YUMI KODAMA

O ESTUDO DA PERSPECTIVA CAVALEIRA:

UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO MÉDIO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP

São Paulo

2006

YUMI KODAMA

O ESTUDO DA PERSPECTIVA CAVALEIRA:

UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO MÉDIO

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência para obtenção parcial do título de **MESTRE** em **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, sob a orientação do **Prof. Dr.Vincenzo Bongiovanni***

PUC/SP

São Paulo

2006

Banca Examinadora

Profa. Dra. Ana Paula Jahn – PUC-SP

Profa. Dra. Otília T. W. Paques – IME – UNICAMP

Prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni –PUC-SP – (orientador)

DEDICATÓRIA

À família Kodama,

sem ela não teria feito...

AGRADECIMENTO

Aos meus pais, mesmo não sabendo bem o que eu estava fazendo, ajudando materialmente e financeiramente.

Aos meus irmãos, cunhados e sobrinhas por terem apoiado e compreendido minhas ausências.

Aos amigos de coração, que acreditaram em mim: as Míriams, Valéria, Sueli, as Rosas, Alba, Alzinan, Jorge, Silvia, Edete e tantos outros.

Aos amigos e colegas do Mestrado Acadêmico-2004, Yuk, Luciana, Vera, Renato, Carlos, Maurício, Edith, João Pedro, Marcelo, Lourival, Vânia, Raquel, Ubiratan, André, Marinete, enfim, todos que compartilharam o nascimento e o crescimento desta pesquisa.

Aos amigos colegas, Luzenário, Silvia, Maristela, Rita, Odimar, Solange, Marli, Vinicius, Vera, que participaram das minhas angústias e dúvidas.

À Miriam Bruno pela amizade e revisão deste trabalho.

À Dóris Cristina, amiga, colega e vice-diretora da escola em que pude realizar esta pesquisa.

Ao prof. Dr. Vincenzo Bongiovanni, que tive a felicidade de ser sua orientanda, fã de seus trabalhos. Agradeço pela paciência e... quanta, pela orientações, verdadeiras aulas, um grande professor.

À profa. Dra. Ana Paula Jahn, pelas sugestões, comentários e orientações antes, durante as aulas e na finalização deste trabalho.

À profa. Dra. Otília T. W. Paques pelos comentários e sugestões para esta dissertação.

Aos professores-doutores Saddo, Wagner, Anna Franchi, Lulu, Benedito, Silvia pelas aulas, onde me senti renovada, reaprendendo...

Ao Francisco e à Vera, da secretaria do Pós, que me orientaram na parte documental.

À PUC, pela sua excelência.

A CAPES

E especialmente a Francisco Carlos (Hiroshi) por ensinar o caminho.

E a Deus, por tudo isso!

RESUMO

Esta dissertação tem por objetivo investigar a apropriação das regras da perspectiva cavaleira, por alunos do Ensino Médio, a partir das sombras dos objetos e de um ambiente informático e se tais regras favorecem a resolução de problemas da Geometria Espacial.

A pesquisa foi baseada nas investigações de Bernard Parzysz (1989, 1991, 2001) sobre representações planas de figuras espaciais, nos trabalhos de Paolo Boero (1996) sobre a produção de conjecturas dos alunos a partir da experiência com sombras solares e nos trabalhos de Chaachoua (1998) sobre as modificações produzidas por um ambiente informático nas relações dos sujeitos sobre os objetos matemáticos.

Utilizamos como metodologia de pesquisa, uma seqüência de atividades baseadas em alguns princípios da engenharia didática que foi aplicada a um grupo de 7 alunos da 3ª série do Ensino Médio.

As produções dos alunos mostraram que um jogo dialético entre a geometria concreta e a geometria espaço-gráfica contribui para a apropriação das regras da perspectiva cavaleira. No entanto, a análise desta seqüência de ensino apontou que a perspectiva cavaleira foi utilizada apenas como uma técnica de desenho e não como uma ferramenta para auxiliar na resolução de problemas da Geometria Espacial. Outras seqüências de ensino poderiam ser concebidas para estudar a complexidade dessa passagem.

Palavras-Chave: perspectiva cavaleira – Cabri-Géomètre – Geometria Espacial

ABSTRACT

This paper has for objective to investigate the appropriation of the rules of the perspective cavaliere, for pupils of High School, from the shadows of objects and of a computer-based environment and if such rules favor the resolution of problems of Space Geometry.

The research was based on the inquiries of Bernard Parzysz (1989, 1991, 2001) on plain representations of space figures, on the works of Paolo Boero (1996) on the production of conjectures of the pupils from the experience with solar shadows and on the works of Chaachoua (1998) on the modifications produced for a computer-based environment in the relations of the subjects on mathematical objects.

We use as research methodology, a sequence of activities based on some principles of the didactic engineering that was applied to a group of 7 pupils of 3^{rd} grade of High School.

The productions of the pupils showed that a dialectic play between concrete geometry and space-graphic geometry contributes for the appropriation of the rules of the perspective cavaliere. However, the analysis of this sequence of education pointed that the perspective cavaliere was used only as one technique of drawing and not as a tool to assist in the resolution of problems of Space Geometry. Other sequences of education could be conceived to study the complexity of that passage.

Keywords: perspective cavaliere – Cabri-Géomètre – Space Geometry

SUMÁRIO

Lista de Tabelas

Capítulo I

- A PROBLEMÁTICA -

1.1 INTRODUÇÃO

Nos 20 anos de magistério, sempre tivemos a preocupação com as questões ligadas à Geometria espacial. Durante as aulas de Geometria, os alunos apresentavam dificuldades em representar objetos tridimensionais no caderno. O objeto que era apresentado à vista nem sempre era bem representado no plano. Os desenhos desses objetos eram, na maioria das vezes, realizados sem técnica, distorcidos e dependiam também das habilidades e até da maturidade do aluno. Além disso, um objeto 3D representado em 2D era confundido, muitas vezes, como um objeto plano. Começamos então a perguntar por que é tão difícil para o aluno relacionar as propriedades dos objetos do espaço com os desenhos do plano? E sempre nos questionávamos se os recursos tecnológicos poderiam ajudar na aprendizagem da Geometria espacial.

Quando ingressamos no mestrado na PUC observamos que havia um grupo de pesquisa chamado TecMEM – Tecnologias e Meios de Expressão em Matemática, cujo objetivo era *formar uma cultura de investigação e pesquisa, envolvendo questões sobre as relações recíprocas entre práticas Matemáticas, aprendizagem e tecnologias, em particular, as tecnologias digitais, e a orquestração do ensino na presença de ferramentas tecnológicas*.

Resolvemos participar desse grupo, pois vislumbrávamos nele a possibilidade de refletir sobre a problemática do uso das tecnologias na formação dos conceitos geométricos.

Baseando-nos na busca de respostas às dificuldades dos alunos acima citadas, de uma melhor qualidade de ensino da Geometria através da informática e apoiando-nos em teóricos que têm a mesma preocupação, apresentamos ao leitor nosso objeto de pesquisa: o estudo da perspectiva cavaleira. Para isso, esta dissertação foi dividida em quatro capítulos:

No capítulo I, apresentamos a nossa trajetória pessoal como docente, o porquê da escolha do tema, os objetivos da pesquisa, o referencial teórico e as considerações metodológicas desta pesquisa.

No capítulo II, fazemos um estudo da perspectiva cavaleira dentro de um panorama histórico e matemático.

No capítulo III, tratamos das escolhas feitas para a concepção das atividades e apresentamos alguns elementos da análise a priori da seqüência de ensino.

No capítulo IV, descrevemos todo o processo experimental e analisamos as produções dos alunos.

No capítulo V, apresentamos os resultados e a conclusão do trabalho.

1.2 O ENSINO DA GEOMETRIA NO BRASIL

Iniciamos o trabalho consultando pesquisas para ter uma visão global do ensino da Geometria no Brasil de modo a extrair subsídios na construção de nossa problemática.

Em recente pesquisa, Almouloud (2004, p.99-100) aponta alguns fatores ligados ao ensino da Geometria:

> *- o sistema educativo brasileiro, que define a política da educação com recomendações e orientações gerais sobre os métodos, os conteúdos e o saber fazer, deixa para cada escola definir os conteúdos que julga importantes para a formação de seus alunos, fazendo com que a Geometria seja freqüentemente esquecida;*
>
> *- a formação precária dos professores em relação à Geometria;*
>
> *- alguns livros didáticos em geral, propõem situações de ensino que não enfatizam suficientemente a coordenação de registros de representação semiótica e a importância da figura para a visualização e exploração. Os problemas geométricos propostos por esses livros privilegiam resoluções algébricas, e poucos exigem raciocínios dedutivos ou demonstrações;*
>
> *- quase não existe a passagem da Geometria empírica para a Geometria dedutiva;*
>
> *- há pouco enfoque na leitura e interpretação de textos matemáticos.*

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (5ª a 8ª série, p. 122,1998a) reconhecem que

> *[...] a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática, e muitas vezes, confunde-se seu ensino com os das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, à medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.*

Quanto ao trabalho com espaço e forma, os PCN (1998b, p122) sugerem que:

> *Como campo de problemas, o estudo do espaço e das formas envolve três objetos de natureza diferente:*
>
> *1) O espaço físico, ele próprio – ou seja, o domínio das materializações;*
>
> *2) A Geometria, concebida como modelização desse espaço físico – domínio das figuras geométricas;*
>
> *3) O(s) sistema(s) de representação plana das figuras espaciais – domínio das representações gráficas.*
>
> *A esses objetos correspondem três questões relativas à aprendizagem que são ligadas e interagem umas com as outras. São elas:*

> *a) A do desenvolvimento das habilidades de percepção espacial;*
> *b) A da elaboração de um sistema de propriedades geométricas e de uma linguagem que permitam agir nesse modelo;*
> *c) A de codificação e de decodificação de desenhos.*

No que diz respeito às representações planas das figuras espaciais, os PCN (1998c, p.125) colocam

> *[...] que as principais funções do desenho são:*
> *Visualizar – fazer ver, resumir;*
> *Ajudar a provar;*
> *Ajudar a fazer conjecturas (o que se pode dizer).*
> *Quando os alunos têm de representar um objeto geométrico por meio de um desenho buscam uma relação entre a representação do objeto e suas propriedades e organizam o conjunto do desenho de uma maneira compatível com a imagem mental global que têm do objeto.*
> *As produções dos alunos mostram que eles costumam situar-se em relação a dois pólos, geralmente antagônicas: um que consiste em procurar representar o objeto tal como ele (aluno) imagina [...] à sua vista; outro que consiste em procurar representar, sem adaptação, as propriedades do objeto que (aluno) julga importante.*

Os Parâmetros Curriculares Nacionais dão uma visão geral da Geometria Espacial no currículo de Matemática em todos os ciclos escolares, mas não especificam o conteúdo a ser desenvolvido em sala de aula, em termos de tópicos principalmente em relação ao Ensino Médio.

Nos últimos sete anos, pouco mudou em relação ao ensino da Geometria no Brasil, fatores externos e internos à sala de aula, citados acima, dificultam o ensino-aprendizagem da Geometria.

1.3 A IMPORTÂNCIA DO DESENHO NA GEOMETRIA

As leituras dos PCN e as pesquisas citadas no item anterior nos sugeriram aprofundar a problemática criada pelo desenho na Geometria espacial.

Na Geometria, o desenho desempenha um papel importante, pois ele relaciona o espaço sensível com a teoria. Embora ele seja importante, ele cria uma problemática para os alunos na resolução de problemas da Geometria espacial. Esta problemática está ligada à representação gráfica dos objetos do espaço. Quando os alunos passam do objeto espacial à sua representação numa folha de papel há uma perda de informações. Segundo Bkouche (1983, p.16) esta problemática pode desaparecer com uma aprendizagem das regras de representação.

Bessot (1987), Osta (1987), Audibert e Keita (1987) mostram a necessidade de ensinar regras explícitas para a representação dos objetos no espaço.

Em muitos textos, desenho, figura e objeto geométrico se confundem e é necessário distinguí-los. Esta distinção está no centro de vários trabalhos em didática da Matemática, na França.

Robotti (2002) sustenta que a idéia de distinguir o desenho traçado sobre uma folha de papel de um objeto idealizado, data do século IV a.C. em A República de Platão que expõe a filosofia de Sócrates. Abaixo temos um trecho onde Sócrates fala sobre os geômetras:

> *[...] eles (os matemáticos) se servem de figuras visíveis e raciocinam sobre elas, pensando, não nessas figuras mesmas, porém nos originais; seus raciocínios versam sobre o quadrado em si e a diagonal em si, não sobre a diagonal que traçam, e assim no restante [...] servem-se como outras imagens para procurar ver estas coisas em si, que não se vêem de outra forma exceto pelo pensamento.* (PLATÃO, 1973, p. 101, apud MENEGHETTI, 2003)

Acrescenta ainda que toda atividade geométrica faz apelo, às vezes, aos objetos teóricos que são percebidos apenas no pensamento. Robotti cita Capponi e Laborde (1994), que propõem uma distinção entre desenho e objeto geométrico:

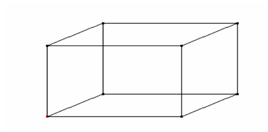
> *Como uma entidade material sobre um suporte, o desenho pode ser considerado como um significante de um referente teórico (objeto de uma teoria geométrica como a da Geometria euclidiana, ou da Geometria projetiva). A figura geométrica consiste no emparelhamento de um referente dado a todos os desenhos, então é definida como um conjunto de pares formados por dois termos, o primeiro termo o referente, o segundo um dos desenhos que o representa; o segundo termo é tomado do universo de muitos desenhos possíveis do referente.*
>
> *[...] as relações entre um desenho e seu referente construídas por um sujeito, leitor ou produtor do desenho, constituem o significado da figura geométrica associada por este sujeito. A figura (significado), neste caso, é a reconstrução mental de um desenho, abstraída de seu suporte material, para a função de representar idealmente o objeto geométrico referente.* (CAPPONI, LABORDE, apud ROBOTTI, 2002) (tradução nossa).

Robotti (ibid) adota a definição de figura de Capponi e Laborde: é um conjunto de pares compostos pelo objeto geométrico O e os desenhos d_i que são as representações materiais deste objeto geométrico:

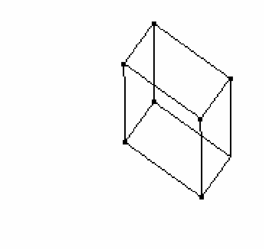
$$F = \{(O, d_1), (O, d_2), (O, d_3), ..., (O, d_i)\}$$

Dessa maneira, Robotti completa que a figura é fruto do processo de abstração que o sujeito efetua, a partir de um desenho (significante) e imagina o objeto geométrico (referente) representado.

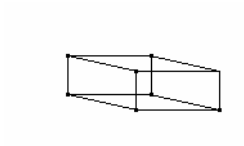
Dado um paralelepípedo, podemos imaginá-lo (objeto geométrico) e representá-lo, ou seja, desenhá-lo sob diversos pontos de vista. Então podemos dizer que a figura paralelepípedo é o conjunto formado pelo seu referente e suas várias representações possíveis.



d_1



d_2



d_3

Podemos ver acima, algumas representações do objeto geométrico paralelepípedo. O conjunto dos pares {(paralelepípedo, d_1), (paralelepípedo, d_2), (paralelepípedo, d_3),...} é a figura paralelepípedo. O desenho pode tornar acessível o objeto geométrico, comunicar uma idéia e, portanto a figura. Caso essa abstração não aconteça, ou seja, não lhe é dado um significado, então não tem status de figura, mas uma ilustração.

Nesse aspecto, adotaremos as idéias de Capponi e Laborde nesta dissertação.

1.4 COMO REPRESENTAR OBJETOS TRIDIMENSIONAIS NO PLANO

A representação de objetos tridimensionais numa folha de dimensão dois é pouco explorada em sala de aula, esta constatação é evidenciada em pesquisas como de Nacarato e Passos (2003).

Professores e alunos estão acostumados com representações estereotipadas dos livros didáticos e repetem nas suas aulas essas mesmas representações (Nacarato e Passos, 2003; Parzysz,1991).

Quando os alunos não percebem que o objeto representado no plano é um objeto tridimensional significa que eles não relacionam as propriedades que poderiam estar no desenho com as que estão no objeto e vice-versa. Os alunos apenas repetem os desenhos que os professores colocam na lousa e não conseguem imaginar uma situação espacial a partir de um desenho. Essas dificuldades foram percebidas em nossos alunos durante as aulas de Geometria Espacial.

Diante dessas dificuldades, percebemos a necessidade de investigar uma maneira de ajudar o aluno a representar os objetos tridimensionais no plano para melhor compreender as propriedades dos objetos no espaço. Entre essas técnicas escolhemos a perspectiva cavaleira apoiando-nos nas idéias de Veloso (2004), Audibert (1990), Genevès e Laborde (2002) e Korkmaz (2003).

Veloso (2004) defende o ensino da perspectiva cavaleira porque

> *é um auxiliar essencial na visualização e resolução de problemas de Geometria do espaço, tendo em conseqüência uma grande importância no ensino da Geometria, devendo ser aprendido e utilizado pelos alunos como meio principal de representação.*

A conservação, no desenho, de propriedades do objeto fazem da perspectiva cavaleira uma importante ajuda na resolução de problemas na Geometria espacial, como Audibert (1990,p.V) coloca abaixo:

> *La conservation dans le dessin d'un maximum de propriétés tant affines que métriques de l'objet permet, sans atteindre à la puissance des dessins à l'identique de la géométrie plane, d'utiliser les perspectives cavalières comme une aide importante à la résolution des problèmes de géométrie dans l'espace[...].*

Segundo Genevès e Laborde (2002) *um procedimento de produção de figuras planas para a Geometria do espaço acessível ao nível do Ensino Fundamental é a perspectiva cavaleira, mas esse procedimento pode também ser estudado pelas propriedades Matemáticas que ela coloca em funcionamento.*

Korkmaz (2003) também defende o uso da perspectiva cavaleira no ensino:

> *La perspective cavalière a pris le pas sur la perspetive conique dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace, vraisemblablement por les raisons suivantes:*
>
> *La perspective cavalière (la projection parallèle) a plus d'invariants que la perspective centrale, donc les constructions faites en perspective cavalière sont plus simples qu'en perspective centrale.*
>
> *La perspective cavalière offre une représentation graphique qui correspond à une image <<voisine>> de celle de l'objet à la vue.* (KORKMAZ, 2003)

Sintetizamos o texto acima da seguinte maneira: A perspectiva cavaleira possui mais invariantes (conservação de propriedades) e as construções são mais simples que a perspectiva central. As representações em perspectiva cavaleira oferecem uma representação gráfica que corresponde a uma imagem próxima ao objeto à vista.

1.5 AS TECNOLOGIAS E A PERSPECTIVA CAVALEIRA

Desde 1997, trabalhando em ambientes informáticos educativos, percebemos empiricamente que o uso das tecnologias via computador ajuda a explorar de uma maneira mais cativante conceitos de diferentes áreas do conhecimento. Decidimos então transformar esta crença numa pesquisa. Dada a nossa formação em Matemática, resolvemos investigar atividades que integrem o uso do computador com a Geometria espacial.

Constatada a dificuldade dos alunos em relação à representação dos objetos tridimensionais que foi apontada por várias pesquisas decidimos explorar como tema de nossa pesquisa o ensino da perspectiva cavaleira.

Esta dissertação, portanto, é uma pesquisa que investiga o uso da perspectiva cavaleira no ensino da Geometria espacial num ambiente informático.

1.6 TRABALHOS DE REFERÊNCIA

Nos parágrafos anteriores, delineamos uma primeira aproximação do nosso objeto de estudo. Nesse parágrafo, fizemos uma revisão da literatura no sentido de mapear estudos sobre as representações de objetos tridimensionais. Encontramos nos trabalhos de Parzysz (1988, 1989,1991), Boero (1996) e Chaachoua (1998) subsídios que irão nortear o nosso estudo.

Parzysz (1989) emprega as denominações "visto" (o que se vê) e "sabido" (o que se sabe sobre o objeto) para investigar os problemas de representação plana dos objetos tridimensionais. O objeto espacial representado no plano não pode conservar todas as suas propriedades intrínsecas (físicas ou geométricas) e suas propriedades extrínsecas (o aspecto que se apresenta à vista). Parzysz identifica dois princípios nas produções dos alunos em relação às representações dos objetos tridimensionais:

> a) *O princípio do hábito perceptivo, referência implícita a um <<ponto de vista habitual>> (quer dizer a um rápido olhar) e que corresponde ao pólo do visto* (PARZYSZ,1991, p. 113a).

Nesse caso, um quadrado será representado sempre com um dos lados paralelos à folha de papel. Dificilmente esse quadrado será representado em posição diversa, que é o hábito posicional.

> b) *O princípio de transferência de propriedades, postulando que certas propriedades geométricas se transportam* 'mutatis mutandis' *do objeto espacial à sua representação e inversamente, e que é relativo ao pólo do sabido* (PARZYSZ, 1991, p.113b).

Por exemplo, ao desenhar uma caixa em forma de cubo sabemos que as arestas são paralelas e perpendiculares entre si, mas não é possível transferir para todas as arestas na folha de papel estas propriedades, o desenho não representará o objeto visto.

> *Para identificar um desenho como sendo tridimensional pode-se notar que seus dois pólos (visto/sabido) são dificilmente dissociáveis por causa de uma influência recíproca dos aspectos perceptivos e cognitivos.*
>
> *A influência do visto sobre o sabido é evidente, em particular ela justifica em Análise o que recorre aos gráficos e na Geometria o que recorre ao desenho.*
>
> *O desenho tem a vantagem de dar uma informação global e sintética de uma situação muito complexa, mas ele não pretende descrever inteiramente o enunciado, necessitando de uma legenda. O sabido exerce sua influência sobre o visto e mais geralmente sobre o perceptivo, a faculdade de raciocinar sobre isto é aceitar as primeiras caracterizações de uma situação que lhe é apresentada pela faculdade de perceber.*
>
> *Quando se tem dúvidas sobre essas caracterizações, a faculdade de percepção deve aceitar estas dúvidas e retornar e reinterpretar a situação criando um anel contínuo entre os níveis* (PARZYSZ, 1989, p.94). *(tradução nossa de fonte francesa)*

As investigações de Parzysz podem ajudar a investigar os problemas relacionados a representações planas dos objetos tridimensionais.

Parzysz demonstra uma preocupação com as representações gráficas no plano de figuras espaciais em que alunos do Ensino Médio (na França) têm dificuldade em codificar e decodificar desenhos e têm inconscientemente a tendência de transferir propriedades geométricas do objeto representado para a representação gráfica e vice-versa. Ele percebeu também que as representações gráficas nos livros didáticos não têm um real status (uma condição técnica ou Matemática) matemático, o que se vê são esboços usando uma convenção gráfica (pontilhado para linhas escondidas que não se vê, cores para diferenciar planos...) e uso das propriedades da projeção paralela (preservação do paralelismo). Estas representações possuem ambigüidades, tanto gráfica, como em apenas um esboço. Parzysz também percebeu que os livros didáticos, muitas vezes, fazem mal uso de regras de projeção e acabam por confundir o aluno ao olhar para as figuras.

Parzysz (1988) mostra que, quando as representações que traduzem de maneira imediata as propriedades (sabido) de uma maneira mais ou menos compatível com a imagem mental global (visto), há uma evolução do desenho na medida em que há um domínio sobre as propriedades geométricas.

Colmez e Parzysz (2003), em um de seus estudos, perceberam que a representação em perspectiva paralela mostrou-se mais eficiente que a perspectiva central porque os desenhos estavam mais próximos do real.

A perspectiva cavaleira, um caso particular da perspectiva paralela, dá um certo equilíbrio entre o que se vê e o que sabemos sobre o objeto, um equilíbrio entre o objeto real e sua representação em uma superfície plana. Segundo Parzysz (ibid), o estudo da

Geometria espacial deve ser uma articulação entre a modelização do espaço físico e a explicitação das regras de um sistema de representação plana de figuras espaciais.

Segundo Korkmaz (2003), a perspectiva cavaleira, por ser de fácil construção, permite uma representação de um objeto tridimensional com a ajuda de primitivas geométricas (retas paralelas, mediatriz, ponto médio, etc., concebidas segundo uma propriedade geométrica). Ela corresponde a uma projeção paralela, mas com características próprias.

Segundo Parzysz (1991), a perspectiva cavaleira:

a) Possui invariantes (ponto médio, baricentro, colinearidade, razão entre segmentos e posição entre retas).

b) As construções são simples.

c) Oferece uma representação gráfica que corresponde a uma imagem mais próxima do que está à vista.

d) É fácil de executar.

e) Estabelece um equilíbrio entre o que se vê e o que se sabe sobre o objeto.

O trabalho de Parzysz mostra que a explicitação das regras da perspectiva cavaleira e do seu uso na representação de objetos espaciais pode favorecer a compreensão de propriedades da Geometria espacial.

No seu artigo *Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1,* de 2001, Parzysz trata da construção do conhecimento geométrico. Ele distingue quatro tipos de Geometria:

- No primeiro nível (G0), a geometria é concreta. É o nível da visualização e da materialização dos objetos.

- No segundo nível (G1), a geometria é espaço-gráfica, ou seja, é o nível onde o aluno representa o objeto observado sobre uma folha de papel fazendo uso de instrumentos como régua, compasso ou na tela de um computador como as primitivas de um software geométrico, etc.. A justificativa das propriedades é feita pelo "olhar",

- No terceiro nível (G2), a geometria é proto-axiomática, ou seja, os conceitos são objetos abstratos, as demonstrações dos teoremas são feitas a partir de premissas aceitas pelos alunos de modo intuitivo, os objetos e o caminho da validação são "localmente" os mesmos que na Geometria axiomática, mas não há necessidade de explicitar um sistema de axiomas.

- No quarto nível (G3), a geometria é axiomática, ou seja, os axiomas são explicitados completamente. É um nível totalmente teórico.

Parzysz sustenta que a grande tarefa do professor de Geometria é promover o salto entre as validações perceptivas e as validações dedutivas.

Outras pesquisas como as de Boero (1996) que tratam das sombras dos objetos podem também ajudar no estudo das representações dos objetos tridimensionais.

Boero considera a possibilidade dos alunos levantarem conjecturas em relação às sombras e objetos matemáticos.

> *As conjecturas são descritas como atos de produção da hipótese, podendo ser uma seleção argumentada (questões feitas pelo estudante ou por outro) entre alternativas possíveis, com uma margem de incerteza, com a sua validez, que pode ser resolvida com o raciocínio sistematicamente organizado ou um contra-exemplo (verificação da hipótese).* (BOERO, 1996). (tradução nossa de fonte em língua inglesa).

Boero sugere um ensino experimental onde os alunos possam ser capazes de construtivamente, produzir uma Geometria Racional. Isto significa produzir uma organização teórica do conhecimento geométrico onde *a experiência das sombras solares possa oferecer possibilidades de produção de conjecturas significativas de um ponto de vista da Geometria do espaço.* Considera importante a exploração dinâmica na situação do problema durante o estágio da produção da conjectura. Os alunos poderiam executar a exploração dinâmica de maneiras diferentes: através de gestos com as mãos imaginando o movimento do sol, movimentando-se, movendo as varas ou a plataforma suporte das varas e que é importante encontrar ambientes de aprendizagem apropriados para desenvolver os processos das conjecturas (exploração dinâmica de situações problema) como a sombra do sol e mesmo em ambientes informatizados.

Outras pesquisas tratam do uso da informática na formação de conceitos geométricos.

Chaachoua (1998, p. 55) sustenta que a introdução do ambiente informático dentro do sistema de ensino pode modificar as relações dos sujeitos sobre objetos matemáticos porque estes irão vivenciar de outro modo, além de possibilitar o estudo dos objetos de ensino que o ambiente do papel e lápis não pode oferecer.

Escolhemos para nossa investigação um ambiente informático associado à Geometria dinâmica: é o software Cabri-Géomètre desenvolvido por Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain. Este software, além de permitir a construção de figuras da Geometria elementar, apresenta a seguinte característica: as propriedades das figuras construídas são preservadas quando a figura é deformada.

> *A realização destas figuras em ambiente de Geometria dinâmica como o Cabri obriga a formação de figuras como resultado de um processo de*

> *construção fundado sobre operações geométricas, a transferência serve como procedimento de validação. A possibilidade que o Cabri oferece de bitmaps deformáveis seguindo as leis da perspectiva permite ter representações em perspectiva dos objetos reais e, por conseguinte aumentar o espectro das retroações do ambiente à construção do usuário.* (LABORDE, 2004, p.03).(tradução nossa de fonte francesa).

