no R^3 tal que

$T(e_1) = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $T(e_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$. Sem qualquer informação adicional, determine uma fórmula para a imagem de um x arbitrário do R^2.

Solução: Escreva

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1e_1 + x_2e_2$ (1)

Como T é uma transformação linear,

$$T(x) = x_1T(e_1) + x_2T(e_2) = x_1 \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ -7x_1 + 8x_2 \\ 2x_1 + 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

O passo de (1) para (2) explica por que o conhecimento de $T(e_1)$ e $T(e_2)$ é suficiente para determinar T(x) para todo x. Mas ainda, como (2) expressa T(x) como uma combinação linear de vetores, podemos colocar esses vetores nas colunas de uma matriz A e escrever (2) como

$T(x) = [T(e_1) \quad T(e_2)] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Ax$

FONTE: Livro 4, p. 71

Em seguida, o autor demonstra que se T: $R^n \rightarrow R^m$ é uma transformação linear, então existe, e é única, a matriz A tal que T(x) = Ax, para todo x do R^n, sendo a mesma denominada "matriz canônica para a transformada linear T". Por fim, são apresentados mais dois exemplos relacionados com as transformações dilatação e rotação de um ângulo no sentido anti-horário.

Após a definição das transformações lineares em espaços vetoriais quaisquer e da exploração do conceito de base, é feito o estudo da matriz de uma transformação linear em relação a duas bases quaisquer. O livro aborda dois exemplos de determinação de matrizes, sendo o primeiro apresentado a seguir.

QUADRO 26 – EXEMPLO DE MATRIZ DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR DO LIVRO 4

Suponha que $B=\{b_1, b_2\}$ seja uma base para V e $C=\{c_1, c_2, c_3\}$ uma base para W. Seja T: V→W uma transformada linear com a propriedade de que

$T(b_1) = 3c_1 - 2c_2 + 5c_3$ e $T(b_2) = 4c_1 + 7c_2 - c_3$. Determine a matriz M de T relativa a B e C.

Solução: Os vetores das C-coordenadas das imagens de b_1 e b_2 são:

$[T(b_1)]_C = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $[T(b_2)]_C = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$. Portanto, $M = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

FONTE: Livro 4, p. 297

A seguir, apresentaremos a análise dos exercícios propostos por estas obras, tendo por foco a avaliação dos registros e das conversões presentes nos seus enunciados.

3.2.3. Exercícios Propostos

Na análise dos exercícios, com o intuito de facilitar a leitura, serão atribuídos códigos para cada representação, conforme especificado na tabela seguinte.

TABELA 8 – CÓDIGO DAS REPRESENTAÇÕES

REGISTRO	REPRESENTAÇÃO	NOTAÇÃO
Da língua natural	Língua natural em emprego comum (situações- problema)	LN
	Língua natural em emprego especializado	LE
Simbólico	Simbólico-algébrico	SA
	Simbólico-matricial	SM
Numérico	Numérica	N
Gráfico	Gráfica	G

Foram observados os registros presentes nos enunciados de cada questão e o tipo de conversão sugerido explicitamente nos exercícios, a fim de avaliar quais são as conversões mais apontadas pelos livros didáticos no conteúdo das transformações lineares. Por exemplo, na questão "Encontre a matriz canônica do operador linear T definido pela fórmula $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1+3x_2, x_1-x_2)$ (Exercício 5 do Livro 3, p. 146), a conversão foi classificada como uma operação de SA para N (simbólico-algébrico para o numérico), uma vez que a transformação linear é dada pela sua lei algébrica e a questão solicita a determinação da matriz, considerada como representação numérico-tabular.

3.2.3.1. Transformações lineares (exercícios introdutórios)

Na introdução às transformações lineares, o **Livro 1** aborda dois tipos de exercício: ou questões que envolvem demonstrações ou questões de determinação de uma transformação linear partindo das imagens dos elementos de uma base do domínio. Há dez exercícios propostos, sendo que todos envolvem algum tipo de prova. Em duas questões, também há itens que solicitam a determinação da transformação linear. Baseado neste fato pode-se observar que somente o caráter objeto do conceito está sendo explorado.

Além disso, a maior parte dos exercícios é proposta ou no registro da língua natural especializada ou no simbólico-algébrico, direcionando o estudante a efetuar a resolução no interior do sistema semiótico apresentado no enunciado ou explorando conversões limitadas entre estes dois registros, ou ainda, entre eles e o registro numérico na representação de n-uplas.

A seguir, será apresentado um exemplo de enunciado dado no registro da língua natural especializada, cuja resolução envolve tratamentos neste registro e conversões entre ele e o registro simbólico-algébrico.

QUADRO 27 – TRANSFORMAÇÃO LINEAR DEFINIDA DE C EM C

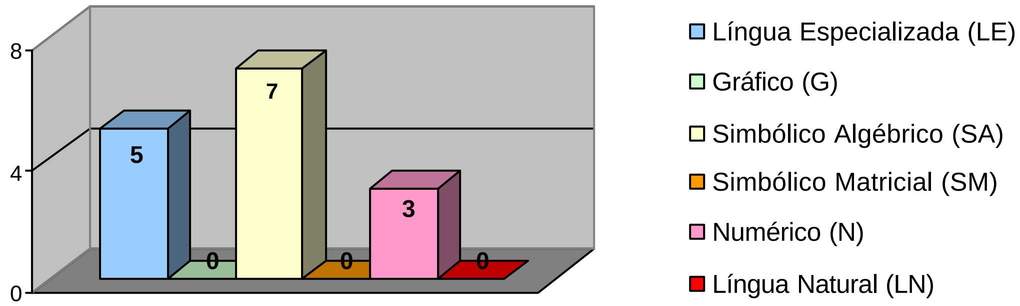
Consideremos o espaço vetorial C sobre R e seja F: C$\rightarrow$C tal que F(z) = $\bar{z}$, $\forall z \in$C. Mostre que F é um operador linear. Se tivéssemos considerado o espaço vetorial C sobre C, seria F ainda um operador linear?

FONTE: Livro 1, p. 110
NOTA: Exercício proposto número 3.

É evidente a preocupação dos autores em inserir, no final do bloco, questões formuladas no registro da língua natural especializada, relacionadas às transformações lineares em espaços vetoriais genéricos, valorizando desenvolvimentos que envolvem tratamentos no interior deste registro.

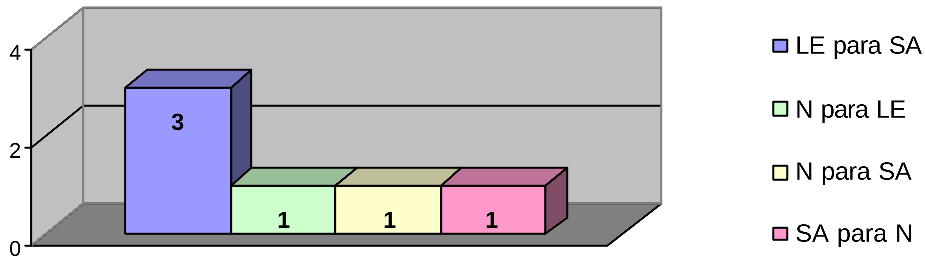
Os gráficos, a seguir, apresentam a tabulação dos registros presentes e das conversões apontadas explicitamente nos exercícios do bloco relativo à introdução do conceito do **Livro 1.**

GRÁFICO 1 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO – LIVRO 1



NOTA: Total de 10 exercícios propostos.

GRÁFICO 2 – CONVERSÃO INDICADA EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO – LIVRO 1



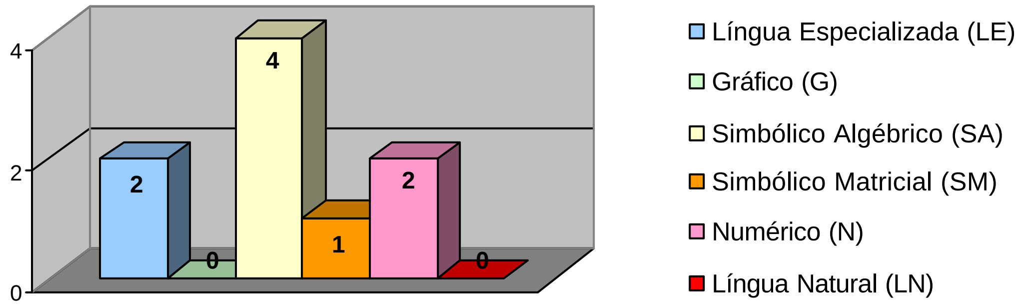
NOTA: Total de 10 exercícios propostos.

Neste bloco de exercícios, o conceito só é trabalhado no seu aspecto objeto e, comparando com a abordagem da parte teórica das transformações lineares desta obra, observa-se que os mesmos registros presentes na teoria são aqueles requeridos nos exercícios.

O **Livro 2** apresenta cinco exercícios propostos relacionados à introdução do conceito, sendo três de prova e dois de determinação de uma transformação linear. Nestes, são apresentados os registros da língua natural especializada, numérico e simbólico (algébrico e matricial), porém, a representação simbólico-algébrica é a predominante. Há pouca exploração de conversões, sendo a maior parte relacionada às transformações do registro numérico para o simbólico-algébrico. Nesta seção, somente o aspecto objeto do conceito é explorado.

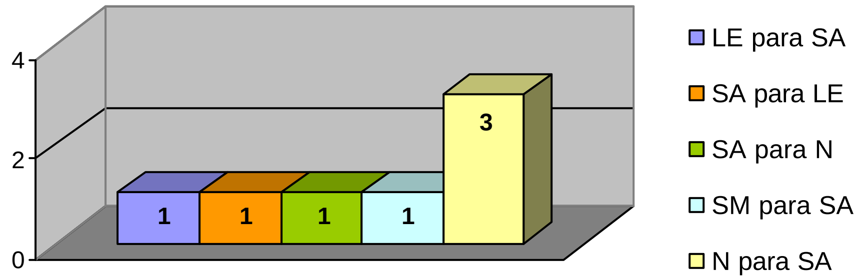
Os gráficos, a seguir, apresentam a tabulação dos registros presentes e das conversões apontadas explicitamente nas questões desta introdução ao conceito do **Livro 2**.

GRÁFICO 3 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO – LIVRO 2



NOTA: Total de 5 exercícios propostos.

GRÁFICO 4 – TRATAMENTO (COM MUDANÇA DE REPRESENTAÇÃO) E CONVERSÃO INDICADOS EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO – LIVRO 2



NOTA: Total de 5 exercícios propostos.

No **Livro 3**, tanto na seção de exercícios do primeiro capítulo das transformações, como na relação proposta no segundo capítulo, as questões são formuladas principalmente no registro simbólico-algébrico. As conversões são desenvolvidas de forma significativa, porém, principalmente realizadas entre os registros simbólico-algébrico e numérico, tanto no primeiro como no segundo capítulos. A seguir, será apresentado um exemplo de enunciado presente no primeiro capítulo que envolve este tipo de conversão.

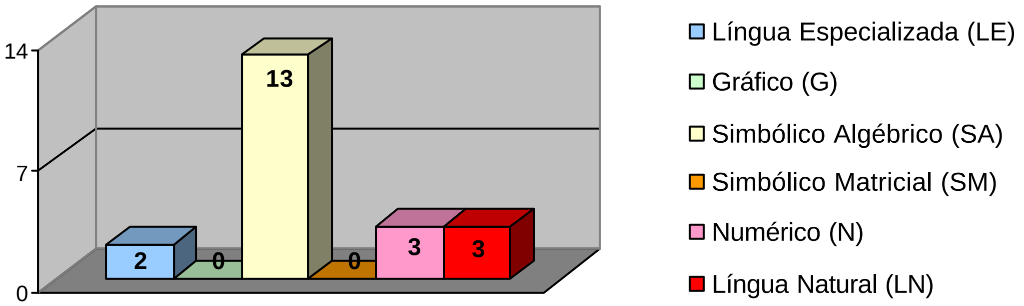
QUADRO 28 – EXERCÍCIO DE INTRODUÇÃO ÀS TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Encontre a matriz canônica do operador linear T definido pela fórmula. a) $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1+3x_2, x_1-x_2)$

FONTE: Livro 3, p. 146
NOTA: Item “a” do exercício número 5.

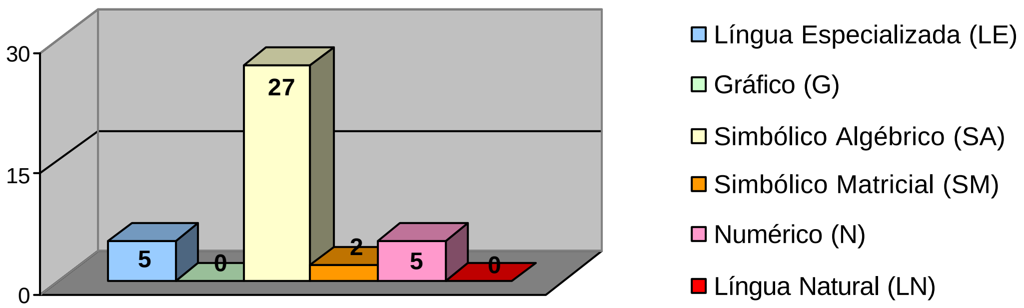
Os gráficos, a seguir, apresentam a tabulação dos registros presentes e das conversões apontadas explicitamente nas questões relativas à introdução ao conceito, nos dois capítulos do **Livro 3** que tratam das transformações lineares.

GRÁFICO 5 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO – LIVRO 3



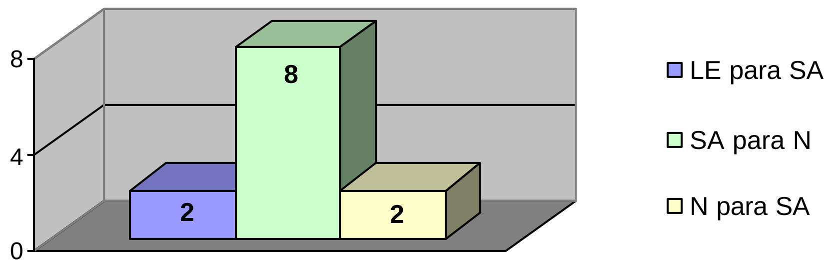
NOTA: Total de 18 exercícios propostos no primeiro capítulo.

GRÁFICO 6 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO – LIVRO 3



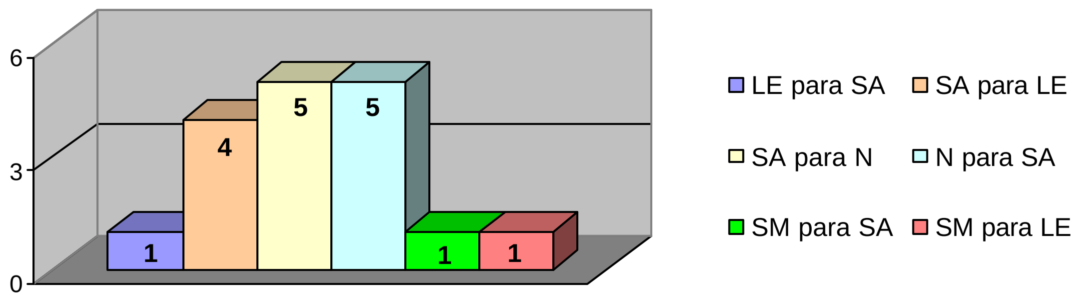
NOTA: Total de 33 exercícios propostos no segundo capítulo.

GRÁFICO 7 – CONVERSÃO INDICADA EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO – LIVRO 3



NOTA: Total de 18 exercícios propostos no primeiro capítulo.

GRÁFICO 8 – TRATAMENTO (COM MUDANÇA DE REPRESENTAÇÃO) E CONVERSÃO INDICADOS EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO – LIVRO 3



NOTA: Total de 33 exercícios propostos no segundo capítulo.

Das conversões estabelecidas no primeiro capítulo, apenas uma envolve o registro numérico-tabular. Já no segundo capítulo desta obra, não há conversões que envolvam este registro. No primeiro capítulo, quatorze exercícios são desenvolvidos no seu aspecto objeto e quatro questões são tratadas no seu aspecto ferramenta. Já no segundo capítulo, todos exploram apenas o aspecto objeto do conceito. Em nenhum dos dois capítulos há exercícios com proposta de uso de algum *software* matemático.

O **Livro 4** apresenta cinqüenta e um exercícios referentes à introdução ao conceito. A representação privilegiada é a que envolve matriz, tendo em vista que vinte e duas questões são formuladas no registro numérico-tabular e sete no simbólico-matricial. Além disso, o registro da língua natural especializada também ocorre com uma freqüência significativa. A maior parte das conversões envolve os registros numérico e simbólico-matricial, afirmação ilustrada com o exemplo seguinte.

QUADRO 29 – EXERCÍCIO NÚMERO 2 PROPOSTO NO LIVRO 4

Sejam $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$, $u=\begin{bmatrix}1\\0\\-3\end{bmatrix}$ e $v=\begin{bmatrix}5\\-1\\4\end{bmatrix}$ Defina T: $R^3 \to R^3$ por T(x) = Ax. Calcule T(u) e T(v).

FONTE: Exercício número 2 do Livro 4, p. 68

Apesar de o livro não conter, neste bloco, questões formuladas no registro gráfico, há doze conversões que o envolvem. A seguir, será apresentada uma questão que propõe conversões do registro numérico-tabular para o gráfico e deste para a língua natural de emprego comum.

QUADRO 30 – EXERCÍCIO NÚMERO 13 PROPOSTO NO LIVRO 4

Sejam $A=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$, $u=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ e $v=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$. Seja T(x) = Ax para todo x do R^2. num sistema de coordenadas retangulares, represente graficamente os vetores u, v, T(u) e T(v). Dê uma descrição geométrica do efeito da aplicação de T num vetor do R^2.

FONTE: Exercício número 13 do Livro 4, p. 69

O autor também desenvolve questões de imagens geométricas por meio de transformações lineares, porém, estas são formuladas na língua natural de uso comum ou na língua natural de emprego especializado, envolvendo conversões entre elas e o registro simbólico-algébrico. Não há qualquer indicação ao uso de representações gráficas neste tipo de questão, conforme exemplificado a seguir.

QUADRO 31 – EXERCÍCIO NÚMERO 26 PROPOSTO NO LIVRO 4

Sejam u, v vetores do R^3 linearmente independentes, e seja P o plano por u, v e 0. A equação paramétrica de P é x=su+tv (com s,t em R). Mostre que uma transformada linear T: $R^3 \rightarrow R^3$ transforma P num plano por 0, ou numa reta por 0, ou apenas na origem do R^3. O que precisa acontecer com T(u) e T(v) para que a imagem do plano P seja um plano?

FONTE: Exercício número 26 do Livro 4, p. 70

Por fim, há quatro exercícios formulados no registro numérico-tabular que indicam o uso de *software* algébrico. Cabe destacar que esta ferramenta assume o papel exclusivo de facilitador de cálculos. Não há indicação de uso de *software* para fins geométricos. Para ilustrar tal afirmação, será apresentado, a seguir, um exercício com a sugestão de uso de recurso computacional. Tal uso é indicado pelo autor por [M], símbolo presente no início do enunciado do exercício.

QUADRO 32 – EXERCÍCIO NÚMERO 35 PROPOSTO NO LIVRO 4

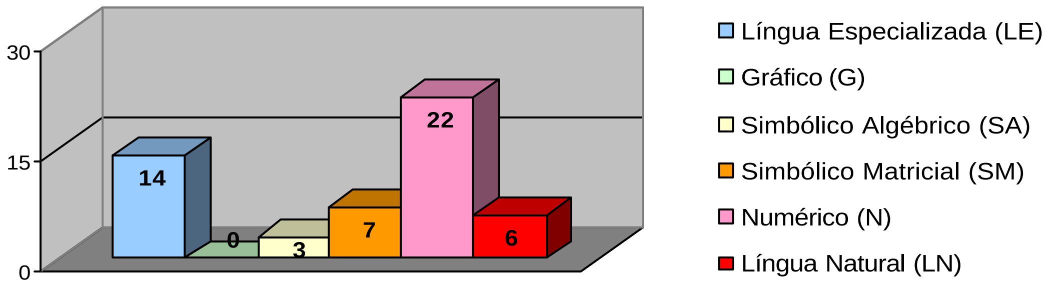
[M] A matriz dada determina uma transformação linear T. Determine todos os x tais que T(x) = 0

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 10 & 9 \\ 7 & -5 & 6 & -7 \\ -5 & 4 & -2 & 2 \\ 8 & -9 & 7 & 15 \end{bmatrix}$$

FONTE: Exercício número 35 do Livro 4, p. 70

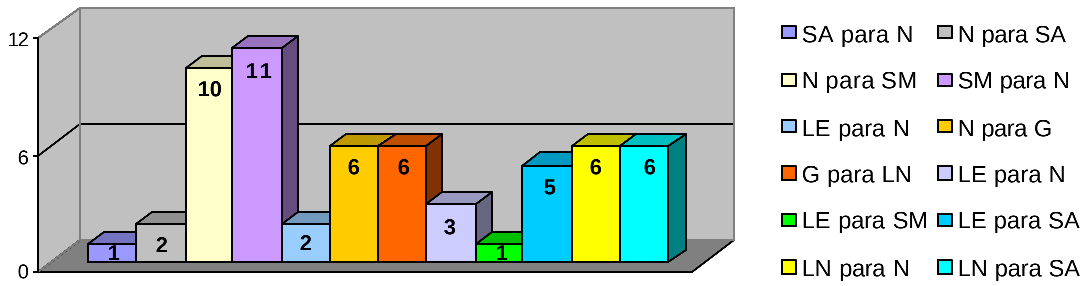
Os gráficos, a seguir, apresentam a tabulação dos registros presentes e das conversões apontadas explicitamente nas questões relativas à introdução ao conceito, nos dois capítulos que tratam das transformações lineares do **Livro 4**.

GRÁFICO 9 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO – LIVRO 4



NOTA: Total de 51 exercícios propostos.

GRÁFICO 10 – CONVERSÃO INDICADA EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO – LIVRO 4



NOTA: Total de 51 exercícios propostos.

3.2.3.2. Transformações geométricas no plano e no espaço

No **Livro 1**, não há exercícios a respeito das transformações no plano ou no espaço. Já no **Livro 2**, há nove exercícios deste tópico, sendo cinco relacionados com transformações do plano no plano e quatro com transformações no espaço, todos exigindo a determinação da aplicação a partir do registro da língua natural. Não há, na maioria das questões, qualquer solicitação para que o aluno represente graficamente esta transformação, sendo que todas as respostas apresentadas no final do capítulo são dadas exclusivamente nos registros simbólico ou numérico. Foi observado, também, que vários exercícios formulados com enfoque geométrico não tornam necessário o uso de representação gráfica, uma vez que a lei algébrica da transformação está presente na parte teórica da obra. Ainda nesta seção, são apresentados dois problemas, nos quais as transformações lineares são tratadas no seu aspecto ferramenta, fato exemplificado no quadro seguinte.

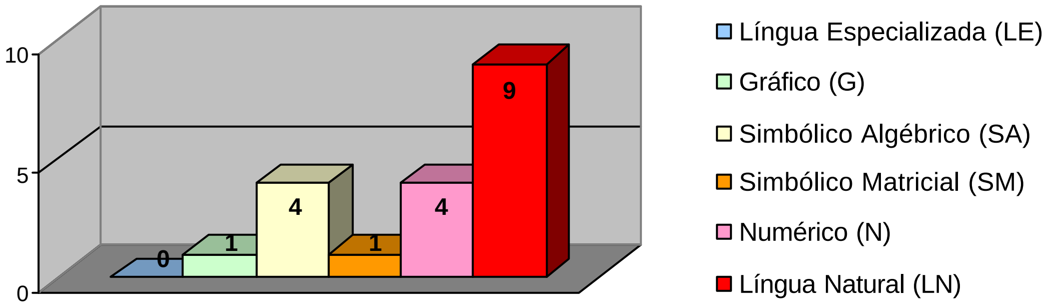
QUADRO 33 – PROBLEMA DE APLICAÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Um espelho plano está apoiado em uma parede vertical formando um ângulo de 30^o com ela. Se um feixe de luz de raios paralelos for emitido verticalmente (do teto para o chão), determine a direção dos raios refletidos.

Fonte: Livro 2, p. 175

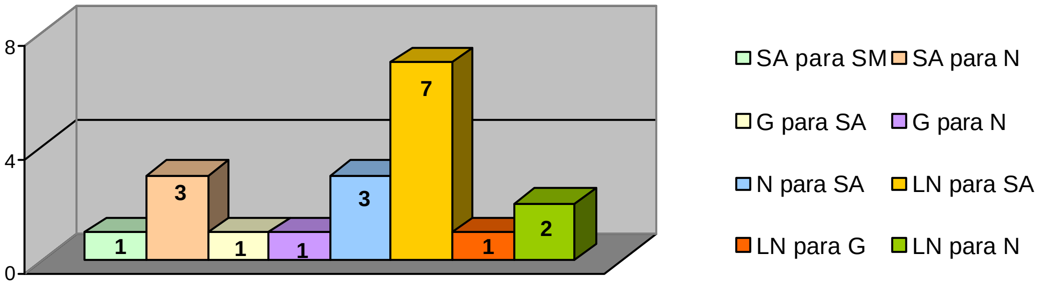
A seguir, serão apresentados os gráficos com a tabulação dos registros presentes e das conversões apontadas explicitamente nos enunciados desta seção do **Livro 2**.

GRÁFICO 11 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO – LIVRO 2



NOTA: Total de 9 exercícios propostos.

GRÁFICO 12 – TRATAMENTO (COM MUDANÇA DE REPRESENTAÇÃO) E CONVERSÃO INDICADOS EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO – LIVRO 2



NOTA: Total de 9 exercícios propostos.

Dos quatro exercícios propostos no registro numérico, três são tabulares e as conversões ocorrem do numérico-tabular para o simbólico-algébrico. Todos os exercícios são representados por problemas formulados na língua natural, sendo que as transformações lineares tomam o papel de ferramenta de resolução destas questões.

O primeiro capítulo do **Livro 3** trata das transformações em espaços Euclidianos. Na seção de exercícios deste capítulo, há uma grande exploração de registros. São propostos vinte e seis exercícios, sendo a maior parte definida no registro da língua natural. Da mesma forma que observado no **Livro 2**, o registro gráfico é pouco trabalhado explicitamente, pois, apesar de os enunciados dos exercícios envolverem questões de reflexões, rotações, dilatações e composições entre estas transformações, é possível resolvê-los, em sua maioria, utilizando apenas substituições nas fórmulas desenvolvidas no registro simbólico, as quais estão presentes na parte teórica, conforme apresentado no quadro seguinte.

QUADRO 34 – EXERCÍCIO DE REFLEXÃO DE UM VETOR EM TORNO DO EIXO X

Use multiplicação matricial para encontrar a reflexão de (-1,2) em torno (a) do eixo x

FONTE: Livro 3, p. 146
NOTA: Item "a" do exercício número 8.

O aluno não necessita utilizar qualquer recurso geométrico, tendo em vista que, na parte teórica (p. 139), é dada a matriz desta transformação em relação à base canônica. Somente em três questões, propostas no final do bloco de exercícios há no enunciado a solicitação explícita da análise do efeito geométrico de uma transformação, conforme exemplificado a seguir.

QUADRO 35 – EFEITO GEOMÉTRICO DO PRODUTO DE UM VETOR POR UMA MATRIZ

Descreva em palavras o efeito geométrico de multiplicar um vetor x pela matriz A $a)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

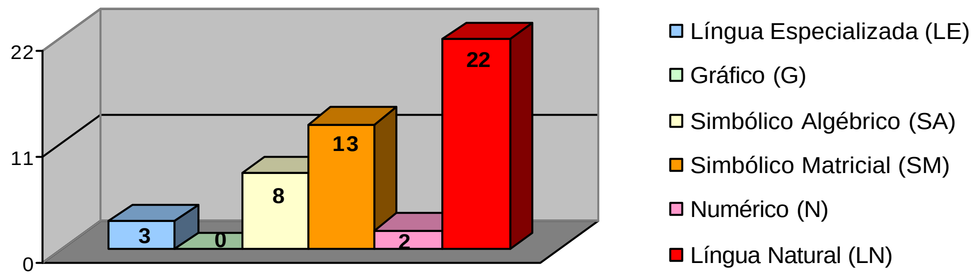
FONTE: Livro 3, p. 148
NOTA: Item "a" do exercício número 29.

Neste caso, o exercício está formulado nos registros da língua natural e numérico-tabular, sendo provável que o aluno "experimente" analisar no plano, o que ocorre com a imagem de um vetor qualquer, para, em seguida, concluir o efeito geométrico de tal transformação.

Ainda, não há qualquer questão formulada no registro gráfico e, conseqüentemente, não se estabelecem conversões que partem deste tipo de representação. Por fim, os dois exercícios propostos no registro numérico são formulados na representação tabular. Nesta seção, todas as conversões que envolvem o registro numérico são transformações que incluem a representação tabular.

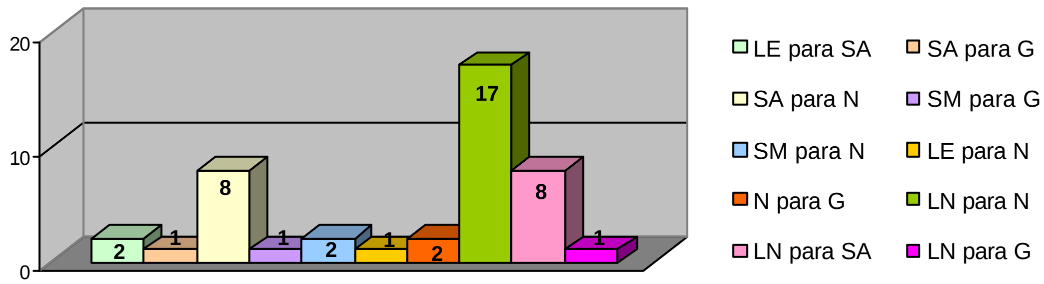
A seguir, serão apresentados os gráficos com a tabulação dos registros presentes e das conversões solicitadas explicitamente nas questões desta seção do **Livro 3**.

GRÁFICO 13 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO – LIVRO 3



NOTA: Total de 26 exercícios propostos.

GRÁFICO 14 – CONVERSÃO INDICADA EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO – LIVRO 3



NOTA: Total de 26 exercícios propostos.

Dos vinte e seis exercícios propostos, vinte e dois são problemas em que as transformações lineares assumem o papel de ferramenta de resolução. Nesta seção, há um único exercício de transformação no espaço proposto com o uso de um recurso computacional tipificado por um *software* algébrico, o qual explora apenas a habilidade de representar, no registro numérico-tabular, a composição de transformações lineares, conforme apresentado a seguir.

QUADRO 36 – EXERCÍCIO COMPUTACIONAL DA SEÇÃO 4.2 DO LIVRO 3

(Rotações) Encontre a matriz canônica do operador linear em R^3 que efetua uma rotação anti-horária de 45^o em torno do eixo x, seguida de uma rotação anti-horária de 60^o em torno do eixo y seguida de uma rotação anti-horária de 30^o em torno do eixo z. Em seguida, obtenha a imagem do ponto (1,1,1) por este operador.

FONTE: Livro 3, p. 156

Este exercício não requer a representação gráfica da situação, mas sim o uso do *software* como meio para obter o resultado com maior rapidez. Como as representações simbólico-matriciais de cada rotação são dadas na exposição teórica desta obra, cabe ao estudante apenas consultá-las, determinando o produto de três matrizes e o cálculo da imagem do ponto (1,1,1) por produto matricial.

No segundo capítulo que trata das transformações lineares em espaços genéricos, só há um exercício que envolve as transformações no espaço, tendo em vista que o objetivo deste capítulo era trabalhar com as transformações lineares definidas em espaços genéricos. Este exercício, que trata do conceito no seu aspecto objeto, é formulado no registro da língua natural, e a sua resolução aponta para uma conversão que parte desta representação para a simbólico-algébrica.

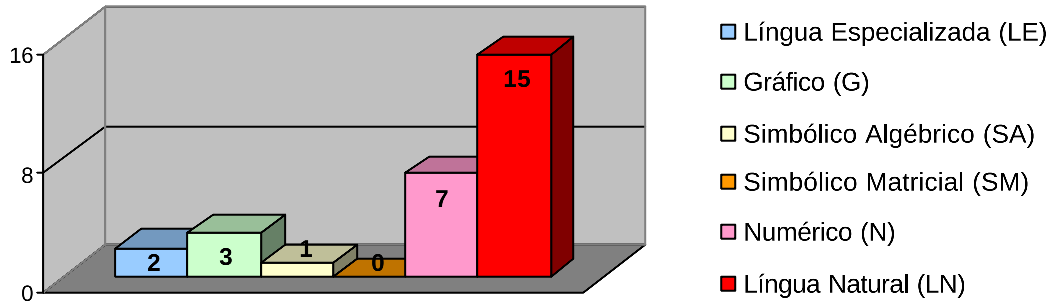
No capítulo de "Tópicos adicionais", os exercícios das transformações geométricas já são formulados de modo a explorar mais a coordenação de registros, sendo a língua natural e o numérico-tabular os registros mais utilizados na formulação das questões. Há um total de vinte e três exercícios que tratam das transformações lineares no plano e no espaço, sendo o registro gráfico um pouco mais explorado neste capítulo adicional do que no que introduz a teoria.

De trinta e quatro conversões, vinte e quatro envolvem o registro numérico-tabular e quinze envolvem o gráfico. Destas quinze, apenas cinco partem do registro de representação gráfica. Ainda assim, estas conversões são realizadas apenas do gráfico para o numérico-tabular, nas questões que solicitam a matriz da transformação linear em relação à base canônica. Ressaltamos, novamente, que as matrizes são dadas na exposição teórica e, desta forma, não se exige do estudante uma coordenação efetiva destes registros.

Pôde-se também notar que, apesar de esta obra explorar mais o registro gráfico se comparada com as demais, ainda não há, na sua abordagem, uma preocupação em explorar a heterogeneidade da congruência nos sentidos contrários de conversão.

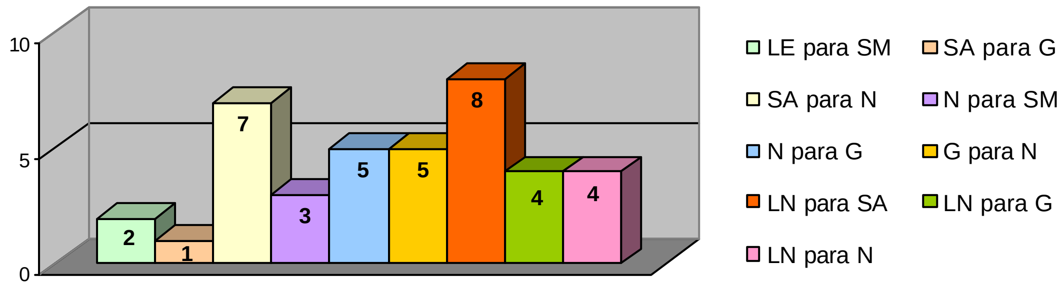
A seguir, serão apresentados os gráficos com a tabulação dos registros presentes e das conversões apontadas explicitamente no enunciado desta seção do **Livro 3**.

GRÁFICO 15 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO – LIVRO 3



NOTA: Total de 23 exercícios propostos.

GRÁFICO 16 – CONVERSÃO INDICADA EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO – LIVRO 3



NOTA: Total de 23 exercícios propostos.

Por fim, dos vinte e três exercícios, dezenove são tratados no aspecto ferramenta e nenhum é desenvolvido com a utilização de *software* matemático.

Quanto ao **Livro 4**, considerando que as aplicações em Computação Gráfica estão intimamente ligadas às transformações no plano e no espaço, incluiremos, na análise dos exercícios propostos desta seção, também o bloco de questões referentes a este item.

Na relação de exercícios sobre as transformações lineares geométricas presentes no primeiro capítulo, excluindo as questões sobre Computação Gráfica apresentadas em seção posterior, são propostos onze exercícios, sendo nove de transformações do plano no plano e dois de transformações do espaço no espaço. Dos onze exercícios, seis podem ser resolvidos por substituições nas fórmulas presentes na teoria ou por simples consulta ao resultado presente na abordagem teórica. A seguir, será apresentado um exercício deste tipo.

QUADRO 37 – EXERCÍCIO DE TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA NO ESPAÇO DO LIVRO 4

Determine a matriz canônica de T. T: $R^3 \rightarrow R^3$ projeta cada ponto (x_1, x_2, x_3) verticalmente no plano x_1x_2 (onde $x_3 = 0$)

FONTE: Livro 4, p. 78

Novamente, como a matriz canônica desta projeção é dada na teoria, cabe ao estudante apenas consultá-la. Há quatro exercícios que provavelmente induzirão o estudante a recorrer ao registro gráfico, pois envolvem a composição de transformações que ainda não foram exploradas pelo livro. A seguir, será apresentada uma questão deste tipo.

QUADRO 38 – EXERCÍCIO DE COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DO LIVRO 4

Determine a matriz canônica de T. T: $R^2 \rightarrow R^2$ é uma reflexão com respeito à reta $x_2=x_1$ seguida por uma reflexão no eixo x_1.

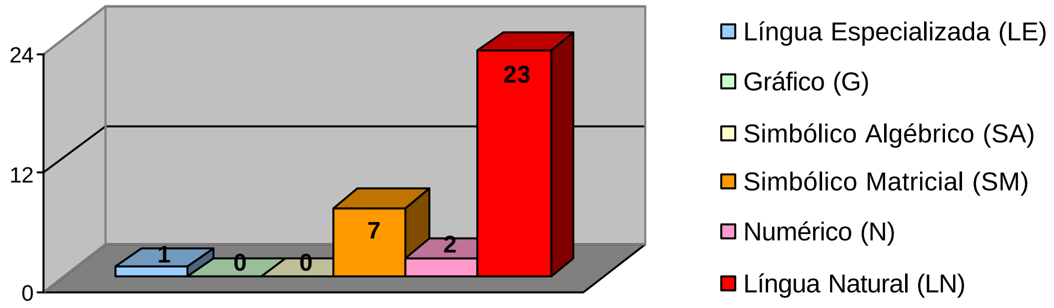
FONTE: Livro 4, p. 78

Neste contexto, o autor apresenta um exercício resolvido deste tipo, oferecendo, como sugestão, a análise do que ocorre com os vetores da base canônica partindo da representação gráfica. Ao tratar de exercícios de aplicação à Computação Gráfica, são propostas vinte e duas questões, sendo treze em língua natural de emprego comum, sete no registro simbólico-algébrico e o restante no numérico. Não há questões formuladas no registro gráfico. Ainda nesta seção, somente um exercício aponta para a conversão envolvendo representação gráfica, no caso, uma conversão do numérico para o gráfico.

Observamos também nesta obra que, embora exista uma exploração maior de registros se comparada com os **Livros 1 e 2**, não há um cuidado do autor em explorar os sentidos de conversão e de analisar a não congruência neste tipo de atividade. Ainda, não há indicações de uso de *software* matemático para a resolução de exercícios no plano e no espaço, apesar de o autor oferecer constantemente sugestões de questões a serem resolvidas com o auxílio de uma ferramenta computacional. Novamente, observa-se que tal ferramenta assume mais um papel de facilitador de cálculos do que de uso exploratório.

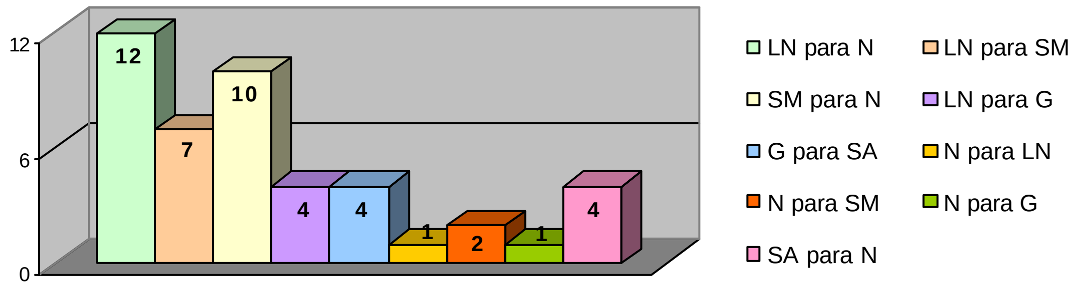
Os gráficos, a seguir, apresentam a tabulação dos registros presentes e das conversões apontadas explicitamente nas questões desta parte do conteúdo do **Livro 4**.

GRÁFICO 17 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO – LIVRO 4



NOTA: Total de 33 exercícios propostos.

GRÁFICO 18 – CONVERSÃO INDICADA EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO – LIVRO 4



NOTA: Total de 33 exercícios propostos.

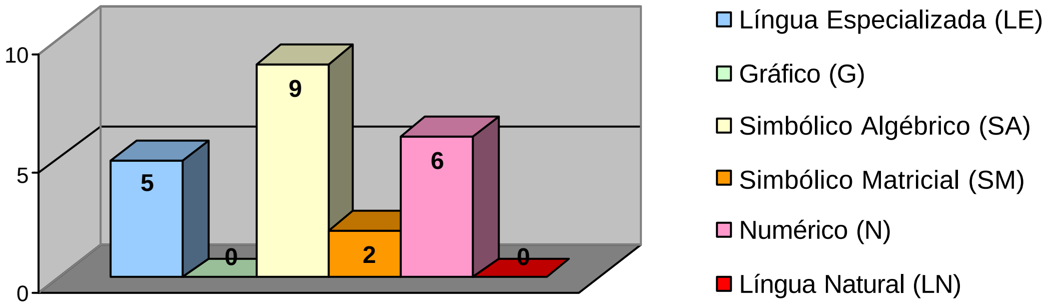
3.2.3.3. Introdução ao estudo da matriz de uma transformação linear

No **Livro 1**, com relação ao tópico de matriz de uma transformação linear, há um total de dezesseis exercícios propostos, tratados exclusivamente no seu aspecto objeto e desenvolvidos nos registros da língua natural especializada, simbólico (algébrico e matricial) e numérico, sendo o registro simbólico-algébrico o predominante. Há dois tipos básicos de exercícios em relação a este conteúdo: o de determinação da matriz de uma transformação linear, dadas uma base do domínio e outra do contradomínio, e o de determinação da transformação linear, dada a matriz e fixadas as bases.

Os autores incluem exercícios que exploram o trabalho com matrizes de transformações lineares em espaços vetoriais diversos, tais como R^2, R^3, $M_2(R)$, $P_2(R)$, $P_3(R)$, além de espaços genéricos. As conversões estão limitadas entre os registros da língua natural especializada, simbólico e numérico. De seis questões propostas no registro numérico, cinco ocorrem na representação tabular, porém estas conversões estão limitadas entre os registros numérico-tabular e simbólico.

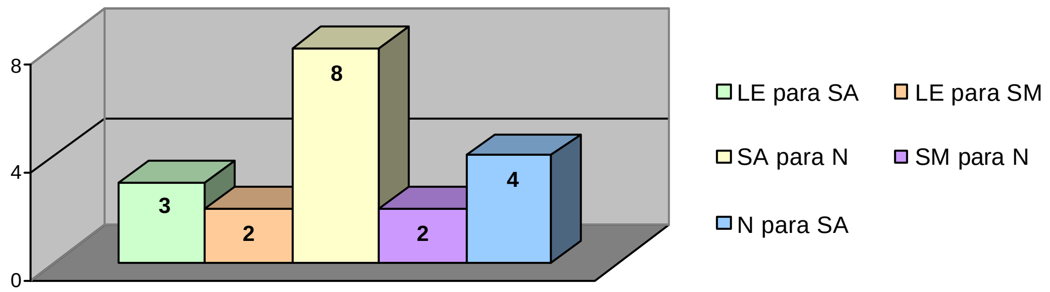
A seguir, serão apresentados os gráficos com a tabulação dos registros presentes e das conversões solicitadas explicitamente nas questões desta seção do **Livro 1**.

GRÁFICO 19 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO – LIVRO 1



NOTA: Total de 16 exercícios propostos.

GRÁFICO 20 – CONVERSÃO INDICADA EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO – LIVRO 1

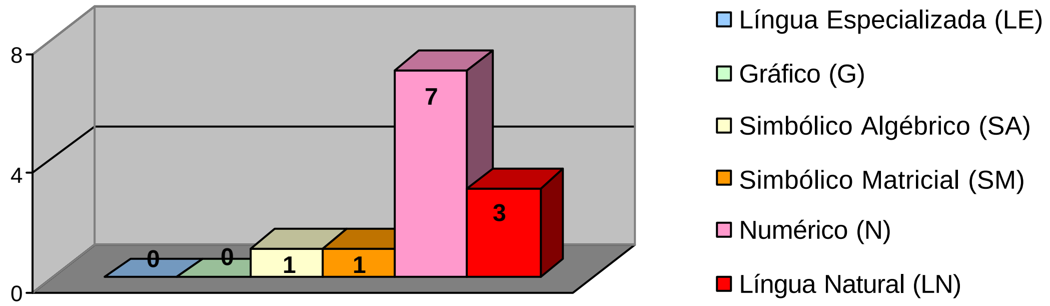


NOTA: Total de 16 exercícios propostos.

O **Livro 2** apresenta dez exercícios sobre este tópico, enunciados nos registros da língua natural, numérico e simbólico, sendo o numérico o predominante. As conversões mais requeridas são aquelas que envolvem os registros numérico e simbólico-algébrico. Apesar dos autores incluírem o registro gráfico na teoria relacionada a esta seção, não há qualquer exercício que solicite a utilização deste tipo de representação. Os exercícios contêm transformações lineares definidas nos espaços vetoriais R^2, R^3, $M_2(R)$, ou seja, não há, como no **Livro 1**, a preocupação de explorar questões em espaços genéricos.

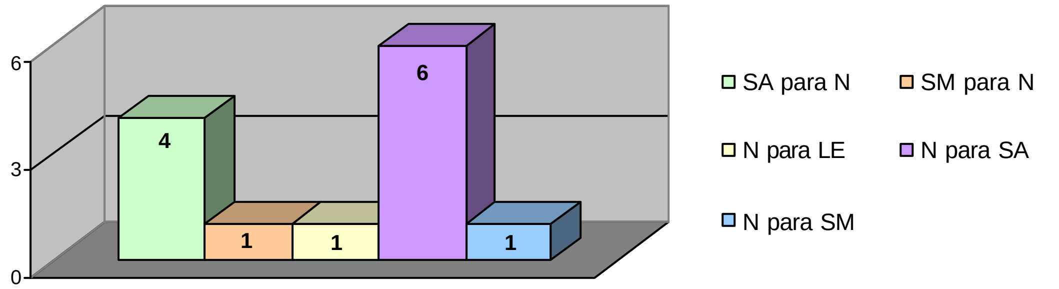
A maior parte dos exercícios deste tópico privilegia o aspecto objeto do conteúdo, porém, há três exercícios que relacionam matrizes com um problema de transformação no espaço. Os gráficos, a seguir, apresentam a tabulação dos registros presentes e das conversões solicitadas explicitamente nos enunciados das questões desta seção do **Livro 2**.

GRÁFICO 21 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO – LIVRO 2



NOTA: Total de 10 exercícios propostos.

GRÁFICO 22 – CONVERSÃO INDICADA EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO – LIVRO 2



NOTA: Total de 10 exercícios propostos.

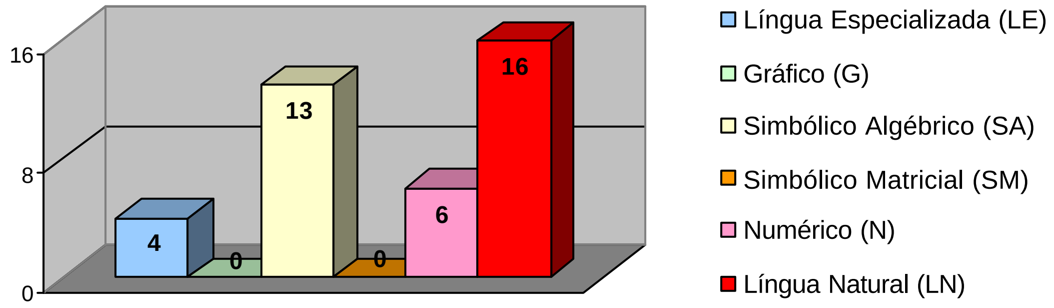
Todos os exercícios propostos no registro numérico aparecem na forma tabular e as conversões que envolvem este registro também ocorrem com este tipo de representação.

Quanto ao **Livro 3**, no primeiro capítulo que trata das transformações, a representação tabular assume um papel de destaque nos exercícios. Porém, como foi abordado na parte teórica, nesta fase só é tratada a matriz de uma transformação linear em relação à base canônica. Os registros presentes são o da língua natural especializada, o simbólico-algébrico, o numérico e o da língua natural, sendo que há uma grande exploração de conversões, como poderá ser constatado no gráfico desta seção.

No segundo capítulo que trata das transformações lineares, há um tópico específico intitulado “Matrizes de Transformações Lineares Arbitrárias”, com um total de vinte e dois exercícios formulados nos registros da língua natural especializada, simbólico-algébrico, simbólico-matricial, da língua natural e numérico tabular. As conversões ocorrem principalmente entre os registros simbólico-algébrico e numérico-tabular.

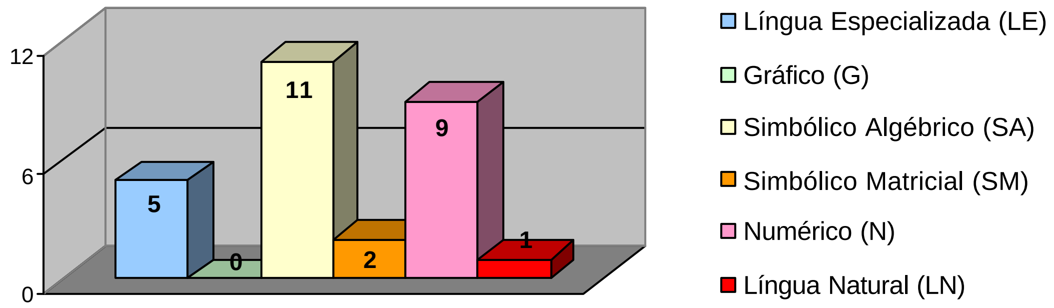
Os gráficos, a seguir, contêm a tabulação dos registros presentes e das conversões solicitadas explicitamente no enunciado dos exercícios desta seção do **Livro 3**.

GRÁFICO 23 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO – LIVRO 3



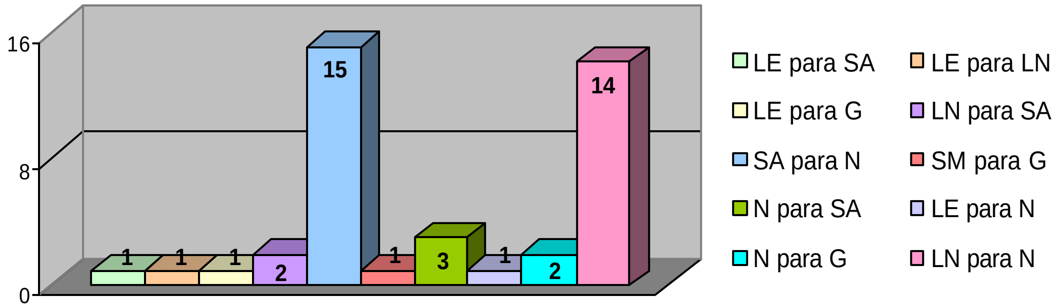
NOTA: Total de 40 exercícios propostos no primeiro capítulo.

GRÁFICO 24 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO – LIVRO 3



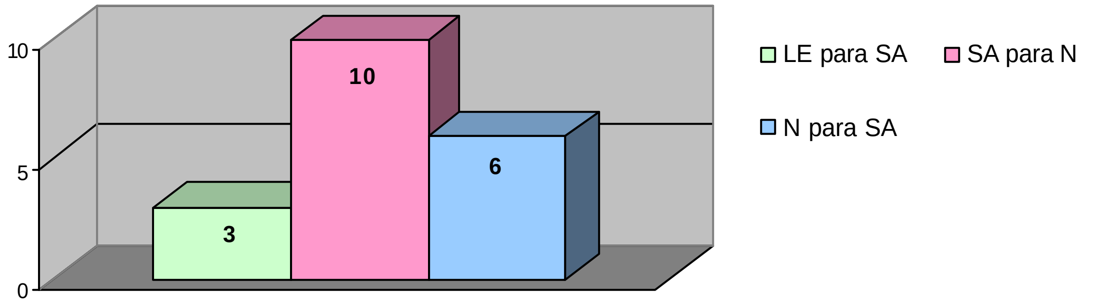
NOTA: Total de 22 exercícios propostos no segundo capítulo.

GRÁFICO 25 – TRATAMENTO (COM MUDANÇA DE REPRESENTAÇÃO) E CONVERSÃO INDICADOS EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO – LIVRO 3



NOTA: Total de 40 exercícios propostos no primeiro capítulo.

GRÁFICO 26 – CONVERSÃO INDICADA EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO – LIVRO 3



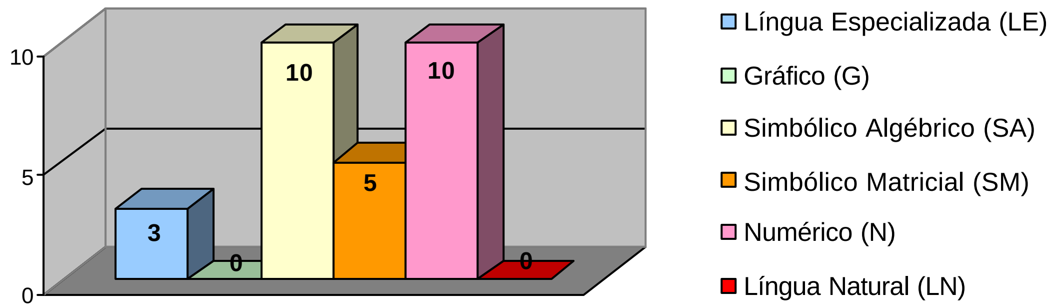
NOTA: Total de 22 exercícios propostos no segundo capítulo.

No primeiro capítulo, vinte e três exercícios tratam o conteúdo no seu aspecto ferramenta. Já no segundo capítulo, todos os exercícios são tratados no aspecto objeto. Somente no primeiro capítulo ocorre menção ao uso de recurso computacional do tipo *software* algébrico, mas em apenas uma questão.

O **Livro 4** apresenta vinte e oito exercícios a respeito de matriz de uma transformação linear, sendo a maioria formulada nos registros simbólico-algébrico e numérico-tabular. No gráfico a seguir, pode-se notar que as conversões são praticamente realizadas entre os registros simbólico (algébrico e matricial) e numérico. Há apenas um exercício com a indicação de uso de recurso computacional, novamente com o objetivo de reduzir o trabalho com os cálculos numéricos. Por fim, foi verificado que nesta seção, todos os exercícios são tratados no seu aspecto objeto.

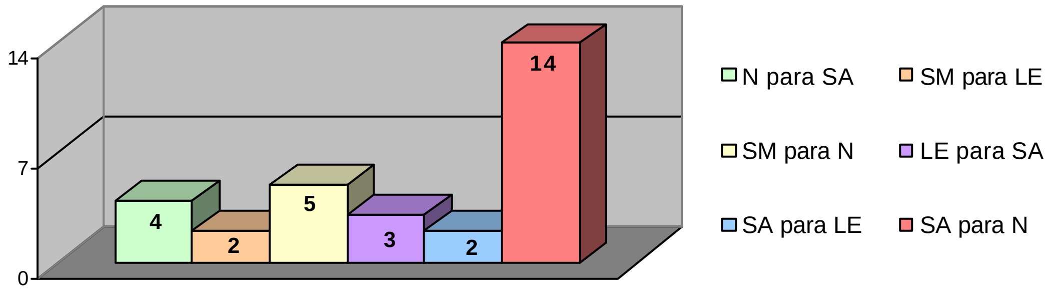
Os gráficos, a seguir, apresentam a tabulação dos registros presentes e das conversões indicadas explicitamente nas questões desta parte do conteúdo do **Livro 4**.

GRÁFICO 27 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO – LIVRO 4



NOTA: Total de 28 exercícios propostos.

GRÁFICO 28 – CONVERSÃO INDICADA EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO – LIVRO 4



NOTA: Total de 28 exercícios propostos.

3.2.4. Conclusões da Análise dos Livros de Álgebra Linear e Comparações com as Pesquisas Analisadas

Na análise dos livros didáticos de Álgebra Linear foram observadas diferenças de abordagem das transformações lineares quanto aos registros presentes, ao desenvolvimento dos aspectos ferramenta e objeto do conceito e ao uso de recursos computacionais.

Cada obra tem a sua particularidade no tratamento deste tema. Apresentando de forma resumida, concluímos que o **Livro 1** privilegia os registros simbólico-algébrico, numérico e da língua natural especializada. A abordagem praticamente não envolve o registro gráfico, tendo em vista que o tópico de transformações geométricas no plano não é sequer desenvolvido. Além disso, o registro da língua natural particularmente utilizada em situações-problema também não está presente nesta obra.

Este livro pouco explora as representações numérico-tabular e simbólico-matricial, a não ser no tópico específico de “Matriz de uma Transformação Linear”. O conceito é tratado somente no seu aspecto objeto e não há menção ao uso de recurso computacional, fato já esperado, tendo em vista a época de publicação desta obra. Os exercícios propostos são desenvolvidos nos mesmos registros abordados na parte teórica, ou seja, formulados principalmente na língua natural especializada ou nos registros simbólico-algébrico e numérico, sendo as conversões envolvidas nas suas resoluções limitadas principalmente entre estes registros.

O **Livro 2** já trata do conteúdo envolvendo os registros da língua natural, gráfico, simbólico, numérico e da língua natural especializada, sendo que nos exercícios propostos, a ocorrência dos dois primeiros fica limitada ao tópico das transformações geométricas do plano no plano e do espaço no espaço. Apesar de as conversões entre estes registros serem realizadas na parte teórica, observamos que as mesmas aparecem finalizadas, ou seja, sem oferecer ao estudante a possibilidade de desenvolvê-las. Notamos, ainda na exposição teórica deste livro, que as conversões tendem a privilegiar um único sentido. Por exemplo, não há conversões realizadas de forma explícita no sentido do registro gráfico para o simbólico, com exceção do caso da rotação de um ângulo θ.

Nos exercícios, as conversões mais requeridas são representadas pelas transformações entre os registros numérico e simbólico-algébrico, entre língua natural e simbólico-algébrico e entre língua natural especializada e simbólico-algébrico. Apesar de o aspecto ferramenta do conceito ser tratado de forma modesta, se comparado ao número de questões que lidam especificamente com o conceito no seu caráter objeto, constatamos uma exploração do uso das transformações lineares como meio de resolução de problemas, tanto no tópico que trata das transformações geométricas no plano e no espaço, como em problemas de ótica. Pelo mesmo motivo do **Livro 1**, a inexistência de indicação de uso de recursos computacionais já era esperada.

O **Livro 3** segue uma abordagem totalmente diferente dos demais. Ele divide a exposição das transformações lineares em dois capítulos, ou seja, realiza todo o estudo das transformações lineares definidas do R^n em R^m em um capítulo e a abordagem das transformações lineares em espaços vetoriais quaisquer em uma seção posterior. Há também um capítulo sobre “Tópicos Adicionais”, que engloba, dentre outros temas, um aprofundamento das transformações geométricas no plano e no espaço. Por fim, há uma parte dedicada às aplicações da Álgebra Linear em outras áreas, sendo que as transformações lineares se apresentam no seu aspecto ferramenta em problemas de computação gráfica, fractais, caos, criptografia, deformações e morfismos.

Nesta obra, a definição inicial de transformação linear não parte das duas condições usuais em relação à soma de vetores e ao produto de um vetor por um escalar real, mas sim, como uma função em que a imagem de um elemento é composta por equações lineares. Esta definição inicial é dada tanto no registro simbólico-algébrico como no numérico-tabular. De todos os livros analisados, este é o que mais explora a diversidade de registros e conversões, apesar de os autores não demonstrarem uma preocupação em explorar os sentidos e a heterogeneidade de congruência da atividade de conversão.

As transformações no plano são mencionadas constantemente para exemplificar conceitos de injetividade, composição de transformações, dentre outros, ou seja, os autores fazem com que o registro gráfico assuma um papel de maior destaque na abordagem deste conceito se comparado com os outros livros analisados. Ainda, tanto na exposição teórica quanto nos exercícios, os registros da língua natural em situações-problema e numérico-tabular são extremamente utilizados. Um aspecto exclusivo deste livro, em relação aos anteriores, é o tratamento, na exposição teórica, das transformações lineares no espaço e, conseqüentemente, do registro gráfico no R^3. Apesar disso, nesta parte da abordagem, ainda notamos uma exposição teórica que não favorece ao estudante o estabelecimento efetivo destas conversões, pois da mesma forma que verificado no **Livro 2**, os registros são apresentados de maneira finalizada.

Já no capítulo intitulado “Tópicos Adicionais”, há um aprofundamento das transformações geométricas no plano e no espaço. Neste contexto, faz-se um detalhamento maior das conversões, oferecendo ao leitor uma abordagem favorável ao entendimento das particularidades de cada tipo de registro. Porém, nos exercícios propostos deste capítulo, apesar de o registro gráfico assumir um papel mais predominante do que no bloco de exercícios dos capítulos anteriores, nota-se que poucas questões são formuladas com representações gráficas e, conseqüentemente, a exploração de conversões que partem do registro gráfico é reduzida. Por fim, quando estas conversões são exploradas, elas restringem-se principalmente em transformações do gráfico para o numérico-tabular e, em vários casos, a matriz envolvida nos exercícios é fornecida na teoria, o que induz o estudante a realizar apenas uma consulta e não uma efetiva coordenação entre estes dois registros.

Os autores demonstram uma grande preocupação em explorar o conceito no seu aspecto ferramenta, uma vez que incluem um capítulo específico para as aplicações das transformações lineares. Apesar de ser uma obra atual, o uso de recurso informático é opcional e pontual, pois está limitado a um bloco restrito apresentado no final da relação de exercícios propostos. Com isso, notamos que a utilização de ferramentas informáticas não é vista como algo essencial por estes autores. Ainda, não há menção ao uso de recurso computacional para fins geométricos, sendo indicada somente a utilização de *software* algébrico, com o objetivo único de minimizar o trabalho com cálculos algébricos e numéricos.

O **Livro 4** também apresenta uma abordagem particular. O autor direciona a sua obra para os cursos de Engenharia e Computação, fato que menciona no prefácio. Em primeiro lugar, ele não reserva um ou mais capítulos específicos para o desenvolvimento das transformações lineares, ou seja, tal conteúdo perpassa por todo o texto, sempre relacionado a outros conceitos. Nesta obra, as transformações lineares do R^n em R^m, bem como as noções de núcleo e imagem estão intimamente conectadas ao conceito de matriz e, deste modo, os registros simbólico-matricial e numérico-tabular são bastante valorizados. Ainda, este livro privilegia o conceito de transformação linear no R^n, pouco explorando questões em espaços vetoriais genéricos. As aplicações em diversas áreas são muito valorizadas, evidenciando a importância de tratar o conceito no seu aspecto ferramenta.

Apesar de o texto apresentar as transformações geométricas de maneira finalizada como nos **Livros 2 e 3**, este livro dedica uma seção específica para a aplicação dessas transformações em Computação Gráfica. Embora o autor mostre uma preocupação em explorar a diversidade de registros, nota-se uma valorização dos registros da língua natural, numérico-tabular e simbólico-matricial em detrimento dos demais. As conversões ocorrem principalmente entre os três registros citados anteriormente, mas há também exploração de operações com outros registros.

Com relação ao registro gráfico, da mesma forma que observado no **Livro 3,** nota-se que não há praticamente questões formuladas neste tipo de representação e, com isso, as conversões que partem do registro gráfico são pouco exploradas. Quando essas ocorrem, as mesmas estão limitadas em transformações para a língua natural de emprego comum ou para o registro simbólico-algébrico.

Tal obra inclui, na seção de exercícios propostos, a indicação de uso de *software* algébrico (*MATLAB*, *Maple*, *Mathematica*, *MathCad*, *Derive* ou calculadora), porém, da mesma forma que o **Livro 3**, a indicação mostra claramente que o objetivo é o de minimizar cálculos. Em nenhum momento há indicações para utilização de ferramenta computacional com fins geométricos ou com o objetivo exploratório que proporcione ao estudante um ambiente favorável à formulação de conjecturas.

Estabelecendo um comparativo entre os livros, pôde-se notar que as duas obras mais referenciadas nos cursos de Álgebra Linear (Livros 1 e 2) não mencionam o uso ou a possibilidade de utilização de recursos computacionais. Este fato era esperado, tendo em vista que tais referências foram editadas pela primeira vez em 1977 e 1978 respectivamente.

Relacionando esta situação com a teoria antropológica de CHEVALLARD (1992) e considerando os livros didáticos como representantes da instituição denotada por “I”, podemos entender que tais textos, quando foram editados, provavelmente estavam coerentes com o tempo institucional “t”. Porém, no tempo “t” atual, com a inserção do computador nos diversos campos da vida, inclusive no educacional, é provável que a limitação de seu uso acarrete na falta de atendimento a certas necessidades de formação demandadas atualmente pela sociedade. Sob este ponto de vista, tais obras, freqüentemente indicadas como referências bibliográficas de cursos da área computacional, podem ser classificadas como desatualizadas quando consideradas nesse aspecto.

As duas obras mais recentes, indicadas por **Livros 3 e 4** e editadas pela primeira vez em 2000 e 1997 respectivamente, já incluem em suas abordagens a sugestão de uso de recursos computacionais no conteúdo das transformações lineares. Os *software*s algébricos mencionados são o *MATLAB*, o *Mathematica*, o *Maple* e calculadoras com funcionalidade de Álgebra Linear. Mesmo assim, o uso da ferramenta informática é pontual, ou seja, a abordagem teórica não inclui efetivamente o trabalho com tais *software*s, sendo apenas mencionada a possibilidade de sua utilização em caráter opcional, em um número reduzido de exercícios. Por fim, como já foi citado, nota-se que nestes dois livros, o uso dessa ferramenta está direcionado ao objetivo de minimização do trabalho com os cálculos algébricos e numéricos, e não em questões exploratórias ou gráficas.

Com relação a todas as obras analisadas, foi observado que, dentre os registros apresentados, o gráfico é o menos explorado, bem como as conversões que o envolvem. O **Livro 1**, apesar de o prefácio garantir que a sua abordagem emerge da Geometria de duas e três dimensões, praticamente não explora este registro, sendo as transformações lineares geométricas sequer citadas. O **Livro 2** inclui representações gráficas na teoria, porém, no bloco de exercícios, a maior parte das questões é proposta de forma a não torná-lo necessário. Já a análise dos **Livros 3 e 4** evidenciou um resgate da Geometria, ainda que modesto, no momento em que apresentaram uma exploração mais significativa das transformações lineares geométricas no plano e no espaço e, conseqüentemente, das representações gráficas. Ainda assim, nota-se que as conversões que partem do registro gráfico são pouco exploradas e não há qualquer indicação de uso de *software* para fins geométricos. Por fim, nenhuma obra mostrou a preocupação em explorar os sentidos de conversão e a não congruência deste tipo de atividade.

DUVAL (2000) afirma que, nos níveis mais avançados de ensino, há predominância de registros monofuncionais discursivos. Este fato foi constatado em nosso estudo, tendo em vista que os registros simbólico e numérico são os mais explorados em todos os livros analisados. Apesar disso, o mesmo autor afirma que o progresso do conhecimento é acompanhado pelo desenvolvimento de novos sistemas semióticos específicos, sendo tal evidência observada pela evolução dos livros didáticos com relação a este aspecto. Em nosso estudo, também pudemos constatar que os livros didáticos de edição mais atual, no caso, os **Livros 3** e **4**, demonstram uma atenção maior na diversificação dos sistemas semióticos, se comparados com as obras mais antigas. Ressaltamos, porém, que não consideramos satisfatória a exploração das conversões com o registro gráfico, conforme constatado na análise apresentada neste capítulo.

De acordo com a teoria antropológica de CHEVALLARD (1992) e, classificando os livros didáticos como representantes da Instituição “I” e as transformações lineares como o objeto “O”, podemos caracterizar a relação $R_I(O)$ – relação institucional com o objeto, como aquela que apresenta pouca valorização da Geometria, o que, conseqüentemente, reflete em deficiências de exploração do registro gráfico e de suas conversões.

Segundo DUVAL (2003), do ponto de vista cognitivo, a conversão deveria ser considerada como a atividade de transformação representacional fundamental. O autor ainda afirma que, ou esta atividade não é levada em conta no ensino de Matemática, ou, quando a mesma é feita, um sentido de conversão é privilegiado, pelo fato de se acreditar que um treinamento efetuado em um sentido, automaticamente capacita o indivíduo para a conversão no sentido contrário.

Notamos compatibilidade nesta afirmação com a nossa análise dos livros didáticos de Álgebra Linear. Isto porque, no **Livro 1**, privilegiam-se os registros da língua natural especializada e simbólico-algébrico, bem como as suas conversões. No **Livro 2,** a atividade de conversão, apesar de ser mais realizada, parece estar mais próxima de uma descrição das diversas representações do que de uma efetiva coordenação entre os vários registros. Com relação aos **Livros 3** e **4**, nota-se uma diversificação maior nos registros, apesar de o **Livro 4** mostrar uma preocupação em privilegiar os registros simbólico-matricial, numérico-tabular e da língua natural de emprego comum. Ainda assim, tais obras não demonstram a preocupação em explorar os sentidos de conversão e a não congruência inerente a esta atividade. Exemplificando esta afirmação, pôde-se constatar que as conversões que partem do registro gráfico ou não são realizadas ou, quando desenvolvidas, ocorrem em um número reduzido de exercícios.

Diante do exposto, tem-se, baseado na concepção de DUVAL (2000), que tais abordagens podem limitar a compreensão efetiva do conceito de transformação linear, o que nos leva a questionar quais as possíveis interpretações e coordenações susceptíveis de serem apresentadas pelos estudantes que cursaram a disciplina de Álgebra Linear segundo abordagem semelhante a dos livros didáticos analisados.

Tomando por base a descrição dada por DOUADY (1986), a respeito dos aspectos ferramenta e objeto do conceito, pudemos concluir que, no **Livro 1,** o caráter ferramenta do conceito praticamente não é explorado. No **Livro 2**, já ocorre, de forma modesta, a preocupação em explorar este aspecto, no momento em que se tratam as transformações no plano e no espaço e os problemas de aplicação à óptica (estudo de reflexões em espelhos planos). Já os **Livros 3 e 4** demonstram uma intenção significativa de explorar o aspecto ferramenta do conceito, uma vez que, em grande parte de suas abordagens, são incluídas as aplicações das transformações lineares em diversas áreas.

Estabelecendo um comparativo com as pesquisas presentes em nossa revisão bibliográfica, foi destacado que os estudos de DIAS (1998) e PAVLOPOULOU (1993, apud DORIER, 1998, apud DUVAL, 2000) evidenciaram que os livros didáticos de Álgebra Linear privilegiam certos registros, dentre eles o simbólico, respectivamente nos conteúdos de subespaços vetoriais e vetores. Em nosso estudo, também notamos um predomínio de registros, embora cada livro tenha a sua particularidade neste aspecto. No **Livro 1**, os registros da língua natural especializada, o simbólico-algébrico e o numérico são privilegiados. Nos **Livros 2 e 3**, além desses três, também se valoriza o registro da língua natural de emprego comum. O **Livro 4**, provavelmente por ser direcionado às necessidades computacionais, valoriza os registros numérico-tabular, simbólico-matricial e da língua natural em detrimento dos demais. Como ponto comum, verificamos que, em todas as obras, o registro gráfico é o menos trabalhado.

As pesquisadoras também notaram que os livros não apresentam um cuidado especial em relação à atividade de conversão, o que também foi observado em nossa análise, já que, em cada obra, certas conversões são privilegiadas em detrimento das demais, e em particular, a atividade de conversão que parte do gráfico é a menos trabalhada. Além disso, nenhuma obra apresentou a preocupação de explorar a característica da não congruência e os dois sentidos da atividade de conversão.

DREYFUS, HILLEL e SIERPINSKA (1998) e WINSLOW (2003) apresentaram propostas de uso de recursos informatizados para o trabalho com conceitos de Álgebra Linear, sendo que a primeira pesquisa utilizou o *software Cabri-Géomètre* e a segunda, o *MathCad*, este último classificado como um *software* do tipo CAS (*Computer Algebra Systems*). Tais pesquisas procuraram mostrar as vantagens e restrições do uso de ferramentas computacionais no ensino e na aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear. PADREDI (2003), no seu estudo sobre as “alavancas meta” no discurso do professor de Álgebra Linear, relativo ao conceito de base de um espaço vetorial, observou que apenas um professor afirma que o *software MATLAB* faz parte de sua prática docente. No nosso estudo, procuramos analisar como os livros didáticos tratam desta questão e concluímos que o uso de recursos computacionais ainda é limitado, uma vez que, das quatro obras analisadas, duas não mencionam o uso de qualquer ferramenta e duas destacam a possibilidade opcional de utilização de recurso informatizado do tipo CAS, sem, contudo, efetivamente englobá-lo na sua exposição teórica. Em nenhuma obra foi mencionado o uso de recurso computacional para fins geométricos.

OLIVEIRA (2002) verificou que os livros brasileiros de Álgebra Linear apresentam abordagens distintas para a introdução às transformações lineares e que este fato pode levar o estudante a produzir diferentes significados para este conceito. Tal fato também foi notado nos livros analisados, ou seja, as transformações foram dadas como um tipo especial de função entre espaços vetoriais, com uma abordagem matricial ou por meio de um sistema de equações lineares.

Partindo desta análise e, tendo em vista que as transformações lineares constituem um pré-requisito no estudo da disciplina de Computação Gráfica, partimos para a observação dos livros didáticos desta área, focando a análise nos registros e nas conversões mais requeridas, fato descrito em seguida.

3.3 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DE COMPUTAÇÃO GRÁFICA

3.3.1. Introdução

A disciplina de Computação Gráfica, desenvolvida nos cursos de Computação, tem como pré-requisito a disciplina de Álgebra Linear. Tendo em vista que a análise dos livros didáticos de Álgebra Linear evidenciou uma carência na exploração do registro gráfico e, pelo fato da Computação Gráfica ser uma área que explora a questão visual, tivemos o interesse de observar quais os registros e as conversões mais exploradas nesta área, estabelecendo um paralelo com as conclusões do estudo dos livros didáticos de Álgebra Linear analisados. Sendo assim, esta seção tem por objetivo descrever o tipo de abordagem dedicado ao estudo das transformações no plano e no espaço, presente nos livros didáticos da disciplina de Computação Gráfica.

Foi realizado um levantamento das obras mais citadas nas referências bibliográficas de treze universidades do país. Tal estudo apontou uma freqüência significativa de duas obras. São elas:

FOLEY, J.D. et al. Computer Graphics: Principles and Practice. Addison-Wesley Publishing Company, 1990;

ANGEL, E. Interactive Computer Graphics: a top-down approach with OpenGL. Addison-Wesley Longman, Inc.,1997.

Ainda, apesar de não ser comumente citado nas referências observadas, será analisado o livro didático KALLEY, G.; PLASTOCK, R.A. Computação Gráfica. 1 ed. São Paulo: *McGraw-Hill*, 1991 (tradução de José Carlos Teixeira), por ser uma obra traduzida e por apresentar uma relação bem ampla de exercícios propostos sobre este conteúdo. Estas obras serão identificadas, neste texto, por **Livro A, Livro B** e **Livro C**, respectivamente.

A tabela a seguir indica a presença das duas primeiras obras nas referências das universidades analisadas.

TABELA 9 – RELAÇÃO DA BIBLIOGRAFIA DE COMPUTAÇÃO GRÁFICA

INSTITUIÇÃO	CURSO	LIVRO A	LIVRO B
Universidade Estadual Paulista	Ciência da Computação	X	
Universidade Federal de Santa Maria	Ciência da Computação	X	
Universidade Federal do Rio Grande do Sul	Engenharia da Computação		X
Universidade de São Paulo	Ciência da Computação / Engenharia	X	X
Faculdades Associadas de São Paulo	Ciencia da Computação		
Universidade Federal de Uberlândia	Ciência da Computação/Engenharia	X	X
Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul	Engenharia Elétrica	X	
Universidade Federal de Minas Gerais	Engenharia Elétrica	X	X
Universidade do Vale do Rio dos Sinos	Ciência da Computação	X	
Universidade Estadual de Campinas	Instituto de Computação	X	X
Universidade Federal de Santa Catarina	Engenharias	X	
Universidade Federal de São Carlos	Departamento de Computação	X	
Universidade Federal de Pernambuco	Ciência da Computação	X	

FONTE: Ementário disponível no site das Universidades citadas

3.3.2. Análise dos Livros de Computação Gráfica

No **Livro A**, há um capítulo específico a respeito das transformações geométricas no plano e no espaço. No início do texto, são tratadas as translações, as expansões uniformes e não uniformes e a rotação. Estas transformações são desenvolvidas nos registros simbólico-algébrico, simbólico-matricial e gráfico, conforme exemplo traduzido a seguir.

QUADRO 39 – EXEMPLO DE EXPANSÃO DO LIVRO A

Pontos podem ser expandidos por sx em relação ao eixo x e por sy em relação ao eixo y em novos pontos por meio dos produtos

x'=sx.x e y'=sy.y (5.4)

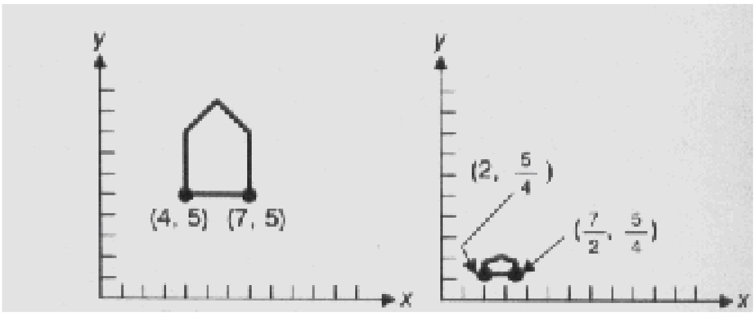
Na forma matricial, isto é

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ou P'=S.P, (5.5)

sendo S é a matriz da equação 5.5.

Na figura 5.2, a casa foi expandida por ½ em x e ¼ em y. Note que a expansão é em relação à origem: a casa ficou menor e mais próxima da origem. Se os fatores de expansão são maiores que 1, a casa iria ampliar e se distanciar da origem. Técnicas de expansão em relação a outros pontos além da origem são discutidas na seção 5.2. As proporções da casa também mudaram: um fator diferente de expansão, no qual sx≠sy foi usado. Com um fator uniforme de expansão, no qual sx = sy, as proporções não são afetadas.



Antes da contração Após a contração (5.2)

FONTE: Livro A, p. 202[23]

Em seguida, são apresentadas as coordenadas homogêneas e a representação matricial de transformações em duas dimensões. As coordenadas homogêneas de um ponto são introduzidas, a fim de que as transformações possam ser compostas através do produto de matrizes, tendo em vista que a representação matricial usual impossibilita o produto envolvendo a representação da translação. Os autores explicam que, em coordenadas homogêneas, um ponto no plano recebe uma terceira coordenada, ou seja, o ponto (x,y) passa a ser (x,y,W) e que dois conjuntos de coordenadas homogêneas (x,y,W) e (x',y', W') representam o mesmo ponto, se um é múltiplo do outro. Neste caso, (2,3,6) e (4,6,12) são o mesmo ponto representado por diferentes coordenadas triplas.

[23] Traduzido por nós do original em Inglês.

Além disso, pelo menos uma coordenada homogênea deve ser não nula. Se W é a coordenada não nula, (x,y,W) representa o mesmo ponto que (x/W, y/W, 1). Neste caso, x/W e y/W são denominadas coordenadas cartesianas do ponto homogêneo.

Tendo em vista que os pontos são agora compostos de três elementos, as transformações matriciais devem ser de ordem 3x3. Por exemplo, a expansão no plano, neste sistema, seria representada por $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$.

Em seguida, os autores analisam dois casos de composição: a de duas translações e a de duas expansões. Estas são também tratadas na forma simbólico-algébrica, para que o leitor verifique a equivalência dos resultados, quando é realizado o produto das matrizes destas transformações.

Prosseguindo, os autores classificam as transformações estudadas em transformações afins, que têm como propriedade o fato de preservar o paralelismo de retas, mas não as medidas e os ângulos. Neste contexto, eles introduzem um outro tipo de transformação primitiva, representada pelos cisalhamentos horizontal e o vertical. Esta última transformação já é apresentada somente nos registros matricial (matriz 3x3) e gráfico.

A seção seguinte apresenta a composição das transformações no plano, realizada por produto matricial e aplicada em uma rotação sobre um objeto por um ponto arbitrário. Os autores mostram que este problema é tratado em três etapas:

a) translada-se o ponto de referência para a origem;
b) realiza-se a rotação;
c) translada-se o ponto que está na origem para a posição inicial.

Esta seqüência de etapas é realizada em dois registros: o simbólico-matricial e o gráfico, conforme apresentado a seguir.

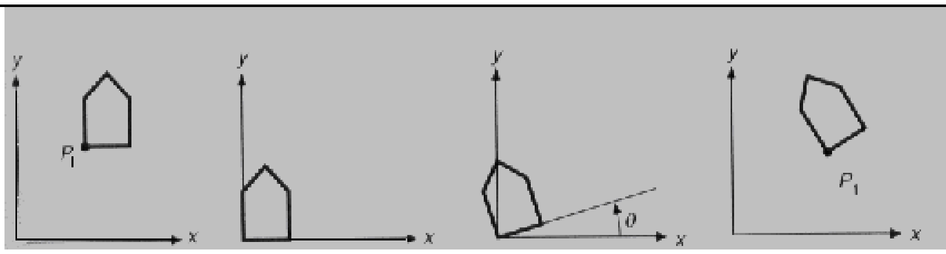
QUADRO 40 – ROTAÇÃO EM RELAÇÃO A UM PONTO FIXO – LIVRO A

continua

$$T(x_1,y_1).R(\theta).T(-x_1,-y_1)= \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & x_1(1-\cos\theta)+y_1 sen\theta_1 \\ sen\theta & \cos\theta & y_1(1-\cos\theta)-x_1 sen\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

QUADRO 40 – ROTAÇÃO EM RELAÇÃO A UM PONTO FIXO – LIVRO A

conclusão



Original house After translation of P_1 to origin After rotation After translation to original P_1

Fig. 5.8 Rotation of a house about the point P_1 by an angle θ

FONTE: Livro A, p. 208 e 209

Nesta abordagem, nota-se que a aprendizagem de Computação Gráfica requer, principalmente, o domínio dos registros gráfico e simbólico-matricial e das conversões entre eles.

O **Livro B** reserva um capítulo intitulado "Objetos Geométricos e Transformações". Neste, o autor apresenta uma revisão da Geometria Analítica no plano e no espaço e de aspectos da Álgebra Linear. São tratados os conceitos de vetor, espaço afim, sistema de coordenadas, mudança de sistema de coordenadas, coordenadas homogêneas de um ponto, transformações afins, dentre outros conceitos.

O autor define a transformação linear como uma função "f" que, para quaisquer escalares α e β e para quaisquer vetores p e q, $f(a\text{p}+b\text{q}) = a\,f(\text{p}) + b\,f(\text{q})$, ou seja, uma aplicação que preserva a combinação linear. Ele introduz, neste contexto, a representação de um vetor do espaço por meio de coordenadas homogêneas em uma matriz coluna 4x1 e a transformação linear representada por v = M.u, onde M=$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e u=$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ao descrever as transformações afins básicas – rotações, translações e expansões – notamos que somente na rotação é feito o tratamento no plano e, em seguida, no espaço. As demais transformações são tratadas diretamente no espaço. Ainda, nesta seção, a rotação é dada nos registros simbólico-algébrico, simbólico-matricial e gráfico, enquanto as outras transformações são tratadas apenas no registro gráfico. O autor destaca que as rotações e translações são conhecidas como transformações de corpo rígido, pois só alteram a posição ou a orientação do objeto, ao contrário, por exemplo, da expansão de fatores distintos, que muda o aspecto do objeto. Em seguida, o texto apresenta as transformações de translação e expansão no espaço, desenvolvidas em coordenadas homogêneas.

O quadro seguinte contém a tradução da descrição da expansão presente nesta seção, desenvolvida nos registros simbólico-algébrico e simbólico-matricial.

QUADRO 41 – EXPANSÃO NO ESPAÇO – LIVRO B

Para a expansão e a rotação, há um ponto fixo que não é alterado pela transformação. Nós podemos tomar como ponto fixo a origem e podemos mostrar como concatenar transformações para obter a transformação para um ponto fixo arbitrário. A matriz de expansão com a origem como ponto fixo resulta em expansões independentes em relação aos eixos coordenados. As três equações são:

$$x' = \beta_x x,$$
$$y' = \beta_y y,$$
$$z' = \beta_z z$$

Estas três equações podem ser combinadas na forma homogênea como p'=Sp onde

$$S = S(\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \begin{pmatrix} \beta_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que, como é verdadeiro para a matriz de translação e, ainda, para todas as coordenadas homogêneas de transformações, a última linha da matriz não depende da transformação particular, mas força a quarta componente do ponto transformado permanecer com o valor 1.

FONTE: Livro B, p. 150[24]

Seguindo a mesma dinâmica, o autor apresenta a rotação e o cisalhamento de um objeto no espaço. Na seção seguinte, é apresentada a composição de transformações. Os registros presentes, a partir desta fase, são o simbólico-matricial e o gráfico.

A seguir, será apresentada a descrição da rotação em relação a um ponto fixo presente nesta obra.

QUADRO 42 – ROTAÇÃO EM RELAÇÃO A UM PONTO FIXO – LIVRO B

continua

Considere um cubo com centro pf e uma aresta paralela a um eixo. Nós queremos rotacionar o cubo em relação ao eixo z, mas agora em relação ao seu centro pf, o qual se torna o ponto fixo da transformação, como mostra a figura 4.35.

---

[24] Traduzido por nós do original em Inglês.

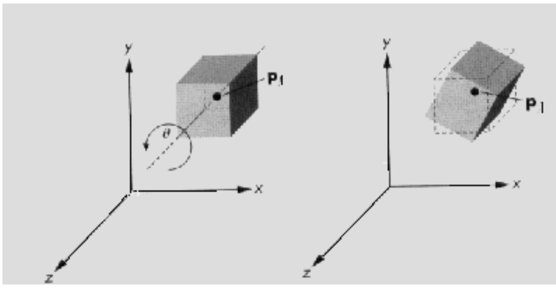
QUADRO 42 – Rotação em relação a um ponto fixo – Livro B

conclusão

Se pf é a origem, nós saberemos como resolver o problema. Nós usaremos simplesmente Rz(θ). Esta observação encaminha para a estratégia de primeiro mover o cubo para a origem. Nós poderemos então aplicar Rz(θ) e finalmente mover o objeto de volta, para que seu centro seja novamente o ponto pf. Esta seqüência é apresentada na figura 4.36. Em termos de nossas transformações afins básicas, o primeiro é T(-pf), o segundo é Rz(θ) e o final é T(pf). Concatenando estas, nós obteremos a matriz singular: M= T(pf). Rz(θ). T(-pf).

Se multiplicarmos estas matrizes, acharemos:
M=

$$\begin{bmatrix} \cos q & -sen q & 0 & x_f - x_f \cos q + y_f sen q \\ sen q & \cos q & 0 & y_f - x_f sen q - y_f \cos q \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(a) (b)

Figura 4.35. Rotação de um cubo em relação ao seu centro.

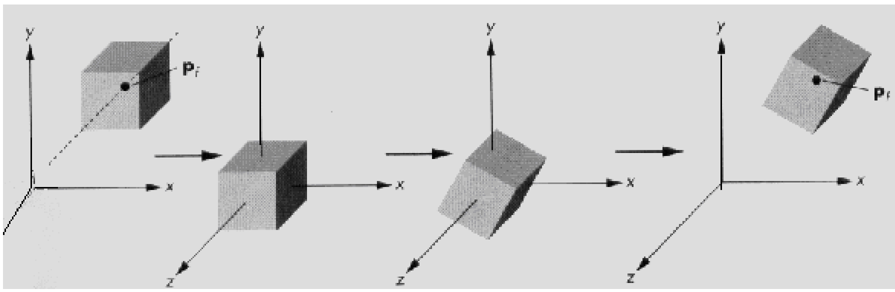


Figura 4.36. Seqüência de transformações

FONTE: Livro B, p. 156[25]

No **Livro C**, em primeiro lugar são apresentadas as transformações no plano de translação, rotação em torno da origem, variação de escala em relação à origem e reflexão em relação a um eixo. Nesta apresentação, utilizam-se os registros simbólico-algébrico e gráfico.

[25] Traduzido por nós do original em Inglês.

Na apresentação da composição de transformações, os autores chamam a atenção ao fato de que operações tais como a rotação em torno de um ponto diferente da origem ou a reflexão em relação a linhas que não são os eixos coordenados, podem ser construídas partindo das transformações básicas apresentadas. Para isso, é realizada a composição de uma seqüência de transformações elementares. Primeiramente, translada-se o objeto de forma que o seu ponto fixo coincida com a origem. Em seguida, realiza-se a transformação desejada para finalmente transladar o objeto resultante de volta à posição inicial.

Para isso, os autores fornecem a descrição matricial das transformações básicas e levantam o fato de que a translação não pode ser expressa como uma matriz 2x2. Com isso, utiliza-se o artifício da representação homogênea de um ponto. Os autores destacam a vantagem de trabalhar neste sistema com todas as transformações, para que haja compatibilidade entre elas, de modo que a composição possa ser determinada por meio de produto de matrizes.

A seguir, serão descritas, conjuntamente, três questões presentes nesta obra, para que sejam observadas as conversões estabelecidas.

QUADRO 43 – QUESTÕES DO LIVRO C

continua

Problema 4.3. Descreva a transformação que roda um ponto de um objeto, Q(x,y), de θ graus em torno de um centro de rotação fixo P(h,k).

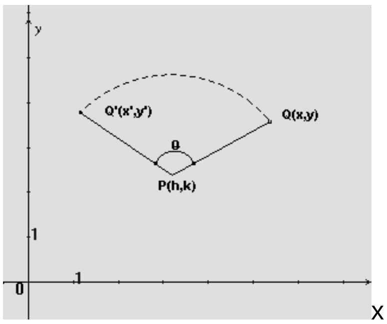


Fig. 4-14

Problema 4.4. Escreva a forma geral da matriz de rotação em torno do ponto P(h,k).

Problema 4.5. Aplique uma rotação de 45° ao triângulo A(0,0), B(1,1) e C(5,2) em torno de P(-1,-1).

Resolução apresentada:

Problema 4.3.

Determinamos a transformação RθP em três passos:

-Translação do centro de rotação P para a origem;

-Rotação de θ graus em torno da origem;

-Translação da origem de volta para a posição original P.

QUADRO 43 – QUESTÕES DO LIVRO C

conclusão

Usando v= -hi-kj como vetor de translação, construímos RθP por composição de transformações: RθP = T-v.Rθ.Tv.

Problema 4.4.
De acordo com o problema 4.3, podemos escrever RθP = T-v.Rθ.Tv, onde v=-hi-kj. Usando matrizes 3x3 em coordenadas homogêneas para a translação e rotação, temos

$$R_{\theta,P}=\begin{pmatrix}1&0&h\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-sen(\theta)&0\\sen(\theta)&\cos(\theta)&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&-h\\0&1&-k\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-sen(\theta)&[-h\cos(\theta)+ksen(\theta)+h]\\sen(\theta)&\cos(\theta)&[-hsen(\theta)-k\cos(\theta)+k]\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Problema 4.5.
Representamos o triângulo por uma matriz formada a partir das coordenadas homogêneas dos vértices

$$\begin{pmatrix}0&1&5\\0&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Do problema 4.4, a matriz de rotação é dada por $R45^oP$ = T-v.$R45^o$.Tv, onde v=i+j. Assim

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-1\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&(\sqrt{2}-1)\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$R45^oP$ =
Agora
[A’B’C’]=$R45^oP$.[ABC]=

$$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-1\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&(\sqrt{2}-1)\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&1&5\\0&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&(3\sqrt{2}-1)\\(\sqrt{2}-1)&(2\sqrt{2}-1)&(\frac{9\sqrt{2}}{2}-1)\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Assim,

$$A'=(-1,\sqrt{2}-1), B'=(-1,2\sqrt{2}-1)\,e\,C'=(3\sqrt{2}-1,\frac{9\sqrt{2}}{2}-1)$$

FONTE: Livro C, p. 108–110

3.3.3. Conclusões da Análise dos Livros de Computação Gráfica e Comparação com a Análise dos Livros de Álgebra Linear

Analisando os três livros de Computação Gráfica, especificamente na abordagem das transformações no plano e no espaço, nota-se que os registros mais presentes são o gráfico, o da língua natural de emprego comum, o simbólico-matricial e o numérico-tabular. As conversões iniciais requeridas geralmente vão do sentido da língua natural para o gráfico e deste para o simbólico-matricial. Em seguida, para a determinação da imagem de um objeto, estabelece-se a conversão do simbólico-matricial para o numérico. Com isso, verifica-se que o domínio dos registros gráfico e simbólico-matricial, bem como a atividade de conversão entre eles, é de extrema importância para o entendimento de problemas desta área. Ainda, a composição de transformações por meio do produto de matrizes e a transformação de pontos do plano ou do espaço em coordenadas homogêneas, são conhecimentos primordiais para a resolução de exercícios que envolvem as transformações no plano e no espaço.

Neste momento, estabeleceremos um comparativo entre as análises dos livros didáticos de Álgebra Linear e de Computação Gráfica. No estudo dos livros didáticos de Álgebra Linear, foram observadas deficiências na exploração do registro gráfico e no estabelecimento de conversões entre ele e os demais registros. Até mesmo os **Livros 3 e 4**, cujas abordagens demonstraram um cuidado maior em diversificar as representações, apresentaram uma carência nas questões cujas conversões partiam do registro gráfico.