Uma hipótese sustentada por esses trabalhos é que o Cabri irá obrigar os alunos a relacionar a representação com a teoria explicitando dessa forma as propriedades matemáticas que serão utilizadas.

1.7 QUESTÃO DE PESQUISA

Na falta de pesquisas que tratam do ensino da perspectiva cavaleira no Ensino Médio e no Ensino Fundamental no Brasil e, apoiando-nos nas pesquisas de Parzysz (1989), Boero (1996), Chaachoua (1998), decidimos apresentar uma proposta para o ensino da perspectiva cavaleira no Ensino Médio, que articule a Geometria concreta, a Geometria espaço-gráfica e a Geometria proto-axiomática. Precisamente, a nossa investigação tentará responder à seguinte questão:

Em que medida o estabelecimento de um jogo dialético entre a Geometria concreta e a Geometria espaço-gráfica contribui para a apropriação das regras da perspectiva cavaleira? E em que medida essa apropriação favorece a resolução de problemas de Geometria espacial?

1.8. CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Para responder ao nosso questionamento, organizamos uma seqüência de atividades em três blocos: o primeiro bloco tendo por finalidade fazer com que os alunos se apropriem das regras da perspectiva cavaleira a partir das sombras de sólidos expostos no piso da escola num dia ensolarado. O segundo bloco terá por objetivo validar as propriedades investigadas no primeiro bloco num ambiente informático de Geometria Dinâmica. O terceiro bloco procurará usar essas regras da perspectiva cavaleira na resolução de problemas de Geometria espacial.

Procuraremos elementos de resposta à primeira questão na análise das atividades dos blocos 1 e 2 que enunciaremos mais adiante e elementos de resposta à segunda questão na análise das atividades do bloco 3.

A seqüência se desenvolverá através de um jogo dialético entre a Geometria concreta e a Geometria espaço-gráfica, isto é, após trabalhar com objetos concretos e descobrir empiricamente as principais regras da perspectiva cavaleira a partir de sombras produzidas pelos objetos expostos ao sol, os alunos procurarão confirmar as regras pela manipulação do software Cabri-Géomètre e tendo como apoio os sólidos geométricos que estarão presentes no ambiente informático. A apreensão das regras dar-se-á na articulação entre percepção e representação.

Utilizaremos como metodologia de pesquisa alguns elementos da Engenharia Didática. Michèle Artigue (1998) define a Engenharia Didática enquanto metodologia de pesquisa por dois pontos essenciais:

- *"Um esquema experimental baseado em realizações didáticas em sala de aula (concepção, realização, observação e análise de seqüências de ensino)".*

- *"Um tipo de validação particular (uma validação interna) baseado na confrontação entre análise a priori e a análise a posteriori."*

Artigue divide a engenharia didática em quatro fases: 1ª fase análise preliminar, 2ª fase concepção e análise a priori, 3ª fase experimentação, 4ª fase análise a posteriori e validação.

As análises preliminares podem levar em conta três dimensões: a dimensão epistemológica, a dimensão didática e a dimensão cognitiva.

Na dimensão epistemológica procura-se identificar os diferentes estatutos dos conceitos matemáticos no seu desenvolvimento histórico ou ainda na elaboração de conhecimentos de um indivíduo. Na dimensão didática analisam-se as propostas curriculares, programas, livros e os entraves que impedem a efetiva realização didática. Na dimensão cognitiva analisam-se as concepções dos alunos, as dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução.

Uma seqüência de atividades será concebida para testar nossa questão de pesquisa.

Na concepção global, situam-se as escolhas mais gerais, em relação ao ambiente, ao público alvo e ao tema a ser pesquisado.

A seguir, serão feitas escolhas mais locais relacionadas ao conteúdo a ser pesquisado.

A análise a priori é uma análise Matemática da situação que antecipa o funcionamento didático decorrente das escolhas feitas. Trata-se de esclarecer o que pode acontecer com os saberes em jogo quando a situação é colocada em funcionamento. É o momento no qual prevemos as estratégias esperadas dos alunos, possíveis dificuldades na resolução de problemas e coerência das ligações entre cada uma das atividades.

A experimentação consiste na aplicação e observação da seqüência de ensino. É necessário explicitar os objetivos da pesquisa e o contrato didático com o público alvo. O professor tem a tarefa de fazer a devolução e a institucionalização, segundo a Teoria das Situações Didáticas de G. Brousseau (1972).

A institucionalização é o momento pelo qual o professor transforma as respostas dos alunos em um conhecimento matemático.

> *Os alunos que aprenderam um conhecimento matemático são capazes de propor adequadamente e de responder questões que antes sequer podiam enunciar, mas, como não têm meios de contextualizar essas questões, não podem atribuir aos novos conhecimentos um estatuto adequado. Então, é preciso que alguém de fora venha elucidar quais, dentre suas atividades, têm um interesse científico "objetivo", um estatuto cultural.*
>
> *Essa é a função da* institucionalização *que origina, de fato, uma transformação completa da situação. Ela é realizada mediante a escolha de algumas questões dentre aquelas que se sabe responder, relacionando-as com outras questões e saberes. Trata-se de um trabalho cultural e histórico, que difere totalmente, daquele que pode ser deixado a cargo do aluno e é responsabilidade do professor. Não é, portanto, o resultado de uma adaptação do aluno.*
>
> *Inversamente à devolução, a institucionalização consiste em dar um estatuto cultural para a produção dos alunos (Chevallard, 2001, p. 218)..*

Antes de iniciar a fase da experimentação, é necessário prever os meios para coletar os dados. O levantamento dos dados pode ser feito através de produções escritas dos alunos, de entrevistas, da produção escrita dos observadores, de gravações em fitas magnéticas, de fotografias e de arquivos de programas computacionais.

A análise a posteriori é a interpretação das informações extraídas da experimentação e da seqüência de ensino. Na análise a posteriori apresentamos os fatos de forma estruturada, a análise didática dos fenômenos observados, as dificuldades surgidas e análise da gestão da classe. A comparação entre a análise a priori e a análise a posteriori oferece elementos para responder à questão de pesquisa.

Na dissertação, utilizaremos dois componentes importantes da engenharia didática: a análise a priori e a análise a posteriori.

Capítulo II

- O ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO "PERSPECTIVA CAVALEIRA" -

2.1 AS PRIMEIRAS REPRESENTAÇÕES

Desde os tempos pré-históricos, o homem preocupou-se em registrar imagens sobre seu mundo sensível. Os registros de animais e objetos da vida real eram representados numa superfície plana. Esses registros eram formas de comunicar e expressar idéias e acontecimentos entre os seres humanos. Dessa forma, o homem foi capaz de desenvolver técnicas de desenho e aproximar suas representações do mundo real.

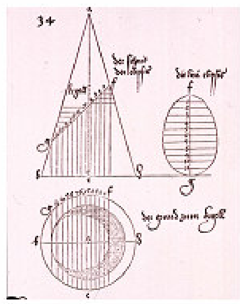
Segundo Oliveiros (2004), essas representações de objetos sobre uma superfície plana organizaram-se em duas vertentes distintas:

- a primeira com o predomínio do valor artístico sobre os objetos representados em telas, imprimindo emoções e a contemplação estética,

- a segunda, pelo domínio no sentido técnico, deixando de lado as impressões e emoções do desenho artístico, servindo para representar objetos, edifícios ou fortificações com objetividade e rigor necessário que poderiam servir para construções ou fabricações a partir dessas representações.

Há indícios do desenvolvimento das representações de objetos tridimensionais para o plano em pinturas egípcias que datam de 1490 a.C.; em Pompéia, em pinturas assírias que datam de 1500 a.C. e em ilustrações persas do século XVIII. Também há representações de objetos tridimensionais em pinturas chinesas (séc. V) e em pinturas japonesas (século XVII). Eram procedimentos empíricos cujos fundamentos científicos foram desenvolvidos mais tarde, por volta do século XIV pela necessidade técnica (Cavalca, 2002, p. 13; Fouquat, 2001, p. 04).

O desenvolvimento das técnicas de representação dos objetos tridimensionais deu-se no Renascimento, época das grandes invenções. Ambrogio Bondone Giotto (1267-1337), Filippo Brunelleschi (1377-1446), Leon Battista Alberti (1404 -1485), Piero della Francesca (1420-1492), Leonardo da Vinci (1452- 1519), Albrecht Dürer (1471-1528), Guidobaldo del Monte (1545-1607) e outros contribuíram para o aparecimento e desenvolvimento da perspectiva central. No século XIV, começa a emergir uma preocupação dos pintores com a questão da profundidade nos quadros, na busca da perfeição, representando o mais fielmente possível a realidade. Giotto utilizou em seus afrescos, projeções dando a idéia de tridimensionalidade na superfície plana, Filippo Brunelleschi realizou experiências com espelhos que mostram princípios da perspectiva central, como a convergência de retas através de um ponto de fuga. Nessa época, era aceita a premissa de que os objetos diminuem em tamanho conforme a distância do observador. E para indicar a profundidade, utilizaram regras de redução, sendo a mais utilizada a regra de 2/3. As experiências de Brunelleschi com espelhos planos forneceram a inspiração a Alberti (1435) para a formulação da regra correta da perspectiva cônica. Surge um novo pensamento, uma nova forma de conceber obras e representar o mundo e tudo que há nele. Essa regra era chamada de construção legítima e consistia em construir a imagem perspectiva a partir de duas projeções ortogonais. A complexidade da construção legítima conduziu a inventar processos mais simplificados. Piero della Francesca propõe três métodos de construção: o primeiro explicita a construção legítima de Alberti, o segundo intervém num sistema de coordenadas e o terceiro introduz um ponto de distância, referindo-se a um caso particular. As pesquisas de Piero della Francesca são seguidas por Dürer e Leonardo da Vinci (Flores, 2003).

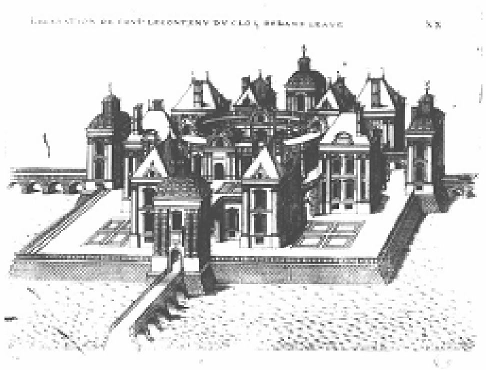
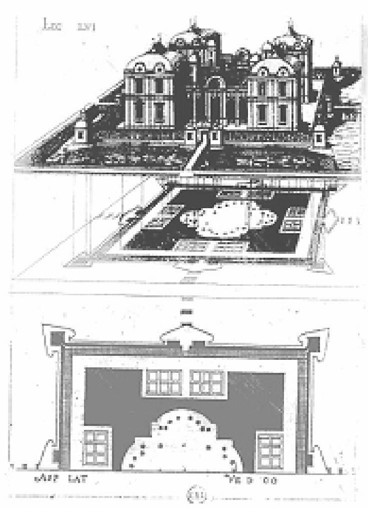


Albrech Dürer (1525), em seu tratado de geometria "Underweysung der Messung" apresenta um método de dupla projeção ortogonal dentro de um quadro estritamente geométrico (Virtuelle Welten aus dem Rechner, Symbiose von Wissenschaft und Kunst, 1998).

Fig. 1

Guidobaldo del Monte (Sinisgalli, 1984) coloca pela primeira vez a perspectiva como um ramo da geometria. Foi a primeira obra da perspectiva a la Euclides, com definições, proposições e corolários. Não se trata mais de receitas, mas de verdadeiras demonstrações geométricas argumentadas e seguidas de aplicações práticas. (Fouquat, 2001, p. 4-6; Costa, A., 2004, p. 67-80). Jacques Androuet du Cerceau, arquiteto e ornamentista do rei da França e de Madame Ferrare, escreveu “Perspective Positive” e

"Vues d'Optique" , "*Livre d'architecture"* "(dedicado a Henri II, 1559) e "Les plus excellents bastiments de France (dois volumes, o primeiro editado em 1576 e outro em 1579). Podemos ver em seus trabalhos a utilização de perspectivas principalmente em projetos para construção de castelos. Em 1582, utiliza a perspectiva cavaleira em seus trabalhos. (Flores, 2003).

	
Prancha LEC XX, Livre D'Architecture, Du Cerceau Fig. 2	Para a realização de medidas de uma edificação usa uma composição paralela entre plano e elevação da imagem. (Prancha LEC LVI, Leçons de Perspective Positive, Du Cerceau, 1576) Fig. 3

Girard Desargues (Taton, 1988), anos mais tarde, estabelece os fundamentos da geometria projetiva. Ao procurar generalizar as regras da perspectiva utilizadas pelos artistas, introduz novos conceitos na geometria como o ponto no infinito que tem a sua origem no ponto de fuga. Panofsky (1999) diz que o surgimento do ponto de fuga constitui o símbolo concreto da descoberta do próprio infinito. Esse ponto passa a ser, com Desargues, um ponto como qualquer outro e sem privilégio algum e que permite mais tarde, em 1822, a Jean-Victor Poncelet estender propriedades que levam em conta retas concorrentes para retas paralelas. Isto é, o ponto no infinito permite tratar as retas paralelas e concorrentes da mesma maneira. Daí irá resultar, com Poncelet, o princípio da continuidade (Costa, 2002).

As origens da perspectiva cavaleira, nosso objeto de estudo, são imprecisas, existem representações como de um templo grego em um fragmento de um vaso de Tarento, 350 a.C. (Fouquat, 2001), ou de objetos prismáticos e cilíndricos chineses do século V conforme Cavalca (2002), ilustração japonesa do século XVII de Sumiyoshi Gukei, ou mesmo de edificações à cavaleira em fortificações. A perspectiva cavaleira, neste período, era representada de forma empírica, não havendo ainda a formalização do nome e nem de suas regras e propriedades.

Representação de um templo em perspectiva cavaleira (fragmento de vaso de Tarento - Grécia, 350 a.C. , Fouquat, 2001)

Fig. 4

Chineses e japoneses davam preferência a perspectiva cavaleira em suas ilustrações. (Ilustração de Sumiyoshi Gukei, "Sakaki", séc. XVII, Japão, Fouquat, 2001)

Fig. 5

A origem do nome cavaleira a este tipo de perspectiva também não é precisa. Alguns autores sugerem ser o nome de uma construção superior que permite a visualização do terreno em relação à altura de um cavalo, ou seja, à cavaleira, ou pelo fato dos militares dessas fortificações serem cavaleiros (Cavalca, 2002). O termo data do século XVI e foi muito utilizado na arquitetura militar. No século XVII, foi utilizada pelos militares para fazer planos de praças de fortificações sobre os quais pudessem fazer uma leitura em verdadeira grandeza.

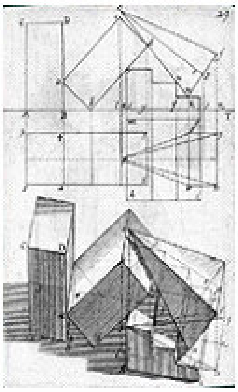
A perspectiva cavaleira foi considerada uma perspectiva de segunda classe por não seguir as regras matemáticas da perspectiva cônica. Segundo Cavalca (ibid) os primeiros estudos foram desenvolvidos por Dubreuil (1651) e Abraham Bosse[1] (1665).

Matemático e geômetra, discípulo de Desargues, Abraham Bosse publicou inúmeros trabalhos sobre perspectiva, disciplina que ensinava na Academia Real de Pintura e Escultura em Paris, França. Escreveu o *Traité des pratiques géométrales et perspectives*

[1] O livro de Bosse *Traité des pratiques géométrales et perspectives enseignées dans l'Académie Royale de la Peinture et Sculpture encontra-se disponível em:* http://expositions.bnf.fr/bosse e bibliografia em: http://www.culture.gouv.fr/culture/actualites/celebrations2004/abosse.htm

enseignées dans l'Académie Royale de la Peinture et Sculpture, par A. Bosse, Très utiles pour ceux qui désirent exceller en ces Arts, et autres, où il faut employer la règle et le compas. Les pratiques par figures des choses dites cy devant, ainsi qu'elles ont esté desseignées et expliquées dans l'Académie Royalle de la P. et S. - Tratado das práticas geometrais e perspectivas ensinadas na Academia Real da Pintura e Escultura, muito úteis para os que desejam ser habilidosos nestas Artes, e onde é necessário empregar a regra e o compasso. As práticas por figuras das coisas ditas anteriormente, portanto, que foram desenhadas e explicadas na Academia Real (tradução nossa de fonte francesa).

Bosse criou um método para ensinar perspectiva a partir das teorias matemáticas de Girard Desargues, método que visava assessorar a pintura e o desenho com uma perspectiva e não como uma visão humanística, mas pela objetividade natural garantida pela razão. Por defender uma pintura com rigor matemático, acabou sendo expulso da academia em 1661.

	
Bosse (1665), (Join-Lambert, Manceau, 2005) Fig. 6	Um detalhe da pintura de Bosse << Le Sculpteur dans son atelier >> 1642 (Join-Lambert, Manceau, 2005) Fig. 7

Na figura 6, podemos verificar que as arestas paralelas são representadas por segmentos paralelos próprios da perspectiva cavaleira.

Jean Dubreuil, jesuíta e arquiteto que escreveu *La Perspective Practique* publicado em 1642, estudou as representações em perspectiva e foi defensor de um método prático de perspectiva. Dubreuil foi um crítico feroz da teoria perspectiva universal lançada por Desargues que era obtida através de escalas precisas e da geometria projetiva. Estava então instaurada uma verdadeira guerra entre as duas perspectivas. A primeira utilizada pela escola jesuítica e defendida por Dubreuil foi muito popular no século XVIII, mas a geometria projetiva de Desargues inspirou novos estudos nos séculos XIX e XX (Phillips, 2005).

Mesmo com o desenvolvimento da representação em perspectiva, a perspectiva cavaleira não foi incorporada nos manuais de Geometria do Espaço como objeto de estudo. Atualmente, a perspectiva cavaleira continua a representar apenas ilustrações e esboços de objetos reais como são vistos.

Muitas pessoas, alunos e professores, utilizam-se da perspectiva cavaleira de maneira intuitiva. A impressão que se tem é que as pessoas instintivamente usam da perspectiva cavaleira para representar objetos tridimensionais em uma folha de papel, sem se dar conta que é uma técnica de desenho não habitualmente ensinada no Ensino Fundamental e Médio. Tem muito a ver com a habilidade das pessoas, a partir de um ensino não formal.

A perspectiva cavaleira é a mais utilizada nos livros por ser de fácil execução e proporciona um equilíbrio entre o que se vê e o que se sabe sobre o objeto (Parzysz, 1991). Além disso, a perspectiva cavaleira apresenta mais invariantes que a perspectiva central, conforme abordaremos na seqüência do trabalho. Portanto, as construções feitas em perspectiva cavaleira são mais simples que na perspectiva central (Korkmaz, 2003).

2.2. OS TIPOS DE PERSPECTIVAS

Para representarmos objetos tridimensionais, usamos a perspectiva que nos possibilita reproduzir o mais próximo do que vemos numa superfície bidimensional. Há dois tipos de representações bidimensionais: a perspectiva cônica e a perspectiva cilíndrica.

2.2.1. PERSPECTIVA CÔNICA OU CENTRAL

Daremos, a seguir, a definição matemática de projeção cônica também chamada de projeção central.

Seja α um plano e **O** um ponto não pertencente ao plano. Considere um ponto P tal que a reta OP não seja paralela ao plano α. Chama-se projeção central ou perspectiva linear do ponto P ao ponto P', onde P' é a intersecção da reta OP com o plano α (fig. 08).

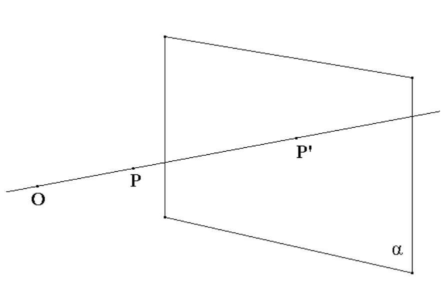
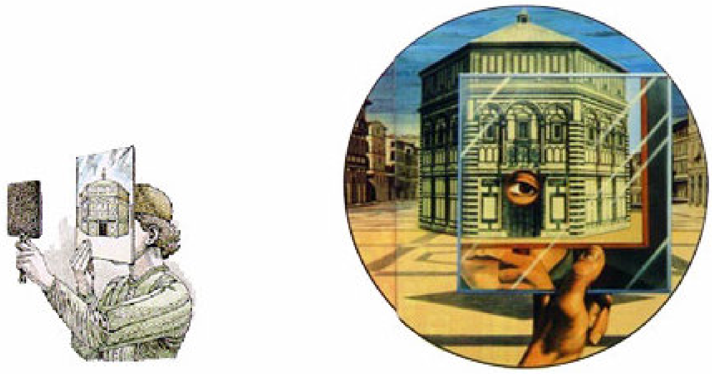


Fig. 08



Experiência de Brunelleschi (Kubovy & Tyler, 2005)
Fig. 09

Para desenhar uma paisagem, Brunelleschi fez um pequeno orifício sobre uma gravura, de tal modo que pudesse vê-la refletida no espelho colocado a frente (Fig. 09) (Kubovy & Tyler, 2005). Então o olho de quem vê está num ponto definido O como na figura 10 e por ele passam linhas de profundidade então, podemos considerar uma linha imaginária formada pelo encontro do céu com a terra, que chamamos também de linha do horizonte e que fica no nível dos olhos. Na perspectiva cônica, usamos esta linha e por ela marcamos um ponto. Por este ponto, chamado de ponto de fuga (**O**), passam as linhas de profundidade (linhas pontilhadas) (fig.10). O paralelismo é conservado somente em relação às faces paralelas ao plano de projeção.

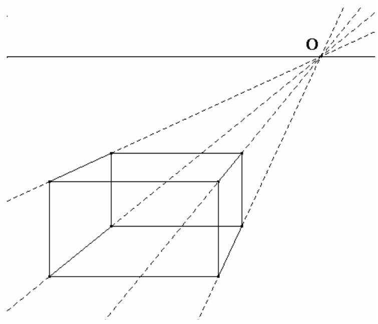


Fig.10

2.2.2. PERSPECTIVA CILÍNDRICA OU PERSPECTIVA PARALELA

Daremos agora a definição matemática de perspectiva cilíndrica também chamada de perspectiva paralela.

Seja α um plano e t uma reta não contida e nem paralela ao plano. Chama-se perspectiva cilíndrica ou paralela de um ponto P ao ponto P’ tal que P’ é a intersecção do plano com uma reta que passa por P e paralela à reta t. (fig. 11).

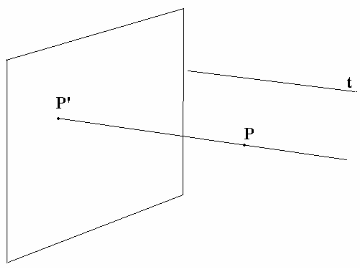


Fig. 11

Vamos imaginar um cubo P cuja sombra P’ é formada pela ausência de luminosidade emitida pelos raios solares, raios estes paralelos entre si, e o ponto de fuga (Sol) está a milhões de quilômetros de distância e as arestas da sombra do cubo mantêm-se paralelos.

Na perspectiva paralela, o ponto de fuga fica no infinito, indeterminado. Neste tipo de perspectiva, há conservação do paralelismo das arestas (fig.12). Esta perspectiva pode ser subdividida em dois grupos: perspectiva cavaleira e a perspectiva axonométrica ou ortogonal.

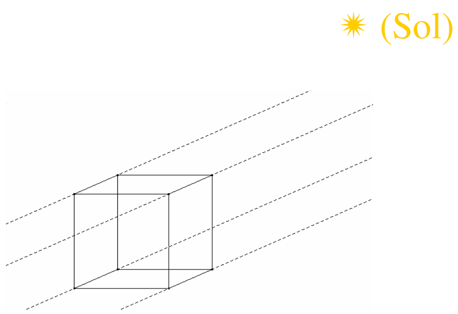


Fig. 12

Na perspectiva cavaleira, uma das faces do objeto deve estar paralela ao plano de projeção e as paralelas são oblíquas ao plano de projeção, enquanto que na perspectiva axonométrica não é necessário que uma face seja paralela ao plano de projeção, mas as paralelas são perpendiculares ao plano de projeção.

Fazem parte do grupo das perspectivas axonométricas: a perspectiva isométrica, dimétrica e trimétrica.

Na perspectiva isométrica, os eixos pontilhados formam entre si ângulos de 120º e as escalas são as mesmas em três direções (fig. 13).

Fig. 13

Na perspectiva dimétrica, as escalas das arestas são as mesmas sobre dois eixos e dois ângulos iguais entre as três direções. (fig.14).

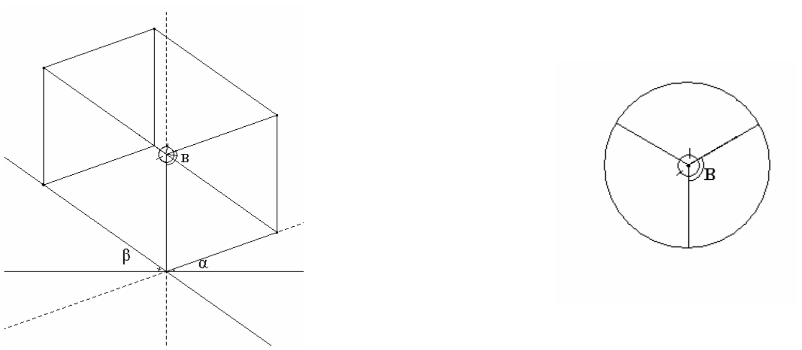


Fig. 14

Na perspectiva trimétrica, todos os ângulos entre as três direções e as escalas das arestas são diferentes: pode-se mudar a direção dos eixos da maneira mais conveniente (fig. 15).

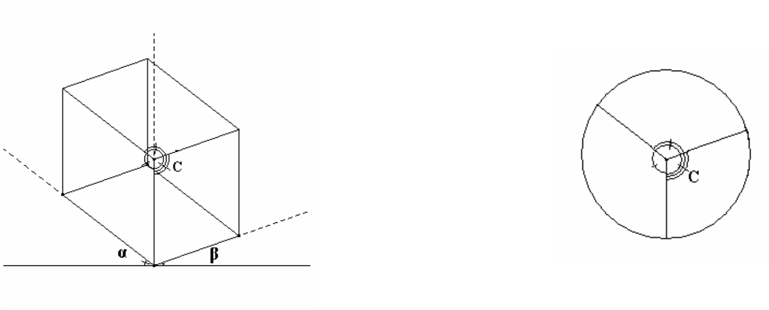


Fig. 15

2.3. A PERSPECTIVA CAVALEIRA

A perspectiva cavaleira é um caso particular da perspectiva paralela. Consideremos um objeto que apresenta uma face paralela a um plano de projeção e uma fonte de luz de raios paralelos e oblíquos ao plano de projeção. A sombra do objeto sobre o plano de projeção recebe o nome de perspectiva cavaleira do objeto (fig.16 A e 16B).

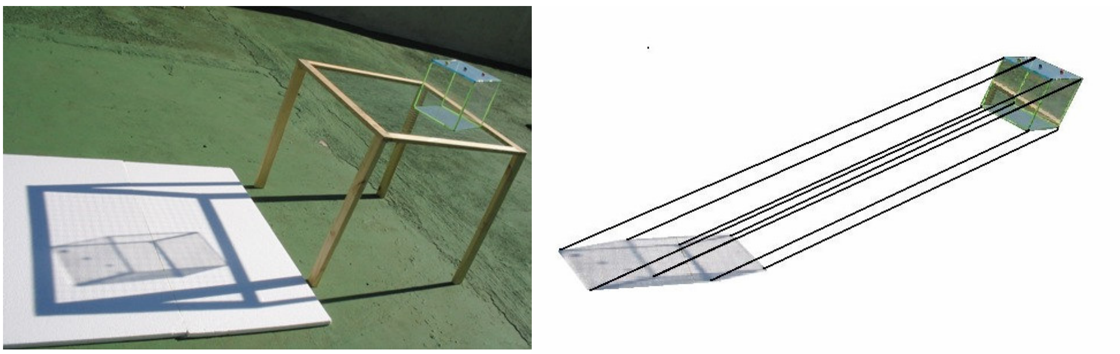


Fig. 16 A   Fig. 16B

Utilizando a linguagem matemática, podemos definir a perspectiva cavaleira da seguinte forma:

Seja α um plano e t uma reta que não está contida, nem paralela e nem perpendicular a este plano, chamamos de perspectiva cavaleira de um ponto P, à sua projeção P' sobre o plano α paralelamente à reta t (fig. 17).