Outro registro de pouca freqüência, com exceção do **Livro 4,** é o simbólico-matricial. De todas as obras analisadas, apenas o **Livro 3** apresenta conversões entre os registros gráfico e simbólico-matricial, transformação essencial para o estudo de Computação Gráfica. Ainda assim, tal conversão ocorre em um número reduzido de exercícios e somente no sentido do simbólico-matricial para o gráfico. Também foi observado que os livros didáticos de Álgebra Linear pouco exploram o aspecto geométrico do movimento de translação. Apesar desta transformação não ser linear, ela poderia ser contrastada com as demais transformações lineares estudadas, analisada como contra-exemplo também em situações geométricas, uma vez que o princípio do movimento de qualquer objeto em Computação Gráfica, com ponto fixo fora da origem, necessita desta transformação.

Avaliando a situação, podemos concluir que, especificamente no conteúdo das transformações, há um descompasso, em termos de registros e conversões, entre o que é valorizado nos livros didáticos de Álgebra Linear analisados e o que é enfatizado em Computação Gráfica. Para que se tenha uma noção geral das afirmações aqui relatadas, o leitor poderá observar, no Anexo I, a relação dos gráficos que sintetizam a tabulação geral dos registros presentes e das conversões indicadas nos enunciados dos exercícios propostos de cada obra. Esta tabulação refere-se a todo conteúdo de transformações lineares presente nestes livros.

Por fim, quanto ao uso de recursos computacionais, uma questão primordial para o estudante da área computacional, também notamos uma lacuna nos livros de Álgebra Linear analisados, tendo em vista que, quando os mesmos mencionam a utilização de ferramenta informática, tal fato ocorre de forma modesta e opcional, limitada a *software* algébrico, com finalidade exclusiva de minimização de cálculos.

Estes resultados suscitaram o nosso interesse em investigar que tipo de domínio um estudante da área computacional apresenta ao se deparar com questões que tratam das transformações lineares no seu aspecto geométrico. Tomando por base a teoria antropológica de CHEVALLARD (1992), consideraremos os estudantes da área de computação como representantes do indivíduo “X”. Tais estudantes têm no currículo do curso as disciplinas de Álgebra Linear e Computação Gráfica, porém, no momento de participação nesta pesquisa, os mesmos só terão cursado a disciplina de Álgebra Linear, segundo a abordagem verificada nos livros didáticos analisados.

Com isso, temos, nesta pesquisa, a intenção de observar quais são as relações R(X,O) – relações do indivíduo com o objeto, estabelecidas por estes sujeitos, quando confrontados com um teste que engloba questões sobre o objeto matemático “transformações lineares geométricas”, formuladas com a preocupação de explorar os diversos registros e conversões.

Sendo assim, no capitulo seguinte, será apresentado um questionário a respeito das transformações lineares planas, elaborado de modo a explorar as suas diversas representações e conversões, acompanhado da análise das produções de oitenta e seis estudantes de cursos da área computacional.

4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO EXPLORATÓRIO

Neste capítulo, será descrito o instrumento aplicado a alunos da área de Computação que já estudaram as transformações lineares em Álgebra Linear, mas que não tiveram contato com tal tópico na disciplina de Computação Gráfica. Este teste, o qual envolve questões sobre transformações lineares do plano no plano, foi elaborado de modo a explorar as diversas representações dos registros descritos no capítulo 3, ou seja, a língua natural de emprego comum, a língua natural de emprego especializado, o registro gráfico, o simbólico-algébrico, o simbólico-matricial, o numérico na forma de par ordenado e o numérico-tabular.

Este instrumento tem o objetivo de avaliar as concepções emergentes dos estudantes, quando deparados com questões que necessitam do domínio dos registros citados bem como do estabelecimento de suas conversões.

Foi realizada uma aplicação preliminar do questionário em dois alunos do curso de Engenharia da Computação de uma faculdade particular de São Paulo. Estes estudantes já haviam cursado a disciplina de Álgebra Linear segundo as referências bibliográficas classificadas no capítulo anterior como **Livros 1 e 2**.

Esta aplicação teve por objetivo analisar se as questões estavam compreensíveis, evidenciando possíveis necessidades de reestruturação do instrumento. Primeiramente, notamos que, como a intenção consistia em aplicar o questionário em uma hora-aula, o instrumento estava extenso. Ainda, indagações realizadas pelos estudantes durante a aplicação preliminar, levaram-nos a reformular alguns enunciados. Isto porque ou os mesmos não estavam compreensíveis ou estavam formulados de modo a favorecer uma resolução imediata.

Sendo assim, o questionário reformulado, identificado a partir deste momento como Questionário Exploratório, está apresentado na seção seguinte.

4.1 APRESENTAÇÃO DO QUESTIONÁRIO EXPLORATÓRIO

As cinco questões apresentadas a seguir compõem um teste sobre transformações no plano, o qual envolve situações que exploram a diversidade de registros e a atividade de conversão entre os mesmos. A apresentação de cada questão será acompanhada de seus objetivos geral e específico, bem como da descrição das variáveis escolhidas.

Serão relatadas, também, as possíveis resoluções e as dificuldades esperadas dos estudantes, tendo por base de análise, as observações diagnosticadas nos livros didáticos e as conclusões das pesquisas constantes na revisão bibliográfica.

4.1.1. Apresentação da Questão 1

QUADRO 44 – APRESENTAÇÃO DA QUESTÃO 1

a) Considerando o plano x0y, o que você entende por projeção ortogonal sobre o eixo x? b) A projeção ortogonal no plano x0y sobre o eixo x é uma transformação linear? Justifique. c) Determine F(x,y), sendo F a projeção ortogonal sobre o eixo x. Em seguida represente-a graficamente. d) Determine a matriz desta transformação em relação à base canônica (matriz canônica). e) Qual seria a imagem do vetor (3,-2) por esta projeção?

O objetivo geral desta questão consiste em verificar se o estudante relaciona o conceito de transformação linear em situações geométricas do plano, além de analisar se o mesmo apresenta o domínio dos registros requisitados e das conversões presentes nesta questão.

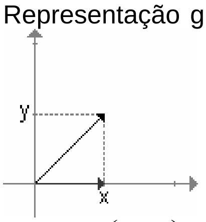
Com relação aos objetivos específicos, nos itens “a” e “b” pretende-se verificar se o aluno apresenta a concepção de projeção ortogonal no plano sobre o eixo x e se relaciona este fato com uma transformação linear. Ainda, no item “a”, intenciona-se observar que tipo de registro o estudante utilizará para a sua resolução, partindo da representação da língua natural de emprego comum e, no item “b”, objetiva-se analisar se a justificativa será apresentada com base na definição ou em alguma propriedade de transformação linear. Nos itens “c” e “d”, pretende-se verificar se o aluno demonstra domínio na coordenação entre os registros simbólico-algébrico, gráfico e numérico-tabular. No item “e”, pretende-se verificar que tipo de representação o aluno utilizará para determinar a imagem de um vetor.

Quanto à escolha de variáveis, a seleção da projeção ortogonal foi realizada pelo fato da mesma ser uma transformação usual, provavelmente trabalhada não só no curso de Álgebra Linear, mas também em outras disciplinas ao longo da vida escolar do estudante. Com base nesta situação, espera-se que o aluno não tenha dificuldades para relatar, de algum modo, o que esta transformação representa. Partindo desta suposição, pretende-se analisar se o estudante estabelece e justifica uma relação da projeção ortogonal com o conteúdo das transformações lineares. Ainda, o exercício foi formulado de modo a explorar os registros gráfico, simbólico-algébrico, numérico e da língua natural, bem como as suas conversões, com o intuito de verificar de que modo o estudante lida com a coordenação destes registros.

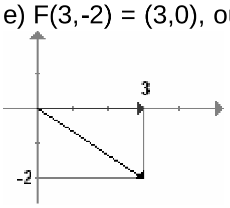
A seguir, serão apresentados exemplos de resolução de cada item da questão 1.

QUADRO 45 – EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1

a) É provável que o aluno descreva esta transformação na língua natural, relatando o efeito que ocorre com um vetor ou com uma figura por meio desta transformação. Tendo em vista que o registro gráfico é pouco explorado, segundo a análise dos livros didáticos de Álgebra Linear presente no capítulo 3, não é esperado que muitos estudantes recorram a este tipo de registro voluntariamente para a resolução deste item;
b) F(x,y) = (x,0) é linear pois as componentes dos elementos da imagem são lineares, ou, Sim, pois dados $u=(x_1, y_1)$ e $v=(x_2, y_2) \in R^2$, $F(u+v) = F(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2, 0) = (x_1,0)+(x_2,0) = F(u)+F(v)$ e $\forall \alpha \in R$ e $u=(x, y) \in R^2$, $F(\alpha u) = F(\alpha x,\alpha y) = (\alpha x,0) = \alpha(x,0) = \alpha F(u)$.
c) Representação algébrica: F(x,y) = (x,0),
Representação gráfica:



d) (F) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;
e) F(3,-2) = (3,0), ou graficamente por



ou ainda por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Analisando as prováveis dificuldades, com base na análise dos livros e na revisão bibliográfica, espera-se que os estudantes demonstrem problemas em justificar a linearidade da transformação no item “b”, uma vez que as pesquisas de SIERPINSKA, DREYFUS E HILLEL (1999) mostraram que dificilmente os alunos utilizam a definição de transformação linear em questões que solicitam este tipo de justificativa. Além disso, espera-se que os estudantes apresentem dificuldades no domínio das representações gráfica e numérico-tabular e no estabelecimento de conversões entre esses registros. Esta afirmação é feita tanto com base nos resultados das pesquisas de PAVLOPOULOU (1993), HILLEL E SIERPINSKA (1995) e DREYFUS, HILLEL E SIERPINSKA (1998), como na análise dos livros didáticos de Álgebra Linear, apresentada no capítulo anterior, a qual apontou que estes registros são pouco explorados se comparados com os demais.

4.1.2. Apresentação da Questão 2

QUADRO 46 – APRESENTAÇÃO DA QUESTÃO 2

Seja T: $R^2 \to R^2$ um cisalhamento horizontal de fator 2, dado por T(x,y)=(x+2y,y). a) Determine a imagem geométrica do quadrado ABCD por esta transformação, dados A(0,0), B(1,0), C(1,1) e D(0,1). b) Esta transformação é linear? Justifique.

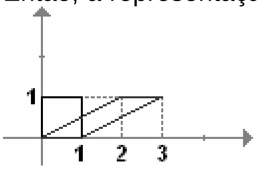
O objetivo geral desta questão consiste em verificar se o estudante determina a imagem geométrica de um objeto, partindo da forma simbólico-algébrica da transformação, e se justifica a linearidade da mesma. Como objetivo específico, pretende-se verificar se o aluno resolve uma situação que envolve uma conversão do registro simbólico-algébrico para o numérico e deste para o gráfico, em uma tarefa na qual a representação algébrica da transformação já é fornecida no enunciado.

A escolha de variáveis deu-se com base na análise dos livros didáticos de Álgebra Linear, a qual apontou que este tipo de questão, que envolve o ciclo de conversões algébrico-numérico-gráfico, é explorado de forma significativa. A escolha do quadrado ABCD, dados os vértices A(0,0), B(1,0), C(1,1) e D(0,1), foi feita de modo a não dificultar as operações, tendo em vista que o objetivo consiste em verificar como o aluno lida com a coordenação desses registros em um problema de transformação linear e se justifica, de alguma forma, a linearidade desta aplicação.

A seguir, serão apresentados exemplos de resolução de cada item da questão 2.

QUADRO 47 – EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2

a) T(0,0) = (0,0), T(1,0) = (1,0), T(1,1) = (3,1) e T(0,1) = (2,1).
Então, a representação gráfica será:



b) Sim, F(x,y) = (x+2y,y) é linear, pois as componentes dos elementos da imagem são lineares, ou
Sim, pois dados $u=(x_1, y_1)$ e $v=(x_2, y_2) \in R^2$,
$F(u+v) = F(x_1+x_2, y_1+y_2) = ((x_1+x_2) + 2(y_1+y_2), (y_1+y_2)) = ((x_1+2y_1) + (x_2+2y_2), y_1+y_2) = (x_1+2y_1,y_1)+(x_2+2y_2,y_2) = F(u)+F(v)$ e $\forall \alpha \in R$ e $u=(x,y) \in R^2$, $F(\alpha u) = F(\alpha x,\alpha y) =(\alpha x+2(\alpha y),\alpha y) = (\alpha(x+2y), \alpha y) = \alpha(x+2y,y) = \alpha F(u)$.

Apesar de a tarefa requerer o estabelecimento de conversões, espera-se, com base na análise dos livros didáticos de Álgebra Linear, que o estudante não demonstre dificuldade na resolução do item “a”, principalmente na conversão do algébrico para o numérico, tendo em vista que a análise apontou que este é o tipo de conversão mais explorado nos livros didáticos. Em contrapartida, é provável que o aluno apresente dificuldades em justificar a linearidade da transformação, afirmação realizada com base nos resultados já citados das pesquisas de PAVLOPOULOU (1993), HILLEL e SIERPINSKA (1995) e DREYFUS, HILLEL e SIERPINSKA (1998).

4.1.3. Apresentação da Questão 3

QUADRO 48 – APRESENTAÇÃO DA QUESTÃO 3

Existe uma transformação linear que transforma um quadrado em uma circunferência? E uma transformação linear que transforma um quadrado em um segmento? Justifique sua resposta

O objetivo geral desta questão consiste em verificar se o estudante justifica o tipo de imagem gráfica possível por meio de transformações lineares. Como objetivo específico, particularmente na transformação quadrado-circunferência, tem-se a intenção de analisar se o aluno nega a linearidade desta aplicação, baseado no fato de não se ter a permanência do alinhamento de pontos e do paralelismo de segmentos. Quanto à escolha de variáveis, na primeira parte da questão, a opção pela transformação quadrado/ circunferência ocorre pelo fato destas figuras serem de amplo conhecimento do aluno, tornando evidente a não permanência do alinhamento de pontos.

Na segunda parte da questão, a intenção consiste em verificar se o aluno justifica a possibilidade de transformar um quadrado em segmento por meio de uma aplicação linear, baseado na questão sobre projeção ortogonal dada no início deste bloco.

A seguir, será apresentado um exemplo de resolução dessa questão.

QUADRO 49 – EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3

Não é possível transformar um quadrado em uma circunferência por meio de uma transformação linear, pois este tipo de aplicação preserva o alinhamento. É possível transformar um quadrado em um segmento por meio de uma aplicação linear. Para isso, basta aplicar, por exemplo, uma projeção ortogonal sobre um eixo.

Com base na pesquisa de GUEUDET-CHARTIER (2000), a qual mostrou que poucos alunos apresentam uma compreensão satisfatória do tipo de imagem geométrica possível por meio de uma transformação linear e, avaliando a análise dos livros didáticos, a qual também apontou deficiências na exploração geométrica deste conceito, é esperado que os alunos apresentem dificuldades principalmente no estabelecimento das justificativas da questão.

4.1.4. Apresentação da Questão 4

QUADRO 50 – APRESENTAÇÃO DA QUESTÃO 4

Descrever, com palavras, o efeito geométrico de multiplicar um vetor x pela matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Esta matriz pode ser considerada a matriz de uma transformação linear no plano em relação à base canônica? Justifique.

NOTA: Exercício adaptado do livro ANTON, H. *Álgebra Linear com aplicações*, p. 148.

O objetivo geral desta questão consiste em verificar se o aluno estabelece a imagem de um vetor por produto matricial, expressando, em língua natural, o efeito geométrico envolvido e reconhecendo esta situação como uma transformação linear. Por objetivo específico, pretende-se explorar uma tarefa envolvendo a coordenação dos registros numérico-tabular, gráfico e da língua natural em uma situação particular de expansão não-uniforme.

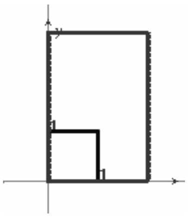
Na aplicação preliminar, o enunciado continha a matriz 2x2 de uma expansão uniforme de fator 2 em relação à base canônica. Como este fato permitiu aos estudantes da aplicação “piloto” a resolução imediata da questão, optamos por alterá-la para uma matriz de expansão não-uniforme, a fim de avaliar as estratégias que serão utilizadas pelos sujeitos para a resolução desta situação.

A seguir, serão apresentados exemplos de resolução da questão.

QUADRO 51 – EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 4

$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\ 3y\end{pmatrix}$ Neste caso, haverá uma expansão não-uniforme no objeto inicial.

Ou ainda, graficamente por:



Justificativa: Esta matriz pode ser considerada a matriz, em relação à base canônica do plano, da expansão não-uniforme de fatores 2 (na direção do eixo x) e 3 (na direção do eixo y).

ou

Justificativa: A matriz pode ser considerada a matriz de uma transformação linear em relação à base canônica no plano pois:

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2x_1+2x_2\\ 3y_1+3y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1\\ 3_{y1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2x_2\\ 3y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix},\ \forall\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}\in R^2 e\ \forall\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}\in R^2$$

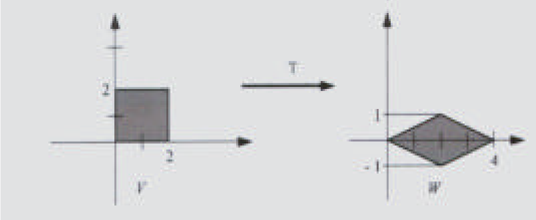
$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ax\\ ay\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(ax)\\ 3(ay)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(2x)\\ a(3y)\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}2x\\ 3y\end{pmatrix}=a.\left(\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right),\ \forall\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in R^2 e\ \forall a\in R$$

A análise dos livros didáticos apontou baixa exploração do registro numérico-tabular em situações geométricas. Além disso, a conversão do registro numérico-tabular para o simbólico-matricial e deste para o gráfico/ou língua natural não é uma atividade usual na maioria dos livros didáticos analisados.

Diante disso, é provável que poucos estudantes demonstrem o domínio das conversões exigidas neste problema. Na justificativa solicitada na questão, é esperado que os estudantes não a apresentem partindo da definição, tendo em vista os resultados das pesquisas já comentadas. Em contrapartida, espera-se que os alunos não demonstrem dificuldades em relacionar a situação com a transformação de expansão não-uniforme de fator 2 (na direção do eixo x) e 3 (na direção do eixo y).

4.1.5. Apresentação da Questão 5

QUADRO 52 – APRESENTAÇÃO DA QUESTÃO 5



Qual das matrizes abaixo pode representar, em relação à base canônica do R^2, uma transformação linear que leva a figura V na figura W? Justifique.

$a)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} b)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} c)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} d)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} e)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

NOTA: Questão adaptada do Exame Nacional de Cursos – Curso de Matemática – 1999.

O objetivo geral da questão consiste em verificar se o aluno reconhece a matriz da transformação linear partindo do efeito geométrico dado. O objetivo específico da questão consiste em avaliar se o estudante resolve uma situação envolvendo a conversão do registro gráfico para o numérico-tabular.

Com relação à escolha de variáveis, inicialmente optou-se por uma situação enunciada nas representações gráfica e da língua natural. Com isso, o aluno deverá estabelecer uma conversão que parte do gráfico para o registro numérico-tabular. Na análise dos livros didáticos de Álgebra Linear, observou-se que o trabalho com este tipo de conversão é insatisfatório. Com isso, pretende-se observar o desempenho dos alunos que estudaram as transformações segundo as abordagens analisadas, diante da necessidade deste tipo de conversão. A escolha do quadrado sendo transformado em losango deu-se pelo fato de não envolver uma transformação simples e conhecida, ou seja, a resolução da questão exige do sujeito, a capacidade de estabelecer e coordenar as conversões entre os registros envolvidos.

A seguir, serão apresentados exemplos de resolução dessa questão.

QUADRO 53 – EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 5

continua

A matriz correta é a do item “b”, pois $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, ou

QUADRO 53 – EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 5

conclusão

Estabelecendo uma relação entre os vértices do quadrado e as respectivas imagens de modo que respeite as condições de linearidade, podemos ter: T(0,0)=(0,0), T(2,0)=(2,-1), T(0,2)=(2,1) e T(2,2) = (4,0). Como {(2,0), (0,2)} é uma base do R^2, tem-se que: (x,y) = a(2,0)+b(0,2). Então, a= $\frac{x}{2}$ e b= $\frac{y}{2}$. $T(x,y) = \frac{x}{2}T(2,0) + \frac{y}{2}T(0,2), \quad \text{logo,} \quad T(x,y) = \frac{x}{2}(2,-1) + \frac{y}{2}(2,1).$ $\text{Então,} T(x,y) = (x+y, \ \frac{-x+y}{2})$ Neste caso, a matriz da transformação, em relação à base canônica do R^2, será: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Feita a análise das prováveis dificuldades, espera-se que poucos estudantes demonstrem domínio na resolução desta questão. Isto porque, a análise dos livros didáticos de Álgebra Linear revelou que os registros e as conversões solicitados nesta situação não são explorados de forma satisfatória.

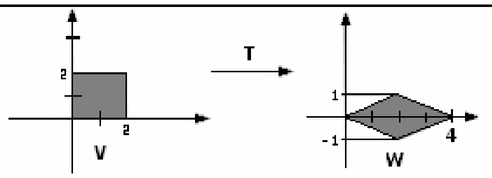
4.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO QUESTIONÁRIO EXPLORATÓRIO

O questionário descrito na seção anterior foi aplicado em alunos dos cursos de Ciência da Computação e Engenharia da Computação de quatro Instituições Particulares de Ensino Superior de São Paulo, totalizando oitenta e seis (86) estudantes. Todos os alunos selecionados cursarão a disciplina de Computação Gráfica, a qual necessitará do domínio das transformações lineares geométricas no plano e no espaço. A seleção dos alunos levou em conta o fato de os mesmos já terem cursado a disciplina de Álgebra Linear no semestre anterior à aplicação do questionário. Ainda, tais estudantes não tiveram, até o momento da aplicação, qualquer contato com o conteúdo de transformações geométricas desenvolvido na disciplina de Computação Gráfica.

Com o intuito de organizar os dados e garantir o anonimato, as instituições foram denotadas por A, B, C e D. Os estudantes de cada amostra foram identificados por um número seguido do código da instituição em que estudam. Por exemplo, o estudante 3B representará o aluno número 3 da instituição B.

Foi realizada uma tabulação dos acertos e erros, acompanhada de uma análise qualitativa, esta última com foco na utilização de registros e no estabelecimento de conversões, segundo os pressupostos teóricos de DUVAL (1995, 2000, 2003). Para a tabulação das questões, as mesmas foram desmembradas segundo descrito na tabela a seguir.

TABELA 10 – ORGANIZAÇÃO DO QUESTIONÁRIO PARA A ANÁLISE DOS DADOS

NÚMERO DA QUESTÃO	QUESTÃO	CÓDIGO
01	Considerando o plano x0y, o que você entende por projeção ortogonal sobre o eixo x?	1a
	A projeção ortogonal no plano x0y sobre o eixo x é uma transformação linear?	$1b_1$
	Justifique.	$1b_2$
	Determine F(x,y), sendo F a projeção ortogonal sobre o eixo x.	$1c_1$
	Em seguida represente-a graficamente.	$1c_2$
	Determine a matriz desta transformação em relação à base canônica (matriz canônica)	1d
	Qual é a imagem do vetor (3,-2) por esta projeção?	1e
02	Seja T: $R^2 \rightarrow R^2$ um cisalhamento horizontal de fator 2, dado por T(x,y)=(x+2y,y). Determine a imagem geométrica do quadrado ABCD por esta transformação, dados A(0,0), B(1,0), C(1,1) e D(0,1).	2a
	Esta transformação é linear?	$2b_1$
	Justifique.	$2b_2$
03	Existe uma transformação linear que transforma um quadrado em uma circunferência?	$3a_1$
	Justifique.	$3a_2$
	E uma transformação linear que transforma um quadrado em um segmento?	$3b_1$
	Justifique.	$3b_2$
04	Descrever, com palavras, o efeito geométrico de multiplicar um vetor x do R^2 pela matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.	4a
	Esta matriz pode ser considerada a matriz de uma transformação linear no plano em relação à base canônica?	$4b_1$
	Justifique.	$4b_2$
05	 Qual das matrizes abaixo pode representar, em relação à base canônica do R^2, uma transformação linear que leva a figura V na figura W? $a)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} b)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} c)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} d)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} e)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	5a
	Justifique.	5b

Para cada questão, foi elaborado um gráfico que descreve a tabulação dos erros e acertos apresentados pelo grupo de estudantes da Instituição analisada. Em seguida, tais dados foram analisados sob o ponto de vista da utilização dos registros de representação semiótica e das conversões estabelecidas. Como opção de apresentação, descreveremos os resultados de cada Instituição, acompanhados das conclusões gerais das amostras analisadas.

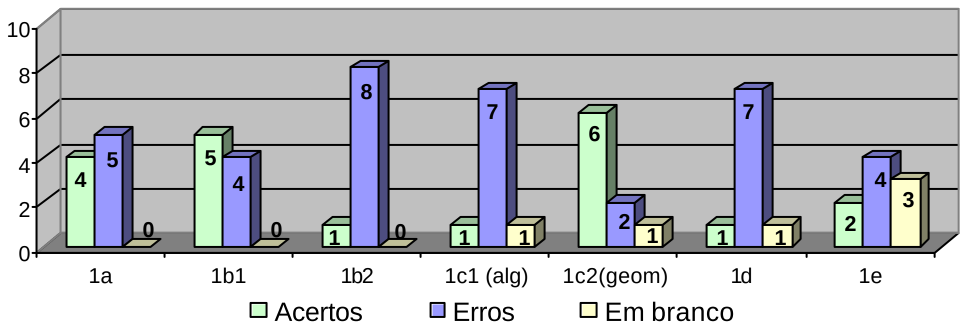
A seguir, serão apresentados os resultados obtidos de cada instituição.

4.2.1. Resultados da Instituição A

O teste foi aplicado em uma turma de nove alunos do curso de Ciência da Computação de um Centro Universitário Particular de Ensino do Estado de São Paulo, o qual será indicado por Instituição A. Estes estudantes fizeram o curso de Álgebra Linear tendo como referência principal o **Livro 1**.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes da Instituição A na primeira questão proposta no teste.

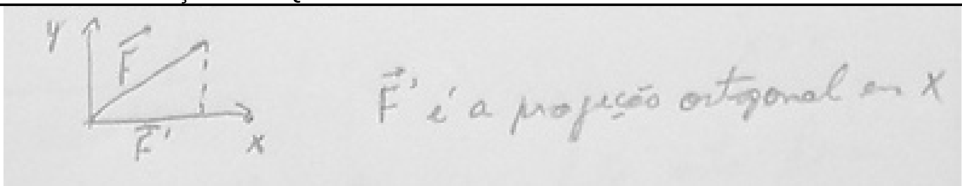
GRÁFICO 29 – INSTITUIÇÃO A – QUESTÃO 1



NOTA: Amostra de nove estudantes.

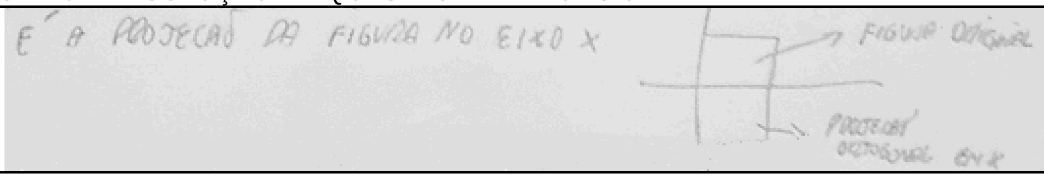
Analisando este gráfico, podemos notar que, na questão "1a", ocorreram quatro acertos e cinco erros, ou seja, nenhuma questão foi apresentada sem resolução. Na análise das respostas desta questão, que solicitava alguma informação do aluno a respeito da projeção ortogonal no plano sobre o eixo x, notamos que a maior parte dos estudantes utilizou o registro da língua natural de emprego comum. Ressaltamos que três alunos apresentaram a concepção de projeção ortogonal sobre o eixo x somente por meio da representação gráfica desta transformação. Dos quatro acertos, dois ocorreram na língua natural e dois no registro gráfico. A seguir, será apresentada a resolução gráfica do aluno 3A.

FIGURA 8 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1A – ALUNO 3A



Três alunos apresentaram confusão entre projeção e reflexão, provavelmente por esta última transformação estar mais presente nos livros didáticos de Álgebra Linear. Além disso, este tipo de transformação também é explorado no ensino fundamental e médio. Tal confusão ocorreu tanto no registro gráfico como no da língua natural. A seguir, será apresentada a resolução gráfica do aluno 9A que ilustra tal confusão.

FIGURA 9 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1A – ALUNO 9A



Na resolução do item “b” desta mesma questão, apesar de mais da metade do grupo classificar a projeção ortogonal sobre o eixo x como uma transformação linear, somente um aluno justificou a linearidade desta transformação, baseado no fato de serem lineares as coordenadas de sua imagem. Nenhum aluno utilizou as condições presentes na definição de transformação linear. Oito respostas foram dadas na língua natural de emprego comum. Nesta situação, um estudante apresentou, também, a representação gráfica, só que a de uma reflexão. Destaca-se que a expressão na língua natural normalmente ocorreu de maneira confusa ou inadequada, conforme exemplificado a seguir.

QUADRO 54 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 1B – INSTITUIÇÃO A

b) A projeção ortogonal no plano x0y sobre o eixo x é uma transformação linear? Justifique. *“Não necessariamente. Quando é aplicada a transformada e em seguida procuramos a projeção, a mesma pode ser usada para calcularmos o resultado.”* (Aluno 5A). “Sim, pois compõe o resultado final que pode ser representado pelas projeções.” (Aluno 6A) “Depende, pois para ser transformação linear é necessário que passe pela origem. Ex: uma reta, um plano.” (Aluno 2A)

A propriedade da transformação linear, na qual a imagem do vetor nulo do domínio resulta no vetor nulo do contradomínio, ocorreu na resposta do estudante 2A, porém, a mesma foi utilizada de forma incorreta. Isso parece mostrar que certos conceitos estão presentes, mas não são aplicados de forma satisfatória na resolução de novas situações.

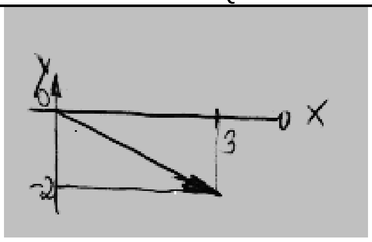
No item "c_1" desta questão, que solicitava a representação algébrica da projeção ortogonal sobre o eixo x, foi verificado que apenas um aluno apresentou corretamente F(x,y) = (x,0). Na resolução deste item, notamos respostas do tipo F(x,y)=x e F(2,3)=2, sendo que estas resoluções foram acompanhadas da representação gráfica correta. Com isso, observamos deficiências na representação algébrica, apesar do conhecimento do efeito geométrico da projeção. Novamente neste item, houve a ocorrência de confusão entre projeção e reflexão, uma vez que um aluno apresentou a forma algébrica como $F(x,y) = (x,-y)$.

No item "c_2", o qual solicitava a representação gráfica da transformação em questão, foram verificados seis acertos, o que revela que a maioria dos estudantes deste grupo consegue representar, na forma gráfica, a projeção ortogonal sobre o eixo x. Destas representações, cinco foram dadas sobre um vetor genérico e uma foi realizada para um caso particular. Dos dois erros, notamos novamente confusão entre projeção e reflexão. Notamos que o estudante que apresentou a primeira representação gráfica incorreta, estabeleceu satisfatoriamente a forma algébrica no item "c_1" desta mesma questão, o que parece denotar que o mesmo não estabelece uma coordenação eficiente da conversão entre estes dois registros.

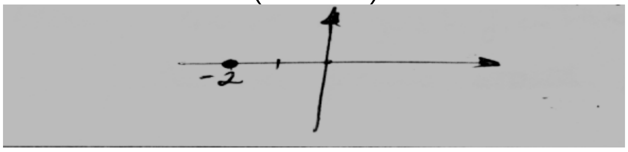
No item "d" desta questão, o qual solicitava a matriz da projeção ortogonal sobre o eixo x em relação à base canônica do R^2, ocorreu apenas um acerto. Um erro freqüente neste grupo, foi a confusão entre matriz da transformação na base canônica e matriz com os vetores da base canônica, ou seja, quatro alunos apresentaram, como resposta, a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e um ofereceu a matriz 3x3 com os vetores da base canônica do R^3. Este fato revela que para o grupo em questão, não há domínio da representação numérico-tabular de uma transformação linear.

Somente dois estudantes apresentaram corretamente a imagem do vetor (3,-2) pela projeção ortogonal sobre o eixo x, solicitada no item “e” desta questão. Um deles utilizou as representações gráfica e numérica e o outro forneceu a resposta na língua natural de emprego comum e na representação numérica. Das questões incorretas, duas buscaram a representação gráfica e duas foram dadas na língua natural de emprego comum. Ainda, três alunos não apresentaram qualquer resolução para este item. O quadro, a seguir, contém as resoluções gráficas incorretas apresentadas.

QUADRO 55 – RESOLUÇÕES INCORRETAS DA QUESTÃO 1E – INSTITUIÇÃO A



(Aluno 6A)

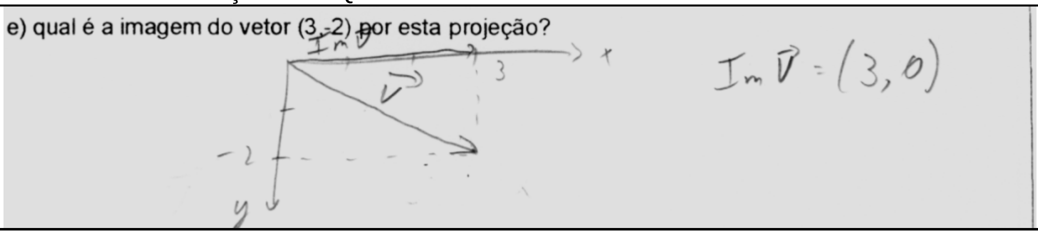


(Aluno 8A)

Neste aspecto, podemos observar que, apesar de seis estudantes apresentarem corretamente a imagem gráfica de um vetor no item “c” desta questão, apenas dois sujeitos forneceram a representação correta para este caso particular.

A seguir, será apresentada a resolução correta do aluno 3A, tanto no registro gráfico como no numérico.

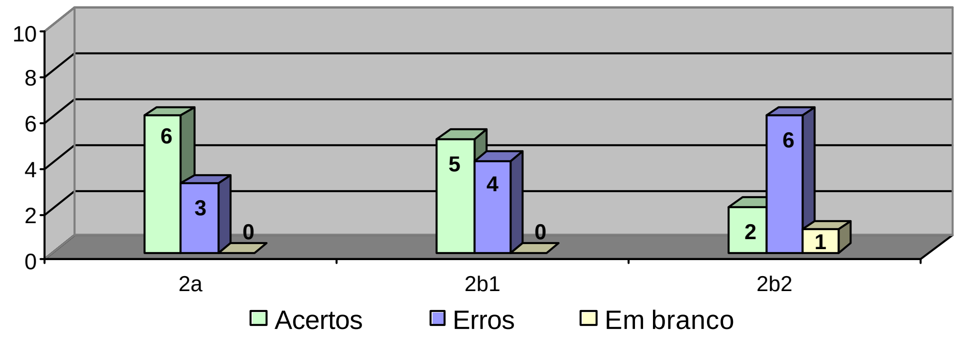
FIGURA 10 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1E – ALUNO 3A



Analisando todas as resoluções desta questão, podemos concluir que, dos diversos registros solicitados, o maior índice de acertos ocorreu no uso da representação gráfica. Ainda, este registro foi utilizado inclusive em questões que não o solicitavam, como por exemplo, para definir a projeção ou para determinar a imagem do vetor (3,-2). As representações simbólico-algébrica e numérico-tabular tiveram um índice baixo de acerto e o registro da língua natural de emprego comum foi constantemente utilizado, porém, de forma muito confusa ou inadequada. As conversões foram pouco estabelecidas nestas questões, tendo em vista que, apesar de seis alunos apresentarem a representação gráfica correta desta projeção, somente um forneceu a forma algébrica e apenas dois souberam determinar a imagem do vetor (3,-2). Embora grande parte do grupo tenha classificado a projeção ortogonal sobre o eixo x como uma transformação linear, as condições de linearidade não foram utilizadas nas justificativas solicitadas.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes da Instituição A na segunda questão proposta no teste.

GRÁFICO 30 – INSTITUIÇÃO A – QUESTÃO 2

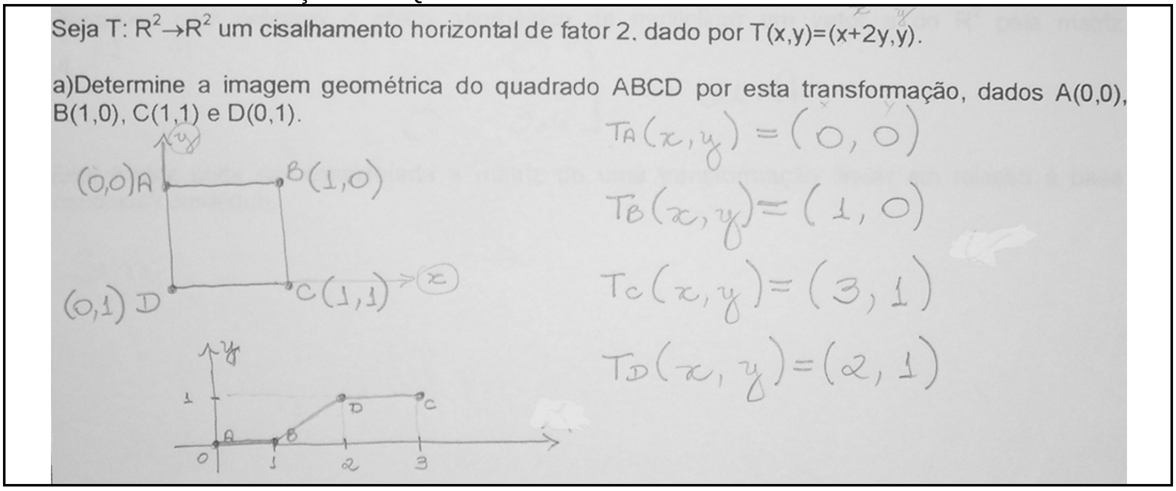


NOTA: Amostra de nove estudantes.

Observando este gráfico, pode-se notar que o item “a” da questão 2, que solicitava a imagem geométrica do quadrado unitário por um cisalhamento horizontal de fator 2, teve um índice satisfatório de acerto e nenhuma questão em branco.

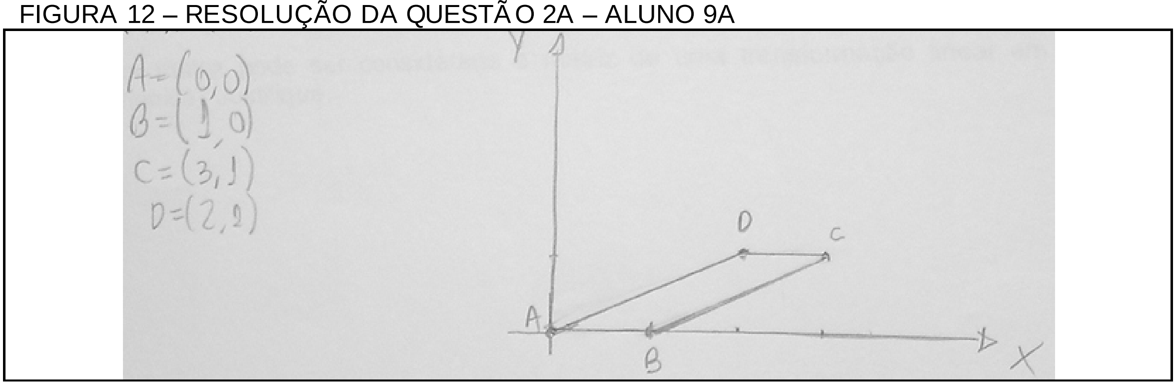
Seis dos nove alunos estabeleceram as duas conversões necessárias para a resolução da questão, ou seja, as transformações simbólico-algébrico/numérico e numérico/gráfico. Ainda, um estudante realizou a conversão do simbólico-algébrico para o numérico, mas não forneceu a representação gráfica correta, fato que pode ser observado a seguir.

FIGURA 11 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2A – ALUNO 7A



As outras duas resoluções continham apenas a representação do quadrado unitário do enunciado. Com isso, nota-se que aproximadamente 78% do grupo estabeleceu corretamente a conversão do simbólico-algébrico para o numérico e aproximadamente 66% do total estabeleceu a do numérico para o gráfico. A seguir, está reproduzida a resolução correta do aluno 9A.

FIGURA 12 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2A – ALUNO 9A



No item “b” desta questão, apesar de cinco alunos afirmarem que a função apresentada é uma transformação linear, apenas um estudante procurou demonstrar este fato, mas utilizou apenas a condição da adição de dois vetores. Um estudante justificou a linearidade tendo por base o fato de serem lineares as componentes da imagem. Com exceção do aluno que utilizou a condição da adição, os demais estabeleceram justificativas utilizando o registro da língua natural de emprego comum. O quadro, a seguir, apresenta exemplos de justificativas fornecidas por estes estudantes, avaliadas como incorretas.

QUADRO 56 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 2B – INSTITUIÇÃO A

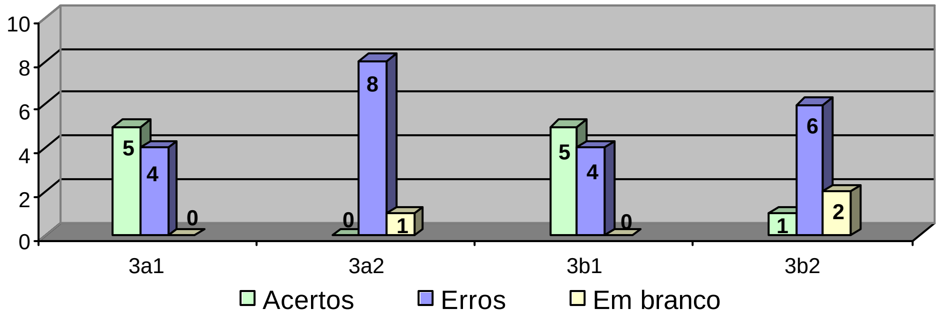
"Negativo, pois houve distorção da imagem final, para ser transf linear teria-se que preservar o seu formato (quadrado)." (Aluno 4A). *"Não, porque houve deformação da figura."* (Aluno 9A). *"Sim, pois existe uma regra para a realocação de todos os pontos."* (Aluno 6A). *"Sim, pois é possível."* (Aluno 1A)

Nas respostas dos alunos 4A e 9A, notamos que os mesmos não têm a concepção geométrica de que a transformação linear preserva o alinhamento, mas sim, a noção equivocada de que tal transformação preserva o formato original do objeto. A resposta do aluno 6A revela o fato de que tal estudante identifica a transformação linear com a representação algébrica de função, ou seja, com uma forma de representação. Podemos notar que a sua afirmação não indica a necessidade da linearidade das coordenadas do vetor imagem.

Como já era esperado, houve um índice satisfatório de acerto na primeira parte desta questão. Na análise dos livros didáticos, foi observado que uma das conversões mais exploradas é aquela que parte do simbólico-algébrico para o numérico. Diante dos resultados obtidos, nota-se que houve um sucesso significativo por parte deste grupo no desenvolvimento deste item. Em contrapartida, verificou-se que poucos alunos apresentaram justificativas para a linearidade desta função. Ressaltamos, neste momento, que apenas um estudante identificou a transformação linear como uma aplicação entre espaços vetoriais que preserva a soma e a multiplicação por escalar.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes da Instituição A na terceira questão proposta no teste.

GRÁFICO 31 – INSTITUIÇÃO A – QUESTÃO 3



NOTA: Amostra de nove estudantes.

No item a_1 da questão 3, a maioria dos estudantes afirmou a impossibilidade de um quadrado ser transformado em circunferência por meio de uma transformação linear, porém, nenhum estudante justificou tal fato na questão $3a_2$. Certas resoluções, apesar de classificadas como incorretas, parecem indicar a idéia de que a transformação linear preserva o alinhamento, conforme exemplificado a seguir.

QUADRO 57 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3A – ALUNO 7A

"Não existe uma transformação linear que transforma um quadrado em uma circunferência, pois o quadrado é constituído de retas e uma circunferência por parábolas."

No item "b" dessa mesma questão, ocorreu praticamente a mesma situação, ou seja, cinco alunos afirmaram a possibilidade de transformar um quadrado em segmento por meio de uma transformação linear, mas nenhum justificou corretamente tal fato. Apenas um aluno apresentou a "idéia" de projeção, porém considerou que o quadrado tem faces, conforme reproduzido a seguir.

QUADRO 58 – RESPOSTA DA QUESTÃO 3B – ALUNO 6A

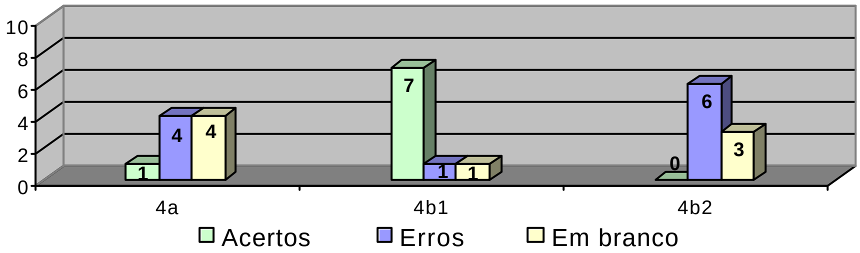
"Sim, a partir do momento que uma das faces se sobreponha à sua face oposta."

Concluindo, os resultados da análise desta questão parecem denotar que, apesar de certos alunos afirmarem corretamente a possibilidade geométrica da imagem de um quadrado por meio de uma transformação linear, nenhum estudante estabeleceu a justificativa correta para estas afirmações. Era esperado que os sujeitos justificassem a transformação do quadrado em segmento utilizando a noção de projeção presente na primeira questão, porém, esta transferência não ocorreu. Todas as respostas foram dadas no registro da língua natural de emprego comum e poucas questões foram deixadas sem resolução.

Neste grupo, observamos que três estudantes apresentaram a idéia de que a transformação linear não "deforma" o objeto. Inicialmente, tal fato parecia indicar a noção de que o alinhamento era preservado, porém, notamos que esta não era a compreensão estabelecida, uma vez que o cisalhamento foi considerado por estes estudantes como não-linear também por deformar o quadrado.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes da Instituição A na quarta questão proposta no teste.

GRÁFICO 32 – INSTITUIÇÃO A – QUESTÃO 4



NOTA: Amostra de nove estudantes.

Quase a metade dos alunos deixou o item “a” desta questão sem resolução, ou seja, não soube relatar que tipo de efeito geométrico ocorre ao efetuar o produto da matriz A por um vetor do plano. A única resposta considerada correta foi dada no registro da língua natural de emprego comum, conforme apresentado a seguir.

QUADRO 59 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 4A – ALUNO 5A

Descrever, com palavras, o efeito geométrico de multiplicar um vetor x pela matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
“Dilatação em relação aos eixos x e y.”

Podemos observar que o estudante não diferenciou o tipo de dilatação que ocorreria nas direções dos eixos “x” e “y” e também não apresentou a tentativa de multiplicar a matriz por um vetor para analisar o tipo de efeito geométrico ocorrido, ou seja, a resposta foi dada apenas pela observação dos elementos da matriz. Ainda, dois estudantes apresentaram notações incorretas na multiplicação da matriz A por um vetor e não estabeleceram o efeito geométrico solicitado.

No item “b_1” desta questão, sete alunos afirmaram que a matriz poderia ser considerada a matriz de uma transformação linear em relação à base canônica, mas nenhum justificou tal afirmação no item “b_2”. Somente três alunos não apresentaram resolução para este item e seis estabeleceram resoluções incorretas. No quadro, a seguir, será apresentada uma amostra dessas resoluções.

QUADRO 60 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 4B – INSTITUIÇÃO A

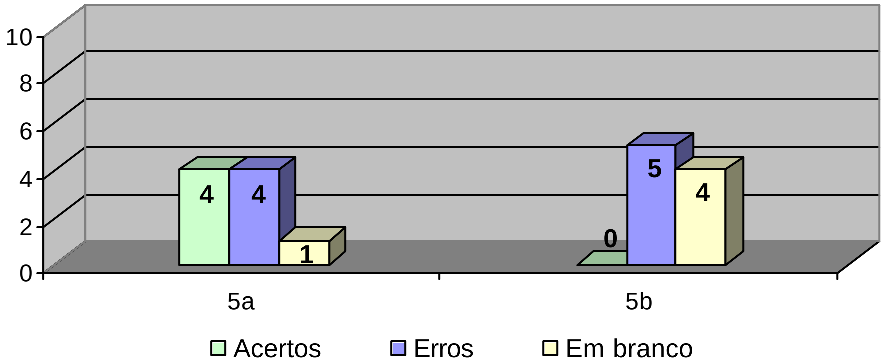
"Sim, pois as matrizes são quadradas e o determinante é diferente de zero." (Aluno 2A).
"Sim, pois nas bases canônicas existe uma parcela para x e outra para y." (Aluno 6A).
"Não houve transformação linear." (Aluno 3A).
"Sim, pois possui uma diagonal de "0"." (Aluno 1A).

Nota-se que neste item, nenhum aluno apresentou as condições de linearidade ou o conhecimento prévio de matriz de expansão não uniforme em relação à base canônica do R^2.

De um modo geral, os resultados da análise desta questão mostraram que poucos estudantes procuram estabelecer tentativas de conversão entre a matriz e um vetor para analisar o conseqüente efeito geométrico. A maioria procurou oferecer respostas na língua natural de emprego comum, baseadas somente na observação dos dados da questão, o que na maior parte das vezes conduziu ao erro. Apesar de a maioria dos alunos afirmar que a matriz dada é uma matriz de transformação linear, notamos que as justificativas não buscaram as propriedades dessa transformação ou o conhecimento prévio de matriz de uma expansão não uniforme no plano em relação à base canônica.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes da Instituição A na última questão proposta no teste.

GRÁFICO 33 – INSTITUIÇÃO A – QUESTÃO 5



NOTA: Amostra de nove estudantes.

Quatro estudantes assinalaram a opção correta, porém, tais respostas parecem ter sido dadas a esmo, pois não havia registros de tentativas de resolução. Na justificativa desta questão – item 5b – quatro alunos não apresentaram resoluções e cinco justificaram incorretamente. Das cinco resoluções incorretas, somente uma destacou os pontos de cada figura, ou seja, estabeleceu uma conversão no sentido do gráfico para o numérico. Nota-se que dois alunos apresentaram confusão entre os pontos presentes na representação gráfica e os valores na matriz, pois eles tentaram relacionar os vértices aos elementos presentes na representação tabular, como pode ser exemplificado pela resolução do aluno 7A, que marcou o item “d” e apresentou como justificativa a seguinte afirmação: “*Porque a figura representa estes pontos*”.

De uma forma geral, pôde-se constatar que os estudantes não buscaram estabelecer conversões partindo do registro gráfico, uma vez que muitos apenas assinalaram uma das alternativas. Deste modo, nota-se que há deficiências no conhecimento da representação numérico-tabular e dificuldades no estabelecimento de conversões que partem do registro gráfico.

4.2.1.1. Conclusão da análise da instituição A

Da análise das respostas oferecidas pelo grupo neste teste, pôde-se constatar que houve, principalmente na questão “1”, a busca pela representação gráfica, tendo em vista que este registro foi utilizado mesmo em questões que não o exigiam. Tal fato não era esperado, principalmente porque a referência bibliográfica de Álgebra Linear utilizada por estes estudantes foi o **Livro 1**, o qual praticamente não explora o registro gráfico.

Em entrevista com o professor responsável pela disciplina de Álgebra Linear, o mesmo relatou que inclui em sua prática docente, o trabalho com o registro gráfico nesta parte do conteúdo. Ao ser questionado sobre o livro-texto que adota para desenvolver as transformações, já que a obra indicada praticamente não explora a sua representação geométrica, o docente relatou que não utiliza uma obra específica. Cabe aqui estabelecer um paralelo com as pesquisas de BEHAJ E ARSAC (1998), já relatadas na revisão bibliográfica deste trabalho, as quais revelaram que os docentes nem sempre se prendem a um tipo fixo de estruturação de curso e que muitas vezes o organizam segundo suas próprias idéias sobre a aprendizagem.

Retomando a análise da amostra da Instituição A, pode-se destacar que, apesar do registro gráfico ser constantemente utilizado, o conhecimento deste tipo de representação não foi suficiente, em certos casos, para a resolução de outras questões. Por exemplo, houve alunos que representaram corretamente a imagem gráfica de um vetor qualquer por uma projeção ortogonal sobre o eixo x, mas não conseguiram oferecer a imagem do vetor (3,-2) solicitada na questão “1e”. O registro mais utilizado pelo grupo foi o da língua natural de emprego comum, apesar do mesmo ser apresentado, na maior parte das vezes, de maneira confusa. Por fim, pôde-se constatar uma grande deficiência no domínio da representação numérico- tabular.

No teste em geral, observou-se que os estudantes praticamente não buscaram estabelecer conversões, a não ser quando este tipo de transformação era explicitamente especificado no enunciado, como no caso da questão 2. Para ilustrar tal afirmação, pode-se observar que, na questão 4, esperava-se do estudante o estabelecimento da conversão do registro numérico-tabular para o gráfico, a fim de analisar o efeito geométrico da multiplicação da matriz dada por um vetor. Na questão 5, supunha-se que o estudante, partindo do registro gráfico, determinasse as representações em pares ordenados dos vértices das figuras, analisando, por produto matricial ou mesmo por conversão do registro tabular para o algébrico, a matriz condizente à situação. No entanto, nestes casos em particular, notamos que os estudantes normalmente ofereceram resoluções baseadas na percepção, produzindo, em sua maioria, respostas dadas no registro da língua natural de uso comum.

A conversão de maior sucesso foi aquela que partia do algébrico para o numérico, o que já era esperado, tendo em vista que a análise dos livros apontou o fato de tal operação ser a mais freqüente. Já situações que envolviam conversões partindo do registro gráfico ou do numérico-tabular foram as de menor êxito, resultado também previsto, uma vez que a análise dos livros didáticos de Álgebra Linear revelou que as conversões envolvendo o registro gráfico são pouco realizadas, principalmente aquelas que partem deste tipo de representação.

Além disso, com exceção dos livros 3 e 4, a representação numérico-tabular é explorada principalmente quando se trata do tópico “Matriz de uma Transformação Linear” e não durante a exposição geral do conteúdo. Por fim, podemos afirmar que neste grupo não há domínio da definição formal de transformação linear, pois somente um aluno apresentou as condições de soma e multiplicação por escalar para justificar a linearidade da transformação em uma dada questão.

Estabelecendo uma relação entre as respostas apresentadas no item “b” da questão 2 e nos itens “a_2” e “b_2” da questão 3, notamos que três alunos negaram a linearidade do cisalhamento e também a possibilidade do quadrado ser transformado em circunferência ou segmento, baseados no fato de que a transformação linear não deforma o objeto, o que denota uma compreensão geométrica equivocada do efeito deste tipo de transformação. Este fato pode ser exemplificado pela resposta do estudante 9A.

QUADRO 61 – COMPARAÇÃO ENTRE RESPOSTAS DAS QUESTÕES 2 E 3 – ALUNO 9A

Questão 2b) Esta transformação é linear? Justifique. “Não, porque houve deformação da figura.” Questão 3) Existe uma transformação linear que transforma um quadrado em uma circunferência? E uma transformação linear que transforma um quadrado em um segmento? Justifique sua resposta. “Não, porque não existe maneira de transformar um quadrado em uma circunferência ou um segmento sem que para isso ele sofra deformação.”

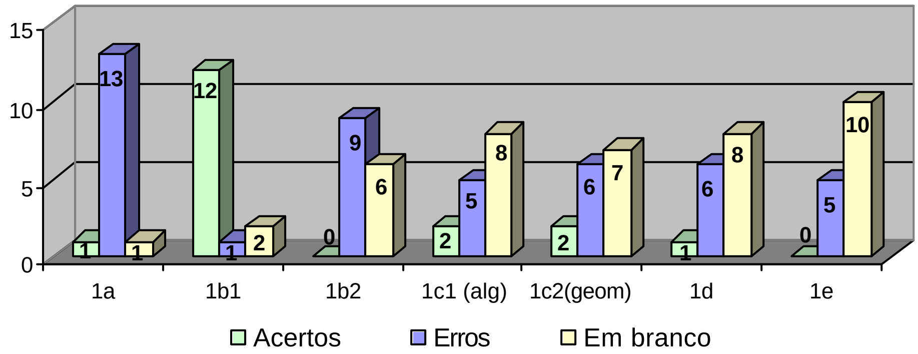
Dos quatro alunos que não afirmaram a linearidade da projeção ortogonal no eixo x na questão “$1b_2$”, três negaram a linearidade do cisalhamento e afirmaram a impossibilidade do quadrado ser transformado em circunferência ou segmento, porém, não utilizaram, na questão “$1b_2$”, idéias semelhantes às respostas apresentadas nas duas questões posteriores. Com isso, podemos afirmar que o grupo em geral não apresentou domínio das possibilidades geométricas obtidas por meio da aplicação de transformações lineares.

4.2.2. Resultados da Instituição B

O teste foi aplicado em uma turma de quinze alunos do curso de Ciência da Computação de uma universidade particular de ensino do Estado de São Paulo, a qual será indicada por Instituição B. O livro-texto de Álgebra Linear utilizado por este grupo foi o **Livro 2**. A seguir, será apresentada a análise das resoluções de cada questão.

O gráfico seguinte contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes da Instituição B na primeira questão proposta no teste.

GRÁFICO 34 – INSTITUIÇÃO B – QUESTÃO 1



NOTA: Amostra de quinze estudantes.

Analisando o primeiro gráfico, pode-se verificar um índice baixo de acertos na questão “1a". Os estudantes que responderam este item utilizaram o registro da língua natural de emprego comum, sendo que apenas um aluno utilizou, também, o registro simbólico-algébrico, embora de forma incorreta. Este aluno ofereceu como forma simbólico-algébrica da projeção solicitada, a representação $F(x,y) = (x,x)$. Houve apenas um acerto, dado na língua natural de emprego comum. Apesar de este registro ter sido utilizado de forma significativa, nota-se, como na amostra anterior, uma grande dificuldade de expressão, conforme exemplificado a seguir.

QUADRO 62 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 1A – INSTITUIÇÃO B

Questão 1. Considerando o plano x0y, o que você entende por projeção ortogonal sobre o eixo x? *“Quando você enxerga pelo plano x o desenho onde se mantém o valor de x mudando o valor dos outros eixos.”* (Aluno 9B). *“É a projeção de pontos de um lado do eixo x para o outro lado.”* (Aluno 13B). *“É a projeção de uma forma qualquer sobre o eixo x de maneira que os pontos pertencentes a reta descreve esta forma ortogonalmente a x.”* (Aluno 15B). *“Forma um ângulo 90^0.”* (Aluno 12B) *“É um polígono onde seus pontos pertencem à um plano onde passa pelo eixo x.”* (Aluno 10B).

Apesar de o estudante 9B oferecer a resolução apresentada no quadro acima, o mesmo descreveu corretamente a forma algébrica da transformação no item “1c”, ou seja, a dificuldade deste aluno parece residir na representação escrita da língua natural. Dois alunos apresentaram confusão entre projeção e reflexão, fato ilustrado pela resolução do aluno 13B no quadro anterior.

Ressaltamos, neste momento, que essa situação também ocorreu na amostra da Instituição A. Das treze questões consideradas incorretas, seis registraram a necessidade de o ângulo ser de 90°.

Na resolução do item "b_1" desta mesma questão, quase a totalidade respondeu que a projeção ortogonal no eixo x é uma transformação linear, embora nenhum aluno tenha justificado corretamente esta afirmação no item "b_2". Foram dadas nove justificativas incorretas, todas no registro da língua natural. O quadro, a seguir, contém exemplos de algumas respostas fornecidas pelo grupo.

QUADRO 63 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 1B – INSTITUIÇÃO B

A projeção ortogonal no plano sobre o eixo x é uma transformação linear? Justifique. *"Sim, é uma função."* (Aluno 2B) *"Sim, pois todos os pontos continuam presentes."* (Aluno 4B) *"Sim, pois é baseado em vetores."* (Aluno 3B) *"Sim, porque a projeção ortogonal pertence ao plano sobre eixo x."* (Aluno 10B). *"Sim, pois ela corta o eixo x."* (Aluno 7B). *"Não, conceitualmente projeção não é transformação e alem disso o grau de $R^3 \neq R^2$."* (Aluno 1B).

Nenhum aluno utilizou as condições presentes na definição de transformação linear ou mesmo o fato de a forma algébrica da projeção ser composta por componentes lineares. A resposta do aluno 2B parece mostrar que, em sua concepção, qualquer função é uma transformação linear. Os estudantes 4B e 7B denotam problemas na concepção geométrica da imagem de um vetor por meio da aplicação de uma transformação linear. As respostas dos estudantes 10B e 1B mostram a concepção errônea de que transformações lineares devem ocorrer somente entre espaços vetoriais iguais. Este fato talvez seja decorrente dos livros de Álgebra Linear analisados praticamente não explorarem situações geométricas entre espaços de dimensões diferentes.

No item "c_1" desta questão, apenas dois estudantes apresentaram a representação algébrica desta transformação como F(x,y) = (x,0). Na resolução desta questão, notamos respostas do tipo F(x,y) = (x,x), F(x,y) = (ax,y) e $F(x,y) = (-x,y)$. Foi observado que este grupo procurou realizar tentativas de obtenção da forma algébrica da transformação sem relacioná-la a sua representação gráfica, ao contrário do grupo da Instituição A. Neste bloco, oito questões foram dadas sem resolução. Com isso, notamos deficiências no domínio da representação algébrica na amostra analisada.

No item “c_2”, que solicitava a representação gráfica da projeção, houve apenas dois acertos, o que aponta que, ao contrário da amostra da Instituição A, poucos estudantes deste grupo conseguem representar graficamente a projeção ortogonal sobre o eixo x. Sete questões foram deixadas em branco e, das seis incorretas, duas apresentaram confusão entre projeção e reflexão, uma apresentou a projeção como o segmento que une a extremidade do vetor e sua imagem e três representaram graficamente apenas um vetor, sem a sua imagem pela projeção.

No item “d” desta questão, ocorreu apenas um acerto. Destaca-se o fato de que oito estudantes não apresentaram qualquer resolução para este item. Como observado na instituição A, um erro freqüente deste grupo também foi a confusão entre matriz da transformação na base canônica e matriz com os vetores da base canônica do plano, pois 50% dos alunos que responderam incorretamente a questão, apresentaram como resposta a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Este fato revela que, para o grupo em questão, também há deficiências no domínio da representação numérico-tabular de uma transformação linear.

Nenhum estudante apresentou a imagem do vetor (3,-2). Dez questões foram deixadas sem resolução e, das cinco restantes, quatro foram dadas no registro numérico e uma no registro gráfico. Vale salientar que, mesmo aqueles que apresentaram corretamente uma das formas de representação da projeção (simbólico-algébrica, gráfica ou numérico-tabular), responderam incorretamente este item.

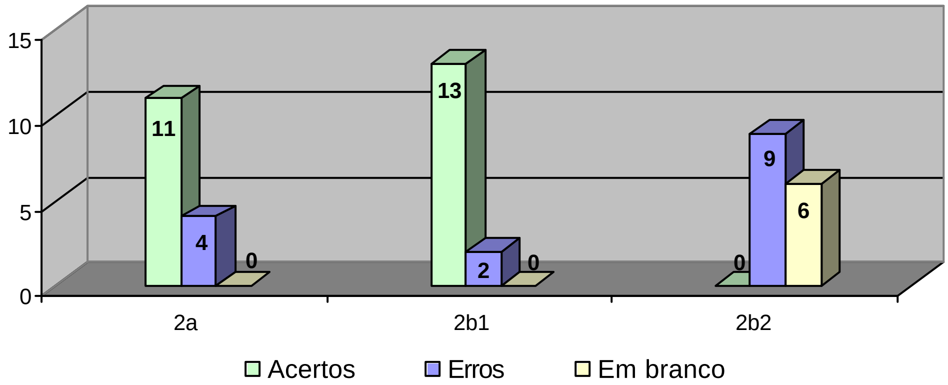
Deste modo, concluímos que as conversões entre registros não estão sendo bem coordenadas por estes estudantes. Por exemplo, um dos alunos que apresentou a função F(x,y) = (x,0), ofereceu x=3 como imagem do vetor (3,-2). Ainda, o aluno que acertou as três representações solicitadas nos itens anteriores, deixou este item em branco.

Analisando todas as resoluções desta questão, podemos concluir que este grupo não apresentou um domínio satisfatório das diversas representações da aplicação linear solicitada. A definição de transformação linear, por meio das condições da soma e multiplicação por escalar, não ocorreu neste grupo. Esta situação parece denotar que, embora o grupo tenha estudado o conteúdo de transformação linear, o conceito formal, aplicado neste caso particular, também não foi dominado.

Nota-se, ainda, que os estudantes não realizaram espontaneamente tentativas de conversão entre registros, sendo observado o predomínio do registro da língua natural de emprego comum, porém, de modo insatisfatório na maioria das resoluções. Por fim, pôde-se observar que muitos itens desta questão foram deixados sem resolução.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes da Instituição B na segunda questão proposta no teste.

GRÁFICO 35 – INSTITUIÇÃO B – QUESTÃO 2

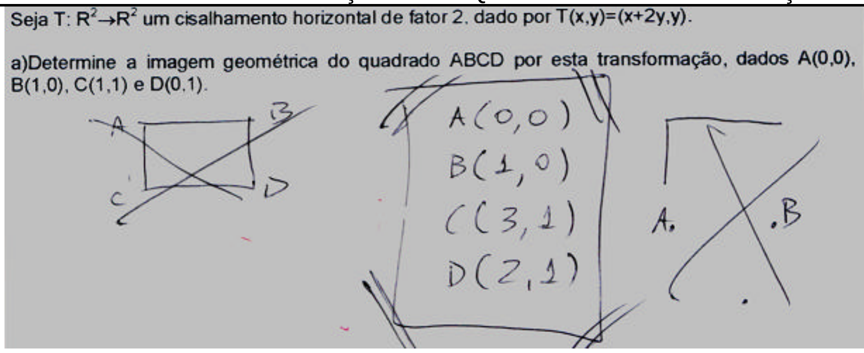


NOTA: Amostra de quinze estudantes.

O item “a” da questão 2 teve um índice satisfatório de acerto e nenhuma questão em branco. Acima de 70% dos alunos resolveram corretamente esta questão, estabelecendo o ciclo de conversões algébrico/numérico/gráfico. Das quatro questões consideradas incorretas, três estabeleceram corretamente a conversão intermediária do algébrico para o numérico, mas apresentaram ou erro na representação gráfica ou a inexistência desta representação.

A seguir, apresentamos a resolução de um estudante que estabeleceu apenas a conversão do algébrico para o numérico e outra em que a representação gráfica foi dada de forma incorreta.

QUADRO 64 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 2A – INSTITUIÇÃO B

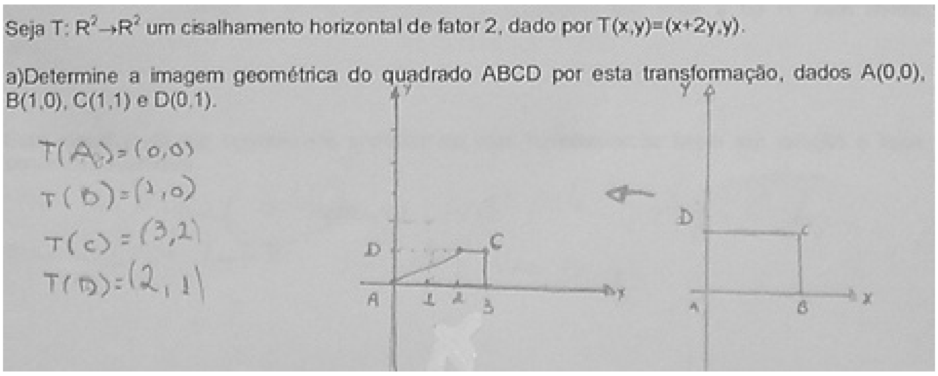


Seja T: $R^2 \rightarrow R^2$ um cisalhamento horizontal de fator 2, dado por T(x,y)=(x+2y,y).

a)Determine a imagem geométrica do quadrado ABCD por esta transformação, dados A(0,0), B(1,0), C(1,1) e D(0,1).

A(0,0)
B(1,0)
C(3,1)
D(2,1)

(Aluno 2B)



Seja T: $R^2 \rightarrow R^2$ um cisalhamento horizontal de fator 2, dado por T(x,y)=(x+2y,y).

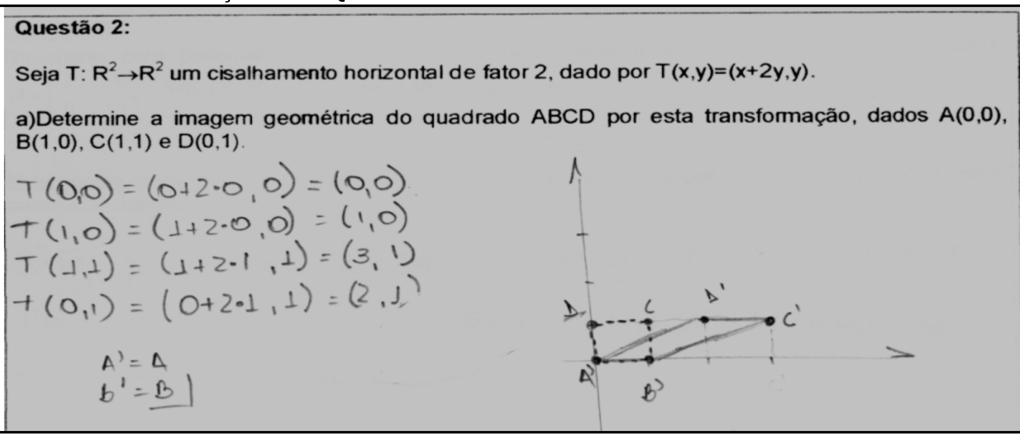
a)Determine a imagem geométrica do quadrado ABCD por esta transformação, dados A(0,0), B(1,0), C(1,1) e D(0,1).

T(A)=(0,0)
T(B)=(1,0)
T(C)=(3,2)
T(D)=(2,1)

(Aluno 12B)

Sendo assim, a conversão do algébrico para o numérico foi estabelecida por quatorze dos quinze estudantes, ou seja, por mais de 90% dos alunos. A seguir, apresentaremos a resolução correta do aluno 14B.

FIGURA 13 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2A – ALUNO 14B



Questão 2:

Seja T: $R^2 \rightarrow R^2$ um cisalhamento horizontal de fator 2, dado por T(x,y)=(x+2y,y).

a)Determine a imagem geométrica do quadrado ABCD por esta transformação, dados A(0,0), B(1,0), C(1,1) e D(0,1).

T(0,0) = (0+2·0, 0) = (0,0)
T(1,0) = (1+2·0, 0) = (1,0)
T(1,1) = (1+2·1, 1) = (3,1)
T(0,1) = (0+2·1, 1) = (2,1)

A' = A
B' = B

No item “b” desta questão, apesar de treze alunos afirmarem que a transformação é linear, nenhum conseguiu justificar esta situação satisfatoriamente. Na questão que solicitava a justificativa, seis estudantes não apresentaram resolução. Nas questões resolvidas, a língua natural de emprego comum foi a única representação utilizada. Ainda, nenhum aluno apresentou como justificativa as duas condições presentes na definição de transformação linear. A seguir, será apresentada uma amostra das justificativas oferecidas pelo grupo.

QUADRO 65 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 2B – INSTITUIÇÃO B

"Sim, pois é a transformação de vetores, baseado em uma equação." (Aluno 3B) *"Não, pois as proporções do desenho foram alteradas."* (Aluno 9B) *"Sim, através de uma função de transformação linear os pontos são transformados e geram a imagem resultante do cisalhamento."* (aluno 13B) *"Sim a função T que leva os elementos que estão em R^2 para R^2 é uma transformação linear."* (Aluno 15B). *"Sim pois grau de $R^2 = R^2$ (2=2)."* (Aluno 1B) *"Sim, pois é do 1º grau."* (Aluno 2B).

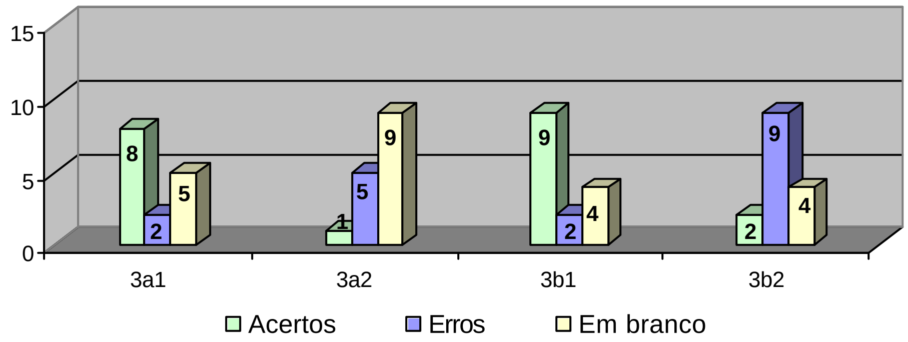
Nesta amostra, notamos que as justificativas incorretas foram dadas na língua natural de emprego comum, apoiadas na percepção geométrica ou com base na representação algébrica. As respostas dos alunos 3B e 13B mostram a identificação de transformação linear com a sua representação algébrica, fato também presente na resposta do aluno 6 da Instituição A. Neste caso, tais alunos parecem associar função com um tipo particular de representação. A resolução do aluno 9B, baseada na percepção geométrica, revela que o mesmo concebe a transformação linear como uma função que não altera a proporção, o que denota um desconhecimento do efeito geométrico possível por meio desse tipo de aplicação.

Os estudantes 15B e 1B justificaram a linearidade pelo fato da transformação ser feita do plano no plano, o que parece evidenciar uma concepção limitada deste tipo de transformação. O aluno 2B apresentou a sua justificativa baseada na forma algébrica da transformação, porém, alegou que a linearidade seria garantida se as coordenadas da imagem fossem de primeiro grau e não lineares.

Estabelecendo um diagnóstico geral, como já era esperado na análise preliminar do questionário, houve um índice satisfatório de acerto na primeira parte desta questão. Já no item "b", notou-se que os estudantes não demonstraram habilidade em justificar a linearidade desta função. As justificativas não envolveram as duas condições presentes na definição de transformação linear. Frequentemente, as mesmas foram dadas na língua natural de emprego comum, baseadas na representação algébrica ou na percepção geométrica, o que mostra que o conceito formal deste conteúdo não foi dominado pelo grupo.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes da Instituição B na terceira questão proposta no teste.

GRÁFICO 36 – INSTITUIÇÃO B – QUESTÃO 3



NOTA: Amostra de quinze estudantes.

Na questão “3a", mais de 50% do grupo afirmou a impossibilidade de um quadrado ser transformado em circunferência por meio de uma transformação linear, porém, apenas um apresentou a concepção de que este tipo de transformação deve manter o alinhamento. Há respostas, como a do estudante 1B, presente no quadro seguinte, que apesar de serem consideradas incorretas, parecem refletir uma vaga idéia de que a transformação linear deve preservar o alinhamento. Todas as respostas foram dadas no registro da língua natural de emprego comum. O quadro, a seguir, contém uma amostra das respostas consideradas incorretas, oferecidas pelo grupo nesta questão.

QUADRO 66 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 3A – INSTITUIÇÃO B

3. Existe uma transformação linear que transforma um quadrado em uma circunferência?Justifique. “Não, porque não teria como, por serem áreas diferentes.” (Aluno 12B). “A definição de um quadrado é feita por 4 pontos e uma circunferência precisa de infinitos pontos, não há transformação linear nesse caso.” (Aluno 1B). “Sim, porque os pontos muda de uma mesma forma.” (Aluno 10B).

Na questão “3b”, nove alunos afirmaram a possibilidade de um quadrado ser transformado em segmento, mas somente dois justificaram corretamente, utilizando, para isso, o exemplo da projeção ortogonal. O quadro a seguir contém uma amostra das justificativas apresentadas pelo grupo.

QUADRO 67 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 3B – INSTITUIÇÃO B

E uma transformação linear que transforma um quadrado em segmento? Justifique sua resposta. “Já transformar um quadrado em um segmento pode ocorrer por meio de projeção ortogonal.” (Aluno 9B). “Sim, a projeção ortogonal de um quadrado, é um segmento.” (Aluno 5B). “Sim. Dado um quadrado ABCD, é só usar cizalhamento (sic) horizontal, A ser igual a B e C ser igual a D.”(Aluno11B)

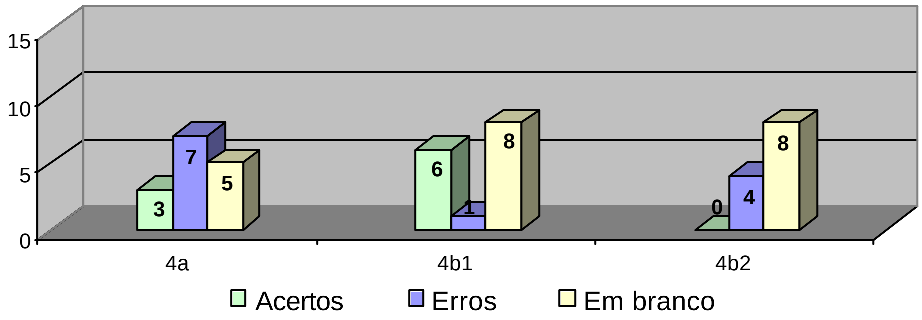
Os estudantes 9B e 5B foram os únicos que utilizaram a noção de projeção ortogonal como justificativa. Cabe destacar que o aluno 5B apresentou corretamente os registros algébrico, gráfico e numérico-tabular da projeção ortogonal solicitada na questão 1. Apesar de o aluno 9B não ter apresentado corretamente a definição ou qualquer representação da projeção ortogonal sobre o eixo x na questão 1, o mesmo soube analisar o efeito geométrico neste caso particular.

O aluno 11B afirmou a possibilidade de obter o segmento por meio de um cisalhamento horizontal. Esta noção ocorreu em duas resoluções deste grupo e também na resposta de um aluno da aplicação preliminar do teste. Esta afirmação parece indicar que tais estudantes não estabeleceram uma coordenação efetiva entre os registros algébrico e gráfico, uma vez que seria impossível obter tal imagem pelo cisalhamento horizontal, tendo em vista que a ordenada da imagem de sua forma algébrica F(x,y) = (x+ay,y) é mantida. Com isso, não há como alinhar os pontos do quadrado.

Os resultados da análise geral desta questão parecem indicar que parte dos alunos tem uma visão da possibilidade geométrica da imagem de um quadrado por meio de uma transformação linear, embora apenas um tenha apresentado justificativa coerente para a transformação quadrado-circunferência e somente dois para a transformação quadrado-segmento. Praticamente todas as respostas foram dadas no registro da língua natural de emprego comum e grande parte das questões foi deixada sem resolução. Novamente, percebe-se que certas respostas são dadas com base mais na percepção visual do que em uma análise consciente dos registros utilizados. Exemplificando, basta observar que houve alunos que utilizaram o cisalhamento horizontal como meio de transformar o quadrado em segmento.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes da Instituição B na quarta questão proposta no teste.

GRÁFICO 37 – INSTITUIÇÃO B – QUESTÃO 4



NOTA: Amostra de quinze estudantes.

Na questão 4a, somente três dos quinze alunos alegaram que ocorreria uma expansão e, destes, apenas um relatou o fato da mesma não ser uniforme. Tais respostas foram dadas no registro da língua natural e destas, uma também apresentou a questão no registro simbólico-algébrico. Com exceção deste último, todas as respostas, corretas ou incorretas, foram dadas no registro da língua natural de emprego comum. Com isso, somente um aluno estabeleceu uma conversão do numérico-tabular para o simbólico-algébrico. Nas resoluções apresentadas, não houve qualquer tentativa de estabelecer conversões entre o numérico-tabular e o gráfico, como era esperado. A seguir, será apresentada uma amostra das respostas oferecidas pelo grupo.

QUADRO 68 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 4A – INSTITUIÇÃO B

"A multiplicação de um vetor $u \in R^2$ por uma matriz do tipo A é que estamos fazendo translações e cisalhamento com o vetor u." (Aluno 15B) "Dado um vetor $v(a,b) \in R^2$/ a e b $\in N$ vxA=(2a,3b). O vetor fica dilatado 2x em x e 3x em y." (Aluno 5B). "Vai ocorrer um deslocamento, com uma ampliação." (Aluno 14B) "Haverá uma expansão na figura em relação ao eixo x e ao eixo y." (Aluno 11B)

No item "b_1" desta questão, seis alunos afirmaram que a matriz dada poderia ser considerada a matriz de uma transformação linear em relação à base canônica, mas nenhum soube justificar tal afirmação no item "b_2". Oito questões foram deixadas em branco e um estudante negou o fato da matriz representar uma transformação linear em relação à base canônica, conforme descrito a seguir.

QUADRO 69 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 4B – ALUNO 14B

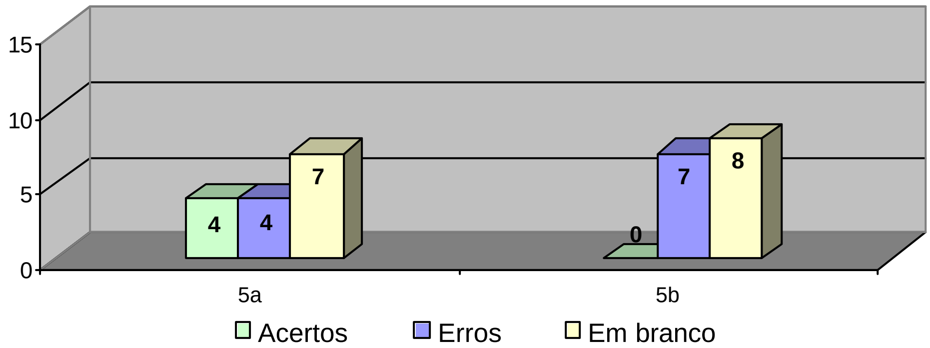
“Não, pois uma base canônica é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, neste caso temos uma transformação linear, mas não em relação à base canônica.”

Novamente, nota-se a confusão de matriz de uma transformação linear em relação à base canônica com matriz dos vetores da base canônica, fato que também ocorreu com este grupo na questão “1d” e com estudantes da amostra da Instituição A.

De um modo geral, os resultados da análise desta questão mostraram que as resoluções praticamente ocorreram no registro da língua natural de emprego comum e com base na percepção, já que praticamente não há tentativas de conversão entre a matriz da transformação e um vetor qualquer para analisar o conseqüente efeito geométrico. Ainda, constatou-se que as duas condições de linearidade também não foram citadas nesta questão.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes da Instituição B na quinta questão proposta no teste.

GRÁFICO 38 – INSTITUIÇÃO B – QUESTÃO 5



NOTA: Amostra de quinze estudantes.

Esta questão foi deixada sem resolução por grande parte dos alunos. Quatro estudantes marcaram o item correto, porém, destes, três apenas assinalaram a questão sem apresentar qualquer registro de tentativa de cálculo ou de análise. O estudante que assinalou corretamente o item “b” e procurou explicar o motivo da escolha, forneceu a justificativa incorreta reproduzida no quadro a seguir.

QUADRO 70 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 5B – ALUNO 14B

“B, pois temos que “diminuir” os valores dos pontos e deslocar, por isso utilizamos essa base”.

Sendo assim, conclui-se que nenhum estudante justificou corretamente a questão. Seis alunos, que marcaram a opção incorreta, destacaram de forma satisfatória os vértices de cada figura. Dois estudantes apresentaram respostas incorretas na língua natural de emprego comum e no registro simbólico-algébrico. Os demais alunos deixaram a questão sem qualquer resolução. Foi observado que nenhum aluno efetuou a multiplicação da matriz pelos vetores representantes dos vértices do quadrado, ou mesmo transformou a matriz para a forma algébrica, com o intuito de determinar as imagens dos vértices da primeira figura. Ainda, as justificativas fornecidas na língua natural de emprego comum foram baseadas mais em conjecturas sobre o desenho do que no estabelecimento consciente de conversões, conforme exemplificado na resolução apresentada pelo aluno 5B, o qual assinalou a alternativa “a”.

QUADRO 71 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 5B – ALUNO 5B

“As coordenadas X e Y são reduzidas pela metade em cada ponto são reduzidas pela metade.”

Concluindo, podemos afirmar que nesta questão, da mesma forma que o grupo da Instituição A, as alternativas assinaladas corretamente não foram justificadas de forma satisfatória. Praticamente não houve tentativas de conversão, exceto no caso do registro gráfico para o numérico, transformação realizada por seis alunos na determinação dos vértices das figuras dadas. É provável que as deficiências apresentadas por estes alunos nas representações tabular e gráfica interferiram no sucesso desta questão, o que revela que há problemas na coordenação dos diversos registros.

4.2.2.1. Conclusão da análise da instituição B

Realizando um diagnóstico geral dos estudantes desta instituição, podemos concluir que, da análise das respostas oferecidas pelo grupo neste teste, houve pouco conhecimento das diferentes representações na questão 1, fato que provavelmente trouxe prejuízos para o estabelecimento de conversões. O registro de maior freqüência foi o da língua natural de emprego comum, porém utilizado de forma pouco satisfatória na maior parte das resoluções. Ao contrário do grupo da Instituição A, esta amostra não estabeleceu tentativas de busca do registro gráfico como apoio para a resolução das questões. As condições da linearidade da definição de transformação linear não surgiram em todo o teste, o que denota que o grupo também não apresenta o domínio da definição de transformação linear usualmente apresentada nos livros didáticos.

Esta amostra deixou várias questões sem resolução, porém, pudemos notar que isso não ocorreu na questão 2. Deste modo, é provável que as questões deixadas em branco sejam aquelas em que o grupo realmente sentiu dificuldades. Da mesma forma que o grupo da Instituição A, notou-se que, no teste em geral, os estudantes praticamente não estabeleceram tentativas de conversão, sendo que as transformações de maior sucesso também foram as que partiam do algébrico para o numérico. Apesar da inabilidade apresentada nas conversões que envolviam os registros gráfico e numérico-tabular, não houve, neste grupo, confusão entre os valores da matriz e os pontos das figuras que compunham a questão 5, porém, a maior parte das justificativas também foi dada com base na percepção visual do desenho.

Estabelecendo uma relação entre as respostas apresentadas no item “b” da questão 1, item “b” da questão 2 e nos itens “a_2” e “b_2” da questão 3, notamos alguns fatos relevantes a serem mencionados. Por exemplo, o estudante 9B estabeleceu uma incoerência em suas justificativas. Na primeira questão, o mesmo afirmou que a projeção ortogonal sobre o eixo x era uma transformação linear porque havia alteração na dimensão do desenho, sendo esta transformação utilizada para justificar a possibilidade do quadrado ser transformado em segmento. Já o mesmo aluno concebeu o cisalhamento como não linear, pelo fato de serem alteradas as proporções do desenho. O estudante 1B mostrou, em suas respostas, uma concepção de transformação linear definida somente em espaços de mesma dimensão, uma vez que negou a linearidade da projeção alegando que *“o grau de* $R^{3}{}^{1}R^{2}$*”* e afirmou a linearidade do cisalhamento porque o *“grau de* $R^2 = R^2$ ”. Neste estudo da relação entre as resoluções dadas nas questões, não houve uma característica especial a ser destacada no grupo como um todo, apenas os casos particulares citados acima.

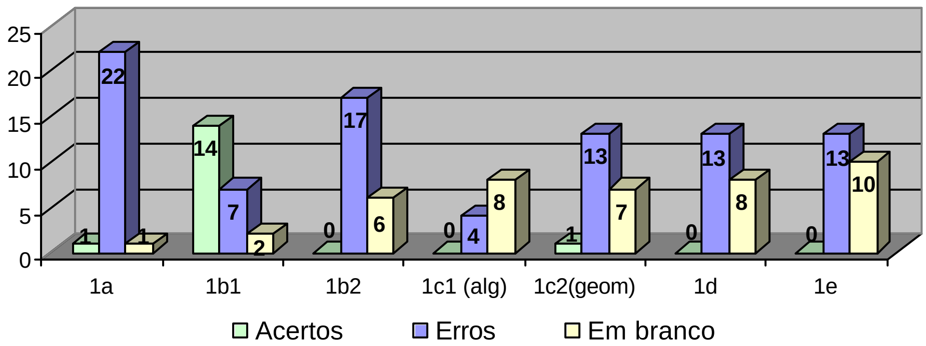
4.2.3. Resultados da Instituição C

O teste foi aplicado em duas turmas do curso de Engenharia da Computação de uma Faculdade Particular de Ensino do Estado de São Paulo, a qual será denotada por Instituição C. Uma das turmas é composta por vinte e quatro alunos e a outra por vinte estudantes. As análises serão apresentadas separadamente, sendo a turma de vinte e quatro alunos denotada por C_1 e a outra por C_2. Estes estudantes cursaram a disciplina de Álgebra Linear tendo por referência bibliográfica os **Livros 2 e 3**. A seguir, serão apresentadas as análises de cada questão.

4.2.3.1. Análise dos resultados do grupo C_1

O gráfico seguinte contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes do grupo C_1 na primeira questão proposta no teste.

GRÁFICO 39 – INSTITUIÇÃO C_1 – QUESTÃO 1



NOTA: Grupo C_1 – Amostra de vinte e quatro estudantes.

Na definição de projeção ortogonal sobre o eixo x, houve apenas um acerto. A maior parte dos alunos utilizou o registro da língua natural de emprego comum, mas dois estudantes também utilizaram o registro gráfico como apoio para a resolução. Destes, um apresentou corretamente a projeção solicitada e o outro apresentou a imagem geométrica de um objeto por meio de uma reflexão em relação ao eixo x. Além dessa resposta, que trocou a projeção ortogonal sobre o eixo x pela reflexão em relação ao eixo x, houve outra ocorrência que estabeleceu essa confusão, conforme exemplificado no quadro a seguir.

QUADRO 72 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1A – ALUNO 17C_1

1a) Considerando o plano x0y, o que você entende por projeção ortogonal sobre o eixo x? "Multiplicar y por -1, ex (x,-y) e projetar de (x,y)."

O uso da língua natural de emprego comum também ocorreu, na maioria das vezes, de forma confusa ou incompleta. Ressalta-se que, em quatro definições consideradas incorretas, foi apresentada a necessidade de o ângulo ser de 90^o. O quadro, a seguir, apresenta exemplos de respostas dadas pelo grupo.

QUADRO 73 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 1A – INSTITUIÇÃO C_1

1a) Considerando o plano x0y, o que você entende por projeção ortogonal sobre o eixo x? "É o eixo do mesmo tamanho e direção projetado no eixo x." (Aluno 24C_1) "Ortogonal é quando a projeção está a 90^o do eixo x." (Aluno 21C_1) "É a projeção de todos os pontos para o eixo y." (Aluno 23C_1) "É a função que determina os pontos de y e z sobre o eixo x." (Aluno 16C_1)

No item "b" desta questão, apesar de quatorze alunos afirmarem que a projeção ortogonal no eixo x é uma transformação linear, nenhum estudante forneceu justificativas corretas. Todas as justificativas foram dadas na língua natural de emprego comum e, nesta fase, não foram citadas as duas condições de linearidade.

A seguir, serão descritas algumas das justificativas apresentadas.

QUADRO 74 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 1B – INSTITUIÇÃO C_1

1b) A projeção ortogonal no plano sobre o eixo x é uma transformação linear? Justifique. "Sim, pois a projeção criará outra imagem mesmo sendo de dimensões iguais." (Aluno 5C_1) "Não, transformação linear é uma transformação de acordo com uma "regra"." (Aluno 9C_1) "Sim, com o plano ortogonal passando no eixo x cruzando no plano torna uma transformação linear." (Aluno 18C_1) "Não, pois não há uma função para fazer esta transformação." (Aluno 23C_1)

As respostas dos alunos 9C_1 e 23C_1 apontam uma associação da transformação com a sua representação algébrica e, como ela não foi dada no enunciado, estes estudantes não conceberam a projeção ortogonal como uma transformação linear. Este tipo de associação também ocorreu com alunos das outras instituições analisadas, conforme descrição apresentada anteriormente.

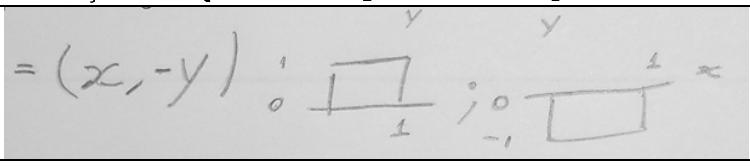
Na questão "1c_1", a qual solicitava a forma algébrica da função, notamos que vinte alunos não apresentaram qualquer resolução e quatro ofereceram respostas incorretas. Cabe destacar que, das questões incorretas, duas apresentaram a forma algébrica da reflexão em relação ao eixo x, ou seja, $F(x,y) = (x,-y)$. Um aluno apresentou F(x,0) e não F(x,y) = (x,0).

Diante desse fato, notamos que o grupo apresenta dificuldades com relação à representação algébrica desta transformação. Além disso, o alto número de questões em branco parece indicar que muitos não têm idéia do que está sendo solicitado, uma vez que o índice de exercícios sem resolução é bem mais baixo nas outras questões propostas no teste.

No item “1c$_2$”, apenas um aluno apresentou corretamente a representação gráfica da projeção ortogonal sobre o eixo x. Das resoluções incorretas, podemos destacar representações de rotação, reflexão e expansão, provavelmente por elas serem mais trabalhadas no curso de Álgebra Linear, conforme observado na análise dos livros didáticos. Além disso, houve ocorrências de representações no R^3 e a apresentação de um vetor sem a sua imagem.