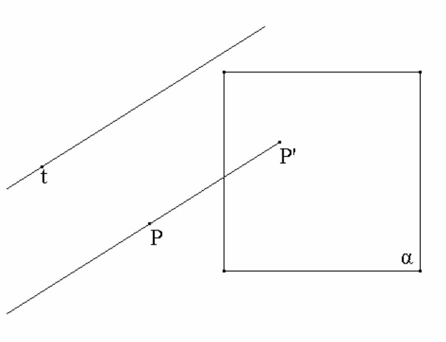


Fig.17

As propriedades que caracterizam a perspectiva cavaleira são:

1. Toda figura contida num plano paralelo ao plano de projeção é representada em verdadeira grandeza.

2. Retas perpendiculares ao plano de projeção são representadas por retas paralelas que fazem um ângulo θ constante com uma reta horizontal do plano de projeção. Essas retas paralelas são chamadas fugantes.

3. A razão entre um segmento CG perpendicular ao plano de projeção e o seu correspondente C'G' no plano de projeção é constante, ou seja, C'G'= k.CG. Essa constante k é chamada de coeficiente de redução da perspectiva cavaleira.

Justificaremos somente esta última relação por se tratar de uma propriedade particular da perspectiva cavaleira. Na figura abaixo, temos um plano β e um cubo[2] ABCDEFGH com duas faces ABCD e EFGH paralelas ao plano β. P é um ponto do espaço pertencente a uma reta projetante.

A reta projetante PH é oblíqua ao plano β . Por esta reta são determinados os vértices do cubo e formam a projeção A'B'C'D'E'F'G'H' do cubo sobre o plano β.(fig.18)

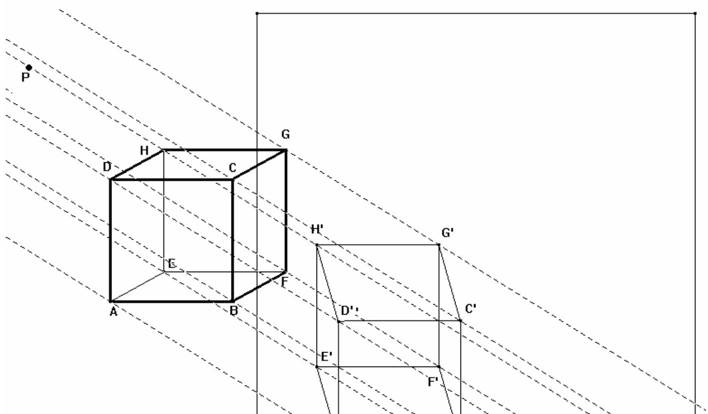


Fig.18

[2] O cubo foi uma escolha da pesquisadora, mas poderia ser qualquer prisma para demonstrar as propriedades da perspectiva cavaleira.

Na figura 19, mantemos apenas as retas que passam pelos segmentos CC’ e GG’ paralelos à reta PH e traçamos no plano β a reta C’G’. Pela aresta CG, traçamos uma reta ortogonal ao plano β.

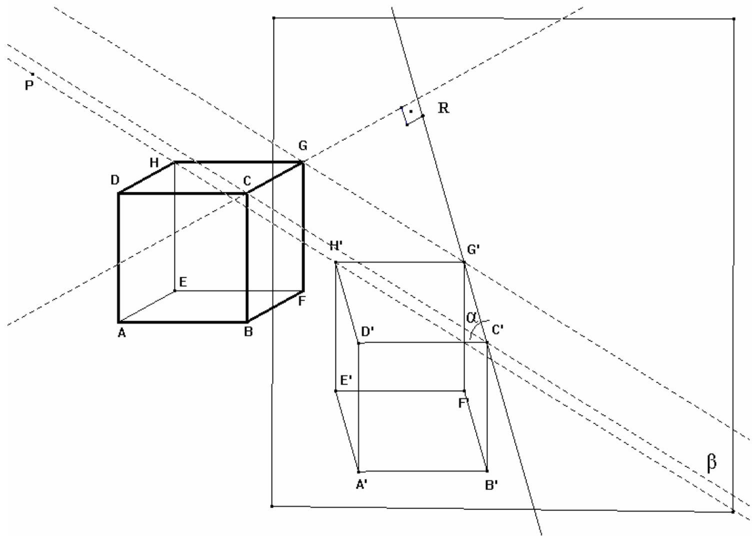


Fig.19

O ponto R é a intersecção das retas CG e C’G’. Os segmentos CC’ e GG’ são segmentos paralelos à reta PH. O triângulo CRC’será retângulo. Portanto, pelo teorema de Tales temos a seguinte relação:

$$\frac{CG}{CR} = \frac{C'G'}{C'R} = \frac{C'R}{CR} = \frac{C'G'}{CG} \qquad ①$$

$$\cot g\alpha = \frac{C'R}{CR} \qquad ②$$

Igualando ① e ② temos então: $\frac{C'G'}{CG} = \frac{C'R}{CR} = \cot g\alpha$

onde α é o ângulo formado entre a reta CC’ paralela a reta projetante PH e a reta C’G’ no plano β, que é o mesmo ângulo formado entre a reta D’H’ paralela ao segmento C’G’ e a reta projetante PH. Como a cotgα é uma constante k, então $\frac{C'G'}{CG} = k$, logo $C'G' = k.CG$.

Ao modificar a constante k, temos projeções diferentes do paralelepípedo sobre o plano β.

Os segmentos perpendiculares ao plano α são representados por segmentos paralelos que podem ficar em qualquer direção, de acordo com o ângulo θ formado entre a reta C'G' e o segmento OO' horizontal no plano α. Chamamos de ângulo de fuga o ângulo θ (fig.20).

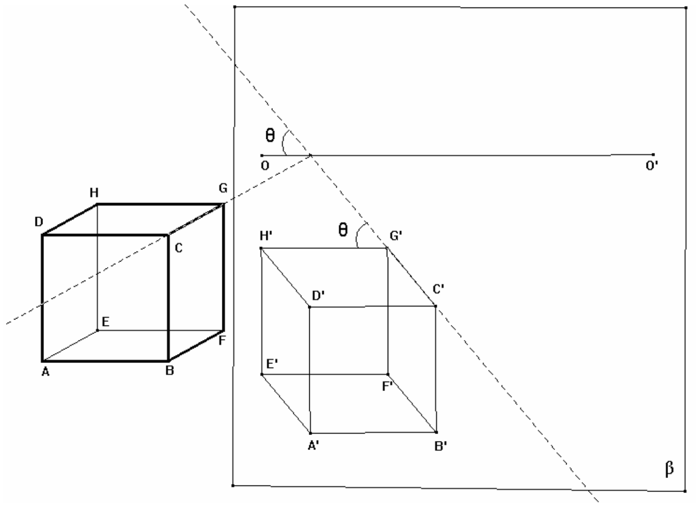


Fig.20

Na prática, o ângulo de fuga e o coeficiente de redução são dados (fig. 21).

Simplificando nosso estudo temos a seguinte representação:

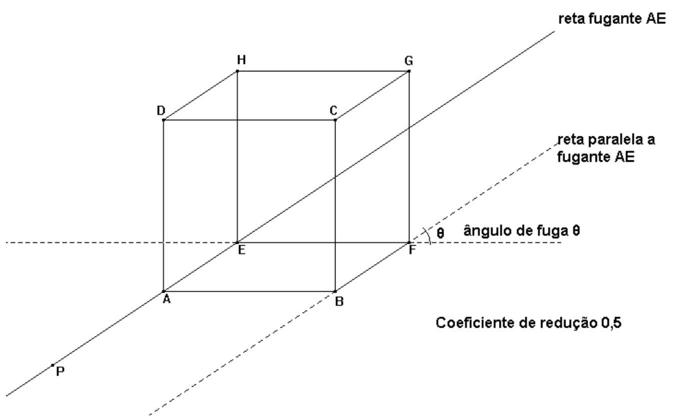


Fig.21

$AE = kAD$, onde k é o coeficiente de redução de AD.

A representação dos objetos tridimensionais em perspectiva cavaleira sobre um plano apresenta, além das propriedades enunciadas, outras básicas:

- Conservação de segmentos paralelos.

- Conservação das medidas dos segmentos e das medidas dos ângulos quando os segmentos e os ângulos estão contidos num plano paralelo ao plano de projeção.

- Conservação dos pontos médios.

- Conservação da colinearidade dos pontos.

Capítulo III

- CONCEPÇÃO DA SEQÜÊNCIA E ANÁLISE A PRIORI -

3. 1. ESCOLHAS DIDÁTICAS:

No capítulo II, vimos que os objetos tridimensionais podem ser representados no plano por perspectivas cônicas ou perspectivas paralelas. Vimos também que a perspectiva paralela pode ser dividida em perspectiva cavaleira e perspectiva axonométrica. Escolhemos a perspectiva cavaleira como objeto de estudo pelas razões apresentadas no Capítulo I.

Concebemos uma seqüência de atividades para o ensino das regras da perspectiva cavaleira a alunos da 3ª série do Ensino Médio, levando-se em conta os trabalhos de Boero (1996), Chaachoua (1998) e Parzysz (1989, 1991, 2001).

Antes da experimentação, prevemos a familiarização do software Cabri-Géomètre pelos alunos e a retomada de alguns conceitos da Geometria Plana tais como pontos, retas, segmentos, polígonos, polígonos regulares, medianas, baricentro, bissetrizes, ângulos, razão entre segmentos, teorema de Tales, que são fundamentais para o desenvolvimento das atividades que são descritas neste capítulo.

A seqüência é dividida em três blocos. No bloco 1, as atividades são desenvolvidas num ambiente externo e à luz do sol. Procuramos adotar um ponto de vista experimental e indutivo, onde os alunos podem visualizar, comparar e fazer conjecturas sobre as atividades que são executadas, levantando propriedades da perspectiva cavaleira.

Nesse bloco, optamos por projeções das sombras dos sólidos no chão e não na parede, porque no primeiro caso, a visibilidade da sombra do sólido é total. Na parede, a projeção da sombra é prejudicada parcialmente pela sombra do tampo da mesa.

No bloco 2, as atividades são desenvolvidas no ambiente informático. Todas as atividades realizadas no ambiente externo são repetidas no ambiente informático com o uso do software Cabri-Géomètre, mas com o diferencial de que os alunos devem construir os objetos tridimensionais e bidimensionais (retas, segmentos) na tela do computador para confirmarem as propriedades levantadas e institucionalizadas no bloco 1.

Escolhemos o software Cabri-Géomètre por ser acessível à maioria das escolas públicas estaduais de São Paulo e, em particular, à escola da experimentação. O governo do estado de São Paulo equipou as escolas estaduais com laboratórios e cada laboratório recebeu 1 CD com o software Cabri-Géomètre com 5 licenças de uso.

No bloco 3, desenvolvemos 5 atividades de construção e 2 problemas no ambiente informático, onde investigamos se os resultados das seqüências anteriores favorecem a resolução de problemas de geometria espacial.

3.2. CONCEPÇÃO DO BLOCO 1

As atividades do bloco 1 são divididas em duas seqüências.

Na primeira seqüência, os objetos geométricos são colocados num plano paralelo ao plano de projeção, solicitamos aos alunos para observar as propriedades que permanecem inalteradas no plano de projeção.

Na segunda seqüência, os objetos geométricos são colocados num plano não paralelo ao plano de projeção. A razão dessa escolha é que num plano paralelo ao plano de projeção, há um maior número de invariantes.

Dentre os vários sólidos possíveis para trabalhar com a perspectiva cavaleira escolhemos prismas porque oferecem faces que podem ficar paralelas a um plano de projeção. Optamos em utilizar cubos e prismas retos de base quadrada, pois favorecem a realização da seqüência I e os prismas de base hexagonal e triangular que favorecem as atividades da seqüência II. Para a construção desses prismas, testamos dois materiais transparentes: o acetato (usado em retro-projetor) e o acrílico. O acetato, apesar da transparência, possui uma película que impede parcialmente a passagem da luz. Com a retirada desta película, o resultado foi mais satisfatório, mas não como os dos sólidos em material acrílico. O acrílico é escolhido então, por oferecer uma visibilidade maior que o acetato.

São também utilizados na experimentação: massa de modelar de várias cores para representar pontos, a fim de que suas sombras sejam visíveis na projeção. Outros materiais foram testados como adesivos e massa de porcelana fria. As primeiras são difíceis de observar, e as últimas secavam e não aderiam à superfície acrílica dos prismas. São oferecidos aos alunos réguas e transferidores para eventuais medições.

O público alvo é composto de 7 alunos divididos em duas duplas e um trio, alunos do 3° ano do Ensino Médio da Escola Estadual Rui Bloem, da rede pública do estado de São Paulo, na capital.

Na seqüência I do bloco 1, fase exploratória, os alunos manipulam os objetos *concretos citados e os relacionam ao comportamento das sombras projetadas pela luz solar sobre a face paralela ao plano de projeção que pode ser uma parede ou chão. Neste bloco, pretende-se que os alunos façam conjecturas sobre as seguintes propriedades da perspectiva cavaleira:*

1. Conservação do ponto médio de um segmento.
2. Conservação do paralelismo.
3. Conservação da concorrência de duas retas.
4. Conservação do baricentro de um triângulo.
5. Conservação das razões de dois segmentos contidos na mesma reta.
6. Conservação das medidas dos segmentos.
7. Conservação das medidas dos ângulos.

Na seqüência 2 do bloco 1, as propriedades 6 e 7 não se conservam.

As seqüências experimentais I e II são desenvolvidas em ambiente externo e na presença da luz solar. Os sólidos são colocados sobre uma base com uma das faces paralela ao chão. Na seqüência I, as massinhas e as varetas são colocadas sobre uma das faces paralelas ao chão e na seqüência II, numa face não paralela do sólido. Os alunos podem comparar as propriedades dos objetos geométricos colocados sobre os sólidos, com as propriedades correspondentes às suas sombras, observar, medir e anotar suas observações em questionários que são distribuídos para os grupos de alunos. Os alunos podem usar bolinhas de massa de modelar coloridas para determinar os pontos, uma cor para cada ponto, régua e transferidor, uma folha de papel branco ou papel de presente com o verso branco (1m X 0,72m) que são entregues antes de iniciar o experimento. O papel branco é colocado no chão pelo aluno onde a sombra é projetada. Com algumas experiências "pilotos", percebemos que o chão de concreto não oferecia boa visibilidade, então decidimos oferecer esse material por apresentar um bom resultado, e pedrinhas para manter a folha no chão no caso de haver vento durante a experimentação.

Para justificar suas respostas e responder aos questionários, os alunos podem usar qualquer recurso como réguas, transferidores, lápis, canetas, etc.

Nas seqüências I e II do bloco 1, os sólidos são colocados sobre uma base, uma mesa com o tampo telado (fio de nylon) para melhor observar a incidência dos raios solares sobre os sólidos e a sombra projetada no plano do chão ou da parede. O tampo da mesa é paralelo ao chão.

A seqüência experimental II do bloco 1 é desenvolvida tal como a seqüência experimental I, os sólidos são colocados sobre a mesa telada com uma das faces paralela ao chão, mas os objetos geométricos sobre uma face não paralela ao chão. Por exemplo, colocamos um prisma triangular com uma face lateral contida na mesa telada. Nesse caso, as bases do prisma são faces não paralelas ao plano de projeção conforme a figura abaixo:

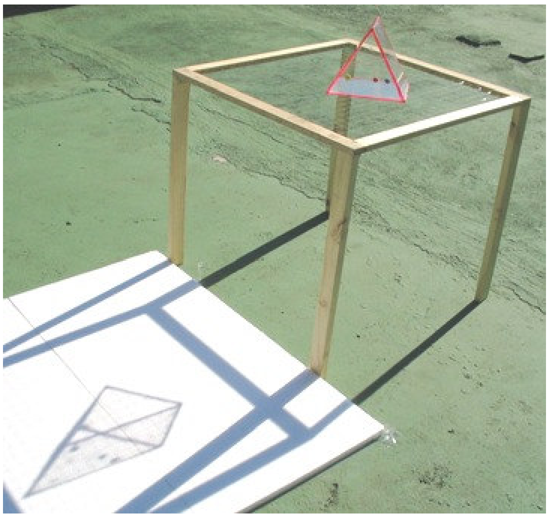


Fig. 22

Nesta figura, as faces triangulares são perpendiculares ao plano de projeção e as bolinhas podem ser colocadas tanto na face triangular como na face retangular, que não é nem paralela nem perpendicular ao plano de projeção. O prisma pode ser colocado em outra posição tendo uma das faces retangulares perpendicular ao plano.

Nas atividades do bloco 3, os alunos devem construir a perspectiva cavaleira dos prismas e pirâmides. Resolvemos apresentar para os alunos peças poligonais planas de acrílico (quadrado, hexágono e triângulo equilátero) e colocar cada uma das peças com um dos lados paralelo ao plano horizontal, e a peça perpendicular ao plano de projeção. Espera-se que os alunos observem as sombras destas peças e percebam a forma das sombras.

Cada grupo de alunos, independente do tipo de sólido que estiver utilizando, deve seguir as orientações de um texto contendo a seqüência de atividades e responder a um questionário. Todos os grupos fazem suas experiências com os 4 sólidos (cubo, prismas de base quadrada, hexagonal e triangular).

As atividades são desenvolvidas seguindo a ordem das atividades abaixo e de acordo com o grupo.

Grupo 1: cubo, prisma reto de base quadrangular, prisma reto de base hexagonal e prisma reto de base triangular.

Grupo 2: prisma reto de base quadrangular, prisma reto de base hexagonal, prisma reto de base triangular e cubo.

Grupo 3: prisma reto de base hexagonal, prisma reto de base triangular, cubo e prisma reto de base quadrangular.

Ao final, temos um momento em que os alunos podem fazer suas considerações e trocar idéias com os outros grupos e com a pesquisadora para que possam chegar a uma conclusão comum.

3.3 ALGUNS ASPECTOS DE UMA ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES DO BLOCO 1

O bloco 1 é composto por duas seqüências de atividades:

- seqüência experimental I no plano paralelo de projeção;

- seqüência experimental II no plano não paralelo ao plano de projeção.

Essas seqüências são desenvolvidas pelos 3 grupos e todos os grupos usarão os quatro sólidos (fig.23)

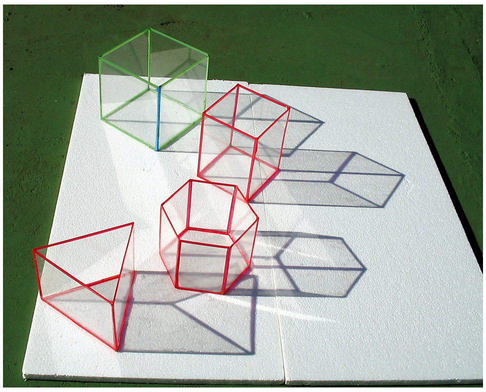


Fig. 23

3.3.1 SEQÜÊNCIA EXPERIMENTAL I – Planos paralelos

3.3.1.1 Atividade A: Conservação do ponto médio

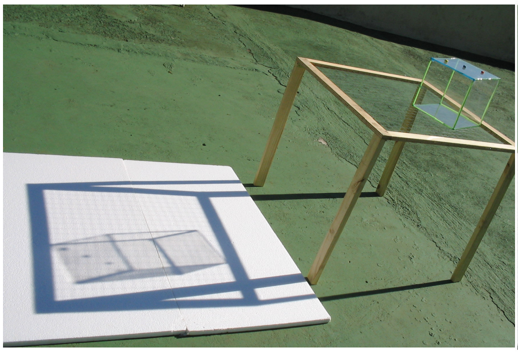
A primeira atividade é proposta da seguinte forma:

> Considere dois pontos A e B (use bolinhas de massa de modelar coloridas para determinar os pontos, uma cor para cada ponto) sobre uma face paralela ao plano de projeção.
>
> Ache o ponto médio M do segmento AB (use régua e caneta para traçar o segmento)
>
> Ache o ponto médio M' do segmento A'B' onde A' e B' são as sombras correspondentes dos pontos A e B.
>
> O que vocês concluem sobre o ponto médio M no sólido e sua sombra M'?

Essa atividade tem por finalidade investigar se os alunos são capazes de perceber, através da observação, a conservação do ponto médio M em perspectiva cavaleira.

Os alunos devem observar e conjecturar sobre a sombra do ponto médio M do segmento AB e o ponto M.

Os alunos podem encontrar o ponto médio por estimativa, apenas pelo olhar e observar a sombra do ponto médio ou pelo uso dos dedos das mãos ou régua para medir a distância entre os pontos, tanto na sombra como no sólido. Podem fazer conjecturas a respeito da posição do ponto M' entre os pontos A' e B' e validar suas hipóteses através de medições e relações entre os segmentos A'M' e M'B'.



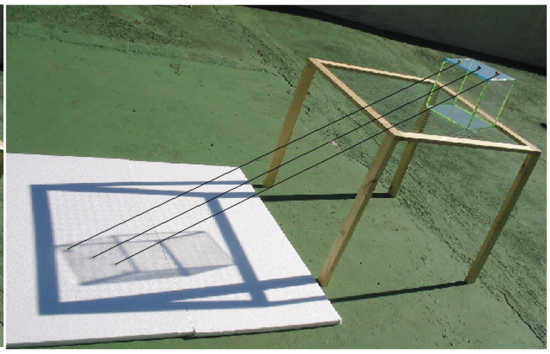


Fig. 24 A　　　　Fig. 24B

Podemos esperar que os alunos tenham uma dificuldade inicial em relação ao enunciado, já que o ambiente onde ele é realizado é diferente do ambiente papel e lápis (Chaachoua, 1998). Talvez tenham problemas na execução da atividade como, por exemplo, colocar os pontos em uma face não paralela ao plano de projeção. Neste caso, é necessária uma intervenção do professor para que releiam o enunciado novamente e discutam se os pontos foram colocados na face pedida pela atividade. Nesta atividade os objetos matemáticos são materializados, por exemplo, os pontos por massinhas de modelar, os traços feitos por canetões são os segmentos (G0 – geometria concreta, Parzysz, 2001) e a manipulação desses objetos podem auxiliar na resolução da atividade, criando um ambiente para questionamentos em relação às sombras desses objetos e o objeto em si (Boero, 1996).

3.3.1.2 Atividade B: Conservação das medidas e da razão entre dois segmentos

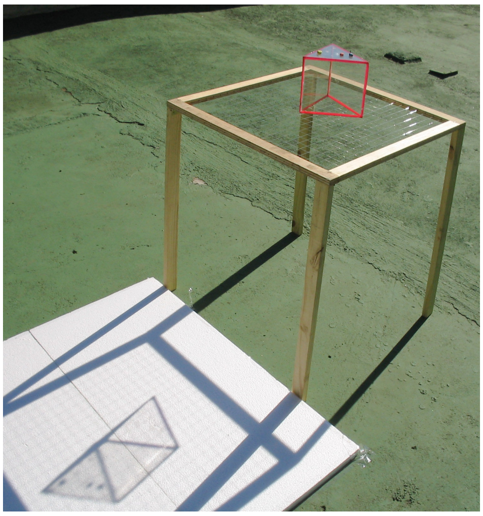
Propomos esta atividade aos alunos da seguinte forma:

> *Construa um segmento AB (use régua, caneta e as bolinhas de massa de modelar para os pontos, uma cor para cada ponto) sobre a face paralela ao plano de projeção.*
>
> *Considere um ponto C pertencente ao segmento AB e que não seja ponto médio (use massa de modelar para determinar o ponto C também).*
>
> *Relacione os segmentos AC, CB, A'C' e C'B' onde A',B',C' são as sombras respectivamente dos pontos A, B e C. O que você conclui em relação às medidas destes segmentos? Que relações você pode obter entre estes segmentos? Justifique.*

O objetivo dessa atividade é levar os alunos a perceberem que AC = A'C' e CB = C'B', e que portanto a razão entre os segmentos AC e CB no sólido se mantêm na projeção.

Para responder à questão, os alunos podem fazer uso das mãos, régua para comparar distâncias entre os pontos tanto no sólido como na sombra.

Os alunos podem ter dificuldade de perceber as razões entre os segmentos limitando-se apenas à distância entre os pontos, não os relacionando. Essa dificuldade pode ser detectada pelo fato dos alunos estarem habituados a "ver no plano" e não no espaço, razões e o teorema de Tales. A dificuldade estaria em relacionar dois planos diferentes: o da sombra e o da face do sólido. Neste caso, o professor deve tentar levar o aluno a perceber estas relações sem, contudo, intervir diretamente na atividade. Os alunos podem fazer conjecturas, questionar a relação dos raios solares com a sombra dos objetos através da manipulação dos objetos matemáticos materializados (Boero, 1996; Parzysz, 2001).



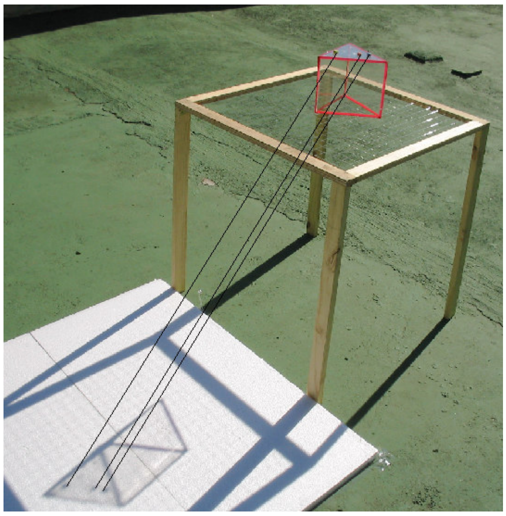


Fig.25 A Fig. 25B

3.3.1.3 Atividade C: Conservação do baricentro de um triângulo

Propomos a atividade C da seguinte forma:

> *Construa um triângulo ABC (marcar os vértices com massa de modelar, cada ponto com uma cor diferente, e usar régua para marcar os lados do triângulo) contido na face paralela ao plano de projeção.*
>
> *Encontre o baricentro do triângulo ABC.*
>
> *Encontre o baricentro do triângulo A'B'C' sombra correspondente ao triângulo ABC.*
>
> *Compare o baricentro do triângulo ABC e o baricentro de sua sombra A'B'C'. O que você conclui?Justifique.*

A finalidade desta atividade é que os alunos percebam que o baricentro mantém suas propriedades na sombra do triângulo ABC. Esperamos que os alunos construam o baricentro a partir dos pontos médios dos lados do triângulo ABC e suas respectivas medianas.

Os alunos podem construir um triângulo sobre uma das faces paralelas ao plano de projeção com as varetas ou criando segmentos com os canetões. Marcar os pontos médios de dois segmentos e construir as medianas e assim determinam o baricentro. Eles podem usar régua para medir a distância entre um dos vértices e o ponto médio da aresta que pertencem, tanto no sólido como na sombra, medir a distância entre o baricentro e um dos vértices tanto no sólido como na sombra, ou ainda perceptivamente. A materialização do triângulo (G0 – geometria concreta), das medianas e do baricentro através de traços feitos com o auxílio de canetão, massas de modelar que representam os vértices do triângulo e o baricentro, podem favorecer o processo de conjecturas dos alunos em relação às sombras (Boero, 1996).

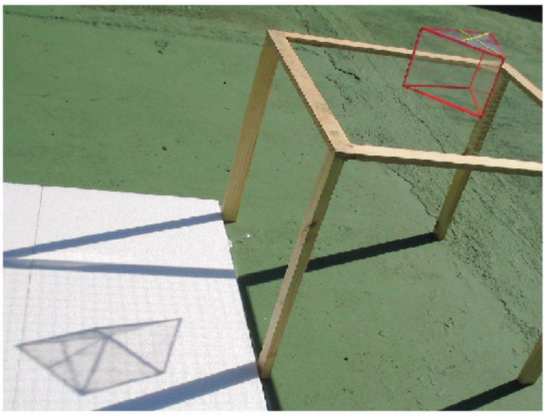


Fig. 26 A

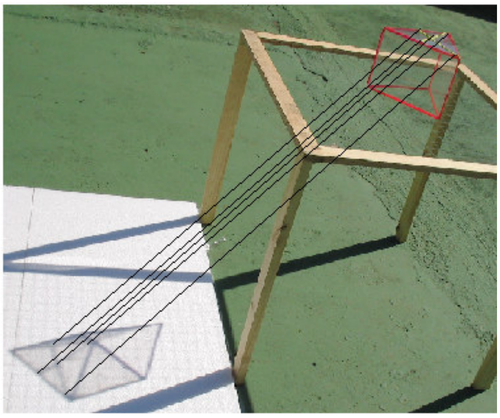


Fig. 26 B

Possivelmente tenham alguma dificuldade em compreender o enunciado já que a atividade é concreta e não no papel e lápis. Pode ser que essa passagem 2D para 3D seja difícil porque não é uma situação usualmente explorada em sala de aula.

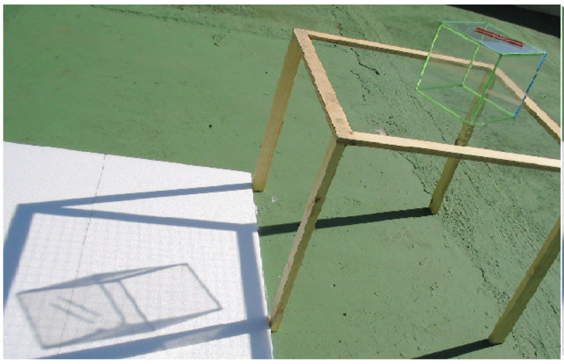
3.3.1.4 Atividade D: Conservação do paralelismo

Propomos esta atividade da seguinte forma:

Coloque dois palitos de churrasco paralelos entre si e, mantendo o paralelismo entre eles, coloque-os em posições diferentes sobre uma face paralela ao plano de projeção. Para cada posição observe e compare os segmentos correspondentes às sombras dos palitos.   *Para cada posição verifique se os segmentos correspondentes às sombras dos palitos são paralelos. De que forma você fez esta verificação? Justifique.*

O objetivo desta atividade é que os alunos percebam que o paralelismo é conservado mesmo se mudarmos as posições dos palitos na sombra correspondente. Acreditamos que os alunos usem apenas a observação visual das varetas de madeira para responder à questão acima.

Os alunos devem estabelecer conjecturas entre as posições dos palitos e seus correspondentes na sombra. É oferecida aos alunos fita adesiva para fixação das varetas na face.



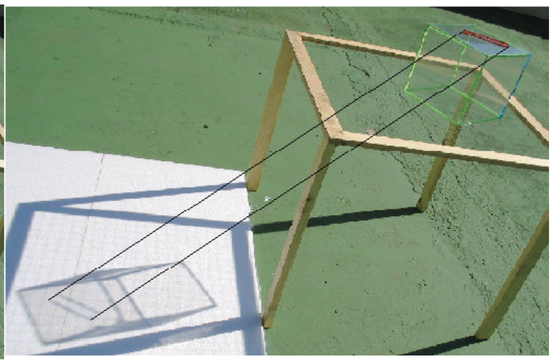


Fig. 27 A Fig. 27B

Uma outra estratégia, que pode ser utilizada pelos alunos, é medir várias distâncias entre as sombras dos segmentos e entre as varetas para constatar que são paralelas. Parece-nos que uma dificuldade possível nesta atividade seja a da comprovação do paralelismo na projeção. Nesta atividade, o professor não deve interferir esperando que os alunos busquem soluções para comprovar o paralelismo na sombra. A materialização dos segmentos paralelos por varetas de madeira (geometria concreta, Parzysz, 2001) e a manipulação dos mesmos sobre a face paralela ao plano de projeção podem auxiliar os alunos na resolução da questão, além de possibilitar questionamentos ou conjecturas acerca das sombras desses palitos paralelos (Boero, 1996).

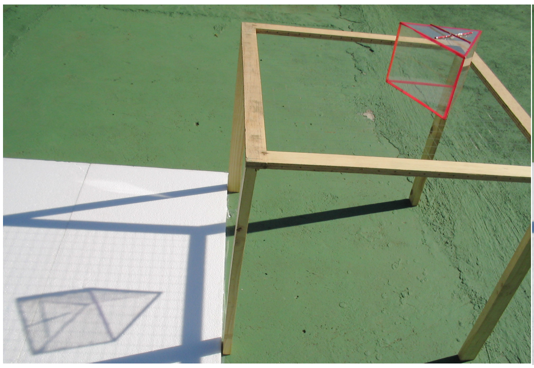
3.3.1.5 Atividade E: Conservação das medidas dos ângulos

Enunciamos a atividade G da seguinte forma:

Cruze dois palitos de churrasco e mantendo o cruzamento entre eles, coloque-os em posições diferentes sobre a face paralela ao plano de projeção. Para cada posição: *Observe e compare os palitos e suas sombras correspondentes.* *Compare o ângulo formado entre os dois palitos e o ângulo formado pela sombra dos dois palitos. O que você conclui? Justifique.*

O objetivo desta atividade é que os alunos percebam que o cruzamento e os ângulos entre as varetas se conservam na sombra, mesmo mudando de posição.

Os alunos devem estabelecer conjecturas entre as posições dos palitos e seus correspondentes na sombra, comparando o ângulo formado entre os dois palitos e o ângulo formado pela sombra dos dois palitos. Podem usar transferidor para conferir o ângulo entre os dois palitos, ou os dedos das mãos para comparar o ângulo formado pelas varetas como na sombra, ou ainda comparar perceptivamente a posição das varetas e as sombras correspondentes. A manipulação e materialização dos segmentos com os palitos, agora concorrentes deve produzir conjecturas em relação a suas sombras.



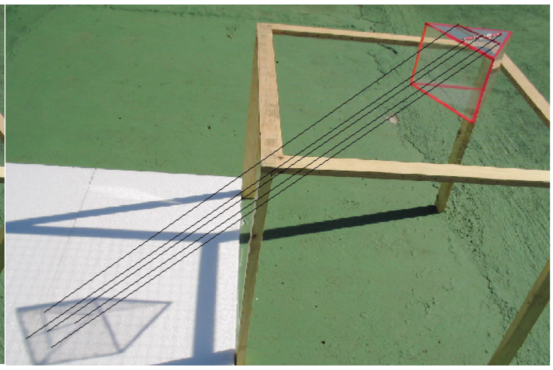


Fig.28 A Fig. 28B

Os estudantes podem ter dificuldade no uso do transferidor e seu uso incorreto pode levar a resultados errôneos. Neste caso, é preciso instrumentar o aluno no uso do transferidor, pois é bem possível que os alunos tenham tido contato com esse instrumento apenas no Ensino Fundamental.

Outra dificuldade possível pode ser em colocar os palitos cruzados e mantê-los unidos durante a mudança de posições. Para evitar isso, oferecemos fita adesiva para unir os palitos e fixá-los na face.

Resumindo, nesta seqüência buscamos verificar se neste primeiro bloco, os alunos são capazes de reconhecer nos objetos materializados (G0, geometria concreta) e manipulados propriedades da perspectiva cavaleira ainda implícitas, fazendo conjecturas sobre possíveis resultados ao manipularem os pontos e as varetas sobre os sólidos e que resultados poderiam ser obtidos na projeção de suas sombras (Boero,1996).

Neste bloco, procuraremos observar se os resultados obtidos pelos alunos têm alguma influência do pólo do sabido sobre o pólo do visto (Parzysz, 1989) já que estão trabalhando com objetos à vista. Haverá um momento para confrontar os resultados dos grupos, uma discussão entre os alunos e a pesquisadora sobre a seqüência. Esperamos que eles percebam as invariâncias das propriedades entre as sombras de sólidos diferentes.

3.3.2 SEQÜÊNCIA EXPERIMENTAL II – Planos não paralelos

A seqüência experimental II é desenvolvida também em ambiente externo, mas com uma diferença: os alunos farão uso dos mesmos sólidos, mas os pontos (massa de modelar) e as varetas de madeira ficarão sobre uma superfície não paralela ao plano de projeção.

A finalidade desta seqüência é que os alunos percebam que algumas propriedades levantadas na seqüência I não ocorrem na seqüência II e se sofrem influência dos resultados encontrados na seqüência I, relacionados com o que eles sabem (pólo do sabido) sobre os objetos e o que eles estão observando visualmente (pólo do visto).

Esperamos que a materialização (G0 – geometria concreta) e a manipulação dos objetos (Boero, 1996) possam favorecer a formação de conjecturas e questionamentos sobre os resultados obtidos na seqüência II e compará-los aos da seqüência I.

As atividades abaixo são as mesmas da seqüência I, diferenciando na seqüência II, na forma como os alunos executam as atividades, as estratégias e as possíveis dificuldades.

3.3.2.1 Atividade A: Conservação do ponto médio

Do mesmo modo que na seqüência I, é proposto aos alunos que considerem dois pontos A e B, *sobre uma face não paralela ao plano de projeção.* Achar o ponto médio M do segmento AB e também o ponto médio M' do segmento A'B' onde A' e B' são as sombras correspondentes dos pontos A e B (fig.29 A, 29B).

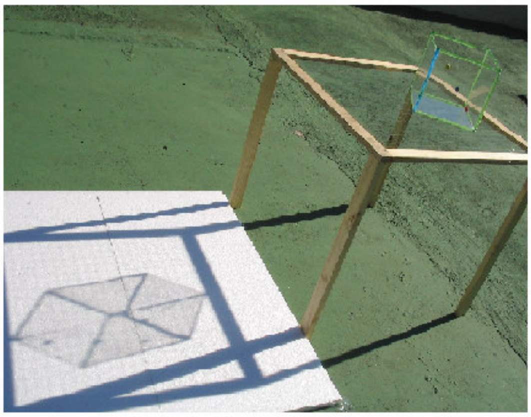


Fig.29 A

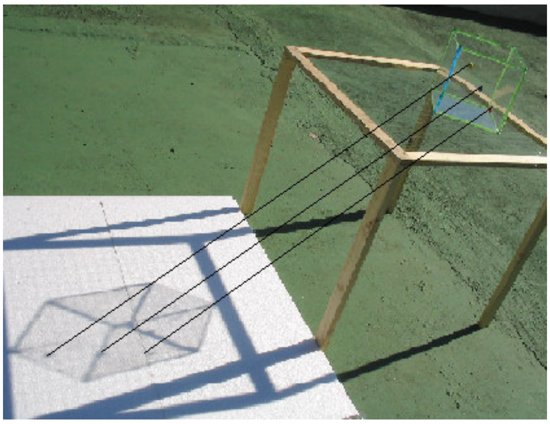


Fig. 29B

A finalidade desta atividade é que os alunos percebam que há conservação do ponto médio M', projeção do ponto médio M, mesmo quando este esteja projetado sobre *uma face não paralela ao plano de projeção*, utilizando os mesmos meios para resolver a atividade A da seqüência experimental I. Nessa atividade espera-se dos alunos conjecturas e até comparações com os resultados da seqüência I para a mesma atividade, a cerca da sombra projetada pelo ponto médio M.

3.3.2.2 Atividade B: Conservação da razão entre dois segmentos e a não conservação das medidas dos segmentos

A atividade B é análoga à atividade A da seqüência I. A única diferença é que os alunos devem construir um segmento AB sobre *uma face não paralela ao plano de projeção e* marcar um ponto C pertencente ao segmento AB e que não seja ponto médio (fig. 30 A e 30B).

O objetivo desta atividade é que os alunos percebam a conservação da razão entre dois segmentos, mesmo que o plano de projeção (o chão) e uma das faces do sólido não seja paralelo. Como nas figuras abaixo, 30 A e B, a face triangular do prisma é perpendicular ao plano de projeção (chão), mas podem ser usadas as faces retangulares não paralelas e não perpendiculares ao plano de projeção.

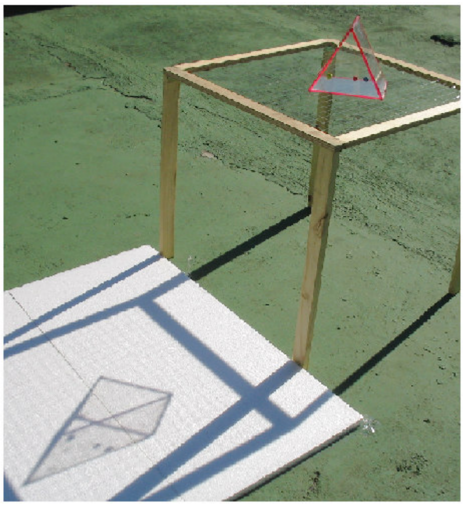


Fig. 30A

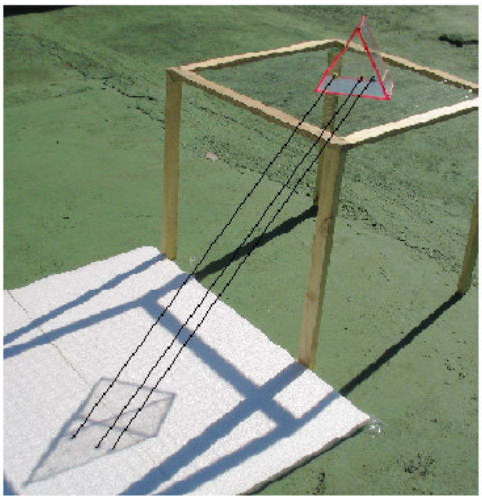
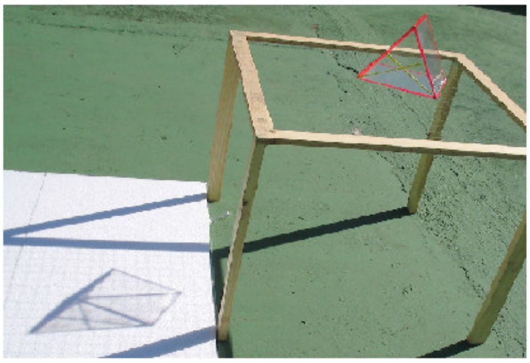


Fig. 30B

3.3.2.3 Atividade C: Conservação do baricentro de um triângulo

Nesta atividade, pedimos aos alunos para construir um triângulo ABC n*uma face não paralela ao plano de projeção* e encontrar o seu baricentro. A partir do triângulo A’B’C’, projeção do triangulo ABC, construir o baricentro deste triângulo. A construção é idêntica à seqüência I, mas sobre a face não paralela ao plano de projeção.

A finalidade desta atividade é que os alunos percebam que o baricentro se conserva na sombra A'B'C' do triângulo ABC mesmo na face não paralela ao plano de projeção.



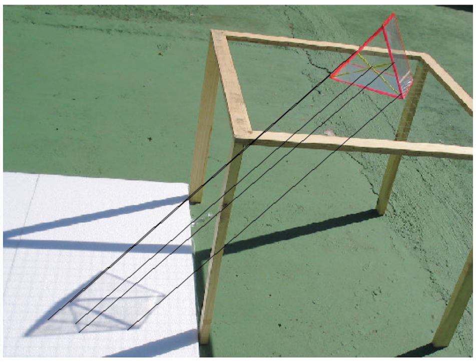


Fig. 31 A

Fig. 31B

É bem provável que os alunos resolvam a questão perceptivamente, mas podem usar de medidas comparando segmentos para verificar se o baricentro da sombra se encontra no mesmo lugar do baricentro no sólido. Nessa atividade esperamos que os alunos façam conjecturas a respeito da sombra do triângulo ABC e seu baricentro e comparem com o resultado da seqüência I. A materialização dos objetos permite a visibilidade do problema.

3.3.2.4 Atividade D: Conservação do paralelismo

Nesta atividade, propomos aos alunos para colocarem duas varetas de madeira, paralelas entre si e, mantendo esse paralelismo, mudá-los de posição sobre *uma face não paralela ao plano de projeção*. Para cada posição, os alunos devem observar os segmentos correspondentes e as sombras das varetas.

A finalidade desta atividade é que os alunos percebam que as varetas de madeira mantêm-se paralelas, mesmo em posições diferentes sobre uma face não paralela ao plano de projeção.

É fornecida a cada grupo fita adesiva para fixar as varetas sobre a face paralela ao plano de projeção.

Fig. 32 A

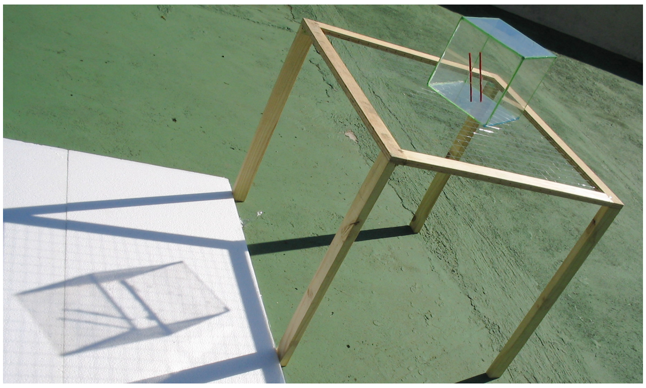
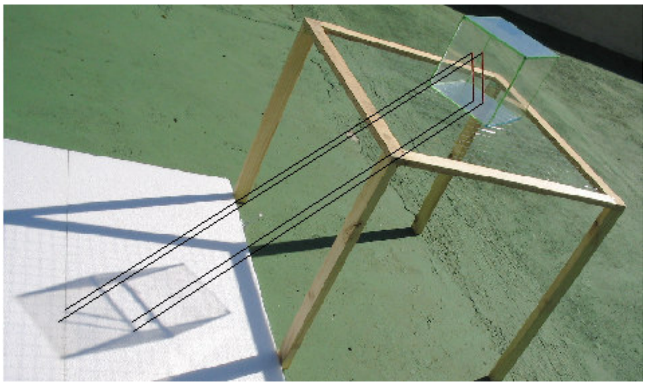


Fig. 32B



Os alunos podem fixar as varetas sobre uma face paralela ao plano de projeção e depois girar o sólido de modo que a face onde as varetas foram fixadas não seja paralela ao plano de projeção. Podem resolver esta atividade perceptivamente, comparar seus resultados no plano paralelo, fazer conjecturas sobre as sombras desses palitos paralelos, tanto na face paralela, como na não paralela. A materialização e manipulação dos segmentos paralelos na face não paralela devem favorecer a formação de conjecturas sobre as sombras comparando com os resultados da face paralela ao plano de projeção.

3.3.2.5 Atividade E: Não conservação das medidas dos ângulos

Nesta atividade, pedimos aos alunos para cruzar as duas varetas de madeira e, mantendo o cruzamento entre as duas varetas, colocá-las em posições diferentes sobre *uma face não paralela ao plano de projeção.* Para cada posição, os alunos devem observar as varetas com suas respectivas sombras.

O objetivo desta atividade é que os alunos percebam que há conservação do cruzamento entre as duas varetas na sombra, mas não há conservação das medidas dos ângulos entre os segmentos *na face não paralela ao plano de projeção.*

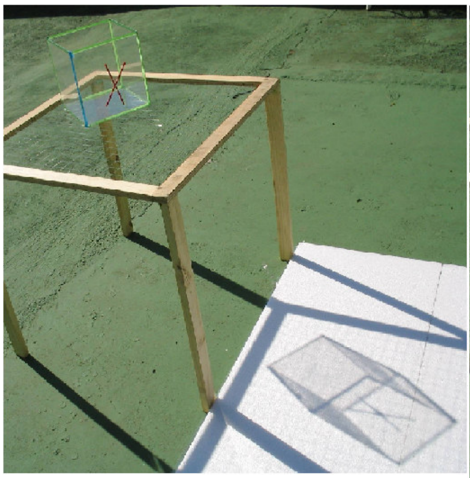


Fig. 33 A

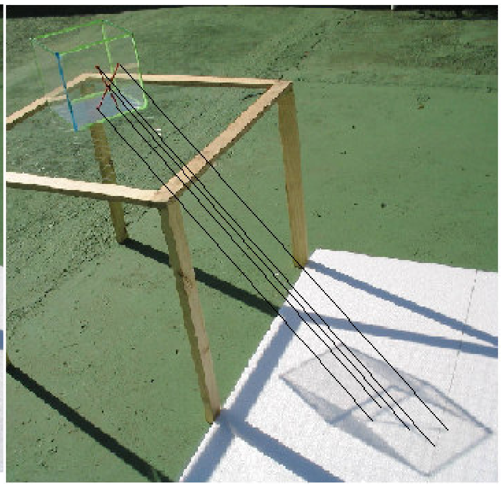


Fig. 33B

A dificuldade nesta atividade é medir o ângulo entre as duas varetas e depois a da sombra sem modificar a posição do sólido. É provável que tentem medir os ângulos das varetas na posição que se encontra tornando difícil a leitura do transferidor na face não paralela ao plano de projeção. Esperamos que os alunos anotem o ângulo formado entre as duas varetas na face paralela ao plano de projeção antes de colocar o sólido com a face, onde os objetos estão fixados, na face não paralela ao plano de projeção. Neste caso, o professor pode interferir para que os alunos resolvam a atividade desta forma.

De acordo com Boero (1996), a experiência das sombras é um momento importante para que o aluno inicie uma geometria mais racional mesmo que isso seja pouco esperado em nossa pesquisa. Os alunos estão acostumados a aulas expositivas, pouco experimentais, onde o processo de conjecturas e hipóteses dos mesmos não é muito explorado em sala de aula.

3.3.3 Institucionalização da Perspectiva Cavaleira

Antes de apresentarmos a perspectiva cavaleira como um objeto matemático, propomos ainda algumas atividades relativas à construção da perspectiva cavaleira de *figuras planas* situadas num plano perpendicular ao plano de projeção. Embora essa situação já tenha sido estudada, por se tratar de um plano não paralelo ao plano de projeção, as atividades propostas são úteis para representar prismas e pirâmides em perspectiva cavaleira.

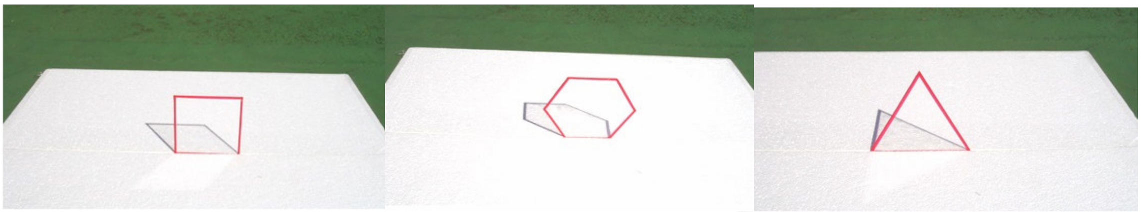


Fig. 34

Cada grupo de alunos receberá uma peça poligonal plana de acrílico (fig. 34) e pedimos a eles que um dos lados da peça seja paralelo ao plano horizontal e a peça perpendicular ao plano de projeção. Espera-se que os alunos observem que a perspectiva cavaleira de um quadrado é um paralelogramo, que a perspectiva de um triângulo equilátero é um triângulo que pode ser escaleno e a perspectiva de um hexágono regular é um hexágono que poderá ser não regular.

Os estudantes podem medir com régua as arestas da placa de acrílico e as sombras correspondentes.

Após a aplicação das atividades, teremos um momento onde a pesquisadora levantará com os alunos os resultados obtidos, tanto na face paralela ao plano de projeção (seqüência I), como na face não paralela ao plano de projeção (seqüência II), a fim de compará-los e relacioná-los.

Esperamos que os alunos identifiquem as seguintes propriedades:

I. Quando uma das faces é paralela ao plano de projeção, conservam-se: o ponto médio de um segmento, o paralelismo, o baricentro de um triângulo, o ângulo formado entre dois segmentos, a razão entre dois segmentos contidos na mesma reta, a concorrência de retas e o perpendicularismo entre retas.

Além disso, os objetos contidos no plano de projeção são representados em verdadeira grandeza (VG).

II. Quando a face não é paralela ao plano de projeção, conservam-se todos os elementos anteriores, exceto as medidas de segmentos e de ângulos.

A finalidade deste momento é o da sistematização da perspectiva cavaleira como objeto matemático.

No processo de institucionalização, além do levantamento das propriedades da perspectiva cavaleira, introduziremos os elementos que fazem parte da construção em perspectiva cavaleira de uma figura geométrica, tais como ângulo de fuga, coeficiente de redução e retas fugantes, como é explicado no capítulo II.

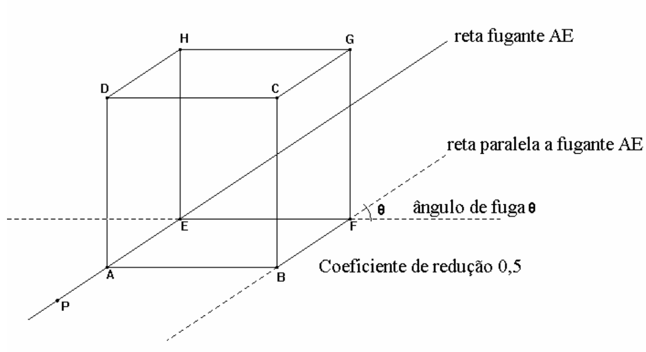
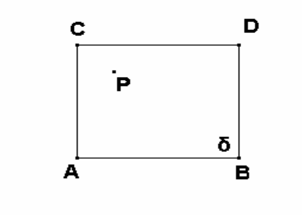


Fig. 35

Antes de prosseguirmos com a pesquisa no ambiente Cabri, propomos aos alunos uma atividade que possa levá-los a descobrir uma maneira de resolver algumas dificuldades que podem ocorrer na resolução de atividades no ambiente Cabri que chamamos de tarefa e é desenvolvida em sala de aula.

Prevemos que os alunos terão dificuldade de criar um ponto sobre uma face de um cubo no ambiente Cabri.

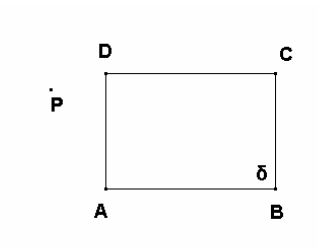
Fig. 36



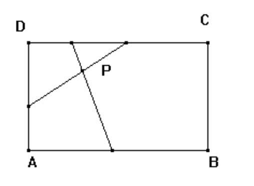
No ambiente Cabri, queremos que, ao deslocar o plano δ para qualquer lugar da tela, ou girar o plano ao redor de um dos vértices, o ponto P continue pertencendo ao plano.

Na figura abaixo, fizemos um deslocamento do plano δ representado por um retângulo no ambiente Cabri, mas o ponto P continuou no mesmo lugar não acompanhando o plano.

Fig. 37



Para fixarmos o ponto P sobre o plano δ precisamos de dois segmentos concorrentes cujas extremidades pertençam aos lados do retângulo que representa o plano (fig. 38 e 39)



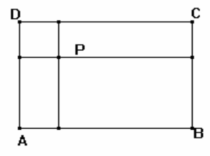


Fig. 38 Fig. 39

Dessa maneira, podemos movimentar o plano δ de qualquer maneira e o ponto P acompanhará o movimento do plano δ.

Para auxiliar os alunos a fixar um ponto num plano, na seqüência seguinte, associada ao Cabri, estamos propondo uma atividade preliminar que consiste em fixar um ponto sobre um objeto tridimensional (no caso um prisma esquelético).

O objetivo é que os alunos encontrem segmentos paralelos às arestas do prisma esquelético e que definam a posição do ponto P sobre a face paralela ao plano de projeção. Estes segmentos poderiam ser construídos através de fios de algodão ou material sintético do carretel, esticados, e amarrados às arestas e paralelos em relação a outras arestas. O cruzamento destes “segmentos” seria o ponto P e, conseqüentemente, a sombra P’ seria observável e localizável.

Os grupos receberão os seguintes materiais: um cubo opaco e um esquelético. Para marcar o ponto podem usar caneta, lápis ou massa de modelar, régua para localizar o ponto e um carretel de linha.

Um dos componentes do grupo deve determinar um ponto sobre a face do cubo opaco e, sem que o outro aluno veja, deverá, oralmente, dar a localização deste ponto para o colega que está com um cubo esquelético. O aluno deverá localizar esse ponto no cubo que lhe foi entregue usando apenas o carretel de linha e uma régua (fig. 40).

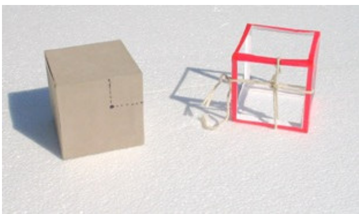


Fig. 40

A finalidade dessa atividade é preparar o aluno para a criação de um ponto sobre uma face de um cubo no ambiente Cabri.

3.4 CONCEPÇÃO DO BLOCO 2 – Com o Cabri-Géomètre

O bloco 2 é composto por duas seqüências de atividades:

-seqüência experimental III (plano paralelo ao plano de projeção);

-seqüência experimental IV (plano não paralelo ao plano de projeção).

As seqüências III e IV são totalmente desenvolvidas em ambiente Cabri. Na seqüência III, usamos as faces paralelas de um Cubo em perspectiva cavaleira e, na seqüência IV, dois planos α e β não paralelos. São distribuídos folhas de atividades e um questionário para cada grupo de alunos.