A seguir, reproduziremos a resolução incorreta do estudante 17C$_1$.

FIGURA 14 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1C$_2$ – ALUNO 17C$_1$



Não houve acerto no item “d” desta questão. Dos treze alunos que apresentaram alguma resolução, sete estabeleceram a matriz dessa transformação linear como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Da mesma forma que os outros grupos analisados, grande parte dos alunos confunde a matriz da transformação linear em relação à base canônica com a matriz formada pelos vetores da base canônica. Deste modo, concluímos que esta amostra não apresenta domínio desse tipo de representação.

Nenhum estudante respondeu corretamente a questão “1e”, a qual solicitava a imagem do vetor (3,-2) pela projeção ortogonal no eixo x. Quatro alunos procuraram fornecer resoluções no registro gráfico, mas representaram apenas o vetor (3,-2). Ainda, três estudantes resolveram a questão no registro simbólico-algébrico, um no simbólico matricial, quatro no numérico e quatro no numérico-tabular. Com isso, apesar das respostas não serem dadas corretamente, houve uma diversificação na busca de registros.

A seguir serão descritas algumas das resoluções apresentadas.

QUADRO 75 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 1E – INSTITUIÇÃO C_1

$F(3,2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (3x, -2y)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
(Aluno $23C_1$)	(Aluno $1C_1$)	(Aluno $22C_1$)

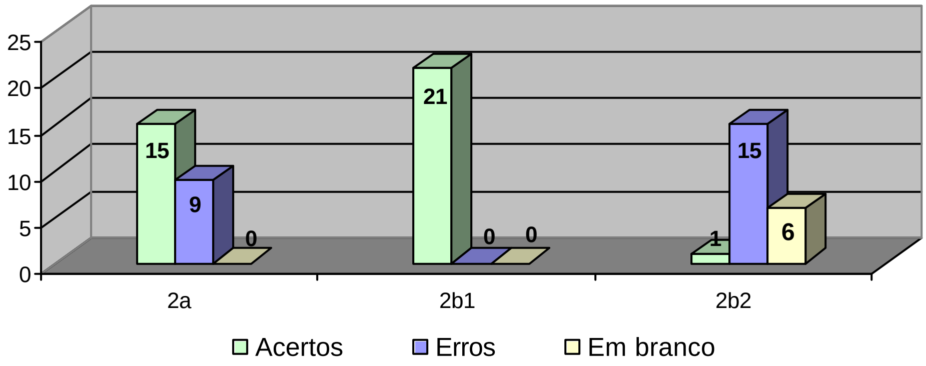
Cabe destacar que o estudante que acertou a representação gráfica no item “$1c_2$”, apresentou (3x,-2y) como resposta do item “e”, o que denota que o mesmo não demonstrou habilidade em coordenar os diferentes registros para a resolução desse problema.

Feita a análise de todas as resoluções desta questão, podemos concluir que há deficiências em apresentar a projeção ortogonal sobre o eixo x nas diferentes representações. As condições da soma e multiplicação por escalar da transformação linear não ocorreram neste exercício, o que aponta, novamente, que apesar do grupo ter estudado este conteúdo, o conceito formal não foi dominado. Mesmo oferecendo várias respostas incorretas, este grupo teve como particularidade a apresentação de uma diversidade de representações em questões que não exigiam um tipo específico de registro.

Esta afirmação está baseada principalmente nas resoluções apresentadas no item “1e”, pois ocorreram respostas nos registros gráfico, simbólico-algébrico, simbólico-matricial, numérico na forma de par ordenado e numérico-tabular. O registro da língua natural de emprego comum teve uma freqüência considerável, porém, apresentado de forma muito confusa. As conversões foram pouco estabelecidas e, quando realizadas, mal coordenadas.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes da Instituição C – Grupo C_1 – na segunda questão proposta no teste.

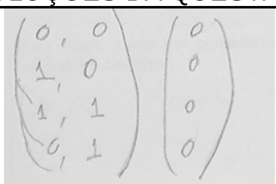
GRÁFICO 40 – INSTITUIÇÃO C_1 – QUESTÃO 2



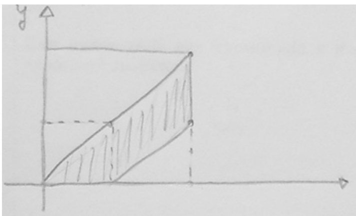
NOTA: Grupo C_1 – Amostra de vinte e quatro estudantes.

Na questão "2a", notamos um índice satisfatório de acerto e nenhuma questão sem resolução. Dos vinte e quatro alunos, quinze estabeleceram as duas conversões necessárias para a sua resolução. Das nove resoluções incorretas, cinco apresentaram corretamente a conversão do simbólico-algébrico para o numérico e destes, quatro apresentaram erros na representação gráfica. A seguir, reproduziremos uma amostra das resoluções consideradas incorretas ou incompletas.

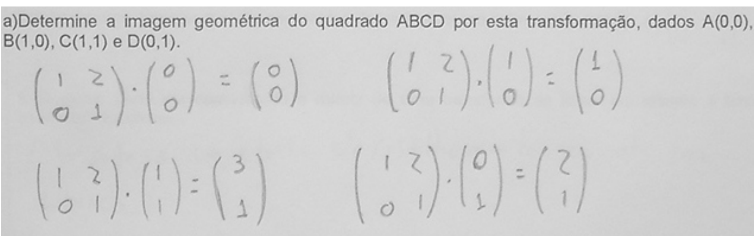
QUADRO 76 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 2A – INSTITUIÇÃO C_1



(Aluno $14C_1$)



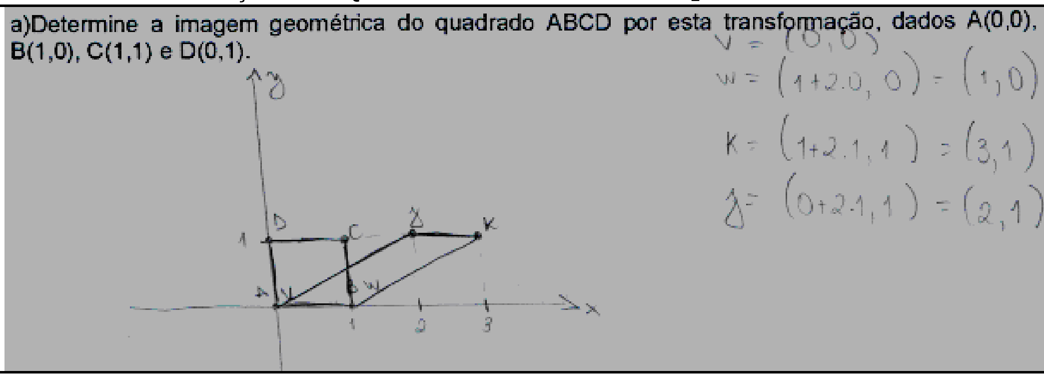
(Aluno $15C_1$)



(Aluno $20C_1$)

Deste modo, pôde-se verificar que mais de 80% dos estudantes estabeleceram a conversão do simbólico-algébrico para o numérico e mais de 60% estabeleceram as duas conversões envolvidas na resolução da questão. A seguir, apresentaremos a resolução correta do estudante $13C_1$.

FIGURA 15 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2A – ALUNO $13C_1$



No item “2b”, apesar de vinte e um alunos afirmarem que o cisalhamento horizontal é uma transformação linear, apenas um estudante justificou tal fato. Para isso, ele se baseou na linearidade das componentes da imagem da forma algébrica da função. As duas condições de linearidade da definição não foram utilizadas como meio de justificação deste item. A seguir, serão descritas algumas justificativas incorretas apresentadas pelo grupo.

QUADRO 77 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 2B – INSTITUIÇÃO C_1

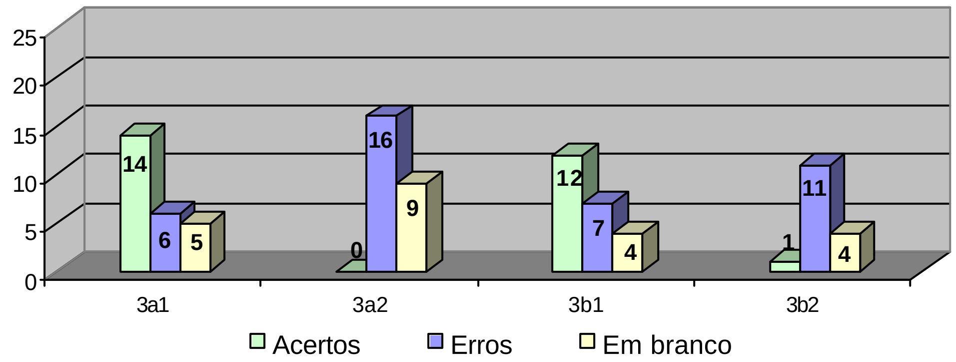
“Sim, pois muda a forma do elemento através de uma função.” (Aluno $23C_1$)
“Sim, porque houve alteração na figura a partir de uma função dada.” (Aluno $2C_1$)
“Sim, pois a projeção efetuada é linear.” (Aluno $4C_1$)
“Sim, pois ocorreu um deslocamento linear dos pontos.” (Aluno $7C_1$)
“Sim, porque os pontos apesar de mudarem de lugar seguem um “padrão”.” (Aluno $9C_1$)
“Sim, caiu em Álgebra Linear.” (Aluno $17C_1$)
“Sim, pois está sendo aplicada uma função sobre o eixo (x,y).” (Aluno $5C_1$)
“Sim, pois coexiste através da aplicação de uma função.” (Aluno $16C_1$)

As respostas fornecidas pelos estudantes $23C_1$, $2C_1$, $5C_1$ e $16C_1$ parecem indicar que eles entendem que se há uma função dada na sua representação algébrica, ela representa uma transformação linear. A resposta do aluno $17C_1$ evidencia que o mesmo sabe que a aplicação do exercício é uma transformação linear, pois isso lhe foi garantido no curso de Álgebra Linear. Tal afirmação denota que o mesmo não possui a compreensão da definição de transformação linear para justificar tal questão.

Conforme verificado também nas Instituições A e B, o resultado da análise dessa questão evidencia a facilidade no estabelecimento da conversão do registro simbólico-algébrico para o numérico e reforça a dificuldade de relacionar a transformação geométrica apresentada com o conteúdo das transformações lineares. Ainda, foi observada, novamente, a forte associação entre função e sua representação simbólico-algébrica, apesar de o grupo ter demonstrado falta de domínio neste tipo de representação semiótica.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes deste grupo na terceira questão proposta no teste.

GRÁFICO 41 – INSTITUIÇÃO C_1 – QUESTÃO 3



NOTA: Grupo C_1 – Amostra de vinte e quatro estudantes.

Na questão "$3a_1$", quatorze alunos afirmaram que não é possível transformar um quadrado em circunferência por meio de uma aplicação linear, porém, ninguém justificou corretamente tal afirmação no item "$3a_2$". Ainda nesta questão, oito estudantes não apresentaram qualquer resolução. Da mesma forma que o grupo da Instituição B, certas respostas, apesar de incorretas, parecem mostrar certa compreensão da característica da preservação do alinhamento das transformações lineares, conforme exemplificado a seguir.

QUADRO 78 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 3A – INSTITUIÇÃO C_1

"Não, pois como o nome já diz transformação linear precisa ser linearmente no plano." (Aluno $4C_1$) "Não, pois a circunferência é de grau 2." (Aluno $10C_1$)

No item "b" da questão 3, doze alunos confirmaram a possibilidade de transformar um quadrado em segmento por meio de uma transformação linear e sete estudantes consideraram esta situação inviável. Apesar disso, doze alunos não apresentaram qualquer comprovação e onze estudantes forneceram justificativas incorretas. Apenas um estudante justificou a situação corretamente, utilizando, para isso, a aplicação da projeção ortogonal sobre o eixo x, conforme descrição reproduzida no quadro a seguir.

QUADRO 79 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3B – ALUNO 3C_1

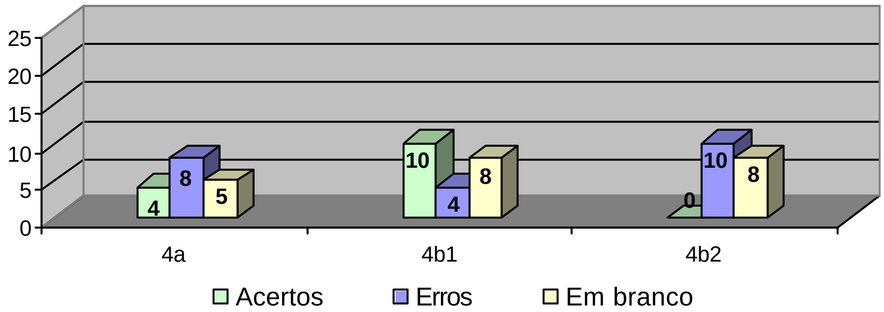
"O segundo caso é possível, por exemplo se a função para a transformação for F(x,y) = (x,0y)."

Cabe ressaltar que este mesmo aluno não definiu corretamente a projeção ortogonal sobre o eixo x na primeira questão. Ele também não apresentou a sua forma algébrica naquele momento, porém, na situação particular de análise da transformação do quadrado em segmento, ofereceu a representação simbólico-algébrica de uma transformação linear que teria este efeito geométrico.

Uma parte significativa dos alunos parece demonstrar uma compreensão da possibilidade geométrica da imagem de um quadrado por meio de uma transformação linear, porém, as justificativas fornecidas não foram satisfatórias. Todas as respostas foram dadas no registro da língua natural de emprego comum, mas houve muitas questões em que a justificativa sequer foi apresentada.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes deste grupo na quarta questão proposta no teste.

GRÁFICO 42 – INSTITUIÇÃO C_1 – QUESTÃO 4



NOTA: Grupo C_1 – Amostra de vinte e quatro estudantes.

Apenas quatro alunos responderam corretamente o item "a" desta questão, sendo que doze não apresentaram qualquer resolução. Dos exercícios corretos, dois experimentaram multiplicar a matriz 2x2 por um vetor coluna. Como estratégia de resolução, um dos estudantes estabeleceu a conversão do numérico-tabular para o simbólico-matricial e deste para a língua natural. Já o outro aluno realizou um tratamento no registro numérico-tabular, seguido de uma conversão para a língua natural de emprego comum. Nenhuma resposta correta envolveu a representação gráfica. O quadro, a seguir, apresenta as duas respostas corretas citadas anteriormente.

QUADRO 80 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 4A – ALUNOS $17C_1$ E $10C_1$

“ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x + 0y, 0x + 3y)$, *ampliação*.” (Aluno $17C_1$)
“ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \end{pmatrix}$ O efeito seria expansão.” (Aluno $10C_1$)

Os outros dois alunos somente expressaram, em língua natural, que ocorreria uma expansão. Nestas condições, apenas um estudante observou que a expansão não seria uniforme. As oito respostas incorretas foram dadas na língua natural de emprego comum, sem o estabelecimento de qualquer tentativa de cálculo. A seguir, será apresentada uma amostra das respostas incorretas oferecidas pelo grupo nesta questão.

QUADRO 81 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 4A – INSTITUIÇÃO C_1

“Ela sofrerá um efeito de cisalhamento ou ela será dobrada.” (Aluno $20C_1$).
“O desenho iria dobrar o seu tamanho.” (Aluno $22C_1$).
“(2,3)” (Aluno $18C_1$).

No item b_1 desta questão, dez alunos afirmaram que a matriz poderia ser considerada a matriz de uma transformação linear em relação à base canônica, mas não houve apresentação de justificativas corretas. O quadro, a seguir, apresenta uma amostra das justificativas apresentadas.

QUADRO 82 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 4B – INSTITUIÇÃO C_1

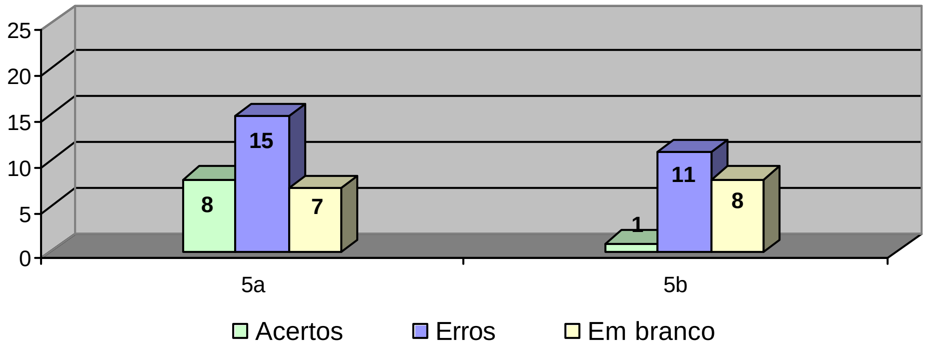
“Seria considerada uma transformação linear pois com a multiplicação por um vetor estará fazendo uma projeção da matriz no vetor.”(Aluno $7C_1$).
“Não, porque a base canônica é em relação a y.” (Aluno $14C_1$).
“Não, pois origina vetores diferentes.” (Aluno $10C_1$).
“Sim, pois houve alteração.” (Aluno $2C_1$).

Todas as justificativas foram dadas na língua natural de emprego comum e, em nenhum momento, houve menção às duas condições de linearidade. Ainda, quatorze alunos não apresentaram justificativas para esta questão.

De um modo geral, analisando os resultados desta questão, nota-se que poucos estudantes procuraram estabelecer tentativas de conversão. Era esperado que o estudante experimentasse verificar geometricamente o efeito da multiplicação da matriz por um vetor qualquer, mas mesmo aqueles que acertaram a questão, ou já conheciam a matriz da expansão ou estabeleceram conversões entre os registros numérico e simbólico-matricial ou tratamentos no registro numérico. A língua natural de emprego comum foi o registro mais freqüente, mas as respostas, em sua maioria, não foram satisfatórias. Nesta questão, novamente não houve a apresentação das duas condições de linearidade da transformação linear.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes na última questão proposta no teste.

GRÁFICO 43 – INSTITUIÇÃO C_1 – QUESTÃO 5



NOTA: Grupo C_1 – Amostra de vinte e quatro estudantes.

Oito estudantes assinalaram o item “b” na questão “5a", porém, somente um mostrou como determinou este resultado. Para assinalar a alternativa correta, tal aluno determinou a expressão algébrica de cada matriz para, em seguida, substituir os vértices do quadrado, ou seja, ele seguiu a seqüência de conversões numérico-algébrico-gráfico-numérico. Foi notado que o grupo em geral não tem domínio da representação numérico-tabular, uma vez que muitos procuraram, na matriz escolhida, os vértices das figuras dadas, fato que também ocorreu com o grupo da Instituição A.

A seguir, serão apresentadas algumas respostas incorretas que ilustram tal afirmação.

QUADRO 83 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 5B – INSTITUIÇÃO C_1

“É a única onde os valores estão de acordo com o gráfico.” (Aluno $14C_1$) “Pois é a única matriz que possui a coordenada -1.” (Aluno $23C_1$) “Com os valores dados na matriz, o desenho tem o número 4.” (Aluno $8C_1$)

Com isso, podemos concluir que neste grupo também foi notada a dificuldade na resolução desta questão, já que, apesar de vinte e três estudantes assinalarem algum item, doze sujeitos não apresentaram justificativas. Tentativas de determinação dos vértices das figuras apresentadas, ou seja, conversões do registro gráfico para o numérico, foram realizadas por apenas cinco estudantes e, destes, apenas três fizeram tal operação de forma correta. Essa situação mostra que o grupo apresenta deficiências no domínio das representações e dificuldades em coordenar conversões entre os registros gráfico e numérico-tabular.

4.2.3.1.1 Conclusão da análise da amostra C_1 da instituição C

Analisando os resultados de uma forma global, pôde-se identificar que o grupo apresenta deficiências no domínio das diversas representações solicitadas nas questões deste teste. Além disso, as conversões foram pouco estabelecidas, sendo a maior parte das respostas dada na língua natural de emprego comum, de forma insatisfatória e com base mais na percepção do que na reflexão consciente da situação. A definição de transformação linear não foi mencionada em todo o teste, o que mostra que as duas condições de linearidade não são dominadas pelo grupo. Houve ocorrência de confusão entre projeção e outros tipos de transformação linear geométrica e dificuldades em diferenciar matriz da transformação linear em relação à base canônica e matriz formada pelos vetores da base canônica do R^2. O grupo também não mostrou segurança nas justificativas das possibilidades geométricas por meio da aplicação de transformações lineares. Como nos grupos das duas Instituições anteriores, a conversão do simbólico-algébrico para o numérico foi a que apresentou o maior índice de sucesso.

Estabelecendo uma relação entre as questões, foi evidenciada uma tendência do grupo em realizar a associação da transformação linear com a representação simbólico-algébrica de uma função. Esta afirmação pode ser observada se compararmos as respostas fornecidas nas questões $1b_1$, $2b_1$ e 3, comentadas anteriormente de forma isolada, mas apresentadas simultaneamente no quadro seguinte.

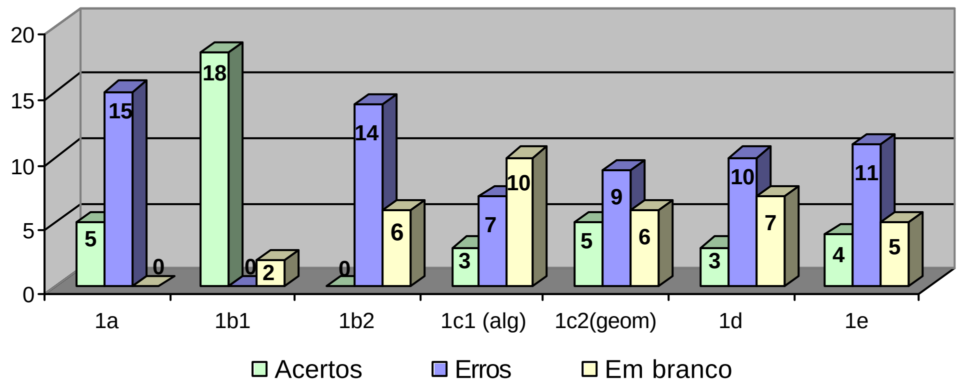
QUADRO 84 – COMPARAÇÃO DAS JUSTIFICATIVAS DADAS NAS QUESTÕES $1B_1$,$2B_1$ E 3 POR ESTUDANTES DA INSTITUIÇÃO C_1

1b) A projeção ortogonal no plano sobre o eixo x é uma transformação linear? Justifique. "Sim, pois atravéz (sic) de função linear é possível obter a projeção sobre o plano no eixo x." (Aluno 3C1). *"Não, pois não há uma função para fazer esta transformação."* (Aluno 23C1). *"Não, transformação linear é uma transformação de acordo com uma regra."* (Aluno 9C1).

4.2.3.2. Análise dos resultados do grupo C_2

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes do grupo C_2 na primeira questão proposta no teste.

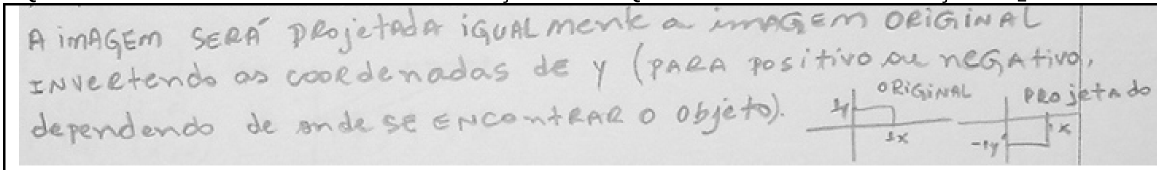
GRÁFICO 44 – INSTITUIÇÃO C_2 – QUESTÃO 1



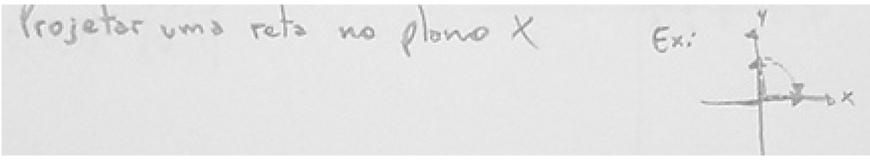
NOTA: Grupo C_2 – Amostra de vinte estudantes.

Cinco estudantes definiram corretamente a projeção ortogonal sobre o eixo x. Destes, três ofereceram a definição apenas na língua natural de emprego comum, dois apresentaram também o registro gráfico, e um aluno apresentou, além desses dois registros, o simbólico-algébrico. Dois estudantes demonstraram confusão com a reflexão em relação à reta y=x, dois estudantes com a reflexão em relação ao eixo x e um com o cisalhamento horizontal. A seguir, apresentaremos exemplos do estabelecimento desses equívocos.

QUADRO 85 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 1A – INSTITUIÇÃO C_2


A imAGEm SERÁ Projetada iGUALmente a imAGEm ORiGiNAL iNVeRtendo as coordenadas de y (PARA positivo ou nEGAtivo, dependendo de onde se ENCONtRAR o objeto).

(Aluno $3C_2$)


Projetar uma reta no plano X

(Aluno $4C_2$)

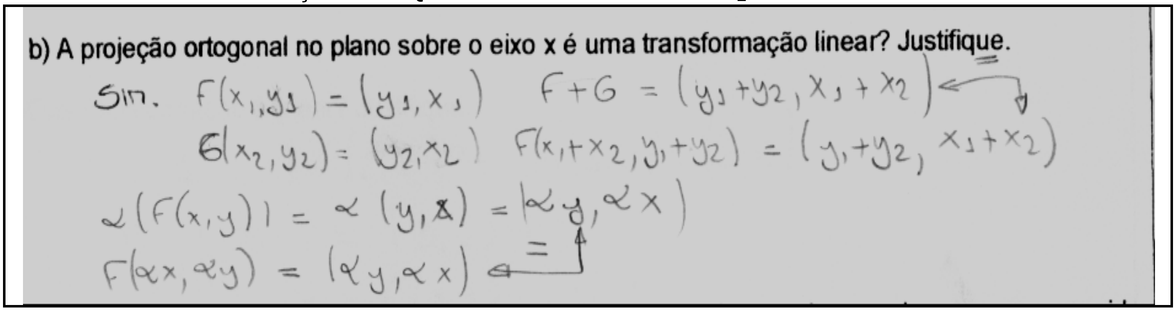
Das quinze resoluções consideradas incorretas, quatro apresentaram a necessidade de o ângulo ser de 90^o. A maior parte dos alunos utilizou o registro da língua natural de emprego comum, mas seis estudantes apresentaram, também, o registro gráfico como apoio para a definição. Um estudante, além dos registros gráfico e da língua natural, apresentou a projeção na representação simbólico-algébrica. A utilização da representação da língua natural ocorreu, na maior parte das vezes, de maneira insatisfatória, conforme exemplificado a seguir.

QUADRO 86 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 1A – INSTITUIÇÃO C_2

1a) O que você entende por projeção ortogonal no plano sobre o eixo x?
“A projeção ortogonal nada mais é do que um segmento de reta que cruza paralelamente o eixo x com um transparência sobre o eixo y em cruzamento.” (Aluno $1C_2$)
“É uma figura que está no espaço e é projetada sobre o eixo horizontal assim podendo trabalhar com, medidas, com o seu volume em outras palavras geometricamente.” (Aluno $2C_2$)
“Todos os pontos no eixo x serão zero.” (Aluno $13C_2$)

No item “b” desta questão, apesar de dezoito alunos afirmarem que a projeção ortogonal no eixo x é uma transformação linear, ninguém justificou corretamente. Seis justificativas foram deixadas em branco e, das questões resolvidas, nota-se que a maior parte foi dada no registro da língua natural de emprego comum. Três alunos procuraram trabalhar com o registro simbólico-algébrico, porém de forma incorreta. Um estudante, que representou a projeção ortogonal incorretamente por F(x,y) = (y,x), procurou demonstrar as duas condições de linearidade com base neste tipo de transformação, conforme apresentado a seguir.

FIGURA 16 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1B – ALUNO $6C_2$



b) A projeção ortogonal no plano sobre o eixo x é uma transformação linear? Justifique.

Sim. $F(x_1,y_1) = (y_1,x_1)$ $\quad F+G = (y_1+y_2, x_1+x_2)$

$G(x_2,y_2) = (y_2,x_2)$ $\quad F(x_1+x_2, y_1+y_2) = (y_1+y_2, x_1+x_2)$

$\alpha(F(x,y)) = \alpha(y,x) = (\alpha y, \alpha x)$

$F(\alpha x, \alpha y) = (\alpha y, \alpha x)$ =

O quadro, a seguir, contém exemplos de respostas dadas nesta questão.

QUADRO 87 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 1B – INSTITUIÇÃO C_2

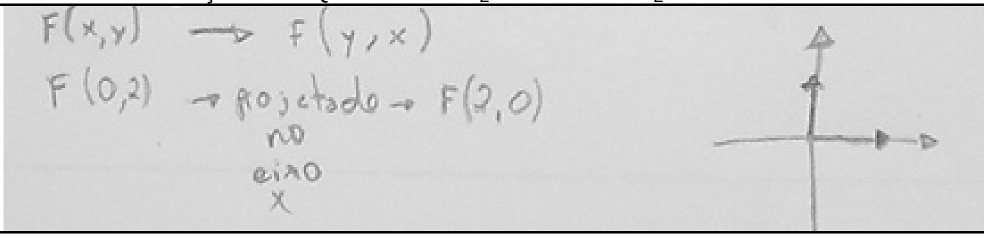
1b) A projeção ortogonal no plano sobre o eixo x é uma transformação linear? Justifique. “Sim, pois necessita de uma função que transforme a F1 em F2 (ortogonal).” (Aluno $20C_2$) “Sim, pois a projeção é composta por pontos que de acordo com uma função podem mudar de posição nos eixos (x,y,z).” (Aluno $18C_2$). “Sim, pois nem as proporções nem as formas são alteradas.” (Aluno $3C_2$). “Sim, pois qualquer função do R^2 f(x,y) pode ser descrita como F(x,y) = (x, y.0) $\rightarrow$ F(x,y) = (x,0) definindo sua projeção no eixo x.” (Aluno $16C_2$). “Sim pois você está refletindo a figura corresponde o eixo x mantendo a sua medida original ou até alterando “ reflexão”.” (Aluno $2C_2$).

As respostas dos alunos $20C_2$ e $18C_2$ associam transformação com a sua representação algébrica. O estudante $3C_2$ tem por concepção que a transformação linear não muda a forma da figura projetada. O aluno $16C_2$ apresenta corretamente a forma algébrica desta transformação, mas não consegue, a partir dela, justificar a sua linearidade. Por fim, a resposta dada pelo aluno $2C_2$ aponta deficiências na expressão escrita e confusões com a transformação de reflexão.

Na questão “$1c_1$”, a qual solicitava a forma algébrica da função, notamos um grande número de questões sem resolução – metade da amostra – e apenas três acertos. Das questões incorretas, dois alunos apresentaram a reflexão em relação à reta y=x dada por F(x,y) = (y,x) e um estudante descreveu a expansão uniforme de fator “a”, dada por F(x,y) = (ax, ay). Diante desse fato, notamos que o grupo apresenta dificuldades em determinar a forma algébrica desta transformação.

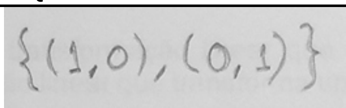
No item “$1c_2$”, cinco estudantes apresentaram corretamente a representação gráfica da projeção ortogonal sobre o eixo x. Das resoluções incorretas, podemos destacar dois casos de representação de rotação e sete ocorrências de representação somente de um vetor sem a sua imagem. O quadro a seguir apresenta a resolução incorreta do estudante $4C_2$.

FIGURA 17 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO $1C_2$ – ALUNO $4C_2$

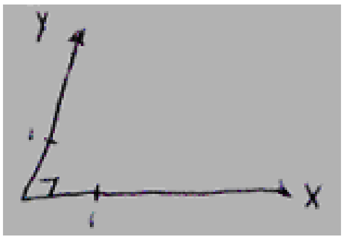


No item “d” desta questão, ocorreram apenas três acertos. Das dez resoluções incorretas, sete apresentaram a matriz contendo os vetores da base canônica, da mesma forma que os grupos das outras instituições. Deste modo, concluímos que há deficiências no domínio deste tipo de representação. Nesta questão, houve uma diversificação na busca de outros registros por parte de alguns alunos, apesar de o enunciado solicitar o registro numérico-tabular. Neste caso, tal situação parece indicar que o aluno desconhece a representação solicitada, conforme exemplificado a seguir.

QUADRO 88 – RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 1D – ALUNOS $10C_2$ E $15C_2$



(Aluno $10C_2$)



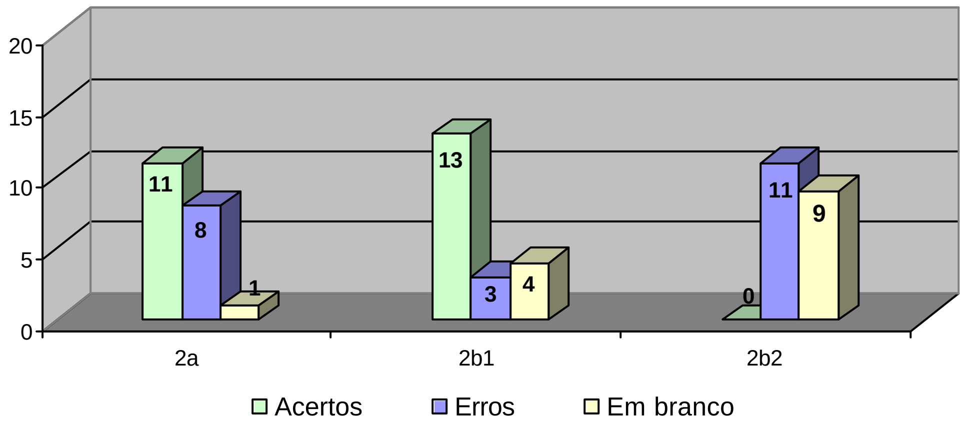
(Aluno $15C_2$)

Quatro estudantes ofereceram resoluções coerentes para a questão “1e”, a qual solicitava a imagem do vetor (3,-2) pela projeção ortogonal no eixo x. Cabe informar que todos os que acertaram, forneceram a resposta no registro gráfico. Destes, um apresentou, também, os registros numérico-tabular e simbólico-algébrico e o outro estudante associou o registro gráfico ao da língua natural. Mesmo nas questões incorretas, o registro de maior uso foi o gráfico, porém, sete alunos apresentaram geometricamente apenas o vetor (3,-2), sem a sua imagem.

Pode-se então concluir, a partir da descrição apresentada, que há grande deficiência no domínio das diversas representações solicitadas neste exercício. Da mesma forma que o grupo C_1, este também apresentou uma tendência de busca de diversificação de registros. O registro gráfico assumiu um papel de destaque, uma vez que a sua ocorrência foi notada de forma significativa principalmente nas questões “1a" e “1e”, as quais não solicitavam um tipo específico de representação. Apesar disso, notamos que deficiências no domínio dos registros afetaram a coordenação efetiva entre eles. As condições de soma e multiplicação por escalar, inerentes à transformação linear, ocorreram de forma satisfatória na resolução de apenas um aluno do grupo, o que denota que, apesar dos estudantes terem o contato com este conteúdo, os mesmos não apresentaram domínio da definição de transformação linear comumente apresentada nos livros didáticos.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes da Instituição C – Grupo C_2 – na segunda questão proposta no teste.

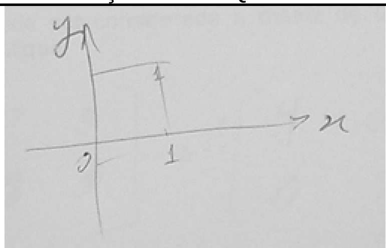
GRÁFICO 45 – INSTITUIÇÃO C_2 – QUESTÃO 2



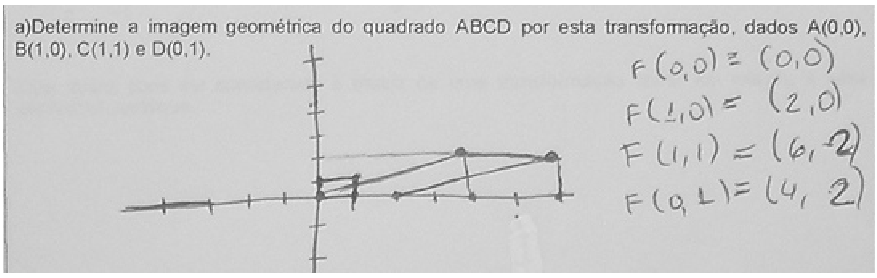
NOTA: Grupo C_2 – Amostra de vinte estudantes.

Na questão “2a", notamos um índice satisfatório de acerto e apenas uma questão sem resolução. Dos vinte estudantes, onze estabeleceram as duas conversões necessárias para a resolução do exercício. Das resoluções incorretas, uma continha apenas a conversão do registro simbólico-algébrico para o numérico, ou seja, nela não foi apresentada a representação gráfica da situação. Quatro estudantes apresentaram apenas a imagem geométrica do quadrado e dois não utilizaram a forma algébrica fornecida no enunciado. Apresentaremos, a seguir, exemplos das resoluções consideradas incorretas.

QUADRO 89 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 2A – INSTITUIÇÃO C_2



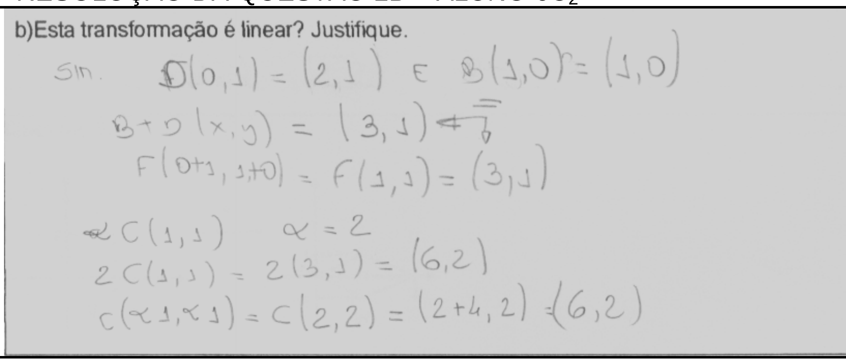
(Aluno $8C_2$)



(Aluno $11C_2$)

Pôde-se verificar que mais de 50% dos estudantes estabeleceram o ciclo de conversões algébrico-numérico-gráfico. No item “2b”, apesar de treze alunos afirmarem que o cisalhamento horizontal é uma transformação linear, nenhum justificou tal fato satisfatoriamente. Apenas um estudante procurou utilizar as duas condições de linearidade, porém, para vetores particulares do R^2, conforme apresentado a seguir.

FIGURA 18 - RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2B – ALUNO $6C_2$



A seguir, serão descritas as justificativas apresentadas pelo grupo nesta questão.

QUADRO 90 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 2B – INSTITUIÇÃO C_2

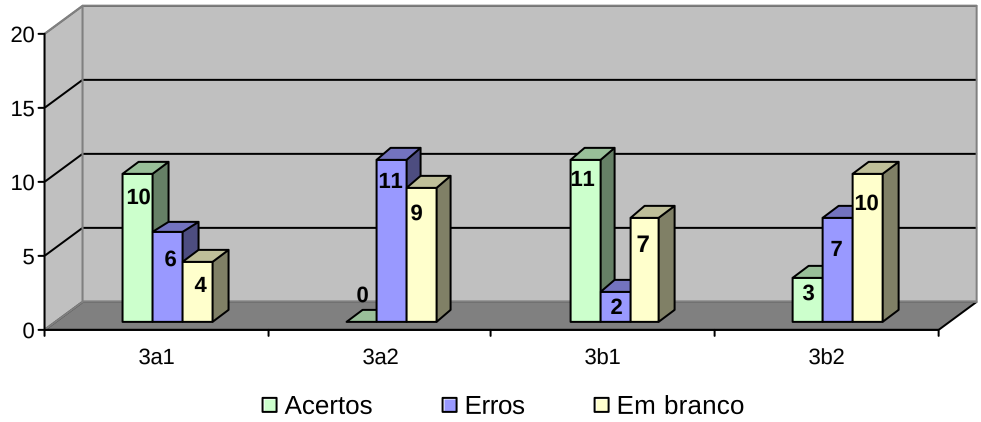
“Sim, pois transforma uma reta em um quadrado.” (Aluno $14C_2$). “Sim, essa transformação é linear porque segue paralelamente o projeto de plano.” (Aluno $1C_2$). “Sim pois não existe expoente na equação.” (Aluno $10C_2$). “Sim pois faz com que a figura se transforme da sua forma original.” (Aluno $2C_2$). “Não, pois de um quadrado perfeito foi “obitida” uma imagem de um quadrado tombado.” (Aluno $3C_2$). “Sim, foi feito um cisalhamento que faz parte da Álgebra Linear.” (Aluno$4C_2$). “Sim, porque é utilizada uma função que gera o segundo gráfico e que é aplicada sobre todos os pontos dados.” (Aluno $20C_2$). “Sim, pois existe uma transformação feita por (x+2y,y) para qualquer função de R^2 que resultará na inclinação que depende do fator.” (Aluno $16C_2$). “Sim, pois continuam os elementos fazendo parte de R^2.” (Aluno $19C_2$).

As respostas fornecidas pelos estudantes $14C_2$, $1C_2$, $2C_2$ e $3C_2$ mostram que os mesmos não têm uma compreensão satisfatória do efeito geométrico de uma transformação linear. A resposta do estudante $10C_2$ parece indicar a concepção da necessidade da linearidade das coordenadas da imagem da lei algébrica da transformação. A resposta do aluno $4C_2$ mostra que ele relaciona o cisalhamento com transformação linear porque foi dado em Álgebra Linear, mas não porque conhece as condições de linearidade. As respostas dos alunos $20C_2$ e $16C_2$ mostram a associação de transformação linear com a representação algébrica de uma função. Nestas condições, é provável que a falta do trabalho com contra-exemplos conduza o estudante a entender que a existência de uma função algébrica é suficiente para determinar uma transformação linear. Na resposta do estudante $19C_2$, podemos notar que o mesmo apresenta a noção de que uma transformação linear não pode ocorrer em espaços vetoriais diferentes.

A análise das resoluções revelou, novamente, que as conversões exigidas na resolução do item “a” desta questão são estabelecidas pela maioria. Em contrapartida, a justificativa da linearidade do cisalhamento horizontal não foi oferecida de forma satisfatória. As condições de linearidade praticamente não foram apresentadas, já que apenas um estudante as utilizou, ainda assim para vetores particulares. As resoluções apresentadas no item “b” desta questão indicaram deficiências na concepção de aspectos geométricos referentes à aplicação de uma transformação linear, além da associação entre este tipo de transformação e a representação simbólico-algébrica de uma função.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes deste grupo na terceira questão proposta no teste.

GRÁFICO 46 – INSTITUIÇÃO C_2 – QUESTÃO 3



NOTA: Grupo C_2 – Amostra de vinte estudantes.

Na questão “$3a_1$”, dez alunos afirmaram a impossibilidade de transformar um quadrado em circunferência por meio de uma transformação linear, porém, não houve justificativa correta para tal afirmação. Do mesmo modo que observado no grupo da Instituição B e no grupo C_1 desta mesma instituição, certas respostas, consideradas incorretas, parecem denotar uma idéia da não preservação do alinhamento, conforme exemplificado no quadro seguinte.

QUADRO 91 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 3A – INSTITUIÇÃO C_2

“Não dá para “trasformação” (sic) linear pois, a função na circunferência envolve um expoente do contrário do quadrado.” (Aluno $10C_2$). “Não posso transformar 4 pontos do quadrado em vários de uma circunferência.” (Aluno $17C_2$).

No item seguinte desta questão, onze alunos afirmaram a possibilidade de transformar um quadrado em segmento por meio de uma aplicação linear, sendo que três justificaram tal possibilidade por meio da aplicação de uma projeção ortogonal em relação a um dos eixos.

Das questões corretas, duas utilizaram, além da língua natural de emprego comum, o registro gráfico da projeção ortogonal em relação ao eixo x. Dez estudantes não apresentaram justificativas e sete justificaram de maneira insatisfatória, conforme exemplificado no quadro seguinte.

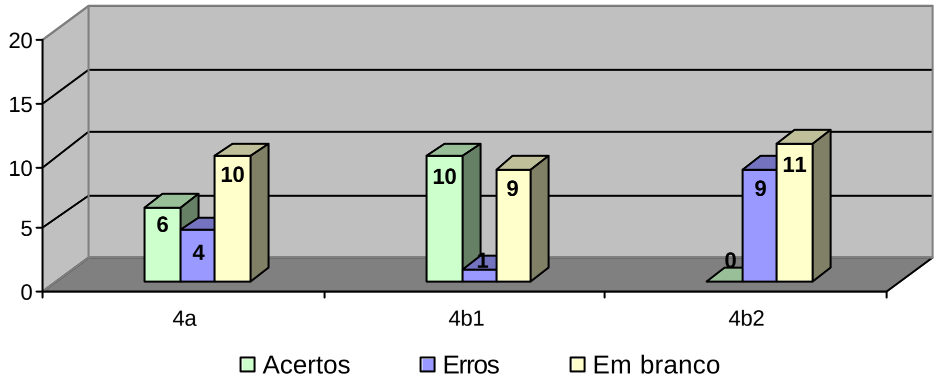
QUADRO 92 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 3B – INSTITUIÇÃO C_2

“Sim, pois ambas não envolvem um expoente tornado assim um sistema linear.” (Aluno $10C_2$). “Não, pois a forma original só pode ser expandida, diminuída e transformação que continuem com os 4 pontos originais.” (Aluno $2C_2$).

Como nos outros grupos, nota-se que nesta questão em particular, uma parte significativa dos alunos parece ter uma idéia da possibilidade do efeito geométrico sobre um quadrado por meio de uma transformação linear. Em contrapartida, a maioria das justificativas não contém explicitamente descrições sobre permanências de alinhamento de pontos e de paralelismo de segmentos. Nota-se, ainda, que o registro da língua natural de emprego comum, apesar de freqüentemente utilizado, é apresentado de modo insatisfatório.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes deste grupo na questão 4 proposta no teste.

GRÁFICO 47 – INSTITUIÇÃO C_2 – QUESTÃO 4



NOTA: Grupo C_2 – Amostra de vinte estudantes.

O item “a” desta questão foi respondido corretamente por seis alunos, mas a metade do grupo não apresentou resolução para esta questão. Dos exercícios corretos, quatro descreveram a resposta apenas no registro da língua natural e dois utilizaram, além deste, o registro simbólico-algébrico, estabelecendo uma conversão que partiu do numérico-tabular.

Dois estudantes ainda utilizaram o registro numérico-tabular, porém de forma insatisfatória. Nenhum aluno procurou experimentar o efeito geométrico da transformação, estabelecendo uma conversão para o registro gráfico, conforme previsto na análise preliminar do teste.

O quadro, a seguir, apresenta exemplos de respostas dadas pelos estudantes deste grupo.

QUADRO 93 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 4A – INSTITUIÇÃO C_2

"$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ estaríamos alterando o posicionamento do a em relação ao plano X,Y." (Aluno 19C_2). "A imagem ficará duplicada." (Aluno 11C_2). "Acontece a transformação linear." (Aluno 4C_2). "(2x+0, 0x+3y) = (2x,3y). O objeto será aumentado de forma desproporcional, pois aumenta mais em y do que em x." (Aluno 3C_2). "Dobra o valor de x do vetor u e triplica o valor de y do vetor u." (Aluno 16C_2).

No item b_1 desta questão, dez alunos afirmaram que a matriz fornecida poderia ser considerada a matriz de uma transformação linear em relação à base canônica, mas não houve justificativa correta. Onze alunos deixaram esta parte da questão em branco. A maioria das resoluções foi dada na língua natural de emprego comum, porém, houve, em conjunto com este registro, a presença das representações simbólico-algébrica e numérico-tabular.

O quadro, a seguir, contém uma amostra das justificativas apresentadas pelo grupo.

QUADRO 94 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 4B – INSTITUIÇÃO C_2

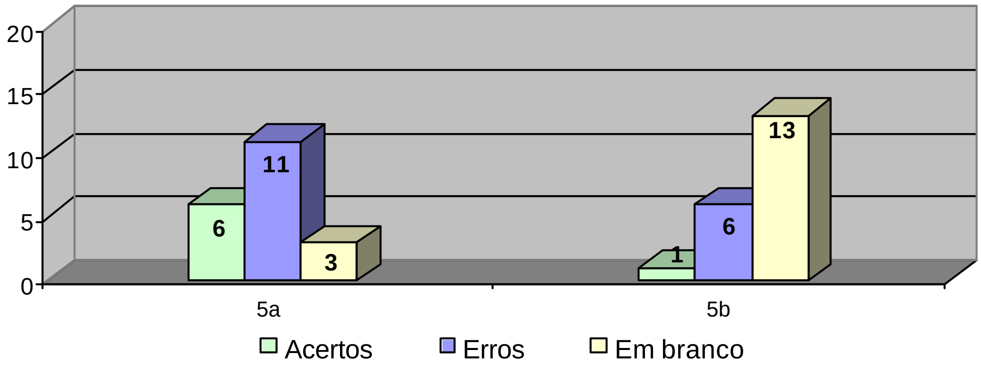
"Sim, pois os valores se limitam a base F(x,y) = (2,3)." (Aluno 17C_2). "Não, pois a imagem será distorcida com a multiplicação feita." (Aluno 3C_2). "Sim, pois o y=0 depois o x=0." (Aluno 14C_2).

O Aluno 3C_2 parece ter a concepção geométrica de que a transformação linear não distorce a figura, sendo que tal idéia também foi apresentada na sua justificativa do questionamento da linearidade do cisalhamento. Apesar disso, este mesmo aluno afirmou a possibilidade de transformar um quadrado em circunferência. O aluno 14C_2 parece demonstrar confusão com os vetores da base canônica, já que associa a possibilidade da matriz representar uma matriz de uma transformação linear em relação à base canônica, com o fato da mesma possuir componentes nulas.

Em geral, a análise das resoluções desta questão mostrou que poucos estudantes estabeleceram conversões partindo da representação numérico-tabular. As conversões, quando realizadas, ficaram restritas entre os registros numérico-tabular e simbólico ou numérico-tabular e língua natural de emprego comum. Nas justificativas, novamente há incoerências na visão da possibilidade geométrica da imagem de objetos por meio de transformações lineares. As duas condições de linearidade, comumente presentes na definição de transformação linear, também não foram oferecidas nesta questão.

O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos estudantes na última questão proposta no teste.

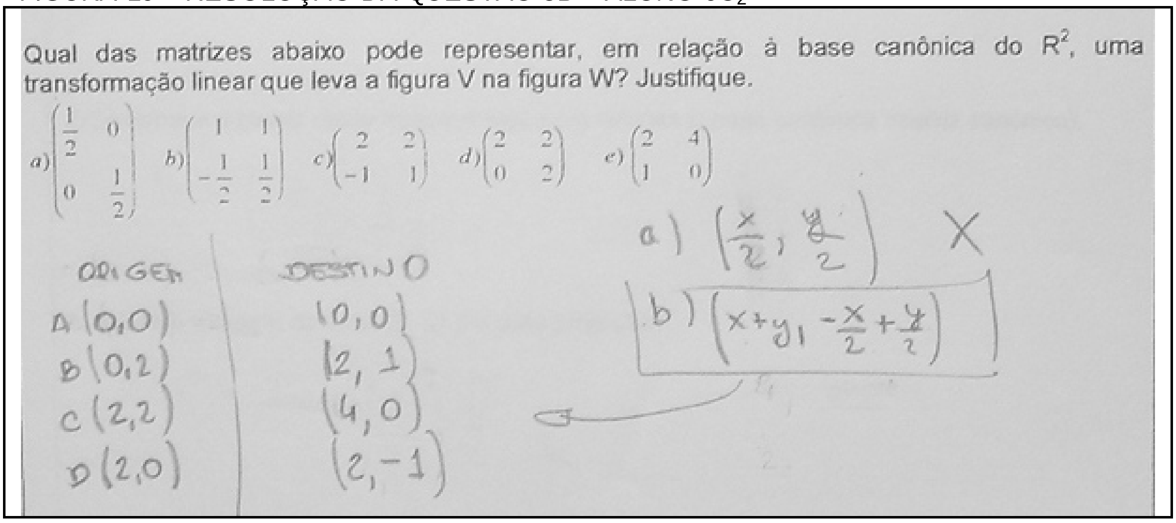
GRÁFICO 48 – INSTITUIÇÃO C_2 – QUESTÃO 5



NOTA: Grupo C_2 – Amostra de vinte estudantes.

Analisando o gráfico, pode-se notar que seis estudantes assinalaram corretamente o item "b" da questão 5, porém, somente um mostrou como determinou este resultado. Da mesma forma que o aluno do grupo C_1 desta mesma instituição, este estudante utilizou como estratégia de resolução, a determinação da expressão algébrica de cada matriz para, em seguida, substituir os vértices do quadrado, conforme reproduzido a seguir.

FIGURA 19 – RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 5B – ALUNO $6C_2$



Cinco alunos marcaram corretamente o item “b”, porém, não demonstraram as etapas de resolução. Destes, dois estabeleceram somente conversões do registro gráfico para o numérico, ou seja, destacaram os vértices da figura inicial. O quadro, a seguir, apresenta exemplos de resoluções incorretas.

QUADRO 95 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 5B – INSTITUIÇÃO C_2

“Item c. A única que tem valores iguais ao gráfico apresentado.” (Aluno7C_2).
“A, pois ela parece que está alongando.” (Aluno 5C_2).
“F(x,y) = (xcos270-ysen270, xsen270+ycos270)   F(x,y) = (0+1y, -1x+0)   F(x,y)=(y,-x) G(x,y)=(x,1/2 y) GoF(x,y)= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$” (Aluno 16$C_2$)

Na resposta do aluno 7C_2 notamos, como já ocorrido nos outros grupos analisados, a confusão entre os valores apresentados na matriz e os valores dos pontos das figuras do enunciado. A resposta do aluno 5C_2 mostra que a resolução foi dada sem nenhuma tentativa de cálculo, já que a justificativa foi baseada na percepção do desenho. A resolução do aluno 16C_2 parece revelar que o aluno tentou verificar perceptualmente o tipo de movimento estabelecido do quadrado para o losango. A partir daí, o mesmo aplicou a composição de uma rotação seguida de uma contração não uniforme, porém, este caminho de resolução não o conduziu a uma resposta correta. Nesta questão, quatro alunos utilizaram o registro da língua natural de emprego comum, mas o único acerto justificado envolveu a coordenação das conversões entre os registros numérico e simbólico-algébrico, simbólico-algébrico e numérico e gráfico e numérico.

Com isso, a análise desta questão mostra que apenas um estudante do grupo C_2 conseguiu coordenar as conversões necessárias para a sua resolução. Tentativas de determinação dos vértices das figuras apresentadas, ou seja, conversões do registro gráfico para o numérico, foram realizadas por apenas cinco estudantes. Apesar de dezessete alunos assinalarem um item, treze estudantes não apresentaram a resolução desta questão.

Essa situação mostra que a maior parte do grupo apresenta deficiências no domínio das representações e dificuldades em coordenar as conversões envolvidas nesta questão.

4.2.3.2.1 Conclusão da análise da amostra C_2 da instituição C

Sintetizando os resultados analisados, percebe-se que este grupo também apresenta, em sua maioria, deficiências no domínio das representações envolvidas neste teste. Se comparado com os demais grupos analisados, notamos que aqueles que resolveram corretamente as questões, procuraram diversificar mais os registros. Observamos, também, que os estudantes que apresentaram maior sucesso no teste foram aqueles que demonstraram um domínio efetivo das diversas representações e a capacidade de coordená-las. Em contrapartida, mesmo estes revelaram deficiências na compreensão da definição de transformação linear, usualmente enunciada no registro da língua natural de emprego especializado. Tal afirmação tem por base o fato de que, em nenhum momento, os estudantes apresentaram ou operaram, de forma satisfatória, com as condições de linearidade. Como já era esperado, o maior índice de sucesso ocorreu na situação que envolvia uma conversão do registro algébrico para o numérico.

Neste grupo também houve ocorrência de confusão entre projeção e outros tipos de transformação linear geométrica e dificuldades em diferenciar a matriz de uma transformação linear em relação à base canônica e matriz formada pelos vetores da base canônica do R^2. Também foram observados comportamentos de associação da transformação linear unicamente com a sua representação algébrica e uso de recursos mais perceptivos do que reflexivos na resolução de certas questões.

Estabelecendo uma relação entre as questões, tem-se que o estudante $20C_2$ afirmou tanto no item "$1b_2$" como no "$2b_2$", que as transformações em questão eram lineares, pelo fato de existir ou de ser necessária a forma algébrica da função, o que denota que, para este aluno, qualquer função na forma algébrica é uma transformação linear. Ainda, comparando as duas questões, uma outra ocorrência a ser destacada refere-se ao fato do estudante $3C_2$, que confundiu projeção com reflexão em relação ao eixo x, garantir que a projeção é linear porque nem as proporções nem as formas foram alteradas. Ele também justificou que o cisalhamento não era linear porque o quadrado sofreu uma deformação. Este aluno ainda afirmou, na questão 4, que a matriz fornecida não poderia ser de uma transformação linear porque a imagem ficaria distorcida com a multiplicação. Neste caso, para este aluno, a transformação linear no quadrado preserva o seu formato e não o alinhamento de pontos e paralelismo de segmentos.

O estudante $10C_2$ relatou, na questão 2b, que a transformação seria linear porque *“não existe expoente na equação”*. Na questão 3, o mesmo estudante afirmou que não seria possível transformar linearmente um quadrado em circunferência, porque *“a função na circunferência envolve um expoente do contrário do quadrado”*. Estas respostas, embora confusas, parecem refletir que para justificar as suas afirmações, este aluno verifica a linearidade das coordenadas da imagem da representação simbólico-algébrica. O estudante $14C_2$ garantiu que é possível transformar qualquer coisa se a transformação for linear.

O estudante $2C_2$ afirmou que o cisalhamento é uma transformação linear *“porque a figura se transforma de sua forma original”*. Na questão 3, o mesmo aluno garantiu que um quadrado não poderia ser transformado em circunferência ou segmento. Nesta situação, ele revelou que só seria possível expandir, diminuir e transformar de maneira que os quatro pontos originais permanecessem. A afirmação deste estudante parece indicar que ele possui uma vaga idéia da permanência da linearidade de pontos e do paralelismo de segmentos, mas a sua compreensão não foi suficiente para o caso em que o quadrado é transformado em segmento.

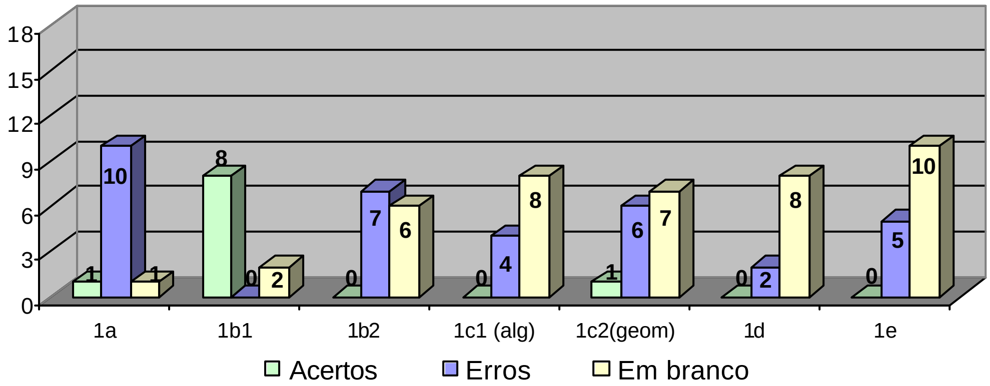
Tais constatações mostram que grande parte do grupo tem compreensões equivocadas ou incompletas a respeito da possibilidade geométrica da imagem de um objeto por meio de uma transformação linear.

4.2.4. Resultados da Instituição D

O teste foi aplicado em uma turma de quarenta alunos do curso de Ciência da Computação de uma Universidade Particular de Ensino do Estado de São Paulo, a qual será indicada por Instituição D. Tais alunos já cursaram a disciplina de Álgebra Linear e iniciaram o curso de Computação Gráfica, porém, até o momento da aplicação deste teste, ainda não haviam tido contato com as transformações geométricas desenvolvidas nesta disciplina.

Do total de quarenta estudantes, vinte e dois entregaram o questionário sem nenhuma resolução. É provável que tal fato tenha ocorrido devido à falta de um trabalho de conscientização da importância da contribuição de cada estudante para esta pesquisa. Diante dessa situação, serão analisadas as respostas fornecidas pelos dezoito estudantes que apresentaram alguma resolução neste teste. Tais estudantes utilizaram como referência principal o **Livro 1** de Álgebra Linear. O gráfico, a seguir, contém a tabulação dos acertos e erros dos dezoito estudantes da Instituição D na primeira questão proposta no teste.

GRÁFICO 49 – INSTITUIÇÃO D – QUESTÃO 1



NOTA: Amostra de dezoito estudantes.

Das resoluções apresentadas pelos dezoito alunos analisados, apenas uma continha uma descrição satisfatória de projeção ortogonal sobre o eixo x. Sete estudantes deixaram a questão em branco e dez forneceram respostas na língua natural de emprego comum. Somente dois estudantes recorreram ao registro gráfico, porém de forma incorreta. Quatro alunos incluíram na sua definição, a necessidade do ângulo ser de 90^o. Como nos outros grupos analisados, a maior parte das respostas ocorreu de forma confusa ou incompleta, conforme exemplificado no quadro a seguir.

QUADRO 96 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 1A – INSTITUIÇÃO D

1a) O que você entende por projeção ortogonal no plano sobre o eixo x? “É uma projeção de 90^o graus sobre o eixo x.” (Aluno 1D) “É quando é colocado algum objeto perpendicular ao eixo x. (90^o).” (Aluno 3D) “É a representação gráfica de um objeto tendo por base sua visualização no eixo x”. (Aluno 6D). “É a projeção para x>0”. (Aluno 7D). “A representação gráfica de ponto por função de 1^o grau” (Aluno 11D). “Valores do eixo x que vinculado a valores do eixo y projetam uma figura geométrica no plano cartesiano” (Aluno 9D).

No item “b” da primeira questão, dez estudantes não apresentaram qualquer resolução e oito afirmaram a linearidade da projeção ortogonal no eixo x, porém, com explicações insatisfatórias. Todas as justificativas foram dadas na língua natural de emprego comum, sendo que as condições de linearidade não foram sequer citadas. A seguir, serão descritas algumas das justificativas apresentadas.

QUADRO 97 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 1B – INSTITUIÇÃO D

1b) A projeção ortogonal no plano sobre o eixo x é uma transformação linear? Justifique.
“Sim. É atribuído um valor de y a cada valor de x.” (Aluno 9D).
“Sim, pois utiliza função de 1º grau na transformação”. (Aluno 6D).
“Sim, pois para a transformação é utilizada apenas equações de 1º grau”. (Aluno 1D).
“Sim, pois o que muda é somente a projeção, o lado pelo qual a figura é mostrada.” (Aluno 3D).

As respostas dos alunos 6D e 1D apontam uma associação da transformação em questão com função de primeiro grau. A resposta do estudante 9D parece associar transformação linear com uma função de uma variável.

No item c_1 desta questão, o qual solicitava a forma algébrica da função, notamos um alto índice de abstenção, uma vez que apenas quatro estudantes apresentaram resoluções, embora incorretas. As formas algébricas apresentadas estão descritas no quadro seguinte.

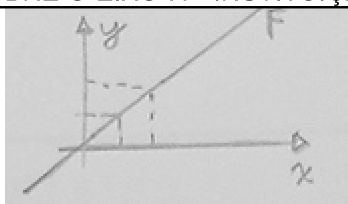
QUADRO 98 – RESPOSTAS DA QUESTÃO $1C_1$ DE ESTUDANTES DA INSTITUIÇÃO D

“F(x,y) = x” (Aluno 10D)
“F(x,y) = mx   m: coeficiente angular” (Aluno 4D)
“F(x,y) = 0, y=0” (Aluno 5D)
“ax+b” (Aluno 3D)

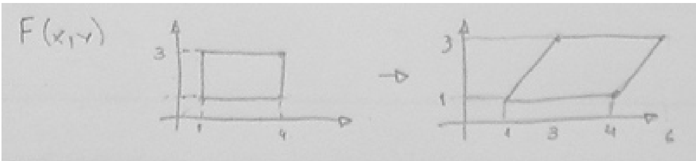
A resolução do estudante 10D despreza o fato da imagem ser elemento do R^2. O estudante 5D parece indicar que sabe que o “y” deve valer 0, porém, não representa corretamente a forma algébrica desta transformação. Os outros dois alunos apenas associam a projeção ortogonal solicitada com função de primeiro grau ou linear, representando uma transformação do R^2 para R. Deste modo, nota-se que os estudantes possuem uma concepção limitada deste tipo de transformação, além de dificuldades na representação simbólico-algébrica.

No item “$1c_2$”, apenas um aluno apresentou corretamente a representação gráfica da projeção ortogonal sobre o eixo x. Onze estudantes deixaram a questão sem resolução e seis apresentaram representações incorretas. Destas, houve confusão entre a projeção e o cisalhamento horizontal de fator 2, duas representações de funções lineares quaisquer e três representações de vetores sem as respectivas imagens pela projeção. Apresentaremos, a seguir, exemplos das resoluções apresentadas por estes estudantes.

QUADRO 99 – AMOSTRA DE REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS DA PROJEÇÃO ORTOGONAL SOBRE O EIXO X – INSTITUIÇÃO D



(Aluno 8D)



(Aluno 6D)

Observando o quadro anterior, notamos, na resolução do estudante 6D, a confusão entre projeção e cisalhamento horizontal.

Apenas dois estudantes resolveram o item "d" desta questão, mas de forma incorreta. Um deles apresentou a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e o outro a matriz $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. Deste modo, tal fato indica que o grupo não tem domínio da representação numérico-tabular. Quanto ao item "e" dessa questão, apenas cinco estudantes apresentaram alguma resolução, porém nenhuma correta. Dois alunos ofereceram a resposta no registro numérico e três estudantes no registro gráfico. O quadro, a seguir, contém as respostas fornecidas por estes estudantes.

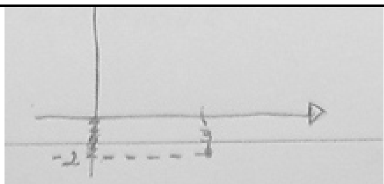
QUADRO 100 – RESPOSTAS DA QUESTÃO 1E DE ESTUDANTES DA INSTITUIÇÃO D

continua

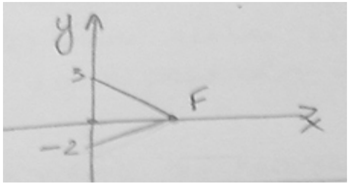
"I=0"
(Aluno 5D).

"3"
(Aluno 10D)

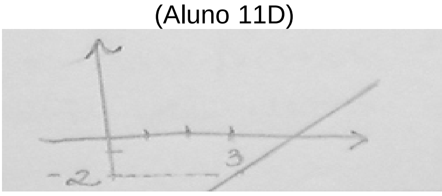
QUADRO 100 – RESPOSTAS DA QUESTÃO 1E DE ESTUDANTES DA INSTITUIÇÃO D
conclusão



(Aluno 8D)



(Aluno 11D)



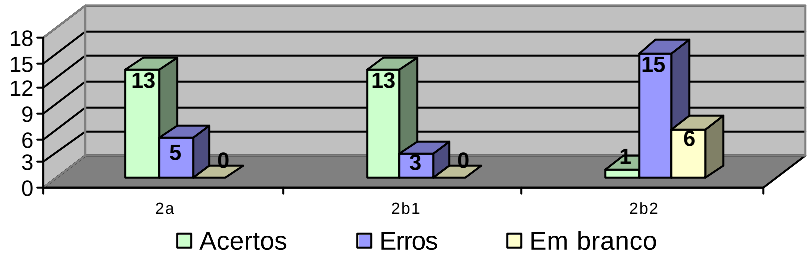
(Aluno 9D)

A resposta do aluno 5D parece revelar que o mesmo tem a noção de que uma das componentes vale 0 e a resposta do estudante 10D despreza a componente nula. Ambos fornecem respostas baseadas numa transformação do R^2 em R. As outras resoluções indicam dificuldades com relação ao registro gráfico envolvido nesta questão.

A análise das resoluções apresentadas nesta questão indica que o grupo também possui uma grande dificuldade na coordenação das diversas representações desta transformação linear. As condições de linearidade não foram apresentadas, e esta turma mostrou uma deficiência maior que as demais na resolução dessa questão, tendo em vista o baixo índice de acerto e o alto índice de questões sem resolução. Notamos, também, certas características comuns com os demais grupos analisados, tais como: confusão entre projeção e outras transformações mais exploradas no curso de Álgebra Linear, confusão entre matriz de uma transformação linear em relação à base canônica e matriz formada pelos vetores da base canônica do R^2 e falta de domínio das representações, bem como dificuldades no estabelecimento de conversões entre os diversos registros envolvidos nesta questão.

O gráfico seguinte contém a tabulação dos acertos e erros dos dezoito estudantes da Instituição D na segunda questão proposta no teste.

GRÁFICO 50 – INSTITUIÇÃO D – QUESTÃO 2



NOTA: Amostra de dezoito estudantes.

Treze alunos apresentaram a resolução correta do item “a” dessa questão e não houve exercícios sem resolução. A conversão do registro simbólico-algébrico para o numérico foi realizada corretamente por quinze alunos, ou seja, aproximadamente 83% da amostra. No item “b” dessa questão, treze estudantes afirmaram que o cisalhamento é uma transformação linear, mas apenas um justificou a linearidade, baseado na forma algébrica de uma transformação linear do R^2 no R^2, conforme descrito a seguir.

QUADRO 101 – RESOLUÇÃO DO ITEM “B” DA QUESTÃO 2 – ALUNO 10D

“Sim. Pois é do tipo $T(\alpha,\beta) = (a\alpha+b\beta,\ c\alpha+d\beta)$”

Apesar de não demonstrar a linearidade partindo das condições presentes na definição de transformação linear, a resolução do aluno 10D indica o seu conhecimento a respeito do tipo de imagem algébrica possível por meio de uma transformação linear do R^2 no R^2. Treze estudantes afirmaram a linearidade e três a negaram. Deste grupo, as justificativas foram dadas no registro da língua natural de emprego comum, baseadas na equação fornecida ou no efeito geométrico obtido, conforme exemplificado no quadro a seguir.

QUADRO 102 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 2B – INSTITUIÇÃO D

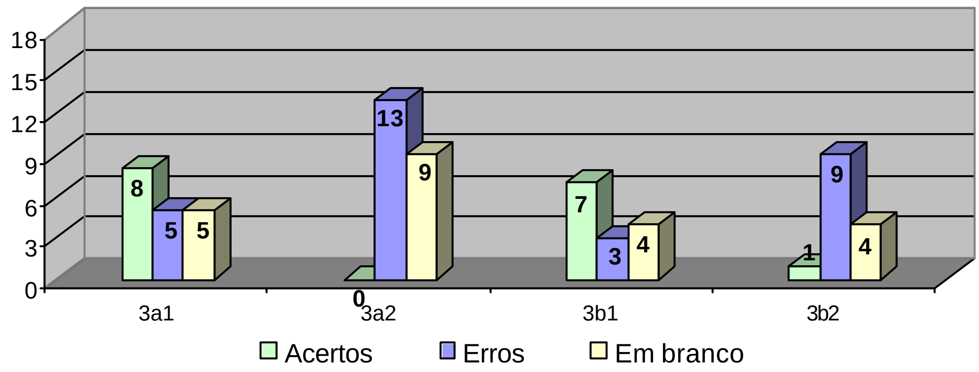
“Sim. A transformação é linear, pois a equação dada para o cálculo da imagem equivale a equação da reta”. (Aluno18D). “Sim, pois houve uma transformação de um quadrado para um losângulo.” (Aluno 17D). “Sim, pois apenas deslocamos no plano dois pontos da figura geométrica inicial”. (Aluno 13D) “Não, porque na transformação os pontos B e D foram “trocados”. (Aluno 7D). “Sim, pois utilizou função de 1º grau”. (Aluno 6D). “Sim, pode ser representado no plano x”. (Aluno 11D). “Não, pois não houve uma seqüência constante.” (Aluno 9D)

Coerentemente com os resultados dos outros grupos, o índice de acerto no item “a” desta questão também foi satisfatório, uma vez que treze dos dezoito estudantes tiveram êxito na sua resolução. Além disso, apesar de o grupo apresentar um alto índice de questões em branco no questionário em geral, notamos que não houve abstenção no item “a” desta questão. Tal fato parece indicar que não houve falta de comprometimento desses dezoito alunos no desenvolvimento desta atividade.

No item “b” desta questão, notamos que as justificativas foram dadas sem nenhuma relação com as condições de linearidade. Neste grupo, basicamente destacam-se respostas que estabelecem uma forte relação com função de primeiro grau ou resoluções baseadas em justificativas geométricas, as quais denotam o desconhecimento do efeito geométrico possível por meio de uma transformação linear.

O gráfico seguinte contém a tabulação dos acertos e erros dos dezoito estudantes da Instituição D na terceira questão proposta no teste.

GRÁFICO 51 – INSTITUIÇÃO D – QUESTÃO 3



NOTA: Amostra de dezoito estudantes.

Quanto à terceira questão, oito alunos afirmaram a impossibilidade de transformar um quadrado em circunferência por meio de uma transformação linear, porém, ninguém justificou corretamente. Cinco alunos deixaram esta questão sem resolução. Sete estudantes afirmaram a possibilidade de transformar um quadrado em segmento, porém somente um apresentou uma justificativa satisfatória. Neste item, oito estudantes não apresentaram qualquer resolução. O quadro, a seguir, contém uma amostra das respostas oferecidas nesta questão.

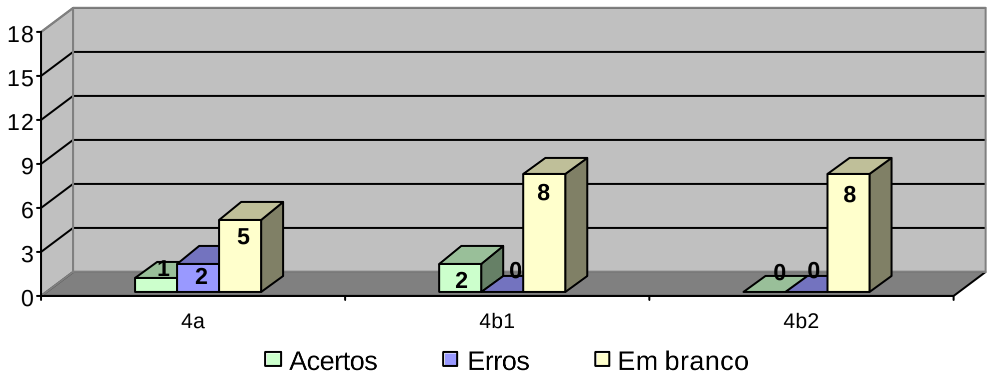
QUADRO 103 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 3 – INSTITUIÇÃO D

“Sim a partir de um quadrado, podemos ajustar x e y para se obter a circunferência, porém não podemos transforma-lo em seguimento, pois se trata de uma figura fechada.” (Aluno 9D). “Sim. Pois se pode achar o raio da circunferência do centro até uma aresta de um quadrado”. (Aluno 8D). “Acho impossível as duas hipóteses pois para alterar os pontos para transformar as figuras seria necessário alterar os pontos x e y”. (Aluno 5D). “Quad→Circunf → Não pois não existem coordenadas similares. Quad →seg→ Sim pois as coordenadas de base do quad. podem diminuir a ponto de ficarem bem próximas de 0 transformando-se num segmento.” (Aluno 7D) “Sim eu posso transformar um quadrado em uma circunferência, bem como um quadrado em um segmento, para isso basta aumentar ou diminuir a área da figura.” (Aluno 15D).

As respostas dadas por esta amostra confirmam o seu desconhecimento com relação ao tipo de efeito geométrico decorrente de uma transformação linear. Além disso, como ocorrido no grupo “piloto” e na amostra da Instituição C, foi dada a justificativa da possibilidade do quadrado ser transformado em segmento por meio de um cisalhamento horizontal, o que denota falta de coordenação entre os registros gráfico e algébrico.

O gráfico seguinte contém a tabulação dos acertos e erros dos dezoito estudantes da Instituição D na quarta questão proposta no teste.

GRÁFICO 52 – INSTITUIÇÃO D – QUESTÃO 4



NOTA: Amostra de dezoito estudantes.

Notamos que quase a totalidade da amostra deixou esta questão sem resolução. Somente três estudantes resolveram a questão 4a. Destes, só uma resolução foi apresentada de forma correta, fornecida no registro da língua natural de emprego comum.

A seguir, serão apresentadas as outras duas resoluções incorretas.

QUADRO 104 – AMOSTRA DE RESOLUÇÕES DA QUESTÃO 4A – INSTITUIÇÃO D

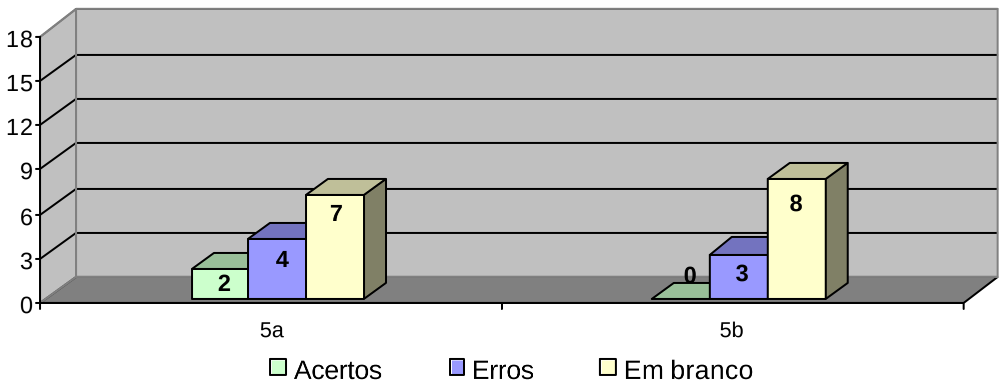
“Obtém-se outro vetor.” (Aluno 7D).
“$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.u$ ® $5u$” (Aluno 17D)

Na resolução do estudante 7D, nota-se que o mesmo não caracteriza o vetor obtido pela multiplicação da matriz 2x2 por um vetor do R^2. A resposta do estudante 17D demonstra desconhecimento de conversões que envolvem o registro numérico-tabular. Quanto ao item “b” desta questão, apenas dois alunos afirmaram que a matriz poderia ser considerada a matriz de uma transformação linear em relação à base canônica, porém, os mesmos não apresentaram justificativas para esta afirmação.

Esta análise indica que este grupo possui uma grande deficiência no trabalho com o registro numérico-tabular, tanto pelo alto índice de abstenção na resolução desta questão, como pela análise das respostas fornecidas. Apesar de este problema ter sido notado nos grupos das outras Instituições analisadas, observamos que esta amostra, em particular, demonstrou uma dificuldade maior na resolução desta questão.

O gráfico seguinte contém a tabulação dos acertos e erros dos dezoito estudantes da Instituição D na quinta questão proposta no teste.

GRÁFICO 53 – INSTITUIÇÃO D – QUESTÃO 5



NOTA: Amostra de dezoito estudantes.

No exercício 5, também notamos um número muito alto de abstenção. Sete estudantes responderam a questão 5a, sendo que apenas dois assinalaram o item correto. Do grupo que respondeu a questão, três estudantes apenas escolheram um item, dois somente destacaram os vértices do quadrado inicial e dois destacaram os vértices das duas figuras, ou seja, tais estudantes não coordenaram as conversões necessárias para a resolução da questão.

A análise permitiu verificar que, nesta questão, o grupo praticamente não estabeleceu conversões. Os itens assinalados corretamente foram dados de forma aleatória, já que não foram acompanhados de nenhum tipo de resolução. Tal análise aponta o fato de que o grupo apresentou deficiências no domínio das representações e na coordenação das conversões necessárias para a resolução desta questão.

4.2.4.1. Conclusão da análise da instituição D

A análise das resoluções apresentadas por este grupo revelou que o mesmo demonstrou muita dificuldade na resolução deste teste. Em particular, esta amostra foi a que apresentou o maior número de questões sem resolução. Além disso, comparando com os demais grupos analisados, este foi o que menos diversificou as representações.

As condições de linearidade, usualmente presentes na definição de transformação linear, não foram sequer citadas durante a resolução do teste. Como nos demais grupos analisados, o maior sucesso ocorreu na situação que envolvia uma conversão do registro algébrico para o numérico, presente no item “a” da questão 2. Neste grupo também houve ocorrência de confusão entre projeção e outros tipos de transformação linear geométrica, relação entre transformação linear e função de primeiro grau e confusão entre matriz de uma transformação linear em relação à base canônica e matriz formada pelos vetores da base canônica do R^2. Ainda, observou-se um desconhecimento do efeito geométrico possível por meio de uma transformação linear. Por fim, recursos mais perceptivos do que reflexivos foram estabelecidos pelos estudantes na resolução de certas questões.

O fato de o grupo ter apresentado um alto índice de questões sem qualquer resolução dificultou uma análise das relações entre as respostas. Um dado muito presente nos estudantes desta Instituição foi representado pela associação de transformação linear com função de primeiro grau. Exemplificando, o estudante 1D justificou a linearidade tanto da projeção ortogonal sobre o eixo x, como do cisalhamento horizontal de fator 2, pelo fato da transformação utilizar "apenas equações de 1º grau". Diante dos resultados, a análise apontou que tal grupo foi o que demonstrou menor domínio do conteúdo presente no teste.

4.3 COMPARATIVO ENTRE OS RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO E A REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No seu trabalho de pesquisa, KALLIA PAVLOPOULOU (1993, apud DORIER, 1998, apud DUVAL, 2000) realizou um estudo sobre vetores, apoiado na teoria de Duval. Os resultados indicaram que os estudantes apresentaram confusões entre o objeto estudado e sua representação, dificuldades no estabelecimento de conversões e diferenças de sucesso dependendo do sentido de conversão. Estabelecendo um comparativo com o nosso estudo, notamos que tais situações também ocorreram de maneira significativa. Na descrição dos resultados de cada amostra, pôde-se notar que freqüentemente os estudantes associavam o objeto "transformação linear" com a sua representação simbólico-algébrica, ou seja, confundiam este objeto matemático com uma de suas representações.

As conversões praticamente não foram estabelecidas nas questões, com exceção da questão 2, que partia da representação simbólico-algébrica e requeria uma conversão para o registro numérico. Ressaltamos, neste momento, que esta conversão é uma das mais trabalhadas nos livros didáticos analisados. Segundo DUVAL (2000), a atividade de conversão não é algo que o estudante desenvolve naturalmente, pois ela não representa uma simples "tradução" de uma representação de um registro a uma representação de outro registro.

Na análise da resolução do teste também foi observado que nas questões nas quais não se especificava o tipo de representação a ser utilizado, poucos alunos apresentaram uma representação diferente da língua natural de emprego comum, sendo esta fornecida, na maioria das vezes, de forma insatisfatória. Apesar de o teste não propor conversões em sentidos opostos em uma mesma questão, pôde-se observar que o desempenho nas questões estava relacionado ao tipo de conversão envolvido. Tal afirmação é justificada ao analisar as resoluções da questão 2, que partia do registro simbólico-algébrico para o gráfico, intermediado pelo numérico. Nas amostras analisadas, esta foi a conversão que apresentou o maior índice de sucesso. Já a questão 5, que partia do gráfico para o numérico, teve um índice alto de abstenção, além de resoluções apresentadas de forma incorreta.

DIAS (1998), no seu estudo sobre a articulação de pontos de vista na representação de subespaços vetoriais, verificou que poucos estudantes se apoiavam no quadro geométrico para a resolução dos exercícios. Notamos, em nossa pesquisa, a mesma ocorrência, pois, com exceção da amostra da Instituição A, os estudantes praticamente não recorreram ao registro gráfico para definir a projeção ortogonal sobre o eixo x ou mesmo para analisar o efeito geométrico solicitado na questão 4.

SIERPINSKA, DREYFUS e HILLEL (1999) elaboraram um experimento para a introdução aos conceitos de Álgebra Linear utilizando o *software Cabri-Géomètre*. Neste estudo, notaram que os estudantes, quando deparados com um problema, não utilizavam espontaneamente a definição de transformação linear, mesmo tendo realizado uma série de exercícios sobre as duas condições de linearidade no próprio experimento. Segundo estes pesquisadores, é provável que esta problemática decorra da dificuldade de se trabalhar com definições axiomáticas. Destacamos que em nosso estudo, especificamente nas questões que solicitavam justificativas da linearidade da transformação, as condições praticamente não foram citadas.

PESONEN (2000) realizou um estudo sobre conceitos básicos, tais como função, operação binária e axioma, com o intuito de auxiliar os estudantes na construção do conceito de espaço vetorial. Nesta pesquisa, o autor constatou que idéias iniciais mal estruturadas sobre objetos matemáticos, tais como o conceito de função e operação binária, representam sérios obstáculos para a aprendizagem de Álgebra Linear. Além disso, os estudantes demonstraram tendências de checar axiomas de forma indutiva e para casos particulares.

Pôde-se notar, na aplicação de nosso teste, que estes fatores também influenciaram o desempenho dos estudantes. Por exemplo, observamos que vários alunos não discriminaram função de primeiro grau de função linear, sendo que muitos justificaram a linearidade da transformação baseados no fato da forma algébrica da imagem envolver funções de primeiro grau. Ainda, em nosso questionário, houve ocorrência do uso de vetores particulares para checar a linearidade da transformação.

DREYFUS, HILLEL e SIERPINSKA (1998) observaram que, no ensino das transformações lineares, praticamente não são analisados contra-exemplos, ou seja, transformações que não preservam a soma e a multiplicação por escalar. Segundo os pesquisadores, tal fato representa um corte no ensino deste conteúdo e traz por conseqüências, a geração de dificuldades no discernimento entre os tipos de transformação. Notamos que tal fato parece ter repercutido no desempenho dos estudantes que participaram de nosso estudo, já que vários alunos classificaram a transformação como linear, pelo fato de existir uma função algébrica no exercício, independente de sua forma.

GUEUDET-CHARTIER (2000) realizou um estudo sobre o uso dos modelos geométricos e dos modelos de figuras pelos professores e estudantes de Álgebra Linear. Para os estudantes, foram apresentadas duas colunas envolvendo figuras, sendo que os mesmos deveriam justificar se os desenhos do primeiro grupo poderiam ser transformados nos desenhos do segundo grupo, por meio de uma aplicação linear. Os resultados apontaram que os estudantes têm grande dificuldade em relacionar a transformação linear com o modelo de figuras. Inspiradas nesta pesquisa, elaboramos uma tarefa (questão 3 do teste) que questionava a possibilidade do quadrado ser transformado em circunferência ou em segmento, por meio de uma transformação linear. Notamos que, intuitivamente, grande parte dos estudantes possui a noção da manutenção do alinhamento de pontos e paralelismo de segmentos quando se aplica uma transformação linear, porém, ou as afirmações não foram explicadas ou as justificativas foram apresentadas de forma insatisfatória.

SIERPINSKA (2000) realizou uma pesquisa sobre o tipo de pensamento demonstrado por estudantes de Álgebra Linear. A autora observou que os alunos tentam resolver os problemas com uma mente mais prática do que teórica. Estabelecendo um comparativo com os resultados obtidos em nosso teste, pudemos observar que os estudantes também procuraram resolver determinadas questões com um pensamento prático em detrimento do teórico. Por exemplo, na questão 5, a maior parte das justificativas foi dada principalmente com base na percepção e não na análise dos dados do problema, acompanhada das conversões necessárias.

Conforme a teoria da antropologia cognitiva de CHEVALLARD (1992), consideramos os livros didáticos de Álgebra Linear como representantes da Instituição *I*, as transformações lineares como representantes do objeto *O* e os estudantes da área de Computação como representantes dos indivíduos *X*. De acordo com esta teoria, a relação pessoal R(*X,O*) é construída ou alterada de acordo com as condições da relação institucional R_I (*O*).

Constatamos, conforme descrito no capítulo anterior, que a relação R_I (*O*) é caracterizada pela falta de exploração do registro gráfico, sendo as conversões entre os registros simbólico-algébrico e numérico as mais enfatizadas. Além disso, os aspectos geométricos das transformações lineares são praticamente inexplorados. Avaliando os resultados obtidos na aplicação do questionário a oitenta e seis estudantes, representados por *X*, pudemos concluir que a relação R(*X,O*) foi consideravelmente influenciada pelas condições das relações entre os livros didáticos de Álgebra Linear e o objeto matemático em questão, uma vez que os sujeitos demonstraram pouco conhecimento da representação da matriz da transformação linear em relação à base canônica, dificuldades em estabelecer conversões que partiam do gráfico e conhecimento insatisfatório das possibilidades geométricas de uma transformação linear.

Baseado em DUVAL (2003), o estudo até então demonstrou que os livros didáticos de Álgebra Linear analisados privilegiam determinadas conversões e não exploram a não-congruência deste tipo de operação. Essa situação parece ter acarretado prejuízos na compreensão do conteúdo das transformações lineares nos estudantes que responderam o questionário apresentado neste capítulo.

Sendo assim, a análise da produção destes estudantes, a revisão bibliográfica e o estudo dos livros didáticos de Álgebra Linear e de Computação Gráfica evidenciaram a necessidade de um tratamento das transformações lineares geométricas com a preocupação de explorar os diversos registros, bem como a atividade de conversão. Ainda, foi verificado que para a formação do estudante da área de Computação, torna-se primordial desenvolver situações envolvendo conversões entre os registros gráfico e numérico-tabular. É o que pretendemos desenvolver e analisar na seqüência desse estudo.

No próximo capítulo, apresentaremos a descrição da metodologia que balizou a elaboração, a aplicação e a avaliação das atividades de ensino sobre transformações lineares. Em seguida, serão descritas as atividades propostas, acompanhadas dos objetivos e de uma análise preliminar.

5. METODOLOGIA DA PESQUISA

5.1 A METODOLOGIA DOS *DESIGN EXPERIMENTS*

Com base na visão de uma pesquisa qualitativa, adotaremos os *Design Experiments* como metodologia de nosso estudo. Segundo COOB et al. (2003), *Design Experiments* representam um tipo de metodologia cujo objetivo é analisar processos de aprendizagem de domínios específicos. Porém, eles não representam simplesmente uma coleção de atividades direcionadas à aprendizagem de um determinado domínio, não se limitando, portanto, a uma seqüência de atividades. Na verdade, este tipo de metodologia é considerado uma ecologia de aprendizagem, no sentido de representar um sistema complexo e interativo, envolvendo múltiplos elementos de diferentes tipos e níveis. Isto ocorre por meio da modelagem de seus elementos e da antecipação de como esses elementos funcionam em conjunto, para dar suporte à aprendizagem.

Nesta visão de ecologia de aprendizagem, *Design Experiments* são elaborados com o cuidado de se considerar determinados elementos. Além das questões a serem propostas aos estudantes, deve-se levar em consideração o provável discurso a ser desenvolvido, as regras de participação a serem estabelecidas, as ferramentas e os materiais que serão utilizados e os significados das relações entre estes elementos. Uma teoria proveniente do *Design Experiment* deve explicar como ele funciona e oferecer sugestões de como pode ser adaptado a novas circunstâncias, além das possibilidades de gerar e testar novas hipóteses. Desta forma, este tipo de metodologia é, ao mesmo tempo, pragmático e teórico.

Design Experiment é considerado como método científico de investigação quando a ênfase está na análise do pesquisador a respeito do pensamento matemático dos estudantes e das modificações desses pensamentos. Neste sentido, os pesquisadores devem criar situações e modos de interação entre estudantes, encorajando-os a modificar seus pensamentos usuais. Com isso, a coerência deste tipo de metodologia reside no fato do que o professor-pesquisador pode dizer sobre possibilitar, sustentar e modificar os esquemas matemáticos dos estudantes. Ressalta-se que, se há ausência de contribuições individuais dos estudantes, não há razão científica para conduzir este tipo de metodologia.

Design Experiment representa um tipo de experimento de ensino para pesquisas em Educação Matemática, que teve as suas raízes em torno de 1970 nos Estados Unidos. Tal metodologia emergiu por dois motivos. Em primeiro lugar, modelos de outras áreas, tais como da epistemologia, da psicologia e da filosofia, os quais não foram criados para analisar especificamente a matemática de estudantes, eram aplicados para entender desenvolvimentos matemáticos. Com isso, modelos com raízes na Educação Matemática se tornaram necessários, para que se considerasse o progresso de um estudante diante de uma comunicação matemática interativa. Em segundo lugar, havia uma lacuna entre a prática da pesquisa e a prática de ensino.

Inicialmente, a metodologia experimental utilizada antes dos experimentos de ensino procurava selecionar uma amostra de sujeitos e submetê-los a diferentes tratamentos. Os efeitos de um tratamento eram comparados com os efeitos de outros, com a intenção de especificar diferenças entre eles. Os pesquisadores formulavam possíveis fatores que poderiam ser variados sistematicamente, de modo que houvesse uma variação correspondente em outras variáveis. Este tipo de experimento, classificado como desenho clássico experimental, omitia a análise conceitual, ou seja, os sujeitos eram considerados recipientes de tratamentos e usualmente não eram o foco de análise. Eles eram indivíduos a serem tratados e não participantes da construção dos tratamentos no contexto dos episódios de ensino. Com isso, os significados construídos pelos estudantes não representavam o interesse principal do pesquisador, ao contrário da proposta dos *Design Experiments.*

5.1.1. Aspectos Relevantes deste Tipo de Metodologia

Design Experiments podem ocorrer de diversos modos, dependendo da função ou foco a que se aplicam. Este tipo de metodologia pode se manifestar entre professor-pesquisador e um grupo restrito de estudantes ou como experimentos aplicados em classes mais numerosas, como trabalhos voltados à organização da educação de futuros professores. Eles também podem ser vistos como experimentos com vistas a dar suporte ao desenvolvimento de uma comunidade profissional ou, ainda, como atividades para fins de reestruturação escolar.