Neste bloco, o aluno deverá criar suas fugantes já que não haverá a presença dos raios solares. Os segmentos de reta, pontos e triângulos são criados pelo aluno para a execução das atividades abaixo.

A finalidade do bloco 2 é comparar os resultados obtidos pelo aluno no bloco 1, se houve algum progresso em termos de aprendizagem em relação às propriedades da perspectiva cavaleira. Talvez, possamos verificar alguma influência do pólo do visto sobre o pólo do sabido. Pode haver algum conflito entre estes pólos assim como uma contaminação do sabido pelo percebido. Os objetos matemáticos representados podem parecer desenhados corretamente (percebido), mas as construções só são consideradas corretas de acordo com o enunciado (sabido). Exemplo: a construção de dois segmentos concorrentes contidos na face frontal do cubo podem parecer perfeitamente construídos (percebido) e o aluno confirmar este desenho (contaminação do sabido pelo percebido), mas se movimentarmos o cubo, os dois segmentos concorrentes podem não estar contidos na face frontal do cubo segundo os dados do enunciado. Neste caso não conferem a estas representações status de figura de acordo com Capponi e Laborde (2002), como colocamos no capítulo I, a figura é um conjunto de pares ordenados, onde um dos pares é o objeto geométrico e o outro é uma das suas representações, um de seus desenhos. Estas construções são apenas ilustrações.

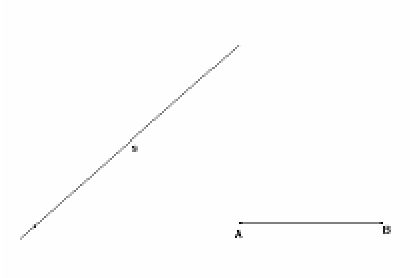
As atividades do bloco 2 correspondem a G1 – geometria espaço-gráfica, onde os objetos matemáticos materializados (G0 - geometria concreta) estão representados por figuras na tela do computador. Procuramos verificar se o ambiente informático contribui para uma aprendizagem da Geometria Espacial (Chaachoua, 1998).

Durante a execução das atividades do bloco 2 e 3, os objetos e os sólidos estarão à disposição na sala de informática. Os alunos podem manipulá-los sempre que houver dúvidas durante as sessões no Cabri.

Antes da primeira atividade, é colocado o seguinte problema: construir um cubo ABCDEFGH, sendo dados a direção da fugante s, o coeficiente de redução para a aresta do cubo contida numa fugante e a aresta AB do cubo paralela ao plano de projeção (tela do computador) e ao plano horizontal.

A atividade é proposta da seguinte forma:

Fig.41



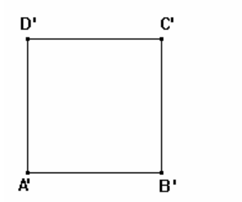
Construa o cubo A'B'C'D'E'F'G'H' tendo a direção da fugante 's' e a aresta AB do cubo paralelo ao plano de projeção e paralela ao plano horizontal de comprimento 5cm e um coeficiente de redução 0,5.

Salve com o nome de arquivo CUBO.

1. Uma possível estratégia dos alunos é criar um quadrado usando a ferramenta polígono regular no Cabri, ou usar circunferências e um segmento para a construção do mesmo.

Um dos procedimentos possíveis é começarmos desenhando o quadrado ABCD cujos lados AB e CD são paralelos ao plano de projeção (fig. 42). Indicamos por A', B', C'e D' as projeções oblíquas dos pontos A, B, C e D sobre o plano de projeção.

Fig. 42



2. Adotamos então um ponto X qualquer sobre a folha de papel e por ele traçamos uma reta s qualquer não paralela e não perpendicular ao plano de projeção. A esta reta chamaremos de reta fugante (fig.43).

O ângulo determinado entre a fugante e uma reta horizontal do plano de projeção chama-se ângulo de fuga. Outras retas paralelas a esta são chamadas de retas fugantes e devem passar pelos vértices do quadrado A'B'C'D'.

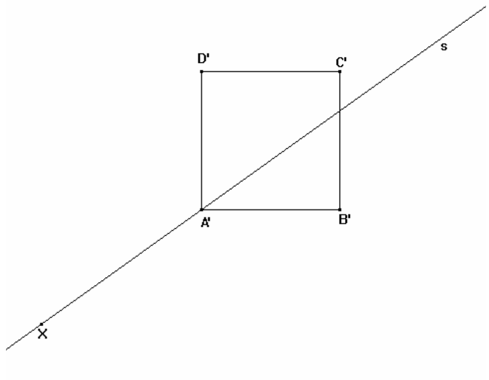


Fig.43

3. Escolhe-se um coeficiente de redução. No caso, usamos como coeficiente de redução k = 0,5 (fig.44).

Na figura 26, o segmento A'D' é multiplicado por k = 0,5.

Criamos o ponto médio M de A'D'. Esta medida é transferida para uma das fugantes. Nestas condições, a medida A'E' é igual à medida A'M. Aqui podemos usar a circunferência com centro no ponto A' passando pelo ponto M para marcarmos o ponto E' sobre a fugante que passa pelo ponto A'.

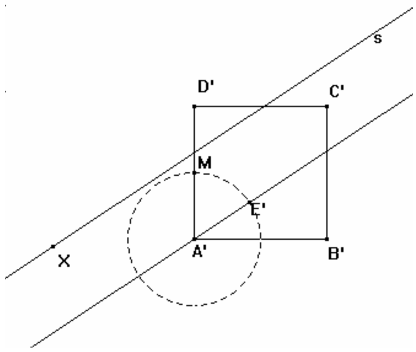


Fig. 44

4. Construímos então retas paralelas à fugante s passando pelos vértices A', B', C' e D'. (fig. 45).

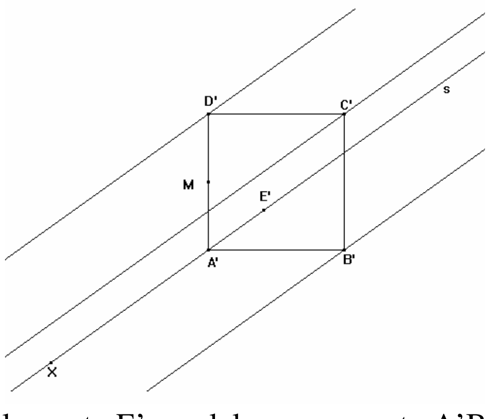


Fig.45

5. Construímos a reta que passa pelo ponto E' paralela ao segmento A'B'.

F' é o ponto de intersecção entre esta reta e a reta que passa pelo ponto B'. O paralelogramo formado pelos segmentos A’B’, B’F’, F’E’ e A’E’ é a perspectiva cavaleira do quadrado ABFE (Fig.46).

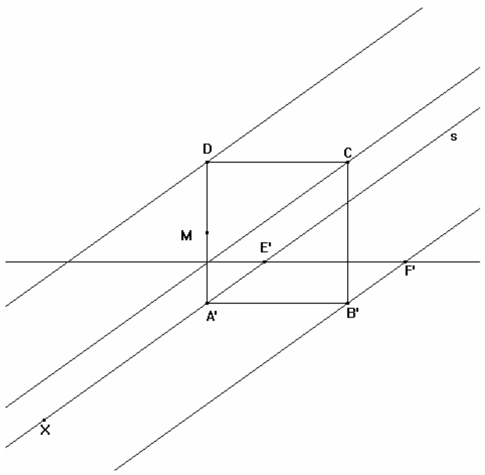


Fig.46

6. Construímos a reta perpendicular ao segmento A’B’ passando pelo ponto E’.

Determinamos o ponto H’ intersecção da reta perpendicular ao segmento A’B’ que passa pelo ponto E’ com a fugante que passa pelo ponto D’ (fig.47).

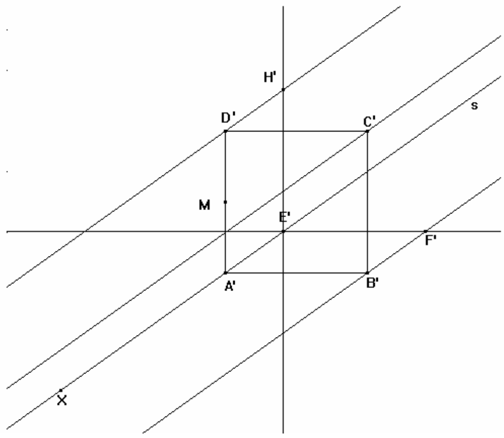
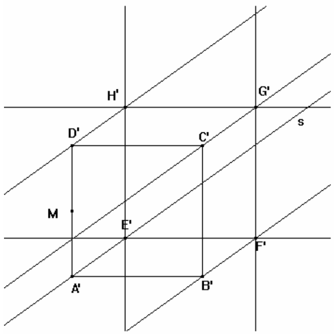


Fig.47

7. E por fim determinamos os outros segmentos (arestas) e os vértices que formam o Cubo. (fig. 48A, 48B)



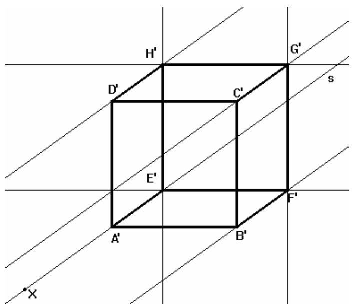
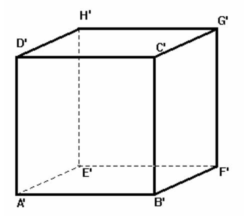


Fig.48A

Fig. 48B



Com o arquivo aberto, é proposto ao aluno que localize um ponto sobre a face frontal do cubo como é explicado na página 45.

Esta atividade corresponde à tarefa 1 que é feita no final do bloco 1 como introdução do bloco 2 - no ambiente Cabri.

A finalidade desta atividade é que os alunos consigam construir um cubo em perspectiva cavaleira usando as propriedades estabelecidas no bloco 1 e localizem um ponto de uma face e a sua projeção.

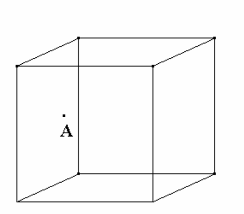


Fig. 49

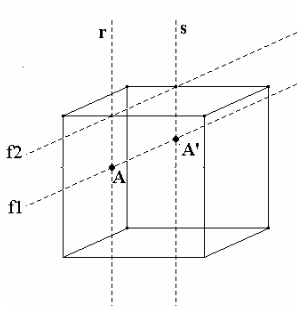


Fig. 50

Para construir a projeção do ponto A, na face posterior do cubo, traçamos uma reta fugante f1 paralela à aresta não paralela ao plano de projeção. Traçamos uma reta vertical r paralela à aresta frontal do cubo pelo ponto A. Traçamos outra reta fugante f2 pela intersecção entre a reta vertical r e a aresta horizontal paralela ao plano de projeção. Traçamos outra reta vertical s paralela à aresta superior da face posterior do cubo pela intersecção entre a fugante f2 e a aresta horizontal superior da face posterior do cubo. O ponto A’ é a intersecção entre a reta fugante f1e a reta vertical s na face posterior. A’ é a projeção do ponto A.

A partir desta construção os alunos farão atividades que equivalem às seqüências experimentais do bloco 1.

3.5 ALGUNS ASPECTOS DE UMA ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES DO BLOCO 2

Este bloco de atividades é concebido de tal forma que os alunos possam ter maior controle sobre os resultados. A natureza das construções, que descrevemos abaixo, exige um direcionamento das atividades por parte do professor em todos os momentos em que os alunos necessitarem ajuda sem interferir no objetivo da atividade. A fixação dos pontos e segmentos na face frontal do cubo e suas projeções na face posterior poderá ser um obstáculo na execução das seqüências de atividades deste bloco exigindo algumas intervenções pelo professor para que possam prosseguir.

As análises teórico-matemáticas das atividades apresentadas a seguir são muito complexas para este grupo de alunos, dada a pouca ou nenhuma experiência com provas ou justificativas matemáticas. No Capítulo I, ressaltamos as últimas pesquisas que mostram o panorama do ensino da Geometria no Brasil. A geometria ensinada está alicerçada em medidas, na álgebra e muito pouco em termos de demonstrações e provas.

Baseamos este bloco nas idéias de Parzysz (2001) levando em conta a geometria concreta trabalhada no bloco 1 e que é trabalhada na geometria espaço-gráfica – G1. Esperamos que os alunos façam alguma relação entre as duas geometrias para resolver as atividades deste bloco. As idéias de Chaachoua (1998) também são contempladas neste bloco, porque esperamos que o ambiente Cabri favoreça a aprendizagem das propriedades da perspectiva cavaleira.

Os sólidos utilizados no Bloco 1 podem ser utilizados ainda neste bloco para que os alunos recordem as situações encontradas nas atividades executadas no ambiente externo e as relacionem às atividades a serem executadas no Cabri.

3.5.1 Seqüência experimental III – Planos paralelos

3.5.1.1 Atividade A: Ponto médio

Propomos que os alunos abram o arquivo CUBO e executem esta atividade da seguinte forma:

Considere dois pontos A e B sobre a face frontal paralela ao plano de projeção.

Trace o segmento AB.

Ache o ponto médio M do segmento AB.

Determine o segmento A'B' onde A' e B' são as projeções dos pontos A e B na outra face paralela ao plano de projeção.

Determine o ponto médio M' do segmento A'B'.

Salve o trabalho.

Descreva como você determinou a projeção A'B' do segmento AB.

Como você determinou o ponto M' projeção do ponto M?

A finalidade desta atividade é que os alunos percebam a conservação do ponto médio em perspectiva cavaleira no ambiente Cabri.

Nesta atividade, esperamos que os alunos usem paralelas como se fossem raios solares incidindo sobre a face paralela ao plano de projeção e sobre o segmento AB.

Para a construção do segmento A'B', uma das estratégias que se espera dos alunos é que tracem uma paralela à aresta PT. Marquem o ponto A'' interseção desta reta com a aresta TU.

Construam uma reta fugante paralela à aresta TX pelo ponto A''. A fugante determina o ponto A''' sobre a aresta VX. Tracem pelo ponto A''' uma paralela à aresta SX. (Fig. 51)

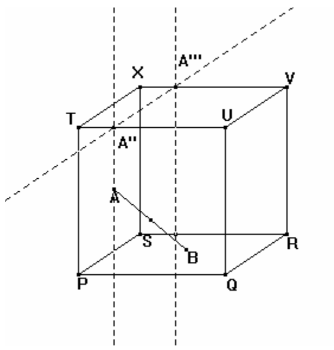


Fig. 51

Tracem uma fugante pelo ponto A. Marquem a intersecção A' entre esta fugante e a paralela a SX pelo ponto A'''. O ponto A' é a projeção do ponto A na face no plano de projeção do cubo. (fig.52).

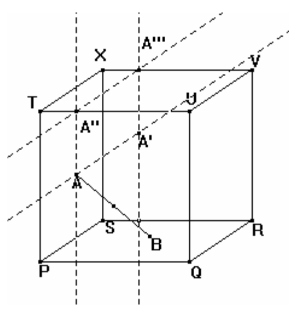


Fig. 52

Repetimos o mesmo procedimento para o ponto B(Fig. 53, 54).

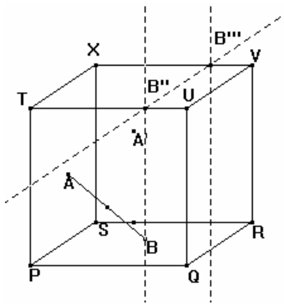


Fig. 53

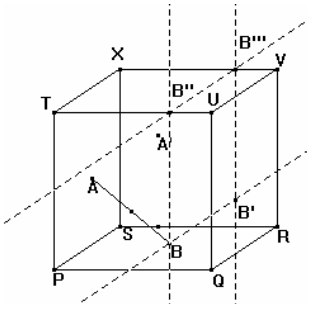


Fig. 54

Tracem o segmento A'B' sobre a face contida no plano de projeção do cubo (Fig. 55).

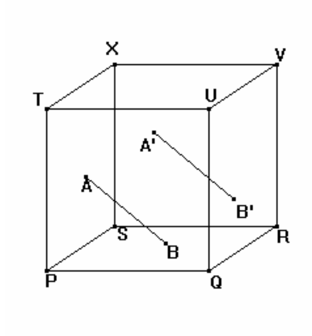


Fig. 55

Para marcar o ponto médio no segmento AB, pode-se usar o comando ponto médio M do Cabri.

Para criar a projeção do ponto médio M, pode-se usar uma fugante e marcar o ponto médio M' sobre o segmento A'B', projeção do segmento AB.

Os alunos podem verificar que M' é ponto médio medindo os segmentos A'M' e M'B'.

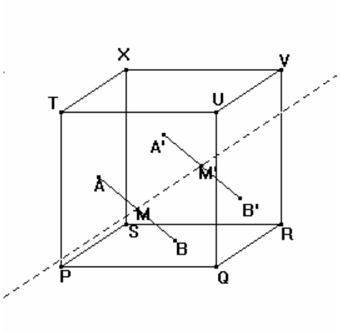


Fig. 56

Para justificar que M' é ponto médio, os alunos podem usar o teorema de Tales da seguinte forma:

As retas que contêm $AA', MM \ e \ BB'$ são fugantes logo $AA' // BB' // MM'$. Pelo teorema de Tales, $\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'}$, mas M é ponto médio de AB logo $\frac{AM}{MB} = 1$. Portanto

$A'M' = M'B'$. Logo M' é ponto médio de $A'B'$ (fig. 57).

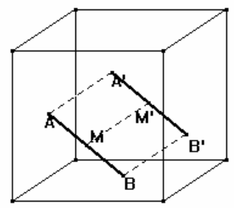


Fig. 57

A maior dificuldade que esperamos encontrar na atividade está relacionada a construção do segmento A'B', projeção do segmento AB. Como estamos lidando com a geometria dinâmica, se a construção do segmento A'B' não for correta, ao movimentar os pontos A e B, o ponto M' deixará de ser ponto médio de A'B'. Neste caso, procuraremos fazer com que os alunos recordem as atividades do cubo, do barbante e da fixação de um ponto na face frontal que descrevemos anteriormente. Também retomaremos a atividade do ponto médio no bloco 1 esperando que os alunos possam relacionar novamente os raios solares com as fugantes, a relação raios solares e sombra do objeto, ou seja, sem luminosidade não há sombra e, portanto, sem fugantes não há projeção e a sombra acompanha o movimento do objeto. Espera-se, então, a retomada da geometria concreta (G0), isto é, da materialização dos objetos para G1 quando os objetos matemáticos são representados por figuras na tela do computador.

3.5.1.2 Atividade B: Conservação das medidas e da razão entre os segmentos

Aproveitamos a atividade A e enunciamos esta atividade da seguinte forma:

Mantendo o seu trabalho aberto, apague o ponto M e crie o ponto C no segmento AB e sua projeção C' no segmento A'B'.

Movimente o ponto C sobre o segmento AB.

Observe e compare as diversas posições de C e os segmentos AC e CB e A'C' e C'B' suas respectivas projeções.

Salve o trabalho.

Compare as medidas dos segmentos. O que você conclui?

Quais as razões entre os segmentos AC, CB e A'C' e C'B'?

A finalidade desta atividade é que os alunos percebam que a razão entre os segmentos AC e CB e entre os segmentos A'C' e C'B' é a mesma, e que o segmento AC e seu correspondente na projeção A’C’ possuem as mesmas medidas, assim como os segmentos CB e C’B’ , ou seja, há conservação da razão entre os segmentos e dos comprimentos.

Com a movimentação do ponto C sobre o segmento AB, esperamos que os alunos consigam levantar algumas relações entre as medidas dos segmentos, relacionem a razão entre as medidas dos segmentos AC e CB com a razão entre os segmentos A’C’ e C’B’ e cheguem à conclusão de que, em relação à face paralela, um segmento tem sua projeção em VG (verdadeira grandeza), ou seja, suas medidas permanecem iguais ao segmento AB que está na face frontal.

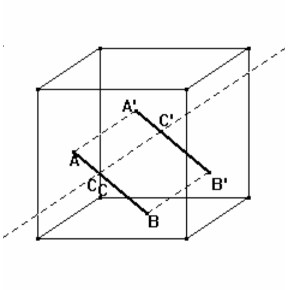


Fig.58A

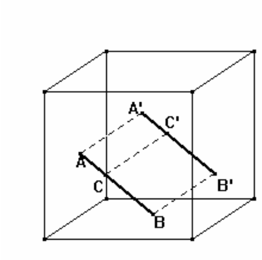


Fig.58B

Como $\overline{AA'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{BB'}$ são segmentos contidos em fugantes, então $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ são paralelos dois a dois. Pelo teorema de Tales temos $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{A'C'}{C'B'}$. As retas $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ sendo paralelas são coplanares. Seja α o plano que contém as retas $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$. Este plano intersecta as faces opostas do cubo em retas paralelas. Logo $\overline{AC} // \overline{A'C'}$. Portanto $AA'CC'$ é um paralelogramo. Logo $\overline{AC} = \overline{A'C'}$.

Analogamente, mostra-se que $CB = C'B'$. Como $AC + CB = AB$ então $A'C' + C'B' = A'B'$. Donde C' está entre A' e B'.

É bem provável que os alunos tenham dificuldade de reconhecer uma relação entre os segmentos e não usem o teorema de Tales sendo difícil uma análise teórica matemática desta atividade como foi descrita anteriormente. Neste caso, é necessária a intervenção do professor procurando levar os alunos a perceber relações entre os segmentos, buscando soluções que acreditem ser as mais corretas. Os alunos precisam redefinir o ponto M para ponto C, ou ainda apagar o ponto M e marcar o ponto C e talvez necessitem de auxílio. Espera-se que os alunos retomem o bloco 1, fazendo uma ligação entre G0 (geometria concreta) e G1 (geometria espaço-gráfica) para a realização desta atividade.

3. 5.1.3 Atividade C: Conservação do baricentro

Propomos aos alunos que abram o arquivo CUBO e executem a atividade de acordo com o enunciado abaixo:

> *Construa um triângulo ABC na face frontal paralela ao plano de projeção.*
> *Determine o triângulo A'B'C'. Observe e meça os lados A'B', B'C' e A'C' onde A', B' e são as respectivas projeções de A, B e C.*
> *Encontre o baricentro H do triângulo ABC.*
> *Encontre o baricentro H' da projeção A'B'C' do triângulo ABC na outra face o plano de projeção.*
> *Movimente o ponto A observando os triângulos e o baricentro.*
> *Salve o trabalho.*
> *1. Como você determinou o triângulo A'B'C'? E a projeção H'?*
> *2. Que conclusão você tirou em relação à medida dos lados entre os dois triângulos?*
> *3. Compare os baricentros. Justifique.*
> *4. Movimente o ponto A observando os triângulos e o baricentro, o que conclui?*

O objetivo desta atividade é que os alunos consigam perceber, no ambiente informático, que há conservação da propriedade do baricentro.

Uma possível estratégia esperada dos alunos é a seguinte:

Considerar os pontos médios M, N e P dos lados do triângulo ABC. Como há conservação dos pontos médios M', N' e P' são os pontos médios dos lados do triângulo A'B'C'. Conclui-se que o ponto H' é o baricentro do triângulo A'B'C' (Fig. 59A, 59B).

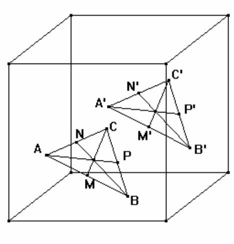


Fig. 59 A

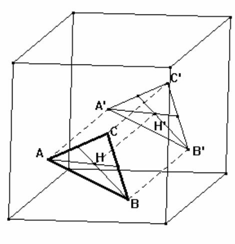


Fig. 59B

Os alunos podem usar as ferramentas (também chamadas de primitivas) do Cabri (retas paralelas, ponto de intersecção, comprimento, distância, etc.), fazer conjecturas e levantar hipóteses apenas perceptivamente (pólo do visto).

Nesta atividade, é possível que os alunos tenham novamente alguma dificuldade na construção da projeção do triângulo ABC. A construção do baricentro não deve trazer grandes dificuldades já que foi trabalhada anteriormente no bloco 1. Neste caso, é preciso direcionar o aluno lembrando das situações encontradas no bloco 1 e durante a institucionalização.

Podemos verificar, nesta atividade, se há algum conflito entre os pólos do visto (construção) e do sabido (enunciado). Espera-se que os alunos retomem a atividade realizada no bloco 1, quando os objetos foram materializados (G0) e manipulados e agora representados no plano, na tela do computador (G1) fazendo relações entre os resultados obtidos em G0 e o que se pode esperar em G1.

3.5.1.4 Atividade D: Paralelismo entre dois segmentos

Nesta atividade, propomos aos alunos que abram o arquivo CUBO e executem a atividade conforme o enunciado abaixo:

> *Construa dois segmentos AB e MN paralelos sobre a face frontal paralela ao plano de projeção. Determine os segmentos A'B' e M'N' correspondentes às suas projeções sobre a outra face paralela ao plano de projeção.*
>
> *Salve o trabalho.*
>
> *Como você determinou essas projeções? Mantém o paralelismo? Justifique.*

A finalidade desta atividade é que os alunos verifiquem que há conservação do paralelismo entre os segmentos A'B' e M'N'.

Uma justificativa para o paralelismo entre os segmentos A'B' e M'N' pode ser a seguinte:

Como A'B' é projeção de AB e M'N' é projeção de MN então A'B'//AB e MN//M'N'. Como AB//MN então A'B'//M'N'.

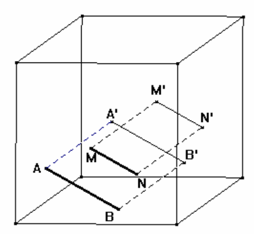


Fig. 60

Os alunos podem usar as primitivas do Cabri para encontrar as projeções dos segmentos contidos no plano de projeção.

Podem ter dificuldade de compreender o enunciado, de perceber a relação de paralelismo entre os segmentos, dificuldade de fixar os segmentos nas faces correspondentes e também no uso de paralelas na construção das projeções dos segmentos paralelos. Neste caso, o professor deve intervir e retomar a atividade de fixação do ponto A e sua projeção para que relacione com esta atividade.

Pode haver um conflito entre os pólos do visto (construção) e o sabido (enunciado). Em G0 – geometria concreta, os segmentos paralelos foram materializados e manipulados no bloco 1 e no bloco 2, que corresponde ao G1 – geometria espaço-gráfica, estes segmentos estão representados por figuras no espaço na tela do computador. Espera-se que os alunos façam correspondência dos resultados obtidos em G0 com os resultados de G1.

3.5.1.5 Atividade E: Conservação das medidas dos ângulos

Com o arquivo CUBO aberto propomos a atividade D da seguinte forma:

Construa dois segmentos concorrentes entre si AB e RS sobre a face frontal paralela ao plano de projeção.

Construa os segmentos A'B' e R'S' respectivas projeções de AB e RS, sobre a outra face paralela ao plano de projeção.

Salve o trabalho.

1. *Como você determinou as projeções?*
2. *O cruzamento é mantido? Justifique.*
3. *Compare o ângulo formado entre os segmentos AB e RS e A'B' e R'S'. Justifique.*

O objetivo desta atividade é que os alunos percebam que há conservação do ângulo e do ponto de intersecção entre os segmentos AB e RS.

Os alunos podem resolver a atividade da seguinte forma:

Seja O a intersecção dos segmentos AB e RS.

Se os segmentos AB e RS estão em VG então A'B' e R'S' também estarão.

Os segmentos RB e R'B' também estarão em VG.

Os segmentos OB e O'B' também estarão em VG e os segmentos OR e O'R' também estarão em VG. Logo os triângulos ROB e R'O'B' são congruentes pelo caso LLL. Então os ângulos ROB e R'O'B' também são congruentes.

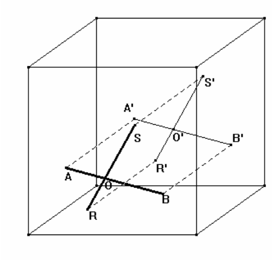


Fig. 61

Com a movimentação dos segmentos os alunos podem perceber modificações no ângulo, na intersecção e nos comprimentos dos segmentos na projeção.

Os alunos podem verificar que as medidas dos ângulos se conservam usando primitivas do Cabri.