De qualquer forma, seja qual o foco a que se aplica, uma das características principais do *Design* é a quebra consciente entre a divisão dos papéis professor-pesquisador, já que estudantes, professores e pesquisadores são vistos como colaboradores do processo. Em geral, este tipo de metodologia foca no desenvolvimento que ocorre no interior de um ambiente conceitualmente rico, explicitamente desenhado para otimizar as chances de ocorrerem desenvolvimentos relevantes de forma observável. Não há períodos de tempo definidos, ou seja, as atividades podem durar poucas horas, semanas ou períodos acadêmicos.

Independente da função que norteia os *Design Experiments*, todos os tipos possuem cinco pontos convergentes. Em primeiro lugar, o objetivo desse tipo de metodologia é desenvolver uma classe de teorias tanto sobre o processo de aprendizagem como sobre os significados que são desenhados para dar suporte à aprendizagem, estes últimos vinculados aos artefatos materiais, às práticas de ensino e de aprendizagem, aos níveis de controle, à negociação de normas e outras formas de mediação. No caso dos *Design Experiments* de pequena escala, descrito anteriormente como o primeiro modo de manifestação deste tipo de metodologia, o objetivo teórico deve ser o desenvolvimento de um modelo psicológico do processo, no qual estudantes desenvolvem entendimentos de uma idéia matemática particular, em conjunto com os tipos de questão e práticas de ensino que fornecerão suporte para aquela aprendizagem.

Em segundo lugar, tem-se como característica comum a natureza intervencionista deste tipo de metodologia. *Design Experiments* têm por meta representar bases iniciais para futuras inovações, ou seja, a intenção deste tipo de metodologia é a de investigar possibilidades de novas formas de aprendizagem, visando mudanças educacionais. Pela sua natureza, o estudo de ecologias de aprendizagem necessita de completa especificação de qualquer ocorrência. Na construção de *Design Experiments,* deve-se ter o cuidado em distinguir os elementos que representam o objetivo de investigação e aqueles que podem ser considerados como pré-requisitos. Deste modo, a análise das pesquisas já existentes sobre o tema se faz essencial para especificar a diferença entre as condições centrais e as subjacentes.

Em terceiro lugar, qualquer tipo de *Design Experiment* tem dois aspectos, sendo um aspecto prospectivo, no qual o desenho é implementado como um processo de aprendizagem hipotetizado, e o aspecto reflexivo, no qual conjecturas são realizadas com vários níveis de análise. Em particular, o projeto inicial é uma conjectura sobre os significados que darão suporte a uma forma particular de aprendizagem, a qual será testada. Durante a condução do experimento, são realizadas e testadas conjecturas mais especializadas. Ainda, se uma conjectura inicial é refutada, novas conjecturas alternativas podem ser geradas e testadas.

Sendo assim, os pesquisadores interagem no sistema dotando-o de uma característica cíclica, pois o desenho é alterado freqüentemente conforme as informações obtidas. Isto faz com que os resultados não sejam simples devoluções de informações fornecidas por sujeitos passivos, mas sim, informações decorrentes de interações complexas, adaptações e "*feedbacks*" constantes. Esta característica conduz a uma quebra da visão tradicional em que pesquisadores, professores e estudantes desempenham um papel fixo e definido. Devido a essa natureza dinâmica, uma quarta característica se destaca neste tipo de metodologia, relativa à forma iterativa e cíclica na qual o *Design* é conduzido.

A última característica tem por base o pragmatismo inerente a este tipo de metodologia. Teorias são desenvolvidas durante o processo, porém são modestas tanto no sentido de que estão relacionadas a um domínio específico do processo de aprendizagem, como também pelo fato de desempenharem um trabalho real, já que são responsáveis pela atividade do *Design*.

Para preparar este tipo de metodologia, torna-se necessário estabelecer algumas etapas que nortearão a sua construção. Em primeiro lugar, deve-se definir a intenção teórica da pesquisa, identificando e descrevendo modelos sucessivos no pensamento do estudante. O levantamento bibliográfico das pesquisas existentes também é imprescindível, a fim de delimitar os elementos que representam o objetivo de investigação.

A proposta deve ser elaborada como uma forma alternativa para o domínio proposto, especificando o ponto de partida intelectual e social dos estudantes. Em primeira instância, conjecturas devem ser levantadas a respeito das interpretações iniciais e entendimentos dos estudantes. Para isso, cabe estabelecer um trabalho “piloto” documentando os resultados, para que se possam desenvolver novos métodos de acesso a aspectos de raciocínio do estudante. Com tais dados, a etapa seguinte consiste em especificar o ponto de partida, os elementos da trajetória e os pontos futuros, tendo como meta formular um projeto inicial que seja capaz de testar conjecturas sobre mudanças expressivas no raciocínio de estudantes, especificando os significados que darão suporte a estas mudanças.

Ao conduzir *Design Experiments*, deve-se constantemente testar e revisar conjecturas, analisando o raciocínio dos estudantes e a influência do ambiente de aprendizagem. Uma característica expressiva desta metodologia consiste no fato de que o entendimento do fenômeno em investigação ocorre enquanto o experimento se desenvolve. Com isso, torna-se importante gravar os encontros e, se possível, contar com assistentes e múltiplas formas de coleta de dados, tais como questionários, testes, análise do discurso, interação social, dentre outros.

A condução de análises retrospectivas deve ocorrer de modo sistemático, verificando os dados gerados durante o experimento de maneira extensiva e longitudinal. Para isso, devem-se estabelecer critérios ao realizar as inferências, de forma que possibilite aos pesquisadores o entendimento, a monitoração e a análise crítica do que foi realizado. O *Design* deve ser localizado no interior de um contexto teórico amplo, o qual deve orientar a análise enquanto o experimento ocorre. A análise dos “erros” dos estudantes deve constituir um fator primordial, uma vez que o professor-pesquisador entenderá melhor o que os estudantes podem fazer se for capaz de analisar o que eles não foram capazes de resolver.

5.1.2. O Papel do Professor neste Tipo de Metodologia

As ações do professor ocorrem em um contexto de interação com os estudantes. Como agir e como questionar são questões que representam o objetivo central da condução de um *Design Experiment*. Isto porque, o professor-pesquisador deparar-se-á com possibilidades não esperadas durante a aplicação do experimento. É claro que, se ele soubesse previamente como agir com o estudante e que tipo de resultados conseguiria, não haveria razão para conduzir tal experimento, tendo em vista que esta metodologia foca na análise do raciocínio oferecido pelo aluno. Neste contexto, são definidos dois tipos de interação entre o professor-pesquisador e os estudantes: a interação receptiva e intuitiva e a interação analítica. No primeiro tipo de interação, o professor-pesquisador não tem consciência plena de como agir, ou seja, ele interage com os estudantes sem estabelecer intencionalmente a distinção entre o seu conhecimento e o conhecimento dos alunos. Ressalta-se que a interação intuitiva não ocorre somente no início do experimento.

Quando o professor-pesquisador identifica nos estudantes raciocínios ricos e repletos de implicações para futuras interações, ele passa a estabelecer uma forma de interação analítica. Neste tipo de ação, o professor-pesquisador adquire um senso de direção e visualiza as possibilidades do caminho a ser trilhado com os estudantes, ou seja, ele formula uma imagem das operações mentais dos alunos e o itinerário sobre o que deve ser aprendido e como se deve conduzir esta aprendizagem.

Deste modo, o objetivo principal do professor-pesquisador neste tipo de metodologia é estabelecer modelos vivos da matemática dos estudantes, ou seja, criar meios de interação que possam encorajar os estudantes a modificar seus pensamentos atuais. Para isso, os alunos devem ser entendidos como seres humanos capazes de oferecer contribuições independentes.

5.2 RELAÇÃO DE NOSSO ESTUDO COM A METODOLOGIA DOS *DESIGN EXPERIMENTS*

Será adotado como metodologia de nossa pesquisa o *Design Experiment*, pelo fato de nossa proposta ter por objetivo analisar os processos de aprendizagem do conteúdo de transformações lineares no plano, desenvolvido no interior de um ambiente complexo e múltiplo. Pretendemos observar que tipo de construção os estudantes realizam quando deparados com o conceito matemático de transformação linear, desenvolvido de forma distinta à apresentada pelos livros didáticos. Isto porque não é usual uma abordagem que tenha a preocupação de explorar a diversidade dos registros, a atividade de conversão envolvendo os registros gráfico e matricial e o uso de *software* de geometria dinâmica, conforme análise apontada nos capítulos anteriores deste estudo.

Dada a natureza desse trabalho de pesquisa, que tem por foco analisar o entendimento de estudantes da área de Computação perante um enfoque diferenciado das transformações lineares no plano, utilizaremos a metodologia dos *Design Experiments* na qual o professor-pesquisador conduz uma série de sessões de ensino com um pequeno número de estudantes, visando criar uma versão, em pequena escala, de uma ecologia de aprendizagem, garantindo um estudo mais profundo e detalhado dos resultados.

Tendo como base norteadora a teoria dos registros de representação semiótica de DUVAL (1995, 2000, 2003), o nosso objetivo teórico consiste em observar que tipo de entendimento é apresentado por estudantes diante de um sistema criado com a preocupação de explorar as características particulares das conversões no conteúdo das transformações lineares no plano. Ainda, possuímos o interesse particular de avaliar o papel desempenhado pelo *software Cabri-Géometre*, e, mais especificamente, suas possibilidades de representações dinâmicas e ferramentas nas conversões que envolvem o registro gráfico.

Como ponto de partida, além da revisão bibliográfica das pesquisas existentes no ensino de Álgebra Linear, realizamos uma análise dos livros didáticos desta área, observando os tipos de conversões estabelecidos e o papel desempenhado pelos recursos computacionais no ensino das transformações lineares. Como já foi mencionada no capítulo 3 deste trabalho, a análise dos dados revelou uma carência na exploração das especificidades das conversões entre registros, principalmente as que envolvem o registro gráfico, além da presença em pequena escala, ou mesmo inexistente, do trabalho com *software* no ensino das transformações lineares em Álgebra Linear.

Em seguida, tivemos a preocupação de analisar os livros didáticos de Computação Gráfica, a fim de realizar um levantamento das necessidades específicas dos estudantes da área de Computação quanto aos registros e às conversões mais requeridas no conteúdo das transformações geométricas. Nesta fase, observamos que os dois registros mais requisitados são o gráfico e o matricial, os quais são pouco trabalhados no conteúdo das transformações lineares nas obras de Álgebra Linear avaliadas.

Por fim, realizamos um levantamento das concepções de estudantes da área computacional por meio de um teste sobre o conteúdo das transformações lineares geométricas planas. A maior parte dos estudantes da amostra analisada demonstrou dificuldade quando deparada com questões que requeriam o conhecimento de várias representações e o estabelecimento de conversões. Cabe evidenciar que tais alunos já haviam estudado o conteúdo de transformações lineares na disciplina de Álgebra Linear, mas não tinham cursado a disciplina de Computação Gráfica.

Por meio deste estudo, foi possível estabelecer os elementos centrais de nossa investigação. Temos, então, por meta, observar e analisar as concepções de estudantes no conteúdo das transformações lineares, quando deparados com um sistema de aprendizagem que procura explorar as conversões nas suas especificidades, incluindo a utilização do *software* geométrico *Cabri-Géometre*.

Ressaltamos que não temos a intenção de criar atividades visando a introdução deste conceito. Na verdade, objetivamos elaborar e aplicar um experimento a estudantes da área de Computação, apoiado no *Cabri* e na diversidade de registros e conversões, a fim de avaliar a sua influência no processo de conceitualização da noção de transformação linear. Conforme apontado em nossas análises, tais sujeitos, que já tiveram contato com este objeto matemático em Álgebra Linear, necessitam de uma abordagem que atenda às especificidades de seu curso, dentre elas, uma exploração mais significativa do registro gráfico e de suas conversões. Deste modo, temos por meta analisar em que medida estas atividades auxiliam na compreensão dos estudantes da área computacional ou os fazem evoluir em suas concepções.

5.2.1. Os Sujeitos

Os sujeitos que participarão do experimento terão como característica o fato de serem estudantes da área de Computação, que já tiveram contato com as transformações lineares por meio de uma abordagem semelhante à dos livros didáticos de Álgebra Linear analisados.

O grupo de estudantes será composto de seis indivíduos, já que a intenção é observar os desenvolvimentos relevantes que as atividades do *Design*

Experiment venham a permitir, garantindo, assim, um estudo mais aprofundado e detalhado dos resultados.

Os estudantes deverão conhecer certas especificidades do *software Cabri-Géometre*. Para aqueles que nunca tiveram contato com esta ferramenta, será desenvolvida uma atividade preliminar, conforme documento presente no Anexo III. As atividades serão realizadas em dupla, uma vez que temos a intenção de observar os pontos relevantes que despontarão dessa interação. Haverá um professor que também desempenhará o papel de pesquisador.

5.2.2. Material e Ambiente de Trabalho

O experimento será desenvolvido por meio de fichas, cujas resoluções exigirão o material básico de aula, como lápis, borracha, régua e calculadora, além do *software Cabri-Géometre II*. As sessões ocorrerão em salas de laboratório de informática, contendo um computador para cada indivíduo, devidamente equipado com o *software* presente nas atividades. Os encontros serão gravados, as telas dos computadores, contendo as resoluções dos estudantes, serão periodicamente capturadas e o professor-pesquisador realizará anotações sobre as produções dos estudantes durante os episódios de ensino.

5.2.3. Hipóteses Iniciais

Já foi mencionado que *Design Experiments* são realizados tanto para testar hipóteses quanto para criá-las. As atividades propostas foram elaboradas de modo a explorar as diferentes representações e suas especificidades, buscando desenvolver a coordenação simultânea das conversões entre dois ou mais registros. Ainda, estas foram desenvolvidas com a preocupação de explorar conversões tanto congruentes como não-congruentes.

Dentre outros aspectos do experimento, destacamos que o mesmo procurou desenvolver as propriedades da linearidade, a determinação da transformação linear e a não linearidade em uma visão geométrica, o que é viável devido ao caráter dinâmico do *software Cabri-Géometre*. Ainda, foi estabelecida uma conexão entre o conhecimento matemático e o aplicado na área de

Computação Gráfica.

Sendo assim, delimitamos as nossas hipóteses iniciais de pesquisa, conforme exposto a seguir:

a) as atividades que compõem o *Design* podem favorecer tanto o conhecimento das diversas representações de uma transformação linear no plano, quanto a habilidade em coordenar os diversos registros;

b) o aspecto dinâmico do *software Cabri-Géometre* pode fornecer elementos para o estudante estabelecer conjecturas e validá-las experimentalmente, o que pode favorecer o entendimento de certos aspectos matemáticos das transformações lineares do plano, tais como, o aspecto geométrico das condições de linearidade e a determinação de uma transformação linear partindo de um registro gráfico;

c) as atividades do *Design* podem permitir ao estudante entender as especificidades de cada registro, bem como as relações entre eles, ou seja, o tipo de impacto que ocorre em certo registro quando é realizada uma mudança em outro registro.

Como neste tipo de metodologia o processo é iterativo e cíclico, temos consciência de que, durante os episódios, não nos fixaremos rigidamente às hipótese formuladas, uma vez que o objetivo maior deve ser o de adaptação aos desenvolvimentos apresentados pelos estudantes. Com isso, temos a intenção de constantemente retornar a estas hipóteses iniciais, após a análise de cada fase do experimento e, se necessário, estabelecer reformulações e elaborações de novas hipóteses, as quais serão posteriormente testadas.

5.3 PROPOSTA INICIAL DO *DESIGN*

Inicialmente foram propostas nove atividades sobre as transformações lineares no plano. Como uma das etapas na condução de um *Design Experiment* consiste em estabelecer um trabalho "piloto", foi realizada uma aplicação preliminar com um estudante do curso de Engenharia da Computação de uma Instituição Particular de Ensino Superior, o qual cursou a disciplina de Álgebra

Linear segundo a abordagem presente na obra designada por **Livro 2** no capítulo 3 deste trabalho. Tal aplicação objetivou avaliar se os enunciados propostos estão compreensíveis, visando criar reformulações para o desenvolvimento de novos métodos de acesso a aspectos do raciocínio do estudante, antes da aplicação principal.

O estudante desta aplicação "piloto" não conhecia o *Cabri* e, por este motivo, o mesmo participou de um estudo preliminar do *software*, o qual está presente no Anexo III. Cabe mencionar que, nesta aplicação prévia, o professor-pesquisador realizou poucas interferências, uma vez que o intuito era o de avaliar as reformulações necessárias antes da aplicação principal.

A aplicação preliminar trouxe várias informações pertinentes e identificou alguns aspectos importantes a serem considerados para a aplicação final. Em linhas gerais, verificou-se a necessidade de elaborar situações em que a transformação linear é aplicada a objetos diferentes de polígonos e vetores, tendo em vista que uma das atividades evidenciou que o estudante não aceitava aplicar uma transformação linear a uma circunferência.

Ainda, em vários momentos da aplicação "piloto", notou-se uma grande dificuldade na descrição, em língua natural de emprego comum, do entendimento de certas definições e propriedades matemáticas. Com isso, optou-se por solicitar, a cada estudante do estudo principal, explicações orais sobre a descrição escrita apresentada. Neste sentido, o professor-pesquisador fará questionamentos para que o mesmo reflita sobre as suas construções.

Um outro ponto a ser destacado nesta aplicação, refere-se ao fato de se ter observado que determinadas tarefas parecem ter sido resolvidas de forma mecânica, uma vez que o conceito nelas envolvido não foi transposto para novas situações definidas em outros registros. Deste modo, caso os estudantes do estudo principal apresentem bloqueios ou dificuldades na resolução dessas situações, o professor-pesquisador solicitará aos mesmos, o estabelecimento de reflexões e interpretações de aspectos que já dominam e que podem "alavancar" novas estratégias. Com isso, espera-se que os estudantes sejam capazes de realizar as transferências necessárias para novos contextos.

Por fim, tal aplicação apontou a necessidade de reorganização no desenvolvimento das atividades. Isto porque, além da inserção de novas situações, observou-se que certas tarefas, se realizadas em outra ordem, poderiam favorecer a resolução de outras mais complexas. Os enunciados também foram reformulados, sem, contudo, alterar a essência das atividades. Estas alterações foram realizadas com o intuito de evitar um direcionamento explícito na resolução das atividades, fornecendo ao estudante, um ambiente favorável à manifestação de suas estratégias pessoais.

A expressão “matriz canônica da transformação linear”, presente na aplicação preliminar, também foi alterada para “matriz da transformação linear em relação à base canônica”, uma vez que esta última denominação é mais presente nos livros didáticos de Álgebra Linear, e mais precisa, podendo evitar equívocos.

Desta forma, serão apresentadas, na seção seguinte, as atividades propostas, cada qual acompanhada de seus objetivos e de uma análise preliminar. Com o objetivo de dar suporte à coleta de dados, foram elaboradas, para a aplicação final, fichas para cada atividade, as quais estão presentes nos anexos IV (Fichas da Fase I) e V (Fichas da Fase II) deste trabalho.

5.3.1. Apresentação das Atividades Iniciais do Estudo Principal

O *Design* foi desenvolvido em duas etapas. Na primeira fase (Fase I), foram propostas quatro (4) atividades, a serem realizadas individualmente e somente no ambiente *papel&lápis*. As atividades foram compostas de tarefas que envolviam tanto questões usuais, normalmente presentes nos livros didáticos analisados (cf. capítulo 3), como situações que exploravam o aspecto geométrico das transformações. Nesta fase, objetivou-se observar as interpretações apresentadas pelos estudantes com relação às transformações lineares no plano, quando tratadas sob um enfoque geométrico. Na segunda fase (Fase II), foram propostas inicialmente nove atividades contendo situações sobre as transformações lineares planas, desenvolvidas nos ambientes *Cabri* e *papel&lápis*. Nesta etapa, os estudantes foram organizados em duplas. Na seção seguinte, será apresentada a descrição das atividades da Fase I, cada qual acompanhada dos objetivos e de uma análise preliminar.

5.3.1.1. Descrição e análise preliminar das atividades da FASE I

O quadro seguinte contém a descrição das tarefas da primeira atividade da Fase I do *Design.*

QUADRO 105 – APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 1 – FASE I

a) Considerando o plano x0y, o que você entende por reflexão em relação ao eixo y? b) A reflexão no plano em relação ao eixo y é uma transformação linear? Justifique. c) Represente a lei algébrica F(x,y) e o gráfico da reflexão no plano x0y, em relação ao eixo y. d) Determine a matriz desta reflexão em relação à base canônica. e) Qual seria a imagem do vetor (3,-2) por esta reflexão?

O objetivo geral desta atividade consiste em verificar se o estudante relaciona o conceito de transformação linear em situações geométricas do plano, além de analisar se o mesmo apresenta o domínio dos registros requisitados e das conversões presentes nas tarefas propostas. Com relação aos objetivos específicos, nos itens “a” e “b” pretendemos verificar se o aluno apresenta a concepção de reflexão no plano em relação ao eixo y e se relaciona este fato com uma transformação linear. Ainda, no item “a”, temos a intenção de observar que tipo de registro o estudante utilizará para a sua resolução, partindo da representação da língua natural de emprego comum. No item “b”, objetivamos analisar se a justificativa será apresentada com base na definição ou em alguma propriedade de transformação linear. Nos itens “c” e “d”, pretendemos verificar se o aluno demonstra domínio na coordenação entre os registros simbólico-algébrico, gráfico e numérico-tabular. No item “e”, verificaremos que tipo de representação o aluno utilizará para determinar a imagem de um vetor.

Quanto à escolha de variáveis, a seleção da reflexão em relação ao eixo y foi realizada pelo fato de a mesma ser uma transformação usual, provavelmente trabalhada não só no curso de Álgebra Linear. Desta forma, esperamos que o aluno não tenha dificuldades para relatar, de algum modo, o que esta transformação representa. Partindo desta suposição, pretendemos analisar se o estudante estabelece e justifica uma relação da reflexão com o conteúdo das transformações lineares. Ainda, a atividade foi formulada de modo a explorar os registros gráfico, simbólico-algébrico, numérico e da língua natural, bem como as suas conversões, com o intuito de verificar de que modo o estudante lida com a coordenação destes registros.

Analisando as prováveis dificuldades, com base na análise dos livros e da revisão bibliográfica, é provável que os estudantes demonstrem problemas em justificar a linearidade da transformação no item “b”, uma vez que as pesquisas de SIERPINSKA, DREYFUS E HILLEL (1999) mostraram que dificilmente os alunos utilizam a definição de transformação linear em questões que solicitam este tipo de justificativa. Além disso, espera-se que os estudantes apresentem dificuldades no domínio das representações gráfica e numérico-tabular e no estabelecimento de conversões entre esses registros. Esta afirmação é feita tanto com base nos resultados das pesquisas de PAVLOPOULOU (1993), HILLEL E SIERPINSKA (1995) e DREYFUS, HILLEL E SIERPINSKA (1998), como na análise dos livros didáticos de Álgebra Linear. Esta última, apresentada no capítulo 3, apontou que estes registros não são tão explorados como os demais.

O quadro seguinte contém a descrição da segunda atividade da primeira fase do experimento.

QUADRO 106 – APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 2 – FASE I

<u>Tarefa 1</u>. Considere os vetores u_1 e u_2 que representam uma base do R^2. Sejam v_1 e v_2 elementos arbitrários do R^2. Então existe uma única transformação linear $F: R^2 \to R^2$ tal que $F(u_1) = v_1$ e $F(u_2) = v_2$. Se $u = a_1u_1+a_2u_2$, então, $F(u) = a_1F(u_1) + a_2F(u_2) = a_1v_1+a_2v_2$. O que você entende por esta descrição? <u>Tarefa 2</u>. Seja F uma transformação linear dada por $F: R^2 \to R^2$ / $F(1,-1)=(0,-2)$ e $F(0,3)=(3,6)$. Determine $F(x,y)$ e a matriz desta transformação linear em relação à base canônica.

Na tarefa 1 desta atividade, pretendemos analisar que tipo de significado o aluno, que já cursou a disciplina de Álgebra Linear, fornece à condição formulada na língua natural de emprego especializado. Como o *Design* é voltado ao trabalho com transformações no plano, optamos por apresentar as condições de determinação de uma transformação linear definidas neste espaço vetorial. A resolução desta tarefa exige uma interpretação que parte da língua natural especializada para a língua natural de emprego comum.

Situações solicitando interpretações de definições ou propriedades matemáticas são pouco usuais no contexto das transformações lineares, conforme análise dos livros didáticos. Ainda, os dados obtidos na aplicação do questionário, apresentado no capítulo anterior, revelaram um domínio quase inexistente do registro da língua natural de emprego especializado, além de uma expressão escrita extremamente confusa.

Com isso, esperamos que o estudante apresente a resolução dessa tarefa na língua natural de emprego comum, sem estar atento a todas as condições e informações inerentes à definição apresentada.

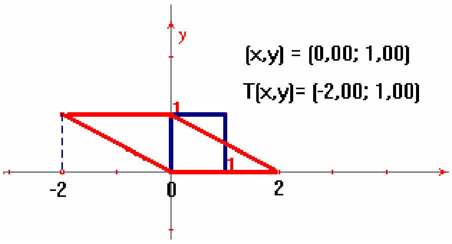
Na tarefa 2, tem-se a intenção de verificar se o estudante determina a representação simbólico-algébrica e a numérico-tabular de uma transformação linear no plano, partindo das imagens de dois elementos de uma base do R^2, dadas na forma de pares ordenados.

A escolha dos vetores (1,-1) e (0,3) foi realizada com o intuito de minimizar os cálculos para a obtenção de "a" e "b" em (x,y) = a(1,-1) + b(0,3), porém, de forma a não envolver a base canônica, já que a intenção é a de observar se o estudante domina as condições e o processo de obtenção de uma transformação linear no plano. A opção de apresentar uma situação definida no R^2 foi realizada em função deste *Design* envolver atividades propostas somente neste espaço vetorial. A tarefa foi elaborada de modo a requerer do estudante apenas o conhecimento trabalhado nos livros didáticos de Álgebra Linear, sendo a situação formulada nos moldes dos exercícios encontrados nestas obras. Com isso, espera-se que o estudante não demonstre dificuldades em sua resolução.

O quadro seguinte contém a descrição da terceira atividade desta fase.

QUADRO 107 – APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 3 – FASE I

Tarefa 1. Determine a lei algébrica T(x,y) que transforma o quadrado azul, de vértices (0,0), (1,0), (1,1) e (0,1), no quadrilátero destacado em vermelho.



Tarefa 2 Sabendo que T(x,y)=(2x-2y,y) representa a lei algébrica de uma transformação linear, determine a imagem gráfica do quadrado ABCD, dados A(0,0), B(1,0), C(1,1) e D(0,1).

Cada tarefa da atividade 3 envolve a mesma transformação linear, porém, enquanto a primeira requer a determinação da lei algébrica da aplicação linear partindo de uma imagem gráfica, fornecida no ambiente *papel&lápis*, a segunda solicita a conversão contrária. Ressaltamos que as duas tarefas serão fornecidas separadamente aos estudantes. Na primeira, pretendemos observar se o estudante conhece o efeito geométrico correspondente aos valores de **a, b, c** e **d** em T(x,y) = (**a**x+**b**y, **c**x+**d**y). Se isso ocorrer, a transformação linear será determinada por uma conversão congruente. Como este aspecto não é comumente trabalhado nos livros didáticos, é provável que o estudante recorra à conversão do registro gráfico para o numérico, reconhecendo as condições necessárias para determinar a lei algébrica da aplicação.

Analisaremos, então, o conhecimento do estudante nestas situações, além de seu desempenho em relação à diferença de congruência existente nos dois sentidos de conversão. Espera-se um maior sucesso no item “b”, tanto pelo tipo de congruência envolvido, como por constituir um ciclo de conversões usualmente trabalhado nos livros didáticos analisados.

Na tarefa 1, a escolha de uma conversão que envolve a composição de uma expansão e um cisalhamento de fator negativo foi realizada por não ser uma situação usual nos livros didáticos. Esta opção teve a intenção de não permitir ao estudante a resolução da tarefa com base na memorização. Ainda, a escolha da conversão do registro gráfico para o simbólico-algébrico deu-se pelo fato de se ter constatado que tal transformação constitui um tipo de conversão pouco explorado nos livros didáticos, além de representar uma conversão não-congruente, caso o estudante não conheça as relações entre as transformações geométricas presentes no gráfico e a forma algébrica da transformação.

A tarefa 2, que representa a mesma situação analisada em um outro sentido de conversão, já envolve uma conversão congruente e bastante trabalhada nos livros didáticos. O *software Cabri* não foi utilizado nesta circunstância, pois será proposta uma atividade na segunda fase do experimento que o incluirá, visando observar se este recurso possibilita alguma evolução cognitiva neste contexto.

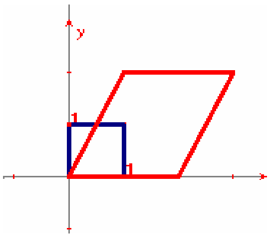
Segundo DUVAL (2003), o ensino e a pesquisa em Educação Matemática muitas vezes desconsideram a heterogeneidade nos sentidos de conversão, acreditando que o trabalho em determinado sentido, automaticamente habilita o estudante a efetuar a resolução no sentido contrário. Deste modo, nesta situação particular, observaremos o desempenho do estudante quando deparado com um caso que envolve esta diferença de complexidade, dependendo do sentido de conversão estabelecido.

O quadro a seguir contém a descrição da Atividade 4 da primeira fase do *Design*.

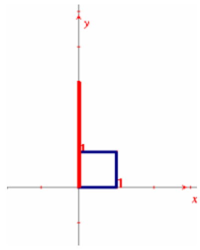
QUADRO 108 – APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 4 – FASE I

Em cada item, são dadas duas figuras. A figura azul representa o objeto inicial e a figura vermelha a sua imagem por meio de uma aplicação. Analise os casos em que a figura vermelha pode ser obtida por meio de transformações lineares. Justifique a sua afirmação.

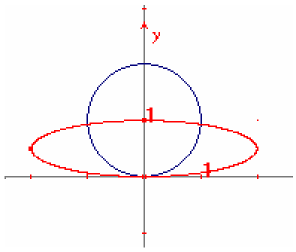
a)



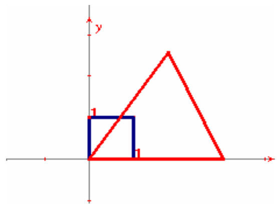
b)



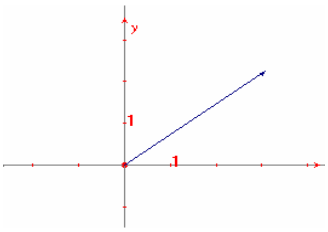
c)



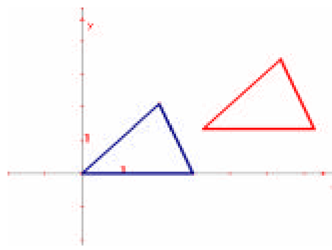
d)



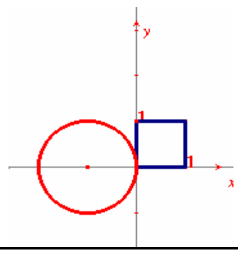
e)



f)



g)



O objetivo geral desta atividade consiste em verificar o conhecimento apresentado pelo estudante, quando o mesmo é deparado com situações que exploram as possibilidades/impossibilidades geométricas de transformações lineares. No item “a”, pretendemos observar se o estudante justifica a possibilidade de um quadrado ser transformado em paralelogramo por meio de uma transformação linear, reconhecendo as aplicações de expansão e cisalhamento. No item “b”, observaremos se o estudante justifica a possibilidade do quadrado ser transformado em segmento, reconhecendo as aplicações de expansão e projeção ortogonal no eixo y. No item “c”, pretendemos avaliar se o estudante reconhece que foram aplicadas as transformações lineares de expansão na direção do eixo x e contração na direção do eixo y. Além disso, observaremos se o mesmo aceita o fato de o objeto inicial ser uma circunferência, uma vez que no questionário aplicado a oitenta e seis estudantes (cf. Cap. 4) e na aplicação “piloto” do experimento, a maioria dos estudantes não concebeu esta possibilidade.

Quanto ao item “d”, pretendemos observar se o estudante justifica a impossibilidade do quadrado ser transformado em triângulo por meio de uma aplicação linear, utilizando uma propriedade geométrica da transformação linear, uma vez que, neste caso, o paralelismo de segmentos não é preservado. No item “e”, observaremos se o estudante relata que um vetor pode ser transformado em um ponto por meio da aplicação F(x,y) = (0,0), a qual é linear. No item “f”, verificaremos se o aluno observa que a imagem do vetor nulo não é o nulo e, por este motivo, a transformação aplicada não é linear. Neste item, ainda será verificado se o estudante reconhece que foi realizada uma translação. Por fim, no item “g”, pretendemos observar se o aluno relata a impossibilidade de se transformar um quadrado em uma circunferência, baseado na propriedade da aplicação linear de conservação do alinhamento de pontos.

Como o *Design* contém as transformações lineares planas consideradas sempre em relação ao sistema usual xOy, optamos por desenvolver esta atividade também relacionada a este sistema. Nestas condições, a situação-problema apresentada procurou explorar as características da linearidade quanto à manutenção do alinhamento e do paralelismo de segmentos, a possibilidade da transformação linear ser aplicada a uma circunferência, além dos casos particulares que transformam o objeto inicial em segmento e ponto.

Com base nos estudos de GUEUDET-CHARTIER (2000), na análise dos livros didáticos e nos resultados obtidos no teste apresentado no capítulo 4, conjeturamos que o estudante apresentará dificuldades em justificar as questões, uma vez que não é comum, no ensino de Álgebra Linear, um trabalho que explore a análise das possibilidades geométricas de uma transformação linear. Como os dois primeiros itens envolvem situações mais usuais, espera-se que o estudante afirme que é possível obter tais imagens gráficas por meio de transformações lineares, baseado nas aplicações de expansão, cisalhamento e projeção ortogonal. Já nos demais itens, pode não haver justificativas satisfatórias ou precisas por parte dos estudantes. O trabalho de JAHN (1998) mostra que a interpretação de uma transformação como objeto, caracterizada por suas propriedades geométricas de conservação, é bastante complexa para os estudantes. A transformação é muitas vezes entendida como uma simples “ação” sobre uma figura, e não como uma aplicação pontual do plano, e as tarefas, no caso específico das isometrias, enfatizam a construção geométrica das imagens, pressupondo as propriedades como imediatas ou evidentes.

Na seqüência, apresentaremos as atividades da segunda fase do *Design*.

5.3.1.2. Descrição e análise preliminar das atividades da FASE II

A Fase II é composta por nove (9) atividades, sendo as duas primeiras caracterizadas como atividades de preparação. Elas contêm aspectos básicos de conteúdo, os quais representam pré-requisitos para o desenvolvimento do *Design*. Como o objetivo principal dessas duas atividades iniciais é observar o conhecimento prévio do estudante, a fim de garantir a continuidade do *Design*, as tarefas relativas principalmente à atividade 2, excluindo o fato de envolverem, em certos itens, a utilização do *software Cabri*, foram elaboradas ou com características próximas das encontradas nos livros didáticos de Álgebra Linear ou envolvendo, em sua maioria, conversões congruentes.

A tarefa da primeira atividade introdutória não é um tipo usual nos livros didáticos, uma vez que solicita ao estudante uma descrição de seu entendimento sobre transformações lineares, bem como uma interpretação de sua definição matemática clássica. Apesar disso, ela ainda faz parte das atividades que visam retomar o conceito antes da aplicação da proposta principal.

A partir da Atividade 3, o objetivo central consistiu em promover um ambiente diferenciado, em termos de tarefas, ferramentas e registros, para tratar as transformações lineares planas, uma vez que houve a preocupação de abordar este conteúdo nas suas diversas representações, explorando as especificidades da atividade de conversão, principalmente a que envolve o registro gráfico.

O *software Cabri-Géometre* está presente em várias atividades, visando oferecer um ambiente favorável à elaboração e validação local de conjecturas. Ainda, pretende-se que, por meio desta ferramenta, o estudante analise aspectos das transformações lineares planas relacionados às especificidades do registro gráfico. Segundo DUVAL (2000), o trabalho em certo registro implica em despontar determinados aspectos e em ocultar outros. Desta forma, como foi constatado o fato de o registro gráfico ser pouco explorado no tópico das transformações lineares dos livros didáticos de Álgebra Linear analisados, temos a intenção de observar que tipo de interpretação será desenvolvido pelo estudante, quando o mesmo for confrontado a situações que englobam conversões envolvendo este tipo de registro.

A seguir, serão apresentadas as atividades desta fase, acompanhadas da descrição dos objetivos de cada tarefa proposta, bem como de outros elementos de análise teórica.

Na primeira atividade (**Atividade 1**), reproduzida no quadro abaixo, pretende-se analisar, primeiramente, a quais idéias o estudante associa o conceito de transformação linear, e em um segundo momento, que tipo de interpretação ele fornecerá em relação à definição formal de transformação linear, após ter estudado este conteúdo na disciplina de Álgebra Linear. A situação envolve as representações da língua natural de emprego comum e da língua natural de emprego especializado.

QUADRO 109 – APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 1 – FASE II

<u>Tarefa 1</u>. Escreva, com suas palavras, o que você entende por transformação linear. <u>Tarefa 2</u>. A definição abaixo é normalmente encontrada nos livros de Álgebra Linear. Uma transformação T é dita linear se, e somente se, dados U e V espaços vetoriais sobre R e T: $U \rightarrow V$: a) $T(u+v) = T(u) + T(v), \forall\ u, v \in U$ b) $T(ku) = k.\ T(u), \forall k$ real e $\forall u \in U$. Estabelecendo uma comparação com a sua resposta dada no item anterior, o que está contemplado nesta definição? E o que não está?

Na tarefa 1, a opção de elaborar a situação na língua natural de emprego comum teve o intuito de oferecer uma abertura para o estudante expressar o seu entendimento no registro que desejar.

Pela análise dos livros didáticos, a qual apontou o fato de não ser usual a solicitação de interpretações de questões conceituais formuladas na língua natural de emprego comum e, pelos resultados do questionário, que evidenciaram muitas resoluções no registro da língua natural, porém de maneira insatisfatória, é provável que os sujeitos não apresentem respostas que contemplem todas as informações pertinentes à definição de transformação linear. Apesar disso, pretende-se, observar o que é destacado por eles, com atenção à questão da preservação das condições de soma de vetores e de multiplicação de um vetor por um escalar.

Na segunda tarefa, pretende-se que o estudante relacione a sua descrição, apresentada no item anterior, com a definição matemática de transformação linear. Para isso, foi apresentada a definição comumente presente nos livros didáticos analisados, a qual descreve este tipo de transformação como uma aplicação entre espaços vetoriais que contempla duas condições: a relacionada com a soma de vetores e a que trata da multiplicação de um vetor por um escalar real.

Neste momento, as escolhas da apresentação da definição matemática dada na língua natural especializada e da solicitação de um comparativo com a resposta dada na tarefa anterior, foram realizadas com o objetivo de relacionar o entendimento do estudante no interior de um contexto formal da Matemática.

Apesar de o aluno já ter estudado este conceito, é provável que ele tenha dificuldades em estabelecer a relação entre o que escreveu e a definição dada. Esta hipótese está baseada nas evidências obtidas no questionário, as quais apontaram o fato dos estudantes não demonstrarem facilidade em operar com o registro da língua natural especializada.

A resolução desta tarefa depende da descrição apresentada pelo estudante na tarefa anterior. Neste caso, esperamos criar condições para que o mesmo avalie a sua resposta, detectando os possíveis aspectos não citados.

Na **Atividade 2**, reproduzida no quadro a seguir, pretende-se explorar os registros gráfico, numérico (par ordenado e tabular), simbólico (algébrico e matricial) e da língua natural de emprego comum e de emprego especializado, a fim de observar o domínio do estudante com relação a essas representações. A tarefa foi elaborada de forma a envolver diversas conversões entre os registros utilizados. O trabalho com o registro gráfico e as conversões que o envolvem, será apoiado no ambiente *Cabri-Géometre*. Tem-se a intenção de explorar o aspecto dinâmico desta ferramenta, de modo a oferecer ao estudante um meio de criar e validar experimentalmente suas respostas.

QUADRO 110 – APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 2 – FASE II

Abra um arquivo novo no *Cabri*.

Tarefa 1. Aplique a "Simetria axial", em relação ao eixo x, em um vetor qualquer com origem na origem do sistema x0y.

Tarefa 2. Procure determinar a lei algébrica F(x, y) desta transformação.

Tarefa 3.
a) Considerando a simetria axial em relação ao eixo x (ou reflexão em relação ao eixo x) como uma transformação, quem são U e V?
b) Discuta a linearidade desta transformação.

Tarefa 4. Uma transformação linear do plano no plano será sempre do tipo T(x,y) = (ax+by, cx+dy), com a, b, c e d reais. Esta transformação também pode ser representada na forma: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. No caso, a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é denominada matriz da transformação linear em relação à base canônica do IR^2.

Determine a representação da simetria em relação ao eixo x (ou reflexão em relação ao eixo x) na forma $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e, em seguida, apresente a sua matriz em relação à base canônica. Utilizando a matriz obtida, determine a imagem do vetor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

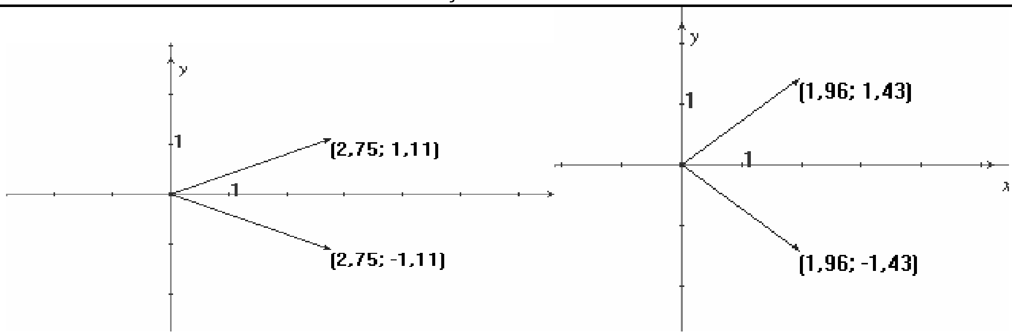
Como o objetivo desta atividade é avaliar o domínio do estudante em relação às diversas representações de uma transformação linear, dentre as existentes no *Cabri*, optamos pela simetria axial, por constituir uma aplicação simples e geralmente familiar. Além disso, enquanto ferramenta, necessita apenas de eixos e vetores para ser aplicada, não envolvendo um fator numérico, como no caso da homotetia ou da rotação. Diante da escolha de uma transformação linear de complexidade reduzida, o trabalho com as representações gráfica, simbólico-algébrica, simbólico-matricial, numérico-tabular e da língua natural de emprego especializado constitui uma atividade inicial, que tem a intenção de introduzir o estudante em um trabalho no ambiente *Cabri* com diversas representações de uma transformação linear.

Na primeira tarefa, o estudante deve simplesmente utilizar a ferramenta "Simetria axial" do *Cabri* para obter a imagem de um vetor por reflexão em relação ao eixo x. Ao solicitar a lei algébrica desta transformação na tarefa 2, pretende-se observar que estratégias o estudante utilizará para determiná-la. Espera-se que o mesmo determine as coordenadas de alguns vetores (pelo menos dois) e de suas respectivas imagens via *Cabri* para, em seguida, obter a lei algébrica desta transformação.

Como a reflexão em relação a um eixo é uma das transformações mais citadas nos livros didáticos analisados e foi evocada ou utilizada pelos estudantes no questionário, é provável que estes não apresentem dificuldades para resolver estas duas primeiras tarefas. Cabe observar, ainda, que a tarefa envolve uma conversão congruente, que pode ser efetuada via *Cabri* com o uso da ferramenta "Coordenadas e equações" e da manipulação direta do vetor.

Segue um exemplo de resolução esperada para as tarefas 1 e 2 da atividade 2.

QUADRO 111 – EXEMPLOS DE RESOLUÇÃO DAS TAREFAS 1/2 DA ATIVIDADE 2 – FASE II



No *Cabri,* por meio da movimentação da extremidade do vetor v, é possível obter outros elementos, conforme exemplificado na tabela seguinte.

VETOR	IMAGEM DO VETOR
(2,75; 1,11)	(2,75; -1,11)
(1,96; 1,43)	(1,96; -1,43)
(-2,23; 1,13)	(-2,23; -1,13)
(3,0)	(3,0)
(0;4,21)	(0;-4,21)

Observando os dados da tabela, nota-se que a primeira coordenada da imagem do vetor permanece igual e a segunda troca de sinal. Então, F(x,y) = (x,-y).

Na tarefa 3a, pretende-se observar se o estudante estabelece o domínio e o contradomínio da transformação em jogo e se comprova a linearidade por meio de uma conversão do registro da língua de emprego especializado para o algébrico (item "b").

A análise dos livros didáticos mostrou que esse tipo de questão é bastante explorado (principalmente nos livros 1 e 2), porém, os resultados do questionário indicaram que os estudantes não apresentam um domínio satisfatório no trabalho com a língua natural especializada, bem como no estabelecimento da conversão desta representação para o registro simbólico-algébrico. Ainda, a conversão estabelecida nesta questão não é congruente e, de acordo com DUVAL (2000), este é o tipo de transformação no qual se apresenta maior dificuldade. Com isso, ao final da sessão, está prevista uma fase de avaliação pelo professor-pesquisador, seguida de uma discussão coletiva.

Na tarefa 4, considerando-se conhecida dos estudantes, apresenta-se a relação entre as duas formas de representação simbólica de uma transformação linear em relação à base canônica, ou seja, a representação simbólico-algébrica e a simbólico-matricial. Ainda, destaca-se desta última a notação da matriz de uma transformação linear em relação à base canônica, que permite determinar a imagem de um vetor v, por meio de produto matricial. Por fim, pretende-se que o estudante estabeleça estas representações no caso específico da simetria em relação ao eixo x.

No enunciado da tarefa, buscou-se apresentar a matriz da transformação linear em relação à base canônica como oriunda de uma “nova” forma de representação da transformação, por meio de um tratamento entre os registros simbólico-algébrico e simbólico-matricial, e não como um tópico específico e desvinculado sobre matriz de uma transformação linear. Esta descrição, apesar de limitada à base canônica, foi inspirada na abordagem do **Livro 3**. Optou-se por este enunciado pelo fato de o *Design* envolver o estudo de matriz de uma transformação linear somente em relação à base canônica.

Apesar de os livros didáticos de Álgebra Linear apontarem uma carência na exploração do registro simbólico-matricial e do questionário revelar algumas deficiências dos estudantes na determinação da matriz de uma transformação linear em relação à base canônica, consideramos que a tarefa não coloca grandes dificuldades. Isto porque, mesmo se ele não dominar tal representação, a atividade requer apenas uma transformação da lei algébrica da simetria em relação ao eixo x, obtida em tarefa anterior, ao contexto do enunciado, o qual envolve um tratamento entre o registro simbólico-algébrico e simbólico-matricial e uma conversão congruente entre o simbólico-matricial e o numérico-tabular.

O quadro seguinte contém a descrição da **Atividade 3** da segunda fase do experimento.

QUADRO 112 – APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 3 – FASE II

Abra o arquivo da atividade 3 no *Cabri* (arq_ativ3).

Tarefa 1. Ajuste a matriz para $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .O que ocorre com a imagem do quadrado? Como é denominada esta matriz?

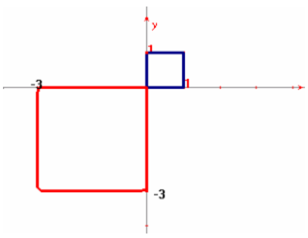
Tarefa 2. Nos itens seguintes, pede-se:

- analise qual foi a alteração feita sobre a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- escreva, com suas palavras, o que você observou em relação às três representações após a alteração da matriz.

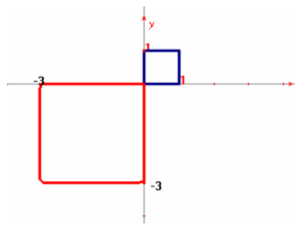
a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Tarefa 3. Utilizando o mesmo arquivo do *Cabri*, determine a matriz em relação à base canônica e a forma algébrica F(x, y) de uma transformação linear que leva o quadrado unitário (em azul) na figura vermelha, em cada item abaixo.

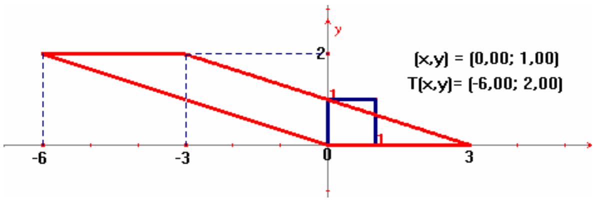
a)



a)



c)



Tarefa 4. **Sem utilizar** o *Cabri*, determine a matriz em relação à base canônica e a forma algébrica F(x,y) de uma aplicação linear que transforma o quadrado unitário, situado no primeiro quadrante, com um dos vértices na origem e lados sobre os eixos:

a) em um retângulo de lados 2 na direção do eixo x e 3 na direção do eixo y, situado no primeiro quadrante.

b) em um retângulo de lados 2 na direção do eixo x e 3 na direção do eixo y, situado no segundo quadrante.

c) em um segmento de medida 2 sobre o eixo y.

d) em um ponto.

e) na sua imagem *cisalhada* horizontalmente por um fator de valor 3.

f) na sua imagem *cisalhada* verticalmente por um fator de valor 4.

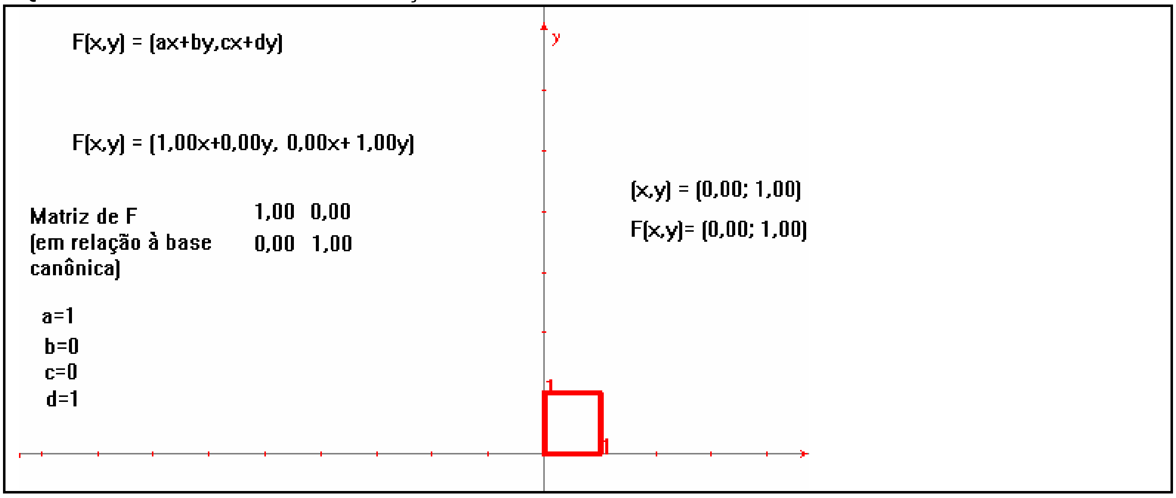
g) em um quadrado de lado ½, situado no primeiro quadrante.

O objetivo geral desta atividade consiste em fornecer ao estudante um ambiente de exploração simultânea das conversões entre os registros numérico-tabular (matriz da transformação linear em relação à base canônica), simbólico-algébrico e gráfico no ambiente *Cabri*, detectando qual efeito uma alteração na representação numérico-tabular produz nas formas simbólico-algébrica e gráfica. Além disso, pretende-se observar se o estudante, após explorar estas relações, estabelece, sem o auxílio do *software*, a matriz e a lei algébrica da transformação linear descrita em língua natural de emprego comum.

Graças aos recursos do ambiente computacional, a atividade permite transitar, de forma rápida e dinâmica, entre três diferentes registros na tela do computador. Segundo DUVAL (2003), tarefas de estrito reconhecimento, ou seja, de identificação dos objetos por suas múltiplas ocorrências representacionais, são tão importantes para a aprendizagem quanto as tarefas de produção, sendo a rapidez na resolução a característica principal desse tipo de atividade. Neste caso, o sucesso em uma tarefa de reconhecimento não depende somente do conteúdo das respostas, mas do tempo que foi necessário para obtê-las.

Na tarefa 1, pretende-se que o estudante observe que a transformação linear identidade, representada pela matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ao ser aplicada no quadrado unitário, fornece como imagem o próprio quadrado. A opção de iniciar a atividade pelo efeito da matriz identidade sobre o quadrado unitário foi realizada com o intuito de preparar o estudante para a análise das demais alterações, tendo esta matriz como referência para as comparações. Optou-se pelo quadrado unitário como objeto inicial, pelo fato das análises posteriores serem feitas sobre o mesmo, facilitando a visualização das alterações geométricas.

QUADRO 113 – TRANSFORMAÇÃO IDENTIDADE NA TAREFA 1 DA ATIVIDADE 3 – FASE II



Na tarefa 2, pretende-se que o estudante observe o que ocorre com as representações algébrica e gráfica de uma transformação linear, quando são alterados os elementos de sua representação matricial. Esse estudo envolve conversões, no interior do ambiente computacional, do numérico para o simbólico-algébrico e do numérico para o gráfico.

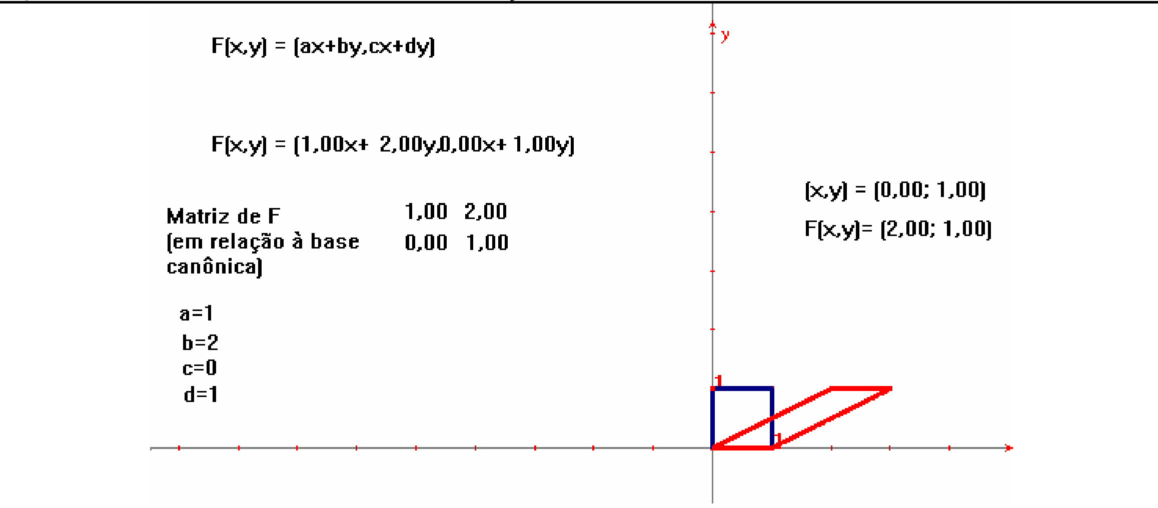
No item “a”, tem-se a intenção de observar se o estudante relata que o elemento a_{11} da matriz 2x2 expande o vetor na direção do eixo x por um fator equivalente ao valor deste elemento, além de observar que este valor corresponde ao elemento **a** de F(x,y) =(**a**x**+b**y**, c**x**+d**y). No item “b”, pretende-se que o estudante observe que o elemento a_{22} da matriz é responsável pelo mesmo tipo de movimento, porém na direção do eixo y, e que este valor corresponde ao elemento **d** de F(x,y) =(**a**x**+b**y**, c**x**+d**y). No item “c”, espera-se que o estudante observe que o valor negativo, na posição do elemento a_{11} muda o sentido do vetor na direção do eixo x.

Nos itens “d” e “e”, objetiva-se que o estudante observe que os elementos a_{12} e a_{21} da matriz 2x2, são responsáveis, respectivamente, pelos cisalhamentos horizontal e vertical, com fatores equivalentes aos valores dos elementos destas posições (cf. quadros a seguir). Além disso, tem-se a intenção de que o estudante relacione estes valores com os elementos **b** e **c** de F(x,y) =(**a**x**+b**y**, c**x**+d**y).

Nesta fase, optamos por realizar, em cada matriz, uma única alteração, ou seja, apenas um valor da matriz foi mudado se comparado com a matriz identidade. Esta escolha teve o intuito de observar se o estudante relaciona o tipo de efeito geométrico com o elemento alterado na matriz. A escolha de números inteiros nestas alterações foi realizada com o objetivo de facilitar a visualização das imagens, mas, ao final da sessão, os estudantes serão incentivados a testar outros valores não-inteiros.

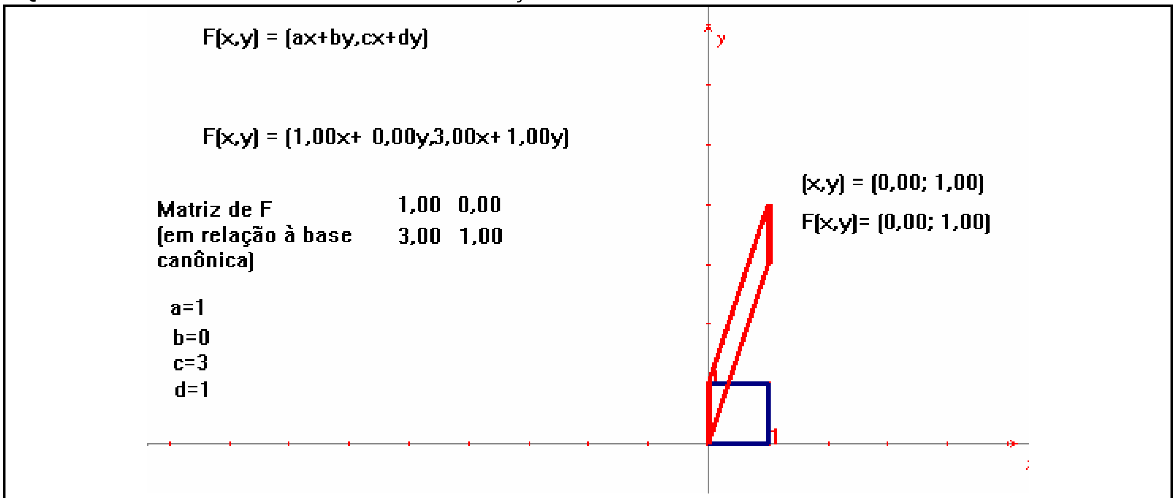
Apostamos no potencial do *software*, no sentido de favorecer uma clara visualização no trânsito dinâmico entre os três registros. Esperamos que esta tarefa possibilite tanto o reconhecimento das especificidades de cada registro como o estabelecimento das relações entre eles, favorecendo a resolução de atividades posteriores que necessitam experiência com essas conversões.

QUADRO 114 – EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DA TAREFA 2D DA ATIVIDADE 3 – FASE II



Em relação à matriz identidade, com a alteração do valor de a_{12} de 1 para 2, o quadrado sofre um cisalhamento horizontal de fator 2.

QUADRO 115 – EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DA TAREFA 2E DA ATIVIDADE 3 – FASE II.

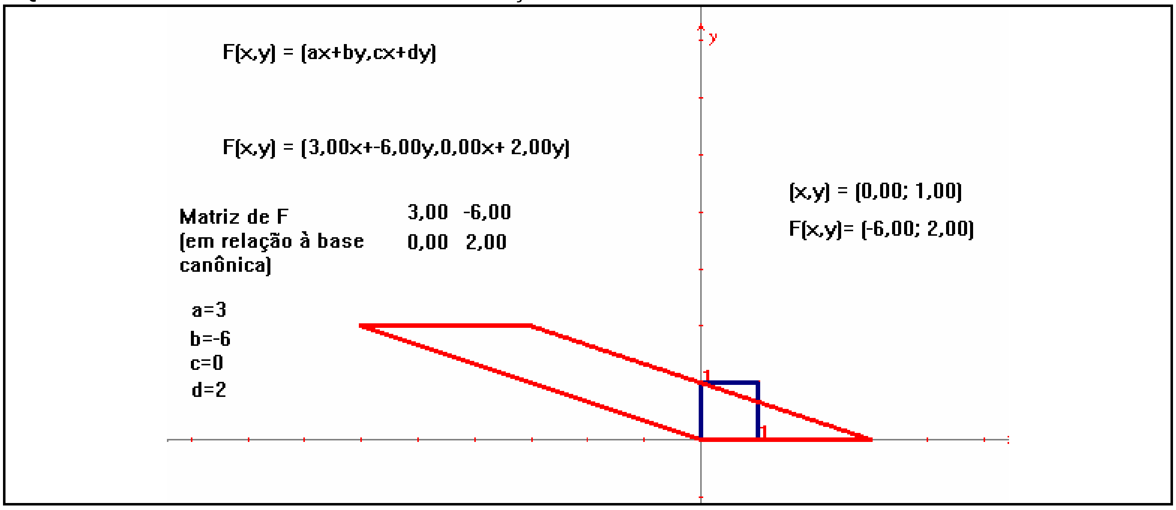


Em relação à matriz identidade, com a alteração do valor de a_{21} de 1 para 3, o quadrado sofre um cisalhamento vertical de fator 3.

A terceira tarefa da Atividade 3 propõe atividades de conversão da representação gráfica para a numérico-tabular e desta para a simbólico-algébrica, partindo da relação entre os efeitos geométricos e os elementos de uma matriz 2x2.

No item "a" foi escolhida uma situação envolvendo uma expansão uniforme de fator negativo, com o intuito de observar se o estudante relaciona este movimento com os coeficientes "**a**" e "**d**" em F(x,y) = (**a**x+**b**y,**c**x+**d**y). Já no item "b", foi proposta uma expansão não uniforme. Neste caso, pretende-se que o estudante observe que há dois movimentos diferentes, resultando em valores de "**a**" e "**d**" distintos. No item "c", há a intenção de aumentar a complexidade, uma vez que foram realizadas três alterações distintas, sendo duas expansões de fatores diferentes e um cisalhamento horizontal de fator negativo. Neste caso, será observado se o estudante relaciona tais movimentos com os valores de "**a**", "**b**" e "**d**" de F(x,y) = (**a**x+**b**y,**c**x+**d**y). Se o objetivo das tarefas anteriores for atingido, ou seja, se as mesmas capacitarem o estudante quanto ao estabelecimento das relações entre as três representações, é provável que o mesmo não apresente dificuldades na resolução desta tarefa, apesar de a mesma ser formulada no registro gráfico.

QUADRO 116 – EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DA TAREFA 3C DA ATIVIDADE 3 – FASE II

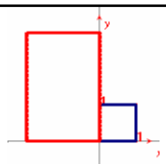
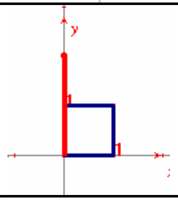


Na tarefa 4, pretende-se, em cada item, verificar se o estudante estabelece relações entre a matriz da transformação linear em relação à base canônica e a lei algébrica correspondente, sem utilizar o *Cabri*, ou seja, se apresenta o domínio da relação entre o efeito geométrico obtido e a matriz da transformação linear responsável por aquele efeito. Espera-se, com isso, que o mesmo estabeleça uma conversão da língua natural para o registro gráfico e deste para o numérico-tabular e simbólico-algébrico.

As questões foram elaboradas de forma a explorar as transformações de reflexão, de expansão uniforme, de expansão não uniforme, de cisalhamentos (horizontal e vertical) e de projeção ortogonal. Ainda, no exercício que solicita a aplicação que transforma um quadrado em um ponto, tem-se a intenção de destacar a transformação nula. Novamente, a escolha do quadrado unitário como objeto inicial foi realizada com o intuito de facilitar a visualização da relação entre os três tipos de registros envolvidos nestas situações preliminares.

Baseado no fato de que as relações possam ter sido estabelecidas por meio das tarefas anteriores, espera-se que os estudantes concebam graficamente cada situação e, em seguida, determinem as suas representações numérico-tabular e simbólico-algébrica. Ao final, propõe-se o retorno ao ambiente computacional para validação experimental das respostas apresentadas. Essa fase pode fornecer evidências das interpretações dos sujeitos e de suas relações com as diferentes representações nas atividades de conversão.

QUADRO 117 – EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DOS ITENS "B" E "C" DA TAREFA 4 DA ATIVIDADE 3 – FASE II

ITEM	GRÁFICO	F(X,Y)	MATRIZ
b)		F(x,y) = (-2x, 3y)	$(F) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
c)		F(x,y) = (0,2y)	$(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Passemos à descrição da **quarta atividade** do experimento.

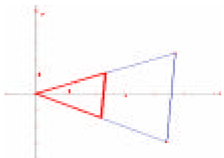
QUADRO 118 – APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 4 – FASE II

Tarefa 1. Descreva a relação entre cada elemento da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de uma transformação linear, em relação à base canônica, e a imagem gráfica de um objeto qualquer.

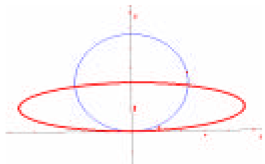
Tarefa 2. Sem utilizar o *Cabri*, justifique se existe uma transformação linear que aplicada em um quadrado resulta em uma circunferência.

Tarefa 3. Sem utilizar o *Cabri*, justifique se é possível, por meio de uma transformação linear, obter o objeto vermelho partindo do azul.

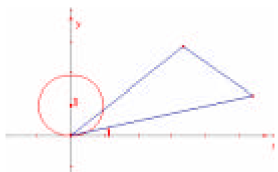
a)



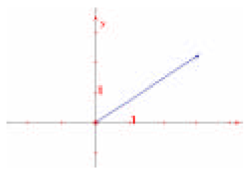
b)



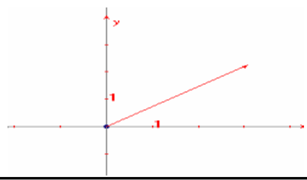
c)



d)



e)



Na tarefa 1, tem-se a intenção de analisar se a atividade anterior permitiu ao estudante a generalização do papel de cada elemento da matriz, quando a transformação linear correspondente é aplicada a um objeto qualquer. Para resolver esta situação, deve-se estabelecer uma conversão do registro simbólico-matricial para a língua natural de emprego comum.

Neste contexto, a escolha da representação simbólico-matricial foi realizada para que o estudante apresente uma conclusão genérica desta atividade. É provável que o aluno não apresente dificuldades na resolução desta tarefa, estabelecendo a relação entre cada elemento da matriz com a respectiva alteração gráfica. Esta afirmação deve-se ao fato da atividade anterior ter proporcionado várias situações de estabelecimento de correspondências entre cada elemento da matriz e a representação gráfica.

A seguir, ilustramos a resolução esperada desta tarefa.

QUADRO 119 – EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DA TAREFA 1 DA ATIVIDADE 4 – FASE II

Em $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tem-se que: a: representa a expansão na direção do eixo x de fator a; b: representa o cisalhamento horizontal de fator b; c: representa o cisalhamento vertical de fator c; d: representa a expansão na direção do eixo y de fator d.

Na tarefa 2, pretende-se analisar se o estudante observou as possibilidades de imagens geométricas de um quadrado por meio de uma transformação linear. No teste aplicado e apresentado no capítulo 4, houve pouco sucesso nas justificativas dessa questão. Desta forma, pretendemos observar em que medida as atividades do *Design* realizadas até este momento auxiliarão na produção de justificativas, ou considerações das características de uma transformação linear.

Na tarefa 3, objetiva-se analisar se o estudante reconhece as possibilidades geométricas de uma transformação linear, quando esta é aplicada em objetos geométricos diversos. A sua resolução envolve uma conversão do registro gráfico para a língua natural.

Em nenhuma situação o quadrado unitário foi tomado como objeto inicial, tendo em vista que as suas imagens foram bastante trabalhadas nas tarefas anteriores. No item “a”, a escolha do triângulo deu-se para observar se o estudante identifica que houve uma expansão uniforme e que este tipo de transformação é linear. No item “b”, a escolha da circunferência foi realizada com o objetivo de o estudante se deparar com aplicações lineares em objetos não poligonais. Neste caso, houve uma expansão não uniforme, transformando a circunferência em uma elipse. No item “c”, o triângulo foi transformado em circunferência. Espera-se que o estudante justifique que tal situação não seria possível via uma transformação linear, tendo em vista que, neste caso particular, o alinhamento de pontos não foi conservado.

No item “d”, foi escolhida a transformação de um vetor em um ponto e no item “e” a situação contrária. Pretendemos observar como o estudante justifica a possibilidade da primeira situação via transformação linear e a impossibilidade da segunda. Conforme constatado nas pesquisas de GUEUDET-CHARTIER (2000), a exploração deste tipo de situação não é comum. Espera-se observar o efeito das atividades anteriores nas estratégias dos sujeitos.

O quadro seguinte contém a descrição da **Atividade 5** da segunda fase do experimento.

QUADRO 120 – APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 5 – FASE II

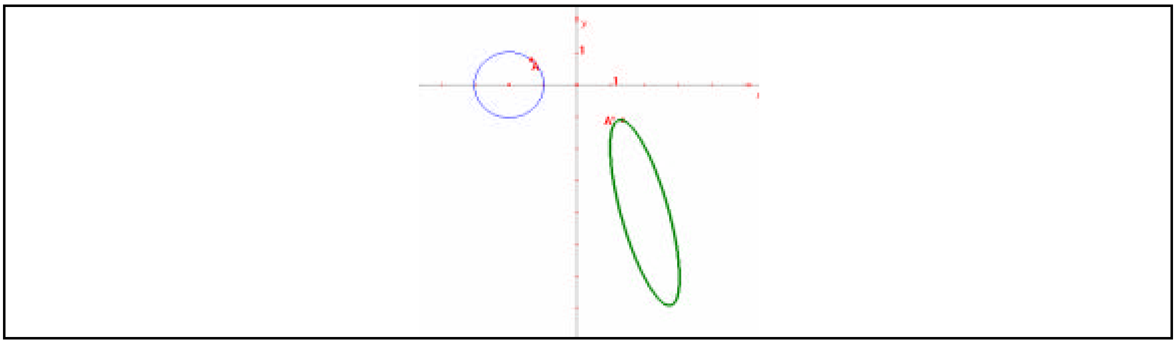
Abra o arquivo da atividade 5 do *Cabri* (arq_ativ5). Determine a lei algébrica “F(x,y)” da transformação linear responsável pela transformação da circunferência na elipse.

Esta atividade não esteve presente na aplicação “piloto”. Ela foi inserida para explorar o caso da transformação linear ser aplicada a um objeto não poligonal e a determinação de sua lei algébrica partindo somente do registro gráfico da transformação. Deixamos a cargo do estudante a reflexão sobre as condições iniciais necessárias para essa determinação Este tipo de exploração não foi encontrado nos livros didáticos analisados. De fato, as obras normalmente restringem-se a casos poligonais devido ao fato de a transformação linear manter o alinhamento de pontos e o paralelismo de segmentos, o que torna possível construir a imagem de um polígono determinando apenas as imagens dos vértices do objeto gráfico inicial. Nesse contexto, as possibilidades de exploração do caso apresentada na atividade 5 são oferecidas pelo ambiente computacional.

Nesta atividade, pretende-se avaliar se o estudante relaciona (ou transfere) o fato de que uma transformação linear no plano é completamente determinada pelas imagens dos vetores de uma base do R^2 em uma situação gráfica particular e não usual, pois a figura inicial é uma circunferência e os vetores iniciais não são fornecidos. Cria-se assim, a necessidade de um tratamento pontual do objeto, bem como da ação da transformação.

Na tela do *Cabri* serão fornecidas ao estudante, as representações gráficas de uma circunferência e de sua imagem por uma transformação linear, conforme figura abaixo.

FIGURA 20 – TELA DO *CABRI* DA ATIVIDADE 5 – FASE II

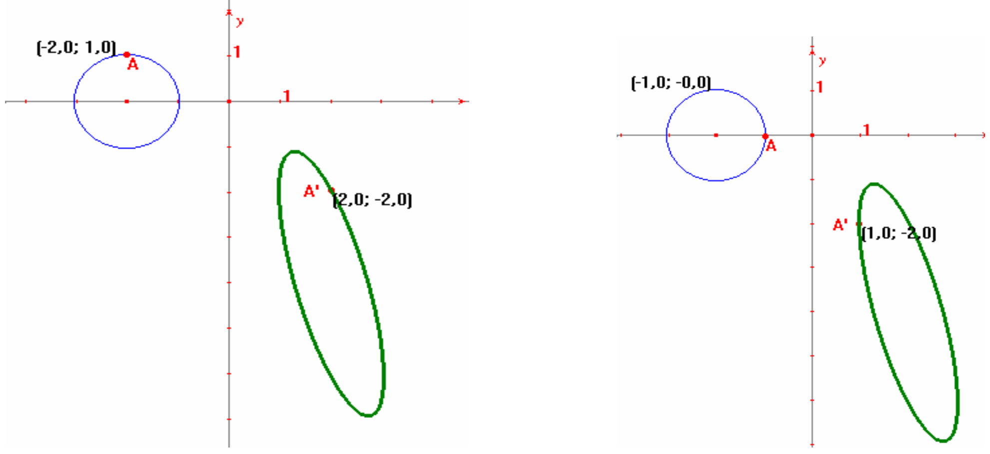


Na circunferência há um ponto A. Ao movimentá-lo, a sua imagem A', por uma transformação linear, também se movimenta. Deste modo, tem-se a intenção de observar se o aluno relaciona a possibilidade de obtenção de uma transformação linear partindo da imagem de dois elementos de uma base do plano. Normalmente, este tipo de tarefa é enunciado nas representações numérica e da língua natural de emprego especializado, requerendo uma conversão para o registro algébrico (conforme explorado na tarefa 2 da segunda atividade da Fase I deste experimento).

Considerando o aspecto dinâmico do *Cabri*, objetiva-se analisar se o estudante utiliza o "ponto móvel" da circunferência para obter, via *Cabri*, as coordenadas do ponto imagem correspondente e o movimenta para obter as coordenadas de um outro vetor, a fim de determinar uma base do R^2 (cf. quadro abaixo). Em seguida, o mesmo poderia determinar, no ambiente *papel&lápis*, a forma algébrica da transformação, utilizando a condição "Se $u = a_1u_1+a_2u_2$, então a transformação linear F é tal que $F(u) = a_1F(u_1) + a_2F(u_2)$, sendo u_1 e u_2 vetores de uma base do R^2". Para facilitar os cálculos, o *Cabri* foi ajustado para trabalhar com uma casa decimal. Deste modo, temos consciência de que este fato desencadeará erros de aproximação nos valores presentes na forma algébrica da transformação.

QUADRO 121 – MANIPULAÇÃO POSSÍVEL NA ATIVIDADE 5 – FASE II

Por meio do *Cabri*, é possível obter os vetores u=(-2,1) e v=(-1,0) com extremidade na circunferência. As suas imagens são respectivamente F(u)= (2,-2) e F(v)=(1,-2).

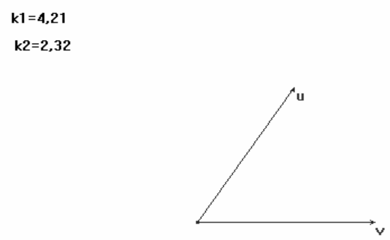


É provável que o estudante apresente dificuldades para iniciar a resolução desta atividade, uma vez que a mesma parte do registro gráfico e requer a consideração de condições necessárias para se determinar uma transformação linear, aspectos pouco trabalhados nos livros didáticos analisados. A previsão é de que o professor-pesquisador somente interfira se solicitado, adotando, na medida do possível, uma postura de "devolução" das tarefas e de certos questionamentos. Ao final, prevê-se igualmente uma discussão coletiva das respostas ou dúvidas apresentadas.

A seguir, será apresentada a **sexta atividade** da segunda fase do experimento.

QUADRO 122 – APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 6 – FASE II

Abra o arquivo da atividade 6 do *Cabri* (arq_ativ6). Na tela são dadas as representações geométricas de dois vetores e dois valores numéricos reais "k_1" e "k_2", os quais podem ser alterados.



Utilizando o *Cabri*, determine:

a) o vetor u+v. O que este vetor representa geometricamente?

b) o vetor w combinação linear de u e v, de tal forma que w=2u+3,21v.

c) um vetor genérico que represente a combinação linear de u e v.

Esta atividade também não esteve presente na aplicação "piloto". Ela foi inserida para o grupo principal pelo fato de termos observado que o estudante da aplicação preliminar não resolveu uma determinada tarefa por desconhecer que, no *Cabri*, é possível representar um vetor genérico como combinação linear de outros dois, uma vez que os valores de k_1 e k_2 em $w=k_1u+k_2v$ podem ser alterados.

Desta forma, a inserção desta nova situação visa fornecer aos estudantes do grupo principal, um pré-requisito para o desenvolvimento de uma atividade posterior relativa à determinação da imagem geométrica de um vetor genérico por meio de uma transformação linear T.

Tendo em vista que os vetores não estão associados a um sistema de eixos, classificaremos este tipo de representação como registro geométrico, diferenciando-o do registro gráfico, no qual as representações estão vinculadas a um referencial.

No item "a", esperamos que o estudante determine, via comando do *Cabri*, a soma dos vetores u e v e observe que, geometricamente, o vetor u+v representa a diagonal de um paralelogramo de lados determinados por u e v. Quanto à representação da combinação linear do item "b", esperamos que o aluno aplique o comando de homotetia do *Cabri*, efetuando a expansão de cada vetor para, em seguida, determinar a soma 2u+3,21v, também por meio da ferramenta do *software*. No item "c", pretendemos apresentar a possibilidade da obtenção de um vetor genérico no *Cabri*, alterando, para isso, os valores de k_1 e k_2.

Se as atividades de familiarização no *Cabri* cumpriram o papel de habilitar o estudante neste *software*, espera-se que nos itens "a" e "b" o mesmo não apresente dificuldades de resolução. Já no item "c", pretende-se avaliar a compreensão do aluno quanto à generalidade do vetor w construído no item anterior, apoiado no caráter dinâmico do *software* que dá a possibilidade de variação dos coeficientes numéricos k_1 e k_2 (obtidos por meio de "Edição Numérica"). O professor-pesquisador deve estar preparado para introduzir informações de caráter técnico, isto é, sobre o *software* ou a manipulação.

Na seqüência, será apresentada a **Atividade 7** da Fase II do experimento.

QUADRO 123 – APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 7 – FASE II

<u>Tarefa 1</u>. Abra o arquivo 1 da atividade 7 do *Cabri* (arq1_ativ7). Nele serão dados dois triângulos, sendo o triângulo azul a imagem do triângulo vermelho por meio da translação, segundo o vetor w dado. Esta translação foi realizada com o auxílio do comando “Translação” do *Cabri*.
Utilizando o *Cabri*, verifique se a transformação é linear, justificando sua resposta.

Se julgar necessário, você pode utilizar o comando “Equação e coordenadas” para determinar as coordenadas dos vetores.

<u>Tarefa 2</u>. A lei algébrica da translação é dada por F(x,y) = (x+a, y+b), sendo (a, b) as coordenadas do vetor que fornece a direção, o sentido e a medida do deslocamento. Abra o arquivo 2 da atividade 7 (arq2_ativ7). Altere os valores de a e b e descreva o papel de cada um na representação gráfica da translação do quadrado inicial. Para que vetor (a, b) esta transformação respeitará as condições de linearidade? Por quê?

<u>Tarefa 3</u>. Considerando (k_1, k_2) $\neq$ (0,0), é possível representar a translação na forma $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$? Justifique sua resposta. Existe uma matriz de ordem 2x2 que represente a translação?

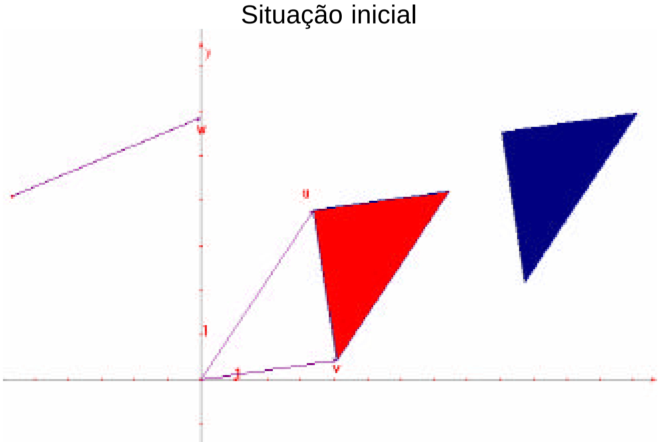
Esta atividade tem a intenção de explorar o aspecto geométrico de uma transformação não linear (a translação), bem como situações envolvendo as conversões gráfico/língua natural de emprego especializado, gráfico/numérico e gráfico/simbólico-algébrico. Ainda, pretende-se tratar a impossibilidade de representar a translação no plano na forma $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, já que este tipo de representação é característico das transformações lineares.

Conforme descrição da análise dos livros didáticos de Computação Gráfica no capítulo 3, a translação é uma transformação muito utilizada nesta área, principalmente para deslocar um objeto para a origem do sistema, a fim de facilitar a determinação de outras transformações definidas fora da origem, tais como expansão, rotação, projeção, dentre outras. Assim, a escolha da translação como exemplo de transformação não linear deu-se pela importância que este movimento tem no estudo de Computação Gráfica. Já a opção do triângulo como objeto inicial foi aleatória.

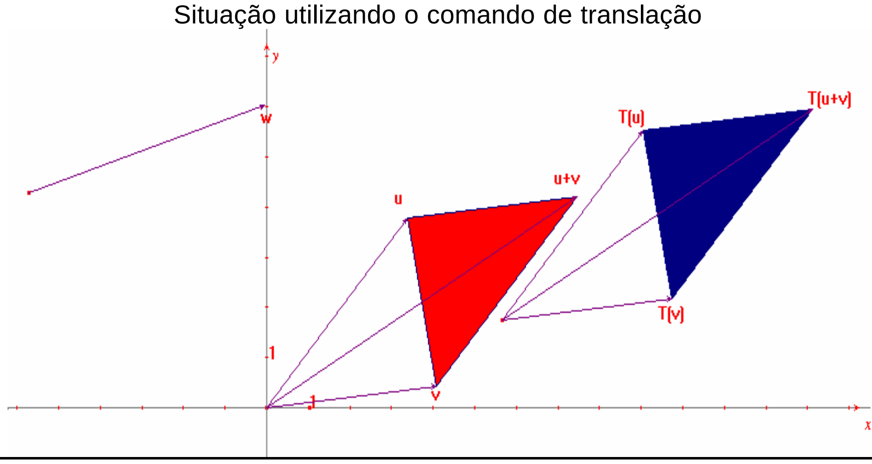
A indicação do uso do comando “Equações e coordenadas” do *Cabri* foi introduzida com base na aplicação “piloto”. Ela permite ao estudante estabelecer uma análise da não linearidade em um caso particular de dois vetores, observando suas coordenadas. Nossa preocupação é de que o trabalho somente no registro geométrico, no interior do ambiente do *Cabri*, pode induzir a uma conclusão errônea. Tal fato ocorreu com o aluno da aplicação preliminar. Isto porque, pela construção apoiada na ferramenta “Translação” do *software*, o estudante poderia ater-se somente na visualização das representações geométricas dos vetores T(u), T(v) e T(u+v) – sendo T a translação segundo o vetor w dado. Com isso, o mesmo concluiria que $T(u+v) = T(u)+T(v)$, uma vez que na tela do computador, T(u+v) coincide com a diagonal do paralelogramo de lados determinados por T(u) e T(v). Com a indicação para o retorno ao registro gráfico, buscou-se evidenciar que as coordenadas do vetor estão vinculadas ao sistema de referência, ou seja, o que se obtém com a ferramenta “Translação”, denominados T(u) ou T(v), deve ser interpretado como a extremidade de um vetor que tem sua origem na origem do sistema de coordenadas. Esta situação está ilustrada a seguir.

QUADRO 124 – SITUAÇÃO NO *CABRI* – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 7 – FASE II

Situação inicial

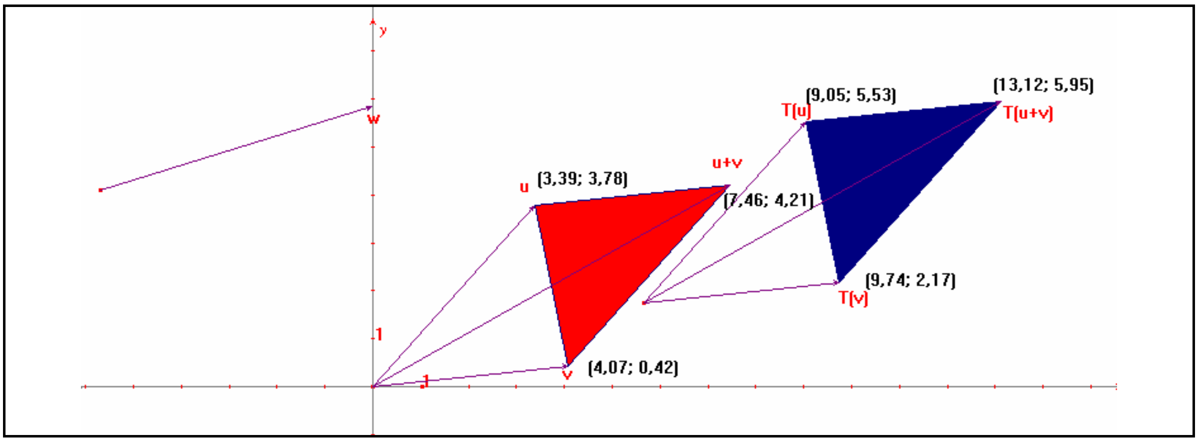


Situação utilizando o comando de translação



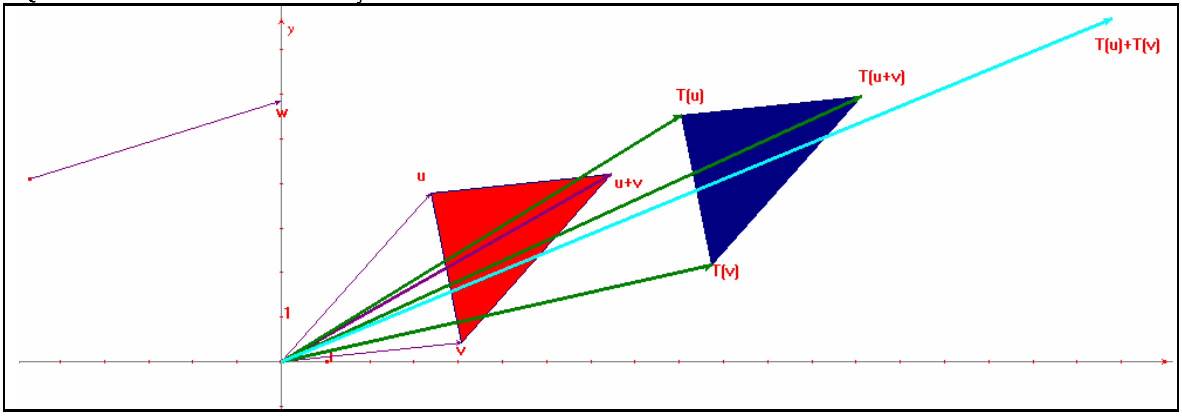
Assim, o uso das coordenadas permitiria uma validação da solução do aluno, conforme apresentado a seguir.

QUADRO 125 – UTILIZAÇÃO DOS COMANDOS DE “TRANSLAÇÃO” E “EQUAÇÕES E COORDENADAS” DO *CABRI*



O estudante ainda poderia optar por uma resolução exclusivamente geométrica, por meio da construção dos vetores partindo da origem do sistema, conforme exposto a seguir.

QUADRO 126 – CONSTRUÇÃO GEOMÉTRICA NO *CABRI*



De qualquer forma, partindo da condição de linearidade $T(u+v) = T(u) + T(v)$, é possível verificar que a translação não a contempla. Se o estudante optar pela estratégia de determinação de coordenadas, tal situação envolverá conversões entre a representação gráfica e a língua natural de emprego especializado, em conjunto com uma conversão intermediária entre o registro gráfico e o numérico, quando da determinação das coordenadas dos vetores. Caso o estudante opte por uma análise exclusivamente geométrica, esta situação envolverá conversões somente entre a língua de emprego especializado e o gráfico. Cabe observar que o *software* fornece as ferramentas necessárias em ambas as estratégias.

Temos consciência de que a sugestão para o uso do comando “Equações e coordenadas” provavelmente induzirá o estudante à estratégia de resolução apresentada no Quadro 125 e não a uma solução geométrica. Optamos por isso tendo em vista que uma discussão especifica no geométrico será realizada na Atividade 8.

A análise dos livros didáticos e os estudos de DREYFUS, HILLEL e SIERPINSKA (1998) confirmam o fato de que o ensino pouco explora os casos de transformações não-lineares (contra-exemplos). Segundo os autores, este fato pode prejudicar o entendimento das condições de linearidade das transformações.

Em nossa análise, verificamos que determinadas obras de Álgebra Linear até incluem a translação em suas descrições, porém, normalmente não exploram a não linearidade no seu aspecto geométrico. Nestes casos, é comum a translação ser tratada somente nos registros simbólico e numérico, sendo a justificativa da não linearidade dada pelo fato de a imagem do vetor nulo, por esta transformação, não ser o nulo. Por exemplo, a obra indicada por **Livro 2** no capítulo 3 deste estudo, fornece a descrição apresentada a seguir.

QUADRO 127 – DESCRIÇÃO DE TRANSLAÇÃO DO LIVRO 2

Translação T(x,y) = (x+a,y+b) ou $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Esta é uma translação do plano segundo o vetor (a,b) e, a menos que a=b=0, T não é linear. Por quê? (Veja a observação depois do Exemplo 4).

FONTE: Livro 2, p. 150

A observação indicada pelo autor nesta descrição, constante na página 154 de sua obra, relaciona o fato de que, sendo T: U$\to$V (U e V espaços vetoriais sobre R), tal que T(0)$\neq$0, T não é linear.

Os resultados do questionário, descritos no capítulo 4, revelaram que grande parte dos estudantes associa uma transformação linear a uma aplicação que “não deforma o objeto” e a não linear como aquela que “deforma o objeto”.

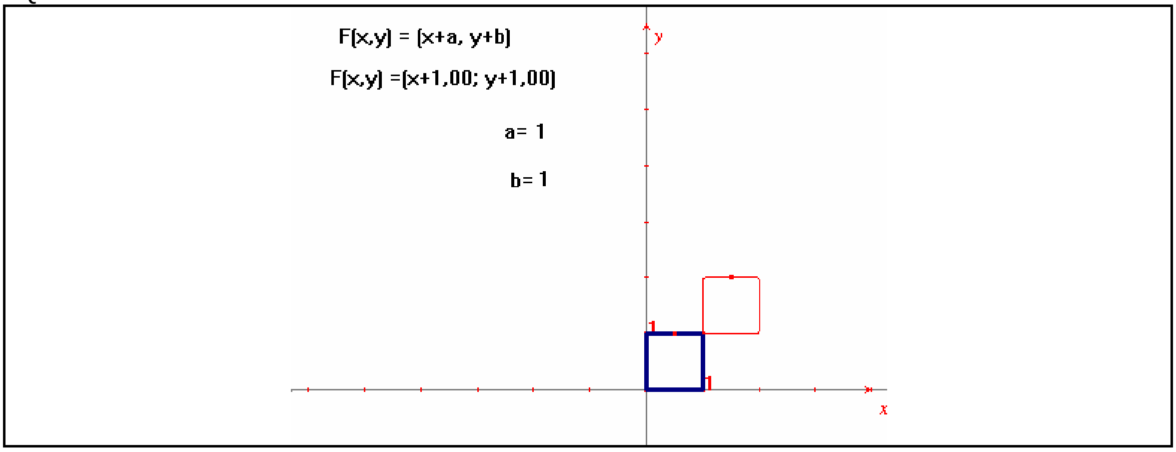
Esta situação levou vários estudantes à negação da linearidade do cisalhamento e à classificação da translação como uma aplicação linear. Neste contexto, observamos que tratar da translação somente na sua forma algébrica, faz com que seu aspecto da não linearidade fique muito restrito.

Com isso, além de apresentarmos, em outras atividades, transformações lineares que não são rígidas, temos a intenção de instigar o estudante em uma análise geométrica de uma transformação não linear que não deforma o objeto, bem como em atividades de conversão para justificar que T(u)+T(v)≠T(u+v). Nestas condições, o estudante poderá visualizar o deslocamento do triângulo, sem alteração de sua forma, em uma questão de não linearidade.

A análise dos livros didáticos revelou que o registro gráfico é pouco explorado, bem como as conversões que partem deste tipo de representação. Com isso, é provável que o estudante demonstre dificuldades para iniciar o problema, uma vez que ele é formulado neste registro. Em contrapartida, como as condições de linearidade foram exploradas nas atividades anteriores do *Design*, tal fato pode propiciar ao estudante a adoção, como ponto de partida, da verificação de uma das condições: T(u+v)=T(u)+T(v), ∀u, v pertencentes ao domínio de T ou T(ku)=kT(u), para k real e ∀u do domínio de T.

Na tarefa 2, o estudante encontrará a seguinte tela do *Cabri,* sendo possível alterar os valores de “a” e “b”.

QUADRO 128 – TELA DO *CABRI* DA TAREFA 2 DA ATIVIDADE 7 – FASE II



Nesta tarefa, pretende-se que o estudante visualize a conversão entre o registro simbólico-algébrico e gráfico, destacando o papel do vetor de translação no aspecto geométrico. Ainda, tem-se a intenção de analisar se o aluno observa que, somente para (a,b)=(0,0), a imagem do quadrado coincide com a figura inicial, representando a transformação identidade, a qual é linear.

Enquanto na tarefa anterior a preocupação era a de verificar a não linearidade da translação por meio da exploração dos registros da língua natural de emprego especializado, geométrico e gráfico, esta tarefa possui outro foco. Isto porque ela procura, partindo do aspecto dinâmico do *Cabri*, estabelecer uma situação em que o estudante efetua alterações nos valores de “a” e “b”, observando a relação entre a representação algébrica e o conseqüente efeito geométrico.

A conversão do registro simbólico-algébrico para o gráfico, nos exercícios gerais de transformação linear, é um tipo de operação usualmente trabalhado nos livros didáticos e normalmente realizado pelo estudante sem grandes dificuldades, como apontado na análise do questionário. Com isso, é provável que o aluno não demonstre problemas em resolver esta situação, uma vez que o *software* também possibilita uma visualização dinâmica da conversão estabelecida.

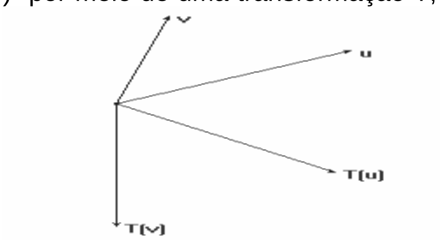
Na tarefa 3, objetiva-se verificar se os estudantes observam e justificam a impossibilidade, tanto de realizar o tratamento da representação simbólico-algébrica para a simbólico-matricial na forma $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, como de obter a matriz 2x2 da translação no plano, em relação à base canônica, segundo um vetor (k_1, k_2). Espera-se que os estudantes observem que a translação, dada por F(x,y) = (x+k_1, y+k_2) pode ser representada por $\mathrm{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+k_1 \\ y+k_2 \end{pmatrix}$. Apesar disso, essa última representação simbólico-matricial não pode ser transformada em $\mathrm{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, pois k_1 e k_2 não são coeficientes de y e x, respectivamente. Consequentemente, não é possível determinar a matriz 2x2 da translação em relação à base canônica do R^2.

No estudo da disciplina de Computação Gráfica, o aluno aprenderá a operar com a composição de transformações geométricas utilizando coordenadas homogêneas de um ponto e o artifício de representação das transformações planas por matrizes 3x3. Isto se deve, inicialmente, pela impossibilidade de representar a translação por uma matriz 2x2, tendo em vista a sua não linearidade. Apesar de a análise dos livros didáticos apontar deficiências na exploração da representação matricial e do questionário indicar que a maioria dos estudantes desconhece o conceito de matriz de uma transformação linear em relação à base canônica, espera-se que o aluno não apresente dificuldades em resolver esta tarefa em particular, pois o tipo de tratamento (simbólico-algébrico para simbólico-matricial) envolvido nesta tarefa, foi trabalhado anteriormente neste *Design* (verificar tarefa 4 da atividade 2 da segunda fase do experimento).

O quadro seguinte contém a descrição da **oitava atividade** da segunda fase do experimento.

QUADRO 129 – APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 8 – FASE II

Abra o arquivo da atividade 8 do *Cabri* (arq_ativ8). Na tela serão dados dois vetores "u" e "v" e as suas imagens "T(u)" e "T(v)" por meio de uma transformação T, conforme ilustrado a seguir.



Sabendo que a transformação é linear, determine na tela do *Cabri*:
Tarefa 1. T(u+v)
Tarefa 2. T(3u)
Tarefa 3. T(2u+3v)
Tarefa 4. T(0,4u-2,1v)
Tarefa 5. T(w), onde w é um vetor arbitrário.

NOTA: Atividade adaptada de SIERPINSKA (apud DORIER, 2000, p. 223).

Nesta atividade, pretende-se analisar a produção do estudante quando este se depara com uma atividade geométrica, cuja resolução necessita do domínio das condições de linearidade de uma transformação linear. Desta forma, tem-se a intenção de evidenciar os aspectos cognitivos característicos da atividade matemática do estudante, quando o mesmo é confrontado com uma situação de conversão da língua natural de emprego especializado para o registro geométrico.

Esta atividade, adaptada da proposta de SIERPINSKA (apud DORIER, 2000, p. 223), envolve uma situação em que é solicitada a aplicação das condições de linearidade em um modelo geométrico no *Cabri*. Para isso, foram fornecidos, na tela deste *software*, dois vetores "u" e "v" e as suas imagens "T(u)" e "T(v)", por meio de uma transformação linear T.

A escolha de vetores geométricos sem vinculação a um sistema de eixos deu-se para avaliar se o estudante estabelece uma conversão direta da língua natural especializada para o registro geométrico, sem a passagem pelo registro numérico, este último representado pelas coordenadas dos vetores com relação a determinado sistema.

Esta opção foi realizada com o intuito de explorar uma conversão pouco usual, de acordo com as evidências obtidas pela análise dos livros didáticos de Álgebra Linear. Em termos didáticos, temos a intenção de observar que tipo de estratégias o estudante estabelecerá ao realizar a transferência de uma definição matemática em um contexto geométrico. Ainda, pretendemos analisar as explicações que o mesmo apresentará ao interpretar as condições de linearidade neste novo ambiente.

A posição dos vetores na tela foi realizada de forma aleatória. Já a escolha dos valores dos escalares *a* e *b*, em *au+bv*, nas tarefas 3 e 4, ocorreu de forma a levar o estudante a observar que é possível explorar tanto valores inteiros como racionais na representação decimal. Baseado nos estudos de SIERPINSKA (apud DORIER, 2000, p. 223) e na aplicação "piloto" deste experimento, é esperado que o estudante inicialmente não relacione as condições presentes na definição de transformação linear com a tarefa fornecida. É provável que o mesmo questione sobre a transformação "T" ou que procure modelos usuais de transformações geométricas para caracterizar a situação. Neste sentido, caso ocorram estas dificuldades, o professor-pesquisador procurará fornecer novos meios de refletir sobre o problema.

A partir do momento em que o estudante relacionar as condições da definição de transformação linear com a situação geométrica da primeira tarefa, espera-se que ele não encontre dificuldades na resolução das tarefas 2, 3 e 4. Isto porque eles envolvem conversões congruentes entre o registro da língua natural especializada e o geométrico.

Já na última tarefa, a escolha da imagem de um vetor genérico foi realizada para observar se o estudante estabelece as condições necessárias para a determinação de uma transformação linear no plano no ambiente de geometria dinâmica, ou seja, se transfere para o contexto geométrico, a condição "(1) Dados os vetores u_1 e u_2 que representam uma base do R^2 e v_1 e v_2 elementos arbitrários do R^2, existe uma única transformação linear F: $R^2 \rightarrow R^2$ tal que $F(u_1) = v_1 \, e \, F(u_2) = v_2$. Se $u = a_1 u_1 + a_2 u_2$, então $F(u) = a_1 F(u_1) + a_2 F(u_2) = a_1 v_1 + a_2 v_2$" Normalmente, esta condição é explorada por meio de conversões envolvendo os registros da língua natural especializada, simbólico-algébrico e numérico, como, por exemplo, o tipo de abordagem presente na segunda tarefa da atividade 2 da primeira fase deste *Design*. Nesta situação, por ser um tipo de tarefa muito presente nos livros didáticos analisados, torna-se possível ao estudante, a determinação da imagem de um vetor genérico "F(x,y)", sem realmente compreender os conceitos e as condições envolvidas na sua resolução.

A transferência desta condição, dada em língua natural de emprego especializado, para o ambiente de geometria dinâmica, proporcionará ao estudante uma exigência cognitiva diferenciada, uma vez que, para realizar tal transferência, o mesmo deverá ter consciência das informações matemáticas presentes na condição (1). Além disso, o trabalho no registro geométrico do *Cabri* revela aspectos diferentes do desenvolvimento no registro algébrico. Por exemplo, tomando a tarefa 2 da atividade 2 da primeira fase do experimento, na condição (x,y) = a(1,-1) + b(0,3), deve-se primeiramente determinar "a" e "b" em função de x e y, para representar um vetor genérico (x,y) como combinação linear dos vetores dados. No *Cabri*, o processo é inverso, uma vez que, primeiramente, dois valores "a" e "b" são escolhidos, para, em seguida, criar um vetor combinação linear dos vetores dados na tela, utilizando os escalares selecionados. Com isso, a generalidade do vetor é obtida alterando estes valores, graças ao aspecto dinâmico do *software*. Esta particularidade na resolução é própria do registro geométrico no *Cabri*.

É provável que o estudante encontre dificuldades em estabelecer a imagem de um vetor qualquer no neste *software*. Esta afirmação se baseia em um estudo amplo de SIERPINSKA (apud DORIER, 2000), que teve o objetivo de introduzir conceitos de Álgebra Linear por meio de um modelo geométrico, utilizando o *software Cabri-Géometre II*. O experimento foi aplicado em três momentos, com reformulações realizadas de acordo com as resoluções apresentadas por cada grupo, fato relatado em nossa revisão bibliográfica.

Esta pesquisadora, diante dos resultados e das dificuldades apresentadas pelos estudantes dos dois primeiros momentos de aplicação, principalmente com relação à possibilidade de obtenção de um vetor qualquer como combinação linear de dois vetores de uma base do plano e quanto ao fato de uma transformação linear no plano ser completamente determinada pelas imagens de dois vetores de uma base do R^2, estabeleceu que, para o terceiro grupo, seriam trabalhadas tanto a combinação linear de dois vetores (no *Cabri* e no ambiente *papel&lápis*), como as condições de linearidade em conjunto.

Com isso, a transformação linear seria definida como a aplicação que conserva combinações lineares. Esperava-se que, com tal abordagem, o estudante fosse capaz de obter, no *Cabri*, a imagem de w pela T, representando w como k_1u+k_2v e T(w) como $k_1T(u)+k_2T(v)$.

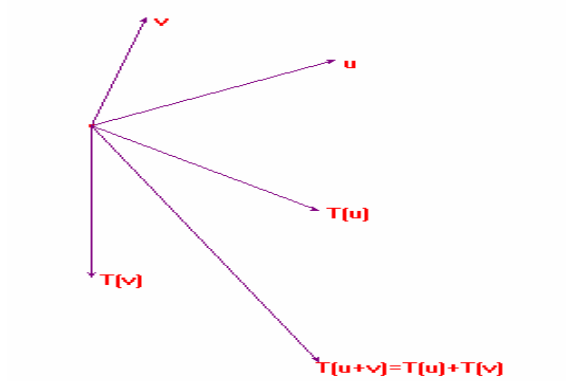
Apesar desse trabalho prévio, os estudantes não conseguiram resolver o último item. Questões do tipo "como determinar a imagem de qualquer vetor sem conhecer a T?" foram freqüentes e a busca de transformações usuais para a resolução (transformações de referência, por analogia ao caso de funções, como rotações, homotetias, dentre outras) surgiu no desenvolvimento desta tarefa. Com base nestas pesquisas, SIERPINSKA (apud DORIER, 2000) destacou o fato dos estudantes utilizarem estratégias de resolução baseadas mais em termos de modelos do que em definições matemáticas.

Partindo desse estudo, pretendemos observar as produções dos estudantes participantes de nossa pesquisa com relação a esta situação, procurando, assim, identificar suas possíveis concepções e interpretações com relação às condições de linearidade. Ressaltamos que na Atividade 6 desse experimento, será abordada, no *Cabri,* a representação de um vetor como combinação linear de outros dois vetores de uma base do plano e, na Atividade 2 da primeira fase do *Design*, será explorada a questão da determinação algébrica da transformação linear, partindo da representação numérica de dois vetores de uma base do plano. Entendemos, com isso, que os pré-requisitos que estaremos fornecendo aos nossos estudantes estarão em equivalência próxima ao terceiro experimento de SIERPINSKA (apud DORIER, 2000, p. 223).

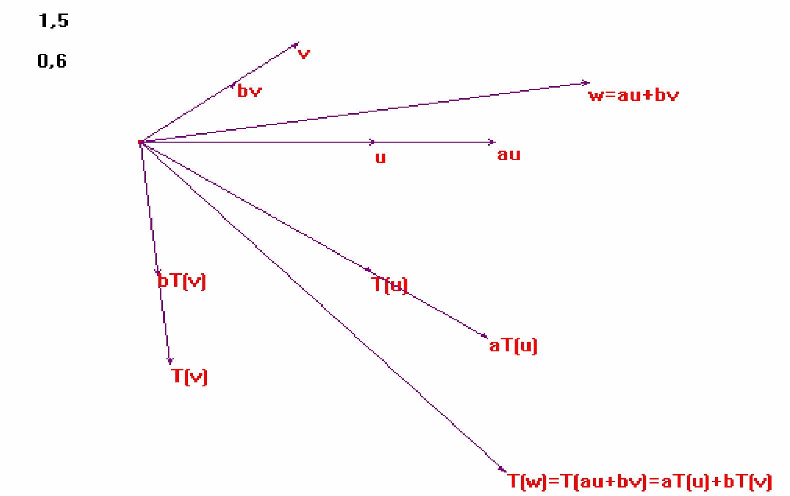
A título de ilustração, apresentaremos exemplos de resolução das tarefas 1 e 5 desta atividade.

QUADRO 130 – EXEMPLOS DE RESOLUÇÃO DAS TAREFAS 1/5 DA ATIVIDADE 8 – FASE II

Tarefa 1



Tarefa 5



Na aplicação “piloto”, observamos que na tarefa que solicitava T(w), com w genérico, o estudante apresentou o mesmo comportamento verificado no estudo de SIERPINSKA (apud DORIER, 2000, p. 223). Inicialmente ele relatou que não seria possível resolver este item, já que a lei da transformação não era conhecida. Em seguida, ele criou um vetor w qualquer, sem estabelecer este vetor como combinação linear de u e v e, novamente, relatou a impossibilidade de resolver o problema por não conhecer a transformação T. Prosseguindo a resolução, ele procurou analisar a tarefa segundo um modelo conhecido, ou seja, tentou relacionar o movimento apresentado na tela com uma reflexão em relação a uma reta. Observando que o caminho que seguiu não era viável, o mesmo afirmou que não tinha a menor idéia de como determinar a imagem de um vetor qualquer, por meio dos dados apresentados na tela.

Com isso, da mesma forma que o estudo de SIERPINSKA (ibid.), a resolução desta situação não ocorreu sem o auxílio do professor. O estudante ao final do encontro relatou que, apesar de compreender a resolução, o mesmo não resolveria esta tarefa sem auxílio, pelo fato de não enxergar a possibilidade da generalidade por meio do *software*. Para ele, somente seria possível estabelecer a imagem de um vetor qualquer por meio da forma algébrica da transformação. Por este motivo, foi introduzida a atividade 6, com o objetivo de fornecer aos estudantes da aplicação principal o contato com essa possibilidade.

Caso os estudantes da aplicação principal apresentem dificuldades em resolver a tarefa 5 desta atividade, pretendemos adotar, como estratégia complementar, o estabelecimento da relação entre o processo de determinação de uma transformação linear e essa tarefa, buscando, com isso, um mecanismo de conversão intermediário entre o registro simbólico-algébrico e o geométrico.

Exemplificando, tomemos o enunciado da tarefa 2 da segunda atividade da Fase I, dado por: "Seja F uma transformação linear tal que $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ / $F(1,-1)=(0,-2)$ e $F(0,3)=(3,6)$ Determine F(x,y)". Com base na análise dos livros didáticos e na aplicação "piloto", é esperado que o estudante não demonstre dificuldades em apresentar a seguinte resolução:

{(1,-1), (0,3)} é uma base do R^2.

(x,y) = a(1,-1) + b(0,3)

$$\begin{cases} a = x \\ -a + 3b = y \rightarrow b = \dfrac{y+x}{3} \end{cases}$$

$$F(x,y) = xF(1,-1) + \frac{y+x}{3}F(0,3)$$
$$F(x,y) = x(0,-2) + \frac{y+x}{3}(3,6)$$
$$F(x,y) = (x+y, 2y)$$

Neste caso, pretende-se solicitar ao estudante a interpretação de cada etapa realizada nos registros algébrico e numérico da resolução anterior, no contexto dos vetores geométricos do *Cabri*. Caso haja bloqueios, o professor-pesquisador realizará questionamentos do tipo:

a) os vetores dados na representação numérica formam uma base? Como é possível verificar essa condição nos vetores geométricos dados no *Cabri*?

b) por que foi realizada a passagem (x, y) = a(1,-1) + b(0,3)? O que isso significa? Como isso poderia ser feito no *Cabri*?

c) o que foi feito em $F(x,y) = xF(1,-1) + \frac{y+x}{3}F(0,3)$? O que isso representa no *Cabri*?

Deste modo, pretendemos fornecer uma nova possibilidade de conceber o problema, verificando se este procedimento favorece o estudante na resolução desta situação.

O quadro seguinte contém a descrição da **Atividade 9** da Fase II do experimento.

QUADRO 131 – APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE 9 – FASE II

<u>Tarefa 1</u>. Vamos elaborar um programa de construção que faça o cisalhamento horizontal em qualquer figura.[26]   <u>Tarefa 2</u>. Sejam F e G duas transformações lineares do plano no plano. Neste caso, para cada x em R^2 é possível calcular primeiramente F(x), que resulta em um vetor do R^2 e depois calcular G(F(x)), que também resultará em um vetor no R^2. Desta forma, a aplicação de F, seguida de G, produz uma transformação do R^2 em R^2. Esta transformação é chamada "composta de F com G" e indicada por GoF.   a) No *papel&lápis*, determine a matriz de F, em relação à base canônica, sendo F uma expansão uniforme no plano de fator 3. Determine, também, a matriz de G em relação à base canônica, sendo G um cisalhamento horizontal no plano de fator 2. Discuta com seu colega e explique como é possível determinar a matriz da composta de F com G, em relação à base canônica, ou seja, da expansão de fator 3 seguida de um cisalhamento horizontal de fator 2. Determine essa matriz. Por fim, determine a imagem do quadrado ABCD, dados A(0,0), B(1,0), C(1,1) e D(0,1) por esta composta de F com G.   b) Elabore, no *Cabri*, um programa de construção no qual seja possível realizar a composição de duas transformações lineares no plano. Este programa deve permitir verificar a dependência entre a matriz da composta de duas transformações lineares, em relação à base canônica, e a representação gráfica de um objeto qualquer segundo esta composição.   c) Verifique se a composta de um cisalhamento horizontal de fator 2, seguido de uma projeção ortogonal sobre o eixo y, aplicada em um quadrado unitário situado no primeiro quadrante, com um vértice na origem e lados sobre os eixos, é equivalente ao resultado da aplicação no sentido inverso, ou seja, da projeção ortogonal sobre o eixo y, seguida do cisalhamento horizontal de fator 2, aplicado no mesmo quadrado. Justifique o resultado obtido.

Tendo em vista que o experimento será aplicado em estudantes da área de Computação, nesta atividade o aluno deverá relacionar os conhecimentos da área de "programação" (definição de macro-construção no *Cabri*) com os de

---

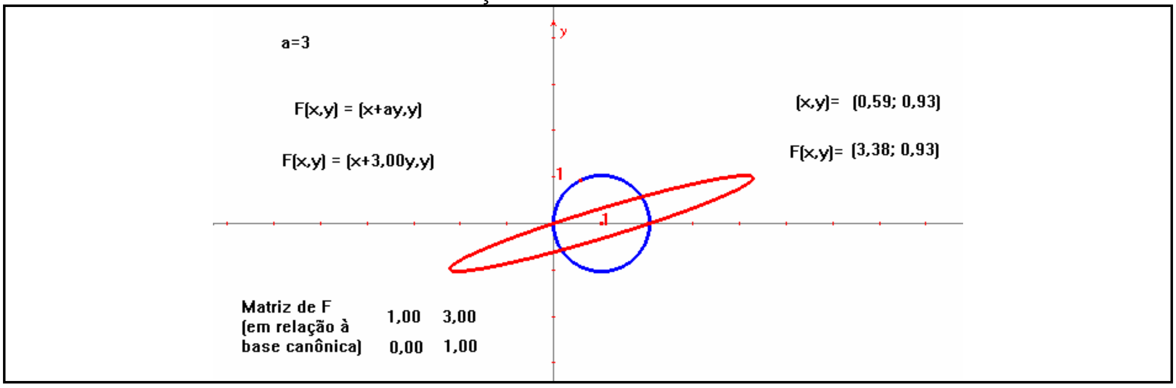
[26] A descrição das etapas do programa de construção do cisalhamento horizontal está presente na relação de anexos (cf. Atividade 9 do anexo V).

Álgebra Linear no plano. A primeira tarefa é uma construção guiada que será realizada em conjunto com o professor, a fim de fornecer ao estudante, os conhecimentos básicos e específicos do *software*. Já na segunda tarefa, a construção proposta no *Cabri* deve ser realizada pelos estudantes de forma autônoma.

Na tarefa 1, a escolha do cisalhamento horizontal deu-se pelo fato do *Cabri* não possuir um comando pronto desta transformação no plano. Além disso, serão trabalhados os cisalhamentos em figuras quaisquer, tais como circunferência, elipse, retângulo, triângulo, dentre outros. Deste modo, além do conhecimento de certos procedimentos do *software*, pretendemos reforçar a idéia de que a transformação linear pode ser aplicada em objetos não poligonais.

A título de ilustração, apresentamos a tela referente à aplicação do cisalhamento horizontal de fator 3 em uma circunferência.

FIGURA 21 – EXEMPLO DE RESOLUÇÃO DA TAREFA 1 DA ATIVIDADE 9 – FASE II

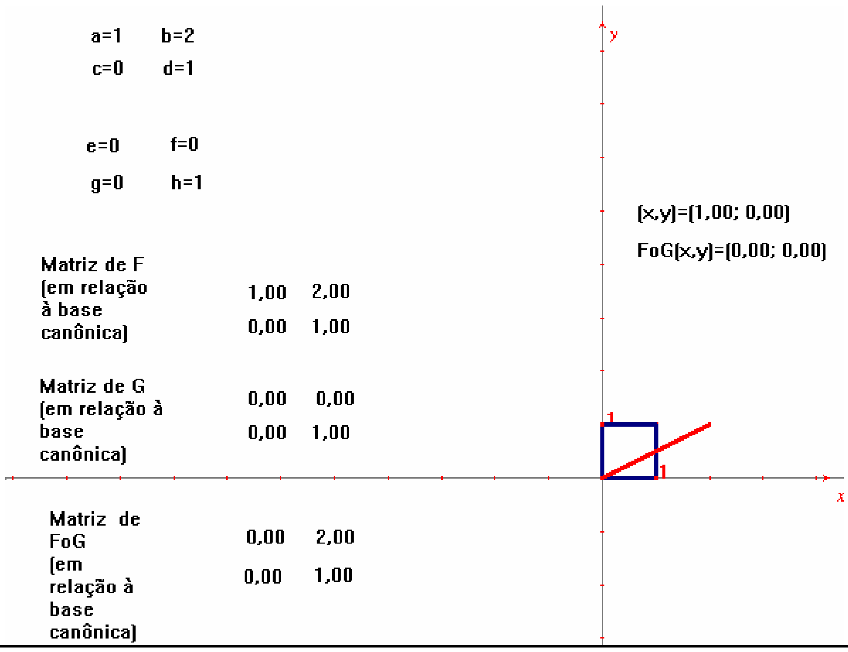


Na tarefa 2, pretende-se realizar uma integração entre conhecimentos de Álgebra Linear e Programação no *Cabri*, na questão da composição de transformações lineares no plano. Ainda, pretende-se fornecer um ambiente favorável para o estudante observar gráfica, algébrica e numericamente, a não comutatividade desta transformação, no caso particular solicitado.

A escolha da composição de transformações via matrizes foi realizada em função da importância de se dominar este tipo de representação, quando do estudo das transformações geométricas em Computação Gráfica, conforme apontado na análise dos livros didáticos desta área. A opção pela composição de um cisalhamento horizontal de fator 2, seguido de uma projeção ortogonal sobre o eixo y, bem como a composição em sentido inverso, foi realizada com o intuito de verificar se o estudante observa a importância da ordem das funções na atividade de composição e se justifica a diferença dos resultados obtidos. Para esta justificativa, espera-se que o mesmo utilize a condição da não comutatividade da multiplicação de matrizes ou da composição de funções. Além disso, as transformações de projeção e cisalhamento não estão presentes nos comandos prontos do *Cabri*, sendo necessária a elaboração do “programa” de construção para resolver a tarefa.

Esperamos que a construção neste ambiente proporcione ao estudante uma visão interativa entre as três representações, evidenciando a não comutatividade da composição de transformações lineares. É provável que o aluno não apresente dificuldades nas situações específicas do *software*, tendo em vista que o conhecimento necessário desta ferramenta foi contemplado em outras atividades. Já na parte específica de Álgebra Linear, é possível que o estudante apresente dificuldades, tendo em vista que a resolução da tarefa exige certos pré-requisitos, tais como o conhecimento da técnica de produto de matrizes e da característica de não comutatividade da composição de funções, cujo domínio só poderá ser observado durante a aplicação. O quadro a seguir contém a descrição do programa de construção da composição da projeção ortogonal sobre o eixo y seguida do cisalhamento horizontal de fator 2.

QUADRO 132 – EXEMPLO DE COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES DA ATIVIDADE 9 – FASE II



No capítulo seguinte, serão apresentados os resultados da aplicação destas atividades em seis estudantes da área computacional.

6. ANÁLISE DA APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES DO *DESIGN*

6.1 ORGANIZAÇÃO DO *DESIGN EXPERIMENT* PARA A APLICAÇÃO PRINCIPAL

Nesta seção, serão descritas e analisadas as produções de seis estudantes voluntários e participantes do *Design*, os quais cursavam o sétimo semestre do curso de Engenharia da Computação de uma Instituição Particular de Ensino Superior da cidade de São Paulo. Na primeira fase, os mesmos desenvolveram as tarefas individualmente. Já na segunda, os sujeitos foram organizados em duplas. Foram coletados, analisados e comparados quatro tipos de dados: os registros escritos das atividades propostas, as áudio-gravações, as quais permitiram observar os diálogos estabelecidos entre os estudantes de cada dupla e entre o professor-pesquisador e cada dupla, as entrevistas ao final de cada sessão e as telas capturadas dos computadores utilizados por estes sujeitos[27].

A descrição desta análise será apresentada em duas fases. Com relação à primeira fase (Fase I) do *Design*, realizada individualmente, o leitor observará que não houve qualquer interferência do professor-pesquisador, uma vez que o objetivo era analisar a produção individual dos estudantes quando deparados com tarefas sobre o conteúdo das transformações lineares planas.

Na segunda fase (Fase II), os estudantes foram organizados em duplas. As duas primeiras atividades objetivaram garantir a base necessária, em termos de conteúdo matemático e de domínio do *software*, para o desenvolvimento do experimento. A partir da atividade 3, o objetivo principal consistiu em promover um ambiente diferenciado de ensino das transformações lineares planas, tendo em vista que houve a preocupação de abordar este conteúdo nas suas diversas representações, explorando as especificidades da atividade de conversão, principalmente a que envolvia o registro gráfico.

Nesta etapa, em coerência com a metodologia adotada, o papel do professor-pesquisador tornou-se mais ativo. Ressalta-se que, especificamente na

[27] Captura de tela a partir da utilização do programa *IrfanView32*

segunda atividade da Fase II, o professor realizou intervenções que direcionaram os trabalhos, no sentido de relembrar conceitos básicos de Álgebra Linear. Isto porque, tal atividade foi elaborada com o intuito de garantir a base necessária para o prosseguimento do *Design.* A partir da terceira atividade, as intervenções foram caracterizadas por novos questionamentos, com situações de comparação e propostas de novas atividades.

Como opção de apresentação dos dados, será primeiramente fornecida uma descrição dos resultados de cada atividade para, em seguida, modelizar as trajetórias de aprendizagem dos estudantes. Com o objetivo de facilitar a leitura, as atividades serão apresentadas juntamente com as análises de suas aplicações.

O leitor observará que, na segunda fase do experimento, houve necessidade de inclusão de novas situações. Tal fato está previsto na metodologia adotada, sendo tais situações devidamente descritas e justificadas durante o desenvolvimento da seção.

6.1.1. Análise da Primeira Fase do *Design*

A aplicação das atividades da primeira fase foi realizada de forma individual, com os seis estudantes provenientes de duas turmas distintas. Tais estudantes possuíam por característica comum, no momento da aplicação do *Design,* o fato de já terem cursado a disciplina de Álgebra Linear e não terem ainda qualquer contato com a disciplina de Computação Gráfica. Neste contexto, eles serão identificados como alunos A, B, C, D, E e F.

A seguir, com o objetivo de facilitar a leitura, serão reproduzidos os enunciados das tarefas da Atividade 1, seguidos da descrição e análise das produções dos estudantes.

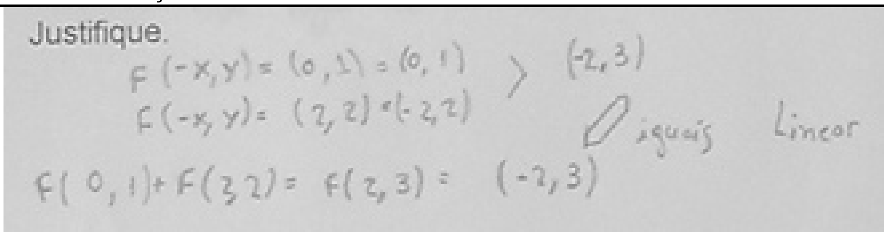
QUADRO 133 – ATIVIDADE 1 – FASE I

a) Considerando o plano x0y, o que você entende por reflexão em relação ao eixo y? b) A reflexão no plano em relação ao eixo y é uma transformação linear? Justifique. c) Represente a lei algébrica F(x,y) e o gráfico da reflexão no plano x0y, em relação ao eixo y. d) Determine a matriz desta reflexão em relação à base canônica. e) Qual seria a imagem do vetor (3,-2) por esta reflexão?

No item "a" da primeira atividade, dos seis estudantes, cinco (5) apresentaram uma concepção satisfatória da reflexão em relação ao eixo y. A única resposta considerada incorreta, fornecida na língua natural de emprego comum, demonstrou confusão entre a reflexão em relação ao eixo y e a reflexão em relação ao eixo x. Conforme esperado e previsto na análise preliminar, baseada nos resultados do teste e da aplicação "piloto", o registro mais freqüente na resolução desta tarefa foi o da língua natural de emprego comum, o qual foi utilizado por todos os sujeitos. Três estudantes utilizaram, também, a representação gráfica de forma correta.

Nenhum estudante conseguiu justificar adequadamente a linearidade da reflexão no plano em relação ao eixo y. Cinco (5) alunos forneceram uma resposta na língua natural, porém, de forma insatisfatória. Apenas o aluno D procurou determinar a lei algébrica e aplicar, ainda que para casos particulares, a condição de linearidade F(u+v)=F(u)+F(v), sendo F a reflexão no plano em relação ao eixo y. Nota-se, porém, que há inadequações na representação algébrica, já que o estudante estabelece F(-x,y), e não F(x,y) = (-x,y). Além disso, o mesmo iguala um elemento a sua imagem, conforme reproduzido a seguir.

FIGURA 22 – RESOLUÇÃO DO ALUNO D – ITEM "B" DA ATIVIDADE 1 – FASE I



Apenas dois dos seis estudantes (2/6) apresentaram corretamente a lei algébrica desta transformação linear. Apesar de o estudante D procurar avaliar a linearidade da transformação partindo incorretamente de "*F(-x,y)*", conforme exposto no quadro anterior, no item "c" desta atividade o mesmo apresentou corretamente a lei como "*F(x,y) = (-x,y)*". Com relação aos demais, notou-se grande dificuldade para a representação, uma vez que o estudante F deixou a tarefa sem resolução e os demais apresentaram problemas notacionais. Exemplificando, o aluno A apresentou "*F(x,-y)*", o aluno B escreveu $"F(x,y) \rightarrow F'(-x,y)"$ e o aluno C respondeu $"F(x,y) = (x,y)\ e\ F'(x,y) = (-x,y)"$. Nestas condições, observamos que a maioria dos estudantes reconhece que esta transformação altera o sinal da abscissa e mantém a ordenada, porém, a representação de tal situação não ocorre ou é insatisfatória.

Cinco (5) estudantes representaram corretamente o gráfico desta transformação, mas nenhum apresentou a sua matriz em relação à base canônica, a qual foi solicitada no item "d". Nesta situação, o estudante A deixou a tarefa sem resolução, os estudantes B e E apresentaram a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, o estudante C descreveu a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, o estudante D a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e o estudante F apresentou a resposta (1,1).

A imagem do vetor (3,-2) foi apresentada corretamente por quatro (4) estudantes. Para essa resolução, todos os sujeitos utilizaram a representação gráfica e os alunos C e D também apresentaram corretamente a representação numérica da situação.

Em uma análise global desta primeira atividade, pôde-se concluir que a representação tabular, no contexto das transformações lineares planas, não é dominada pelos estudantes nesse momento. Tal fato era esperado, uma vez que a análise dos livros didáticos demonstrou que este registro é pouco explorado, bem como as conversões que o envolvem. Ainda, os resultados do questionário, aplicado a oitenta e seis estudantes (cf. Cap. 3), apontaram um desconhecimento desta representação para a maioria dos sujeitos.

A representação algébrica foi apresentada pela maior parte dos alunos, mas, na sua maioria, com inadequações notacionais. Este problema não foi previsto na análise preliminar, uma vez que este tipo de representação é extremamente explorado pelos livros didáticos analisados. Destacamos, porém, que esta dificuldade também ocorreu na aplicação "piloto", mas, naquele momento, conjeturamos que tal situação representava um problema individual.

As condições de linearidade não foram explicitas nas resoluções dos estudantes, tendo em vista que apenas um sujeito apresentou somente a condição da soma, e ainda descrita para casos particulares e com problemas de representação. De acordo com a análise preliminar, já se havia previsto que os estudantes poderiam apresentar dificuldades na justificação da linearidade. Isto porque o trabalho com o registro da língua natural de emprego especializado não constitui algo simples para o estudante, conforme observado nas pesquisas de SIERPINSKA et al. (1999). Além disso, a análise dos dados do teste e a aplicação “piloto” já apontavam para esta dificuldade.

Sendo assim, conclui-se que, nesta primeira atividade, os estudantes apresentaram um domínio restrito das diversas representações, sendo detectada uma maior dificuldade nas representações tabular, algébrica e da língua natural de emprego especializado. O registro gráfico foi apresentado pela maioria dos sujeitos, porém, o seu conhecimento não foi suficiente para que os estudantes estabelecessem conversões para outros registros.

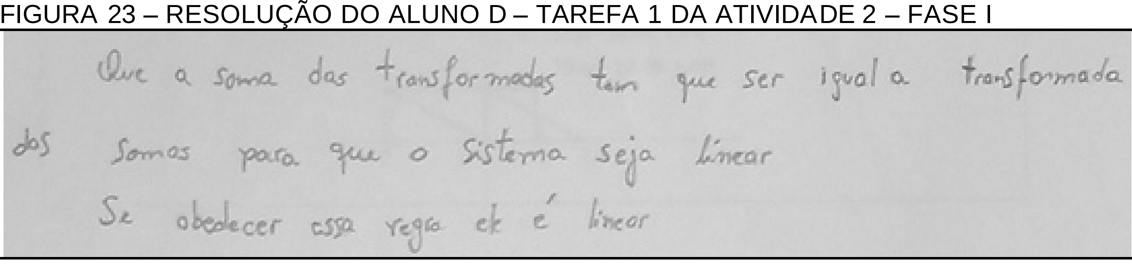
O quadro seguinte contém a descrição do enunciado da atividade 2.

QUADRO 134 – ATIVIDADE 2 – FASE I

<u>Tarefa 1</u>. Considere os vetores “u_1” e “u_2” que representam uma base do R^2. Sejam v_1 e v_2 elementos arbitrários do R^2. Então existe uma única transformação linear F: $R^2 \rightarrow R^2$ tal que $F(u_1) = v_1$ e $F(u_2) = v_2$. Se $u = a_1u_1+a_2u_2$, então, $F(u) = a_1F(u_1) + a_2F(u_2) = a_1v_1+a_2v_2$. O que você entende por esta descrição? <u>Tarefa 2</u>. Seja F uma transformação linear dada por F: $R^2 \rightarrow R^2$ / F(1,-1)=(0,-2) e F(0,3)=(3,6). Determine F(x,y) e a matriz desta transformação linear em relação à base canônica.

Nenhum estudante apresentou uma interpretação satisfatória com relação à tarefa 1 da Atividade 2. O aluno D evidenciou apenas a condição da soma, não observando que as duas condições de linearidade estavam sendo evocadas conjuntamente, conforme reproduzido a seguir.

FIGURA 23 – RESOLUÇÃO DO ALUNO D – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 2 – FASE I


Que a soma das transformadas tem que ser igual a transformada dos somas para que o sistema seja linear
Se obedecer essa regra ele é linear

Dos demais estudantes (5), três (3) deixaram a tarefa sem resolução e dois (2) apresentaram respostas consideradas insatisfatórias ou incompletas. O aluno B, por exemplo, respondeu *“É um sistema linear”* e o Aluno A afirmou *“Não há diferença de multiplicar o a na função F(u) e na expressão u”*.

Na tarefa 2 desta atividade, cinco (5) estudantes determinaram corretamente a lei algébrica da transformação linear do plano, quando fornecidas as imagens dos elementos de uma base do R^2. Destes, quatro (4 em 5) tiveram a preocupação de analisar se os vetores iniciais formavam uma base no plano. Dois (2) estudantes, apesar de determinarem a lei algébrica, apresentaram inadequações notacionais. Por exemplo, o estudante F não apresentou, em momento algum, a indicação da função F, ou seja, a sua resposta limitou-se a *"(x,y) = (y+x, 2y)"*. Por fim, nenhum estudante apresentou a matriz da transformação linear em relação à base canônica.

Esta situação levou-nos a concluir que, nesta segunda atividade, houve grande dificuldade de interpretação de uma situação dada na língua natural especializada, uma vez que nenhum estudante apresentou uma resposta considerada satisfatória para a tarefa proposta. Ainda, observou-se que os alunos não realizaram uma interpretação global do enunciado, tendo em vista que nenhum estudante descreveu algo a respeito da determinação e da unicidade da transformação linear. Tal fato já era esperado, conforme exposto na análise preliminar, uma vez que os livros didáticos analisados não têm por prática fornecer questões de interpretação de situações ou enunciados formulados em língua natural especializada. Todos os estudantes utilizaram, em suas respostas, o registro da língua natural de emprego comum, ainda que, na maior parte das vezes, de maneira confusa e imprecisa.

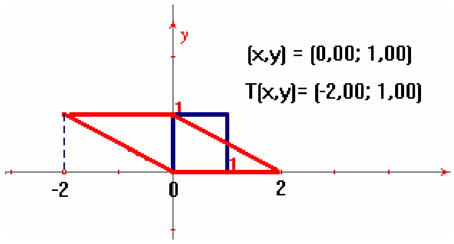
Em contrapartida, grande parte dos estudantes demonstrou domínio da técnica de determinação de uma transformação linear no plano e, apesar dos problemas de notação já mencionados anteriormente, estes alunos revelaram habilidade na conversão do registro numérico para o algébrico, inerente à resolução desta situação. Este alto índice de sucesso era esperado, tendo em vista que este tipo de tarefa é bastante explorado nos livros didáticos e, consequentemente, é familiar aos estudantes.

Com relação à representação tabular, foi observado novamente um desconhecimento por parte dos alunos, visto que nenhum estudante apresentou a matriz da transformação linear em relação à base canônica. Esse resultado converge com as evidências obtidas nos livros didáticos, nos resultados do teste e na aplicação "piloto"

A seguir, será apresentado o enunciado da Atividade 3.

QUADRO 135 – ATIVIDADE 3 – FASE I

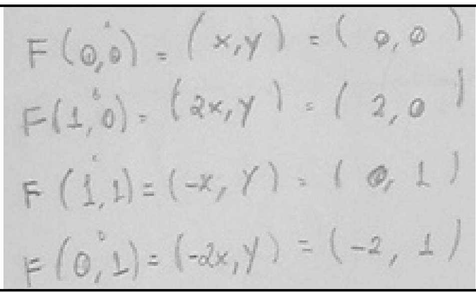
Tarefa 1. Determine a lei algébrica T(x,y) que transforma o quadrado azul, de vértices (0,0), (1,0), (1,1) e (0,1), no quadrilátero destacado em vermelho.



Tarefa 2. Sabendo que T(x,y)=(2x-2y,y) representa a lei algébrica de uma transformação linear, determine a imagem gráfica do quadrado ABCD, dados A(0,0), B(1,0), C(1,1) e D(0,1).

Na tarefa 1 da Atividade 3, não houve sucesso na determinação da lei algébrica, partindo de uma transformação linear dada na sua representação gráfica. Três (3) estudantes fizeram corretamente a conversão do gráfico para o numérico, pois estabeleceram a correspondência entre os vértices do quadrado original e suas respectivas imagens. Apesar disso, em entrevista posterior ao final da sessão, observou-se que tal correspondência foi aleatória, ou seja, nenhum destes alunos verificou se a relação entre os vértices do quadrado e as suas imagens respeitava as condições de uma transformação linear. O aluno E tentou determinar uma lei algébrica para cada correspondência entre vértices, conforme reproduzido a seguir.

FIGURA 24 – RESOLUÇÃO DO ALUNO E – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 3 – FASE I



Já na tarefa 2 desta atividade, referente à mesma situação, porém formulada no sentido contrário de conversão, ou seja, requisitando a determinação da representação gráfica a partir da lei algébrica, o índice de acerto foi de 100%.

Da mesma forma que na aplicação “piloto”, foi observada, nesta atividade, uma diferença significativa de desempenho ao se inverter o sentido de conversão, devido ao fenômeno da heterogeneidade deste tipo de operação. Isto porque foi observado que nenhum aluno resolveu o item que solicitava a conversão no sentido gráfico-algébrico, mas todos tiveram sucesso quando a tarefa foi proposta no sentido contrário.

Tal fato não nos surpreendeu, uma vez que as variáveis cognitivas inerentes a cada tarefa não eram iguais. A tarefa 1 exigia do estudante um esforço cognitivo muito maior. Isto porque, inicialmente, ele deveria determinar os vértices dos dois polígonos via conversão do gráfico para o numérico, para, em seguida, observar a validade da correspondência estabelecida entre os vértices do quadrado e suas respectivas imagens. Esta correspondência, que envolvia uma conversão não-congruente entre o registro numérico e o da língua de emprego especializado, deveria obedecer a condição de soma de uma transformação linear. Feito isso, com os dados obtidos, o aluno determinaria a lei algébrica da transformação linear, estabelecendo transformações do registro numérico para o algébrico.

Deste modo, a resolução da primeira tarefa envolvia um ciclo de conversões mais complexo e um conhecimento mais aprofundado do conceito de transformação linear. Já na tarefa 2, bastava realizar uma operação do registro algébrico para o numérico via substituição dos vértices na lei algébrica, e uma operação do registro numérico para o gráfico. Com isso, a resolução desta tarefa envolvia somente conversões congruentes.

Neste aspecto, podemos nos apoiar em DUVAL (2000), o qual aponta que o fato do sentido de conversão implicar, em alguns casos, em diferenças de congruência, pode levar o estudante a obter desempenhos distintos, se a mesma situação é proposta em sentidos opostos. A diferença significativa de desempenho nesta atividade ocorreu tanto na aplicação “piloto” como na principal. Isto nos leva, como educadores matemáticos, a refletir sobre e avaliar as abordagens que privilegiam determinados sentidos de conversão e que, conseqüentemente, não se atentam à possibilidade da heterogeneidade da congruência inerente a este tipo de operação.

Há também um outro fato a destacar. Na tarefa 2 da Atividade 2, a maior parte dos estudantes (5/6) determinou a lei algébrica da transformação linear, partindo das imagens dos elementos de uma base de seu domínio, mas, na tarefa

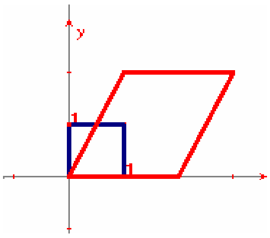
1 da Atividade 3, apesar de três estudantes destacarem corretamente os vértices do quadrado e as suas respectivas imagens, os mesmos não transferiram aquele conhecimento para esta última situação. Tal fato parece indicar que o processo aplicado na tarefa 2 da Atividade 2 representa um procedimento mecanizado para estes sujeitos, sem unidades de controle, situação também observada na aplicação “piloto”.

A seguir, apresentamos a Atividade 4 da primeira fase do experimento.

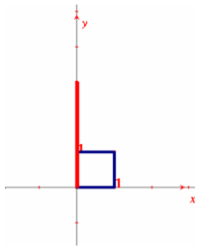
QUADRO 136 – ATIVIDADE 4 – FASE I

Em cada item, são dadas duas figuras. A figura azul representa o objeto inicial e a figura vermelha a sua imagem por meio de uma aplicação. Analise os casos em que a figura vermelha pode ser obtida por meio de transformações lineares. Justifique a sua afirmação.

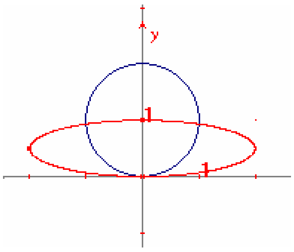
a)



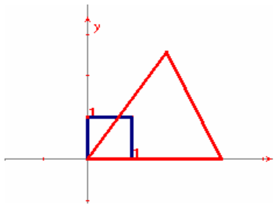
b)



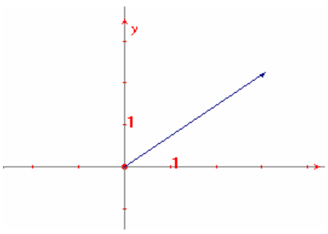
c)



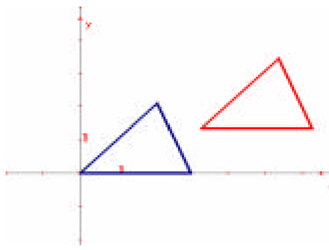
d)



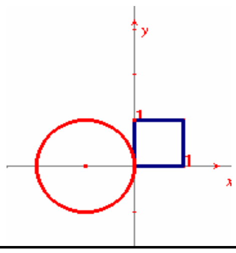
e)



f)



g)



Nesta atividade, cujo objetivo era analisar se o estudante possuía o conhecimento das possíveis imagens geométricas obtidas por meio de transformações lineares, notou-se, no item “a”, que todos os estudantes concebem a ampliação e o cisalhamento aplicados no quadrado como transformações lineares. No item "b", dois (2) estudantes não aceitaram a projeção do quadrado no eixo y, apresentando as seguintes respostas: *"Não, deve manter os quatro lados do quadrado"* (Aluno F) e *"Não, quadrado não pode virar segmento"* (Aluno C). Estes estudantes evidenciam uma idéia equivocada de que a aplicação linear não pode transformar segmentos paralelos distintos em coincidentes. Já os alunos B e D reconheceram a projeção expandida em y, sendo que o aluno D apresentou, inclusive, a lei algébrica desta transformação de forma correta.

No item "c", quatro (4) estudantes não aceitaram como objeto inicial a circunferência, com justificativas do tipo *"Ela não é linear*" (Aluno D). Nesta situação, nota-se a forte presença da idéia de que uma transformação linear só pode ser aplicada a objetos poligonais e vetores, ou ainda, uma confusão com o aspecto geométrico dos objetos – linhas retas e linhas curvas.

No item "d", cinco (5) estudantes afirmaram acertadamente que não é possível transformar um quadrado em um triângulo por uma transformação linear. A noção principal embutida nas resoluções, ainda que de forma não explícita nas respostas escritas, é a de que a linearidade mantém o paralelismo de segmentos. Afirmamos isso visto que quatro (4) estudantes apresentaram a idéia da impossibilidade de tal transformação ser linear, pelo fato do quadrado possuir quatro pontos e o triângulo só três. Em entrevista ao final da sessão, tais estudantes confirmaram oralmente esta noção.

Os seis (6) estudantes aceitaram a transformação do vetor não nulo no vetor origem, proposto no item "e", porém, somente dois justificaram que isto seria possível aplicando a transformação nula. No item "f", cinco (5) estudantes aceitaram a translação como linear. O único que não a aceitou como linear, apresentou, por justificativa, o fato de a imagem do vetor nulo não ser o nulo, o que denota que o mesmo apoiou-se na propriedade vista no curso de Álgebra Linear.

No item "g", todos relataram que não seria possível transformar um quadrado em uma circunferência aplicando uma transformação linear, mas apenas o aluno D procurou justificar tal afirmação, dizendo que *"São dois objetos diferentes, um linear e outro não"*. Em entrevista, observou-se que este aluno possuía a concepção de que a transformação linear preservaria o alinhamento, ainda que não a formulando como tal.

Diante das resoluções desta atividade, nota-se que a maior parte dos estudantes tem a noção, mesmo que intuitiva, de que a transformação linear preserva o alinhamento de pontos e o paralelismo de segmentos, porém, estas noções tornam-se insuficientes para a análise de outras situações. Por exemplo, a translação foi considerada pela maioria como linear. Notou-se, também, que a maior parte dos alunos não concebe a possibilidade da circunferência ser o objeto inicial a ser transformado, talvez pelo fato de serem explorados, no ensino da Álgebra Linear, principalmente vetores e objetos poligonais, conforme descrito no capítulo referente à análise dos livros didáticos desta área.

Estas conclusões também vêm a confirmar o trabalho de CHARTIER (2000), o qual aponta que os estudantes não apresentam um conhecimento sólido das possibilidades geométricas de uma transformação linear.

Realizando uma análise global dos resultados apresentados pelos estudantes nesta fase, pudemos detectar problemas na representação algébrica, desconhecimento da matriz de uma transformação linear em relação à base canônica e dificuldades de interpretação e de tratamento da língua de emprego especializado. As duas condições de linearidade praticamente não foram mencionadas, utilizadas ou discutidas, pois apenas um estudante apresentou, para casos particulares, a condição da soma. Notamos, também, que a maior parte das resoluções normalmente privilegia ou restringe-se a um tipo de registro, ou seja, poucos estudantes apresentam o hábito de diversificar as representações.

O procedimento de determinação da transformação linear é dominado pela maioria dos sujeitos somente se a questão é formulada segundo os modelos observados nos livros didáticos de Álgebra Linear, uma vez que tal conhecimento não foi transposto em uma situação que solicitava a lei algébrica partindo da representação gráfica de uma transformação linear (cf. tarefa 1 da Atividade 3).

A maior parte dos estudantes determinou uma transformação linear no plano partindo das imagens dos elementos de uma base do R^2, porém, apesar de utilizar, em uma das etapas, o fato de que se "$u = a_1u_1 + a_2u_2$, então, $F(u) = a_1F(u_1) + a_2F(u_2)$, sendo u, u_1, u_2 vetores do R^2, a_1 e a_2 números reais e F uma transformação linear no plano”, nenhum aluno conseguiu interpretar satisfatoriamente esta expressão na tarefa 1 da Atividade 2. Deste modo, as etapas de resolução deste tipo de tarefa (determinação de uma transformação linear) parecem ser dominadas de uma forma mecanizada, sem a compreensão exata das condições e propriedades presentes nesta determinação.

Apesar de o registro gráfico ter sido utilizado de forma satisfatória por grande parte dos estudantes, foram observadas dificuldades no estabelecimento de conversões que partiam desse tipo de representação. Em nenhum momento da aplicação dessas quatro atividades os estudantes demonstraram dominar as relações entre as representações gráfica, tabular e algébrica. Por fim, pode-se considerar que os estudantes têm um domínio restrito das possibilidades geométricas de uma transformação linear.

Os resultados deste grupo foram próximos aos encontrados nas outras fases do estudo, ou seja, verificamos praticamente as mesmas dificuldades nos oitenta e seis (86) estudantes participantes do questionário e no aluno da aplicação “piloto”. Tais problemas parecem constituir um reflexo do tipo de abordagem proposto nos livros didáticos de Álgebra Linear, o que confirma os pressupostos teóricos de CHEVALLARD (1992), nos quais a relação pessoal de um sujeito a um objeto é construída ou alterada de acordo com as condições da relação institucional a esse mesmo objeto. Cabe retomar que, em nossa pesquisa, o objeto foi representado pelas transformações lineares, a Instituição pelos livros didáticos de Álgebra Linear e, os sujeitos, por todos os estudantes que colaboraram neste estudo. A seguir, apresentaremos os resultados da aplicação das atividades da segunda fase do *Design*.

6.1.2. Análise da Segunda Fase do *Design*

A segunda fase do *Design* foi composta por atividades que visavam tanto o levantamento do conhecimento prévio do estudante (Atividades 1 e 2), objetivando garantir a base necessária para o prosseguimento do *Design,* como o trabalho com situações “inovadoras”, no sentido de não serem usuais no ensino das transformações (a partir da Atividade 3). Estas últimas procuraram relevar aspectos normalmente não explorados no ensino das transformações lineares, tais como as conversões que partem do registro gráfico, o uso de um *software* de geometria dinâmica, o trabalho com objetos não poligonais, a visão simultânea das relações entre as representações algébrica, gráfica e tabular e situações de interpretação da língua natural de emprego especializado no ambiente geométrico.

Nesta fase, todas as atividades foram aplicadas nos estudantes organizados em duplas. Com isso, a partir deste momento, os alunos A e B formarão a dupla 1, os alunos C e D a dupla 2, e os alunos E e F representarão a dupla 3. A formação das duplas foi aleatória, porém, a organização inicial persistiu até o final dos encontros. Da mesma forma que o estudante do “piloto”, antes da aplicação desta fase, os alunos realizaram atividades de familiarização com o *software Cabri*, (cf. Anexo III), uma vez que não conheciam esta ferramenta.

As duas primeiras atividades, além de objetivarem a garantia da base necessária para o desenvolvimento das atividades seguintes, também representaram um primeiro momento de interação entre os estudantes e o professor-pesquisador, para que este último pudesse avaliar não só as produções escritas dos sujeitos, mas outras variáveis tais como os discursos e os tipos de integração social estabelecidos pelos mesmos. Tal fato é classificado como interação intuitiva pela metodologia dos *Design Experiments*. A interação analítica só ocorre quando o professor-pesquisador identifica, nos estudantes, raciocínios ricos e repletos de implicações para futuras interações. Desta forma, as Atividades 1 e 2, além de revisarem o conceito de transformação linear, permitiram ao professor estabelecer uma direção inicial de condução do experimento.

A partir da Atividade 3, as tarefas foram elaboradas com um caráter mais inovador, contendo a preocupação de explorar o conteúdo das transformações por meio da análise das especificidades dos registros e das conversões congruentes e não-congruentes, principalmente aquelas que envolvem o registro gráfico. Nesta fase, em concordância com a metodologia adotada, o professor-pesquisador assumiu um papel participativo, tendo em vista que, nos momentos de bloqueio de resolução das tarefas, o mesmo forneceu novas formas de abordar a situação, seja por meio de questionamentos ou de situações de comparação, conforme poderá ser observado nas descrições destas atividades.

Para avaliar a pertinência destas atividades neste grupo de estudantes, pretendemos comparar as suas produções da primeira fase do experimento, com o desenvolvimento apresentado na segunda etapa, evidenciando, assim, as possíveis evoluções cognitivas decorrentes da interação com as atividades e recursos disponíveis. Ainda, como o experimento foi desenvolvido em dois ambientes, o *papel&lápis* e o de geometria dinâmica, temos a intenção particular de analisar o papel assumido por este último na conceitualização das transformações lineares planas por parte dos estudantes.

Com relação às atividades desta fase descritas no capítulo anterior, o leitor observará que houve inclusão de algumas tarefas. Tal fato ocorreu de acordo com a necessidade dos estudantes participantes do experimento, o que é previsto na metodologia adotada. Tais inserções serão descritas de acordo com as suas ocorrências no desenvolvimento do *Design.* Com o objetivo de facilitar a leitura e o acompanhamento dos resultados desta fase, novamente serão reproduzidos os enunciados das atividades aplicadas.

6.1.2.1. Descrição dos resultados da Atividade 1 – Fase II

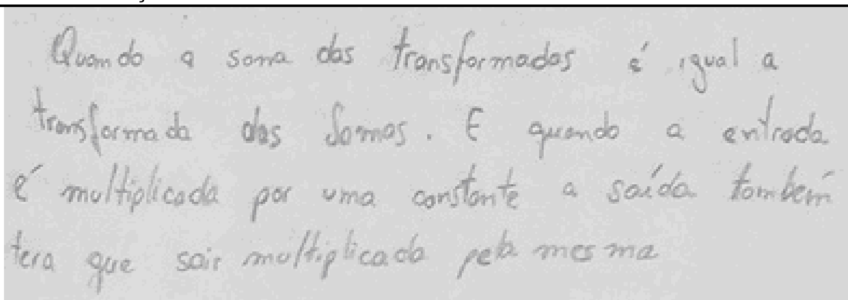
A primeira atividade objetivou verificar a produção de cada dupla com relação ao conceito de transformação linear, conforme apresentado a seguir.

QUADRO 137 – ATIVIDADE 1 – FASE II

<u>Tarefa 1</u>. Escreva, com suas palavras, o que você entende por transformação linear. <u>Tarefa 2</u>. A definição abaixo é normalmente encontrada nos livros de Álgebra Linear. Uma transformação T é dita linear se, e somente se, dados U e V espaços vetoriais sobre R e $T: U \to V$: a) $T(u+v) = T(u) + T(v)$, $\forall u, v \in U$ b) $T(ku) = k. T(u)$, $\forall k$ real e $\forall u \in U$. Estabelecendo uma comparação com a sua resposta dada no item anterior, o que está contemplado nesta definição? E o que não está?

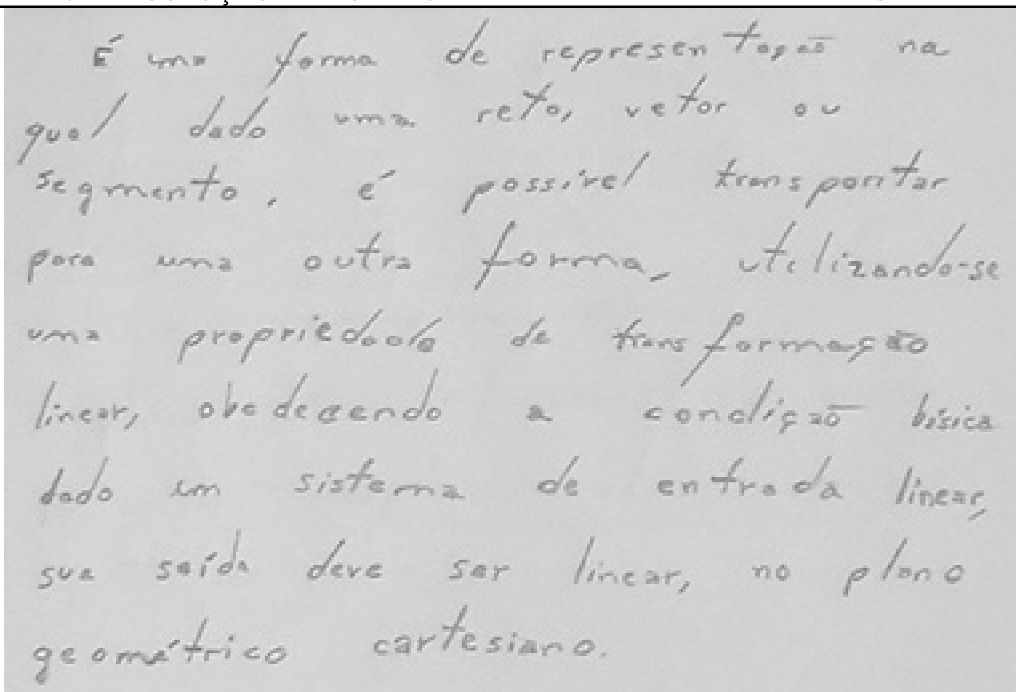
A primeira tarefa solicitava o entendimento do estudante sobre transformação linear. Como as condições de linearidade não foram praticamente citadas pelos alunos nas atividades da primeira fase, não se esperava que os mesmos apresentassem uma concepção satisfatória deste conceito, porém, duas duplas explicitaram essas condições. Nas descrições, foi observado que havia uma linguagem não comumente utilizada em Álgebra Linear. Em entrevista com estes alunos, foi confirmado que tais descrições eram provenientes da disciplina de Processamento Digital de Sinais, a qual cursavam no momento da aplicação do *Design.* A seguir, apresentaremos a resolução da dupla 1 nesta tarefa.

FIGURA 25 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 1 – FASE II


Quando a soma das transformadas é igual a transformada das somas. E quando a entrada é multiplicada por uma constante a saída também terá que sair multiplicada pela mesma

Apesar disso, duas duplas também atribuíram à transformação linear uma concepção geométrica no plano, provavelmente influenciadas pelas atividades de familiarização no *Cabri* realizadas antes da aplicação desta segunda fase. Apresenta-se, a seguir, uma dessas resoluções.

FIGURA 26 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 3 – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 1 – FASE II

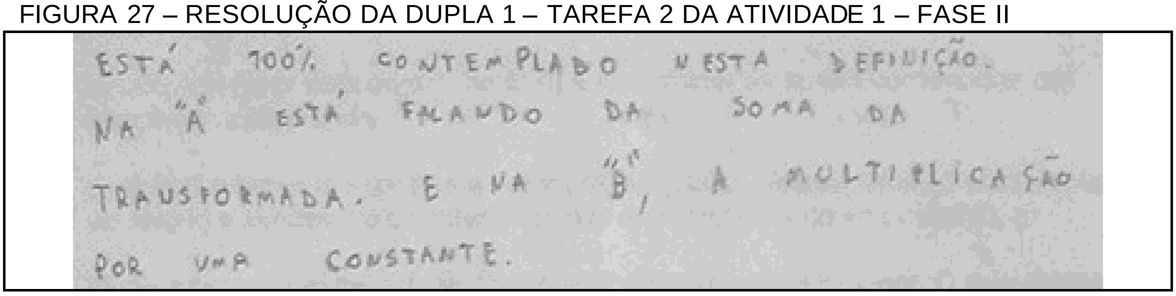

É uma forma de representação na qual dado uma reta, vetor ou segmento, é possível transportar para uma outra forma, utilizando-se uma propriedade de transformação linear, obedecendo a condição básica dado um sistema de entrada linear, sua saída deve ser linear, no plano geométrico cartesiano.

Notamos, nesta definição, que a dupla 3 não especificou as condições de linearidade normalmente presentes na definição de transformação linear em

Álgebra Linear, mas apresentou uma compreensão também influenciada pela disciplina de Processamento Digital de Sinais. Na fala, detectada na análise das áudio-gravações, o estudante E revelou ao parceiro: "*É aquilo que vimos na disciplina de Processamento, mas eu não lembro as condições*". O parceiro de dupla disse: "*Será que não são aqueles movimentos no plano?*". Observamos, nesta fala, que cada um concebe a transformação linear de uma forma, o que está refletido na resposta fornecida. Quando se refere ao aspecto geométrico, podemos observar que a transformação linear é vista como "transporte para uma outra forma", sendo que a dupla concebe como objetos iniciais, apenas retas, vetores e segmentos. Foi verificado, também, que nenhuma dupla descreveu a transformação linear como uma função definida em espaços vetoriais, evidenciando o seu domínio e contradomínio.

Na segunda tarefa, que solicitava uma comparação entre a resposta fornecida e a definição de transformação linear comumente presente nos livros didáticos de Álgebra Linear, todas as duplas disseram que suas respostas estavam contempladas, porém, não da forma "matemática". Nota-se que nas resoluções apresentadas, o foco de análise está nas condições de linearidade e não na definição completa de função definida em espaços vetoriais que contempla as condições apresentadas, conforme exemplificado a seguir.

FIGURA 27 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA 2 DA ATIVIDADE 1 – FASE II


ESTÁ 100% CONTEMPLADO NESTA DEFINIÇÃO.
NA "A" ESTÁ FALANDO DA SOMA DA
TRANSFORMADA. E NA "B", A MULTIPLICAÇÃO
POR UMA CONSTANTE.

Partindo da descrição desta atividade, podemos concluir que, apesar de a análise dos livros didáticos de Álgebra Linear ter apontado que a solicitação de interpretações de questões conceituais formuladas na língua natural não representa uma prática usual no ensino, foi observado que a maior parte dos estudantes conseguiu expressar, na língua natural, uma compreensão satisfatória, apesar de incompleta, das condições de linearidade. Conforme observado na escrita e na entrevista, a concepção de transformação linear apresentada não foi decorrente apenas do contato com a disciplina de Álgebra Linear. Todos os estudantes confirmaram que as descrições apresentadas foram influenciadas pela disciplina de Processamento Digital de Sinais, cursada simultaneamente à aplicação desta atividade. Ainda, para duas duplas, também houve uma influência das atividades de familiarização no *Cabri,* no momento em que os estudantes atribuíram uma concepção geométrica para este tipo de transformação.

O professor de Processamento Digital de Sinais foi questionado a respeito do tipo de exploração das transformações lineares em sua disciplina, já que a preocupação, naquele momento, era a de que o desenvolvimento simultâneo com a disciplina interferisse nos resultados das outras atividades do *Design*. O docente afirmou que a sua disciplina só retomava a definição de transformação linear, para definir a propriedade básica da entrada e saída de sinais digitais, ou seja, não eram exploradas as diversas representações deste conceito. Com isso, concluímos que tal fato não inviabilizaria o trabalho com este grupo.

A maior parte dos estudantes conseguiu interpretar parcialmente a definição matemática dada na língua de emprego especializado, porém, este tipo de representação não foi utilizado na escrita, pois todos os alunos apresentaram as suas resoluções na língua natural de emprego comum. Conforme previsto na análise preliminar, baseada principalmente no fato de os livros didáticos não explorarem relações entre a língua especializada e a língua de emprego comum, os estudantes não apresentaram uma resolução que contemplou todas as informações presentes na definição usual de transformação linear. Isto porque, o foco de suas interpretações está nas condições de linearidade e não na definição que apresenta a transformação linear como aplicação definida em espaços vetoriais que contempla tais condições, conforme relatado anteriormente.

Esta interpretação, focada exclusivamente nas condições de linearidade, desencadeou dificuldades em atividades posteriores, as quais envolviam determinações da lei algébrica de uma transformação linear e comprovações da linearidade via tratamentos na língua de emprego especializado. A descrição destas situações será apresentada em momento oportuno.

Houve grande interação e contribuição entre os componentes de cada dupla, o que pôde ser notado principalmente na análise das gravações de suas falas. Neste momento do *Design*, o professor-pesquisador não realizou interferências, já que o objetivo consistia em observar que tipo de conhecimento os estudantes possuíam a respeito de transformação linear e se compreendiam a definição apresentada na língua natural de emprego especializado. Como a compreensão apresentada pela maioria dos estudantes focou nas condições de linearidade, na aplicação da Atividade 2, a definição de transformação linear foi retomada, com o intuito de estabelecer um ambiente favorável para cada estudante refletir sobre os aspectos que não observou.

6.1.2.2. Descrição dos resultados da Atividade 2 – Fase II

A atividade 2, apresentada a seguir, teve o objetivo de retomar as diversas representações e observar se a atividade de familiarização, realizada no *software,* foi suficiente para garantir o desenvolvimento das atividades do *Design*.

QUADRO 138 – ATIVIDADE 2 – FASE II

Abra um arquivo novo no *Cabri*.
Tarefa 1. Aplique a "Simetria axial", em relação ao eixo x, em um vetor qualquer com origem na origem do sistema x0y.

Tarefa 2. Procure determinar a lei algébrica F(x, y) desta transformação.

Tarefa 3.
a) Considerando a simetria axial em relação ao eixo x (ou reflexão em relação ao eixo x) como uma transformação, quem são U e V?
b) Discuta a linearidade desta transformação.

Tarefa 4. Uma transformação linear do plano no plano será sempre do tipo T(x,y) = (ax+by, cx+dy), com a, b, c e d reais. Esta transformação também pode ser representada na forma: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. No caso, a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é denominada matriz da transformação linear em relação à base canônica do IR^2.

Determine a representação da simetria em relação ao eixo x (ou reflexão em relação ao eixo x) na forma $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e, em seguida, apresente a sua matriz em relação à base canônica. Utilizando a matriz obtida, determine a imagem do vetor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Os estudantes resolveram a atividade organizados em duplas e, em alguns momentos, foi necessária a intervenção do professor-pesquisador, para que não houvesse bloqueio na seqüência das tarefas desta atividade.

Observamos que os estudantes não tiveram dificuldade em trabalhar com o *Cabri-Géomètre*, tendo em vista que eles foram capazes de criar, de forma independente, um vetor no sistema x0y, aplicando, em seguida, a simetria axial em relação ao eixo x. Ainda, neste momento eles demonstraram conhecimento de seu caráter dinâmico, pois, como estratégia de determinação da lei algébrica solicitada na tarefa seguinte, os mesmos determinaram espontaneamente as coordenadas dos dois vetores obtidos e observaram os efeitos de se movimentar a extremidade do primeiro vetor. Com isso, concluímos que as atividades de familiarização foram suficientes para cumprir o papel de fornecer a base necessária para o desenvolvimento, no ambiente do *software,* das atividades do estudo principal.

Após esta etapa, notamos, pelas áudio-gravações e por registros no ambiente *papel&lápis*, o fato de os estudantes observarem, via movimentos da extremidade do primeiro vetor, a conservação da abscissa e a alteração do sinal da ordenada dos vetores imagens. Todavia, nenhuma dupla, na primeira tentativa, apresentou de forma correta a lei algébrica desta transformação solicitada na tarefa 2, conforme reproduzido no quadro seguinte.

QUADRO 139 – RESOLUÇÕES DAS DUPLAS – TAREFA 2 DA ATIVIDADE 2 – FASE II


Observamos a função f'[x,-y] onde f[x,y]

(Dupla 1)


f(x) = (x, y) e f'(x) = (x, -y)

(Dupla 2)


f(x,y) = (ax+bx)

(Dupla 3)

Cabe evidenciar que, na primeira atividade da segunda fase do *Design,* nenhuma dupla apresentou a noção de que a transformação linear era uma aplicação definida em espaços vetoriais. A maior parte dos estudantes focou apenas nas condições de linearidade. Neste momento, conjeturamos se esta limitação na concepção de aplicação linear não poderia estar interferindo no estabelecimento da representação algébrica solicitada. Ressaltamos que problemas com este tipo de representação também ocorreram na primeira fase do

Design, especificamente na resolução do item “c” da Atividade 1.

O professor-pesquisador questionou cada dupla a respeito da notação algébrica apresentada. As duplas não tinham dificuldade em relatar oralmente que, naquela situação, mantinha-se a primeira coordenada do vetor e trocava-se o sinal da segunda. O professor-pesquisador solicitou que analisassem a resposta fornecida e observassem se o que haviam escrito correspondia àquela fala. As duplas 1 e 2 afirmaram que sim e a dupla 3 relatou que não, mas que não sabia como estabelecer a representação requerida.

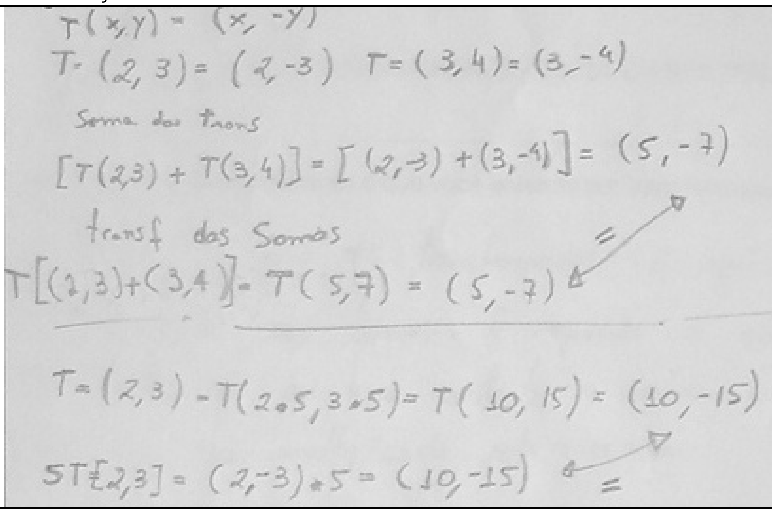
No item “a” da tarefa 3, nenhum estudante soube reconhecer o domínio e o contradomínio da aplicação dada. Foi solicitada, a cada dupla, a retomada da definição de transformação linear presente na atividade anterior. Apesar disso, os estudantes afirmavam não saber quem eram U e V. As duplas 1 e 2 relataram que achavam que U era (x,y), estabelecendo confusão entre representação de um elemento e conjunto. A dupla 2 relatou, também, que V era (x,-y), o que evidencia que a mesma não distingue contradomínio de imagem.

Diante da evidência de que havia deficiências na compreensão de função e, por constituir uma atividade de revisão com vistas a garantir a base necessária para a continuidade do experimento, o professor-pesquisador decidiu realizar uma interferência direcionada a todos os estudantes. Deste modo, solicitou, de forma conjunta, um exemplo de uma função na representação algébrica. O estudante A apresentou $f(x) = 2x$ e o estudante D a função $f(x) = x^2$. O professor-pesquisador também forneceu $g(x,y,z) = (x+2y, 3z)$, questionando em que conjuntos estariam definidas as funções apresentadas. Os estudantes não tiveram dificuldade em responder que as duas primeiras eram definidas em R. Na terceira, já apresentaram dúvidas. O professor-pesquisador pediu para que observassem novamente a aplicação. O estudante D relatou que “*ela é aplicada em três e o resultado tem dois, então é do R^3 para o R^2*”.

Partindo destas reflexões, o professor-pesquisador pediu para que retomassem a tarefa 2 da Atividade 2 (determinação da lei algébrica) e a tarefa 3 (determinação de U e V). Nesta etapa, as duplas 1 e 2 estabeleceram corretamente a lei algébrica e notaram que $U=R^2$ e $V=R^2$. Para a dupla 3, foi necessário o estabelecimento de mais exemplos. Com esta interferência, ela determinou a lei algébrica solicitada na tarefa 2 e estabeleceu o domínio e contradomínio da transformação.

No item “b” da tarefa 3, o qual envolvia a comprovação das duas condições de linearidade da simetria axial em relação ao eixo x, foi observada uma grande dificuldade em realizar tratamentos na língua natural especializada, apesar de a maioria dos estudantes demonstrar a compreensão das condições de linearidade neste tipo de representação, conforme observado nas resoluções da primeira atividade desta fase do *Design*. Todas as duplas tiveram dificuldade em identificar que os elementos “u” e “v” em “T(u+v)=T(u)+T(v)” eram pares ordenados. A dupla 2 voltou a representar f(x)=(x,-y) e novamente foi questionada sobre isso, observando, assim, o problema nesta notação. A dupla 1 procurou realizar a tarefa para casos particulares, conforme resolução apresentada a seguir.

FIGURA 28 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA 3B DA ATIVIDADE 2 – FASE II


T(x,y) = (x, -y)
T= (2,3) = (2,-3)   T= (3,4) = (3,-4)
Soma dos trans
[T(2,3) + T(3,4)] = [(2,-3) + (3,-4)] = (5,-7)
transf das Somas
T[(2,3)+(3,4)] = T(5,7) = (5,-7)
=
T=(2,3) - T(2•5, 3•5) = T(10,15) = (10,-15)
5T[2,3] = (2,-3)•5 = (10,-15)
=

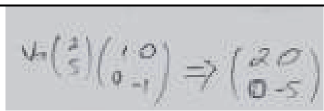
Pode-se observar, nesta resolução, que, além de ser direcionada para casos particulares, há inadequações representacionais, como por exemplo, T=(3,4)=(3,-4) e não T(3,4)=(3,-4).

A dupla 2 procurou trabalhar com elementos genéricos, mas apresentou problemas na demonstração da linearidade. Já a dupla 3 forneceu uma resposta na língua natural de emprego comum, relatando que, na simetria axial em relação ao eixo x, “*o x é mantido e o sinal do y é alterado*.”

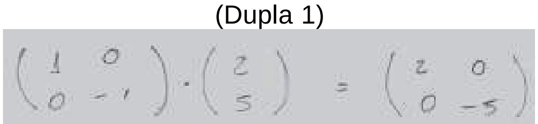
Após cerca de trinta minutos, como nenhuma dupla realizou a demonstração corretamente e, por constituir uma atividade de revisão do conceito, o professor-pesquisador procurou discutir, em conjunto com todos os estudantes, a resolução da dupla 1. Nesta situação, ele solicitou aos alunos que analisassem aquela produção, ressaltando os possíveis problemas. O estudante D da dupla 2 evidenciou o problema da resolução não garantir a generalidade, pois ela foi direcionada para casos específicos. Nenhum estudante, naquele momento, observou as inadequações representacionais. Com isso, o professor-pesquisador procurou realizar, em conjunto com os estudantes, a demonstração da linearidade daquela transformação. Esta postura direcionada só foi assumida nesta atividade, tendo em vista o objetivo de retomar os conceitos de transformação linear, a fim de garantir a base mínima para a continuidade do experimento. O leitor observará que, a partir da terceira atividade, as intervenções serão caracterizadas principalmente por questionamentos e propostas de novas situações.

Na tarefa 4, os estudantes apresentaram dificuldades de compreensão do enunciado da questão. Nestas condições, foi realizada uma leitura conjunta e, para todas as duplas, foi solicitado que representassem a transformação linear, obtida na tarefa 2 desta atividade, na forma $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Partindo dessa informação, todas as duplas conseguiram representar T(x,y) = (x,-y) na forma $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, destacando $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ como a matriz, em relação à base canônica, da simetria axial em relação ao eixo x. Apesar disso, somente a dupla 3 determinou corretamente a imagem do vetor v=$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ por produto matricial, conforme solicitado no enunciado. As demais, tanto na escrita como na fala, demonstraram não dominar a técnica de multiplicação de matrizes. As resoluções incorretas, apresentadas pelas duplas 1 e 2, estão reproduzidas no quadro seguinte.

QUADRO 140 – RESOLUÇÕES DAS DUPLAS 1 E 2 – TAREFA 4 DA ATIVIDADE 2 – FASE II



(Dupla 1)



(Dupla 2)

O diálogo estabelecido com os estudantes dessas duas duplas revelou que os mesmos não recordavam a técnica de multiplicação de matrizes. Sendo assim, eles comprometeram-se a pesquisar como efetuar este tipo de operação para os próximos encontros.

Por meio destas resoluções, podemos concluir que nesta atividade, os estudantes apresentaram dificuldades nas representações algébrica, tabular e da língua natural especializada, sendo que as tarefas envolvendo tais registros demandaram várias intervenções do professor-pesquisador. Nesta fase, as intervenções foram um tanto direcionadas, pois era vital garantir a base mínima necessária para o prosseguimento do *Design*.

Cabe destacar que os estudantes também demonstraram problemas em concepções prévias tais como funções e multiplicação de matrizes. O fato de não terem uma concepção sólida do conceito de função interferiu principalmente em dois momentos da atividade: na determinação da lei algébrica e na demonstração da linearidade, a qual exigia tratamentos com a representação da língua natural especializada.

Concluindo, pode-se afirmar que os estudantes não demonstraram um conhecimento satisfatório das diversas representações e, ainda, apresentaram deficiências em conceitos considerados pré-requisitos para o trabalho com as atividades do experimento.

Como foi requisitada, a cada dupla, uma reflexão sobre as tarefas realizadas e, diante da postura do professor-pesquisador, que procurou intervir nos momentos de bloqueio, espera-se que esta atividade possa garantir a base necessária para o prosseguimento do *Design.* Caso isto não ocorra, serão inseridas atividades complementares para atingir tal objetivo.

6.1.2.3. Descrição dos resultados da Atividade 3 – Fase II

A terceira atividade, apresentada a seguir, objetivou relacionar as representações algébrica, tabular e gráfica de uma transformação linear no plano.

QUADRO 141 – ATIVIDADE 3 – FASE II

Abra o arquivo da atividade 3 no *Cabri* (arq_ativ3).

Tarefa 1. Ajuste a matriz para $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .O que ocorre com a imagem do quadrado? Como é denominada esta matriz?

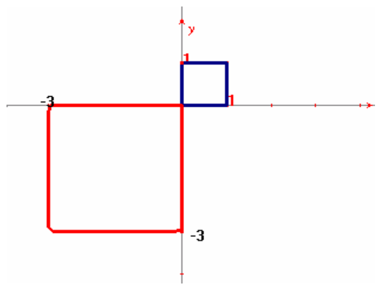
Tarefa 2. Nos itens seguintes, pede-se:

- analise qual foi a alteração feita sobre a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- escreva, com suas palavras, o que você observou em relação às três representações após a alteração da matriz.

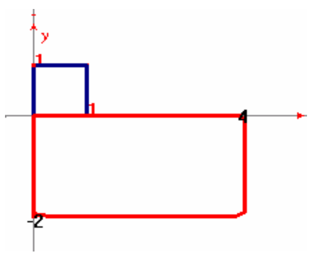
a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Tarefa 3. Utilizando o mesmo arquivo do *Cabri*, determine a matriz em relação à base canônica e a forma algébrica F(x, y) de uma transformação linear que leva o quadrado unitário (em azul) na figura vermelha em cada item abaixo.

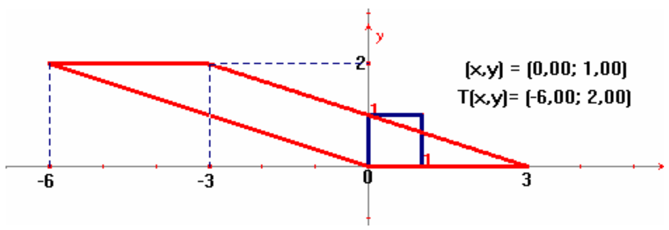
a)



b)



c)



Tarefa 4. **Sem utilizar** o *Cabri*, determine a matriz em relação à base canônica e a forma algébrica F(x,y) de uma aplicação linear que transforma o quadrado unitário, situado no primeiro quadrante, com um dos vértices na origem e lados sobre os eixos:
a) em um retângulo de lados 2 na direção do eixo x e 3 na direção do eixo y, situado no primeiro quadrante.
b) em um retângulo de lados 2 na direção do eixo x e 3 na direção do eixo y, situado no segundo quadrante.
c) em um segmento de medida 2 sobre o eixo y.
d) em um ponto.
e) na sua imagem *cisalhada* horizontalmente por um fator de valor 3.
f) na sua imagem *cisalhada* verticalmente por um fator de valor 4.
g) em um quadrado de lado ½, situado no primeiro quadrante.

Na resolução desta atividade, as duplas demonstraram facilidade em trabalhar com o *Cabri*, apesar de a dupla 3 não entender inicialmente o mecanismo do *software*, já que tentava alterar na tela, os elementos da forma algébrica e não da tabular.

Na primeira tarefa, somente uma dupla associou a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ à denominação de matriz identidade, porém, todas notaram que, partindo desta matriz, a imagem gráfica coincidia com o objeto inicial. As outras duas duplas relataram que não lembravam a sua denominação, sendo que uma delas a descreveu como "*base*" (Dupla 1) e a outra como "*matriz canônica*" (Dupla 2). Nesta última, novamente notamos a confusão entre a matriz de uma transformação linear, em relação à base canônica, e a matriz composta pelos elementos da base canônica do R^2.

Na segunda tarefa, somente a dupla 3 teve a preocupação de especificar a alteração proposta em relação à matriz identidade, estabelecendo a conexão entre as representações algébrica e gráfica, conforme solicitado no enunciado. As demais fixaram-se apenas no registro gráfico, sem especificar os fatores de expansão ou cisalhamento.

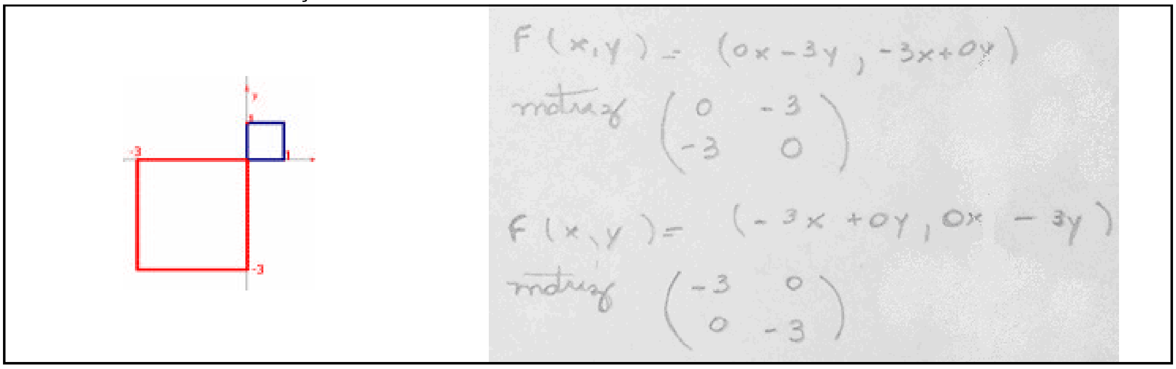
Com relação ao item da matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, a dupla 2 estabeleceu imediatamente a associação da situação com a simetria em relação ao eixo y. Na análise das telas capturadas, observamos que a dupla 3 recorreu aos comandos das transformações do *Cabri* para avaliar se a matriz era a da simetria em relação ao eixo y.

Todas as duplas notaram que as matrizes dos dois últimos itens desta tarefa estavam relacionadas com cisalhamentos nas direções dos eixos x e y respectivamente, porém, nenhuma estabeleceu a relação entre o fator de cisalhamento e a correspondente alteração gráfica.

Na terceira tarefa, em que era fornecida a representação gráfica de uma transformação linear no *Cabri*, solicitando as representações tabular e algébrica correspondentes, foi notado que os estudantes das duplas 1 e 2 realizaram a situação por tentativas, ou seja, não apresentaram, naquele momento, um domínio efetivo das relações entre as três representações. Tal fato foi confirmado também na análise das áudio-gravações e do material relativo à captura de telas. Já a dupla 3, que nas primeiras tarefas desta atividade se ateve a uma descrição mais detalhada da relação entre as representações tabular, gráfica e algébrica, realizou-a de forma mais consciente. Isto porque ela observou o tipo de alteração gráfica para, em seguida, alterar o valor na matriz presente na tela do *Cabri*. Somente no item “c”, que envolvia expansões e cisalhamento horizontal, esta dupla adotou a estratégia da tentativa e erro no *Cabri*.

Um resultado não previsto nos itens “a” e “b” desta tarefa, ocorrido pelo fato de o objeto inicial ser um quadrado e por não estar especificada, no enunciado, a imagem de um de seus vértices, foi a obtenção de duas respostas para cada item. Exemplificando, as duplas 1 e 2 realizaram a questão por tentativas, fornecendo inicialmente, no item “a”, a resposta “$F(x,y) = (0x\text{-}3y, \text{-}3x\text{+}0y)$” e a matriz correspondente $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, com base no resultado obtido na tela do *Cabri*. Como esta resposta, embora correta nesta situação particular, poderia ocasionar problemas em relação ao objetivo do *Design* quanto à generalização de que, em F(x,y) = (**a**x+**b**y,**c**x+**d**y), **a** representa a expansão na direção do eixo x e **d** a expansão na direção do eixo y, o professor-pesquisador solicitou a estas duplas que pensassem se a resposta fornecida era a única correta. Os estudantes continuaram realizando a tarefa por tentativas, uma vez que, na análise da fala e das telas, mostraram que inicialmente colocaram o valor 3 e depois o -3 em qualquer posição, até encontrar a resposta correta. Com isso, manipulando o *Cabri*, notaram que haveria outra resposta, conforme exemplificado a seguir.

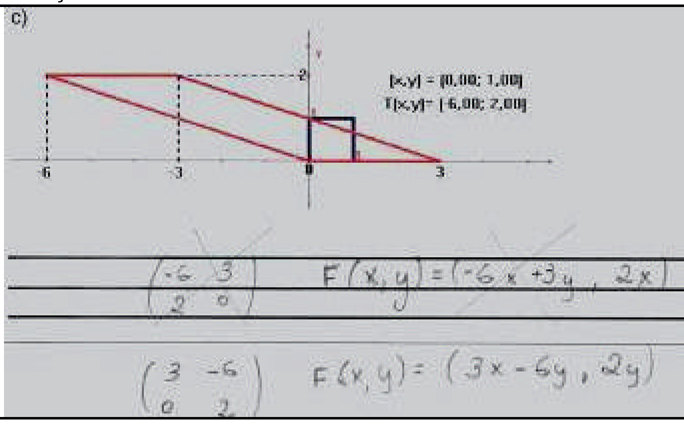
FIGURA 29 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 2 – TAREFA 3A DA ATIVIDADE 3 – FASE II



No item “c”, já não era possível estabelecer o raciocínio que estavam utilizando, uma vez que no enunciado era dada a imagem de um dos vértices do quadrado, limitando, desta forma, a uma única resposta correta.

As duplas 2 e 3 não tiveram dificuldade em resolver esta tarefa. Já a dupla 1 inicialmente forneceu uma resposta na qual a condição dada não era satisfeita. O professor-pesquisador questionou tal resposta e o estudante A relatou que “*dava certo no Cabri*”, já que o quadrado se transformava na figura solicitada. Nesta situação, o professor-pesquisador pediu para que os estudantes da dupla avaliassem a condição inicial apresentada no enunciado. A dupla substituiu o ponto (0,1) na função obtida e notou que a imagem não era (-6,2). Neste momento, o estudante B falou que “*neste caso, então, só vale a outra resposta*”. Alterando os elementos da matriz no *Cabri*, a dupla forneceu a resposta correta, cancelando a primeira resolução oferecida, conforme reproduzido a seguir.

FIGURA 30 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA 3C DA ATIVIDADE 3 – FASE II



Com relação à tarefa 4, na qual eram solicitadas as representações algébrica e tabular de uma transformação linear, partindo de enunciados dados na língua natural de emprego comum e sem o uso do *Cabri*, apenas a dupla 3 apresentou uma resolução satisfatória. Para isso, ela estabeleceu a conversão direta da língua natural para a representação numérico-tabular e desta para a simbólico-algébrica, demonstrando domínio da relação entre essas representações. As outras duplas representaram inicialmente, no ambiente *papel&lápis*, o gráfico de cada situação, porém, não conseguiram, em um primeiro momento, resolver a tarefa. Na fala da dupla 1, observada pela gravação de seu discurso, foi detectado que o estudante A relatou ao colega que deveriam ter realizado as tarefas anteriores com mais atenção, pois agora não sabiam responder.

As duas duplas solicitaram ao professor-pesquisador se poderiam voltar à tarefa anterior para observar melhor o que acontecia no *Cabri*. Somente com esta consulta, conseguiram apresentar a resolução da tarefa 4 e entender as relações entre as três representações, mas ainda apresentando dificuldades nos itens relativos ao cisalhamento. A dupla 2 forneceu apenas a representação tabular, ou seja, não observou que o enunciado solicitava, também, a representação algébrica. Quando questionada, ela justificou que não havia observado esta solicitação, apresentando, sem dificuldades, este tipo de representação.

Feita a análise geral desta atividade, notamos que o objetivo previsto não foi totalmente atingido, pois era esperado que os estudantes relacionassem as três representações, evidenciando os fatores e as direções de expansão e cisalhamento na matriz, na lei algébrica e no gráfico, aplicando tal conhecimento também em atividades sem o auxílio do *Cabri*. Diante do apresentado, apenas uma dupla atingiu este objetivo, justamente aquela que demonstrou o cuidado de especificar, nas tarefas iniciais, as alterações ocorridas na matriz e a conseqüente mudança gráfica. Notamos que as duplas 1 e 2 não estabeleceram naturalmente essas relações, demandando questionamentos do professor-pesquisador com relação a este aspecto. Ainda, a tarefa 3 do *Design* mostrou que o trabalho com o quadrado no registro gráfico, sem especificar a imagem de um de seus vértices, trouxe por conseqüências a possibilidade de duas respostas corretas. Se por um lado tal questão propiciou a riqueza de análise de duas situações, ela também trouxe um problema para o estabelecimento da generalização a que se propunha esta atividade do *Design*.

Com relação ao *Cabri*, notamos que ele assumiu o papel de ferramenta que tornou possível, de uma forma dinâmica, as relações entre as três representações envolvidas. Além disso, para uma dupla, ele possibilitou validar experimentalmente uma conjectura, uma vez que foi utilizado um de seus comandos para verificar se a transformação era a simetria axial em relação ao eixo y. Apesar disso, ele também possibilitou, na tarefa 3, a obtenção da matriz e da lei algébrica por meio de tentativas. Isto fez com que duas duplas criassem uma dependência com relação ao *software* e, conseqüentemente, não construíssem uma lógica consciente para a determinação da imagem gráfica solicitada.

Diante do ocorrido e condizente com a metodologia adotada, a qual pressupõe a flexibilidade de reestruturar a proposta inicial caso se faça necessário, foram elaboradas novas atividades, que procuraram relacionar as diversas representações via exploração de objetos diferentes do quadrado unitário, conforme descrição apresentada a seguir.

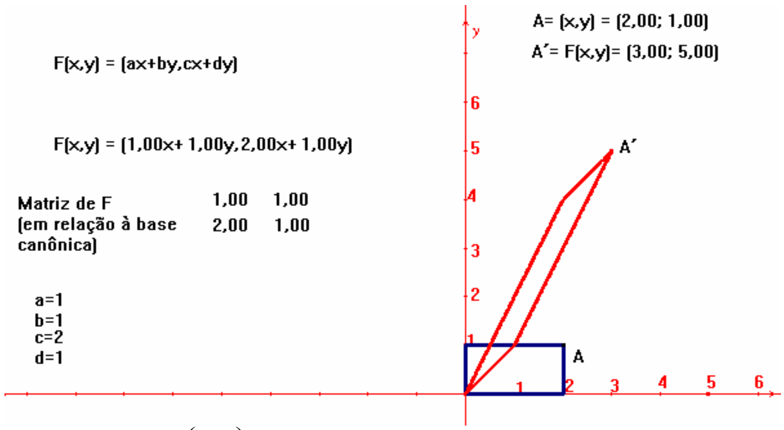
6.1.2.4. Descrição dos resultados da Atividade Complementar – Fase II

Tendo em vista que na atividade anterior a maior parte dos estudantes não concluiu com segurança o papel dos fatores de expansão e de cisalhamento, foram elaboradas, inicialmente, situações semelhantes às aplicadas na atividade precedente, porém, tendo como objeto inicial um retângulo com um dos vértices na origem e lados 2u e 1u sobre os eixos x e y, respectivamente. O quadro a seguir apresenta a descrição desta atividade.