A dificuldade pode estar na construção e fixação das retas concorrentes na face frontal e na construção das projeções na face posterior no cubo. Além disso, é bem possível que tenham dificuldade de medir o ângulo entre os segmentos que exige certa habilidade com o Cabri. Nestes casos, é necessário intervir fazendo com que retomem o bloco 1, relacionando os raios solares e as fugantes e em relação ao Cabri, auxiliá-los com a ferramenta ângulo. Pode haver um conflito entre os pólos do visto (construção) e do sabido (enunciado). Espera-se que, com a materialização e manipulação dos segmentos secantes em G0 – geometria concreta, contribua na resolução desta atividade na tela do computador, em G1-geometria espaço-gráfica.

3.5.2 Seqüência experimental IV – Planos não paralelos

Para esta seqüência, foi construído pela pesquisadora um arquivo chamado Plano α, que foi instalado nos computadores usando as ferramentas do software Cabri-Géomètre.

No arquivo Plano α, estão construídos dois planos α e β sendo o plano α móvel de tal forma que inicialmente se apresenta paralelo ao plano β e com o auxílio da reta x este plano torna-se não paralelo ao plano β (plano de projeção). O movimento criado para o plano α servirá para que os alunos comparem duas situações numa mesma atividade, observando o comportamento dos objetos matemáticos nos dois planos.

A finalidade desta seqüência é que o aluno perceba o comportamento dos objetos quando estão num plano não paralelo ao plano de projeção e quais as propriedades da perspectiva cavaleira nestas condições.

As atividades desta seqüência correspondem às atividades da seqüência experimental II feita em ambiente externo com os objetos matemáticos (segmentos e pontos) em uma face não paralela ao plano de projeção.

3.5.2.1 Atividade A: Ponto médio

Propomos aos alunos que abram o arquivo Plano α e executem a seguinte atividade:

> Considere dois pontos A e B sobre o plano α.
>
> Trace o segmento AB.
>
> Ache o ponto médio M do segmento AB.
>
> Determine o segmento A'B' onde A' e B' no plano β paralelo ao plano de projeção onde A' e B' são as projeções dos pontos A e B.
>
> Determine o ponto médio M'do segmento A'B'.
>
> Salve o trabalho.
>
> 1. Descreva como você determinou as projeções A'B' do segmento AB.
> 2. Como você determinou o ponto M' projeção do ponto M?

Nesta atividade, espera-se que os alunos percebam que o ponto médio é conservado na projeção mesmo que os objetos matemáticos estejam em um plano não paralelo a um plano de projeção. Os alunos devem perceber esta propriedade movimentando a reta x.

Para fixar os pontos, os alunos podem utilizar segmentos concorrentes como já vimos na seqüência III, quando as atividades são executadas no cubo.

Os pontos A e B são obtidos do mesmo modo que o ponto P no plano α

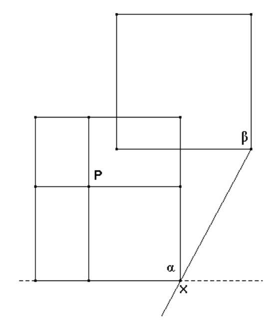


Fig. 62 A

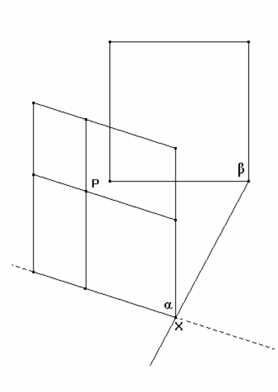


Fig. 62B

E as projeções A', B' e M' podem ser obtidas com o auxílio de fugantes e paralelas como na figura abaixo:

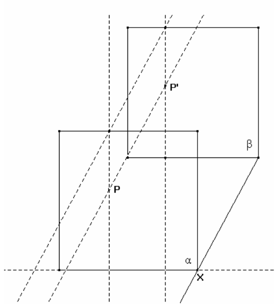


Fig. 63 A

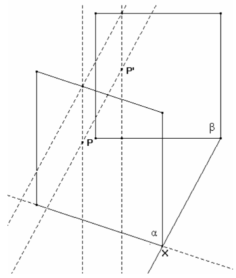


Fig. 63B

Após obter os pontos A', B' e M', os alunos podem justificar que M' é ponto médio de A'B' da seguinte maneira:

Como AA', BB' e MM' estão contido em retas fugantes então são paralelos.

Pelo teorema de Tales temos $\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'}$. Como M é ponto médio de AB então $AM = MB$. Logo $\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'} = 1$. Logo $A'M' = M'B'$. Donde M' é ponto médio de A'B'.

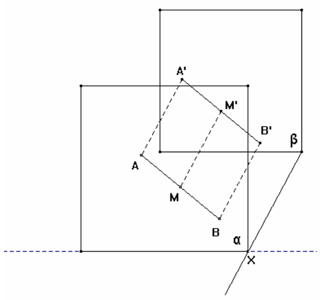


Fig. 64 A

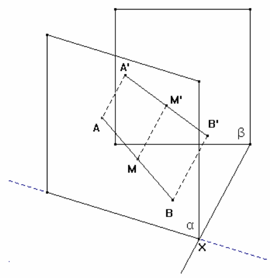


Fig. 64B

Dentre outras formas de resolver esta atividade, os alunos podem fixar os pontos A e B a partir de segmentos no plano α. Podem movimentar a reta x observando o comportamento do segmento AB no plano α em relação à sua projeção no plano β, verificando que M' é ponto médio de A'B' apenas perceptivamente (pólo do visto).

Uma possível dificuldade dos alunos é não conseguir fixar o segmento AB sobre o plano α Podem também fazer uso inadequado das retas paralelas para encontrar as projeções no plano paralelo. As relações que existem entre os segmentos AB e A'B' podem ser obtidas por medição dos segmentos. Neste caso, pediremos para os alunos refazerem a atividade retomando sempre a importância da fixação dos pontos e do uso das fugantes e refletirem sobre as medidas dos segmentos. Pode haver um conflito entre os pólos do visto (construção) e do sabido (enunciado) pelas dificuldades citadas acima. A movimentação do eixo x proporciona ao aluno, a validação de sua construção no ambiente Cabri, que não é possível no ambiente do papel e lápis (Chaachoua, 1998).

3.5.2.2 Atividade B: Conservação da razão entre os segmentos e a não conservação das medidas dos segmentos

Com o arquivo Plano α aberto, enunciamos a atividade A2 da seguinte forma:

> *Mantendo o seu trabalho aberto, apague o ponto M e crie o ponto C no segmento AB e sua projeção C' no segmento A'B'.*
> *Movimente o ponto C sobre o segmento AB.*
> *Observe e compare as diversas posições de C e os segmentos AC e CB e A'C' e C'B' suas respectivas projeções.*
> *Salve o trabalho.*
> *Compare as medidas dos segmentos? O que você conclui?*
> *Quais as razões entre os segmentos AC, CB e A'C' e C'B'.*

A finalidade desta atividade é que os alunos percebam que a razão entre os segmentos AC e CB e entre os segmentos A'C' e C'B' é a mesma, e que o segmento AC e seu correspondente na projeção A'C' não possuem as mesmas medidas, assim como os segmentos CB e C'B' , ou seja, há conservação da razão entre os segmentos, mas não dos comprimentos.

Os alunos podem justificar a atividade da seguinte forma:

Os segmentos AA', BB' e CC' estão contidos nas fugantes. Logo são paralelos entre si. Pelo teorema de Tales temos que $\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$, logo há conservação da razão entre os segmentos.

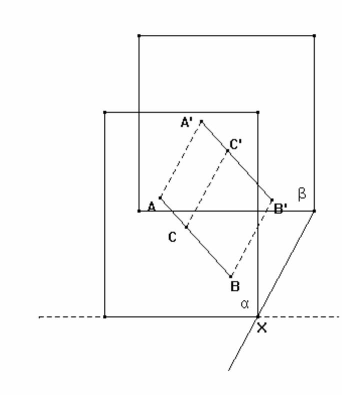


Fig. 65 A

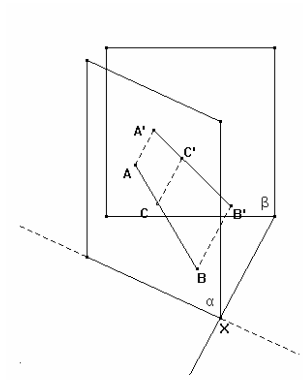


Fig.65B

Os alunos podem verificar suas respostas apenas usando medidas de comprimentos e comparar os segmentos correspondentes à projeção. A movimentação do eixo x possibilita a verificação, por parte dos alunos, da construção do segmento AB e o ponto C, suas projeções e o comportamento dessas projeções quando o plano α não é paralelo ao plano β. Uma construção percebida equivocadamente pode levar a um conflito entre os pólos do visto e do sabido.

É bem provável que os alunos não façam uso do teorema de Tales, e como na atividade anterior, façam uso apenas de medições de segmentos. Neste caso, o professor deverá intervir de forma que os alunos busquem relações entre as medidas dos segmentos e não apenas comparem as dimensões.

3.5.2.3 Atividade C: Conservação do baricentro

Propomos, nesta atividade, que os alunos abram o arquivo Plano α e construam um triângulo ABC no plano α e executem a atividade conforme o enunciado a seguir:

Construa um triângulo ABC no plano α

Determine o triângulo A'B'C' no plano β paralelo ao plano de projeção.

Observe e meça os lados A'B', B'C' e A'C' onde A', B' e são as respectivas projeções de A, B e C.

Encontre o baricentro H do triângulo ABC.

Encontre o baricentro H' da projeção A'B'C'do triângulo ABC no plano β.

Movimente o ponto A observando os triângulos e o baricentro.

Salve o trabalho.

1. *Como você determinou o triângulo A'B'C'? E a projeção H'?*
2. *Que conclusão você tirou em relação a medida dos lados entre os dois triângulos?*
3. *Compare os baricentros. Conseguiram justificar?*
4. *Movimentando o ponto A observando os triângulos e o baricentro, o que conclui?*

A finalidade desta atividade é que os alunos percebam que há conservação do baricentro, mas não das medidas dos lados do triângulo ABC.

Os alunos podem justificar esta atividade da seguinte forma: o triângulo ABC e o seu baricentro H estão no plano α. O correspondente H' do baricentro H estará no plano β.

Como há conservação dos pontos médios, há conservação dos baricentros.

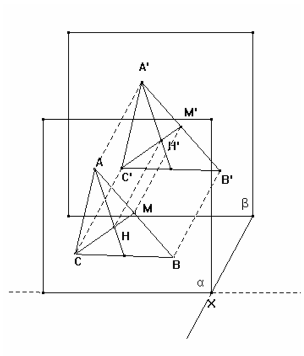


Fig.66A

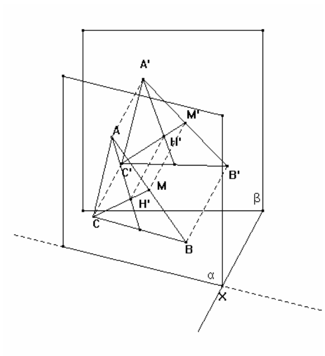


Fig.66B

Os estudantes podem usar as primitivas (retas paralelas, segmentos, pontos, etc.) do Cabri, medir e comparar os comprimentos dos segmentos quando o plano α não é paralelo ao plano de projeção β que só é possível no ambiente Cabri, já que no ambiente do papel e lápis não temos o recurso da geometria dinâmica, quando podemos interagir sobre a figura sem perda de informação.

A dificuldade fica na fixação do triângulo no plano α e sua projeção no plano β. Neste caso, retomamos com os alunos a atividade correspondente no bloco 1 e na seqüência III, refletindo sobre as construções e os resultados obtidos. É pouco provável que os alunos percebam alguma relação entre os planos e os planos implícitos nas figuras construídas, mas esperamos algum indício de conjecturas, através de tentativas para a construção do triângulo e sua projeção usando as regras da perspectiva cavaleira.

3.5.2.4 Atividade D: Paralelismo entre segmentos

Propomos aos alunos que abram o arquivo Plano α e executem a seguinte atividade:

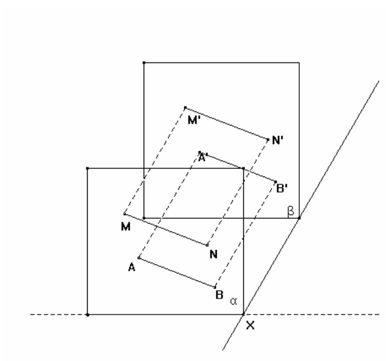
Construa dois segmentos AB e MN paralelos sobre o plano α . Determine os segmentos A'B' e M'N' correspondentes às suas projeções sobre o plano β paralelo ao plano de projeção.

Salve o trabalho.

Como você determinou essas projeções? Mantém o paralelismo? Justifique.

O objetivo desta atividade é que os alunos percebam que o paralelismo entre os segmentos permanece, mas as medidas dos segmentos AB e MN não se conservam na projeção quando os dois planos não são paralelos entre si.

Os alunos podem resolver esta atividade da seguinte forma:



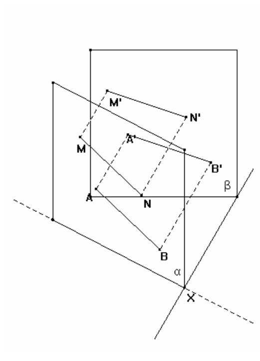


Fig.67 A Fig.67B

Como os segmentos MM', AA', BB'e NN' estão contidos em fugantes, então MM'//NN'//AA'//BB'.

Seja γ o plano que contém as retas paralelas MM' e NN'.

Seja δ o plano que contém as retas paralelas AA' e BB'. γ e δ são paralelos, pois δ contém duas retas concorrentes AB e BB' que são paralelas a duas retas de γ (BB'//NN' e

AB//MN).

Os planos paralelos γ e δ são intersectados pelo plano que contém M’,N’,A’e B’. Logo as intersecções M’N’ e A’B’ são paralelas entre si.

Os estudantes podem fazer uso das primitivas do Cabri, medir e comparar os segmentos AB e MN e suas projeções A’B’ e M’N’ no plano β quando movimentarem a reta x sob o plano α.

A justificativa acima é muito complexa, exigindo um conhecimento mais aprofundado de conceitos da Geometria Espacial exigindo a percepção dos planos γ e δ e suas posições.

É esperado um comportamento mais simples dos alunos, fazendo uso de fugantes, comparação de medidas.

A dificuldade aqui é fixar os dois segmentos e mantê-los paralelos no plano α e em seguida à projeção. Com a movimentação da reta x sobre o plano α os alunos devem perceber que o paralelismo se conserva quando os planos não estão paralelos. Pode haver intervenção do professor caso os segmentos paralelos não forem projetados utilizando fugantes. Procuramos fazer com que os alunos recordem a experiência correspondente no sol para resolver esta atividade.

3.5.2.5 Atividade E: Conservação das medidas dos ângulos

Nesta atividade, propomos aos alunos que abram o arquivo Plano α e executem a atividade E da seguinte forma:

Construa dois segmentos concorrentes entre si AB e RS sobre o plano α.

Construa os segmentos A'B' e R'S' respectivas projeções de AB e RS sobre o plano β paralelo ao plano de projeção.

Salve o trabalho.

1. *Como você determinou as projeções?*
2. *O cruzamento é mantido? Justifique.*
3. *Compare o ângulo formado entre os segmentos AB e RS e A'B' e R'S'. Justifique.*

A finalidade desta atividade é que os alunos percebam que as projeções das retas continuarão secantes, mas os comprimentos das projeções dos segmentos e o ângulo formado entre eles não.

Os alunos podem resolver a atividade da seguinte forma:

AA’, BB’, RR’e SS’ estão contidos em fugantes, então AA’//BB’//RR’//SS’.

Seja γ o plano que contém as retas paralelas AA’ e BB’.

Seja δ o plano que contém as retas paralelas RR’ e SS’.

Os planos γ e δ são secantes, pois, γ contém a reta CC’ que é paralela às retas RR’ e SS’ contidas em δ.

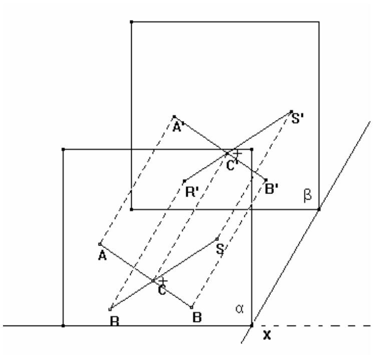


Fig.68 A

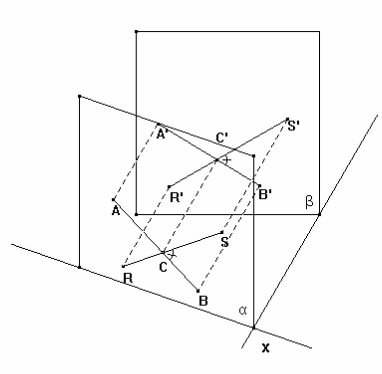


Fig.68B

Os estudantes podem fazer uso das primitivas do Cabri apenas medindo e comparando os segmentos AB e RS no plano α e suas projeções A’B’ e R’S’ no plano β quando movimentam a reta x sob o plano α e comparando as medidas dos ângulos SĈB e S'ĈB'.

Os alunos provavelmente não conseguirão perceber os planos γ e δ, mas esperamos que consigam utilizar alguma das propriedades da perspectiva cavaleira na construção da projeção. Neste caso, procuramos fazer com que eles refaçam a atividade sempre retomando o bloco 1 e a seqüência III.

Resumindo, esperamos nas atividades do bloco 2, que os alunos consigam refletir sobre os resultados obtidos no bloco 1, onde os objetos matemáticos foram materializados através de palitos e massinha de modelar, que correspondem à geometria concreta (G0) e que isso favoreça na resolução das atividades deste bloco, onde os objetos matemáticos são representados na tela do computador, que correspondem à geometria espaço-gráfica (G1). Além dessa inter-relação entre as duas geometrias, espera-se que o ambiente informático, Cabri, torne possível a aprendizagem das regras da perspectiva cavaleira e da Geometria Espacial.

3.6 CONCEPÇÃO DO BLOCO 3 – com o Cabri-Géomètre

Para verificar como as propriedades da perspectiva cavaleira são usadas, concebemos um bloco de atividades no ambiente Cabri. Esse bloco é formado por 5 atividades de construção e 2 problemas. As atividades de construção são relacionadas aos sólidos geométricos utilizados pelos professores do Ensino Médio nas aulas de geometria espacial. São representações de algumas figuras planas tais como retângulo e losango e de alguns sólidos, tais como prismas e pirâmides. As construções necessitam do uso de algumas propriedades da perspectiva cavaleira obtidas nos blocos 1 e 2 como, por exemplo, a invariância do ponto médio, a invariância do baricentro e alguns conceitos básicos tais como retas fugantes, coeficiente de redução e ângulo de fuga. Os problemas são mais complexos e fazem uso de elementos teóricos da Geometria. O primeiro pede para traçar uma reta perpendicular a um segmento por um ponto fora da reta. A dificuldade está que o plano onde se encontram o segmento e o ponto não é paralelo ao plano de projeção. O aluno não poderá traçar a perpendicular de imediato. Deverá transportar a situação num plano paralelo ao plano de projeção. Embora tenhamos fornecido aos alunos a técnica do rebatimento de um ponto, queremos observar como os alunos abordarão o problema. No segundo problema, parte-se de um cubo em perspectiva cavaleira e pede-se para analisar posições relativas de retas no espaço. É um conteúdo do Ensino Médio. O uso de postulados e do conhecimento das posições relativas de retas no espaço deverá ser mobilizado pelos alunos. Esperamos observar um salto entre validações perceptivas (bloco 1 e 2) e validações dedutivas (bloco 3).

3.7 ALGUNS ASPECTOS DE UMA ANÁLISE A PRIORI DAS ATIVIDADES DO BLOCO 3

O bloco 3 é concebido para investigar quais as regras da perspectiva cavaleira estabelecidas na interação entre os blocos 1 e 2 são utilizadas na resolução de problemas de geometria espacial.

Todas as atividades são desenvolvidas no Cabri e são sugestões de construção podendo haver outras.

3.7.1 Construção de um losango em perspectiva cavaleira a partir de um retângulo

Nesta atividade, pedimos aos alunos para construir um losango em perspectiva cavaleira a partir de um retângulo. O losango deve estar num plano perpendicular ao plano de projeção e paralelo ao plano horizontal. A atividade é enunciada da seguinte forma:

Considerando as atividades anteriores à estratégia esperada que pode ser colocada em funcionamento é:

> *Construa um retângulo ABCD perpendicular ao plano de projeção (parede ou chão) e sendo o lado AB paralelo ao plano de projeção.*
>
> *Construa sua projeção no plano paralelo usando um coeficiente de redução 0,5.*
>
> *Construa um losango MNOP a partir dos pontos médios do retângulo e a seguir a sua projeção M'N'O'P' sobre a projeção A'B'C'D' do retângulo.*
>
> *Explique e justifique a sua construção*

A finalidade desta atividade é que os alunos utilizem a definição e as propriedades da perspectiva cavaleira, tanto para construir o retângulo como o losango. É uma atividade direcionada para que os alunos mobilizem os conceitos de coeficiente de redução, de retas fugantes, de paralelismo e de pontos médios.

Começar com a construção de um retângulo ABCD com o lado AB paralelo ao plano de projeção e ao plano horizontal. *A perspectiva cavaleira é o paralelogramo A'B'C'D'.*

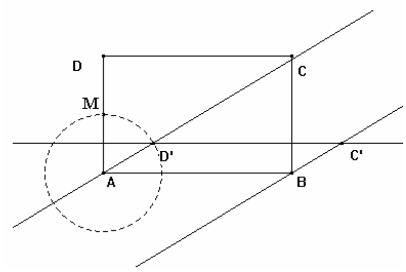


Fig. 69

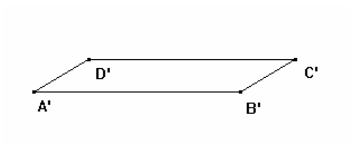
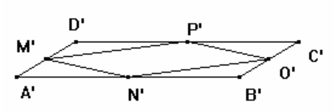


Fig.70

Sendo M, N, O e P os pontos médios dos lados do retângulo, os pontos médios se conservam em perspectiva cavaleira.

Logo, construindo estes pontos médios em cada um dos lados deste retângulo, obtém-se o losango M'N'O'P'.

Fig.71



Os alunos podem ter dificuldade quanto ao coeficiente de redução, como usá-lo na construção do retângulo em perspectiva cavaleira. Espera-se que a manipulação de objetos em G0 – geometria concreta e na sua representação em G1 – geometria espaço-gráfica, possibilite a mobilização das propriedades da perspectiva cavaleira para a construção do losango M'N'O'P'.

3.7.2 Construção de uma pirâmide reta cuja base é um triângulo equilátero

Nesta atividade, propomos aos alunos construir uma pirâmide reta cuja base é um triângulo equilátero em perspectiva cavaleira. A base da pirâmide deverá ser perpendicular ao plano de projeção e paralela ao plano horizontal. Além disso, um lado do triângulo deverá ser paralelo ao plano de projeção:

> *Construa um triângulo equilátero ABC perpendicular ao plano de projeção (parede ou chão) e sendo o lado AB paralelo ao plano de projeção.*
>
> *Construa sua projeção no plano paralelo usando um coeficiente de redução 0,5.*
>
> *Construa o baricentro do triângulo A'B'C' projeção de ABC.*
>
> *A seguir construa uma pirâmide regular tendo como base esse triângulo.*

A finalidade desta atividade é verificar se os alunos usam as propriedades levantadas nas seqüências anteriores: paralelismo, conservação do baricentro, conservação dos pontos médios e os elementos para a construção desta pirâmide em perspectiva cavaleira: coeficiente de redução, o uso de uma perpendicular e fugantes.

Uma possível estratégia dos alunos é de criar um triângulo equilátero usando a ferramenta polígono regular no Cabri, ou usar circunferências e um segmento para a construção do mesmo.

Construímos a altura, que é um segmento perpendicular ao lado AB, traçamos uma perpendicular ao lado AB perpendicular ao plano de projeção, usamos um coeficiente de redução 0,5, marcamos o ponto médio P do segmento MC. (fig. 72A, 72B).

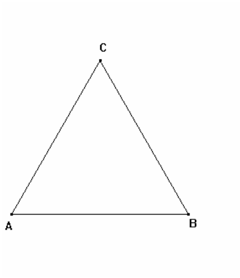


Fig.72 A

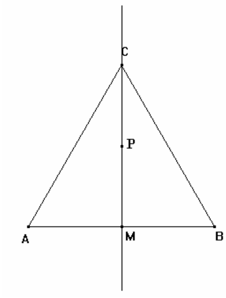


Fig.72B

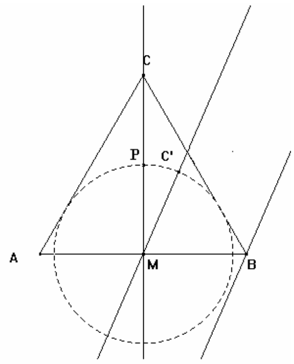


Fig. 73

Traçamos duas fugantes passando pelo ponto M e pelo ponto B e desenhamos uma circunferência com centro em M e raio MC'. O ponto de intersecção entre a fugante em M e a circunferência chamamos de C' (fig.73).

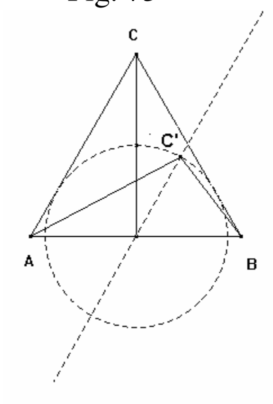


Fig.74

Traçamos segmentos unindo os pontos A e C' e B com C'. Escondemos o triângulo equilátero inicial e teremos o *triângulo equilátero ABC' em perspectiva cavaleira* (fig.74).

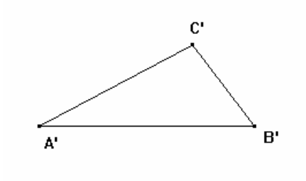


Fig.75

Renomeamos os vértices por A', B' e C' (fig.75).

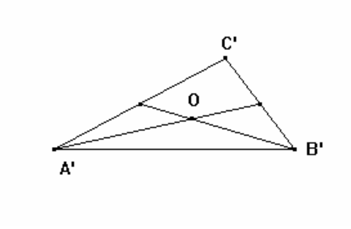


Fig.76

Marcamos os pontos médios dos lados A’C’ e B’C’ e traçamos as medianas. Marcamos o baricentro **O** intersecção destas medianas (fig. 76).

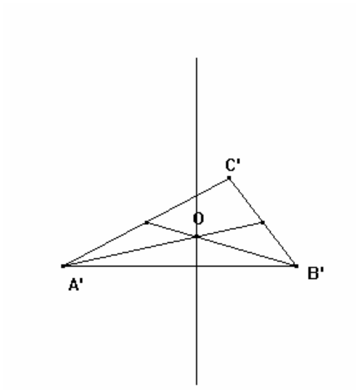


Fig.77

Traçamos a reta perpendicular ao lado A’B’ passando pelo baricentro **O** (fig.77).

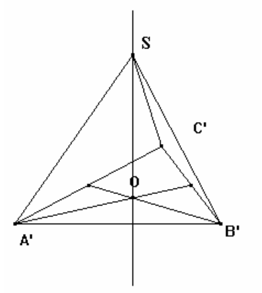


Fig.78

Marcamos um ponto S qualquer sobre a perpendicular e ligamos S aos pontos A’, B’ e C’(fig. 78).

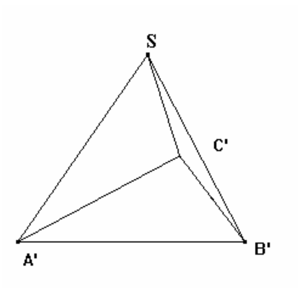


Fig.79

Escondemos a perpendicular. A pirâmide A’B’C’S é *a perspectiva cavaleira da pirâmide reta cuja base é um triângulo equilátero* (fig.79).

Uma dificuldade que os alunos podem ter é na construção do triângulo equilátero. É bem provável que não visualizem que a altura do triângulo equilátero perpendicular ao lado AB é fundamental para a construção do triângulo em perspectiva cavaleira. Neste caso, é necessária uma intervenção propondo ao aluno construir um triângulo usando a ferramenta polígono regular do Cabri e perceber a necessidade de construir a altura pelo baricentro comparando com o sólido à vista. Espera-se que os alunos retornem ao G0 (geometria concreta) no bloco 1 e ao G1 (geometria espaço-gráfica) no bloco 2 para construir a pirâmide.

3.7.3 Construção de uma pirâmide reta de base quadrada

Propomos aos alunos esta atividade de acordo com o enunciado abaixo:

Construa uma pirâmide de base quadrada usando propriedades da perspectiva cavaleira. A base da pirâmide está contida num plano perpendicular ao plano de projeção e é paralela ao plano horizontal.

Esperamos que os alunos utilizem as propriedades da perspectiva cavaleira que foram levantadas nas seqüências anteriores.

Um dos procedimentos possíveis para a construção da pirâmide é o seguinte:

Construímos um quadrado ABCD, sendo o lado AB paralelo ao plano horizontal, construímos o quadrado A'B'C'D' em perspectiva cavaleira usando um coeficiente de redução 0,5.

Escondemos o quadrado original ABCD e o quadrado ABC'D' em perspectiva se apresenta como um paralelogramo (fig. 80 e 81):

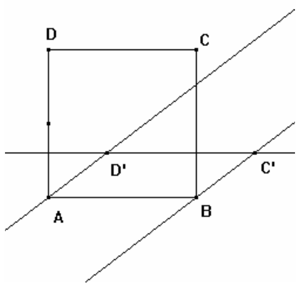


Fig.80

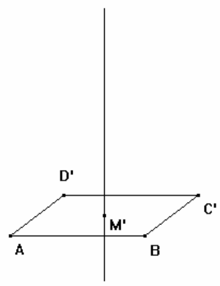


Fig.81

Como a pirâmide é reta, a projeção do vértice coincide com o centro da base. O centro do quadrado é o ponto médio da diagonal que se conserva em perspectiva cavaleira. Logo, marcamos o ponto médio M’ do segmento BD’ e traçamos uma perpendicular em relação ao segmento AB passando por esse ponto médio.

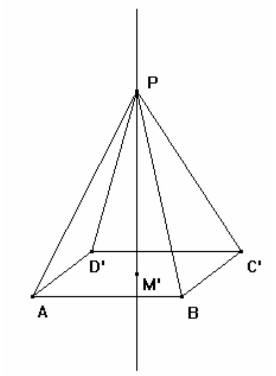


Fig.82

Marcamos um ponto P sobre esta perpendicular.

Traçamos segmentos unindo este ponto a cada um dos vértices do quadrado em perspectiva cavaleira. A pirâmide ABC’D’P está construída (fig.82).

A maior dificuldade que os alunos podem ter é em perceber que a altura da pirâmide é dada pela perpendicular a $\overline{AB}$ que passa pelo ponto médio M’. Os alunos podem traçar uma reta qualquer e não uma perpendicular. Podem fazer uso das propriedades da perspectiva cavaleira para a construção do quadrado, mas talvez tenham dificuldade em construir o ponto P. Neste caso, pediremos a eles que comparem o sólido à vista e percebam a altura existente (G0 – geometria concreta) e relacionem com a figura construída no Cabri (G1-geometria espaço-gráfica).

3.7.4 Construção de um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero

Nesta atividade, pedimos aos alunos para construir um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero em perspectiva cavaleira. Eis o enunciado:

> *Construa um prisma de base triangular usando propriedades da perspectiva cavaleira. A base do prisma deverá ser perpendicular ao plano de projeção e paralela ao plano horizontal.*

Esperamos que os alunos consigam fazer esta construção usando propriedades da perspectiva cavaleira, principalmente o paralelismo entre as retas.

Os alunos podem iniciar a construção do mesmo modo que fizemos na construção da pirâmide, tendo por base um triângulo equilátero. Neste caso, podem usar o triângulo equilátero com coeficiente de redução 0,5 já utilizado anteriormente.

Pelo triângulo A’B’C’ em perspectiva cavaleira traçamos uma perpendicular em relação ao lado A’C’ paralelo ao plano de projeção. Traçamos paralelas a esta perpendicular passando pelos outros vértices. Marcamos um ponto qualquer sobre a perpendicular que passa pelo ponto A e traçamos paralelas aos lados do triângulo A’B’C’ (fig.83, 84).

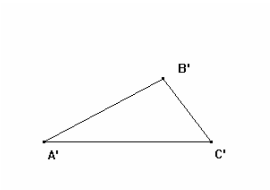


Fig.83

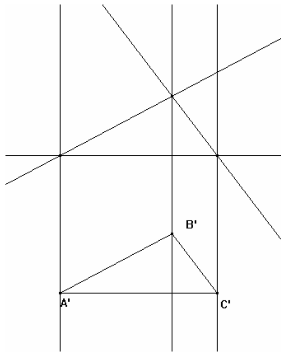
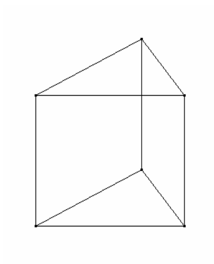


Fig.84

Escondendo as retas que não fazem parte do prisma temos então a figura abaixo (fig.85).

Fig.85



A dificuldade aqui é em perceber que é necessário uma reta perpendicular ao lado A’B’ do triângulo A’B’C’ para construir o prisma. Neste caso, pediremos para que observem o sólido (G0 – geometria concreta) e comparem com sua construção percebendo as faces verticais na tela do computador (G1 – geometria espaço-gráfica).

3.7.5 Construção de um prisma reto de base quadrada

Nesta atividade, pedimos aos alunos para construir um prisma reto de base quadrada em perspectiva cavaleira.

Construa um prisma de base quadrada usando propriedades da perspectiva cavaleira. A base do prisma deverá estar contida num plano perpendicular ao plano de projeção e paralela ao plano horizontal.

Nesta atividade esperamos que os alunos consigam construir esta figura que é muito utilizada na seqüência I e II do bloco 1.

A partir da construção do quadrado A’B’C’D’ em perspectiva cavaleira já realizado na atividade B, traçar uma perpendicular ao lado A’B’ passando pelo ponto A’. Traçamos paralelas a esta perpendicular passando pelos vértices do quadrado.

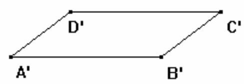
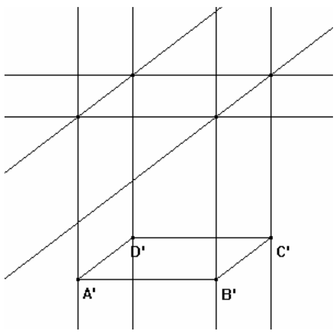
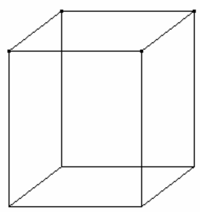


Fig.86



Marcamos um ponto sobre a perpendicular que passa pelo ponto A e traçamos paralelas aos lados A’B’, B’C’, C’D’ e D’A’ do quadrado A’B’C’D’ (fig.87).

Fig. 87



Escondemos as retas que não fazem parte da figura (fig.88).

Fig.88

A construção é simples. A dificuldade nesta construção é perceber que é necessário usar uma perpendicular ao lado A’B’ do quadrado em perspectiva cavaleira e não uma reta qualquer. Neste caso, não haverá intervenção, pois esperamos que os alunos percebam a altura do prisma do mesmo modo que nas atividades anteriores.

3.7.6 Rebatimento de um ponto

Propomos a seguinte atividade explicando inicialmente na folha de atividades o que é um rebatimento.

3.7.7 Problema 1

O rebatimento é uma técnica muito usada para transportar um ponto que está numa face frontal paralela ao plano de projeção (face em verdadeira grandeza) para uma face qualquer do cubo ou vice-versa (fig. 89 A, B, C).

Na figura abaixo, a face frontal ABCD é rebatida sobre a face ABGH. Sendo o ponto P pertencente à face ABCD, o ponto P' rebatido deve estar na mesma posição na face ABGH em perspectiva cavaleira. Após o rebatimento da face ABCD, o ponto D irá coincidir com o ponto H e o ponto C irá coincidir com o ponto G.

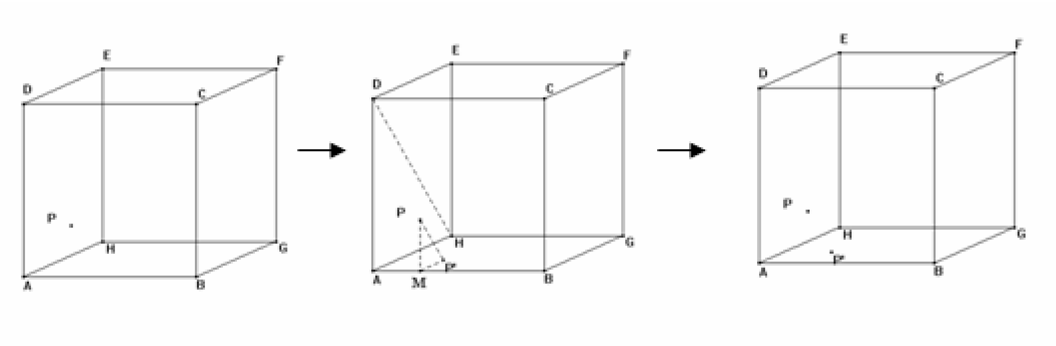


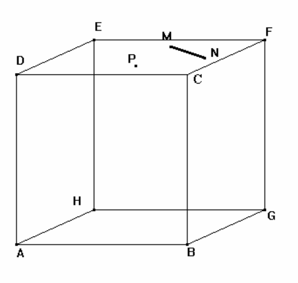
Fig.89 A Fig.89B Fig.89C

Com base no texto anterior, resolva o seguinte problema:

É dado o cubo em perspectiva cavaleira.

Na face superior do cubo ABCDEFGH está o segmento MN e o ponto P.

Construa a reta perpendicular ao segmento MN, passando pelo ponto P.



O objetivo desta atividade é observar como os alunos resolvem o problema. Esperamos que algumas das propriedades da perspectiva cavaleira como o uso das fugantes, a não conservação do perpendicularismo num plano não paralelo ao plano de projeção, os objetos contidos na face paralela ao plano de projeção estão em verdadeira grandeza, sejam colocadas em jogo durante a execução da atividade.

Obtenção do rebatimento

Para obter o rebatimento do ponto P devemos traçar uma perpendicular à aresta AB pelo ponto P. Seja M a intersecção desse ponto com a aresta AB (fig. 90).

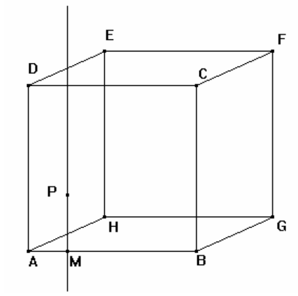


Fig. 90

Pelo Ponto M traçamos uma paralela a aresta AH (fig. 91).

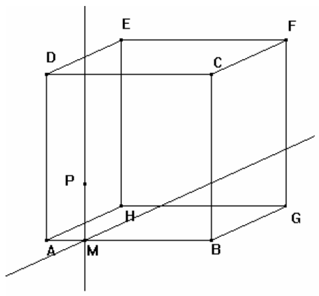


Fig. 91

Traçamos o segmento DH na face ADEH do cubo (fig. 92)

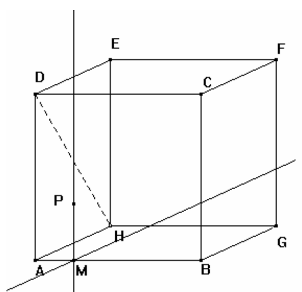
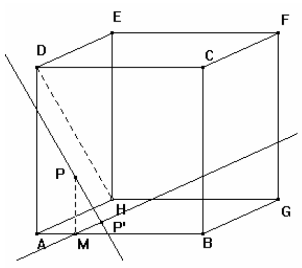


Fig. 92

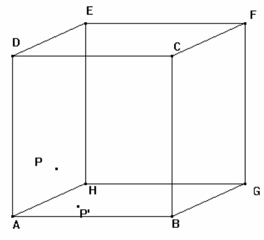
Traçamos uma paralela ao segmento DH pelo ponto P (fig.93).

Fig. 93



O ponto P' é a intersecção entre essa paralela e a reta MH. P' é o ponto P rebatido sobre a face ABFH (fig. 94).

Fig. 94



Uma possível estratégia utilizada pelo aluno poderá ser: rebater a face CFED sobre a face ABCD, resolver o problema e voltar à situação inicial com um rebatimento.

Os alunos podem resolver o problema da seguinte forma:

Com base nas informações do texto acima, podem traçar pelo ponto P duas paralelas:

Ao rebater a face CFED em torno da reta DC o ponto E irá coincidir com o ponto A e o ponto F irá coincidir com o ponto B.

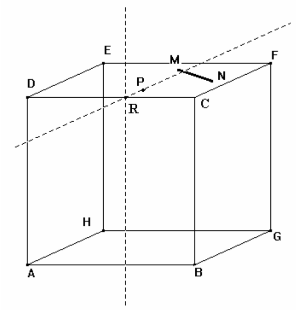
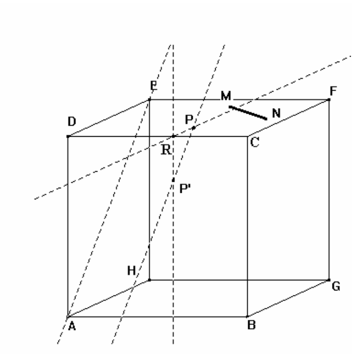


Fig. 95

Para rebater os pontos P, M e N uma possível estratégia é traçar pelo ponto P uma paralela à aresta DE. Nomear R a intersecção dessa reta com a aresta CD. Em seguida, pelo ponto R, traçar uma paralela a AD. (fig.95)

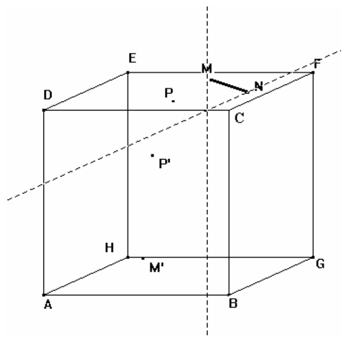


Depois, traçar a reta AE e uma paralela a esta reta passando pelo ponto P.

A intersecção da reta passando por R que está na face ABCD e esta reta é o ponto P' em verdadeira grandeza. (fig.96).

Fig. 96

Os alunos deverão repetir o mesmo procedimento feito para o ponto P aos pontos M e N(ver fig. 97 e 98).



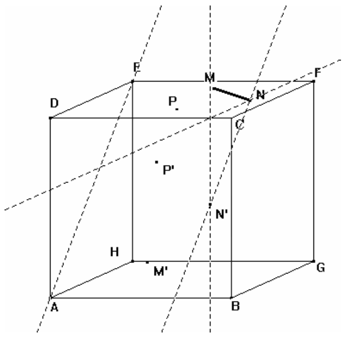


Fig. 97

Fig.98

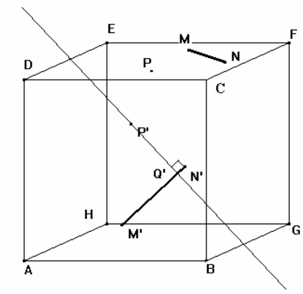


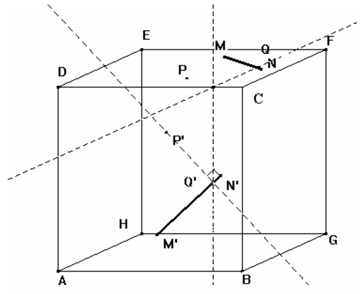
Fig. 99

Agora o ponto P e o segmento MN estão n1 face frontal ABCD paralela ao plano de projeção.

No enunciado, pedimos que seja traçado uma perpendicular em relação ao segmento MN passando pelo ponto P.

Os alunos devem traçar uma perpendicular ao segmento M'N' passando pelo ponto P' (fig.100). Marcar a intersecção desta perpendicular com o segmento M'N' chamando de Q'. Finalmente rebater o ponto Q' em torno de DC para obter o ponto Q que é a intersecção da reta perpendicular a MN pelo ponto P. Traçar uma paralela à aresta AD passando pelo ponto Q. Esta paralela define um ponto sobre a aresta CD. Sobre este ponto traçar uma paralela à aresta CF.

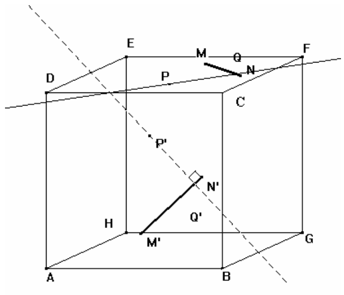
Fig. 100



A intersecção desta última paralela ao segmento MN determina o ponto Q em perspectiva cavaleira.

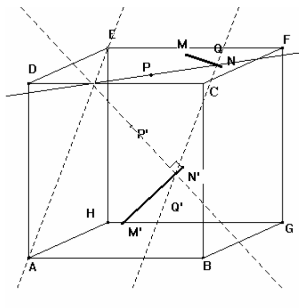
Por fim, terminando por traçar uma reta passando pelo ponto P e Q. Esta é a reta perpendicular ao segmento MN em perspectiva cavaleira (fig.101).

Fig. 101



Só para confirmar, se traçarmos uma paralela passando pelo ponto Q' e a reta que passa pelos pontos A e E, o ponto Q é confirmado sobre o segmento MN (fig.102).

Fig.102



Esta é uma questão difícil para alunos do Ensino Médio. Queremos observar se a perpendicular é traçada imediatamente no plano DCFE, ou se os alunos, com a informação dada no item 3.7.7 irão usar o rebatimento para traçá-la no plano paralelo ao plano de projeção. É a primeira vez na seqüência que uma propriedade não válida num plano não paralelo ao plano de projeção (a não conservação do perpendicularismo) é colocada em funcionamento nesta seqüência.

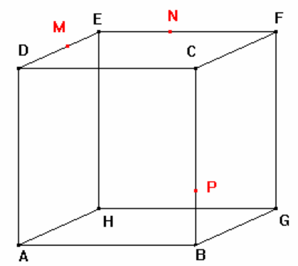
Uma dificuldade que os alunos podem ter está em relação ao rebatimento do ponto P e do segmento MN na face ABCD. Neste caso, apresentamos uma caixa em forma de cubo e em uma das faces está um pequeno orifício, representando o ponto P e uma abertura representando o segmento MN. Esta face é dobrada para dentro ou para fora da caixa de tal maneira que os alunos percebam onde ficarão o ponto P' e o segmento M'N' quando rebatido. Neste momento, estamos lidando com a geometria concreta (G0) para que os alunos consigam resolver este problema no ambiente Cabri, na geometria espaço-gráfica (G1).

3.7.8 Problema 2

O objetivo deste problema é verificar se a interação das atividades executadas nos blocos 1 e 2 levem os alunos a perceber melhor o espaço, isto é, se G0 – geometria concreta e G1 – geometria espaço-gráfica favorecem idas até G2 – geometria proto-axiomática. Esperamos que os alunos identifiquem as posições das retas que estão contidas nas faces do cubo.

Pedimos aos alunos para criar um cubo ABCDEFGH em perspectiva cavaleira e considerar um ponto M pertencente à aresta DE, um ponto N pertencente à aresta EF e um ponto P pertencente à aresta BC (fig. 103)

Fig.103



A seguir, 7 questões são propostas:

1) Traçar as retas MN e DC.

2) Visualmente, as retas que estão no espaço MN e DC se intersectam num ponto que denominaremos de X. Mas nós sabemos que duas retas no espaço podem ser paralelas, concorrentes ou reversas. Qual a posição relativa dessas duas retas? Justifique a sua resposta.

3) Visualmente, as retas que estão no espaço XP e AD se intersectam num ponto que denominaremos de ponto Q. Qual a posição relativa dessas duas retas? Justifique a sua resposta.

4) Considere um plano α que passa pelos pontos M, N e P.

5) O ponto X pertence a esse plano? Justifique a sua resposta. E o ponto Q pertence a esse plano? Justifique sua resposta.

6) Repetir o mesmo raciocínio para as retas MN e CF e encontre cinco pontos pertencentes ao plano α.

7) Você acabou de achar a intersecção de um cubo por um plano que passa pelos pontos M, N e P. Construir esse polígono.

Esta atividade tem por finalidade mostrar o potencial da perspectiva cavaleira na resolução dos problemas em geometria espacial.

Os itens 1,2 e 3 procuram colocar o aluno diante da problemática de reconhecer a posição relativa de duas retas no espaço. Uma justificativa é pedida para provocar o salto de validações perceptivas para validações dedutivas.

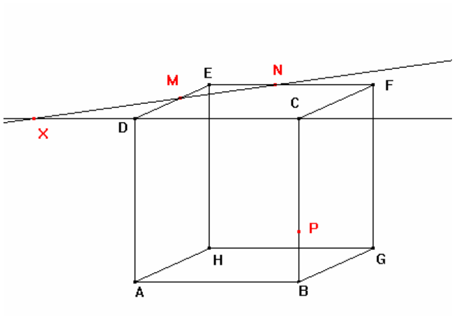


Fig.104

Sendo a reta MN pertencente ao plano CDEF e a reta DC também pertencente ao plano CDEF, as retas MN e DC são concorrentes por pertencerem ao mesmo plano (fig.104).

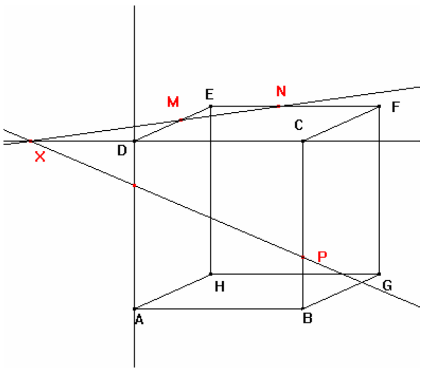


Fig.105

As retas XP e AD estão contidas no mesmo plano ABCD, logo são concorrentes (fig.105).

O item 5 coloca o aluno diante de um postulado da geometria espacial que diz: Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então, a reta está contida no plano. Uma construção com a perspectiva cavaleira mostra a necessidade do uso de postulados e, portanto, valoriza os aspectos teóricos da Geometria.

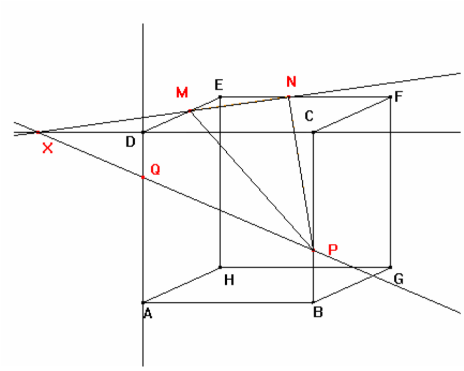


Fig.106

O plano α que passa pelos pontos M,N e P passará pelos pontos X e P. Logo, a reta XP está contida em α (fig.106).Resulta que o ponto Q também pertencerá ao plano α.

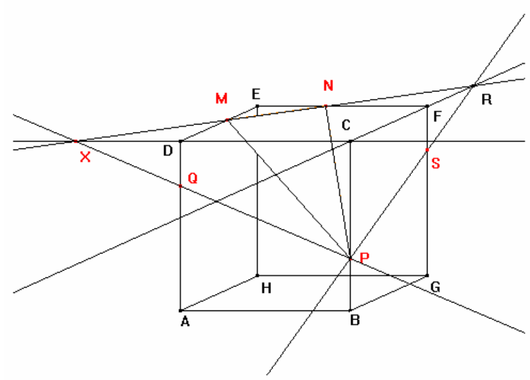


Fig.107

No item 6, traçamos a reta CF. As retas CF e MN pertencem ao mesmo plano CDEF e se intersectam no ponto R. (fig.107). O ponto R pertence ao plano α.

Traçamos então uma reta passando pelo ponto R e pelo ponto P. A intersecção com a aresta GF chamamos de ponto S. A reta RP está contida em α . Logo, o ponto S pertence também ao plano α Resulta que os pontos M, N, P, Q e S pertencem a α.

Unindo os pontos M, N, P, Q e S obtêm-se um pentágono como secção do plano α e do cubo (fig.108).

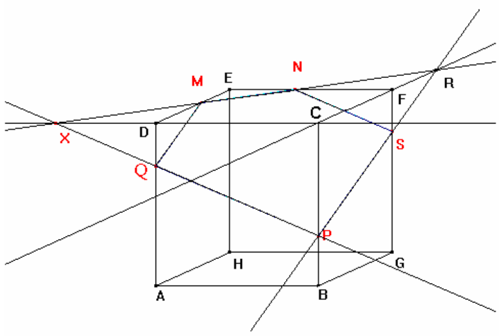


Fig.108

A dificuldade do problema nos leva a propor uma atividade passo a passo. Perde-se a visão global da situação, mas se ganha na organização de algumas idéias básicas da Geometria Espacial. Procuramos verificar nas soluções apresentadas pelos alunos (pólo do sabido) o quanto esta atividade remete a aspectos teóricos da geometria.

Capítulo IV
- EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE A POSTERIORI -

4.1 INTRODUÇÃO

A pesquisa investiga o uso da perspectiva cavaleira no Ensino Médio, com a utilização do software Cabri-Géomètre, visando responder à seguinte questão:

Em que medida o estabelecimento de um jogo dialético entre a Geometria concreta e a Geometria espaço-gráfica contribui para a apropriação das regras da perspectiva cavaleira? E em que medida essa apropriação favorece a resolução de problemas da Geometria espacial?

A metodologia da pesquisa caracteriza os meios que devem ser colocados em uso para responder à questão de pesquisa. Utilizamos, neste trabalho, alguns elementos da Engenharia Didática conforme Artigue (1988). Após destacar alguns aspectos da análise a priori das atividades concebidas (Capítulo III), descrevemos, neste capítulo, a experimentação e, em seguida, faremos a análise a posteriori das atividades. Essa análise procura ligar os fatos observados aos objetivos definidos a priori, fornecendo elementos para responder ao nosso questionamento.

A experimentação consiste na aplicação e observação da seqüência didática visando coletar dados para interpretar certos fenômenos didáticos.

A aplicação da seqüência durou 10 semanas, com duas sessões semanais totalizando 40h de atividade distribuídas da seguinte forma:

Bloco 1: Atividades com material concreto - 16h

Bloco 2: Atividades no ambiente Cabri - 16h

Bloco 3: Atividades de resolução de problemas - 8h

4.2 A organização da experimentação

A seqüência experimental foi colocada em funcionamento em três etapas:

Etapa 1 – Familiarização do aluno com o software Cabri-géomètre II

Antes de iniciar a pesquisa, propusemos aos alunos alguns encontros para se familiarizarem com o software Cabri-Géomètre II.

Os alunos não conheciam o software e era importante para a etapa 3 que eles soubessem manusear seus comandos.

As aulas foram divididas em dois encontros semanais: às quartas-feiras com duração de 2h30' e às sextas-feiras com duração de 3h. Esta etapa durou duas semanas, totalizando 11h de exploração inicial do software Cabri-Géomètre. Criamos algumas atividades de forma que os alunos pudessem rever algumas propriedades da Geometria Plana tais como ponto médio, construção de polígonos, bissetriz, mediana, baricentro, circunferência, posição entre retas. Este bloco foi propositadamente mais extenso que o previsto, pois os dias ensolarados que estávamos esperando para aplicar a seqüência demoraram a chegar. Vale lembrar que o bloco 1 dependia da luz solar.

Contamos com a presença de duas observadoras durante esta primeira etapa. Uma delas, professora de Matemática do Ensino Fundamental e Médio e a outra formada em Ciências da Computação. Esta última se ofereceu para observar as atividades, pois estava implantando um projeto de informática para os professores da escola em que foi feita a pesquisa e tinha interesse em conhecer o trabalho a ser desenvolvido com alunos.

Etapa 2: Experimentação das atividades à luz do sol

Terminada a familiarização com o software Cabri, iniciamos as atividades do bloco 1. Os objetos foram materializados e as validações se apoiaram essencialmente sobre critérios perceptivos como, por exemplo, o uso ou não de instrumentos de medição como régua, transferidor, compasso. Este bloco apoiou-se nas pesquisas de Boero (1996) que sugere um ensino experimental onde os alunos possam ser capazes de, construtivamente, produzir uma Geometria Racional. Isto significa, produzir uma organização teórica do conhecimento geométrico onde e *a experiência das sombras solares possa oferecer possibilidades de produção de conjecturas significativas de um ponto de vista da Geometria do espaço.* Esperamos que o ambiente criado nesta pesquisa favoreça a construção de conjecturas e provas pelos alunos que participaram dessa pesquisa.

Durante o estágio de produção das conjecturas, os alunos podem argumentar, levantar questões, alternativas e incertezas, através de gestos com as mãos, podem mover os objetos, movimentar-se ao redor destes objetos, etc..

Esta exploração dinâmica em uma situação problema pode ajudar a desenvolver os processos de conjecturas em ambientes de aprendizagem. Neta pesquisa, usamos o ambiente externo com a presença da luz solar.