QUADRO 142 – ATIVIDADE COMPLEMENTAR – FASE II

continua

Abra o arquivo da atividade comp1 do *Cabri* (arq_comp1). A figura, em vermelho, representa a imagem do retângulo azul por uma transformação linear.
Exemplo da tela:



Tarefa 1. Ajuste a matriz para $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. O que ocorre com a imagem do retângulo? Como é denominada esta matriz?

QUADRO 142 – ATIVIDADE COMPLEMENTAR – FASE II

continuação

<u>Tarefa 2</u>. Nos itens seguintes, pede-se:

– analise qual foi a alteração feita sobre a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

– escreva, com suas palavras, o que observou em relação às três representações, após a alteração.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

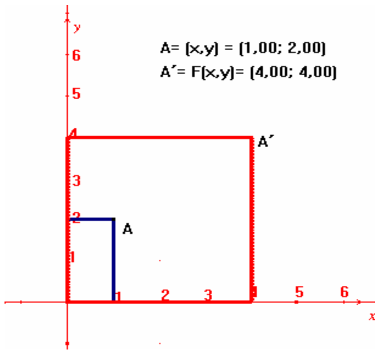
Tarefa 3.

a) Sem utilizar o *Cabri*, se a matriz da transformação linear, em relação à base canônica, fosse $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qual seria a imagem geométrica do retângulo?

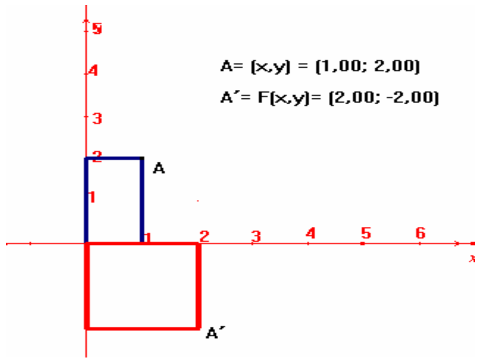
b) Sem utilizar o *Cabri*, se a matriz da transformação linear, em relação à base canônica, fosse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, qual seria a imagem geométrica do retângulo?

<u>Tarefa 4</u>. Sem utilizar o *Cabri*, determine a matriz da transformação linear, em relação à base canônica, e a forma algébrica F(x,y) de uma transformação linear que leva o retângulo em azul na figura em vermelho, considerando as condições dadas para A e A'.

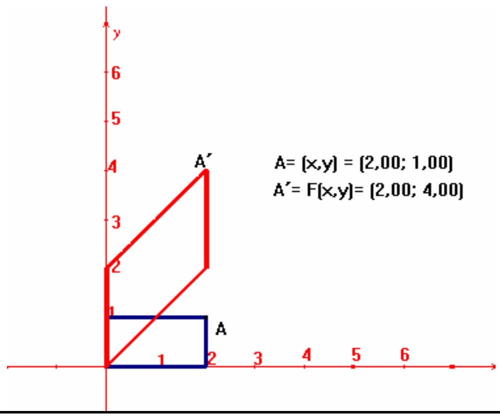
a)



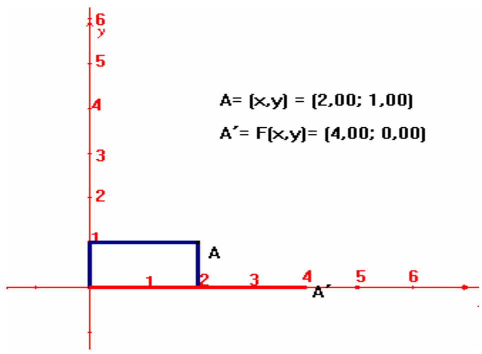
b)



c)

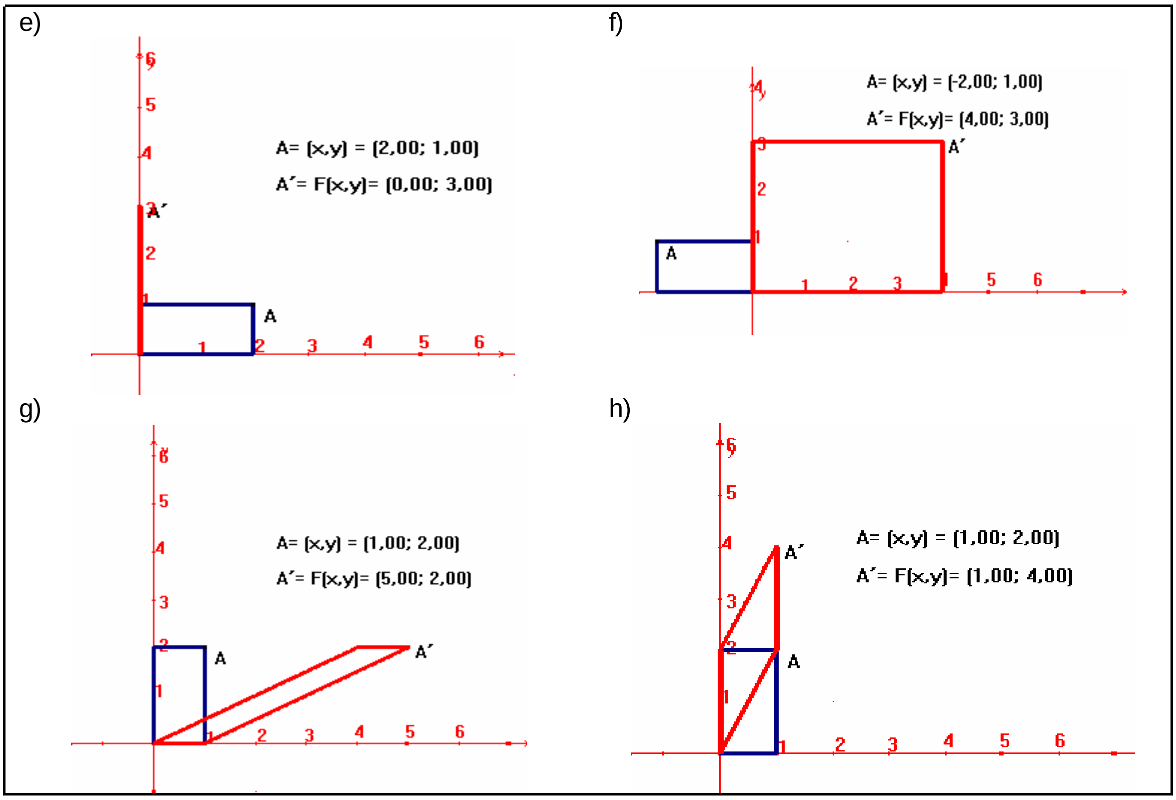


d)



QUADRO 142 – ATIVIDADE COMPLEMENTAR – FASE II

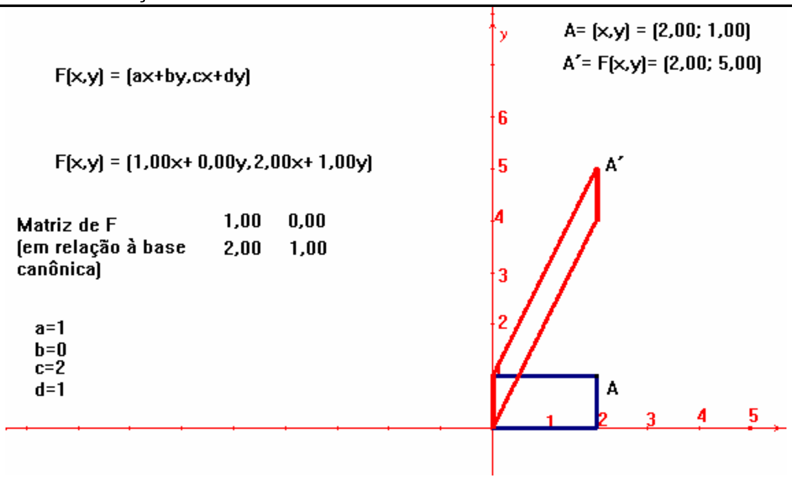
conclusão



Na primeira tarefa, todos os estudantes concluíram que a imagem gráfica coincidia com o retângulo original. Na tarefa 2, os alunos demonstraram dominar a relação entre as três representações na transformação de expansão, tanto na direção do eixo x como na direção do eixo y. Com exceção da dupla 1, as demais tiveram o cuidado de observar o impacto que uma alteração na representação tabular ocasionava nas demais. Já nas questões de cisalhamento, as duplas 1 e 2 apresentaram, inicialmente, dificuldades em concluir que os fatores dos cisalhamentos horizontal e vertical constituíam valores que multiplicavam “y” e “x”, respectivamente.

No item “g” da segunda tarefa, no qual era dada a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, a dupla 1 demonstrou, tanto na escrita como no discurso oral, a compreensão de que haveria um cisalhamento vertical, porém, a mesma não conseguia determinar uma relação que justificasse o fator de cisalhamento com a alteração gráfica. Apesar de esta dupla apresentar na escrita a lei algébrica e a compreensão da relação entre ela e a matriz dada, inicialmente a mesma não se utilizou desta lei para concluir a relação com o gráfico. O professor-pesquisador solicitou aos estudantes da dupla que relatassem o que observaram no item “g” desta tarefa. Neste momento, comparando as três representações deste item, o estudante B forneceu a descrição apresentada a seguir.

QUADRO 143 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA 2G DA COMPLEMENTAR – FASE II



“Aqui tá no 1 e foi para o 5, então aumentou 4. Ah, ele tá fazendo uma conta com o x, tem que ver o valor de x.” (Estudante B)

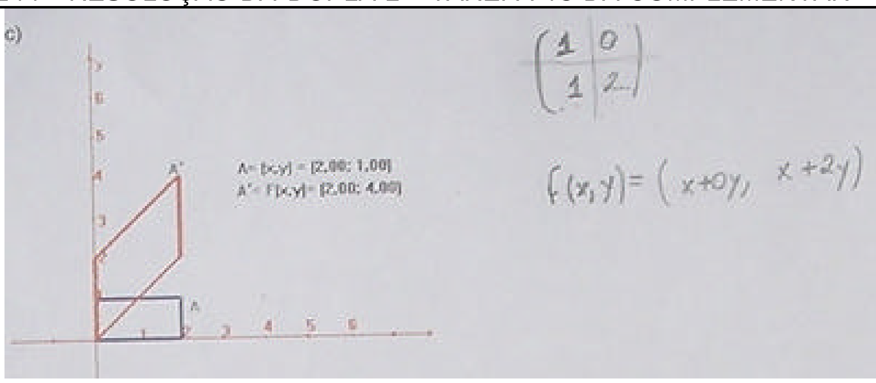
Deste modo, a fala do estudante B indica que o mesmo observou a relação do fator de cisalhamento no gráfico com a representação algébrica. Apesar disso, o outro aluno da dupla não acompanhou a proposta e solicitou ao colega que mudasse os fatores de cisalhamento no *Cabri*. Eles testaram outros valores para os itens “g” e “h” e, conforme verificado pela análise da discussão (via áudio-gravação), o estudante B, que já havia compreendido a relação envolvida nesta situação, procurou explicá-la para o colega de dupla. Nestas condições, o estudante A relatou que compreendeu a relação entre o fator de cisalhamento e a alteração gráfica e a dupla prosseguiu na resolução das tarefas.

A dupla 2 estabeleceu a conclusão via conversão entre matriz e gráfico, ou seja, não utilizou explicitamente a lei algébrica. Isto porque, no item “g”, o estudante D afirma para o colega: “*É só ir dobrando o tamanho da base e somando com a altura*”. Já a dupla 3 resolveu a situação por meio da relação entre as três representações, respondendo corretamente aos itens sem interferências do professor-pesquisador.

As duplas 2 e 3 realizaram corretamente os itens “a” e “b” da tarefa 3. Nestes, era necessário o estabelecimento de conversões da matriz para o gráfico, sem o uso do *Cabri*. Pela análise das áudio-gravações, foi observado que a dupla 1 ainda tinha dificuldades no entendimento dos fatores de cisalhamento. Desta forma, naquele momento, ela deixou a tarefa sem resolução e decidiu passar para a discussão da seguinte.

Na tarefa 4 desta atividade, que partia do gráfico e solicitava as representações algébrica e tabular da transformação linear, as duplas 2 e 3 estabeleceram facilmente o que era requerido, sendo que primeiro apresentaram a matriz e depois a lei algébrica da transformação, ou seja, estabeleceram as conversões do gráfico para a representação tabular e desta para a representação simbólico-algébrica. A seguir, a título de ilustração, será apresentada a resolução do item “c” desta tarefa pela dupla 2, acompanhada da fala do estudante D.

QUADRO 144 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 2 – TAREFA 4C DA COMPLEMENTAR – FASE II



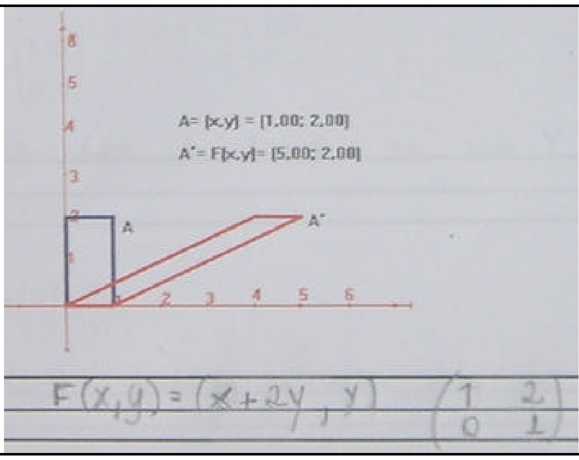
“Não houve expansão no x, então a é 1. Não tem cisalhamento horizontal, b vale 0; d vale 2. (...) Teve um cisalhamento vertical de 1, c é 1.” (Estudante D).

O estudante A da dupla 1 mostrou que ainda não havia compreendido a relação, uma vez que, para resolver o item “a” da tarefa 4, destacou os valores presentes no gráfico para construir a matriz. Nestas condições, forneceu inicialmente $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ e não $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ como matriz da transformação linear em relação à base canônica, ou seja, não notou que os valores da matriz eram fatores de expansão e que o objeto inicial não era um quadrado unitário. O outro membro da dupla não apresentou dúvidas nas situações que envolviam expansão, mas em um primeiro momento, ainda demonstrou dificuldades nas questões de cisalhamento. Por exemplo, no item “c” da Tarefa 4, ele estabeleceu a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e a correspondente lei F(x,y) = (x+0y, 2x+y), enquanto o correto seria a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e a lei algébrica F(x,y) = (x+0y, x+2y).

Sem qualquer intervenção, este estudante substituiu o ponto A, presente no enunciado, na lei algébrica encontrada, observando que a resposta estava incorreta. Em seguida, ele solicitou o auxílio do professor-pesquisador, tendo em vista que não conseguia identificar o seu erro. O professor somente sugeriu a retomada da tarefa 2 da Atividade Complementar, a fim de incentivar uma análise comparativa no intuito de estabelecer as relações entre as três representações.

A dupla refez, sem qualquer auxílio, todos os itens dessa tarefa e, pelas análises das telas capturadas e das interações transcritas da áudio-gravação, observou-se que a mesma atribuiu valores não presentes nos enunciados e comparou os efeitos nas três representações. A seguir, a título de ilustração, apresentamos a sua resolução para o item "g" da tarefa 4, realizada após a retomada da Tarefa 2.

FIGURA 31 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA 4G DA ATIVIDADE COMPLEMENTAR – FASE II



Feita uma análise geral desta atividade, notamos que a mesma propiciou uma compreensão mais sólida das diversas representações e uma interpretação consciente das relações entre as representações tabular, gráfica e simbólico-algébrica. Ainda, ela permitiu a exploração de conversões, em duplo sentido, entre os registros gráfico e tabular e tabular e algébrico. As duplas que demonstraram, nas atividades iniciais, preocupação em efetuar uma análise minuciosa das relações entre as três representações, tiveram uma maior facilidade em aplicar tal conhecimento em situações desenvolvidas fora do ambiente do *Cabri.* Somente a dupla 1 não estabeleceu imediatamente as relações entre as três representações, uma vez que só as compreendeu, efetivamente, após a retomada de uma tarefa anterior.

Na tarefa 4, nenhuma dupla estabeleceu a conversão direta do gráfico para a representação simbólico-algébrica, ou seja, a representação tabular sempre intermediou esta conversão. Em contrapartida, todos os estudantes utilizaram a lei algébrica para a determinação da imagem de um ponto, ou seja, eles não estabeleceram tal imagem por multiplicação de matrizes, fato que também ocorreu na aplicação “piloto”. Apesar de constituir uma estratégia correta e que conduziu ao sucesso, exploramos também situações que envolviam a obtenção da imagem de elementos por produto matricial, uma vez que o trabalho com a representação tabular é extremamente importante para estudantes da área computacional, conforme detectado na análise dos livros didáticos de Computação Gráfica. Situações com esta finalidade serão descritas na Atividade 9 do experimento.

O *Cabri* desempenhou um papel primordial nesta atividade, tendo em vista que possibilitou novamente a observação da relação simultânea e dinâmica entre as três representações. Tanto pelas notas de observação do professor-pesquisador como pela análise das telas capturadas, notou-se que as duplas não ficaram presas ao enunciado, pois testaram, principalmente nos itens de cisalhamento, diversos fatores, incluindo valores que não estavam explicitamente presentes nas tarefas. Sendo assim, concluímos que o *software* representou, para esses estudantes, uma ferramenta facilitadora para experimentação e visualização, auxiliando na construção das relações entre as três representações envolvidas e facilitando os testes e verificações experimentais.

Estabelecendo uma comparação com as resoluções apresentadas até então, notamos uma evolução dos estudantes com relação ao domínio das representações algébrica e tabular. Tal afirmação apóia–se no fato de que, na Fase I e nas duas primeiras atividades da Fase II do *Design*, a maior parte dos estudantes apresentou problemas na representação da lei algébrica e desconhecimento da representação da matriz de uma transformação linear no plano em relação à base canônica. Após as atividades aplicadas até o momento, temos evidências de que todos os estudantes transitaram, sem dificuldades, nas representações tabular, algébrica e gráfica e estabeleceram, com segurança, as principais relações entre elas.

6.1.2.5. Descrição dos resultados da Atividade 4 – Fase II

Na atividade 4, reproduzida a seguir, além das tarefas previamente elaboradas e descritas no capítulo anterior, foram incluídas novas situações. Tais situações complementares serão indicadas por Tarefas comp4a, comp4b, comp4c e comp4d.

QUADRO 145 – ATIVIDADE 4 – FASE II

continua

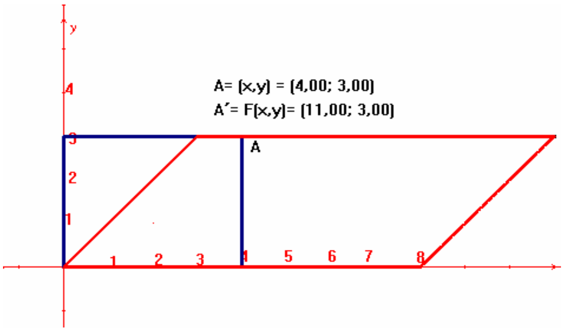
Tarefa comp4a. Abra o arquivo complementar da atividade 4 do *Cabri* (arq_ativ4). Ao aplicar a transformação linear solicitada no triângulo azul, observe o tipo de imagem gráfica obtida na figura vermelha. Estabeleça, com suas palavras, uma relação entre o efeito geométrico encontrado e a lei algébrica F(x,y) da transformação linear aplicada.

a) F(x,y) = (x,y) b) F(x,y) = (-2x,y) c) F(x,y)= (x,3y) d) F(x,y) = (x+3y, y)
e) F(x,y) = (x-5y, y) f) F(x,y) = (x, 2x+y)

Tarefa comp4b. Sem utilizar o *Cabri*, verifique se a matriz dada pode ser a matriz, em relação à base canônica, de uma transformação linear que gera a figura vermelha partindo da azul. Justifique, com suas palavras, a resposta fornecida.

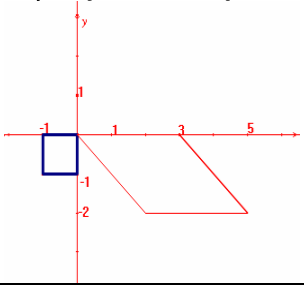
Matriz da transformação linear F (em relação à base canônica): $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Representação gráfica:



Tarefa comp4c. Seja F(x,y) = (3x+2y, 4y). Sem utilizar o *Cabri*, relate que tipo de efeito geométrico a aplicação desta função gera em um retângulo situado no primeiro quadrante, com um dos vértices na origem e lados sobre os eixos x e y.

Tarefa comp4d. Observe a representação gráfica a seguir.



QUADRO 145 – ATIVIDADE 4 – FASE II

conclusão

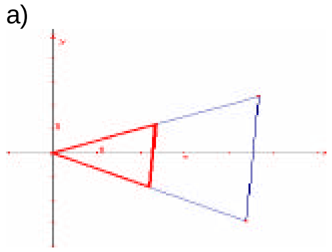
Sem utilizar o *Cabri*, relate se é possível transformar o quadrado azul na figura vermelha pela transformação linear F(x,y) = (-3x+2y, 2y). Justifique.

<u>Tarefa 1</u>. Descreva a relação entre cada elemento da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de uma transformação linear, em relação à base canônica, e a imagem gráfica de um objeto qualquer.

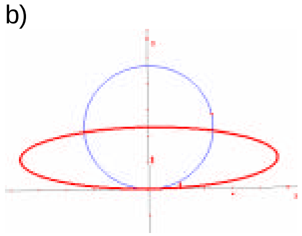
<u>Tarefa 2</u>. Sem utilizar o *Cabri*, justifique se existe uma transformação linear que aplicada em um quadrado resulta em uma circunferência.

<u>Tarefa 3</u>. Sem utilizar o *Cabri*, justifique se é possível, por meio de uma transformação linear, transformar o objeto azul no vermelho.

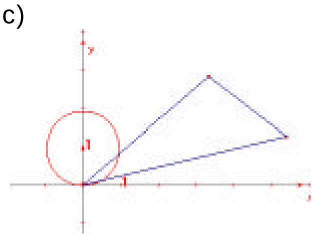
a)



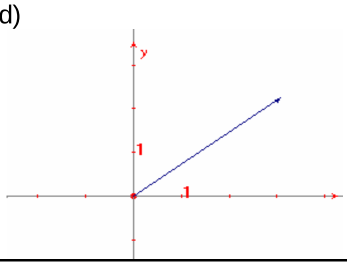
b)



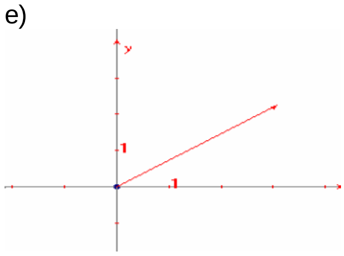
c)



d)



e)



A inclusão dessas novas situações teve por objetivo explorar outros tipos de conversão, além de tarefas de análise. Por exemplo, na tarefa comp4a, que parte da representação algébrica, pretende-se que o estudante efetue a conversão do algébrico para o numérico-tabular e, em seguida, avalie o resultado gráfico no *Cabri*. Tal inserção foi realizada porque, até o momento, notamos que as atividades realizadas no *software* privilegiaram as conversões no sentido do numérico-tabular para o algébrico e do numérico-tabular para o gráfico.

Nas tarefas comp4b, comp4c, comp4d, classificadas como tarefas de análise, temos a intenção de observar quais estratégias e que tipos de conversão os estudantes utilizarão para resolver novas situações sem o auxílio do *software*. Como em certos momentos das atividades anteriores o *Cabri* favoreceu o uso da estratégia da tentativa e erro, decidiu-se por solicitar as possíveis justificativas das respostas às tarefas comp4b, comp4c e comp4d sem o uso desta ferramenta.

Com relação à aplicação desta atividade, observamos que, na tarefa comp4a, todas as duplas determinaram facilmente a matriz partindo da representação simbólico-algébrica, ou seja, não apresentaram dificuldades em determinar a matriz da transformação linear, em relação à base canônica, via conversão do algébrico para o numérico-tabular.

Tal fato mostra que as atividades anteriores criaram condições para os sujeitos estabelecerem não somente conversões no sentido do tabular para o algébrico e deste para o gráfico, uma vez que os estudantes foram capazes de estabelecer conversões em outros sentidos. Nenhuma dupla sentiu a necessidade de representar a matriz no ambiente *papel&lápis*, tendo em vista que a conversão foi realizada diretamente na tela do *Cabri.* Feita essa conversão, todos os estudantes analisaram corretamente o efeito geométrico correspondente a cada aplicação.

Desta forma, concluímos que as atividades desenvolvidas até o momento cumpriram o papel de favorecer aos estudantes, o entendimento das relações entre as representações tabular, gráfica e algébrica de uma transformação linear no plano.

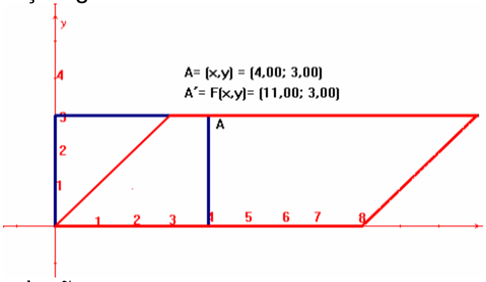
Notamos, novamente, que os estudantes não se prenderam aos valores solicitados nos itens da tarefa, ou seja, pela análise das telas capturadas, observamos que eles testaram outros valores. Ainda, a dupla 1 demonstrou o hábito de sempre retornar à matriz identidade antes de estabelecer uma nova transformação. É provável que tal fato tenha ocorrido por influência de atividades anteriores.

Na tarefa comp4b, que objetivou analisar que tipo de estratégia o estudante utilizaria para verificar se uma matriz poderia representar, em relação à base canônica, a matriz de uma transformação linear dada na sua representação gráfica, as duplas 1 e 2 apresentaram uma resolução correta sem qualquer intervenção do professor-pesquisador. A estratégia de resolução das duas duplas consistiu em determinar a matriz e depois compará-la com a matriz dada, ou seja, estabeleceram uma conversão do gráfico para o numérico-tabular, partindo da análise dos tipos de transformação geométrica ocorridos. Nestas condições, concluíram que a matriz do enunciado não correspondia à transformação gráfica apresentada.

Foi observado que, inicialmente, nenhuma dupla procurou determinar os vértices do retângulo para analisar se a matriz dada poderia gerar os vértices correspondentes do objeto imagem. Ainda, nenhuma dupla observou que a matriz do enunciado continha fator de cisalhamento vertical e não horizontal e, por este motivo, não poderia ser a matriz correspondente à situação geométrica fornecida. Como exemplo, no quadro seguinte, será descrita a estratégia utilizada pelos estudantes A e B, da dupla 1, na resolução da tarefa comp4b.

QUADRO 146 – ESTRATÉGIA DA DUPLA 1 – TAREFA COMP4B DA ATIVIDADE 4 – FASE II

Situação gráfica:



Matriz fornecida:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Estudante B: "Coloca o "a" e "d" aí que fica melhor."
(Nesta situação, o estudante A registrou, no papel, os elementos a, b, c e d, provavelmente por influência do *software*).

Estudante B: "Como foi de 4 para 8, o "a" é igual a 2. O "d" é igual a 1. Não tem cisalhamento vertical, então "c" é igual a 0. (...) Tem um cisalhamento horizontal de 3 unidades".
(Neste momento, o estudante A atribuiu ao "b" o valor 3).

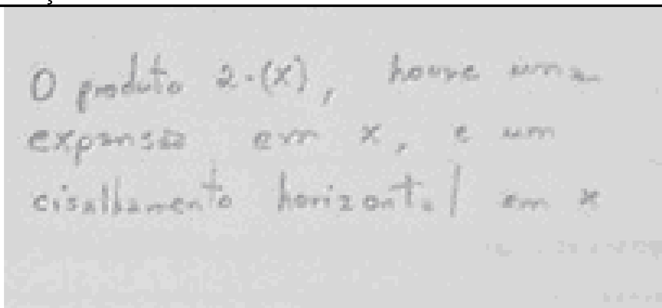
Estudante B: "Não, não é 3, é 1, porque a medida já é 3".
Nestas condições, os estudantes forneceram corretamente a matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e a lei algébrica $F(x,y)=(2x+y,y)$, verificando que a matriz do enunciado não correspondia à situação gráfica apresentada. Antes de oferecerem estas representações, os estudantes registraram os valores de a,b,c e d, conforme apresentado a seguir.
a=2
b=1
c=0
d=1

O professor-pesquisador, visando estimular outras formas de controle, solicitou às duplas 1 e 2 outra maneira de verificar esta situação. O objetivo era incentivar os estudantes na busca de outras estratégias de resolução. O estudante D da dupla 2 comentou que talvez pudesse verificar no *Cabri*. O professor-pesquisador disse que não havia uma tela ou arquivo pronto para aquela situação, solicitando, então, que a dupla pensasse em outro caminho externo àquele ambiente. Após um tempo, a dupla 2 relatou que poderia substituir os pontos na forma algébrica. O professor-pesquisador solicitou que a dupla desenvolvesse esta resolução. Os estudantes identificaram as coordenadas dos vértices do retângulo, determinaram a lei algébrica partindo da matriz fornecida no enunciado e substituíram os vértices nesta lei, observando que ela não gerava os vértices da imagem.

Notamos, novamente, que os estudantes não utilizaram o produto matricial para determinar as imagens, ou seja, preferiram determinar a lei para, em seguida, obter as imagens de pontos particulares. A mesma estratégia foi utilizada pela dupla 1.

A dupla 3 apresentou uma descrição, na língua natural, do efeito geométrico ocorrido, destacando a expansão na direção do eixo x e o cisalhamento horizontal, mas não analisou se a matriz fornecida no enunciado poderia representar tal situação, conforme reproduzido a seguir.

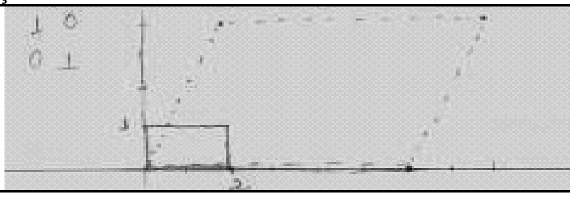
FIGURA 32 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 3 – TAREFA COMP4B DA ATIVIDADE 4 – FASE II


O produto 2·(x), houve uma expansão em x, e um cisalhamento horizontal em x

Em entrevista informal após a seção, notou-se que esta dupla não havia realizado uma leitura atenta do enunciado. Ao ser questionada, ela forneceu oralmente a resposta de que a matriz dada não poderia ser a matriz da transformação linear em relação à base canônica, já que nela não havia fator de cisalhamento horizontal.

Na tarefa comp4c, a intenção era estabelecer uma conversão do registro simbólico-algébrico para a língua natural de emprego comum. Duas duplas apresentaram uma resolução coerente, sendo que a dupla 1 construiu um retângulo particular e apresentou, graficamente, o que ocorreria com o mesmo se fosse aplicada tal transformação. Esta situação é retratada a seguir.

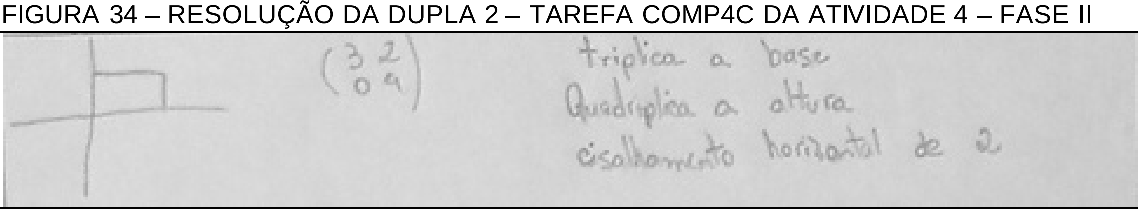
FIGURA 33 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA COMP4C DA ATIVIDADE 4 – FASE II



Foi observado, pela análise da fala dos integrantes da dupla, que eles estabeleceram uma comparação entre os elementos da lei algébrica e a matriz identidade, para em seguida construir o gráfico, uma vez que, ao serem questionados pelo professor-pesquisador, eles relataram que inseriram a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ para analisar, por comparação, os valores alterados e os efeitos que ocorreriam graficamente. Com isso, observou-se que a dupla utilizou, como estratégia de resolução, a conversão da representação algébrica para a tabular e desta para a gráfica. Ressaltamos, aqui, que na primeira tarefa desta atividade, realizada com o auxílio do *Cabri*, esta dupla demonstrou o hábito de iniciar a análise partindo da matriz identidade antes de estabelecer uma nova transformação, provavelmente influenciada pelas atividades anteriores do experimento.

A dupla 2 utilizou, como estratégia de resolução, a conversão da lei algébrica para a matriz, para em seguida descrever, no registro da língua natural, o efeito gráfico. Apesar de representar um retângulo, pelos questionamentos realizados pelo professor-pesquisador, observou-se que a dupla não utilizou este registro para resolver a situação. A resolução desta dupla está reproduzida a seguir.

FIGURA 34 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 2 – TAREFA COMP4C DA ATIVIDADE 4 – FASE II



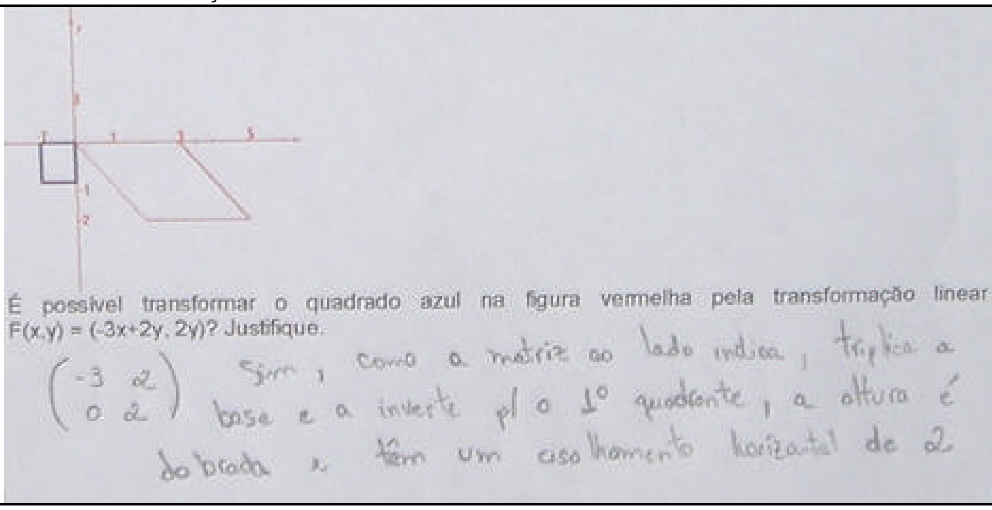
Já a dupla 3 forneceu uma descrição somente na língua natural, destacando nela as expansões nas direções dos eixos x e y. Ao ser questionada, observou que não havia registrado o cisalhamento horizontal de fator 2.

A tarefa comp4d objetivou verificar que tipo de estratégia os estudantes utilizariam para analisar se a lei algébrica fornecida poderia ser responsável pela transformação linear apresentada no registro gráfico, partindo de uma situação nova, uma vez que o objeto situava-se no terceiro quadrante. Esperava-se que as duplas analisassem a tarefa via substituição dos vértices do quadrado na lei algébrica apresentada, chegando à conclusão de que a lei não satisfazia aquela situação.

Somente a dupla 1 forneceu essa resposta corretamente, estabelecendo a conversão do algébrico para o numérico. As outras duplas fixaram-se apenas na análise das transformações geométricas e, como o objeto inicial estava no terceiro quadrante, o efeito geométrico não era equivalente ao que já conheciam.

A seguir, será apresentada a resolução da dupla 2, que, embora incorreta, denota a busca do estabelecimento das conversões do registro simbólico-algébrico para o tabular, do tabular para o gráfico, e deste para a língua natural.

FIGURA 35 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 2 – TAREFA COMP4D DA ATIVIDADE 4 – FASE II



Nota-se, nesta resolução, que a dupla apresentou claramente o domínio das transformações geométricas envolvidas, exceto quanto ao sentido de cisalhamento e quanto ao quadrante no qual está localizada a imagem. Como o objeto inicial não estava no primeiro quadrante, a imagem correta não era a esperada. A situação apresentada era uma novidade para estes estudantes. Com isso, esperava-se que as duplas efetuassem verificações utilizando a lei algébrica, fato que não ocorreu naturalmente para as duplas 2 e 3.

O professor-pesquisador pediu para a dupla 2 explicar a sua resolução, justificando se estava ou não coerente com a situação. Ela citou todas as transformações geométricas envolvidas. Com isso, o professor-pesquisador questionou se haveria uma forma de verificar se aquela resolução estava correta. Os estudantes, sem qualquer auxílio, substituíram os vértices do quadrado na lei algébrica e observaram que os resultados não coincidiam com os vértices do objeto imagem. Realizaram novamente os cálculos, pois tinham convicção de que a primeira resolução estava correta. Ao constatarem que os valores não correspondiam aos vértices da imagem, eles mostraram indignação.

Nestas condições, o professor-pesquisador solicitou explicações a dupla sobre o motivo da resposta não ser a esperada. O estudante D relatou que talvez fosse porque o quadrado inicial não estava na mesma posição que os outros trabalhados, gerando uma resposta diferente do que imaginaram. Desta forma, estes estudantes construíram a imagem daquele quadrado pela função dada, concluindo que o sentido de cisalhamento dependia da posição do objeto inicial.

Na resolução desta tarefa, a dupla 3 forneceu uma resposta apenas na língua natural de emprego comum. Nesta situação, ela afirmou que a lei algébrica F(x,y)=(-3x+2y,2y) poderia ser responsável pela transformação gráfica apresentada, pois "*houve expansão de -3 em x, um cisalhamento horizontal de 2, bem como uma expansão de 2 em y*". O professor-pesquisador realizou o mesmo tipo de intervenção com esta dupla, ou seja, solicitou uma explicação e uma verificação da resposta fornecida. Da mesma forma que a dupla 2, os estudantes substituíram os vértices do quadrado na lei algébrica e ficaram surpresos em verificar que a lei não estava correta. Ao construírem a imagem do quadrado pela lei F(x,y) = (-3x+2y, 2y), notaram que a posição do objeto no sistema x0y influencia o sentido de cisalhamento.

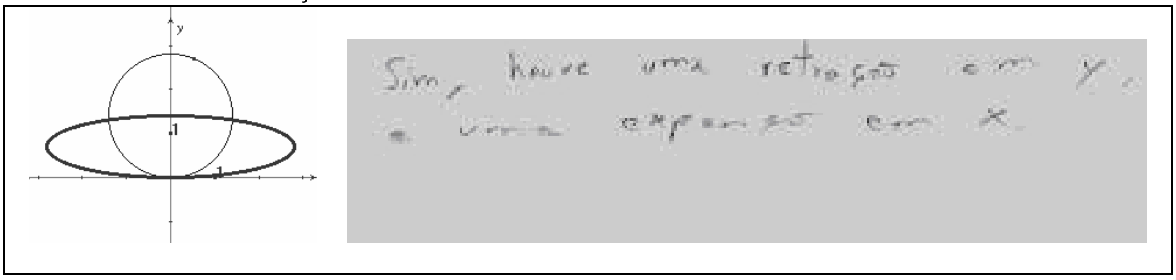
Esta tarefa representou um fator de desequilíbrio para estes estudantes, além de um alerta para a realização de verificações, o que foi constatado na fala do estudante D, reproduzida a seguir: "*Nossa, eu tinha certeza que tava (sic) certo. Agora eu sempre vou verificar do outro jeito*".

A tarefa 1 da Atividade 4 teve por objetivo analisar se o estudante conseguia generalizar o efeito geométrico responsável por cada elemento da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, destacando os fatores “a” e “d” como responsáveis pelas expansões nas direções dos eixos x e y, respectivamente, e os fatores “b” e “c” como responsáveis pelos cisalhamentos horizontal e vertical, respectivamente. Todas as duplas forneceram, sem qualquer dificuldade, a descrição esperada.

Na tarefa 2, que tinha a intenção de analisar se o estudante apresentaria a concepção de que uma transformação linear mantém o alinhamento, duas duplas relataram que não era possível transformar um quadrado em uma circunferência por meio de uma transformação linear, porém, apenas a dupla 2 revelou, na fala, a idéia de que o alinhamento deveria ser mantido ao aplicar uma transformação linear.

Na tarefa 3, a qual tinha por meta analisar se o estudante estabeleceria, após as atividades realizadas, uma concepção das imagens gráficas possíveis por meio de transformações lineares, foi observado, nos itens “a” e “b”, que os sujeitos conceberam a expansão/contração como linear, independente do objeto a que ela é aplicada, pois no item “b” o objeto inicial era uma circunferência e o final uma elipse. A seguir, apresentaremos a resolução deste item pela dupla 3.

FIGURA 36 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 3 – TAREFA 3B DA ATIVIDADE 4 – FASE II



As três duplas relataram que um triângulo não poderia ser transformado em uma circunferência via transformação linear, mas praticamente nenhuma justificou de forma explícita a relação com a preservação do alinhamento de pontos e o paralelismo de segmentos. Somente o estudante B referiu-se à manutenção do alinhamento, quando relatou que “*deveria permanecer reto*”. Com relação à transformação do item “d”, na qual o objeto inicial representado por um vetor não nulo se transformava no vetor nulo, todas as duplas escreveram que seria possível por meio de uma transformação linear, porém, somente a dupla 2 especificou, em suas descrições, que se tratava da transformação nula.

No item “e”, inicialmente todas as duplas aceitaram a transformação do ponto (0,0) em um vetor não nulo. Duas duplas justificaram a possibilidade via expansão. Observamos que, inicialmente, estas duplas se prenderam ao movimento, ou seja, não observaram que não seria possível expandir o vetor nulo em um vetor não nulo. O professor-pesquisador solicitou aos estudantes que tentassem sempre justificar suas respostas. As duplas 2 e 3 observaram imediatamente que não seria possível estabelecer aquela situação, tendo em vista que o vetor inicial era nulo. Já a dupla 1 justificou a possibilidade de tal resultado via translação, fornecendo a seguinte descrição: “*Sim, somando o vetor desejado*”. Neste momento, para esta dupla, não foi realizada nenhuma intervenção, pois uma atividade posterior retomaria a não linearidade da translação.

Estabelecendo uma análise global da Atividade 4, pudemos concluir que a mesma evidenciou o fato de as duplas demonstrarem facilidade em operar na tela do *Cabri* e em relatar as transformações gráficas ocorridas. A conversão do registro simbólico-algébrico para o numérico-tabular foi realizada naturalmente pelos estudantes e, muitas vezes, este tipo de operação foi utilizado em situações que não o requeriam, como, por exemplo, na tarefa comp4c, na qual a matriz intermediou a conversão do simbólico-algébrico para a língua natural de emprego comum.

Pôde-se concluir, pela análise das respostas dadas à tarefa 1, que o conjunto de situações desenvolvido no ambiente *Cabri*, presente nas atividades 3, 4 e Complementar, possibilitou aos estudantes a generalização do tipo de influência que cada elemento da matriz desempenha no objeto gráfico inicial. Comparando com a primeira fase do *Design*, notou-se, até o momento, uma evolução dos estudantes no que tange ao tipo de imagem gráfica possível por meio de uma transformação linear. Isto porque, na primeira fase do experimento, quatro estudantes não aceitaram a circunferência como objeto inicial e dois estudantes classificaram a projeção ortogonal como não-linear, pelo fato de “deformar” o objeto (não preservação da forma). Com a aplicação dessas atividades, pôde-se evidenciar que todos os estudantes conceberam a transformação da circunferência em elipse e também classificaram a projeção ortogonal como linear.

Notamos, durante esta atividade, que os estudantes não demonstraram o hábito de realizar uma leitura consciente do enunciado e nem apresentaram, em sua maioria, uma atitude natural de validação. Tal afirmação está baseada nas seguintes evidências. Em primeiro lugar, a maioria dos estudantes reconheceu as transformações geométricas envolvidas na tarefa comp4b. Na tarefa 1, todas as duplas demonstraram um domínio do papel desempenhado por cada elemento da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Apesar disso, ainda na tarefa comp4b, nenhuma dupla observou imediatamente que no gráfico fornecido ocorria um cisalhamento horizontal e que, na matriz dada, este fator valia 0, o que levava diretamente à conclusão de que a matriz não poderia gerar aquele tipo de transformação gráfica.

Um outro aspecto que nenhuma dupla utilizou foi o produto matricial para a obtenção de imagens de vetores, tendo em vista que este tipo de procedimento não ocorreu nas tarefas propostas, apesar da intermediação da representação tabular ter sido um fator freqüente para duas duplas. O processo usualmente utilizado por elas consistiu na determinação da lei algébrica partindo da matriz para, em seguida, substituir as coordenadas do vetor neste tipo de representação, o que provavelmente pode ser justificado pelo fato dos livros didáticos analisados privilegiarem conversões do algébrico para o numérico na representação de n-uplas. Além disso, na tarefa 4 da Atividade 2 da Fase II do *Design*, notamos que somente a dupla 3 apresentou o domínio da técnica de multiplicação de matrizes. Com isso, embora as atividades da segunda fase tenham proporcionado um maior domínio da representação tabular se comparada com os resultados obtidos na primeira fase do *Design*, neste momento os estudantes ainda não se apropriaram deste tipo de representação para o trabalho com o cálculo de imagens.

Apesar de a maioria dos estudantes não aceitar as transformações quadrado-circunferência e triângulo-circunferência como lineares, a consideração de que uma transformação linear mantém o alinhamento não ocorreu explicitamente nas produções escritas dos estudantes. Somente um sujeito fez alusão à idéia de "*permanecer reto*".

O *Cabri* foi incorporado apenas na tarefa comp4a, porém, pode-se afirmar que o conjunto das atividades desenvolvidas neste ambiente (atividades 3 e 4 e a atividade Complementar) permitiu, à maioria dos estudantes, uma habilidade maior em resolver tarefas que envolvem conversões entre os registros algébrico, tabular e gráfico. Por outro lado, pelo fato de as atividades focarem principalmente as alterações no gráfico e suas relações com a forma matricial, podemos dizer que os estudantes se limitaram a este tipo de observação, o que, em certas ocasiões, induziu a erros, como o ocorrido, por exemplo, na tarefa comp4d.

Deste modo, será observado se as próximas atividades, que englobam a exploração da atitude de verificação e a resolução de situações em que a determinação da matriz e da lei algébrica não é imediata pela análise das transformações geométricas, fornecem aos estudantes um ambiente favorável à elaboração de novos questionamentos, estratégias e conjecturas.

6.1.2.6. Descrição dos resultados da Atividade 5 – Fase II

A Atividade 5 objetivou analisar as estratégias adotadas pelo estudante para determinar a lei algébrica de uma transformação linear, partindo da representação gráfica de uma circunferência e de sua imagem. Não seria possível recorrer à estratégia utilizada até o momento, cuja análise partia do reconhecimento das transformações geométricas, culminando com a construção da matriz em relação à base canônica correspondente. A seguir, será retomado o enunciado da atividade, com vistas a facilitar a leitura e análise do texto.

QUADRO 147 – ATIVIDADE 5 – FASE II

Abra o arquivo da atividade 5 do *Cabri* (arq_ativ5). Determine a lei algébrica “F(x,y)” da transformação linear responsável pela transformação da circunferência na elipse.

As três duplas observaram que não seria possível determinar diretamente a matriz da transformação linear em relação à base canônica partindo da situação apresentada, e manifestaram-se afirmando que não sabiam como iniciar a tarefa.

A dupla 1 determinou as coordenadas de A e A’ e construiu, perceptualmente, duas retas passando pelo centro da circunferência. Em seguida, utilizando o comando do *Cabri*, determinou a equação da circunferência. Observando a discussão entre os dois estudantes, o professor-pesquisador notou que estes não tinham um plano de ação. Ao questioná-los sobre o que já haviam realizado, eles relataram que não sabiam como proceder e, por este motivo, realizaram as etapas descritas anteriormente. Até este momento, eles não haviam utilizado o caráter dinâmico do *software* para obter dois pontos e suas imagens, e perguntaram se o *Cabri* não forneceria a lei algébrica diretamente. O professor-pesquisador confirmou a não existência de um comando para tal no *software*.

A partir daí, a dupla 1 movimentou o ponto A e observou que o *software* atualizava as coordenadas do ponto e de sua imagem em tempo real ao movimento realizado. Desta forma, utilizando a estratégia de tentativa e erro, os estudantes procuraram determinar a lei algébrica da transformação. Nesta situação, eles perceberam que, ao movimentar o ponto A, só era alterado o sinal da abscissa do ponto imagem A'. O estudante B disse ao colega de dupla: "*Então tem que achar uma relação do y agora. O y vai ser menos alguma coisa, o problema é achar essa coisa. Na figura, parece que o y é sempre negativo, mas está dando muito número quebrado.*"

Eles relataram ao professor-pesquisador que provavelmente não conseguiriam determinar a lei daquela maneira, mas insistiram nas tentativas durante aproximadamente quarenta minutos.

A dupla 2 iniciou a tarefa determinando as coordenadas de A e A'. Em seguida, ela movimentou o ponto A e também utilizou o mesmo tipo de estratégia da dupla anterior, ou seja, por comparação, notou que a primeira coordenada da imagem só tinha o sinal alterado, mas não conseguia, dessa maneira, achar uma relação para a segunda coordenada da imagem. Esta dupla escolheu a análise das imagens de dois pontos: (2,5; 1,7) e (4; -7,8). O professor-pesquisador questionou sobre o motivo da escolha de exatamente dois pontos. Naquele momento, o estudante D achava que seriam necessários no mínimo dois, mas não sabia justificar o motivo. Esta dupla também questionou o professor-pesquisador se o *software* não tinha um comando pronto para a determinação desta lei.

A dupla 3 iniciou a tarefa determinando o centro da circunferência e as coordenadas de A e A'. Os estudantes acessaram, no *software*, os comandos de sistemas de coordenadas e lugar geométrico. Em seguida, determinaram a equação da circunferência. Eles também procuraram utilizar o comando de rotação do *Cabri*. O professor-pesquisador solicitou uma explicação a respeito do que já haviam feito. Os estudantes desta dupla disseram que não sabiam ao certo, que estavam tentando determinar alguns dados utilizando comandos do *software*.

Atribuímos essas dificuldades a dois fatores. Em primeiro lugar, não seria possível resolver a atividade pela estratégia de análise gráfica aplicada nas tarefas anteriores do experimento. De fato, nesta situação, para determinar a lei algébrica da transformação linear o estudante deveria estabelecer conexões com a definição e as propriedades deste tipo de aplicação. A pesquisa de SIERPINSKA (2000) já havia apontado que os estudantes usualmente não se utilizam de conhecimentos teóricos prévios para a resolução de tarefas.

Em segundo lugar, a resolução da atividade 5 requeria o estabelecimento de conversões não-congruentes partindo do registro gráfico. Além de ser esperada a dificuldade dos estudantes devido ao fato da conversão não ser estabelecida de modo direto, há o agravante desta operação partir de um registro pouco explorado na disciplina de Álgebra Linear, conforme apontado na análise dos livros didáticos presente no capítulo 3.

O professor-pesquisador avaliou que, após cerca de quarenta minutos, o processo estava bloqueado, pois nenhuma dupla realizava qualquer tipo de estratégia, sendo que os estudantes já estavam se dispersando do problema. Neste momento, para cada dupla, ele apresentou o seguinte questionamento."O que é necessário para determinar uma transformação linear no plano?"

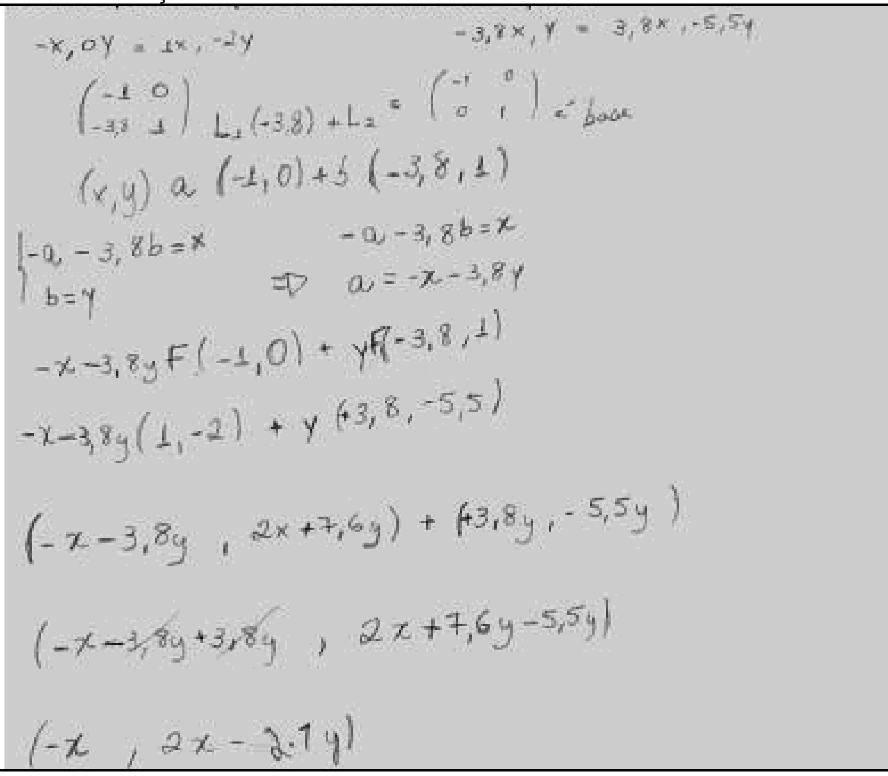
A seguir, será apresentado o diálogo estabelecido entre o professor-pesquisador (PP) e a dupla 1, composta pelos estudantes A e B.

QUADRO 148 – DIÁLOGO ENTRE PP E A DUPLA 1 – ATIVIDADE 5 – FASE II

B: "Acho que dois pontos" PP: "Por quê?" B: "Porque está no R^2." PP: "E podem ser dois quaisquer?" B: "Penso em pegar dois pontos fáceis de trabalhar." A: "Não pode ser o zero." PP: "*Por quê*?" A: "Porque com ele eu não acho nada." B: "Bom, já sabemos que são dois pontos, agora precisamos achar F(x,y)." [...] A: "Ah, será que é para aplicar aquela técnica de Álgebra Linear? Então eles têm que ser independentes, eles não podem estar numa mesma linha, senão eu não vou conseguir. Ah, daí cai naquele exercício, agora eu vi uma aplicação para ele."

A partir daí, eles mostraram domínio do processo de obtenção da transformação linear partindo das imagens de dois elementos de uma base no plano. Apesar disso, notam-se problemas no desenvolvimento da tarefa no ambiente *papel&lápis*, como falta de parênteses e inadequações na notação de função, conforme descrição apresentada a seguir.

FIGURA 37 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1- ATIVIDADE 5 – FASE II



A seguir, transcrevemos o diálogo entre o professor-pesquisador (PP) e a dupla 2, composta pelos estudantes C e D, a qual já havia determinado dois elementos e suas imagens, porém, sem saber explicar o motivo dessa escolha.

QUADRO 149 – DIÁLOGO ENTRE PP E A DUPLA 2 – ATIVIDADE 5 – FASE II

PP: "Por que vocês determinaram dois elementos e suas imagens?"
D: "Acho que tem que ser no mínimo dois pontos. (...) Não, acho que dois, porque está no R^2."
PP: "E podem ser dois pontos quaisquer?"
C: "Acho que sim."
D: "Mas, e agora?"
PP: "Procurem pensar nesta situação".
Após um período de tempo, a dupla solicitou novamente a presença do professor-pesquisador.
D: "A" é o mesmo que F(A), né?"
PP: "*Sim*".
D: "Então podemos escrever que F(A) = (-2,5; 1,5) e F(B) = (4; -7,8)."
D: "Ah, agora eu já sei."

A partir daí, a dupla 2 resolveu esta tarefa no ambiente *papel&lápis*. Os estudantes apresentaram muitos erros de cálculo durante o processo, mas procuraram avaliar a sua resolução substituindo os vetores iniciais na representação algébrica. Ao observar que a lei encontrada não fornecia a imagem correta, a dupla partiu para a análise do erro. Pudemos observar que a postura dos estudantes com relação à verificação de suas produções mudou, tendo em vista que até o momento eles esperavam do professor a confirmação da pertinência de suas respostas ou mesmo a indicação do erro.

Como a dupla 2 não evidenciou a condição de que os vetores iniciais deveriam ser independentes, o professor-pesquisador questionou se a transformação linear poderia ser determinada se partissem de dois elementos alinhados. Os estudantes achavam que sim. Neste caso, o professor-pesquisador solicitou aos estudantes a determinação da lei algébrica com dois elementos nesta situação. Repetindo o procedimento, os alunos viram que não era possível determiná-la, mas não souberam, inicialmente, justificar o motivo disso. Salientamos que, na resolução apresentada, ao contrário da dupla 1, eles não verificaram se os vetores escolhidos eram independentes, ou seja, aplicaram diretamente o processo de determinação sem evidenciar as suas condições. Após um período de tempo, o estudante D relatou que os vetores iniciais deveriam formar uma base e que, para isso, geometricamente eles deveriam ter direções diferentes.

A dupla 3 apresentou muita dificuldade nesta tarefa. Ela não soube relatar quantos pontos seriam necessários para determinar a transformação linear no plano. Inicialmente, os estudantes da dupla falaram que somente seria possível determinar as coordenadas de um ponto e de sua imagem, pois na tela só eram dados A e A'. Eles não notaram que o *Cabri* possuía um caráter dinâmico e que havia a possibilidade de variação do ponto A sobre a circunferência.

O professor-pesquisador optou por alertá-los sobre essa possibilidade, sugerindo a movimentação do ponto A. Apesar disso, o problema não residia somente neste aspecto, mas sim, no conhecimento das condições iniciais necessárias para a determinação de uma transformação linear. Apesar das inúmeras intervenções do professor-pesquisador, durante praticamente todo o tempo do encontro, esta dupla permaneceu na estratégia de tentativa e erro, só concluindo sua resolução com auxílio dos colegas.

Observando as resoluções e estratégias dos estudantes nesta atividade, pudemos notar que nenhuma dupla relacionou, imediatamente, a tarefa solicitada ao conteúdo teórico estudado em Álgebra Linear. Cabe ressaltar que, na primeira fase do *Design*, cinco estudantes estabelecerem corretamente o processo de determinação de uma transformação linear no plano, quando fornecidas as imagens de dois vetores de uma base do R^2, na representação de pares ordenados.

Inicialmente as duplas utilizaram, como estratégia de resolução, a tentativa e erro, porém, esta escolha não as levou ao sucesso. Uma dupla também procurou usar o comando de rotação presente no *Cabri*, mas concluiu que não seria possível achar a imagem fornecida, ou mesmo a lei algébrica, partindo deste tipo de estratégia e a abandonou.

Todas as duplas perguntaram ao professor-pesquisador se o *software* não teria um comando "pronto" que fornecesse a lei algébrica nestas situações, provavelmente pelo fato das atividades anteriores serem trabalhadas explorando, simultaneamente, as representações gráfica, algébrica e tabular.

Diante do risco de ruptura da interação didática, o professor-pesquisador procurou interferir questionando cada dupla sobre as condições necessárias para a determinação de uma transformação linear. Duas duplas reconheceram a necessidade das imagens de dois vetores, porém, somente uma delas destacou, imediatamente, a necessidade dos dois vetores iniciais serem independentes, fato verificado tanto na descrição escrita quanto na discussão oral. A dupla 1, após a determinação das imagens de dois elementos na tela do *Cabri*, relacionou rapidamente a situação com o processo estudado em Álgebra Linear. A dupla 2 só estabeleceu esta conexão quando registrou, no papel, as imagens de dois elementos, ou seja, quando relacionou o registro escrito àquele normalmente proposto nos enunciados dos livros de Álgebra Linear analisados.

Esta tarefa mostrou-se rica em dois pontos. Em primeiro lugar, no sentido de empregar um tipo de procedimento dominado pela maior parte dos estudantes, para explorar novos aspectos na determinação de uma transformação linear. Normalmente as condições são dadas na representação numérica, sendo que o estudante somente as utiliza para determinar a lei algébrica da transformação. Já nesta situação, o estudante precisa detectar as necessidades, partindo de uma situação proposta no registro gráfico, o que é possível graças ao caráter dinâmico do *software*. Em segundo lugar, esta atividade proporcionou uma visão aplicada do processo, o que foi evidenciado na fala do estudante A da dupla 1, conforme exposto anteriormente.

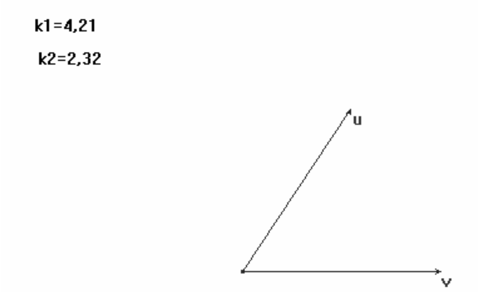
É provável que o *software* inicialmente tenha incitado a estratégia de tentativa e erro, o que, em certos aspectos, não favoreceu ao estudante reconhecer alguns elementos para resolver a tarefa proposta. Apesar disso, o uso dessa ferramenta foi ainda pertinente, uma vez que o *Cabri* trouxe a vantagem do dinamismo e a possibilidade de explorar aspectos não comumente trabalhados nos livros didáticos analisados, como, por exemplo, a transformação aplicada em objetos não poligonais.

6.1.2.7. Descrição dos resultados da Atividade 6 – Fase II

A atividade 6, apresentada a seguir, objetivou a realização de um trabalho preliminar com vetores na tela do *Cabri*, a fim de garantir os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento das duas atividades seguintes.

QUADRO 150 – ATIVIDADE 6 – FASE II

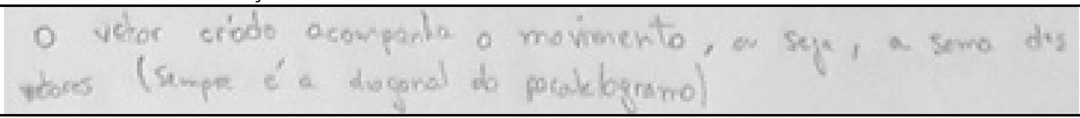
Abra o arquivo da atividade 6 do *Cabri* (arq_ativ6). Na tela são dadas as representações geométricas de dois vetores e dois valores numéricos reais “k_1” e “k_2”, os quais podem ser alterados.



Utilizando o *Cabri*, determine:
a) o vetor u+v. O que este vetor representa geometricamente?
b) o vetor w combinação linear de u e v, de tal forma que w=2u+3,21v.
c) um vetor genérico que represente a combinação linear de u e v.

No item “a” da Atividade 6, todas as duplas construíram o vetor “u+v” utilizando o comando “Soma de vetores” do *software*. Somente as duplas 1 e 2 movimentaram os vetores “u” e “v”, mas todas afirmaram que a soma desses dois vetores representava, geometricamente, a diagonal do paralelogramo de lados determinados pelos vetores “u” e “v”, conforme exemplificado a seguir.

FIGURA 38 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 2 – ITEM “A” DA ATIVIDADE 6 – FASE II


O vetor criado acompanha o movimento, ou seja, a soma dos vetores (sempre é a diagonal do paralelogramo)

Em entrevista, os estudantes relataram que já sabiam que a soma de dois vetores “u” e “v” representava, geometricamente, a diagonal do paralelogramo de lados determinados por “u” e “v”, porém, nunca tiveram contato com essa situação em um *software* de geometria dinâmica. Na determinação do vetor “$w = 2u+3{,}21v$”, solicitado no item “b” desta atividade, todas as duplas alteraram os valores de k_1 e k_2 para 2 e 3,21, respectivamente. Em seguida, utilizaram o comando “homotetia” nos vetores “u” e “v”, segundo os fatores propostos, e determinaram a soma “2u+3,21v”, utilizando o comando “Soma de vetores” do *Cabri*. Novamente, eles não apresentaram dificuldades com os comandos do *software*.

Já no item “c”, nenhuma dupla entendeu o que estava sendo solicitado e, mesmo depois de explicações do professor-pesquisador, os alunos continuavam pensativos. A questão foi reformulada pelo professor-pesquisador como: “*Haveria possibilidade de obter um vetor qualquer como combinação linear de “u” e “v”?*” O estudante D relatou que não seria possível obter um vetor genérico, pois os valores eram estipulados na tela. A partir daí, esta situação foi colocada para todas as duplas em conjunto, ou seja, o professor-pesquisador solicitou aos alunos que refletissem sobre a fala do estudante D. Neste momento, todos concordaram que não seria possível obter um vetor genérico. Em seguida, o estudante D completou: “*Ah, eu posso mexer nos valores criados na tela. Ah, agora eu entendi, então aí eu consigo qualquer combinação linear*”. Com isso, os estudantes observaram que “obter um vetor genérico” era localmente possível no *Cabri*, devido ao caráter dinâmico dos números editados, que assumiam um papel de variável.

Esta atividade teve o objetivo de proporcionar ao estudante uma reflexão sobre vetores no ambiente do *Cabri*, tendo em vista que estes conhecimentos são necessários para o desenvolvimento das Atividades 7 e 8. Foi observado, tanto no contato com os estudantes do estudo principal como na análise das produções do aluno do “piloto”, que a compreensão da generalidade relativa, possibilitada pelo dinamismo do *software Cabri*, não consiste em algo natural e imediato. É importante considerar que a experiência desses estudantes com o *Cabri* é relativamente pequena, podendo estes serem considerados como “iniciantes”. Ressalta-se que os estudantes participantes do estudo de SIERPINSKA et al. (1999) também demonstraram dificuldades neste aspecto.

Sendo assim, optamos por realizar, em conjunto com os estudantes, este trabalho prévio sobre vetores, uma vez que na aplicação “piloto”, o desconhecimento dessa situação praticamente impossibilitou a resolução da Atividade 8 deste experimento.

6.1.2.8. Descrição dos resultados da Atividade 7 – Fase II

Nesta atividade, cujo enunciado está reproduzido no quadro seguinte, tivemos o interesse de propor uma situação de exploração de uma transformação não-linear. Para isso, foram desenvolvidas atividades que envolveram conversões entre gráfico e língua de emprego especializado, gráfico e numérico e gráfico e algébrico. Ainda, tratou-se da impossibilidade de representar a translação no plano na forma $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

QUADRO 151 – ATIVIDADE 7 – FASE II

Tarefa 1. Abra o arquivo 1 da atividade 7 do *Cabri* (arq1_ativ7). Nele serão dados dois triângulos, sendo o triângulo azul a imagem do triângulo vermelho por meio da translação, segundo o vetor w dado. Esta translação foi realizada com o auxílio do comando “Translação” do *Cabri*. Utilizando o *Cabri*, verifique se a transformação é linear, justificando sua resposta. Se julgar necessário, você pode utilizar o comando “Equação e coordenadas” para determinar as coordenadas dos vetores. Tarefa 2. A lei algébrica da translação é dada por F(x,y) = (x+a, y+b), sendo (a, b) as coordenadas do vetor que fornece a direção, o sentido e a medida do deslocamento. Abra o arquivo 2 da atividade 7 (arq2_ativ7). Altere os valores de a e b e descreva o papel de cada um na representação gráfica da translação do quadrado inicial. Para que vetor (a, b) esta transformação respeitará as condições de linearidade? Por quê? Tarefa 3. Considerando $(k_1, k_2) \neq (0,0)$, é possível representar a translação na forma $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$? Justifique sua resposta. Existe uma matriz de ordem 2x2 que represente a translação?

Na primeira fase do *Design*, cinco (5) estudantes classificaram a translação como linear e, na última tarefa da Atividade 4 da Fase II, uma dupla concebeu a possibilidade de obter, por meio de uma transformação linear, um vetor não nulo partindo do nulo, bastando, para isso, efetuar a soma com um vetor. Com isso, pretendemos observar se esta atividade permitirá uma evolução com relação a esta questão, por meio da comparação com as soluções iniciais apresentadas por estes estudantes.

A primeira tarefa objetivou verificar se o estudante justificaria a não linearidade da translação. Para isso, conforme descrito na análise preliminar, ele poderia utilizar uma resolução exclusivamente geométrica ou uma estratégia baseada na análise das coordenadas dos vetores.

No primeiro caso, seriam estabelecidas conversões entre o registro geométrico (vetores geométricos) e o da língua natural especializada/simbólico. No segundo, a resolução envolveria conversões entre o registro gráfico e da língua natural especializada/simbólico além de operações entre o gráfico e o numérico.

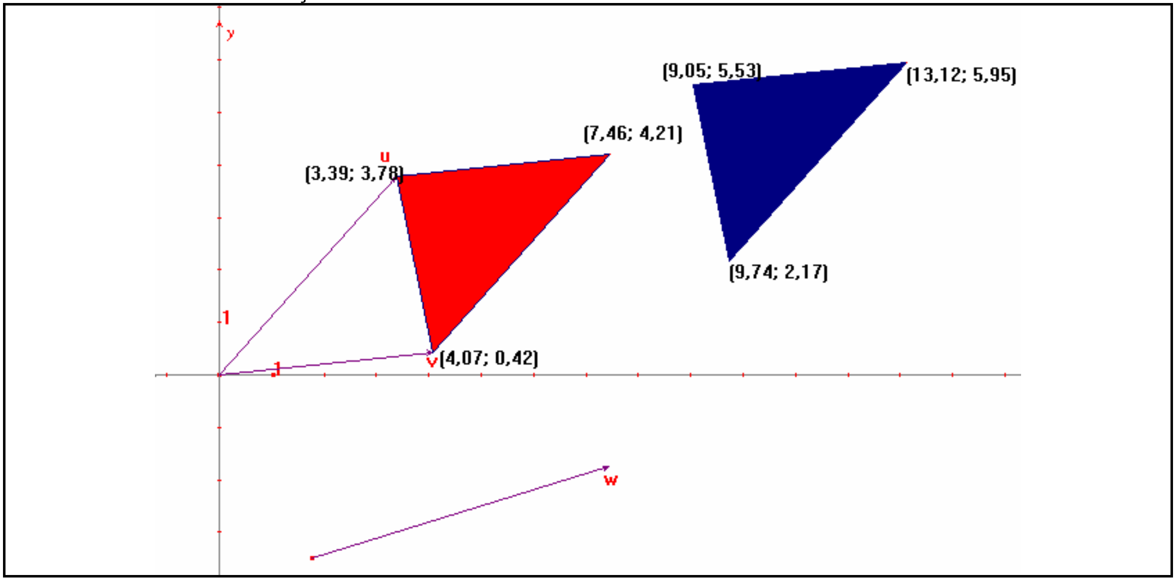
A dupla 1, composta pelos estudantes A e B, iniciou esta tarefa mencionando a idéia das condições de linearidade (cf. transcrição a seguir).

QUADRO 152 – DIÁLOGO INICIAL DA DUPLA 1 – TAREFA 1A DA ATIVIDADE 7 – FASE II

B: "Não é linear." A: "É o dobro, parece o dobro." B: "*Não*." (...) B: Quando não é linear?" A: "Quando não dá certo na soma e na multiplicação."

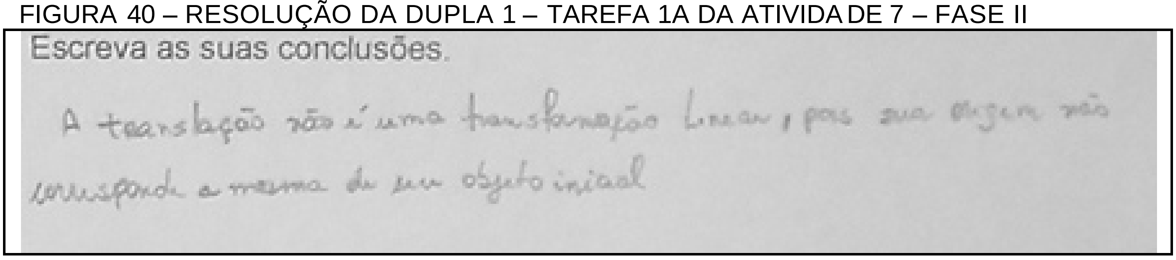
Com isso, a dupla, por meio do comando "Equações e Coordenadas" do *Cabri*, exibiu as coordenadas dos vértices dos dois triângulos da tela (cf. figura apresentada a seguir), mas não usou o comando de translação ou o comando de soma para especificar e reconhecer os vetores "u+v", "T(u)", "T(v)" e "T(u+v)".

FIGURA 39 – RESOLUÇÃO INICIAL DA DUPLA 1 – TAREFA 1A DA ATIVIDADE 7 – FASE II



A partir daí, os estudantes passaram a discutir como prosseguir. Observou-se inicialmente que a dupla não identificava, de forma explícita, os vetores T(u) ou T(v), mas mencionava que eram as “imagens” de u ou de v. Talvez essa formulação é que levou o estudante B, após um período de tempo, a considerar que foi realizada uma translação e, a partir daí, aplicar esta transformação nos vetores “u” e “v”, utilizando para isso o comando do *Cabri*. Neste momento, este estudante informou ao colega de dupla que, “*se a imagem da origem não for a origem, ela não é linear*”. Deste modo, partindo desta condição, concluíram a não linearidade da translação. Assim, eles não verificaram a condição de linearidade relativa à soma, como era esperado. A justificativa dada pela dupla está reproduzida a seguir.

FIGURA 40 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA 1A DA ATIVIDADE 7 – FASE II


Escreva as suas conclusões.

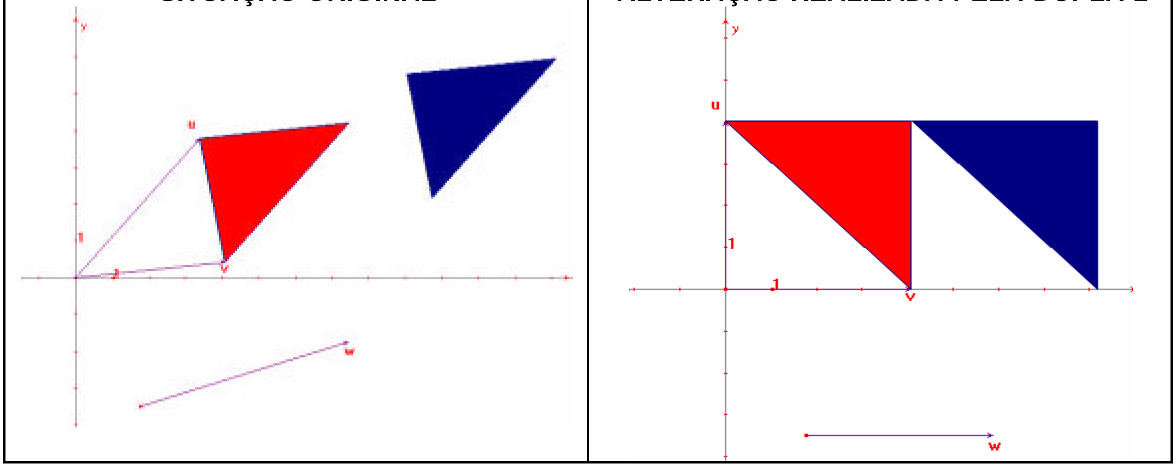
A translação não é uma transformação linear, pois sua origem não corresponde a mesma de seu objeto inicial

Cabe ressaltar que, na primeira fase do *Design*, apenas o estudante B não aceitou a translação como linear, sendo a justificativa, naquele momento, dada também pelo fato da imagem da origem não ser a origem.

A dupla 2 inicialmente escreveu a primeira condição de linearidade no ambiente *papel&lápis*. Ela alterou a posição dos vetores “u”, “v” e “w” de forma que “u” e “v” ficassem sobre os eixos. O vetor da translação “w” foi posicionado na horizontal. No diálogo com o professor, os estudantes justificaram que esta mudança foi realizada “*para enxergar melhor o que o “w” faz*” (Estudante D). Ainda, colocaram a extremidade de “T(u)” coincidente com a extremidade de “T(u+v)”. Este fato gerou dificuldades na identificação dos vetores, conforme descrito a seguir.

FIGURA 41 – RESOLUÇÃO INICIAL DA DUPLA 2 – TAREFA 1A DA ATIVIDADE 7 – FASE II

SITUAÇÃO ORIGINAL	ALTERAÇÃO REALIZADA PELA DUPLA 2



Em seguida, os estudantes da dupla determinaram as coordenadas dos vértices dos triângulos da tela, mas, da mesma forma que a dupla 1, não utilizaram, neste momento, os comandos de translação ou de soma do *software*. Eles também não identificaram de imediato os vetores “T(u)”, “T(v)” e “T(u+v)” na tela, e sim na análise da situação, conforme podemos observar na discussão reproduzida abaixo.

QUADRO 153 – DIÁLOGO ENTRE PP (PROFESSOR) E A DUPLA 2 – TAREFA 1A DA ATIVIDADE 7 – FASE II

continua

PP: “Explique o que vocês já fizeram.” D: “Mudamos os vetores para enxergar melhor o que o “w” faz e colocamos as coordenadas nos vetores. E agora, devemos comparar com “w”?” PP: Como você fará esta comparação? D: Não sei bem o que devo fazer. (...) C: “Para ser linear, “T(u+v)=T(u)+T(v)”. Então para não ser linear, não pode valer isso.” PP: “Então pensem como interpretar isso nesta situação”. (PP se afasta da dupla)

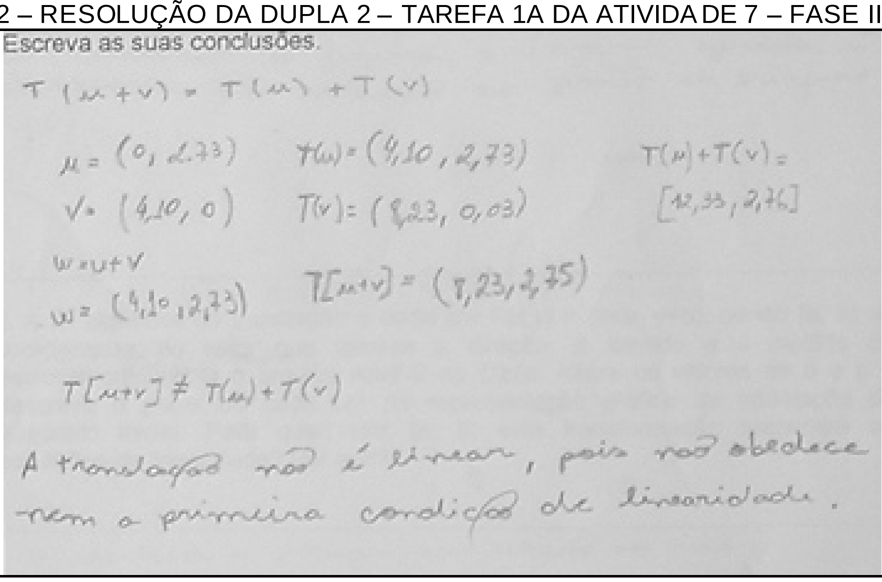
QUADRO 154 – DIÁLOGO ENTRE PP (PROFESSOR) E A DUPLA 2 – TAREFA 1A DA ATIVIDADE 7 – FASE II

conclusão

C: “Bem, a gente tem o “u” e o “v”. Mas e o resto?”
D: “Mas quem seria T(u+v)?”
(...)
D: “Ah, “T” é a translação, vou fazer a translação.”
C: “ “u+v” é a diagonal do paralelogramo.”
(...)
D: “Esse é “T(u+v)”?”
C: “Não, esse é só o “u+v”.”
(...)
D: “Já achamos “T(u+v)”. E como a gente acha a soma das transformadas?”
(...)
C: “Não sei. (...) Ah, a gente tem “T(u)” e “T(v)”. É só somar.”
D: “É verdade, agora é só somar e comparar.”

Observando a tela do computador destes estudantes, tem-se que, neste momento, eles identificaram os pontos extremidades dos vetores “T(u)”, “T(v)”, “u”, “v”, “u+v” e “T(u+v)” e determinaram suas coordenadas. A partir daí, eles observaram que a condição “T(u+v) = T(u)+T(v)” não era satisfeita para os valores escolhidos, apresentando a resolução escrita a seguir.

FIGURA 42 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 2 – TAREFA 1A DA ATIVIDADE 7 – FASE II


Escreva as suas conclusões.

$T(u+v) = T(u) + T(v)$

$u = (0, 2{,}73)$ $T(u) = (4{,}10, 2{,}73)$ $T(u)+T(v) =$

$v = (4{,}10, 0)$ $T(v) = (8{,}23, 0{,}03)$ $[12{,}33, 2{,}76]$

$w = u+v$

$w = (4{,}10, 2{,}73)$ $T[u+v] = (8{,}23, 2{,}75)$

$T[u+v] \neq T(u)+T(v)$

A translação não é linear, pois não obedece nem a primeira condição de linearidade.

Na entrevista posterior à sessão, a dupla foi questionada a respeito do vetor “w” apresentado na resolução escrita, ou seja, se ele seria o vetor “w” da translação apresentado na tela. O estudante C informou que não, que a nomeação do vetor “w” foi realizada sem observar que o vetor de translação da tela também tinha esta denominação.

A dupla 3 movimentou o vetor “w” na tela e observou que os objetos gráficos se deslocavam. O estudante F relatou ao colega que, “*para ser linear, tem que valer aquelas condições*”. Eles determinaram somente as coordenadas de “u” e “v” e solicitaram a presença do professor-pesquisador (cf. quadro que segue).

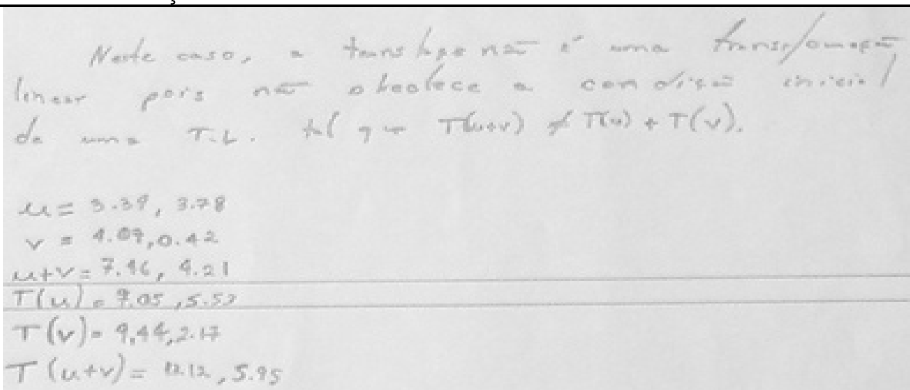
QUADRO 155 – DIÁLOGO ENTRE PP E A DUPLA 3 – TAREFA 1A DA ATIVIDADE 7 – FASE II

E: “A gente achou as coordenadas de “u” e “v”. E agora?” PP: “O que vocês precisam achar para verificar a linearidade?” E: “ “T(u+v)=T(u)+T(v)”. (...) E: “u+v” é a diagonal do paralelogramo. Mas e “T”?” PP: “Procurem pensar sobre isso.” (...) F: “T é a translação, né? Então eu vou usar a translação do Cabri.”

Neste momento, os estudantes utilizaram o comando do *software*, mas transladaram o vetor “w”, segundo a direção e sentido dados por ele mesmo. Alteraram a cor da imagem e movimentaram o vetor de translação. Quando questionados a respeito do que poderiam concluir com o que haviam feito, eles relataram que, na verdade, estavam apenas testando o comando de translação.

O professor-pesquisador solicitou que procurassem analisar a condição mencionada pelo estudante E. Neste momento, o estudante F exclama: “*É lógico, a gente tem que aplicar a translação nestes vetores*”, referindo-se aos vetores u e v. Com isso, aplicaram corretamente a translação nos vetores “u”, “v” e “u+v”, determinaram as suas coordenadas, observando que, naquele caso particular, a condição não era satisfeita. Em seguida, movimentaram o vetor “w” para analisar outros casos de translação. A descrição da dupla está apresentada na seqüência.

FIGURA 43 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 3 – TAREFA 1A DA ATIVIDADE 7 – FASE II



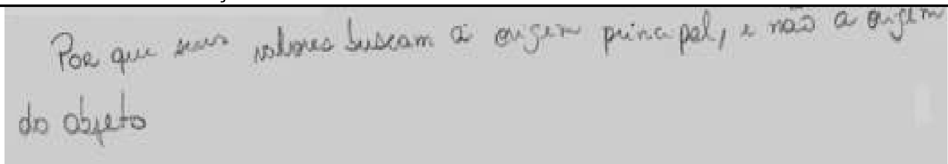
Neste caso, a translação não é uma transformação linear pois não obedece a condição inicial da uma T.L. tal que T(u+v) ≠ T(u) + T(v).

u = 3.39, 3.78
v = 4.07, 0.42
u+v = 7.46, 4.21
T(u) = 9.05, 5.52
T(v) = 9.44, 2.17
T(u+v) = 12.12, 5.95

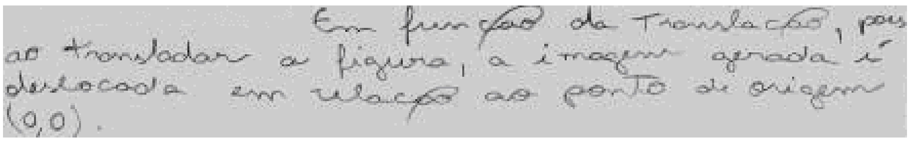
Como o professor-pesquisador observou que os estudantes hesitaram na identificação dos vetores geométricos u, v, T(u), T(v), T(u+v) e T(u)+T(v) e utilizaram imediatamente suas coordenadas, optou por incluir um novo item solicitando uma análise geométrica da situação, caso os estudantes não dispusessem da opção “Equação e coordenadas”. Na verdade, o professor-pesquisador pretendia observar se a relação $T(u)+T(v) \neq T(u+v)$ se mantinha no geométrico, ou se, para os sujeitos, o vetor “T(u)+T(v)” coincidia com a diagonal do paralelogramo de lados determinados pelos vetores T(u) e T(v).

Todas as duplas voltaram à tela do *Cabri*, analisaram as coordenadas dos vetores transladados e verbalizaram que a leitura era dada em função do sistema cartesiano x0y, identificando corretamente todos os vetores geométricos a partir da origem do sistema. A visualização inicial das coordenadas no *software* favoreceu a obtenção dessas conclusões. Como a dupla 1 não havia analisado a condição “T(u+v) = T(u) + T(v)” na tarefa anterior, a mesma sentiu necessidade de retomá-la, antes de concluir que as coordenadas dos vetores eram dadas partindo da origem. O quadro a seguir contém as descrições apresentadas pelas duplas.

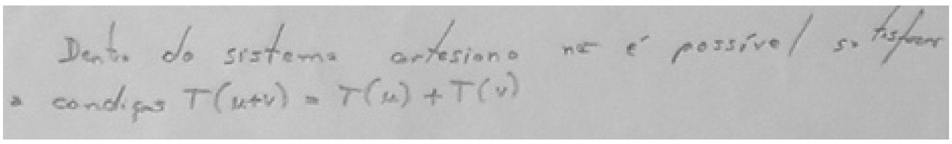
QUADRO 156 – RESOLUÇÕES DAS DUPLAS – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 7 – FASE II


Por que seus valores buscam a origem principal, e não a origem do objeto

(Dupla 1)


Em função da Translação, pois ao transladar a figura, a imagem gerada é deslocada em relação ao ponto de origem (0,0).

(Dupla 2)


Dentro do sistema cartesiano não é possível satisfazer a condição T(u+v) = T(u) + T(v)

(Dupla 3)

Nesta atividade, notamos que, apesar de os estudantes não identificarem de imediato os vetores u+v, T(u), T(v) e T(u+v), todas as duplas resolveram satisfatoriamente a situação. A dupla 1 justificou a não-linearidade pela verificação da imagem do vetor nulo. As outras duplas, após a identificação dos vetores e o estabelecimento da relação entre a situação proposta e a análise da condição de linearidade relativa à soma, também apresentaram resoluções satisfatórias. Atribuímos esse sucesso ao fato de as atividades anteriores já terem explorado a análise das condições de linearidade em um contexto geométrico e gráfico e também pelo motivo da conversão requerida na situação, após a identificação dos vetores e suas coordenadas, ser congruente.

Na segunda tarefa, todas as duplas observaram, sem dificuldades, que, em F(x,y) = (x+a, y+b), o elemento "a" é responsável pelo deslocamento na direção do eixo x e o "b", pelo deslocamento na direção do eixo y.

Além disso, todos os estudantes notaram e verbalizaram, de imediato, que somente para (a,b) = (0,0), esta transformação respeitaria as condições de linearidade. Para isso, a dupla 1 justificou a situação utilizando o registro algébrico, ou seja, mostrou que se (a,b) = (0,0), F(x,y) = (x,y) e, como F é a identidade, ela é linear. As duplas 2 e 3 justificaram a situação por meio de uma análise geométrica, ou seja, observaram que se (a,b) = (0,0), a linearidade será garantida, pois a imagem coincide com o objeto inicial.

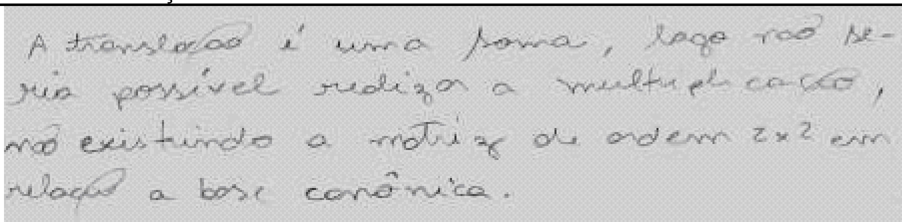
O *Cabri* foi essencial nesta atividade de observação do papel do vetor de translação, pois possibilitou visualizar o efeito das coordenadas desse vetor nas coordenadas dos demais vetores transladados, bem como a relação dinâmica entre os registros gráfico e algébrico desta transformação.

Na terceira tarefa, as duplas tiveram, inicialmente, muita dificuldade na compreensão do enunciado, o qual questionava a possibilidade de transformar a translação na forma $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, considerando o vetor de translação diferente do vetor nulo. O professor-pesquisador notou que os estudantes necessitaram de várias leituras do mesmo enunciado, antes de iniciar qualquer tentativa de resolução.

Como estratégia de resolução, os estudantes da dupla 1 representaram, primeiramente, uma transformação linear nas duas formas, ou seja, construíram a lei F(x,y) = (2x+3y, 4x-2y) e representaram-na como $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Em seguida, observaram que a lei F(x,y) = (x+a,y+b) não teria este tipo de representação. O estudante A relatou ao colega que não era possível representar a translação desta maneira porque "*só dá para multiplicar x e y e não somar um valor*".

A dupla 2 criou uma translação particular e testou se haveria a possibilidade de representá-la na forma de produto de matrizes, fornecendo a justificativa apresentada a seguir.

FIGURA 44 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 2 – TAREFA 3 DA ATIVIDADE 7 – FASE II


A translação é uma soma, logo não se-
ria possível realizar a multiplicação,
não existindo a matriz de ordem 2x2 em
relação a base canônica.

A dupla 3, após um período de tempo, solicitou a presença do professor-pesquisador e relatou que não sabia iniciar a tarefa. Aproveitando a estratégia utilizada pela dupla 1, o professor-pesquisador pediu para que os estudantes representassem, primeiramente, uma transformação linear qualquer nas formas simbólico-algébrica e simbólico-matricial, a fim de observar se eles apresentavam o domínio do tratamento entre estas duas representações. Eles determinaram, sem dificuldades, as duas representações para a transformação $\mathrm{F(x,y) = (2x+y, x-y)}$. Em seguida, o professor-pesquisador solicitou que tentassem aplicar o mesmo procedimento para uma translação.

Os estudantes construíram a translação $\mathrm{F(x,y) = (x+2, y+3)}$ e tentaram representá-la na forma simbólico-matricial. Inicialmente, eles apresentaram $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, porém, logo notaram que a transformação desta representação para a representação simbólico-algébrica resultava em $\mathrm{F(x,y) = (x+2y, x+3y)}$ e não em $\mathrm{F(x,y) = (x+2, y+3)}$. Desta maneira, concluíram que não existia uma matriz 2x2, em relação à base canônica, para representar a translação.

Nesta tarefa, foi possível observar que as atividades anteriores realizadas no *Cabri*, que procuravam relacionar as representações algébrica e matricial de uma transformação linear, atingiram o objetivo desejado, uma vez que as duplas demonstraram novamente um pleno domínio nas situações que demandavam conversões entre essas duas representações.

Realizando uma análise geral da Atividade 7, que procurou explorar a não linearidade da translação e suas implicações nas diversas representações, já era esperada a dificuldade no estabelecimento da conversão da língua especializada para a representação gráfica, presente na primeira tarefa. Pôde-se observar que o reconhecimento dos vetores “u+v”, “T(u)”, “T(v)”, “T(u+v)” na tela do *Cabri* não foi imediato aos estudantes Apesar disso, após novas reflexões e questionamentos do professor-pesquisador, todas as duplas concluíram a não linearidade da translação. Tal fato promoveu um significado para a condição T(u+v) = T(u)+T(v), uma vez que permitiu aos estudantes confrontá-la ou utilizá-la em uma situação gráfica.

O ambiente computacional forneceu as condições para o estabelecimento da conversão entre a língua natural especializada/simbólico e o gráfico, tendo em vista que permitiu identificar os vetores, possibilitando a observação da não linearidade. Além disso, todas as duplas procuraram alterar o vetor w de translação, inclusive de forma a obter, como imagem, o próprio objeto inicial. Assim, graças aos recursos do *software*, os estudantes puderam experimentar várias situações e atribuir um certo grau de generalidade às propriedades ou aspectos observados.

Apesar de “T(u+v)” representar graficamente, na tela do *Cabri*, a diagonal do paralelogramo determinado pelos vetores “T(u)” e “T(v)”, os estudantes mantiveram a conclusão de que “T(u+v) $\neq$ T(u) + T(v)”, pois interpretaram corretamente, pela observação das coordenadas dos mesmos, que estes tinham origem na origem do sistema e não a partir da origem do vetor deslocado.

Na segunda tarefa, o *Cabri* também assumiu um papel primordial, pois, alterando os valores “a” e “b”, relativos ao vetor translação (a,b), foi possível visualizar facilmente o papel que cada elemento assume na representação gráfica, além do fato da linearidade só estar garantida para (a,b) = (0,0). Na última tarefa, as duplas 1 e 2 conseguiram concluir, de forma independente e utilizando como estratégias a tentativa e erro e o estabelecimento de comparações com casos de linearidade, que não era possível escrever uma translação na forma $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, uma vez que este tipo de representação é somente válido para uma transformação linear no plano. Já a dupla 3 só resolveu a situação com auxílio do professor-pesquisador.

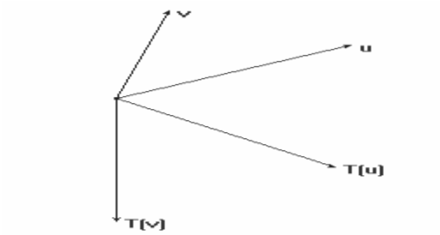
A impossibilidade da representação da translação na forma $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ é explorada no estudo de Computação Gráfica, segundo análise realizada nos livros didáticos desta área. Como artifício, os vetores são representados em coordenadas homogêneas e as transformações são dadas por matrizes 3x3, a fim de haver compatibilidade na multiplicação entre as matrizes das transformações lineares e a da translação. Concluindo, esta atividade também promoveu um ambiente favorável ao estabelecimento de validações e, na maior parte das tarefas, o *Cabri* desempenhou um papel primordial na exploração deste aspecto.

6.1.2.9. Descrição dos resultados da Atividade 8 – Fase II

A atividade 8, apresentada no quadro seguinte, teve por objetivo explorar as condições de linearidade no ambiente geométrico do *software Cabri,* envolvendo conversões da língua de emprego especializado para o registro geométrico.

QUADRO 157 – ATIVIDADE 8 – FASE II

Abra o arquivo da atividade 8 do *Cabri* (arq_ativ8). Na tela serão dados dois vetores “u” e “v” e as suas imagens “T(u)” e “T(v)” por meio de uma transformação T, conforme ilustrado a seguir.

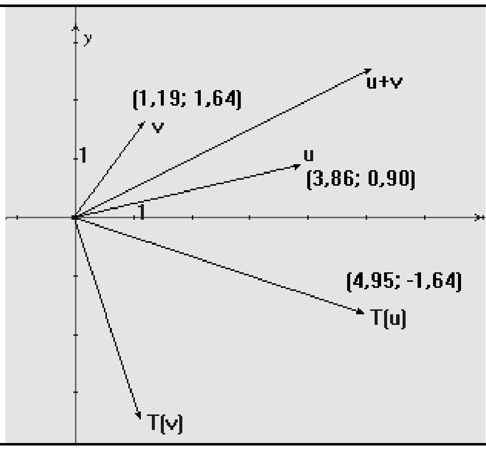


Sabendo que a transformação é linear, determine na tela do *Cabri*:
Tarefa 1. T(u+v)
Tarefa 2. T(3u)
Tarefa 3. T(2u+3v)
Tarefa 4. T(0,4u-2,1v)
Tarefa 5. T(w), onde w é um vetor arbitrário.

Com base nas pesquisas de SIERPINSKA et al. (1999) e na aplicação “piloto” deste estudo, as dificuldades ocorridas na primeira tarefa eram esperadas. No início, nenhuma dupla relacionou a situação com as condições de linearidade, pois todos os estudantes determinaram “u+v” e questionaram quem era a “T”, Para os estudantes, não seria possível determinar “T(u+v)” se não soubessem a lei da transformação linear “T”. Com isso, eles interrogaram se não faltavam dados no enunciado da tarefa. Como o professor-pesquisador afirmou que os dados estavam completos, cada dupla procurou uma estratégia diferente de resolução.

A dupla 1 criou um sistema de coordenadas, sendo que a origem dos vetores da tela coincidia com a origem desse sistema. Ela relatou ao professor-pesquisador que tentaria achar as coordenadas dos vetores para determinar a lei da transformação linear, por meio da mesma técnica aplicada na atividade da circunferência (cf. Atividade 5). Os elementos para esta resolução estão ilustrados na figura abaixo.

FIGURA 45 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 8 – FASE II



A dupla 3 inicialmente analisou a representação geométrica e tentou identificar uma transformação usual. No caso, procurou verificar se a rotação poderia representar aquela situação e, para isso, utilizou o comando existente no *software*.

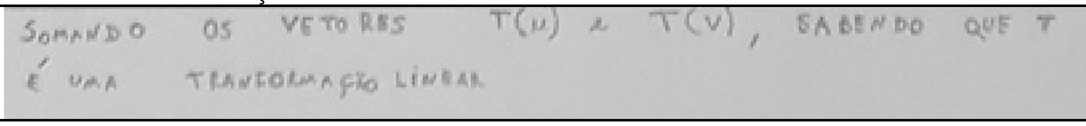
A dupla 2 determinou e nomeou os vetores “u+v” e “T(u)+T(v)”. Em seguida, relacionou o obtido com a condição “T(u+v) = T(u)+T(v)”, fornecendo a descrição apresentada a seguir.

FIGURA 46 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 2 – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 8 – FASE II

Usamos soma de vetores, somando os vetores T(u)+
T(v), pois a função é linear e por isso T(u+v)=
T(u)+T(v).

A dupla 1, a qual procurava obter a lei algébrica da transformação linear, notou que a dupla 2 finalizou a tarefa rapidamente. Apesar de as duplas estarem fisicamente distantes, notamos, pela áudio-gravação, que o estudante A comentou com o colega que deveria existir uma outra forma de resolução, pois a outra dupla já havia terminado. Eles abandonaram a estratégia adotada inicialmente e decidiram analisar novamente a situação na tela. O estudante B somou "T(u)" com "T(v)". O estudante A relatou ao colega que não estava correto, pois não haviam determinado "T(u+v)", mas sim, "T(u)+T(v)". Neste momento, o estudante B afirmou que, pelo fato da "T" ser linear, "*era a mesma coisa*", apresentando a resolução descrita a seguir.

FIGURA 47 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 8 – FASE II

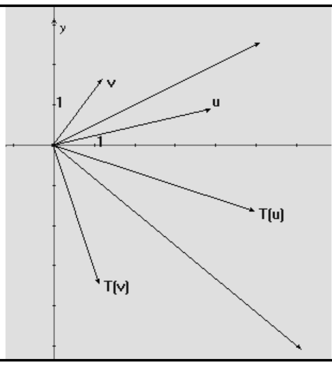

SOMANDO OS VETORES T(u) e T(v), SABENDO QUE T
É UMA TRANFORMAÇÃO LINEAR

O professor-pesquisador questionou a dupla a respeito do abandono da outra estratégia. No diálogo estabelecido, foi verificado que a intenção da mesma era determinar primeiramente a lei algébrica de T, aplicá-la no vetor "u+v" para, finalmente, construir geometricamente o vetor "T(u+v)" na tela do *Cabri*. O estudante B relatou ao professor-pesquisador que preferiram mudar de estratégia porque "*iria demorar muito, os números tinham duas casas decimais*."

A dupla 3 ficou cerca de trinta minutos presa a uma análise exclusivamente gráfica, tendo em vista que a discussão entre seus componentes consistia em verificar que tipo de transformação geométrica levava "u" em "T(u)" e "v" em "T(v)". O professor-pesquisador interferiu nesta situação, questionando a respeito do que já haviam determinado por aquela estratégia. O estudante F disse que "*parecia ser uma rotação, mas que não era a mesma de "u" para "T(u)" e de "v" para "T(v)".* O professor-pesquisador solicitou a esses estudantes que pensassem sobre as condições de uma transformação linear. Os estudantes souberam relatar as condições e disseram que já haviam pensado nisso, mas que não havia a possibilidade de determinar "T(u+v)" sem conhecer a T.

Na tela, os estudantes determinaram geometricamente os vetores "u+v" e "T(u)+T(v)", sem identificá-los, aplicando o comando de soma de vetores do *software*, conforme apresentado a seguir.

FIGURA 48 – TENTATIVA DA DUPLA 3 – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 8 – FASE II

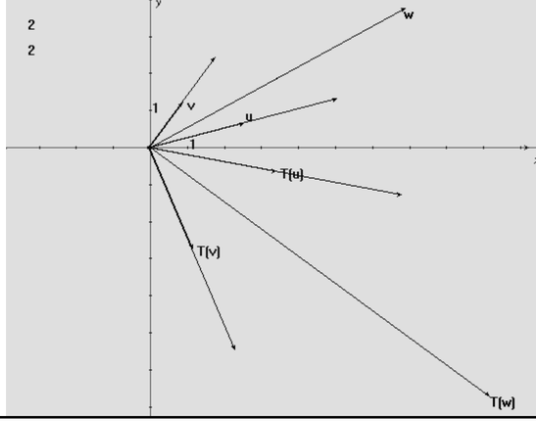


Apesar disso, somente estabeleceram a relação “T(u+v)=T(u)+T(v)” quando da discussão coletiva com as outras duplas.

Nas tarefas 2, 3 e 4, todas as duplas determinaram “T(3u)”, “T(2u+3v)” e “T(0,4u-2,1v)” sem dificuldades, relacionando a resolução com as condições de linearidade. Para isso, criaram valores numéricos na tela e utilizaram os comandos de “Homotetia” e “Soma de vetores” do *Cabri*.

Na tarefa 5, que solicitava “T(w)”, onde “w” era um vetor genérico, apenas a dupla 2 apresentou a sua resolução. Inicialmente, ela construiu os vetores “u+v” e “T(u+v)”. O estudante D coloca que: *“está limitado na soma, mas para conseguir um vetor qualquer, é só colocar fatores”*. A partir daí, criaram dois valores numéricos distintos na tela, aplicaram, via comando do *Cabri*, a homotetia de fator 2 no vetor “u” e a homotetia de fator 2 no “v”. Pelo comando de “Soma de vetores”, eles determinaram “w=2u+2v”. Em seguida, aplicaram os mesmos fatores em “T(u)” e “T(v)” e somaram estes dois vetores, obtendo “2T(u)+2T(v)”, conforme apresentado a seguir.

FIGURA 49 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 2 – TAREFA 5 DA ATIVIDADE 8 – FASE II



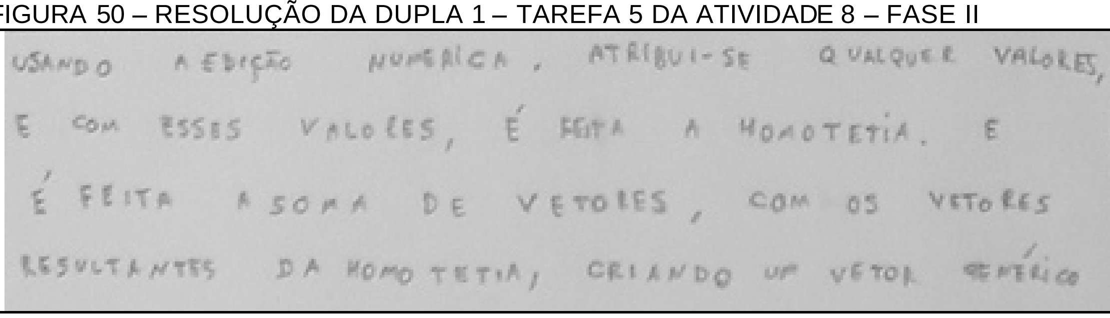
O professor-pesquisador questionou sobre a generalidade desta situação e o estudante D mostrou que poderia obter outros vetores apenas alterando os valores da tela, conforme realizado na Atividade 6. Nesta situação, ele alterou os números editados na tela para ilustrar o que havia afirmado.

A dupla 1 determinou, geometricamente na tela do *Cabri*, o vetor "T(u)+T(v)". Ao ser questionada, ela disse que aquele vetor não era "T(w)", mas que não possuía a menor idéia de como prosseguir. A dupla 3 relatou que não havia entendido o que a tarefa solicitava e questionou novamente a possibilidade de obter "T(w)" sem conhecer o vetor "w" e a transformação "T". Após cerca de quinze minutos nesta tarefa, foi notado que as duas duplas se dispersaram.

O professor-pesquisador propôs então, para essas duplas, uma comparação entre a situação gráfica e o processo de determinação da lei algébrica de uma transformação linear no plano. Para isso, foi retomada a resolução apresentada pela maior parte dos estudantes na atividade da primeira fase do *Design*, na qual foi determinada a lei algébrica da transformação linear "F", partindo do fato de que $F(1,-1) = (0,-2)$ e $F(0,3) = (3,6)$.

Apesar de a dupla 2 já ter resolvido corretamente a tarefa, ela também participou da discussão nesta fase de comparação. Todas as duplas reconheceram que, geometricamente, uma base no R^2 seria formada por dois vetores não nulos e com direções diferentes. Em seguida, foi requisitada a comparação da etapa de determinação de *a* e *b* em (x,y) = *a*(1,-1) + *b*(0,3), com o que seria realizado no *Cabri*. A dupla 1 acaba por descrever que estava sendo criado um vetor genérico, conforme segue.

FIGURA 50 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA 5 DA ATIVIDADE 8 – FASE II


USANDO A EDIÇÃO NUMÉRICA, ATRIBUI-SE QUALQUER VALORES,
E COM ESSES VALORES, É FEITA A HOMOTETIA. E
É FEITA A SOMA DE VETORES, COM OS VETORES
RESULTANTES DA HOMOTETIA, CRIANDO UM VETOR GENÉRICO

A dupla 2 também concluiu que esta etapa estava relacionada com a obtenção de um vetor genérico, fornecendo uma justificativa semelhante à da dupla 1. A dupla 3, composta pelos estudantes E e F, não conseguiu estabelecer a comparação solicitada.

QUADRO 158 – DIÁLOGO ENTRE PP E A DUPLA 3 – ATIVIDADE 8 – FASE II

PP: “Quem são “u” e “v” nesta situação?”
E: “Os vetores (1,-1) e (0,3).”
PP: “O que representa (x,y)?”
E: “Um vetor qualquer.”
F: “A gente multiplica os vetores por a e b. Mas como fazer isso no Cabri?”

Na terceira etapa, que solicitava uma interpretação no *Cabri* da passagem $F(x,y)=xF(1,-1)+\frac{y+x}{3}F(0,3)$, as duplas 1 e 2 relataram que foram realizados os mesmos passos da etapa anterior, só que, neste caso, com as “transformadas”. A partir daí, elas conseguiram estabelecer “T(w)” no *Cabri*, sendo “w” um vetor genérico.

Cabe retomar os resultados da dupla 3 na Atividade 6, a qual tratou da generalidade de um vetor no *Cabri.* Esta dupla conseguiu comparar a etapa de determinação de *a* e *b* em (x,y) = *a*(1,-1) + *b*(0,3) com a obtenção de um vetor genérico no *software,* mas, ainda assim, não conseguiu interpretar, no ambiente geométrico, a etapa $F(x,y)=xF(1,-1)+\frac{y+x}{3}F(0,3)$. Na primeira fase do *Design*, notamos que apenas um estudante desta dupla demonstrou o domínio da técnica de determinação de uma transformação linear.

Realizando uma análise global desta atividade, pudemos observar que, como primeira estratégia de resolução, a maior parte dos estudantes procurou identificar a transformação linear em jogo. A busca dessa identificação deu-se ou por comparação com transformações geométricas conhecidas ou pela tentativa de determinação da lei algébrica. Os estudantes participantes da pesquisa de SIERPINSKA et al. (1999) também questionaram sobre a possibilidade de resolver a tarefa sem conhecer a lei da transformação, apresentando os mesmos comportamentos.

Em nosso estudo, somente uma dupla estabeleceu rapidamente a relação entre a situação gráfica fornecida e a condição de linearidade T(u+v)=T(u)+T(v), ou seja, ela resolveu o problema por meio de uma conversão entre o registro da língua de emprego especializado e o geométrico, apesar de inicialmente ter questionado a respeito de quem era a “T”. Neste sentido, notamos que o desenvolvimento das atividades anteriores, em particular a Atividade 6, relacionada à determinação de um vetor genérico no *Cabri*, parece ter sido suficiente para garantir, somente a esta dupla, a base necessária para resolver a tarefa. Ainda, observou-se que houve influência também da atividade anterior, referente à translação, no sentido de relacionar o registro gráfico com o confronto das condições de linearidade.

As outras duplas necessitaram de um tempo maior para a resolução da primeira tarefa, mas todas conseguiram estabelecer a condição T(u+v)=T(u)+T(v), partindo do registro geométrico do *Cabri*. Após a resolução desta tarefa, as demais foram determinadas sem dificuldades, exceto a tarefa 5.

Na tarefa 5, com exceção da dupla 2, as demais necessitaram de um outro tipo de intervenção, ou seja, foi solicitada aos estudantes, uma comparação das etapas de determinação da lei algébrica de uma transformação linear no plano com a situação proposta no *Cabri*. Esta estratégia possibilitou à dupla 1, a resolução dessa tarefa.

Apesar de a dupla 3 não concluir a última tarefa, para a maior parte dos estudantes a Atividade 8 mostrou-se rica pelo fato de possibilitar uma visão geométrica da dependência entre um vetor e sua imagem e a relação entre o registro geométrico e a língua de emprego especializado. Além disso, na tarefa 5, a maior parte dos estudantes interpretou no ambiente de geometria dinâmica, um processo que normalmente é dominado nos registros numérico e algébrico, garantindo, deste modo, novas formas de conceber uma mesma situação, sendo este fato possível devido às especificidades do ambiente, em particular ao seu caráter dinâmico.

6.1.2.10. Descrição dos resultados da Atividade 9 – Fase II

Tendo em vista que o *Design* foi elaborado para estudantes da área de Computação, a Atividade 9, reproduzida a seguir, teve por objetivo propor uma integração entre conhecimentos de Álgebra Linear e Programação.

QUADRO 159 – ATIVIDADE 9 – FASE II

Tarefa 1. Vamos elaborar um programa de construção que faça o cisalhamento horizontal em qualquer figura.[28]

Tarefa 2. Sejam F e G duas transformações lineares do plano no plano. Neste caso, para cada x em R^2 é possível calcular primeiramente F(x), que resulta em um vetor do R^2 e depois calcular G(F(x)), que também resultará em um vetor no R^2. Desta forma, a aplicação de F, seguida de G, produz uma transformação do R^2 em R^2. Esta transformação é chamada "composta de F com G" e indicada por GoF.

a) No *papel&lápis*, determine a matriz de F, em relação à base canônica, sendo F uma expansão uniforme no plano de fator 3. Determine, também, a matriz de G em relação à base canônica, sendo G um cisalhamento horizontal no plano de fator 2. Discuta com seu colega e explique como é possível determinar a matriz da composta de F com G, em relação à base canônica, ou seja, da expansão de fator 3 seguida de um cisalhamento horizontal de fator 2. Determine essa matriz. Por fim, determine a imagem do quadrado ABCD, dados A(0,0), B(1,0), C(1,1) e D(0,1) por esta composta de F com G.

b) Elabore, no *Cabri*, um programa de construção no qual seja possível realizar a composição de duas transformações lineares no plano. Este programa deve permitir verificar a dependência entre a matriz da composta de duas transformações lineares, em relação à base canônica, e a representação gráfica de um objeto qualquer segundo esta composição.

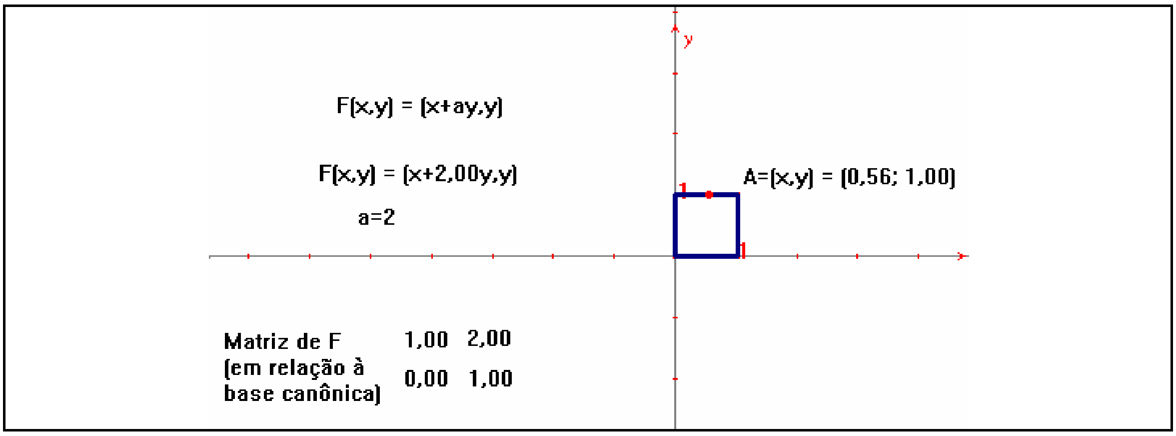
c) Verifique se a composta de um cisalhamento horizontal de fator 2, seguido de uma projeção ortogonal sobre o eixo y, aplicada em um quadrado unitário situado no primeiro quadrante, com um vértice na origem e lados sobre os eixos, é equivalente ao resultado da aplicação no sentido inverso, ou seja, da projeção ortogonal sobre o eixo y, seguida do cisalhamento horizontal de fator 2, aplicado no mesmo quadrado. Justifique o resultado obtido.

Para que os estudantes se familiarizassem com os comandos do *software* necessários para estabelecer esta integração, foi realizada, como tarefa 1, uma construção guiada de um programa de construção que estabeleceu as relações entre a matriz, em relação à base canônica, a lei algébrica e a representação gráfica de um cisalhamento horizontal de fator variável.

Com isso, de forma coletiva, foi construída, na tela do *Cabri,* uma matriz $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sendo a um fator de cisalhamento horizontal variável. Além disso, também foi descrita a sua correspondente lei algébrica F(x,y) = (x+ ay, y). Em seguida, os estudantes construíram um quadrado unitário situado no primeiro quadrante com um dos vértices na origem. Neste quadrado, foi inserido um ponto móvel A e, por meio do comando do *Cabri*, foram solicitadas as suas coordenadas, conforme apresentado a seguir.

[28] A descrição das etapas do programa de construção do cisalhamento horizontal está presente na relação de anexos (cf. Atividade 9 do Anexo V).

FIGURA 51 – ETAPAS DE CONSTRUÇÃO DO PROGRAMA DE CISALHAMENTO – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 9 – FASE II

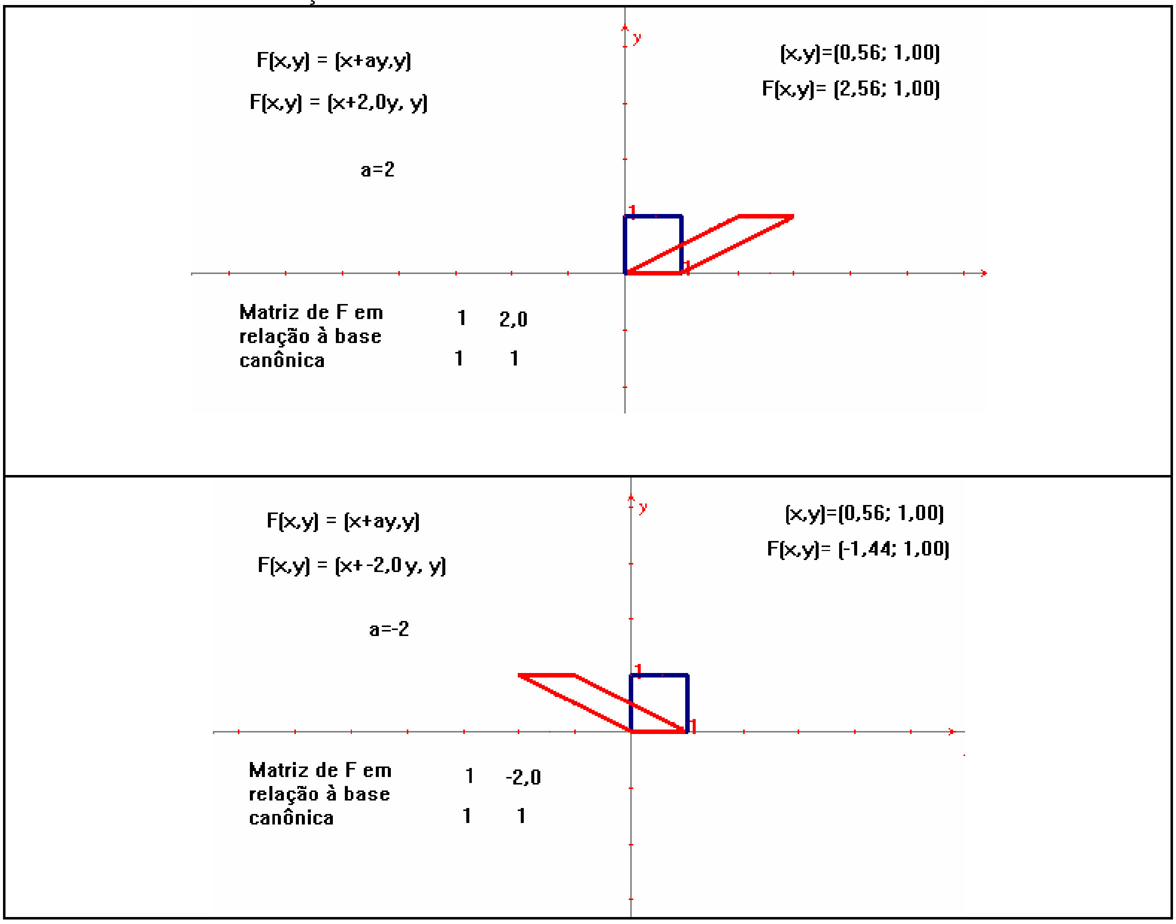


A transformação foi aplicada neste ponto via multiplicação de matrizes e, neste momento, os estudantes questionaram o professor-pesquisador a respeito do processo de determinação da imagem de um vetor. Os alunos demonstraram desconhecer a possibilidade de transformar o ponto A, dado na forma (x_1, x_2), na representação de matriz coluna $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, a fim de tornar possível a multiplicação da matriz $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. É provável que este fato possa justificar o motivo dos estudantes não terem obtido imagens de vetores por produto matricial nas atividades anteriores.

Tal esclarecimento foi realizado na lousa pelo professor-pesquisador. Ainda, o mesmo alertou sobre o fato de que, na tela do *Cabri*, o ponto seria dado sempre como matriz linha. A transformação em matriz coluna deveria ser realizada mentalmente ou no ambiente *papel&lápis*, antes de efetuar a multiplicação de $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ na calculadora do *software.* Com esta explicação, foi obtida a imagem do quadrado por meio do comando “Lugar geométrico” do *software Cabri*.

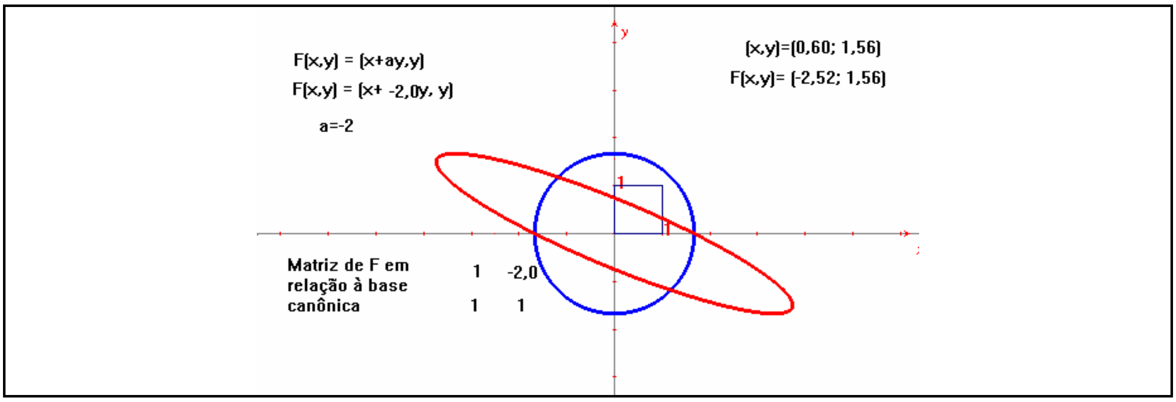
Esta construção está ilustrada a seguir.

FIGURA 52 – FINALIZAÇÃO DO PROGRAMA – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 9 – FASE II



Além disso, os alunos participantes do *Design* puderam visualizar a possibilidade de transferir a programação realizada para um outro objeto, via comando “Redefinir objeto” do *Cabri*. Por exemplo, foi criada uma circunferência como novo objeto inicial, e a programação foi transferida do quadrado para este novo objeto, conforme ilustrado a seguir.

FIGURA 53 – TRANSFERÊNCIA DE PROGRAMAÇÃO – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 9 – FASE II

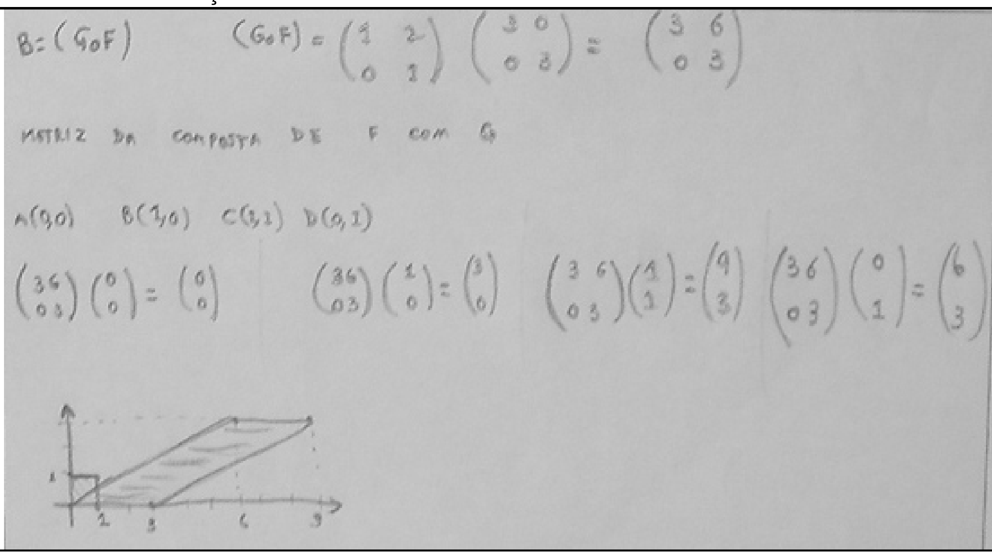


Após esta primeira etapa de familiarização, foi proposta, aos estudantes, uma outra situação. A tarefa 2 consistia na construção de um programa que possibilitasse realizar a composição de duas transformações lineares quaisquer no plano, via multiplicação de matrizes. Este programa deveria permitir a análise da dependência entre a matriz da composta de duas transformações lineares, em relação à base canônica, e a representação gráfica de um objeto qualquer segundo esta composição. A atividade foi explorada tanto no ambiente *Cabri* como no *papel&lápis*.

Inicialmente, o item "a" da tarefa 2 solicitava a determinação, no ambiente *papel&lápis*, das matrizes (em relação à base canônica) de "F" e "G", sendo "F" a expansão no plano de fator 3 e "G" o cisalhamento horizontal no plano de fator 2. Todas as duplas apresentaram, sem dificuldades, as matrizes solicitadas, o que sinaliza que as atividades anteriores possibilitaram as condições necessárias para o estabelecimento da conversão da língua natural de emprego comum para a representação numérico-tabular. Em seguida, foram requisitadas, ainda no ambiente *papel&lápis*, a matriz (em relação à base canônica) da composição (GoF) e a imagem, pela GoF, do quadrado ABCD, dados os vértices A(0,0), B(1,0), C(0,1) e D(1,1).

Todas as duplas efetuaram corretamente a multiplicação de matrizes, provavelmente por este procedimento ter sido retomado na tarefa 1 desta atividade. Os estudantes também determinaram as imagens dos vértices do quadrado via multiplicação de matrizes, conforme exemplificado a seguir.

FIGURA 54 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA 2A DA ATIVIDADE 9 – FASE II



Informamos que as demais duplas não apresentaram o registro gráfico nesta resolução, ou seja, ofereceram somente o cálculo das imagens dos vértices do quadrado por produto matricial.

No item “b” da segunda tarefa, foi solicitada aos estudantes, a elaboração do programa de composição de duas transformações lineares quaisquer no *Cabri*, apresentando a dependência entre os registros numérico-tabular e gráfico. Todas as duplas determinaram oito variáveis na forma de duas matrizes 2x2 e, em seguida, a matriz da composta via calculadora do *software*. As matrizes foram identificadas como F, G e FoG por todas as duplas. Os estudantes construíram, a partir daí, o quadrado unitário com vértice na origem.

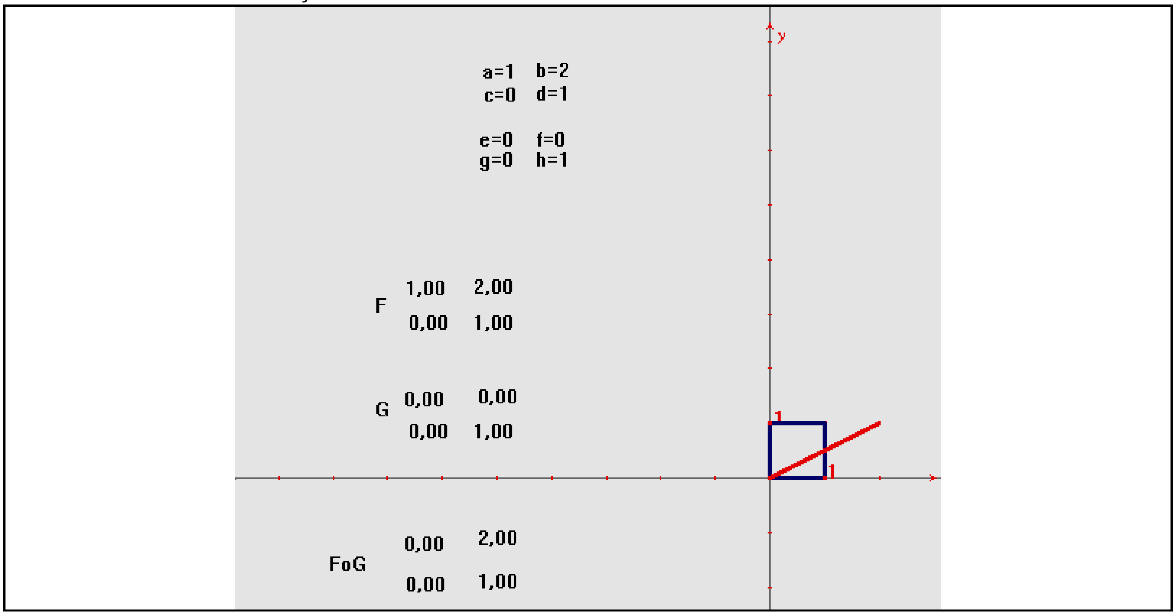
A dupla 3 não conseguiu prosseguir a partir desta fase. Já as duplas 1 e 2 criaram um ponto neste quadrado e solicitaram as suas coordenadas, mas tiveram dificuldade em determinar a imagem do mesmo na tela do *Cabri*. A dúvida residia novamente no fato de o ponto ser dado por suas coordenadas, exigindo do estudante a realização do produto de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ por um ponto que deveria ser representado em matriz coluna. Os alunos dessas duplas questionaram o professor-pesquisador se poderiam retornar à tarefa 1, para rever a forma como foi realizada esta multiplicação. Todas as duplas necessitaram consultar as etapas de programação dessa tarefa, porém, a partir daí, determinaram corretamente a dependência entre as duas representações.

Diante do ocorrido, é provável que a resolução de atividades intermediárias de programação seja necessária, para garantir aos estudantes uma maior habilidade em operar com a construção de operações neste *software*.

As duplas 1 e 2 “experimentaram” o programa construído, uma vez que alteraram os valores das matrizes, observaram o resultado gráfico da composição e criaram novos objetos, tais como circunferência e triângulo, transferindo a programação para estas outras representações gráficas. Já a dupla 3 fixou uma das matrizes como identidade e alterou apenas os valores da outra matriz. O professor-pesquisador questionou se tal ação estabeleceria um programa capaz de efetuar qualquer composição. Nesta situação, a dupla relatou que não, que para isso ela deveria alterar também os valores da outra matriz.

O item “c” desta tarefa solicitava a matriz e a imagem gráfica da composta de um cisalhamento horizontal de fator 2, seguido de uma projeção ortogonal sobre o eixo y. Os estudantes deveriam estabelecer esta resolução no programa construído no *Cabri* para, em seguida, registrar os resultados no ambiente *papel&lápis.* Somente a dupla 2 demonstrou a preocupação com a ordem de composição, realizando todas as etapas corretamente. As duplas não demonstraram dificuldade na determinação das matrizes das transformações solicitadas, porém, para as duplas 1 e 3, a matriz F foi dada como $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e a matriz G como $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e, ao efetuar FoG, a matriz resultante era a de uma projeção ortogonal no eixo y seguida do cisalhamento e não o cisalhamento seguido da projeção no eixo y, conforme solicitado no enunciado. A seguir, apresentaremos a resolução fornecida pela dupla 1.

FIGURA 55 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA 2C DA ATIVIDADE 9 – FASE II



Como as duplas achavam que o processo estava correto, o professor-pesquisador questionou se o resultado gráfico obtido era compatível com o esperado, segundo as transformações solicitadas no enunciado. As duplas reconheceram que a imagem gráfica não correspondia ao cisalhamento de fator 2 seguido de uma projeção no eixo y.

A dupla 1 achou que havia algum erro na construção de seu programa e partiu para a análise de todas as etapas elaboradas. A dupla 3 relatou que não tinha idéia porque não dava certo, pois as etapas pareciam corretas. O professor-pesquisador afirmou, para as duas duplas, que o problema não estava na construção do programa.

Por inspeção dos valores presentes na matriz na tela do computador, o estudante A da dupla 1 relatou que "o resultado parecia estar ao contrário". Nesta situação, os estudantes dessa dupla alteraram as matrizes, ou seja, a matriz de F passou a ser a da projeção sobre o eixo y e a matriz de G a do cisalhamento horizontal de fator 2.

Na tarefa seguinte, que solicitava o resultado da aplicação no sentido inverso, os estudantes desta dupla já haviam observado que F deveria ser o cisalhamento e G a projeção, para que FoG resultasse na projeção seguida do cisalhamento. Nestas condições, adaptaram os valores no *Cabri,* e apresentaram a resolução correta no ambiente *papel&lápis*.

A seguir, será descrito o diálogo estabelecido entre o estudante A da dupla 1 e o professor–pesquisador (PP), após a realização da tarefa.

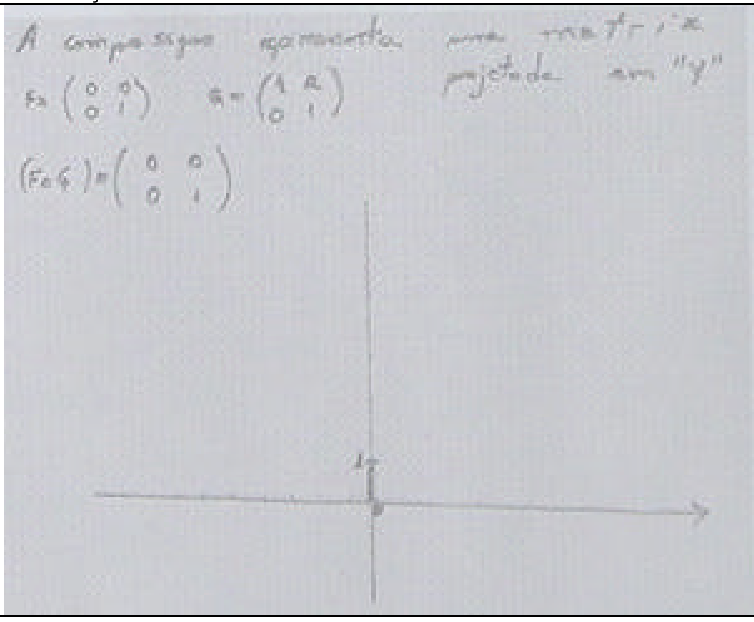
QUADRO 160 – DIÁLOGO ENTRE PP E A – ATIVIDADE 9 – FASE II

PP: "Qual foi a conclusão?" A: "A leitura é ao contrário." PP: "Por quê?" A: "Nem sempre GoF é igual a FoG." PP: "Se aplicasse GoF, qual seria a primeira transformação geométrica a ser aplicada no quadrado?" A: "*F*."

A dupla 3 também notou que, trocando as matrizes, a resposta gráfica correspondia à esperada, porém, não conseguiu justificar este fato por meio da não comutatividade da multiplicação de matrizes ou de composição de funções.

A seguir, será reproduzida a resolução apresentada pela dupla 3 para o item "c" da tarefa 2, transportada da tela do *Cabri* para o ambiente *papel&lápis*. Este item solicitava o cisalhamento de fator 2 seguido da projeção ortogonal sobre o eixo y.

FIGURA 56 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 3 – TAREFA 2C DA ATIVIDADE 9 – FASE II



Pudemos concluir que esta atividade proporcionou uma integração entre as disciplinas de Álgebra Linear e de Computação, ao aliar um trabalho que envolveu as transformações lineares em um processo de elaboração de um programa de construção no *Cabri*. Os estudantes mostraram-se motivados e revelaram domínio na determinação das matrizes envolvidas. Tal fato vem a confirmar que as atividades anteriores cumpriram o papel de desenvolver a habilidade de trabalhar com este tipo de representação. Na atividade 9 em particular, os estudantes puderam ter o contato com a possibilidade de transformar um vetor linha em vetor coluna, tornando possível a obtenção das imagens de vetores por produto matricial.

Esta atividade também permitiu, para a maioria dos estudantes, refletir sobre a não comutatividade da composição de transformações, tanto no aspecto gráfico, como no matricial. O *Cabri*, neste caso, assumiu um importante papel, tendo em vista que, ao fornecer o resultado gráfico, possibilitou aos estudantes uma avaliação de suas produções.

O *software,* pelo seu aspecto dinâmico, representou um ambiente favorável ao estabelecimento e verificação de diversos casos. Da mesma forma que nas outras atividades, notamos que os estudantes não se prenderam aos valores ou aos objetos gráficos solicitados no enunciado. Esta afirmação está baseada na análise das telas capturadas, a qual indicou que a maior parte dos estudantes construiu objetos diferentes do quadrado e testou valores distintos dos que foram requeridos.

Na seção seguinte, apresentaremos uma descrição das evoluções apresentadas por cada dupla.

6.1.3. Análise da Evolução de Cada Dupla e Relações com Aspectos Teóricos

Apresentaremos, a seguir, a análise das produções de cada dupla, estabelecendo um comparativo entre os dados coletados nas duas fases do *Design*. Como a análise anterior foi realizada com base nas atividades propostas, descreveremos, neste momento, uma avaliação das evoluções com foco nas trajetórias dos sujeitos.

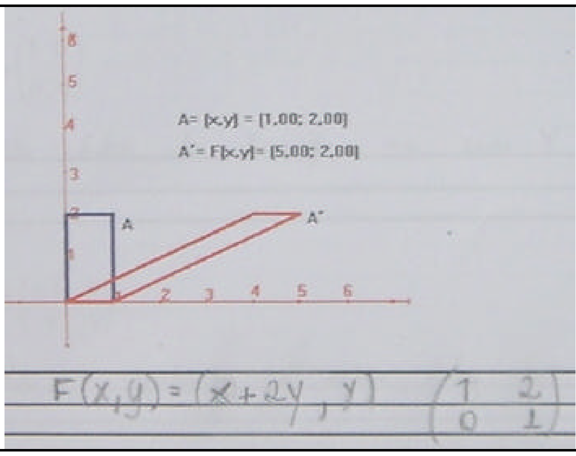
6.1.3.1. Análise da evolução da dupla 1

Com relação à **dupla 1**, comparando os resultados das duas fases do *Design*, detectamos uma evolução significativa no domínio das representações algébrica e tabular, bem como nas relações entre elas e o registro gráfico. Isto porque, na primeira fase do experimento, o estudante A representou F(x,-y) como lei algébrica da reflexão no plano x0y em relação ao eixo y e não apresentou qualquer resolução na tarefa que solicitava a matriz desta transformação em relação à base canônica. O estudante B também demonstrou dificuldades nestas representações, uma vez que, para a mesma transformação, ele apresentou a lei algébrica F(x,y)→F'(-x,y) e a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Nas tarefas iniciais da Atividade 3 da Fase II, as quais objetivavam explorar a relação entre as representações tabular, algébrica e gráfica no *Cabri*, constatamos que a dupla 1 não realizou de imediato uma análise consciente dessa relação, sendo que a tentativa e erro representou a estratégia inicial de resolução. Nestas situações, observamos que a dupla atribuiu, de forma aleatória, valores aos coeficientes da matriz presente na tela do *software*, comparando o resultado gráfico obtido com o solicitado no enunciado. Tal estratégia não foi suficiente para a realização das tarefas seguintes, propostas sem o auxílio do recurso computacional. Essa dupla foi a que apresentou maior dificuldade nas atividades que visavam avaliar o impacto que uma alteração na representação tabular ocasionaria nos registros gráfico e algébrico, demonstrando a necessidade de realizar novas situações referentes a este tipo de análise. Esse foi um dos motivos que nos levou a inserir uma atividade complementar no experimento, a qual procurou explorar as relações entre as três representações em objetos distintos do quadrado unitário.

Inicialmente, a dupla insistiu na estratégia do tipo tentativa e erro para resolver esta atividade complementar, porém, diante das dificuldades, a mesma observou a necessidade de avaliar as relações entre as representações de uma maneira mais consciente. Após a realização dessa atividade, notamos que a dupla passou a apresentar, no decorrer do experimento, um domínio satisfatório dessas representações, bem como de suas relações. Tal afirmação pode ser ilustrada pela resolução da tarefa 4g (cf. figura abaixo), na qual eles determinaram corretamente as representações algébrica e tabular, partindo da representação gráfica de uma transformação linear.

FIGURA 57 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA 4G DA ATIVIDADE COMPLEMENTAR – FASE II



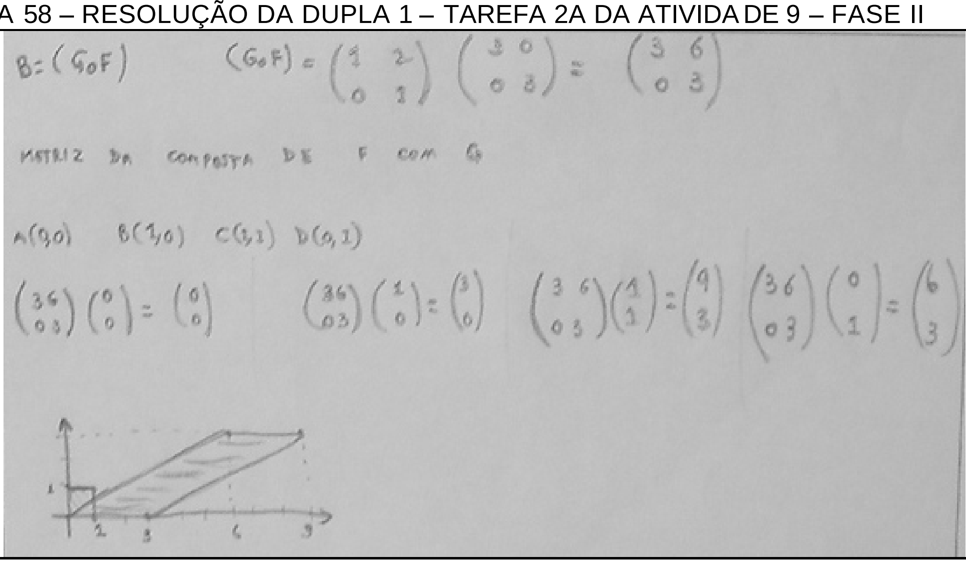
Com isso, concluímos que as dificuldades apresentadas por essa dupla na primeira fase quanto às representações algébrica e tabular, bem como em relação às conversões entre elas e o registro gráfico foram sendo minimizadas. É provável que a relação dinâmica e visual propiciada pelos recursos do *software* tenha favorecido essa evolução.

Após esta fase, notamos que a dupla utilizou a representação tabular como intermediária das conversões entre algébrico e gráfico, mesmo quando esta não era solicitada explicitamente no enunciado da tarefa. Apesar disso, verificamos que, mesmo com o domínio dessa representação, a dupla não utilizou espontaneamente o produto matricial para determinar a imagem de um vetor. A estratégia normalmente utilizada consistia na obtenção da lei algébrica partindo da matriz, para, em seguida, efetuar a substituição do vetor neste tipo de representação.

Como a estratégia era válida, o professor-pesquisador não realizou intervenções, nem fez observações a respeito. Naquele momento, conjeturou-se que, pelo fato de essa dupla não demonstrar o domínio do produto matricial na tarefa 4 da Atividade 2 da Fase II, a mesma não utilizava este tipo de representação para a obtenção de imagens de vetores. Porém, na Tarefa 1 da Atividade 9, observou-se que os estudantes da dupla não atentaram à possibilidade de representar o vetor (x,y) na forma $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, para tornar o produto $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ possível.

Somente após terem contato com esta possibilidade, no momento da construção conjunta do programa de cisalhamento horizontal no *Cabri,* os mesmos apropriaram-se dessa representação tabular também para a determinação de imagens de vetores (cf. ilustrado na seqüência).

FIGURA 58 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA 2A DA ATIVIDADE 9 – FASE II



A dupla também foi capaz de descrever o papel desempenhado por cada elemento da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nas representações algébrica e gráfica.

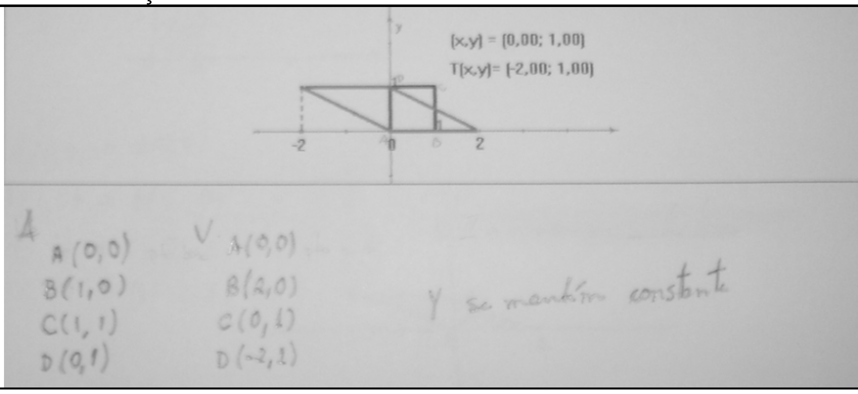
Na primeira fase do *Design*, nenhum integrante da dupla 1 apresentou as condições de linearidade da transformação linear. Ainda, na Fase I e nas primeiras atividades da Fase II, os estudantes apresentaram dificuldades em operar com a língua natural de emprego especializado. Apesar de na segunda fase tais estudantes citarem as condições de linearidade já na primeira atividade, influenciados principalmente pela disciplina de Processamento Digital de Sinais (cf. entrevista informal), notamos que, naquele momento, a dupla interpretou a definição de transformação linear com foco exclusivamente nessas condições, sem qualquer observação ou referência ao fato da aplicação ser definida em espaços vetoriais. Tal fato converge com os resultados da pesquisa de SIERPINSKA (2000), os quais revelam que os estudantes apresentam as definições matemáticas de forma incorreta ou incompleta.

Ao longo do experimento, entretanto, pudemos constatar que os sujeitos dessa dupla apresentaram uma evolução em relação à compreensão da definição de transformação linear. Conferimos tal progresso à reflexão conjunta realizada na Atividade 2 da Fase 2 sobre questões de domínio, contradomínio e imagem de uma aplicação linear, como também às Atividades 5, 7 e 8, as quais requeriam o estabelecimento de relações com propriedades da transformação linear, envolvendo principalmente conversões entre o registro geométrico/gráfico e o da língua natural de emprego especializado, além do apoio dos recursos do ambiente computacional.

Nessas atividades, apesar das dificuldades apresentadas no momento inicial de suas resoluções, constatamos que a interpretação no ambiente geométrico das condições de linearidade e do processo de determinação de uma aplicação linear, enunciados na língua natural de emprego especializado, proporcionou a esses estudantes uma maior habilidade em operar com esse registro e em aplicá-lo nas tarefas. Ilustramos esta última afirmação com a descrição da fala do estudante A na Atividade 5 da Fase II, que solicitava a determinação da transformação linear responsável pela obtenção da elipse, tendo a circunferência como objeto inicial. Após a determinação de dois vetores e de suas respectivas imagens na tela do *software*, o estudante A relatou: *"Ah, será* *que é para aplicar aquela técnica de Álgebra Linear? Então eles têm que ser independentes, eles não podem estar numa mesma linha, senão eu não vou conseguir. Ah, daí cai naquele exercício, agora eu vi uma aplicação para ele".*

Na primeira fase, notamos que os estudantes A e B foram capazes de representar graficamente uma transformação linear no plano partindo de sua lei algébrica, porém, os mesmos revelaram dificuldades na operação contrária, ou seja, na determinação da aplicação linear partindo do registro gráfico. A figura seguinte ilustra essa situação, reproduzindo a resolução do estudante B para uma tarefa que requisitava a lei algébrica da aplicação linear responsável pela transformação da figura azul na vermelha. Podemos observar que este estudante relacionou corretamente os vértices do quadrado com os do objeto imagem e observou que a altura do objeto não sofria alteração. A partir daí, o mesmo não soube prosseguir.

FIGURA 59 – RESOLUÇÃO DO ESTUDANTE B – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 3 – FASE I



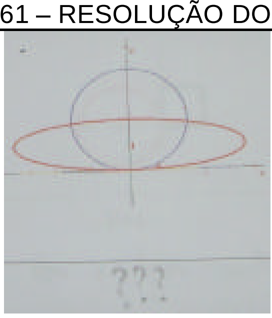
Esta dificuldade era esperada, uma vez que a resolução dessa situação envolvia conversões não congruentes e que partiam de um registro pouco explorado no ensino deste tópico. Na segunda fase, na maior parte das atividades, esses estudantes mostraram habilidade em lidar com situações envolvendo conversões nas quais o gráfico era o registro de partida. Conversões que partiram deste tipo de representação ocorreram em duas situações distintas: as imediatas, nas quais a lei algébrica da transformação poderia ser obtida imediatamente por análise das transformações geométricas ocorridas (cf. tarefas das Atividades 3, 4 e Complementar), e as não imediatas, que requisitavam a utilização da definição e de propriedades das transformações lineares (cf. Atividades 5, 6, 7 e 8).

Com relação às situações imediatas, os estudantes revelaram, a partir da atividade complementar, grande habilidade na determinação da lei e da representação tabular partindo da análise gráfica, como pode ser observado na resolução do item “g” da tarefa 4 da Atividade Complementar, reproduzida anteriormente nesta mesma seção. Da mesma forma, quanto às situações não imediatas, também pudemos observar que os estudantes melhoraram seus desempenhos.

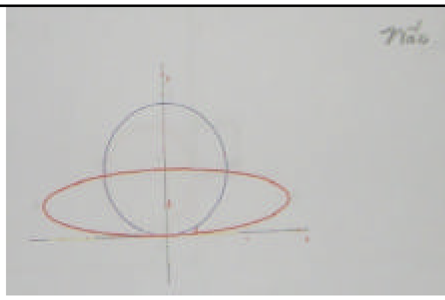
É provável que um maior domínio das representações, adquirido nas atividades anteriores, e o contato com diversas atividades que requeriam conversões não-congruentes partindo do gráfico, favoreceram tal progresso. Exemplificando, a atividade que envolvia a determinação da transformação linear responsável pela obtenção da elipse partindo da circunferência, proporcionou aos estudantes dessa dupla uma reflexão sobre as condições necessárias para determinar uma transformação linear partindo do registro gráfico. Apesar de iniciarem a resolução da atividade pela estratégia da tentativa e erro, demandando questionamentos do professor-pesquisador, pudemos concluir que os estudantes demonstraram habilidade em relacionar a situação dada com a teoria referente ao processo de determinação de uma aplicação linear. Nas atividades 7 e 8, também notamos que a dupla foi capaz de avaliar a situação geométrica apresentada, estabelecendo estratégias coerentes para a sua resolução.

Quanto à compreensão das possibilidades geométricas de uma transformação linear, observamos que, na primeira fase do experimento, os dois estudantes não aceitaram a aplicação de uma transformação linear em uma circunferência, conforme ilustrado a seguir.

QUADRO 161 – RESOLUÇÃO DOS ESTUDANTES A E B – ATIVIDADE 4C – FASE I



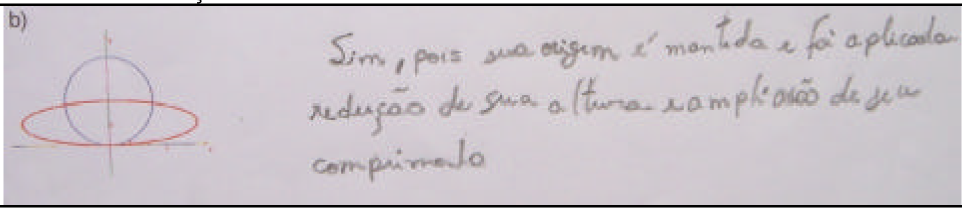
Estudante A



Estudante B

Na atividade 4 da segunda fase, foi observado que a aplicação linear na circunferência foi aceita. A despeito da notação equivocada de “altura” e “comprimento” de circunferência, notamos que os estudantes se fixaram nas transformações geométricas de expansão e contração e não no objeto sobre o qual elas são aplicadas, conforme ilustrado a seguir.

FIGURA 60 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 1 – TAREFA 3B DA ATIVIDADE 4 – FASE II



Além disso, na primeira fase do experimento, especificamente no item “f” da Atividade 4, o estudante A classificou a translação como linear, fornecendo a justificativa *“Sim, é o deslocamento da figura, então é possível por somas e multiplicações”*. O estudante B já possuía, nesta fase, a compreensão de que, se a imagem do vetor nulo não for o nulo, a aplicação não é linear.

O desenvolvimento da Atividade 7, que explorou a invalidade da condição de soma de vetores de uma transformação linear para o caso da translação, a relação entre as representações algébrica e gráfica deste tipo de transformação, bem como a inexistência de uma matriz 2x2 para representá-la, promoveu aos dois estudantes uma compreensão mais ampla das características da translação. Isto porque, nesta atividade, os mesmos detectaram corretamente o papel de (a,b) em F(x,y)=(x+a, y+b), observando que o deslocamento de uma figura, mesmo preservando sua forma, não é garantia de linearidade da transformação. Ainda nesta atividade, os mesmos estabeleceram estratégias coerentes para avaliar a impossibilidade de a translação ser representada por uma matriz 2x2.

Desta forma, concluímos que houve uma evolução na compreensão das possibilidades gráficas de uma transformação linear. Esta dupla relatou, ainda que de forma implícita, a característica da manutenção do alinhamento ao se aplicar uma transformação linear.

Atribuímos tal mudança à realização de experimentações no *software*, as quais permitiram visualizar as possibilidades geométricas da transformação linear, bem como à exploração dos registros geométrico e gráfico. Em concordância com

CHARTIER (2000), verificamos que um ensino com foco na exploração de modelos geométricos permitiu novas perspectivas de compreensão para elementos do conceito de transformação linear, anteriormente implícitos ou não observados.

Notamos, com relação a esta dupla, uma evolução na aplicação de conhecimentos teóricos de Álgebra Linear para a resolução de novas situações. Isto porque, na Atividade 8, na qual eram dados dois vetores e suas imagens geométricas por meio de uma transformação linear no *Cabri*, a mesma procurou inserir um sistema de eixos para determinar a transformação linear. A estratégia consistia em obter as imagens numéricas de dois vetores de uma base para aplicar o processo de determinação da lei algébrica de uma transformação linear. Em seguida, utilizando a lei obtida, a dupla determinaria T(u+v).

Apesar de esta estratégia ter sido abandonada pelos sujeitos, em função da dificuldade e da demora nos cálculos, notamos que eles demonstraram capacidade de interpretar o problema, estabelecendo uma estratégia condizente à situação. Ainda, na determinação da imagem do vetor genérico, presente na tarefa 5 desta atividade, os estudantes foram capazes de solucioná-la quando realizaram a interpretação do processo de determinação de uma aplicação linear no *Cabri.* Este fato denotou uma evolução na compreensão e significação desse processo, que envolvia conversões entre os registros geométrico, da língua de emprego especializado e algébrico.

Durante o desenvolvimento do *Design*, notamos que os estudantes dessa dupla não tinham o hábito de estabelecer verificações e de realizar uma leitura atenta do enunciado, fato que trouxe prejuízos na resolução de algumas tarefas. Ainda, a dupla constantemente solicitava a presença do professor-pesquisador para avaliar as suas resoluções. A partir da Atividade 5, observamos que tal dupla passou a adotar uma postura um pouco mais independente, avaliando a coerência de suas resoluções, antes de apresentá-las ao professor-pesquisador. Atribuímos tal fato a maior familiaridade com os recursos do *Cabri* e com as relações entre as representações.

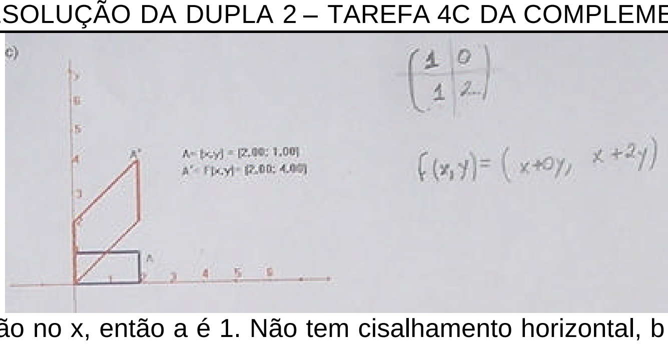
Por fim, observamos que a dupla 1 não se prendeu aos elementos solicitados no enunciado das tarefas, pois frequentemente testava fatores de cisalhamento e inseria objetos gráficos diferentes dos requisitados. Tal fato foi constatado na verificação das telas capturadas, revelando que o *Cabri* constituiu um ambiente favorável para experimentações e validações.

6.1.3.2. Análise da evolução da dupla 2

Comparando os resultados das duas fases do *Design*, notamos que a **dupla 2** apresentou progresso no domínio das representações algébrica e tabular, bem como nas relações entre elas e o registro gráfico. Na primeira fase do *Design*, o estudante C apresentou como lei algébrica da reflexão no plano x0y em relação ao eixo y a representação “*F(x,y) = (x,y) e F’(x,y) = (-x,y)*”. O estudante D descreveu a lei desta transformação de forma correta. A matriz desta transformação, em relação à base canônica foi apresentada como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pelo estudante C e como $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ pelo estudante D. É evidente que a não familiaridade ou o desconhecimento desses registros culminam em dificuldades no estabelecimento de conversões, conforme relatado por DUVAL (2003)

Na Atividade 3 da segunda fase, envolvendo as relações entre as representações tabular, algébrica e gráfica no *Cabri*, constatamos que a dupla 2 iniciou o processo pela estratégia de tentativa e erro, ou seja, atribuindo valores aleatórios na representação tabular na tela do *software*, comparando os resultados com a representação gráfica solicitada. Tal estratégia não foi suficiente para a resolução de situações da Atividade 3 propostas sem o uso do *software*. Com o desenvolvimento da Atividade Complementar, a dupla apresentou mais segurança na análise das relações entre as representações trabalhadas, conforme pode ser observado no quadro seguinte.

QUADRO 162 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 2 – TAREFA 4C DA COMPLEMENTAR – FASE II



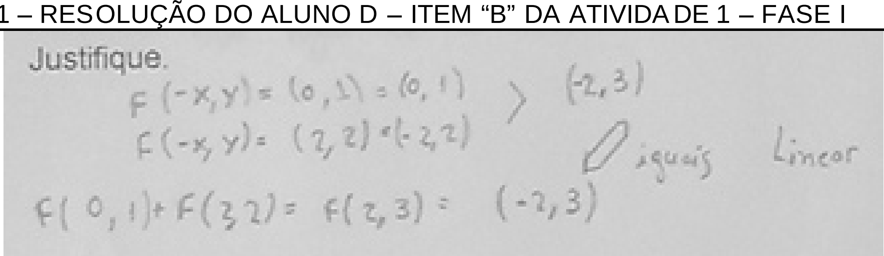
“Não houve expansão no x, então a é 1. Não tem cisalhamento horizontal, b vale 0; d vale 2. (...) Teve um cisalhamento vertical de 1, c é 1.” (Estudante D)

Da mesma forma que a dupla 1, os estudantes C e D utilizaram a representação tabular como intermediária das conversões entre algébrico e gráfico, porém, não determinaram, naquele momento, a imagem de um vetor do R^2 por produto matricial. A dúvida também residia na transformação do vetor (x,y) em $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, para tornar o produto $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ possível, o que foi constatado na primeira tarefa da Atividade 9. Assim, analogamente à dupla 1, a utilização da representação tabular para a determinação de imagens de vetores só aconteceu na última atividade.

A generalização do papel desempenhado por cada elemento da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nas representações algébrica e gráfica foi realizada de forma satisfatória pela dupla. Deste modo, diante dessas constatações, concluímos que a visualização conjunta e dinâmica das representações gráfica, tabular e algébrica de uma transformação no plano permitiu aos estudantes evoluírem tanto no domínio desses registros como em suas relações, no que se refere ao controle dos efeitos da variação de uma delas sobre as outras.

Na primeira fase do *Design*, os integrantes da dupla 2 apresentaram dificuldades nas operações com a língua de emprego especializado. Naquela fase, com relação às condições de linearidade de uma transformação linear, o estudante C sequer as evocou e o estudante D apresentou, no item "b" da Atividade 1 da Fase I, apenas a condição da soma, ainda assim analisada para casos particulares e com inadequações representacionais, conforme reproduzido a seguir.

FIGURA 61 – RESOLUÇÃO DO ALUNO D – ITEM "B" DA ATIVIDADE 1 – FASE I



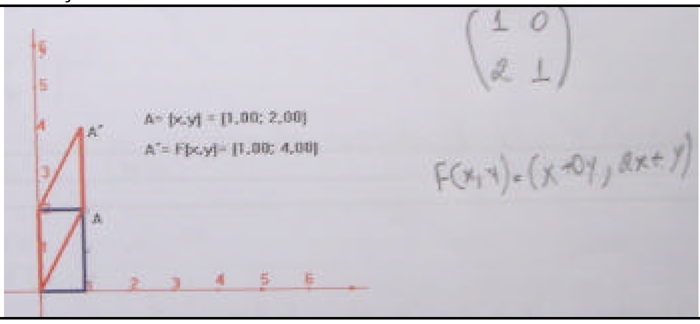
Na primeira atividade da segunda fase, também influenciados pelo vocabulário utilizado na disciplina de Processamento Digital de Sinais, tais estudantes descreveram a transformação linear citando as suas condições de linearidade. Ainda, provavelmente por terem realizado as atividades de familiarização no *Cabri*, os mesmos apresentaram uma relação das aplicações lineares com as transformações geométricas no plano x0y. Da mesma forma que a dupla 1, não foi apresentada uma compreensão global de que a transformação linear é uma aplicação definida em espaços vetoriais que preserva as condições de soma e multiplicação por escalar.

Apesar de na primeira fase um dos integrantes da dupla ter apresentado a lei algébrica corretamente, no início da segunda fase a dupla demonstrou problemas neste tipo de representação. Exemplificando, a lei algébrica da reflexão no plano x0y em relação ao eixo x foi dada como "$f(x)=(x,y)$ e $f'(x) = (x,-y)$", o que gerou dificuldades na análise da linearidade desta transformação. Nestas condições, o professor-pesquisador realizou, em conjunto com os estudantes, um levantamento do domínio, contradomínio e imagem de algumas funções. Na apresentação da lei g(x,y,z) = (x+2y, 3z), por exemplo, o estudante D verbalizou que *"ela é aplicada em três e o resultado tem dois, então é do R^3 para o R^2".* A partir daí, a dupla reformulou sua resposta, apresentando corretamente "$f(x,y) =(x,-1y)$" como lei algébrica da reflexão no plano x0y em relação ao eixo x.

Analisando o desempenho da dupla, principalmente após esta atividade e durante o desenvolvimento das Atividades 5, 7 e 8, notamos que a mesma apresentou progresso na compreensão do conceito de transformação linear e no trabalho com situações envolvendo conversões com a língua de emprego especializado. Desta forma, concluímos que o desenvolvimento de atividades centradas na relação entre a definição/ propriedades da transformação linear e a sua representação gráfica permitiram a esta dupla uma compreensão mais global do objeto matemático em questão. Como ilustração desta evolução, podemos retomar a resolução dessa dupla para a Atividade 7 (cf. resolução apresentada na página 306), que solicitava a análise da não linearidade da translação, por meio de conversões entre a língua de emprego especializado e o gráfico.

Na primeira fase, da mesma forma que a dupla 1, notamos que essa dupla demonstrou dúvidas na determinação da lei partindo do registro gráfico, referente à tarefa 1 da Atividade 3 da Fase I. O estudante C limitou-se a reconhecer que houve um cisalhamento e o estudante D apenas relacionou corretamente os vértices do quadrado com os vértices da imagem, deixando a resolução incompleta. Esse quadro foi se alterando a partir da Atividade Complementar da segunda fase do experimento. Nas situações imediatas, esta dupla passou a dominar a determinação das representações algébrica e tabular, por meio da análise das transformações geométricas presentes no registro gráfico de uma transformação linear. A seguir, reproduzimos um exemplo de resolução deste tipo de situação.

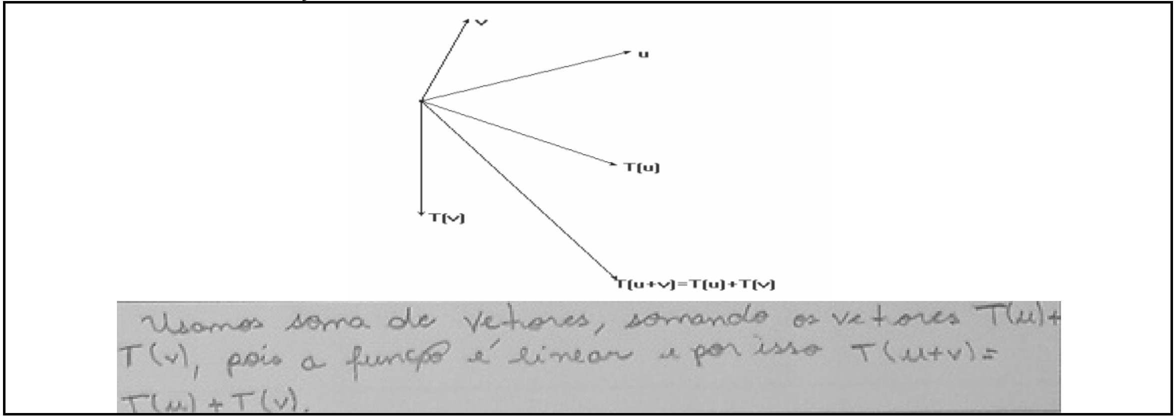
FIGURA 62 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 2 – TAREFA 4H DA COMPLEMENTAR – FASE II



Ainda, esta dupla foi a que apresentou maior facilidade em estabelecer conversões entre a língua de emprego especializado e o gráfico/geométrico, uma vez que obteve a lei algébrica da aplicação linear que transformava a circunferência na elipse (cf. Atividade 5), avaliou corretamente a não linearidade da translação (cf. Atividade 7) e demonstrou capacidade de interpretação das condições de linearidade e do processo de obtenção de uma aplicação linear no ambiente geométrico (cf. Atividade 8).

É certo que para a resolução da Atividade 5, a dupla utilizou inicialmente a estratégia de tentativa e erro, porém, ao refletir sobre as condições necessárias para a determinação de uma transformação linear no plano, foi capaz de prosseguir de forma independente na resolução da atividade proposta. A título de ilustração, apresentaremos a sua interpretação para a resolução da tarefa 1 da Atividade 8, que solicitava a determinação, na tela do *Cabri*, do vetor T(u+v), sendo T uma transformação linear.

FIGURA 63 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 2 – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 8 – FASE II



Na primeira fase, o estudante C aceitou a transformação da circunferência em elipse, porém, naquele momento não soube justificar a sua afirmação. Já o estudante D relatou que não seria possível tal transformação. Na segunda fase, o trabalho com as conversões fez a dupla centrar-se na transformação – relação entre pontos da circunferência e da elipse – e não necessariamente na natureza dos objetos. Com isso, ambos a conceberam como aplicação linear na circunferência.

Ainda, na Fase I, os dois estudantes da dupla classificaram a translação como linear, sendo que o estudante C afirmou que a garantia da linearidade estava no fato da imagem ser igual ao objeto inicial, sofrendo apenas um deslocamento.

Na atividade 7, os estudantes concluíram a não linearidade da translação quando a imagem do vetor nulo é diferente de (0,0), observando que a manutenção do formato da figura inicial não é condição para a linearidade da transformação. Ainda nesta atividade, os estudantes avaliaram corretamente o papel de “a” e “b” em F(x,y) = (x+a, y+b). Com isso, conforme já relatado na análise da dupla 1, concluímos que uma abordagem baseada em modelos geométricos/gráficos culminou em progressos na compreensão de aspectos perceptivos e visuais das transformações lineares.

A dupla 2 também mostrou desenvoltura na aplicação de conhecimentos teóricos de Álgebra Linear para a resolução de novas situações. Esta dupla foi a que demonstrou maior habilidade em resolver a Atividade 8, ou seja, em estabelecer de forma imediata a relação entre as condições de linearidade e os vetores geométricos apresentados na tela do *software*. Destacamos que tal fato não ocorreu na pesquisa de SIERPINSKA et al. (1999). Concluímos que o desenvolvimento de atividades anteriores que exploraram a definição de transformação linear e a questão da generalidade, no plano, de um dado vetor como combinação linear de outros dois não colineares no *Cabri*, contribuiu sobremaneira na resolução desta tarefa por esta dupla.

Na atividade 9, a dupla observou que a composição das matrizes pela construção na tela do *Cabri* não proporcionava o resultado desejado, fato constatado pela análise da áudio-gravação. Sem solicitar a presença do professor-pesquisador, ela verificou, de forma independente, que a ordem das matrizes foi estabelecida incorretamente e, em seguida, efetuou a correção.

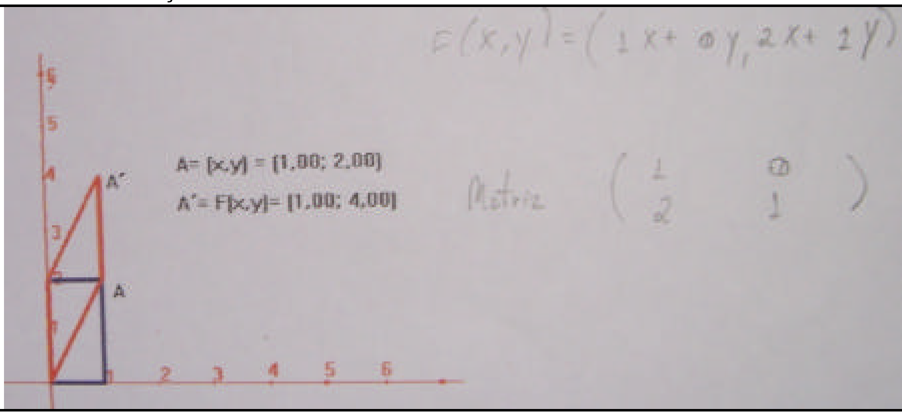
6.1.3.3. Análise da evolução da dupla 3

Na primeira fase do experimento, na análise da reflexão no plano x0y em relação ao eixo y, o estudante E apresentou corretamente a sua lei algébrica, porém, forneceu como matriz dessa transformação, em relação à base canônica, a representação $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Salientamos que, apesar da representação algébrica ter sido fornecida satisfatoriamente nesta etapa, em diversos momentos da Fase II, tal estudante apresentou dificuldades neste tipo de representação. Na mesma tarefa da primeira fase, o estudante F não apresentou qualquer descrição para a lei algébrica desta transformação e forneceu $(1,1)$ como representação da matriz dessa aplicação em relação à base canônica.

Ao contrário das duplas 1 e 2, nas tarefas da Atividade 3 da Fase II, que exploravam a relação entre as representações algébrica, gráfica e tabular no ambiente do *Cabri*, observamos que esta dupla não utilizou a estratégia de tentativa e erro, uma vez que a mesma se ateve a uma análise minuciosa dessas relações. Tal atitude favoreceu a análise de situações propostas no ambiente externo ao *software*.

Diante desta postura, esta dupla apresentou, imediatamente após a realização da Atividade 3, a formulação generalizada do impacto da alteração na forma tabular nas outras duas representações. A título de ilustração, apresentaremos a sua resolução para o item “h” da Tarefa 3 da Atividade Complementar, realizada sem o auxílio do *software*.

FIGURA 64 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 3 – TAREFA 4H DA COMPLEMENTAR – FASE II



Da mesma forma que as duplas anteriores, esta também não utilizou a representação tabular para calcular imagens de vetores por produto matricial, apesar de ter efetuado corretamente o produto $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ (cf. Tarefa 4 da Atividade 2 da Fase II do *Design*). A dúvida apresentada pelos estudantes E e F era a mesma dos outros sujeitos do experimento, e esta somente foi sanada ao final do experimento (Atividade 9).

A dupla 3 também foi capaz de descrever corretamente o papel desempenhado por cada elemento da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nas representações algébrica e gráfica.

Na primeira fase do *Design*, as condições de linearidade de uma transformação linear não foram descritas pelos sujeitos da dupla 3. Na primeira atividade da Fase II, ao contrário das demais duplas, esta não apresentou o detalhamento das condições de linearidade. Na análise da áudio-gravação, notamos que, naquele momento, os estudantes alegavam não se recordarem de tais condições.

Na Fase I, o estudante F não apresentou resolução para a tarefa 1 da Atividade 2. Em contrapartida, o mesmo mostrou dominar o processo de determinação de uma aplicação linear, uma vez que apresentou, embora com inadequações representacionais, a lei algébrica de uma transformação linear partindo das imagens de dois vetores de uma base. Já o estudante E não apresentou uma resolução satisfatória para estas duas tarefas. Notamos, então, que na primeira fase, ambos demonstraram dificuldades na compreensão de enunciados formulados na língua natural de emprego especializado.

Na Fase II, estas dificuldades persistiram, em particular nas situações que solicitavam o estabelecimento de interpretações ou conversões envolvendo a língua de emprego especializado, o que demandou várias intervenções do professor-pesquisador. Freqüentemente tais estudantes mostravam-se presos a uma análise exclusivamente geométrica, limitada ao nível espaço-gráfico, sem estabelecer conexões com aspectos conceituais das transformações lineares.

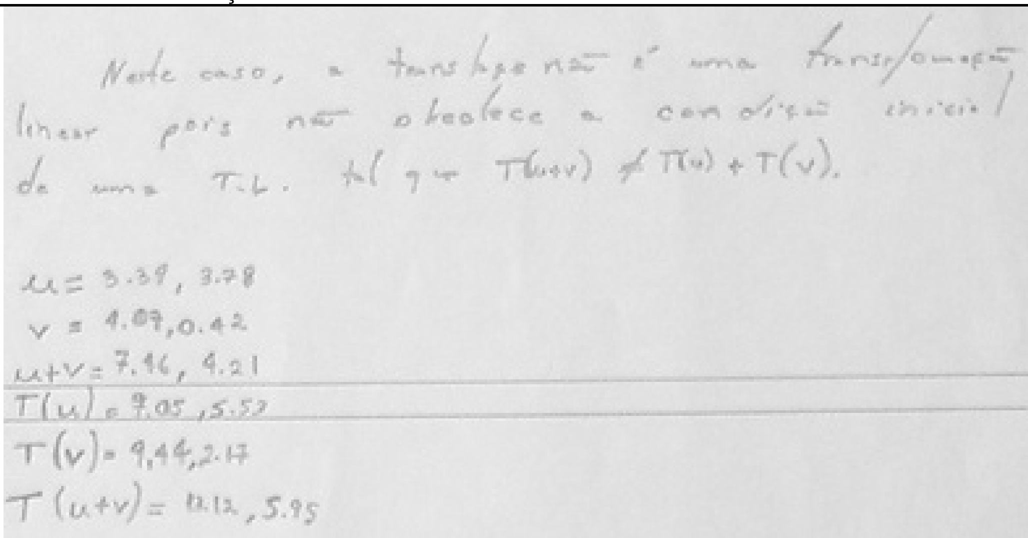
Para resolver a Atividade 8, por exemplo, na qual eram fornecidos, no *Cabri*, dois vetores geométricos e suas imagens por uma transformação linear, os estudantes persistiram na busca de uma transformação geométrica conhecida, mantendo-se a essa procura. O mesmo ocorreu na Atividade 5, relativa à circunferência, na qual os estudantes mantiveram a estratégia por tentativa e erro até o final.

Apenas na Atividade 7, relativa à translação, os estudantes analisaram corretamente no ambiente computacional a não linearidade deste tipo de transformação, ainda que a estratégia da tentativa e erro tenha sido inicialmente adotada.

Ressaltamos que até a etapa de identificação dos vetores T(u), T(v) e T(u+v), os estudantes necessitaram de muito auxílio para o desenvolvimento da atividade. Após esta determinação, eles não apresentaram dificuldade em discutir a não linearidade da translação. Para essa segunda etapa, é provável que o trabalho anterior com a definição de transformação linear tenha favorecido tal dupla nesta atividade em particular. Além disso, após a identificação desses vetores, a conversão requerida para a análise da linearidade era congruente.

A seguir, reproduzimos a resolução desta dupla no ambiente *papel&lápis* para a primeira tarefa desta atividade.

FIGURA 65 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 3 – TAREFA 1 DA ATIVIDADE 7 – FASE II


Neste caso, a transformação não é uma transformação linear pois não obedece a condição inicial de uma T.L. tal que $T(u+v) \neq T(u) + T(v)$.

$u = 3.39, 3.78$
$v = 4.07, 0.42$
$u+v = 7.46, 4.21$
$T(u) = 9.05, 5.52$
$T(v) = 9.44, 2.17$
$T(u+v) = 12.12, 5.95$

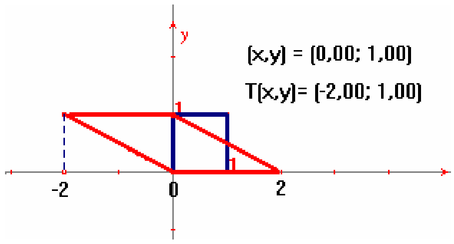
Esta dupla demonstrou, em vários momentos da aplicação do experimento, o hábito de apresentar resoluções imediatas no registro da língua de emprego comum, sem o estabelecimento de verificações e de leituras atentas do enunciado, com exceção das resoluções referentes à Atividade 3 da Fase II. Por exemplo, na tarefa comp4b da Atividade 4, era solicitada a verificação da pertinência da matriz com a representação gráfica de uma transformação linear. Os estudantes reconheceram e redigiram corretamente todas as transformações ocorridas, mas não relataram se a matriz poderia representar a transformação dada na sua forma gráfica.

Ao ser questionada pelo professor-pesquisador, a dupla relatou que não havia observado que o enunciado solicitava esta verificação. Com exceção da Atividade 3, este tipo de atitude ocorreu em diversos momentos do experimento. Os estudantes da dupla, mesmo conscientes de que muitas resoluções poderiam ser prejudicadas devido a esse tipo de procedimento, persistiram até o final da aplicação com essa atitude.

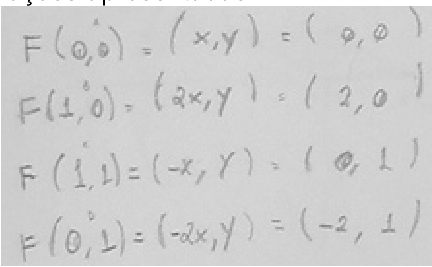
As mesmas dificuldades na determinação da lei algébrica a partir do gráfico foram evidenciadas, conforme ilustrado no quadro abaixo. Observou-se, em diversos momentos, que essa dupla ateve-se mais a elementos de forma do que de conteúdo.

QUADRO 163 – RESOLUÇÃO DOS ESTUDANTES E/F -TAREFA 1 DA ATIVIDADE 3 – FASE I

Situação:

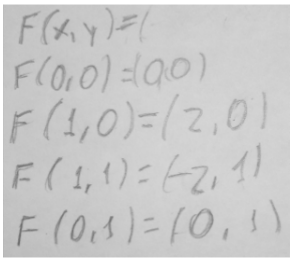


Resoluções apresentadas:



$F(0,0) = (x,y) = (0,0)$
$F(1,0) = (2x,y) = (2,0)$
$F(1,1) = (-x,y) = (0,1)$
$F(0,1) = (-2x,y) = (-2,1)$

(Estudante E)

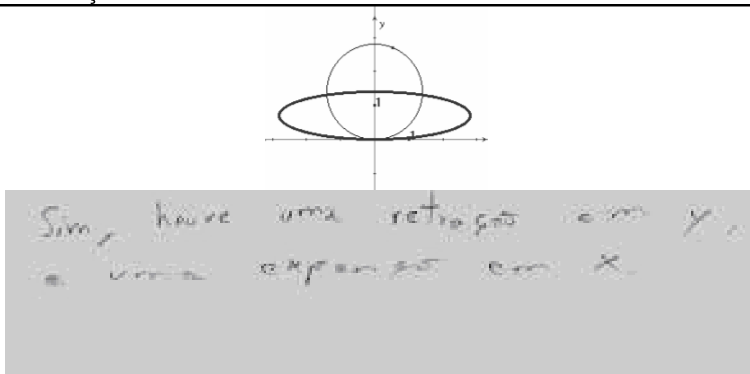


$F(x,y) = ($
$F(0,0) = (0,0)$
$F(1,0) = (2,0)$
$F(1,1) = (-2,1)$
$F(0,1) = (0,1)$

(Estudante F)

Quanto à compreensão das possibilidades geométricas de uma transformação linear, verificamos que, na primeira fase, o estudante E não aceitou a aplicação de uma transformação linear em uma circunferência. Já o Estudante F afirmou tal possibilidade, mas não apresentou qualquer justificativa. Na segunda fase, observamos que a dupla concebeu e justificou corretamente esta situação, conforme reproduzido a seguir.

FIGURA 66 – RESOLUÇÃO DA DUPLA 3 – TAREFA 3B DA ATIVIDADE 4 – FASE II



Sim, houve uma retração em y e uma expansão em x.

Concluindo, podemos afirmar que esta dupla apresentou evoluções principalmente no domínio das representações gráfica, algébrica e tabular, nas suas relações e nas possibilidades gráficas de uma transformação linear. Também notamos progressos na compreensão da definição de transformação linear, uma vez que ela soube avaliar a não linearidade da translação, quando identificadas as coordenadas dos vetores em jogo. Apesar disso, entendemos que essa dupla não apresentou o mesmo desempenho das outras, necessitando, talvez, de um trabalho mais efetivo sobre vetores e outras noções de Álgebra Linear, além do desenvolvimento do experimento em um tempo menos restrito

Com base nos resultados obtidos por nossa pesquisa, apresentaremos, no próximo capítulo, a conclusão deste estudo. Para que o leitor tenha uma visão geral de nosso trabalho, optamos por realizar uma breve descrição de todas as etapas, acompanhada da síntese dos principais resultados. Procuramos, também, estabelecer as relações entre os resultados encontrados e os pressupostos teóricos de nosso trabalho. Ainda, diante das evidências obtidas, serão destacadas perspectivas para novas investigações.

7. CONCLUSÃO DO ESTUDO

7.1 SÍNTESE DAS ETAPAS DE PESQUISA

Com o objetivo de fornecer uma visão da totalidade de nosso estudo, retomaremos e apresentaremos, de forma sucinta, as etapas que o compuseram. Motivadas por nossa própria experiência no ensino superior, o ponto de partida deste trabalho consistiu na leitura e análise de diversas pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Álgebra Linear. Particularmente na obra de DORIER (1998), tivemos um primeiro contato com o que poderíamos caracterizar de síntese dos estudos desta área provenientes de diversos países. Tais pesquisas tiveram como convergência a constatação de dificuldades dos estudantes na aprendizagem de conteúdos de Álgebra Linear, principalmente devido ao formalismo inerente a esta disciplina. Das pesquisas apresentadas, várias tratavam da importância da relação da aprendizagem de conteúdos desta área com a questão da linguagem matemática, o que nos levou a buscar estudos que envolviam esta temática em particular.

Dentre eles, podemos destacar PAVLOPOULOU (1993), SIERPINSKA, DREYFUS e HILLEL (1999) e SIERPINSKA, TRGALOVÁ e HILLEL (1999), que procuraram, especificamente sob o ponto de vista da teoria de Duval, estabelecer a relação entre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de conceitos de Álgebra Linear e a deficiência na coordenação satisfatória dos diversos registros de representação semiótica. As pesquisas de DIAS (1998) e PAVLOPOULOU (1993, apud DUVAL, 2000), relativas aos conteúdos de subespaço vetorial e vetores, respectivamente, apontaram que os livros didáticos de Álgebra Linear tendem a privilegiar certos registros nos tópicos avaliados, principalmente o simbólico. Já as pesquisas de DREYFUS, HILLEL e SIERPINSKA (1998) e WINSLOW (2001) levantaram as especificidades do trabalho com recursos computacionais no ensino de conteúdos matemáticos.

Partindo das evidências apontadas por nossa revisão bibliográfica, tivemos o interesse inicial de investigar, no contexto nacional, como os livros didáticos de Álgebra Linear tratam os registros e as conversões, especificamente no conteúdo das transformações lineares. Para isso, avaliamos as referências bibliográficas de Álgebra Linear mais citadas nos cursos da área de Computação de doze instituições nacionais de ensino superior. A análise dessas obras foi realizada com base principalmente na teoria dos registros de representação semiótica de DUVAL (1995, 2000, 2003), sendo que a mesma apontou uma forte valorização dos registros simbólico-algébrico e numérico. Pudemos observar, também, uma exploração reduzida de representações gráficas, bem como das conversões que têm o gráfico como registro de partida.

Além desse estudo, com relação ao mesmo objeto matemático, avaliamos o papel desempenhado pelos recursos computacionais nas obras verificadas. Neste contexto, concluímos que tais literaturas ou não mencionam o uso de *software* ou, quando o incluem, estes não são efetivamente inseridos durante a exposição do conteúdo, sendo normalmente indicados em atividades complementares, com finalidade exclusiva de minimização do trabalho com cálculos.

Tendo em vista que nos cursos da área de Computação a disciplina de Álgebra Linear é pré-requisito para o estudo de Computação Gráfica, analisamos, também, os livros didáticos desta área de conhecimento, novamente com base na teoria dos registros de representação semiótica de Duval. Este estudo apontou que os registros mais requisitados para a compreensão das transformações são o gráfico, o simbólico-matricial e o numérico-tabular, o que revelou uma discordância entre o que é valorizado nos livros didáticos de Álgebra Linear e o que é enfatizado nas obras de Computação Gráfica, em termos de registros e conversões.

Estas constatações despertaram o nosso interesse em investigar os conhecimentos de estudantes dos cursos de Ciência da Computação e Engenharia da Computação em relação às transformações lineares planas, fazendo intervir suas diversas representações. Desta forma, aplicamos um questionário a oitenta e seis (86) estudantes provenientes de quatro Instituições particulares de ensino superior do estado de São Paulo.

A análise dos resultados desta aplicação apontou pouca familiaridade com as diversas representações, grande dificuldade no estabelecimento de conversões e uma constante associação do objeto matemático “transformação linear” exclusivamente com sua representação algébrica. Ainda, quando o enunciado não especificava o tipo de registro a ser utilizado, observamos que os estudantes pouco diversificaram suas representações. De fato, nestas situações, a maioria das resoluções foi apresentada na língua natural de emprego comum, porém, de forma considerada insatisfatória, com narrativas confusas ou incompletas.

O menor sucesso ocorreu nas questões que exigiam uma conversão que partia do registro gráfico para o numérico-tabular, o que era esperado, tendo em vista a constatação de que este tipo de operação é o menos explorado nos livros didáticos de Álgebra Linear analisados. As condições de linearidade praticamente não foram citadas e deficiências no conceito de função, tais como a confusão entre função linear e função de primeiro grau e a identificação da função unicamente com a sua representação algébrica, interferiram na resolução de certas tarefas. Ainda, a análise das respostas indicam que os estudantes não demonstraram compreensão do tipo de imagem gráfica possível por meio de uma transformação linear. Por fim, observamos que várias resoluções foram desenvolvidas com base na percepção, sem o estabelecimento de tratamentos ou conversões entre registros.

Estes resultados colocaram-nos na perspectiva da elaboração de uma abordagem diferenciada das transformações lineares para estudantes da área computacional, englobando as diversas representações bem como as possíveis conversões, principalmente as que envolvem o registro gráfico.

Deste modo, nossa pesquisa consistiu em investigar em que medida situações que envolviam a exploração de diversos registros e conversões (congruentes ou não congruentes) influenciariam no processo de conceitualização das transformações lineares no plano por parte de estudantes universitários da área de Computação. Além disso, analisamos o papel desempenhado pelo ambiente de geometria dinâmica *Cabri-Géomètre* neste processo. A escolha desta ferramenta possibilitou explorar simultaneamente as relações entre três representações do objeto matemático em questão, além de situações de interpretação de suas propriedades em um contexto geométrico.

Para isso, elaboramos, aplicamos e analisamos um experimento de ensino sobre o objeto matemático “transformações lineares planas”, com a preocupação de incluir as operações entre representações nos ambientes *papel&lápis* e computacional de geometria dinâmica.

Com vistas a atingir tal objetivo, adotamos a metodologia de pesquisa denominada *Design Experiments* (COOB et al., 2003) e, partindo de uma abordagem diferenciada sobre as transformações lineares, procuramos avaliar o tipo de conhecimento produzido pelos estudantes.

Seguindo as características de flexibilidade previstas nesta metodologia, tivemos que reformular e acrescentar algumas tarefas às iniciais, de acordo com as necessidades apresentadas pelos estudantes. É nesse sentido que o experimento adquire um caráter cíclico, uma vez que, em determinados momentos, retornamos às atividades propostas inicialmente, adaptando-as, complementando-as e inserindo novas situações e questionamentos não previstos. O professor-pesquisador participou ativamente do processo, procurando compreender e interpretar as construções apresentadas pelos estudantes.

O experimento deste estudo foi desenvolvido em duas fases. Na primeira, foram propostas quatro (4) atividades que tiveram por objetivo mapear o conhecimento prévio do estudante com relação às transformações lineares planas. Nesta etapa, não houve qualquer interferência do professor-pesquisador, seu papel reduzia-se a observar o desenvolvimento das tarefas pelos estudantes.

Na segunda fase, as duas atividades iniciais procuraram explorar os conceitos básicos deste conteúdo, a fim de garantir a base necessária para o prosseguimento do experimento. Sendo assim, para validar as hipóteses deste estudo já descritas no capítulo 5, analisamos a evolução apresentada pelos estudantes durante o desenvolvimento do *Design*. Para isso, realizamos um estudo comparativo entre suas produções na segunda fase do experimento (a partir da Atividade 3) com os resultados da primeira fase e das duas atividades iniciais da segunda fase.

Na seção seguinte, apresentaremos as considerações finais de nosso trabalho, relatando, globalmente, as evoluções observadas e o papel das ferramentas do ambiente *Cabri*, além das atuações dos sujeitos participantes do experimento (estudantes e professor). Por fim, apresentaremos perspectivas para novas investigações, identificadas a partir de nosso estudo.

7.2 CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.2.1. Síntese das evoluções observadas

Diante da análise das produções dos estudantes na Fase II do experimento e, estabelecendo um comparativo com as resoluções apresentadas na Fase I, pudemos constatar que as duplas, em sua maioria, apresentaram evoluções significativas, confirmando as hipóteses descritas no capítulo 5. Concluímos, então, que o *Design* constituiu-se em um ambiente diferenciado de abordagem das transformações lineares planas, promovendo mudanças favoráveis nas relações entre os sujeitos e o objeto matemático em questão. Dentre elas, destacamos:

a) o domínio das representações algébrica, gráfica e tabular, bem como nas suas relações;
b) a compreensão das condições de determinação de uma transformação linear plana;
c) a resolução de situações que requisitaram conversões partindo do registro gráfico (tanto congruentes como não-congruentes);
d) a compreensão das imagens gráficas possíveis por meio de transformações lineares;
e) as atitudes de independência e autonomia na avaliação das próprias produções e
f) o estabelecimento de relações entre uma situação particular e conhecimentos teóricos do conteúdo de transformação linear.

Estabelecendo um paralelo entre esses resultados e as pesquisas apresentadas no capítulo 2 deste trabalho, constatamos, da mesma forma que SIERPINSKA (2000), que inicialmente os estudantes de nosso experimento não utilizaram espontaneamente conhecimentos teóricos relativos ao objeto matemático “transformação linear”, tais como a sua definição ou propriedades. Suas respostas baseavam-se principalmente em aspectos perceptivos provenientes das representações gráficas (nível espaço-gráfico) ou de elementos destacados na situação.

Essas relações entre aspectos perceptivos e teóricos despontaram naturalmente e de forma independente somente nas atividades finais do experimento (a partir da Atividade 7 descrita no capítulo 6), e ainda assim, restritas às duplas 1 e 2. É provável que o contato anterior com atividades que requisitavam este tipo de relação tenha favorecido tais conexões. Por exemplo, na atividade que solicitava a determinação da lei algébrica da aplicação linear responsável pela transformação da circunferência na elipse (cf. Atividade 5 do Capítulo 6), os estudantes dessas duas duplas estabeleceram estratégias coerentes de resolução. Apesar disso, estas só ocorreram após questionamentos do professor-pesquisador a respeito das condições necessárias para a determinação da lei, ou seja, não foi natural aos estudantes, naquele momento, estabelecer a relação entre a situação apresentada e este aspecto da teoria das transformações.

Somente a partir da Atividade 7 notamos que essas duplas valeram-se da definição e de propriedades da transformação linear para resolver as situações propostas, sem a necessidade de qualquer intervenção do professor-pesquisador neste sentido. Por exemplo, na Atividade 8, a qual apresentava os vetores geométricos u, v, T(u) e T(v), sendo T linear, e solicitava o vetor geométrico T(u+v), a dupla 2 imediatamente apresentou o vetor T(u)+T(v), justificando que o resultado obtido era equivalente a T(u+v), pelo fato de T ser linear. A dupla 1 também estabeleceu uma estratégia coerente, a qual poderia levá-la ao sucesso, uma vez que procurou relacionar os vetores geométricos a um sistema de coordenadas, para que fosse possível determinar as imagens de dois vetores de uma base do plano. Salientamos que em SIERPINSKA, DREYFUS e HILLEL (1999) e em nossa aplicação “piloto”, nenhum estudante estabeleceu conexões com a definição ou propriedades da transformação linear. Considerando a progressão definida em nosso experimento, destacamos o importante papel das tarefas anteriores, favorecendo o aparecimento destas estratégias de resolução.

Na pesquisa de PAVLOPOULOU (1994), observamos que os estudantes demonstraram maior dificuldade nas conversões que partiam do gráfico. Ainda, de acordo com DUVAL (2000), principalmente nos níveis mais avançados de ensino, normalmente não é dada uma atenção aos registros não discursivos, representados por figuras geométricas e por gráficos, fato que, segundo o autor, pode conduzir a uma perda de significado.

Na Fase I de nosso experimento, os estudantes também apresentaram resoluções insatisfatórias em situações que demandavam conversões cujo gráfico era o registro de partida. Além disso, nesta fase, a maioria dos sujeitos (4 em 6) apresentou deficiências na representação algébrica e todos desconheciam a representação da matriz de uma transformação linear em relação à base canônica. Estas situações ilustram DUVAL (2003), quando o mesmo afirma que as dificuldades no estabelecimento de conversões podem ser agravadas pelo desconhecimento das características intrínsecas de um determinado registro.

Com o desenvolvimento das atividades da Fase II (cf. Atividades 3, 4 e complementar presentes no Capítulo 6), notamos uma grande evolução em situações deste tipo, uma vez que todas as duplas foram capazes de determinar a lei algébrica e a representação tabular de uma transformação linear dada pelo seu gráfico, além de transitar com facilidade entre estas três representações.

Já nas tarefas que envolviam conversões com o registro gráfico e que requeriam um conhecimento da definição e de propriedades da transformação linear, os estudantes inicialmente demonstraram muita dificuldade. Cabe observar que essas tarefas, em diversos momentos, envolveram situações de conversão entre os registros da língua natural de emprego especializado e gráfico nos dois sentidos. Notamos progressos principalmente na análise das trajetórias de duas duplas, uma vez que, a partir da atividade da translação (cf. Atividade 7 do Capítulo 6), as mesmas passaram a relacionar os aspectos perceptivos/visuais aos teóricos, buscando justificar e controlar suas resoluções. Provavelmente tais estudantes passaram a estabelecer essas relações devido ao desenvolvimento de atividades anteriores que as requisitavam, como por exemplo, a atividade da circunferência (cf. Atividade 5 do Capítulo 6). Observamos, também, que o trabalho em um contexto da Geometria de duas dimensões proporcionou uma visão mais aplicada dessa noção para os estudantes participantes do *Design.*

Destacamos, ainda, que o experimento permitiu uma evolução nos estudantes quanto à compreensão das possibilidades geométricas de uma transformação linear. Afirmamos isso tendo em vista que, na Fase II, todas as duplas conceberam a aplicação de uma transformação linear em uma circunferência e comprovaram corretamente a não-linearidade da translação, ao contrário do ocorrido na Fase I. De fato, na etapa inicial a maioria dos sujeitos classificou a translação como linear (5 em 6), com base no fato de o objeto não ser "deformado". Além disso, quatro estudantes não aceitaram, naquele momento, a aplicação de uma transformação linear em uma circunferência.

Diante dessas constatações, principalmente com base nas resoluções apresentadas pelas duplas 1 e 2, destacamos modificações na qualidade das produções dos estudantes, graças a um sistema de aprendizagem que integrou o geométrico e cujo desenvolvimento foi centrado na diversidade de representações e na atividade de conversão, fato que ilustra as afirmações presentes na teoria de DUVAL (2003).

Concluímos assim, usando os termos de CHEVALLARD (1992), que as relações pessoais dos estudantes com o objeto matemático "transformações lineares planas", desenvolvidas a partir de nosso experimento, sofreram alterações significativas e de caráter positivo, se comparadas com as apresentadas na Fase I e nas duas atividades iniciais da Fase II.

Apesar disso, realizando uma análise crítica do experimento, era esperado que os estudantes atentassem para o fato de as transformações lineares preservarem o alinhamento de pontos e o paralelismo de segmentos, fato que não ocorreu de forma explícita. De fato, os sujeitos avaliaram corretamente a impossibilidade de transformar um quadrado em triângulo ou um quadrado em circunferência, mas sem apresentar justificativas formais. Com isso, retomamos a pesquisa de JAHN (1998), a qual revelou que o entendimento de uma transformação caracterizada por suas propriedades geométricas de conservação não é tarefa simples e natural para os estudantes. Desta forma, concluímos que neste aspecto em particular, o experimento poderia ter enfatizado mais essas propriedades e não somente a construção geométrica das imagens. É provável que a inclusão de tarefas com esta finalidade proporcione evoluções nos estudantes quanto à compreensão dessas propriedades e sua explicitação.

O *Cabri-Géomètre* assumiu um papel primordial no processo, devido ao seu aspecto dinâmico e ao fato de possibilitar explorações que não seriam possíveis no ambiente *papel&lápis*. A seção seguinte contém uma síntese da influência das especificidades desse ambiente no desenvolvimento do *Design*.

7.2.2. O papel do ambiente *Cabri-Géomètre*

Quanto ao *software Cabri-Géomètre*, constatamos que ele possibilitou o estabelecimento e a verificação de conjecturas, uma vez que os estudantes freqüentemente testaram situações não propostas nas tarefas do *Design*. Dentre elas, podemos citar a alteração do vetor de translação (cf. Atividade 7 do Capítulo 6), a atribuição de fatores diversos de cisalhamento (cf. Atividades 3, 4 e Complementar do Capítulo 6) e a mudança dos objetos gráficos propostos no enunciado (cf. Atividade 9 do Capítulo 6). Pudemos constatar que cada dupla efetuou construções distintas de acordo com as suas necessidades e utilizando diferentes ferramentas.

Sendo assim, este recurso computacional assumiu o papel de instrumento facilitador de novas construções e validações locais, combinando aspectos empíricos e conceituais. Neste sentido, nossos resultados confortam as considerações de BALACHEFF e KAPUT (1996), quando os mesmos afirmam que um micromundo consiste em um sistema que oferece ao estudante um amplo e rico conjunto de experiências, uma vez que o tipo de *feedback* produzido é conseqüência das ações do usuário.

O aspecto dinâmico do *Cabri* foi o diferencial para explorar situações não usuais no ensino convencional, tais como a relação dinâmica e simultânea entre as representações algébrica, gráfica e tabular, a análise geométrica das condições de linearidade e reflexões diferenciadas sobre as condições necessárias para a obtenção de uma transformação linear.

Neste aspecto, podemos classificar as construções ou objetos elaborados no *Cabri* como ferramentas que forneceram vantagens pedagógicas, no sentido apresentado por NOSS e HOYLES (1996), uma vez que favoreceram novas formas de conceber relações e objetos matemáticos. Apoiamos tal afirmação na atividade de determinação da lei algébrica da aplicação linear responsável pela transformação da circunferência na elipse (cf. Atividade 5). A construção no *software* não fornecia as condições necessárias para a determinação da lei, o que usualmente ocorre nas abordagens convencionais, mas o seu dinamismo permitiu a obtenção das imagens de dois vetores de uma base do plano. Desta forma, coube ao estudante identificá-las por meio da manipulação de um ponto móvel que descreve um objeto e sua respectiva imagem, para que fosse possível iniciar a resolução da situação proposta.

Graças ao trabalho com este *software*, também foi possível explorar transformações aplicadas a objetos iniciais não usuais no ensino de Álgebra Linear, tais como circunferências e elipses. Tal fato proporcionou aos estudantes uma evolução, tendo em vista que, na primeira fase do *Design,* a maioria dos sujeitos só aceitava a aplicação de uma transformação linear em vetores e objetos poligonais.

O dinamismo do *Cabri* ainda permitiu a obtenção de uma relativa generalidade de um vetor dado como combinação linear de outros dois vetores. Isto porque, nesta ferramenta, os valores de k_1 e k_2 em $v=k_1u_1+k_2u_2$ poderiam ser alterados, sendo possível visualizar, de forma simultânea, o efeito geométrico desta alteração na tela do *software.* Também evidenciamos que na atividade de translação (cf. Atividade 7 do Capítulo 6), o recurso computacional permitiu a constatação da não linearidade dessa transformação, a análise da relação de suas representações gráfica e algébrica e a visualização dinâmica do papel do vetor (a,b) em F(x,y)=(x+a, y+b).

É certo que em alguns momentos, principalmente nas atividades iniciais (cf. Atividades 3, 4 e Complementar do Capítulo 6), o trabalho com o *software* acabou por incentivar o estabelecimento da estratégia por tentativa e erro. De fato, devido às facilidades de manipulação, os sujeitos frequentemente procuravam resolver as situações propostas de forma experimental ou perceptiva, sem necessariamente indicarem preocupação em interpretar ou justificar as relações entre as representações gráfica, algébrica e tabular.

Ainda, algumas tarefas presentes nessas atividades criaram nos estudantes o hábito de utilizar uma análise exclusivamente geométrica como estratégia de determinação da matriz e da lei algébrica da transformação em jogo, o que, em certos casos, não conduzia ao sucesso. Foi o caso, por exemplo, da situação na qual eram solicitadas as representações algébrica e tabular de uma aplicação linear representada pelo seu gráfico. O objeto inicial era um quadrado situado no terceiro quadrante (cf. tarefa comp4d da Atividade 4 do Capítulo 6), sendo que nas situações apresentadas anteriormente os objetos eram fornecidos sempre no primeiro quadrante. Os estudantes estavam habituados a avaliar as transformações geométricas no registro gráfico para em seguida determinar as outras duas representações, provavelmente influenciados pelas atividades anteriores. Em uma nova situação, apenas uma dupla observou, de forma independente, que a estratégia utilizada não era válida, tendo em vista que a situação era diferente das demais. Deste modo, ela buscou novas formas de resolução que a conduziram ao sucesso. As outras duplas só observaram que as resoluções apresentadas não eram coerentes quando foram questionadas pelo professor-pesquisador.

Prevendo tal comportamento, o *Design* incluiu também situações no ambiente computacional que procuraram confrontar tais atitudes (cf. Atividades de 5 a 9 do Capítulo 6). Normalmente a estratégia da tentativa e erro foi a primeira a ser estabelecida pelos estudantes para resolver as situações propostas, provavelmente pelo fato de tal procedimento ter sido suficiente em algumas atividades anteriores. A busca de transformações geométricas usuais (isometrias) para caracterizar a aplicação também constituiu um fator predominante de resolução. Salientamos que estes comportamentos e uma certa dependência em relação à ferramenta computacional adotada também foram constatados nos estudos desenvolvidos por SIERPINSKA et al. (1999).

Em nosso caso, dado o caráter flexível e cíclico do experimento, notamos uma evolução nesta questão, principalmente pela análise das trajetórias dos estudantes de duas duplas. Diante de situações nas quais as estratégias usuais não se adequavam à nova conjuntura, a maioria dos sujeitos procurou formas diferenciadas de resolução. Por exemplo, para a resolução da Atividade 5 relativa à circunferência, foi necessário o estabelecimento de relações com conhecimentos teóricos relativos à determinação de uma aplicação linear e a atividade proposta. A partir daí, notamos que principalmente as duplas 1 e 2 passaram a adotar uma postura mais crítica com relação as suas produções.

Tal fato constituiu um ponto relevante do experimento, pois os estudantes observaram que o *software* representava uma ferramenta de apoio e não um instrumento capaz de resolver, por meio de comandos específicos, todas as situações. Além disso, os sujeitos notaram que não haveria uma estratégia única para a resolução de todas as tarefas propostas no *Design*, sendo necessária a adoção de uma postura mais flexível e reflexiva, menos dependente do recurso computacional e capaz de romper com procedimentos usuais.

Diante do exposto, concluímos que a utilização dos recursos do *software* como apoio para a construção e resolução das atividades do *Design* trouxe aos estudantes participantes do experimento grandes benefícios na conceitualização das transformações lineares planas. Isto porque o seu uso permitiu a exploração de situações não usuais no ensino das transformações lineares, o estabelecimento e validação experimental de conjecturas, o trabalho com conversões envolvendo o registro gráfico e a inter-relação dinâmica entre os diferentes registros.

Além disso, as situações desenvolvidas no ambiente computacional permitiram uma visão aplicada de propriedades relacionadas ao conceito de transformação linear no plano, como por exemplo, a obtenção da aplicação linear que transformava a circunferência na elipse e a construção do programa de composição de transformações lineares.

7.2.3. Os Papéis Desempenhados pelos Sujeitos do *Design*

Quanto aos papéis do professor e dos estudantes no desenvolvimento do *Design*, retomamos COOB et al. (2003), os quais afirmam que na metodologia dos *Design Experiments*, a flexibilidade para mudanças e o papel do professor-pesquisador constituem questões primordiais.

Em diversos momentos da segunda fase do experimento, conforme o leitor pôde observar na descrição do capítulo 6, foi necessária a intervenção do professor-pesquisador. Tais intervenções foram caracterizadas por novos questionamentos, sugestões ou solicitação de comparação entre situações, com a finalidade de fornecer às duplas, condições de avaliar e validar suas resoluções. Ainda, com o intuito de adaptar o processo às produções fornecidas pelos estudantes, foi necessária a inserção de novas tarefas, o que garantiu a evolução esperada dos sujeitos.

A dupla 3 apresentou mais dificuldades e requisitou constantemente a presença do professor-pesquisador no desenvolvimento de suas atividades, em particular as que envolviam conversões entre os registros da língua de emprego especializado e o gráfico (cf. descrição dos resultados das atividades 5, 7 e 8 do capítulo 6). Pudemos notar que esta dupla teve êxito nas atividades iniciais que relacionavam as representações algébrica, gráfica e tabular, uma vez que os estudantes E e F demonstraram preocupação em analisar e registrar o impacto que uma alteração na representação tabular ocasionava nas outras duas representações. Apesar disso, este domínio não foi suficiente para a resolução das atividades posteriores, que requisitavam uma ruptura com os procedimentos usuais e experimentais realizados exclusivamente no ambiente computacional. Em vários momentos, observamos também que esta dupla não apresentou um plano de ação efetivo. Mesmo com as intervenções do professor-pesquisador, ela insistia na estratégia da tentativa e erro e no estabelecimento de análises exclusivamente no nível espaço-gráfico.

Por fim, deficiências em conceitos considerados pré-requisitos para o estudo das transformações lineares, tais como a noção de dependência/independência linear de vetores, a técnica de produto de matrizes, a compreensão das condições de linearidade, dentre outros, interferiram de forma significativa no desempenho desta dupla. É provável que um trabalho de preparação mais efetivo, em cuja apresentação do *software* já se incluam atividades com vetores, e a realização do experimento em um tempo menos restrito, favorecesse esta dupla.

No desenvolvimento do experimento, observamos também que, em certas tarefas, cada dupla utilizou uma estratégia diferente para a sua resolução, embora todas culminassem em resoluções satisfatórias. Uma das características da metodologia de pesquisa adotada consiste no respeito aos diferentes caminhos de resolução, uma vez que cabe ao professor-pesquisador analisar que construções o seu aluno está realizando para resolver determinada situação. Neste aspecto, a diversificação dos dados coletados foi de suma importância, tendo em vista que, em certos casos, apenas o registro escrito não refletiria a construção geral do estudante. Por este motivo, realizamos constantemente um cruzamento entre os dados obtidos pelos registros escritos, pelas áudio-gravações, entrevistas e telas capturadas.

A seguir, faremos uma breve relação entre os resultados apresentados e as hipóteses de pesquisa descritas no capítulo 5.

7.2.4. Relação dos Resultados com as Hipóteses de Pesquisa

Diante do que já foi exposto, cabe, neste momento, estabelecer uma conclusão dos resultados obtidos com relação às hipóteses de pesquisa apresentadas no Capítulo 5. A primeira hipótese de pesquisa supunha que as atividades do *Design* favoreceriam tanto o conhecimento das diversas representações do conteúdo de transformações lineares no plano quanto a habilidade de coordenar os registros. Notamos que esta hipótese foi confirmada para o grupo de estudantes do *Design*, pois todos os sujeitos demonstraram, após a realização das atividades da Fase II, uma expressiva evolução no domínio das representações numérico-tabular, algébrico e gráfico, bem como nas suas relações. Quanto às situações que envolviam a representação da língua de emprego especializado e as conversões entre esta e o registro gráfico, consideramos que a maior parte das duplas (2 das 3) apresentou capacidade de estabelecer estratégias coerentes de resolução, contemplando favoravelmente esses aspectos e evidenciando um progresso em relação às produções apresentadas na Fase I.

Conforme detalhado na seção 7.2.2, também podemos afirmar que validamos globalmente a hipótese de que a exploração do caráter dinâmico do *Cabri-Géometre* forneceria elementos favoráveis ao entendimento de aspectos matemáticos das transformações lineares geométricas do plano. Isto porque o trabalho com tal ferramenta possibilitou articular simultaneamente três representações e promover situações diferenciadas de conexão entre o gráfico e a língua de emprego especializado. Cabe observar que o ambiente convencional do *papel&lápis* é desprovido de tais elementos.

Uma outra hipótese, também relacionada às especificidades do ambiente computacional, supunha que as atividades do *Design* permitiriam ao estudante o entendimento das características de cada registro bem como as relações entre eles, ou seja, o tipo de impacto que ocorreria em certo registro quando fosse realizada uma mudança em outro registro. Esta suposição também foi confirmada com os estudantes participantes do experimento, pois estes demonstraram, após o desenvolvimento das Atividades 3, 4 e Complementar da Fase II, pleno domínio em avaliar as particularidades das representações gráfica, tabular e algébrica de uma transformação linear plana e em estabelecer as conversões entre as mesmas.

Por fim, cabe ressaltar que as atividades do *Design* permitiram aos estudantes lidar de maneira localizada com as dificuldades inerentes à não congruência das conversões. Embora as atividades da segunda fase tenham requisitado do estudante uma ruptura com as estratégias habituais para lidar com situações que requeriam conversões não usuais e, considerando que em diversas vezes este processo não foi realizado de modo imediato, concluímos que duas duplas apresentaram um desempenho satisfatório neste tipo de situação, se comparado com as suas produções da primeira fase do *Design*.

Deste modo, conclui-se que o experimento, composto de atividades que visaram à exploração da diversidade de registros e de conversões, permitiu aos estudantes participantes do *Design* uma evolução com relação à compreensão do objeto "transformação linear" e ao domínio de suas diversas representações, bem como no trânsito entre elas. Apesar das dificuldades iniciais apresentadas pelos estudantes, as análises de suas trajetórias indicaram um progresso na resolução de situações que envolveram o registro da língua natural de emprego especializado, em particular no que tange às condições de linearidade e às condições de determinação de uma transformação linear no plano. Ressaltamos que esta evolução foi detectada principalmente nas trajetórias de duas duplas. Um avanço na resolução de situações que envolveram conversões não-congruentes – principalmente as que partiam do registro gráfico – e uma compreensão das possibilidades geométricas de uma transformação linear também foram observados.

A seguir, finalizamos nossas considerações apresentando as perspectivas geradas pelo nosso estudo para novas investigações.

7.2.5. Perspectivas para Novas Investigações

Tendo em vista as dificuldades demonstradas pelos estudantes em relação ao tratamento e às conversões envolvendo a língua natural de emprego especializado, cabe aqui destacar, como perspectivas para novas investigações, a elaboração de abordagens que procurem explorar a relação entre este tipo de representação e o registro gráfico em outros tópicos da Álgebra Linear, evidentemente quando possível. Isto porque, no caso particular deste estudo, notamos que este tipo de exploração possibilitou a atribuição de novos significados ao conceito de transformação linear, além de uma maior habilidade em operar com o registro da língua de emprego especializado.

Esta pesquisa também abre perspectivas para investigar o papel do professor de Álgebra Linear. Ressaltamos que o estudo aqui descrito optou por analisar as evidências dos livros didáticos e as produções dos estudantes. Uma pesquisa focada no educador poderia avaliar em que medida a questão da exploração de registros e conversões é considerada nas práticas dos professores dessa disciplina.

Além disso, nosso estudo evidenciou a importância de avaliar as necessidades específicas do curso que tem a disciplina de Álgebra Linear como componente curricular, a qual normalmente é ministrada por um docente com formação na área de Matemática. Por exemplo, especificamente para os cursos da área computacional, uma análise com base na teoria dos registros de representação semiótica apontou a importância de um trabalho de exploração de conversões entre as representações numérico-tabular e gráfica. Partindo dessas evidências, avaliamos que o nosso trabalho também poderia contribuir para a formação de professores universitários.

Na avaliação dos livros didáticos de Álgebra Linear, observamos que, apesar de modesta, há uma evolução na diversificação das representações, quando comparamos os livros mais atuais, publicados a partir do ano 2000, com as obras mais antigas, editadas pela primeira vez nas décadas de setenta ou oitenta. Tal fato motiva um estudo histórico mais aprofundado de aspectos relacionados às abordagens de ensino e de registros nos livros didáticos.

Como uma outra sugestão, indicamos a extensão deste trabalho em um contexto de exploração das transformações no espaço, com apoio de um *software* de geometria dinâmica.

Apesar de nosso estudo ter sido direcionado a estudantes da área de Computação, é possível que o mesmo, com as devidas adaptações, possa contribuir também na formação de outros cursos da área de exatas. Assim, esperamos que esta pesquisa represente um cenário diferenciado para o ensino das transformações lineares planas, culminando em um material que possa subsidiar práticas docentes relativas à disciplina de Álgebra Linear.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANGEL, E. *Interactive Computer Graphics:* a top-down approach with OpenGL. Addison-Wesley Publishing Company,1997.

ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações.* 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ARAÚJO, C.C.V.B. *A metamatemática no livro didático de álgebra linear*. São Paulo, 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

BALACHEFF, N. *Advanced Educational Technology: Knowledge Revisited*. Advanced Educational Technology: Research issues and future potential. Berlin: Springer Verlag, 1996.

BALACHEFF, N.; KAPUT, J.J. Computer-Based Learning Environments in Mathematics. In: *International Handbook in Mathematics Education*. London: Kluwer, 1996. p. 469-501.

BEHAJ, A.; ARSAC.G. La conception d´un cours d'Algèbre Linèaire. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, França, v.18, n. 3, p. 333-370, 1998.

BITTAR, M. *Les vecteurs dans l'enseignement secondaire.* Grenoble 1, 1998. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Joseph Fourier.

BOLDRINI, J.L.; COSTA, S.I.R.; RIBEIRO, V.L.; WETZLER, H.G. *Álgebra Linear.* 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

CALLIOLI, C.A.; DOMINGUES, H.H.; COSTA, R.C.F. *Álgebra Linear e Aplicações*. 6. ed. São Paulo: Atual, 1995.

CELESTINO, M. R. *Ensino-Aprendizagem da Álgebra linear:* as pesquisas brasileiras na década de 90. São Paulo, 2000. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

CENTRO UNIVERSITÁRIO UNIFEI. Departamento de Exatas. *Organização do Curso de Ciência da Computação*. Disponível em: <http://www.fei.edu.br/cienciacomp/disciplinas.htm>. Acesso em: 28 ago. 2004.

CHEVALLARD, Y. Conceps fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, France, v. 12, n.1, p. 73-112,1992.

COBB, P.; CONFREY,J.; DISESSA, A.; LEHRER,R.; SCHAUBLE, L. Design experiments in education research. *Educational Researcher,* v.32, n.1, p. 9-13, 2003.

D'AMORE, B. Semiotica e noetica nell'apprendimento dei concetti in matemática. In: D'AMORE, B. *Matematica e didattica: tra sperimentazione e ricerca*. Bologna: Pitagora, 2000. p. 37-48.

D'AMORE,B. *Epistemologia e didática da Matemática*. Tradução de: Maria Cristina Bonomi Barufi. 1 ed. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

DIAS, M. Les problèmes d'articulation entre points de vue "cartésien" et "paramétrique" dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. Paris, 1998. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade de Paris VII, Dennis Diderot.

DOUADY, R. Jeux des cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, France, v. 7, n. 2, p. 5-31, 1986.

DORIER, J.L. *L'algèbre linéaire en question, collection.* Bibliothèque de Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditeur, 1997.

DORIER, J.L. État de l'Art de la recherche en didactique. A propos de l'enseignement de l'Algèbre Linéaire à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. França, v.18, n. 2, p. 191-230, 1998.

DORIER, J.L et al. *On the teaching of Linear Algebra.* Grenoble, France: Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 2000.

DORIER, J. L. Contribuition à l'étude de l'enseignement à l'université dês premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique.(1990). Disponível em <http:/www.inrp.tr/didactique/theses/maths/Dorier.htm.>. Acesso em: 05 out. 2003.

DREYFUS, T.; HILLEL, J. SIERPINSKA, A. *Cabri based linear Algebra: Transformations.(1998).* Disponivel em: < http:www.fmd,uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html >. Acesso: 05 out. 2003.

DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine.* Berna: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. Quel cognitive retenir en didactique des mathématics? *Recherches en Didactique des Mathématiques,* France, La Pensée Sauvage Éditions. v. 16, n. 3, p. 349-382, 1996.

DUVAL, R. Signe et objet (I): trios grandes étapes dans la problématique des rapports entre representation et objet. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives,* n.6, Strasbourg: IREM, 1998. p. 139-163.

DUVAL, R. Basic Issues for Research in Mathematics Education. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 24, 2000, Hiroshima. *Proceedings of the 24th PME*. Hiroshima: Department of Mathematics Education Hiroshima University, 2000. p. 55-69.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S.D.A. *Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica.* Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

FACULDADES ASSOCIADAS DE SÃO PAULO. Departamento de Exatas. *Currículo Pleno em Ciência da Computação*. Disponível em: <http://www.fasp.br/graduacao/cursos/grade_curricular.php?cod_curso=01006>. Acesso em: 28 ago. 2004.

FACULDADES ASSOCIADAS DE SÃO PAULO. Departamento de Exatas. *Plano de ensino de Álgebra Linear do curso de Engenharia da Computação e Ciência da Computação*. Disponível em: <http://www.fasp.br/docente/graduacao/mkarrer>. Acesso em: 03 set. 2004.

FACULDADES ASSOCIADAS DE SÃO PAULO. Departamento de Exatas. *Plano de ensino de Computação Gráfica do curso de Engenharia da Computação*. Disponível em: <http://www.fasp.br/docente/graduacao/anacristina.>. Acesso em: 03 set. 2004.

FOLEY, J.D. et al. *Computer Graphics:* Principles and Practice. Local: Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

FREGE, G. Sobre o sentido e a referência. In: *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo: Cultrix/USP, 1978. p. 59-86.

GUEUDET-CHARTIER, G. *Rôle du géométrique dans l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre linéaire*. Grenoble, 2000. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier.

GUEUDET-CHARTIER, G. Role du géomètrique dans l'enseignement de l'algèbre lineaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v.24, nº 1, 2004, pp. 81-114.

HAREL, G. Sur trois principles d'aprentissage et d'enseignement: le cas de l'algèbre linéaire. In: DORIER, J.L. et al. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question.* França: La Pensée Sauvage Éditions, 1997, Cap. 5.

HAREL, G. Three principles of learning and teaching mathematics. In: DORIER, J.L. ed., *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 177-189, 2000.

HILLEL, J., SIERPINSKA, A. One persistent mistake in Linear Algebra. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 18. *Proceedings of the 18th PME.* Lisboa: Université de Lisbonne, 1995. p. 65-72.

INSTITUTO NACIONAL DE EDUCAÇÃO E PESQUISA. Exame Nacional de Cursos. Disponível em: <http://www.inep.gov.br/superior/provao/gab_prov_pad_res/matematica.htm>. Acesso em: 12 jun. 2003.

KALLEY, G.; PLASTOCK, R.A. *Computação Gráfica.* Tradução: José Carlos Teixeira. 1. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1991.

LAY, D. C. *Álgebra Linear e suas aplicações.* 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1997.

LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 1995.

JAHN, A.P. Des transformations des figures aux transformations ponctuelles: étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-Géomètre. Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de Seconde. Grenoble, França 1998. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier.

MACHADO, S.D.A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática:* Registros de representação semiótica. Campinas, São Paulo: Papirus, 2003.

NOSS, R.; HOYLES,C. *Windows on Mathematical Meanings:* Learning Cultures and Computers. v. 17. Mathematics Education Library, 1996.

NÖTH, W. *Panorama da Semiótica:* de Platão a Peirce. 3. ed. São Paulo: Annablume, 2003.

OLIVEIRA, V.C.A. *Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear*. São Paulo: 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista de Rio Claro.

PADREDI, Z. *As "Alavancas Meta" no discurso do professor de Álgebra Linear.* São Paulo: 2003. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PASSONI, J.C. *(Pré)Álgebra: Introduzindo os números inteiros negativos.* São Paulo: 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PAVLOPOULOU, K. Un problème décisive pour l´apprentissage de l'algèbre linéaire: La coordination des registres de représentation. *Annales de didactique et de Sciences cognitives*, n. 5, 1993, p. 67-93.

PAVLOPOULOU, K. *Propédeutique de l´algèbre linéaire:* La coordination des registres de représentation sémiotique. Paris, 1994. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Estrasburgo 1: Universidade Louis Pasteur. Pré-publicação de l´Institut de Recherche Mathématique Avancée.

PESONEN, M. E.; MALVELA, T. A reform in undergraduate mathematics curriculum: more emphasis on social and pedagogical skills. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Taylor & Francis, v. 31, n.1, 2000.

PIAGET, J.; GARCIA R. *Psychogenesis and the history of science*. New York: Columbia University Press, 1989.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO DE JANEIRO. Departamento de Exatas. *Ementa de Disciplina Álgebra Linear*. Disponível em: <http://sphere1.rdc.puc-rio.br/cgi-bin/microh/microh.s?tb=em2&cd+MAT1200>. Acesso em: 28 ago. 2004.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL. Departamento de Exatas. *Ementa de Álgebra Linear.* Disponível em: <http://www.inf.pucrs.br//%7Emoraes/engcomp/cursos/4452F.pdf>. Acesso em: 03 set. 2004.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL. Departamento de Exatas. *Ementa de Computação Gráfica*. Disponível em: <http://www.inf.pucrs.br/~manssour/CG-SI/>. Acesso em: 26 fev. 2004.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL. Departamento de Exatas. *Estrutura Curricular do curso de Ciência da Computação*. Disponível em: <http://www.pucrs.br/uni/poa/info/estruturacurricular/cienciadacomputacao.htm>. Acesso em: 28 ago. 2004.

ROBERT, A. Niveaux de conceptualisation et enseignement secondaire. In: DORIER et al. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions, 1997.

ROBERT, A. Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 18.2, pp. 139-189, 1996.

ROBERT, A. ROBINET, J. Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire em première année de DEUG. *Cahier de Didactique des Mathématiques*, 53, IREM de Paris-VII, 1989.

SANTAELLA, L. *O que é semiótica*. São Paulo: Brasiliense, 1983. (Coleção Primeiros Passos; 103).

SCHIRN, M. Sobre algumas idéias fundamentais da filosofia da linguagem de Gottlob Frege. *Manuscrito*. Campinas: UNICAMP,1997.

SIERPINSKA, A.; DREYFUS,T.; HILLEL, J. Evaluation of a design: Linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, France, v. 19, n. 1, p. 9-39, 1999.

SIERPINSKA, A.; TRGALOVÁ, J.; HILLEL, J.; DREYFUS, T. Teaching and Learning Linear Álgebra with *Cabri*. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 23,1999, Israel. *Proceedings of the 23th PME*. Haifa, Israel, 1999. p. 119-134.

SIERPINSKA, A. On some aspects of students' thinking in linear algebra. In: DOURIER, J.L (ed.). *On the teaching of Linear Algebra.* Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 151-245.

SIERPINSKA, A.; NADOZIE, A, A. Methodological problems in analyzing data from a small scale study on theoretical thinking in high achieving linear algebra students. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 25, 2001. *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Utrecht, The Netherlands, 2001. July 11-17, v. 4, p. 177-184.

STEFFE, L.P. & THOMPSON, P.W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In: R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.). *Research design in mathematics and science education*. Hillsdale, NJ: Eribaum, 2000. p. 267-307.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Departamento de Exatas*. Currículo do curso de Ciência da Computação.* Disponível em: <http://www.ime.usp.br/dcc/grad/curriculo2004/index.htm>. Acesso em: 03 set. 2004.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Departamento de Exatas*. Ementa de Álgebra Linear para Computação.* Disponível em: <http://sistemas1.usp.br:8080/jupiterweb/jupDisciplina?sgldis=MAT0139&codcur=4505>. Acesso em: 08 mai. 2004.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Departamento de Exatas*. Ementa de Álgebra Linear para Engenharia II*. Disponível em: <http://naeg.prg.usp.br/relatorio/disciplina.phtml?id_disciplina=MAT2458>. Acesso em: 08 set. 2004.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Departamento de Exatas*. Ementa de Computação Gráfica*. Disponível em: <http://naeg.prg.usp.br/relatorio/disciplina.phtml?id_disciplina=PCS2047>. Acesso em: 26 fev. 2004.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Departamento de Exatas*. Ementa de Computação Gráfica*. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/dcc/grad/catalogo2004/disciplinas/MAC0421.html>. Acesso em: 03 set. 2004.

UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS. Departamento de Exatas. *Ementa de Álgebra Linear*. Disponível em: <http://www.unisinos.br/_disciplinas/caract_disc.php?disc=60119>. Acesso em: 04 set. 2004.

UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS. Departamento de Exatas. *Ementa de Computação Gráfica*. Disponível em: <http://inf.unisinos.br/~marcelow/ensino/pipca/cgps1/ementa.html>. Acesso em: 26 fev. 2004.

UNIVERSIDADE DO VALE DO RIO DOS SINOS. Departamento de Exatas. *Grade curricular do Curso de Ciência da Computação*. Disponível em: <http://inf.unisinos.br/cursos/graduacao/sb/grade-curric.htm>. Acesso em: 28 ago. 2004.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. Departamento de Exatas. *Ementa de Computação Gráfica*. Disponível em: <http://www.ic.unicamp.br/~afalcao/mc930/ementa.html.> Acesso em: 26 fev. 2004.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. Departamento de Exatas. *Ementa de Álgebra Linear*. Disponível em: <http://black.rc.unesp.br/cccomp/MMA5677.pdf>. Acesso em: 28 ago. 2004.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. Departamento de Exatas. *Ementa de Computação Gráfica*. Disponível em: <http://www.prudente.unesp.br/graduacao/comp/computacao_grafica.htm>. Acesso em: 26 fev. 2004.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. Departamento de Exatas. *Ementa de Computação Gráfica.* Disponível em: <http://black.rc.unesp.br/cccomp/EMA8520.pdf>. Acesso em: 28 ago. 2004.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA. Departamento de Exatas. *Estrutura Curricular do curso de Bacharelado em Ciências da Computação.* Disponível em: <http://black.rc.unesp.br/cccomp/diurno.html>. Acesso em: 28 ago. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS. Departamento de Exatas. *Ementa de Álgebra Linear I.* Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/dmat/education/ementas/MAT606.html>. Acesso em: 08 set. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS. Departamento de Exatas. *Ementa de Computação Gráfica.* Disponível em: < http://www.ead.eee.ufmg.br/~renato/pac/>. Acesso em: 04 set. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS. Departamento de Exatas. *Grade Curricular do curso de Ciência da Computação*. Disponível em: <http://www.ufmg.br/prograd/cursos/3400/340008.htm>. Acesso em: 28 ago. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO. Departamento de Exatas. *Bibliografia de Computação Gráfica.* Disponível em: <http://www.di.ufpe.br/~if291/galeria/3dmanager/bibliografia.html>. Acesso em: 26 fev. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO. Departamento de Exatas. *Ementa de Álgebra Linear.* Disponível em: <http://www.di.ufpe.br/~srlm/icc/ementas96/node2.html> Acesso em: 06 jan. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA. Departamento de Exatas. *Bibliografia de Computação Gráfica.* Disponível em: <http:www.inf.ufsc.br/~awangenh/CG/bibliografia.html>. Acesso em: 09 abr. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA. Departamento de Exatas. *Ementa de Álgebra linear.* Disponível em: <http:www.enq.ufsc.br/grad/ena/Disciplinas/MTM5245-AlgebraLinear.htm>. Acesso em: 08 set. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA. Departamento de Exatas. *Ementa de Álgebra Linear.* Disponível em: <http://portal.ufsm.br/ementario/disciplina.jsp?codigo=MTM145>. Acesso em: 03 set. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA. Departamento de Exatas. *Ementa de Computação Gráfica.* Disponível em: <http://portal.ufsm.br/ementario/disciplina.jsp?codigo=ELC127>. Acesso em: 03 set. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA. Departamento de Exatas. *Estrutura Curricular do Bacharelado em Ciência da Computação.* Disponível em: <http://portal.ufsm.br/ementario/curso.jsp?codigo=307>. Acesso em: 09 mar. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS. Departamento de Exatas. *Ementa de Álgebra Linear I.* Disponível em: < http://www.ufscar.br/disciplinas/grad/al1/al1.html> Acesso em: 05 jun. 2003.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS. Departamento de Exatas. *Ementa de Computação Gráfica.* Disponível em: <http://www.dc.ufscar.br/posgrad/disciplinas/cco742.htm>. Acesso em: 08 set. 2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS. Departamento de Exatas. *Grade Curricular do Bacharelado em Ciência da Computação.* Disponível em: <http://www.dc.ufscar.br/bcc/portugues/grade.html>. Acesso em: 28 ago. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Departamento de Exatas. *Currículo Bacharelado em Ciência da Computação*. Disponível em: <http://www1.ufrgs.br/Graduacao/InformacoesAcademicas/curriculo_imprime.asp?Cod...>. Acesso em: 28 ago. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Departamento de Exatas*.* *Currículo Engenharia de Computação*. Disponível em: <http://www1.ufrgs.br/Graduacao/InformacoesAcademicas/curriculo.asp?CodCurso=318...>. Acesso em: 03 set. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Departamento de Exatas*. Ementa de Álgebra Linear.* Disponível em:< http://www.ufrgs.br/~rpribas/inep/Bibliografia.pdf>. Acesso em: 03 set. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Departamento de Exatas*. Ementa de Computação Gráfica.* Disponível em <http://www.inf.ufrgs.br/cg/teaching/inf01009/>. Acesso em: 26 fev. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA. Departamento de Exatas*. Ementa de Álgebra Linear*. Disponível em: <http://www.facom1.ufu.br/bcc/ementas_pg.htm>. Acesso em: 28 ago. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA. Departamento de Exatas*. Ementa de Computação Gráfica*. Disponível em: <http://www.compgraf.ufu.br/curso/ementa.asp>. Acesso em: 26 fev. 2004.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA. Departamento de Exatas*. Estrutura Curricular do Curso de Ciência da Computação.* Disponível em: <http://www.facom1.ufu.br/bcc/ementas_pg.htm>. Acesso em: 28 ago. 2004.

WINSLOW, C. Semiotic and discursive variables in CAS-based didactical engeneering. *Educational Studies in Mathematics*, n.52, p. 271-288, 2003.

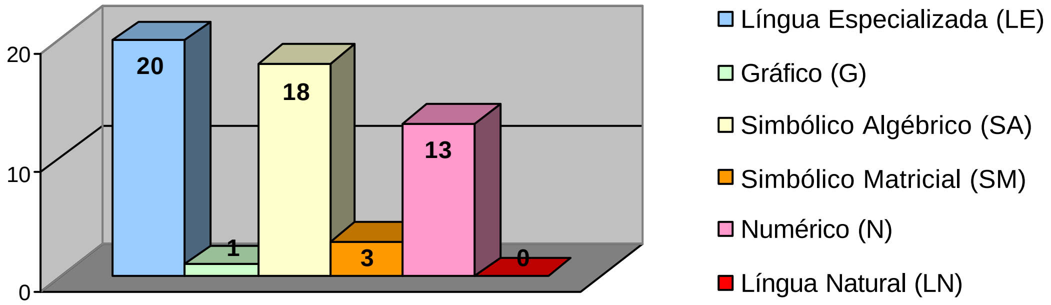
ANEXOS

ANEXO I – REGISTROS E CONVERSÕES NOS LIVROS DE ÁLGEBRA LINEAR ANALISADOS

SÍNTESE DOS REGISTROS PRESENTES E DAS CONVERSÕES REQUERIDAS NOS EXERCÍCIOS DO CONTEÚDO DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES DOS LIVROS DE ÁLGEBRA LINEAR ANALISADOS.

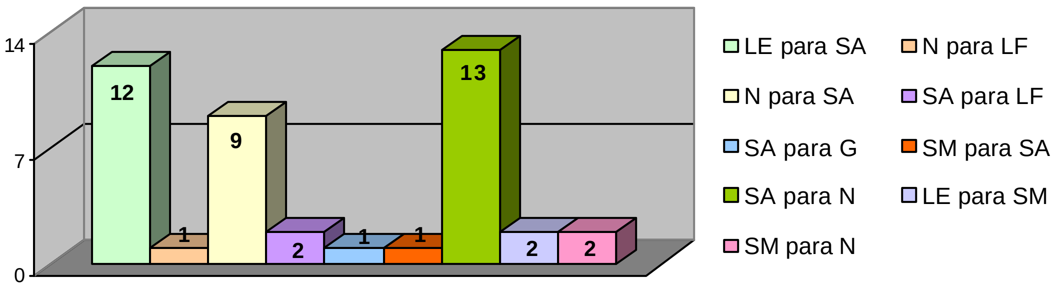
a) Livro 1

GRÁFICO 1 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO



NOTA: Total de 41 exercícios propostos no Livro 1.

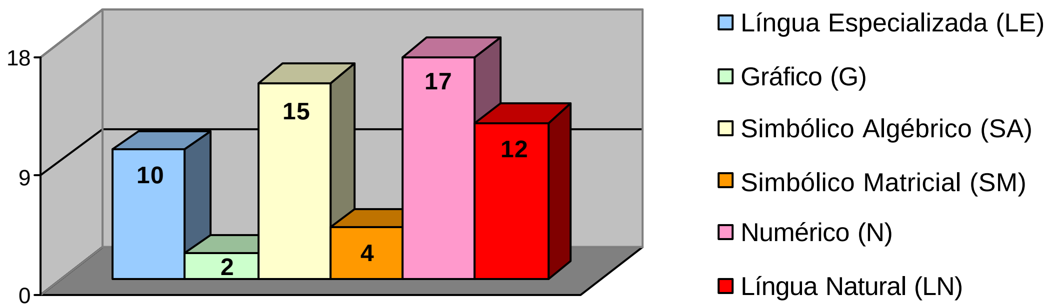
GRÁFICO 2 – TRATAMENTO (COM MUDANÇA DE REPRESENTAÇÃO) E CONVERSÃO INDICADOS EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO



NOTA: Total de 41 exercícios propostos no Livro 1.

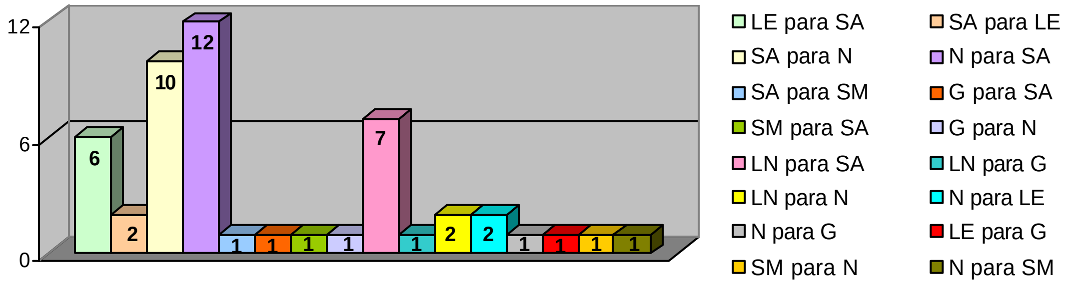
b) Livro 2

GRÁFICO 3 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO



NOTA: Total de 32 exercícios propostos no Livro 2.

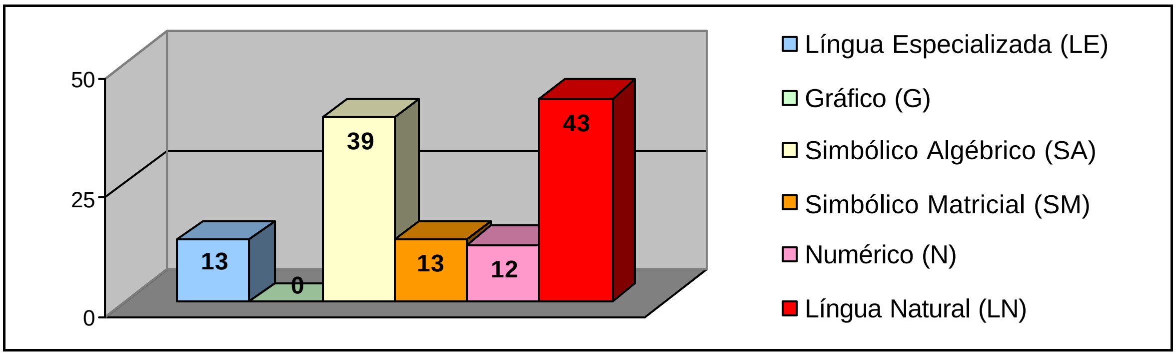
GRÁFICO 4 – TRATAMENTO (COM MUDANÇA DE REPRESENTAÇÃO) E CONVERSÃO INDICADOS EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO



NOTA: Total de 32 exercícios propostos no Livro 2.

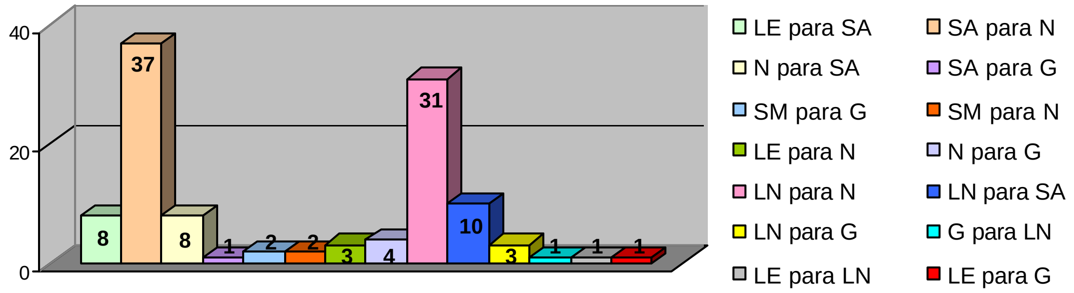
c) Livro 3

GRÁFICO 5 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO



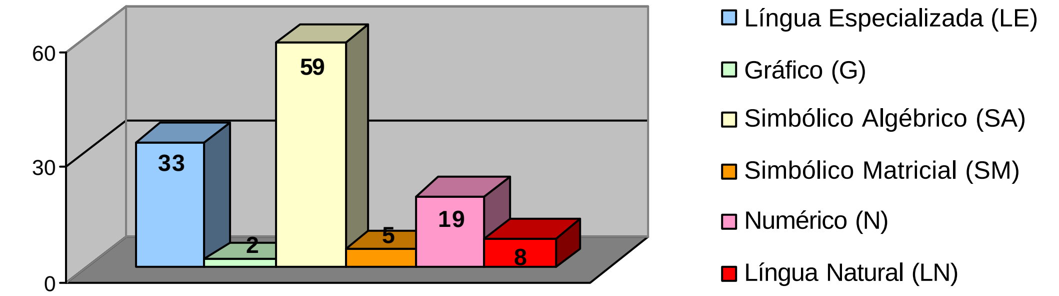
NOTA: Total de 96 exercícios propostos primeiro capítulo do Livro 3.

GRÁFICO 6 – CONVERSÃO INDICADA EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO



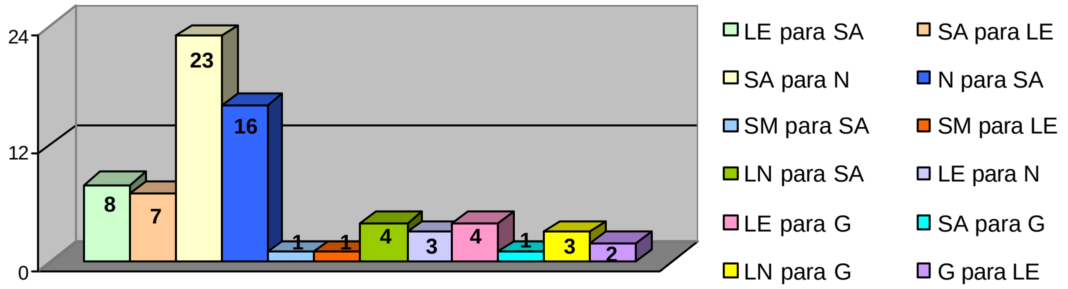
NOTA: Total de 96 exercícios propostos primeiro capítulo do Livro 3.

GRÁFICO 7 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO



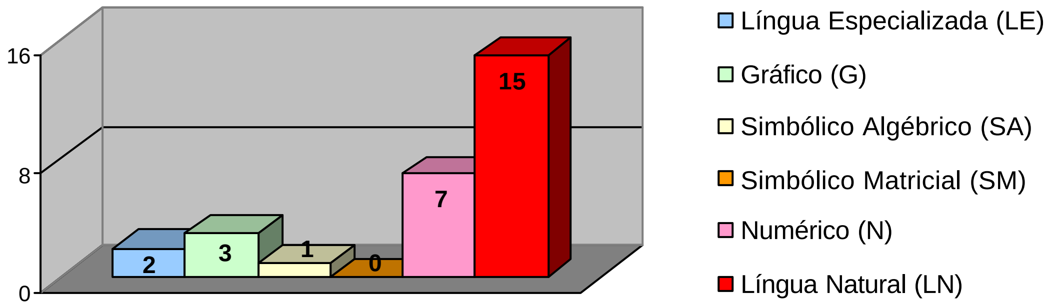
NOTA: Total de 110 exercícios propostos segundo capítulo do Livro 3.

GRÁFICO 8 – TRATAMENTO (COM MUDANÇA DE REPRESENTAÇÃO) E CONVERSÃO INDICADOS EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO



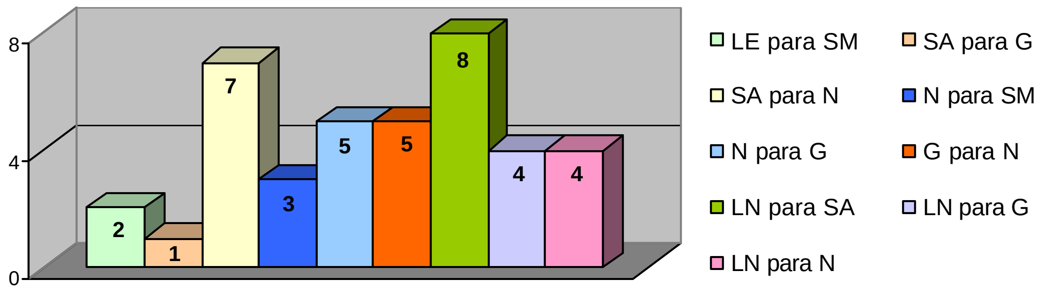
NOTA: Total de 110 exercícios propostos segundo capítulo do Livro 3.

GRÁFICO 9 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO



NOTA: Total de 23 exercícios propostos no capítulo de Tópicos Adicionais Livro 3.

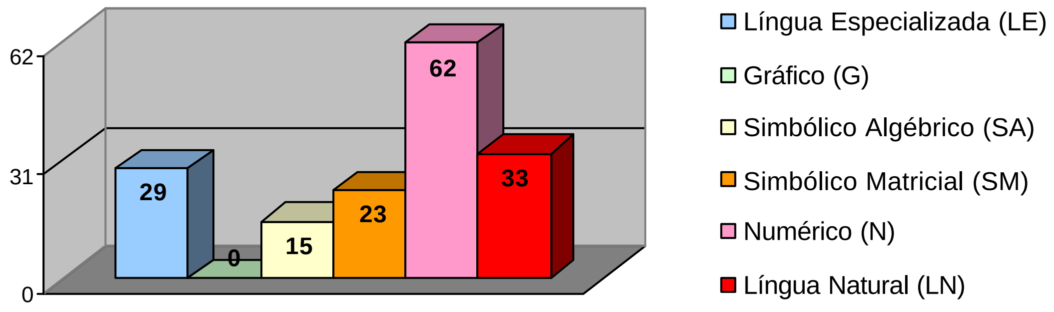
GRÁFICO 10 – CONVERSÃO INDICADA EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO



NOTA: Total de 23 exercícios propostos no capítulo de Tópicos Adicionais Livro 3.

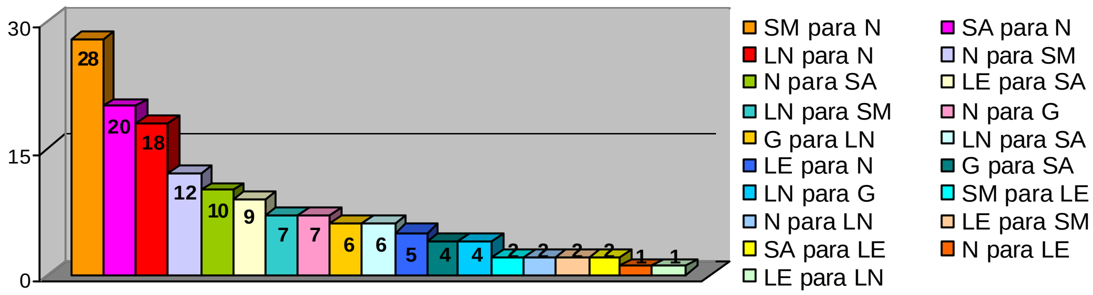
d) Livro 4

GRÁFICO 11 – TIPO DE REGISTRO PRESENTE NO ENUNCIADO



NOTA: Total de 159 exercícios propostos no Livro 4.

GRÁFICO 12 – CONVERSÃO INDICADA EXPLICITAMENTE NA QUESTÃO



NOTA: Total de 159 exercícios propostos no Livro 4.

ANEXO II – QUESTIONÁRIO EXPLORATÓRIO

QUESTIONÁRIO EXPLORATÓRIO

Nome:____

Questão 1:

a) Considerando o plano x0y, o que você entende por projeção ortogonal sobre o eixo x?

b) A projeção ortogonal no plano x0y sobre o eixo x é uma transformação linear? Justifique.

c) Determine F(x,y), sendo F a projeção ortogonal no plano x0y sobre o eixo x. Em seguida, represente-a geometricamente.

d) Determine a matriz desta transformação linear em relação à base canônica (matriz canônica).

e) Qual é a imagem do vetor (3,-2) por esta projeção?

Questão 2:

Seja T: $R^2 \to R^2$ um cisalhamento horizontal de fator 2, dado por T(x,y)=(x+2y,y).
a) Determine a imagem geométrica do quadrado ABCD por esta transformação, dados A(0,0), B(1,0), C(1,1) e D(0,1).

b) Esta transformação é linear? Justifique.

Questão 3:

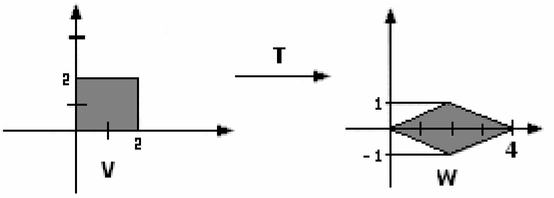
Existe uma transformação linear que transforma um quadrado em uma circunferência? Justifique.

E uma transformação linear que transforma um quadrado em um segmento? Justifique.

Questão 4:

Descrever, com palavras, o efeito geométrico de multiplicar um vetor u do R^2 pela matriz
$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Esta matriz pode ser considerada a matriz de uma transformação linear no plano em relação à base canônica? Justifique.

Questão 5:



Qual das matrizes abaixo pode representar, em relação à base canônica do R^2, uma transformação linear que leva a figura V na figura W? Justifique.

$a)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} b)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} c)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} d)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} e)\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ANEXO III – ATIVIDADES DE FAMILIARIZAÇÃO COM O *CABRI*

Sumário

1. CONHECENDO O *CABRI*

Apresentação de alguns itens da barra de ferramentas;

Apresentação de alguns ponteiros que guiam as construções (ponteiro, +, lápis de construção, mão apontando, mão arrastando e lente de aumento);

Criação de sistema de eixos coordenados e de vetor, acompanhado das coordenadas da extremidade. Análise da dinâmica do *software Cabri* ao se realizar um movimento.

1.1. CRIAÇÃO DO SISTEMA DE EIXOS X0Y

Direcione o mouse para a última caixa de ferramentas da barra de ferramentas. Pressione e mantenha pressionado o botão esquerdo do mouse sobre o ícone. Vá até a função “mostrar eixos” e solte o mouse. Como resultado, aparecerá na tela o sistema de eixos x0y.

1.2. CRIAÇÃO DE UM VETOR COM ORIGEM NA ORIGEM DO SISTEMA DE EIXOS X0Y

Direcione o mouse para a terceira caixa de ferramentas da barra de ferramentas. Pressione e mantenha pressionado o botão do mouse sobre o ícone. Vá até a função “vetor” e solte o mouse. Arraste sem clicar o mouse até a origem (0,0) do sistema (aparecerá a mensagem “deste ponto”) e dê um clique. Arraste o mouse sem apertar nenhum botão e em seguida dê outro clique para determinar a extremidade do vetor. Clicar no ponteiro para liberar a realização de outro tipo de construção ou comando.

1.3. DETERMINAÇÃO DAS COORDENADAS DO VETOR EM RELAÇÃO À BASE CANÔNICA.

Direcione o mouse para a nona caixa de ferramentas da barra de ferramentas. Pressione e mantenha pressionado o botão do mouse sobre o ícone.

Clique na função “Equação e coordenadas”. Sem apertar o mouse, direcionar para a extremidade do vetor até aparecer a mensagem “Coordenadas deste ponto”. Dê um clique no mouse. Aparecerão as coordenadas do vetor em relação à base canônica. Clicar no ponteiro para liberar a realização de outro tipo de construção ou comando.

1.4. MOVIMENTO DE UM OBJETO.

Vamos mover o vetor e verificar o que ocorre:

a) direcione o mouse sem apertar nenhum botão até a extremidade do vetor (aparecerá na tela a mensagem “este ponto”).
b) clique com o botão esquerdo do mouse neste ponto e, sem soltar o botão, arraste-o pela tela. Observe o que ocorre com as coordenadas do vetor.

Obs: Para limpar algum objeto:

Com o botão esquerdo do mouse selecione o objeto a ser removido (aparecerá um retângulo na tela). Solte o mouse e aperte o botão deletar do teclado do computador.

1.4.1. Exercícios

Construir no sistema x0y os seguintes vetores:

a) (5,0);
b) (0,-2);
c) (3,4).

1.5. SOMA DE DOIS VETORES

Construa o sistema de eixos x0y e dois vetores com origem na origem desse sistema.

Determine as coordenadas de cada vetor.

Direcione o mouse para a quinta caixa de ferramenta da barra de ferramentas. Pressione e mantenha pressionado o botão do mouse sobre o ícone. Arraste-o na função “Soma de dois vetores” e solte o botão do mouse. Em seguida, clicar em cada vetor (ao direcionar o mouse sobre um vetor aparecerá a mensagem “este vetor”) e por fim na origem do sistema (na tela aparecerá a mensagem “este ponto”). Na tela aparecerá o vetor resultante da soma dos dois vetores. Determinar as coordenadas do novo vetor.

Movimente um dos vetores iniciais. O que ocorre com a forma geométrica do vetor soma?

____

Preencha a tabela abaixo, colhendo quatro situações diferentes para os dois vetores iniciais (u e v) e o vetor final (u+v).

u	v	u+v

O que ocorre com as coordenadas do vetor soma?

____

Agora tente movimentar a extremidade do vetor soma. O que acontece?

O vetor soma é considerado pelo *Cabri* como um objeto dependente. Os objetos dependentes não podem ser movidos ou diretamente modificados. A modificação desses objetos só pode ser realizada indiretamente movendo os pontos básicos ou objetos independentes que são responsáveis pela sua existência.

1.6. MULTIPLICAÇÃO DE UM VETOR POR UM NÚMERO REAL

Para multiplicar um vetor por um número real utilizaremos a função "homotetia" presente na sexta caixa de ferramenta da barra de ferramentas.

Para obter a constante "k" da homotetia, construia no *Cabri* uma reta (presente na terceira caixa de ferramenta). Em seguida, localize um segundo ponto nesta reta (selecionar ponto na segunda caixa de ferramenta). Na nona caixa de ferramenta, selecione distância ou comprimento e clique com o mouse nos dois pontos. Será dada a distância entre os dois pontos, a qual será denominada "k". Crie o sistema x0y e um vetor com origem na origem desse sistema. Determine as coordenadas desse vetor.

Direcione o mouse para a sexta caixa de ferramenta da barra de ferramentas. Pressione e mantenha pressionado o botão do mouse sobre o ícone. Clique na função "homotetia". Em seguida, clicar no vetor (ao direcionar o mouse sobre um vetor aparecerá a mensagem "este vetor"), sobre o valor da constante k e por fim no ponto (0,0). Determinar as coordenadas do novo vetor.

Movimente o vetor inicial pela sua extremidade.

O que ocorre com a representação gráfica do vetor que foi multiplicado pelo fator k? ________________________________

Preencha a tabela abaixo com três situações diferentes de valores do vetor inicial (u) e do vetor final (ku).

u	ku

O que ocorre com as coordenadas do vetor que foi multiplicado pelo fator k?

É possível também mudar o valor de k. Para isso, localize o mouse no segundo ponto da reta dada e arraste-o obtendo novos valores de k. O que ocorre com os vetores?

____

Obs: Duplicidade

Quando há dois objetos no mesmo local, aparece uma “lupa” acompanhada do texto “Qual objeto?”. Por exemplo, vamos direcionar o mouse (sem clicar) no primeiro vetor (entre a origem e a extremidade). Sabemos que há dois vetores passando por este local. Clique nesta região e observe o aparecimento da mensagem:

vetor
vetor

Esta mensagem indica a ambigüidade na ordem de construção. Por exemplo, se quisermos selecionar o primeiro vetor construído, temos que clicar na palavra vetor da primeira linha. Realizando isso, podemos observar que na tela o primeiro vetor aparece destacado.

2. CONHECENDO AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DO *CABRI*

Analisaremos, agora, algumas transformações geométricas presentes na sexta caixa de ferramenta do *Cabri*.

2.1. SIMETRIA AXIAL

Construir no sistema x0y um vetor com origem em O. A simetria axial é também conhecida como reflexão em relação a um eixo.

Vamos fazer a simetria do vetor construído em relação ao eixo x. Para isso:

a) na sexta caixa de ferramenta, selecionar simetria axial;
b) clicar no vetor e em seguida no eixo x (aparecerá a mensagem “em relação a esse centro”).

2.2. TRANSLAÇÃO

Construir no sistema x0y um vetor com origem em O. A translação desloca um objeto segundo a medida, a direção e sentido dados por um vetor:

a) Construir um outro vetor livre, com origem qualquer.
b) Solicitar na sexta caixa de ferramenta a translação, clicar no vetor a ser transladado e em seguida no vetor livre.

2.3. ROTAÇÃO

Rotação de um vetor segundo um ângulo θ, ao redor da origem do sistema x0y:

a) no sistema x0y, criar um vetor com origem em 0;
b) definir o ângulo (na penúltima palheta clicar em número, em seguida clicar na tela do *Cabri* e digitar o valor do ângulo em graus);
c) selecionar rotação na sexta caixa de ferramenta, clicar no vetor a ser rodado, na origem e em seguida no valor do ângulo.

2.4. HOMOTETIA

Homotetia (também conhecida como expansão/contração) dilata ou comprime um objeto segundo um fator k.

a) no sistema x0y, criar um vetor com origem em 0;
b) definir o fator (na penúltima palheta, clicar em número. Em seguida, clicar na tela do *Cabri* e digitar o fator de homotetia);
c) selecionar na sexta caixa de ferramenta a função homotetia. Clicar no vetor a ser dilatado ou comprimido, em seguida na origem e, por fim, no fator de homotetia.

2.5 MACROS: PROJEÇÕES ORTOGONAIS EM RELAÇÃO AO EIXO X E AO EIXO Y.

a) no sistema x0y, criar um vetor com origem em 0.
b) selecionar a macro projeção ortogonal em relação ao eixo x na sétima caixa de ferramenta.
c) clicar no vetor a ser projetado e em seguida no ponto (0,0).

Obs: o mesmo procedimento será usado para a projeção ortogonal em relação ao eixo y.

ANEXO IV – ATIVIDADES DA PRIMEIRA FASE DO *DESIGN*

ATIVIDADE 1

a) Considerando o plano x0y, o que você entende por reflexão em relação ao eixo y?

b) A reflexão no plano em relação ao eixo y é uma transformação linear? Justifique.

c) Represente a lei algébrica F(x,y) e o gráfico da reflexão no plano x0y, em relação ao eixo y.

d) Determine a matriz desta reflexão em relação à base canônica.

e) Qual seria a imagem do vetor (3,-2) por esta reflexão?

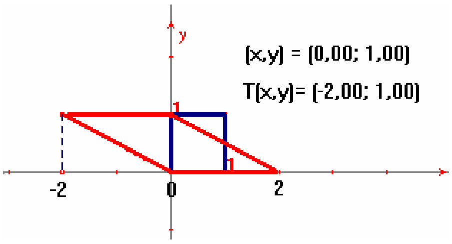
ATIVIDADE 2

<u>Tarefa 1</u>. Considere os vetores "u_1" e "u_2" que representam uma base do R^2. Sejam v_1 e v_2 elementos arbitrários do R^2. Então existe uma única transformação linear F: $R^2 \to R^2$ tal que $F(u_1) = v_1$ e $F(u_2) = v_2$.
Se $u = a_1u_1+a_2u_2$, então, $F(u) = a_1F(u_1) + a_2F(u_2) = a_1v_1+a_2v_2$.
O que você entende por esta descrição?

<u>Tarefa 2.</u> Seja F uma transformação linear dada por F: $R^2 \to R^2$ / $F(1,-1)=(0,-2)$ e $F(0,3)=(3,6)$.
Determine F(x,y) e a matriz desta transformação linear em relação à base canônica.

ATIVIDADE 3

Tarefa 1. Determine a lei algébrica T(x,y) que transforma o quadrado azul, de vértices (0,0), (1,0), (1,1) e (0,1), no quadrilátero destacado em vermelho.

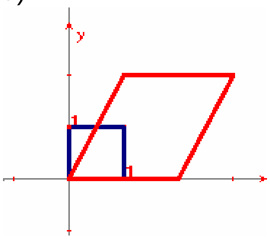


<u>Tarefa 2.</u> Sabendo que $T(x,y)=(2x-2y,y)$ representa a lei algébrica de uma transformação linear, determine a imagem gráfica do quadrado ABCD, dados A(0,0), B(1,0), C(1,1) e D(0,1).

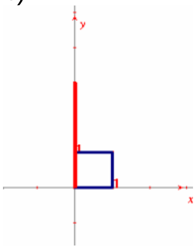
ATIVIDADE 4

Em cada item, são dadas duas figuras. A figura azul representa o objeto inicial e a figura vermelha a sua imagem por meio de uma aplicação. Analise os casos em que a figura vermelha pode ser obtida por meio de transformações lineares. Justifique a sua afirmação.

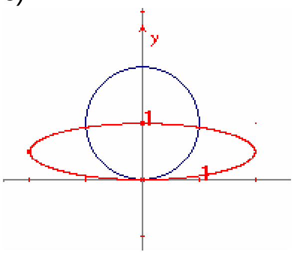
a)



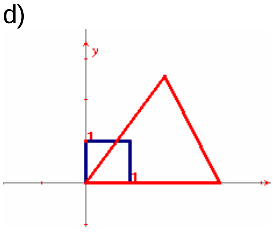
b)



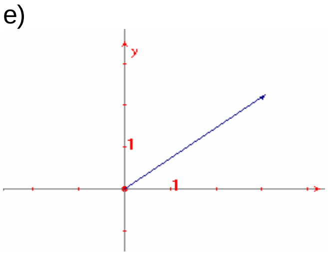
c)



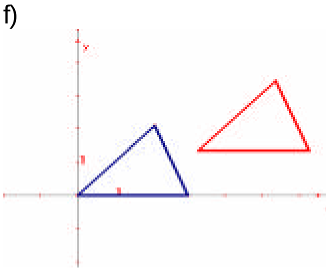
d)



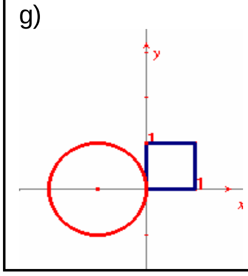
e)



f)



g)



ANEXO V – ATIVIDADES DA SEGUNDA FASE DO *DESIGN*

ATIVIDADE 1

Tarefa 1. Escreva, com suas palavras, o que você entende por transformação linear.

Tarefa 2. A definição abaixo é normalmente encontrada nos livros de Álgebra Linear.
Uma transformação T é dita linear se, e somente se, dados U e V espaços vetoriais sobre R e T: $U \to V$:
a) $T(u+v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in U$ b) $T(ku) = k. T(u), \forall k$ real e $\forall u \in U$.
Estabelecendo uma comparação com a sua resposta dada no item anterior, o que está contemplado nesta definição? E o que não está?

ATIVIDADE 2

Abra um arquivo novo no *Cabri*.

Tarefa 1. Aplique a “Simetria axial”, em relação ao eixo x, em um vetor qualquer com origem na origem do sistema x0y.

Tarefa 2. Procure determinar a lei algébrica F(x, y) desta transformação.

Tarefa 3.

a) Considerando a simetria axial em relação ao eixo x (ou reflexão em relação ao eixo x) como uma transformação, quem são U e V?

b) Discuta a linearidade desta transformação.

.

Tarefa 4. Uma transformação linear do plano no plano será sempre do tipo T(x,y) = (ax+by, cx+dy), com a, b, c e d reais. Esta transformação também pode ser representada na forma: $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. No caso, a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é denominada matriz da transformação linear em relação à base canônica do IR^2.

Determine a representação da simetria em relação ao eixo x (ou reflexão em relação ao eixo x) na forma $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e, em seguida, apresente a sua matriz em relação à base canônica. Utilizando a matriz obtida, determine a imagem do vetor $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

ATIVIDADE 3

Abra o arquivo da atividade 3 no *Cabri* (arq_ativ3).

Tarefa 1. Ajuste a matriz para $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .O que ocorre com a imagem do quadrado? Como é denominada esta matriz?

Tarefa 2. Nos itens seguintes, pede-se:

- analise qual foi a alteração feita sobre a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- escreva, com suas palavras, o que você observou em relação às três representações após a alteração da matriz.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

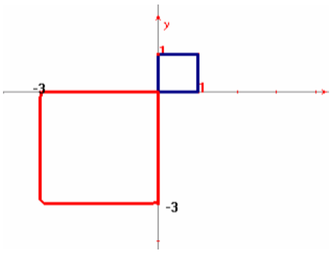
c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

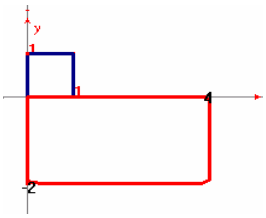
e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Tarefa 3. Utilizando o mesmo arquivo do *Cabri*, determine a matriz em relação à base canônica e a forma algébrica F(x,y) de uma transformação linear que leva o quadrado unitário (em azul) na figura vermelha em cada item abaixo.

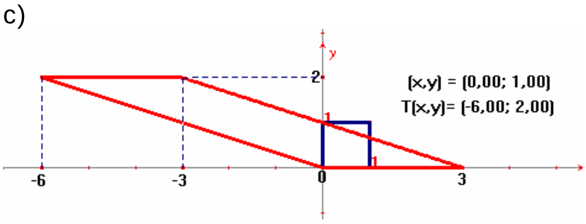
a)



b)



c)



Tarefa 4. Sem utilizar o *Cabri*, determine a matriz em relação à base canônica e a forma algébrica F(x,y) de uma aplicação linear que transforma o quadrado unitário, situado no primeiro quadrante, com um dos vértices na origem e lados sobre os eixos:

a) em um retângulo de lados 2 na direção do eixo x e 3 na direção do eixo y, situado no primeiro quadrante.

b) em um retângulo de lados 2 na direção do eixo x e 3 na direção do eixo y, situado no segundo quadrante.

c) em um segmento de medida 2 sobre o eixo y.

d) em um ponto.

e) na sua imagem cisalhada horizontalmente por um fator de valor 3.

f) na sua imagem cisalhada verticalmente por um fator de valor 4.

g) em um quadrado de lado ½, situado no primeiro quadrante.

ATIVIDADE COMPLEMENTAR

Abra o arquivo da atividade comp1 do *Cabri* (arq_comp1). A figura, em vermelho, representa a imagem do retângulo azul por uma transformação linear.

Tarefa 1. Ajuste a matriz para $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. O que ocorre com a imagem do retângulo? Como é denominada esta matriz?

Tarefa 2. Nos itens seguintes, pede-se:

– analise qual foi a alteração feita sobre a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

– escreva, com suas palavras, o que observou em relação às três representações, após a alteração.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

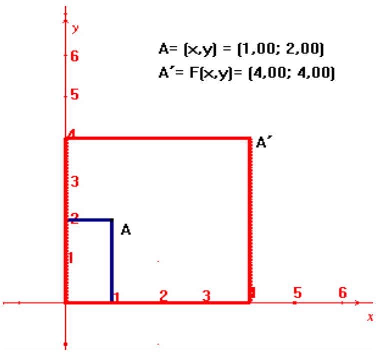
Tarefa 3.

a) Sem utilizar o *Cabri*, se a matriz da transformação linear, em relação à base canônica, fosse $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qual seria a imagem geométrica do retângulo?

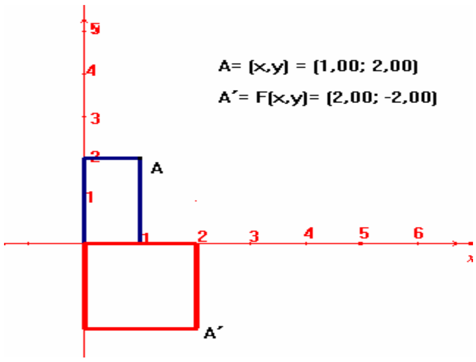
b) Sem utilizar o *Cabri*, se a matriz da transformação linear, em relação à base canônica, fosse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, qual seria a imagem geométrica do retângulo?

<u>Tarefa 4</u>. Sem utilizar o *Cabri*, determine a matriz da transformação linear, em relação à base canônica, e a forma algébrica F(x,y) de uma transformação linear que leva o retângulo em azul na figura em vermelho, considerando as condições dadas para A e A'.

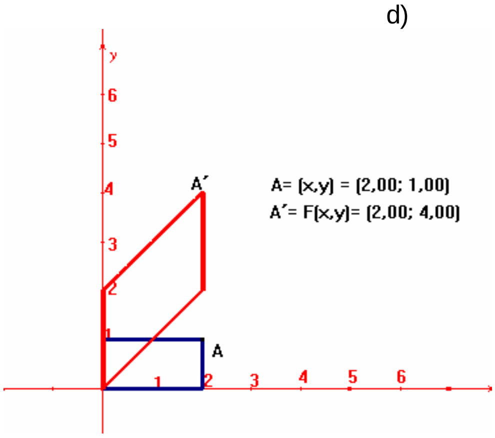
a)



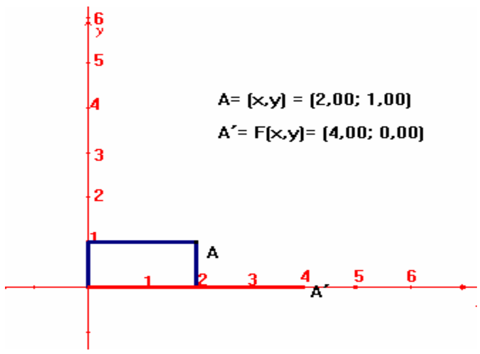
b)



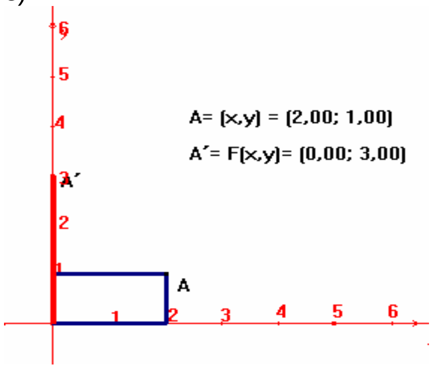
c)



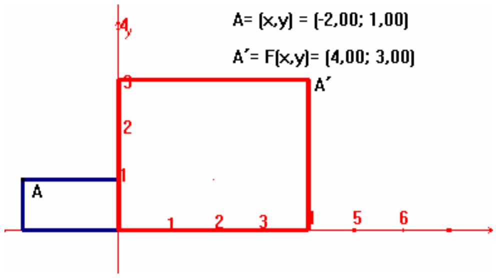
d)



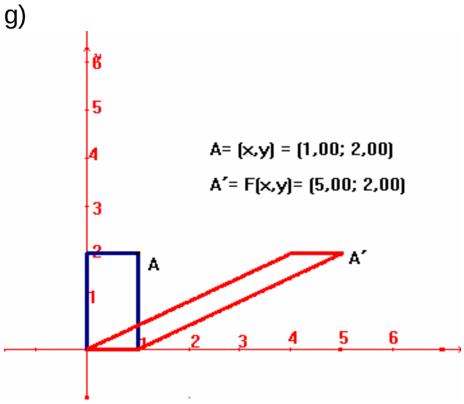
e)


A= (x,y) = (2,00; 1,00)
A´= F(x,y)= (0,00; 3,00)
A´
A
1
2
3
4
5
6

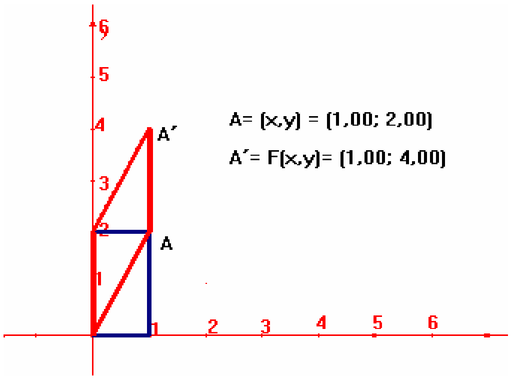
f)


A= (x,y) = (-2,00; 1,00)
A´= F(x,y)= (4,00; 3,00)
A´
A
1
2
3
5
6

g)


A= (x,y) = (1,00; 2,00)
A´= F(x,y)= (5,00; 2,00)
A
A´
1
2
3
4
5
6

h)


A= (x,y) = (1,00; 2,00)
A´= F(x,y)= (1,00; 4,00)
A´
A
1
2
3
4
5
6

ATIVIDADE 4

Tarefa comp4a. Abra o arquivo da atividade 4 do *Cabri* (arq_ativ4). Ao aplicar a transformação linear solicitada no triângulo azul, observe o tipo de imagem gráfica obtida na figura vermelha. Estabeleça, com suas palavras, uma relação entre o efeito geométrico encontrado e a lei algébrica F(x,y) da transformação linear aplicada.

a) F(x,y) = (x,y)

b) F(x,y) = (-2x,y)

c) F(x,y)= (x,3y)

d) F(x,y) = (x+3y, y)

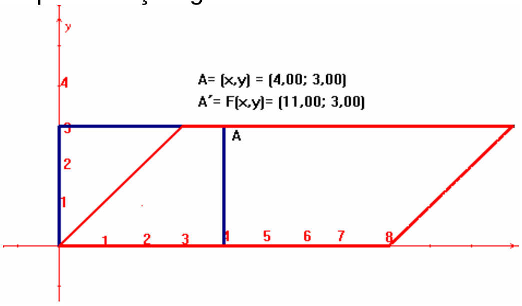
e) F(x,y) = (x-5y, y)

f) F(x,y) = (x, 2x+y)

Tarefa comp4b. Sem utilizar o *Cabri*, verifique se a matriz dada pode ser a matriz, em relação à base canônica, de uma transformação linear que gera a figura vermelha partindo da azul. Justifique, com suas palavras, a resposta fornecida.

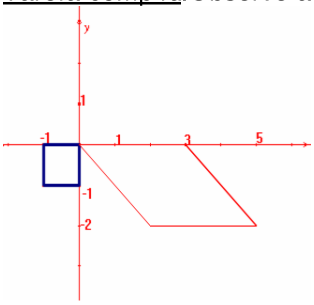
Matriz da transformação linear F (em relação à base canônica): $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Representação gráfica:



Tarefa comp4c. Seja F(x,y) = (3x+2y, 4y). Sem utilizar o *Cabri*, relate que tipo de efeito geométrico a aplicação desta função gera em um retângulo situado no primeiro quadrante, com um dos vértices na origem e lados sobre os eixos x e y.

<u>Tarefa comp4d</u>.Observe a representação gráfica a seguir.



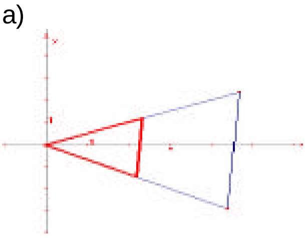
Sem utilizar o *Cabri,* relate se é possível transformar o quadrado azul na figura vermelha pela transformação linear F(x,y) = (-3x+2y, 2y). Justifique.

<u>Tarefa 1</u>. Descreva a relação entre cada elemento da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de uma transformação linear, em relação à base canônica, e a imagem gráfica de um objeto qualquer.

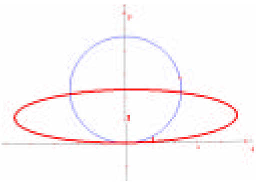
<u>Tarefa 2</u>. Sem utilizar o *Cabri*, justifique se existe uma transformação linear que aplicada em um quadrado resulta em uma circunferência.

<u>Tarefa 3</u>. Sem utilizar o *Cabri*, justifique se é possível, por meio de uma transformação linear, transformar o objeto azul no vermelho.

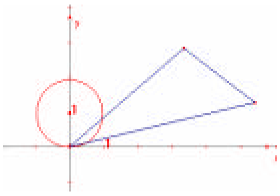
a)



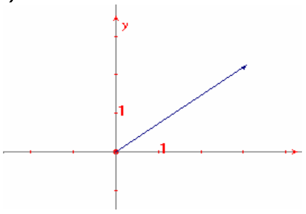
b)



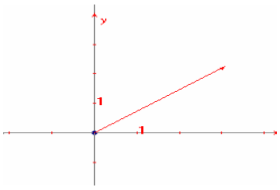
c)



d)



e)



ATIVIDADE 5

Abra o arquivo da atividade 5 do *Cabri* (arq_ativ5). Determine a lei algébrica “F(x,y)” da transformação linear responsável pela transformação da circunferência na elipse.

ATIVIDADE 6

Abra o arquivo da atividade 6 do *Cabri* (arq_ativ6). Na tela são dadas as representações geométricas de dois vetores e dois valores numéricos reais “k_1” e “k_2”, os quais podem ser alterados.

Utilizando o *Cabri*, determine:

a) o vetor u+v.

O que este vetor representa geometricamente?

b) o vetor w combinação linear de u e v, de tal forma que w=2u+3,21v.

c) um vetor genérico que represente a combinação linear de u e v.

ATIVIDADE 7

Tarefa 1. Abra o arquivo 1 da atividade 7 do *Cabri* (arq1_ativ7). Nele serão dados dois triângulos, sendo o triângulo azul a imagem do triângulo vermelho por meio da translação, segundo o vetor w dado. Esta translação foi realizada com o auxílio do comando “Translação” do *Cabri*.
Utilizando o *Cabri*, verifique se a transformação é linear, justificando sua resposta.

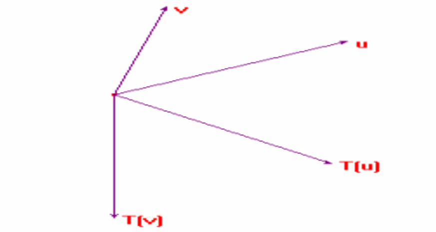
Se julgar necessário, você pode utilizar o comando “Equação e coordenadas” para determinar as coordenadas dos vetores.

Tarefa 2. A lei algébrica da translação é dada por F(x,y) = (x+a, y+b), sendo (a, b) as coordenadas do vetor que fornece a direção, o sentido e a medida do deslocamento. Abra o arquivo 2 da atividade 7 (arq2_ativ7). Altere os valores de a e b e descreva o papel de cada um na representação gráfica da translação do quadrado inicial. Para que vetor (a, b) esta transformação respeitará as condições de linearidade? Por quê?

Tarefa 3. Considerando $(k_1, k_2) \neq (0,0)$, é possível representar a translação na forma $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$? Justifique sua resposta. Existe uma matriz de ordem 2x2 que represente a translação?

ATIVIDADE 8

Abra o arquivo da atividade 8 do *Cabri* (arq_ativ8). Na tela serão dados dois vetores “u” e “v” e as suas imagens “T(u)” e “T(v)” por meio de uma transformação T, conforme ilustrado a seguir.



Sabendo que a transformação é linear, determine na tela do *Cabri*:

<u>Tarefa 1</u>. T(u+v)

Tarefa 2. T(3u)

<u>Tarefa 3</u>. T(2u+3v)

<u>Tarefa 4</u>. T(0,4u-2,1v)

<u>Tarefa 5</u>. T(w), onde w é um vetor arbitrário.

ATIVIDADE 9

<u>Tarefa 1</u>. Vamos construir um programa que faça o cisalhamento horizontal em qualquer figura.

a) o cisalhamento horizontal é do tipo $F(x,y) = (x+ay, y)$. Em edição numérica, vamos criar um valor para a, o qual poderá ser alterado.

b) utilizando a calculadora do *Cabri* e o valor da edição numérica, vamos criar a matriz de F, em relação à base canônica, e a forma algébrica F(x,y).

c) vamos construir o sistema de eixos x0y e um quadrado unitário com um dos vértices na origem.

d) vamos criar um ponto sobre este quadrado e pedir as suas coordenadas.

e) utilizando a calculadora do *Cabri*, vamos achar a imagem deste ponto pelo cisalhamento.

f) vamos localizar este ponto no sistema x0y (traçar retas perpendiculares ao eixo e determinar o ponto de intersecção).

g) pedir o lugar geométrico deste ponto quando o ponto do quadrado o percorre.

h) se desejar fazer a imagem de outro objeto, basta construí-lo e redefinir o ponto sobre este novo objeto. Por exemplo, utilizando o comando de circunferência do *Cabri*, vamos criar uma circunferência em qualquer local da tela. Utilizando o comando "redefinir objeto" do *Cabri*, vamos selecionar o ponto móvel do quadrado, redefini-lo como "ponto sobre objeto" e localizá-lo em qualquer ponto da circunferência. Podemos observar que o cisalhamento é transferido para este novo objeto.

<u>Tarefa 2</u>. Sejam F e G duas transformações lineares do plano no plano. Neste caso, para cada x em R^2 é possível calcular primeiramente F(x), que resulta em um vetor do R^2 e depois calcular G(F(x)), que também resultará em um vetor no R^2. Desta forma, a aplicação de F, seguida de G, produz uma transformação do R^2 em R^2. Esta transformação é chamada "composta de F com G" e indicada por GoF.

a) No *papel&lápis*, determine a matriz de F, em relação à base canônica, sendo F uma expansão uniforme no plano de fator 3. Determine, também, a matriz de G em relação à base canônica, sendo G um cisalhamento horizontal no plano de fator 2. Discuta com seu colega e explique como é possível determinar a matriz da composta de F com G, em relação à base canônica, ou seja, da expansão de fator 3 seguida de um cisalhamento horizontal de fator 2? Determine essa matriz. Por fim, determine a imagem do quadrado ABCD, dados A(0,0), B(1,0), C(1,1) e D(0,1) por esta composta de F com G.

b) Elabore, no *Cabri*, um programa de construção no qual seja possível realizar a composição de duas transformações lineares no plano. Este programa deve permitir verificar a dependência entre a matriz da composta de duas transformações lineares, em relação à base canônica, e a representação gráfica de um objeto qualquer segundo esta composição.

c) Verifique se a composta de um cisalhamento horizontal de fator 2, seguido de uma projeção ortogonal sobre o eixo y, aplicada em um quadrado unitário situado no primeiro quadrante, com um vértice na origem e lados sobre os eixos, é equivalente ao resultado da aplicação no sentido inverso, ou seja, da projeção ortogonal sobre o eixo y, seguida do cisalhamento horizontal de fator 2, aplicado no mesmo quadrado. Justifique o resultado obtido.