Os alunos estudaram de modo empírico as propriedades da perspectiva cavaleira a partir de objetos colocados numa face paralela ao plano de projeção (chão) e num plano não paralelo. Foram utilizados cubos, prismas quadrangulares, hexagonais e triangulares.

Uma dificuldade encontrada no início da aplicação foi o local para realizar o experimento. As opções eram as quadras de esportes, corredores abertos, estacionamento e a laje de um corredor fechado. Destas opções, ficamos com a laje, pois os outros ambientes tinham deformações no chão e as quadras estavam ocupadas.

Antes da experimentação, os alunos foram divididos em duas duplas e um trio. Escolheram um sólido e montaram suas mesas. Distribuímos massas de modelar coloridas, réguas, transferidores, duas varetas de madeira, canetões, uma folha de fundo branco de (1 X 0,72m), pedras para fixar a folha no chão onde as sombras seriam projetadas. Com algumas experiências, percebemos que o chão de cimento não apresentava boa visibilidade da sombra por isso optou-se para recobri-lo com papel. Foram distribuídos textos para cada tipo de sólido contendo a seqüência de atividades que os alunos deveriam executar e questões sobre cada atividade. Tivemos, inicialmente, a colaboração de dois observadores durante a etapa 2 da experimentação, que ajudaram a gravar as conversas e a explicação dos alunos de como executaram as atividades. Foi recolhido um questionário respondido pelos observadores sobre as ações dos alunos durante as atividades. Minha atuação foi como pesquisadora, observadora e professora dos alunos durante a experimentação. Este bloco durou 16 horas.

As atividades do bloco 1 foram executadas na laje de um corredor da escola (fig. 109).

Fig. 109

No bloco 1, contávamos inicialmente com 11 alunos. No final da experimentação somente 7 alunos participaram da pesquisa com regularidade. As nossas análises não levaram em consideração a participação dos demais.

Os alunos foram divididos desta forma:

	Grupo 1 G1	Grupo 2 G2	Grupo 3 G3
1	Cubo	Prisma quadrangular	Prisma hexagonal
2	Prisma quadrangular	Prisma hexagonal	Prisma triangular
3	Prisma hexagonal	Prisma triangular	Cubo
4	Prisma triangular	Cubo	Prisma quadrangular

Tab. 1

O grupo 1 ou G1 foi formado pelos alunos C, J e T. O grupo 2 ou G2 foi formado pelos alunos K e N e o grupo 3 ou G3 foi formado pelos alunos Ca e G.

A distribuição dos sólidos para os grupos poderá ajudar na organização das atividades durante a experimentação.

O cubo e o prisma quadrangular apresentam faces paralelas e perpendiculares ao plano de projeção, enquanto que o prisma hexagonal e o triangular apresentam planos paralelos e oblíquos ao plano de projeção. Os dois últimos sendo mais apropriados para o estudo das propriedades dos objetos colocados em planos não paralelos ao plano de projeção.

No bloco 1, usamos sólidos de acrílico com dimensões que permitiram uma maior visibilidade da sombra. As dimensões dos sólidos utilizados foram:

Cubo: 20x20x20cm

Prisma quadrangular (de base quadrada): 20x15x15cm

Prisma triangular (de base triangular): 20x15x15cm

Prisma hexagonal (de base hexagonal): 5x10x10cm

Etapa 3: Experimentação das atividades no ambiente Cabri-Géomètre

Como descrevemos anteriormente esta etapa corresponde aos blocos 2 e 3.

No bloco 2, as regras da perspectiva cavaleira estudadas no bloco 1 deveriam ser confirmadas ou refutadas no ambiente informático com o uso do software Cabri-Géomètre. No bloco 3, os alunos deveriam resolver atividades que utilizassem as propriedades da perspectiva cavaleira.

No início do bloco 3, um dos observadores, por problemas particulares, não pôde mais acompanhar a seqüência de atividades. O outro observador colaborou parcialmente nesse bloco.

Os blocos 2 e 3 contaram com o CabriSyncro. Trata-se do software Cabri com a inserção de um gravador que pode ser cronometrado de acordo com o interesse do pesquisador. No nosso caso, cronometramos a gravação a cada 2 minutos. Este programa contribuiu para mostrar os procedimentos utilizados pelos alunos na resolução dos problemas.

Durante a experimentação, tivemos alguns problemas com dois microcomputadores acarretando a perda de alguns arquivos e, em algumas sessões, o CabriSyncro rodou com dificuldade nos computadores, devendo o programa Windows ser reiniciado.

Os alunos receberam questionários com perguntas sobre as atividades que foram respondidas no próprio Cabri.

Foram gastas dezesseis horas para executar as atividades dos blocos 1 e 2 e oito horas para o bloco 3, bem além do previsto que eram de 5h30' para cada bloco.

4.2.1 A coleta de dados

As análises que serão feitas a seguir se apoiarão nos seguintes dados coletados:

1) Questionário respondido pelos 7 alunos após cada atividade realizada nas etapas 2 e 3.
2) Questionário respondido pelos observadores após cada atividade realizada nas etapas 2 e 3.
3) As telas gravadas pelo CabriSyncro nas etapas 2 e 3.
4) A gravação de 2 grupos durante as etapas 2 e 3.
5) Entrevistas com os alunos pelos observadores e a pesquisadora após a realização de cada atividade.

Durante a experimentação, fotografamos também algumas ações dos alunos sobre os objetos.

4.2.2 Público alvo

O projeto de pesquisa foi apresentado para aprovação ao Vice-Diretor e ao Coordenador Pedagógico da Escola Estadual Rui Bloem, da cidade de São Paulo, que oferece somente o Ensino Médio. Além das Tecnologias serem um atrativo, oferecemos certificados aos alunos, já que a escola adotou o projeto de pesquisa como um curso de Geometria Espacial num ambiente Informático.

O projeto foi apresentado aos alunos do 3º do Ensino Médio, em forma de curso de Geometria Espacial no Cabri-Géomètre (ver anexo 13, p. 177). Não houve pré-seleção dos alunos para participar desse curso.

Inicialmente foram convidados 14 alunos do 3° do Ensino Médio através de um folder de divulgação do curso. No início das aulas, compareceram 11 alunos e ao longo do curso, somente 7 alunos tiveram freqüência regular.

Antes de iniciar as atividades, apresentamos aos alunos nosso projeto de pesquisa, comentamos de como seriam desenvolvidas as atividades e qual seria a relação professor e aluno.

Ficou claro para os alunos que a pesquisa não seria baseada numa explanação de um conteúdo novo, mas da ação deles sobre as atividades propostas pela pesquisadora.

A etapa 1, que não será analisada neste trabalho, foi útil, pois nos possibilitou perceber que os alunos tinham pouco conhecimento da Geometria plana necessária para a realização das atividades dos blocos 1, 2 e 3. Aproveitamos as 11h do curso Cabri para explorar alguns tópicos da Geometria Plana.

Tivemos, também, uma conversa rápida com os professores destes alunos, com os quais obtivemos informações sobre o contato dos mesmos com a Geometria no 2° ano do Ensino Médio.

4.3 Análise das observações do bloco 1 – ambiente externo

Nesta fase da pesquisa, descreveremos como os alunos executaram as atividades e, em seguida, procuraremos interpretar a produção dos alunos através dos dados coletados durante a experimentação.

A execução das atividades do grupo 1 foi acompanhada pela pesquisadora, como observadora e professora. O grupo 2 pelo observador 1 e o grupo 3 pelo observador 2, sendo que esta situação não foi conservada já que não podíamos contar com os observadores em todas as sessões de atividades, principalmente nos blocos 2 e 3.

Esse bloco foi dividido em duas seqüências: seqüência I – objetos colocados na face paralela ao plano de projeção e seqüência II – objetos colocados na face não paralela ao plano de projeção, na presença da luz solar.

Fizemos a análise das respostas dos alunos comparando as respostas das duas seqüências para as mesmas atividades.

Análise da atividade A: Conservação do ponto médio

A primeira atividade foi proposta da seguinte forma:

Considere dois pontos A e B (use bolinhas de massa de modelar coloridas para determinar os pontos, uma cor para cada ponto) sobre uma face paralela ao plano de projeção.

Ache o ponto médio M do segmento AB (use régua e caneta para traçar o segmento)

Ache o ponto médio M' do segmento A'B' onde A' e B' são as sombras correspondentes dos pontos A e B.

Os alunos deveriam observar e conjecturar sobre as sombras A' e B' dos pontos A e B e a sombra M' do ponto M.

Essa mesma atividade foi repetida sobre uma face não paralela ao plano de projeção.

A finalidade dessa atividade foi investigar se os alunos seriam capazes de perceber, através da observação, a conservação do ponto médio M em perspectiva cavaleira.

Resumimos abaixo os resultados encontrados pelos alunos nessa atividade.

Atividade A – Conservação do Ponto Médio						
Perceberam a conservação do ponto médio?	Plano paralelo ao plano de projeção			Plano não paralelo ao plano de projeção		
	sim	Sim c/ajuda	não	sim	Sim c/ ajuda	Não
G1	X				X	
G2	X				X	
G3	X					X

Tab. 2

Como nós prevíamos, a tabela mostra que a conservação do ponto médio é mais fácil de ser compreendida quando o plano é paralelo ao plano de projeção. Quando o plano não é paralelo os alunos necessitaram de uma ajuda para obter o resultado esperado.

Os alunos escolheram um sólido e o colocaram sobre a mesa telada (cujo tampo é paralelo ao chão) sobre a laje do corredor da escola. Em seguida, colocaram os pontos sobre uma das arestas do sólido e não no interior da face.

Os três grupos tiveram dificuldade em perceber qual seria a face não paralela ao plano de projeção para o prisma de base hexagonal e triangular e tiveram a mesma estratégia: fixaram os pontos (massinhas de modelar) nas arestas dos sólidos, evitando uso de canetões.

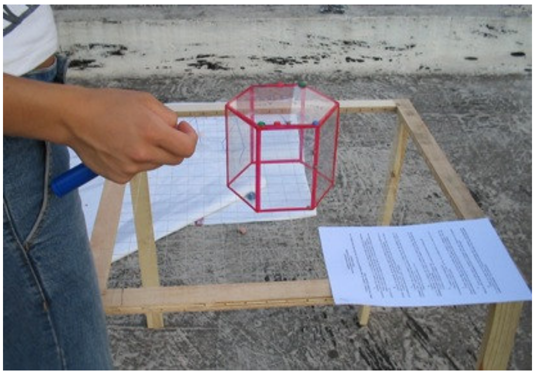


Fig. 110

Fig. 111

Conforme foi previsto na análise a priori, os alunos usaram régua para medir a distância entre os pontos, tanto na sombra como no sólido. Fizeram conjecturas a respeito da posição do ponto M' entre os pontos A' e B' e validaram suas hipóteses através de medições, mas sem relacionar os segmentos A'M' e M'B'.

Como dissemos anteriormente os alunos receberam questionários sobre cada atividade.

Abaixo transcrevemos as respostas dadas pelos grupos de alunos.

Quando os pontos foram colocados na face do cubo paralelo ao chão, o grupo 1 concluiu "*que suas medidas deram o mesmo resultado*" e quando os pontos foram colocados na face não paralela ao chão os alunos disseram: "*os pontos não se modificam, mas os segmentos em que são traçados eles aumentam*".

Percebemos, nessa atividade, que os alunos responderam à pergunta dando uma resposta diferente da prevista. Eles responderam que as medidas dão o mesmo resultado. Isto pode significar que AM = MB ou mesmo que A'M' = M'B'.

Os alunos aproveitaram a aresta do cubo para colocar os pontos e não no interior da face. A resposta dos alunos levou em conta que a perspectiva cavaleira de um segmento pode ser um segmento muito maior que o inicial. De qualquer modo, disseram que os pontos não se modificam. Podemos interpretar essa afirmação como sendo o ponto médio que se preserva tanto no segmento quanto na sua sombra. Também percebemos que os alunos melhoraram a resposta quando os pontos foram colocados na face não paralela ao plano de projeção.

Na face do prisma hexagonal paralela ao chão *"o ponto M do segmento que no caso é encontrado no meio da reta, ele tem o mesmo valor que o ponto M' da sombra"* e na face não paralela *"O ponto médio em si não se modifica, já o segmento, cujo ponto está marcado fica maior na sombra".*

Para este sólido, o ponto médio continua tendo um "mesmo valor", mas a resposta dada pelos alunos na face não paralela é mais esclarecedora. Já diferenciam o ponto médio, que "não modifica" do segmento, cujas medidas se alteram (fica maior na sombra).

Na face não paralela ao plano de projeção, observamos uma dificuldade inicial dos alunos em relação ao enunciado, já que o ambiente onde ele foi realizado era diferente do ambiente papel e lápis (Chaachoua, 1998). Tiveram problemas na execução da atividade para colocar os pontos em uma face não paralela ao plano de projeção. Fizemos uma intervenção nos grupo 1 e 2, o grupo 3 ficou por conta de outra observadora que não interferiu na seqüência. Foi feita uma releitura do enunciado para que os alunos verificassem se os pontos foram colocados na face pedida pela atividade. Os grupos 2 e 3 consideraram a diferença por décimos entre os segmentos do sólido e os da sombra para concluírem que na face não paralela ao plano de projeção, as medidas não se conservam. Mesmo com a intervenção no grupo 3, algumas atividades da seqüência II foram feitas na face paralela e não na face não paralela ao plano de projeção como foi pedido.

Percebemos nesta atividade inicial que os alunos registram suas conclusões na língua natural e apresentam dificuldades para expressar o que foi observado.

Os alunos interpretaram o enunciado, trouxeram para o espaço o Ponto Médio (representado pela massinha de modelar) e verificaram a sua conservação no plano, na projeção das sombras dos objetos do espaço. A materialização desse objeto para a geometria concreta – nível G0 (Parzysz, 2001) constitui um processo dinâmico. Os alunos tiveram que manipular os sólidos, representar os objetos geométricos por varetas e massas de modelar, observar, comparar suas sombras e os objetos concretos (Boero, 1996) para verificar uma das propriedades da perspectiva cavaleira que é a conservação do ponto médio, tanto na face paralela, como na face não paralela.

Podemos concluir que apesar dessas dificuldades, os alunos perceberam que, tanto no plano paralelo ao plano de projeção, como no plano não paralelo, o ponto médio se "conserva". Perceberam também que no plano não paralelo ao plano de projeção, as medidas dos segmentos não se conservam.

Análise da atividade B: Conservação das medidas e da razão entre dois segmentos

A atividade B foi proposta da seguinte forma:

Construa um segmento AB (use régua, caneta e as bolinhas de massa de modelar para os pontos, uma para cada ponto) sobre a face paralela ao plano de projeção.

Considere um ponto C pertencente ao segmento AB e que não seja ponto médio (use massa de modelar para determinar o ponto C também).

Relacione os segmentos AC, CB, A'C' e C'B' onde A',B',C' são as sombras respectivamente dos pontos A,B e C. O que você conclui em relação às medidas destes segmentos? Que relações você pode obter entre estes segmentos? Justifique.

A finalidade dessa atividade foi de levar os alunos a perceberem que AC = A'C' e CB = C'B', e que portanto a razão entre os segmentos AC e CB no sólido se mantinha na projeção.

Resumimos na tabela 3, os resultados desta atividade para a face paralela:

Atividade B – Conservação da razão e da medida dos segmentos			
	G1	G2	G3
Perceberam a conservação da razão entre segmentos	N	N	N
Perceberam a conservação das Medidas dos segmentos	S	S	S
Perceberam visualmente	N	N	N
Perceberam através de comparação de medidas	S	S	S
S = sim S/C = sim com ajuda N = não			

Tab. 3

Na tabela 4, temos os resultados desta atividade na face não paralela:

Atividade B – Conservação somente da razão entre segmentos			
	G1	G2	G3
Perceberam a conservação da razão entre segmentos	N	N	N
Perceberam a **não** conservação das medidas dos segmentos	S	S	S
Perceberam visualmente	N	N	N
Perceberam a **não** conservação através de comparação de medidas	S	S	S
S = sim S/C = sim com ajuda N = não			

Tab. 4

Pelos resultados nas tabelas 3 e 4 os alunos perceberam a conservação das medidas dos segmentos somente no plano paralelo. Como colocamos na análise a priori, não perceberam a razão entre os segmentos nas duas situações, tanto plano paralelo como no não paralelo provavelmente porque a razão e o teorema de Tales não são conteúdos muito trabalhados no Ensino Médio.

Os alunos fizeram uso da régua para comparar distâncias entre os pontos, tanto no sólido como na sombra, como foi previsto na análise a priori. Aproveitaram os vértices para colocar as massinhas de modelar para representar os pontos.

Na seqüência I, os três grupos fizeram do mesmo modo que o ponto médio, mas colocando um ponto C entre os pontos A e B na aresta paralela ao plano de projeção.

Abaixo transcrevemos algumas respostas dos grupos:

O grupo 1 respondeu às questões acima da seguinte forma: para o cubo quando os objetos foram colocados na face paralela ao plano de projeção: "*Suas medidas são iguais. Relações de semelhança*" e na face não paralela ao plano de projeção responderam que *"As medidas dos segmentos se modificam. Elas na sombra ficam maiores"*.

Do mesmo modo que na atividade anterior os alunos têm dificuldade de expressar suas idéias ao colocarem o ponto C como se fosse um segmento quando o objeto é colocado na face paralela ao plano de projeção.

Fig. 112 Fig. 113

Supomos também que, nessa atividade, os alunos perceberam alguma relação entre os segmentos, mas não souberam explicar a expressão “relações de semelhança”. Quando os objetos são colocados na face não paralela ao plano de projeção, os segmentos passam a ter medidas e se modificam.

Para o prisma hexagonal onde os objetos foram colocados na face paralela ao plano de projeção responderam que *“Formados os pontos A, B e C no sólido, que estes sendo refletidos no chão, formam A’, B’ e C’. Nós comparamos as medidas e estas dando os mesmos valores”* e na face não paralela ao plano de projeção *“sólido possui tais medidas, já a na sombra estas medidas se modificam”.*

Nessa atividade, os alunos usaram a palavra ‘refletidos’ referindo-se à sombra dos objetos. Também não ficou muito claro a que os alunos estavam se referindo quando escreveram que “comparamos as duas medidas”, supomos que estejam se referindo aos segmentos AC, A’C’ , CB e C’B’. Os alunos compararam os segmentos através de suas dimensões e não por razões entre segmentos.

Para o prisma de base triangular onde os objetos foram colocados na face paralela ao plano de projeção, o grupo 2 respondeu que “*Tanto no sólido como na projeção as medidas são exatas AB= 20 cm AC= 5,5 e CB = 4 cm”* e para a face não paralela ao plano de projeção *“AC= 14 CB= 5,5, sua projeção A’C’, C’B’ respectivamente têm medidas diferentes sendo a sombra um pouco maior em relação às medidas do sólido.*Percebemos aqui que os pontos (massa de modelar) foram colocados sobre uma face paralela ao plano de projeção, porém não como foi pedido na seqüência II, na face não paralela ao plano de projeção. As alunas validaram a resposta considerando a diferença de 0,5 cm em relação à resposta dada para a face paralela ao plano de projeção. A diferença encontrada só seria possível com uma insolação por volta do meio-dia e não às 15h da tarde aproximadamente, horário em que as experiências foram executadas. Nessa hora, a sombra é bem maior que o objeto. Não houve interferência da pesquisadora ou dos observadores.

Percebemos nessa atividade alguma conjectura por parte dos alunos, usando as mãos para explicar porque a sombra dos objetos tem suas dimensões aumentadas:

J - *A sombra do sólido tem a ver também com a posição do sol?*

C - *Tem lógico que tem se o sol estiver aqui em cima (gesto com as mãos para cima da cabeça) a sombra vai ficar certinha. À medida que fica de lado vai puxando...*

J - *Dependendo da posição onde o sol se encontra, vai aumentar ou diminuir a sombra?*

P - *O que você acha?*

C – *Acho que sim.*

J - *À medida que o sol desce a sombra fica mais comprida (gesto com as mãos e braços, direção dos raios solares). Estica.*

Boero (1996) comenta a importância dos gestos para comunicar o pensamento do aluno, fazem parte das conjecturas e hipóteses iniciais como colocamos no capítulo I desta dissertação.

Apesar da materialização dos objetos (Parzysz, 2001), da manipulação dos objetos (Boero, 1996), ficou evidente nesta atividade que são necessários problemas que envolvam razões e o teorema de Tales dado à precariedade do conhecimento dos alunos sobre esses assuntos mesmo revisto na etapa 1 desta pesquisa.

Eles não perceberam as razões entre os segmentos limitando-se apenas à distância entre os pontos, não os relacionando. Essa dificuldade pode ser detectada pelo fato dos alunos estarem habituados a "ver no plano" e não no espaço. A professora tentou levar o aluno a perceber estas relações, mas seria necessária uma intervenção mais aprofundada com a retomada dessas relações e que não era esse o nosso objetivo. Era esperado que elas conhecessem essas relações.

Nessa atividade os alunos colocam que existe uma relação de igualdade, mas não através da razão entre segmentos. Constataram apenas que os segmentos na face não paralela ao plano de projeção aumentam.

Os alunos não perceberam a razão entre os segmentos AC e CB e entre A'C' e C'B' ou qualquer relação com o teorema de Tales. Justificam as respostas usando alguns símbolos matemáticos.

Acreditamos que esse resultado ocorreu porque os alunos estudaram razão entre segmentos e o teorema de Tales no plano, na folha de papel e transportar estas propriedades para a geometria concreta, pareceu difícil para eles. Estes não perceberam que há uma razão entre os segmentos e esta razão se preserva, tanto na face paralela ao plano de projeção, como na face não paralela ao plano de projeção.

Análise da atividade C: Conservação do baricentro de um triângulo

A atividade foi proposta da seguinte maneira:

Construa um triângulo ABC (marcar os vértices com massa de modelar, cada ponto com uma cor diferente, e usar régua para marcar os lados do triângulo) contido na face paralela ao plano de projeção.

Encontre o baricentro do triângulo ABC.

Encontre o baricentro do triângulo A'B'C' sombra correspondente ao triângulo ABC

Compare o baricentro do triângulo ABC e o baricentro de sua sombra A'B'C'. O que você conclui? Justifique.

A finalidade desta atividade foi de que os alunos percebessem que o baricentro mantém suas propriedades na sombra do triângulo ABC.

Na tabela abaixo, resumimos os resultados encontrados:

Atividade C – Conservação do baricentro						
Perceberam a conservação do baricentro	Plano paralelo ao plano de projeção			Plano não paralelo ao plano de projeção		
	Sim	Sim c/ajuda	Não	Sim	Sim c/ajuda	Não
G1	X			X		
G2	X			X		
G3	X			X		

Tab. 5

A previsão feita na análise a priori de que esta atividade seria resolvida sem grandes dificuldades foi comprovada pelos resultados da tabela acima. De fato, após perceberem que o ponto médio se conserva não é difícil de se convencer que o baricentro se conserva.

Os alunos usaram régua para marcar os pontos médios dos lados do triângulo ABC, tanto no sólido como na sombra e compararam as distâncias entre o vértice e o ponto médio da aresta, tanto no sólido, como na sombra.

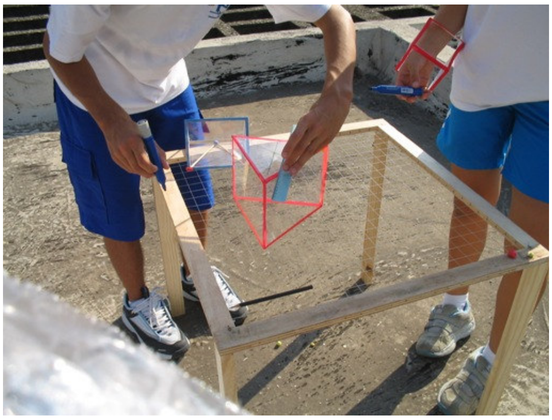
Todos os grupos usaram como base do triângulo ABC, uma das arestas paralelas ao plano de projeção e o ponto médio da aresta paralela a essa para criar o ponto C. O triângulo ABC era perpendicular ao plano de projeção.

Os alunos construíram o baricentro a partir dos pontos médios dos lados do triângulo ABC e suas respectivas medianas. Mediram a distância entre um dos vértices e um dos pontos médios de cada lado do triângulo ABC, tanto no sólido como na sombra para verificar se o baricentro se conservava. Apenas o grupo 2 resolveu construir todas as medianas e medir todas as distâncias entre os vértices do triângulo e o baricentro, e do baricentro até os pontos médios das arestas, tanto no sólido como na sombra.

O grupo 1 executou a atividade usando canetões para fazer os lados do triângulo nos prismas com exceção do prisma triangular.

Os grupos 2 e 3 usaram as varetas de madeira e uma das arestas do sólido para fazer o triângulo na face paralela ao plano de projeção para melhorar a visibilidade dos lados do triângulo na sombra.

Fig. 114



Para o prisma de base hexagonal, na face paralela, o grupo 1 respondeu: *"O baricentro do triângulo ABC tem a sua sombra com as mesmas medidas, sendo estas A'B'C"* e na face não paralela *"O ponto do baricentro não se modifica, mas os segmentos que são utilizados pra encontrar o baricentro ficam maiores"*.

Os grupos 1 e 2 tiveram resultados idênticos.

Percebemos um avanço nas respostas dos alunos em relação às atividades anteriores, apesar de ainda na seqüência I, os alunos confundirem o ponto com segmento, que na seqüência II já não o fazem. Não fizeram registro das medidas que encontraram na face paralela, mas na face não paralela fizeram uso da percepção para responder à questão.

Para o grupo 3 na face paralela do prisma de base quadrangular, responderam que *"As medidas das medianas do sólido deram iguais às medidas das medianas da sombra, portanto nós concluímos que o baricentro tenha as mesmas medidas"* e na face não paralela *"O baricentro do sólido se alterou na sombra. PM do sólido=10,5, PM da sombra= 18,5⇒ lados do triângulo"*.

Esta é a primeira atividade deste grupo onde existem diferenças significativas entre as medidas encontradas em relação ao sólido e à sombra, mesmo assim não souberam expressar corretamente o que queriam dizer. Supomos que PM quer dizer ponto médio, ou seja, um segmento AM do triângulo ABC no sólido de 10,5cm e A'M' de 18,5cm na sombra.

O grupo 3 justifica a conservação do baricentro através do comprimento das medianas na seqüência I, no plano paralelo, e na seqüência II justificou a não conservação do baricentro medindo as distâncias entre um vértice do triângulo e o ponto médio da aresta correspondente.

Os alunos não tiveram dificuldade no enunciado desta atividade, porque revisamos a construção do baricentro antes do início da seqüência das atividades deste bloco no Cabri-Géomètre, no plano da tela do computador, mesmo assim retomamos rapidamente a construção do baricentro no ambiente externo.

Percebemos que, na medida em que as atividades foram sendo executadas, os alunos construíram melhor suas conclusões e para esta atividade o ambiente experimental, a exploração dinâmica (Boero, 1996) permitiu aos alunos a produção de algumas conjecturas em relação às sombras dos objetos tridimensionais. Algumas das respostas dos alunos foram dadas perceptivamente (pólo do visto) como era esperado para uma geometria concreta (Parzysz, 2001).

Análise da atividade D: Conservação do paralelismo

Propusemos a atividade da seguinte forma:

Coloque dois palitos de churrasco paralelos entre si e mantendo o paralelismo entre eles, coloque-os em posições diferentes sobre uma face paralela ao plano de projeção. Para cada posição observe e compare os segmentos correspondentes às sombras *dos palitos.*

Para cada posição verifique se os segmentos correspondentes às sombras dos palitos são paralelos. De que forma você fez esta verificação? Justifique.

O objetivo desta atividade foi de que os alunos percebessem que o paralelismo é conservado mesmo se mudarmos as posições dos palitos na sombra correspondente, tanto na face paralela, quanto na não paralela ao plano de projeção.

Na tabela abaixo, resumimos os resultados desta atividade:

Atividade D – Conservação do paralelismo						
Perceberam a conservação do paralelismo	Plano paralelo ao plano de projeção			Plano não paralelo ao plano de projeção		
	Sim	Sim c/ajuda	Não	Sim	Sim c/ajuda	Não
G1	X			X		
G2	X			X		
G3	X			X		

Tab.6

Analisando os resultados da tabela, os alunos não tiveram dificuldades de perceber o paralelismo entre os segmentos nas duas situações, tanto na face paralela como na não paralela.

Os alunos usaram varetas de madeira e fita adesiva para fixar na face do sólido; um dos grupos usou duas varetas para cada segmento representado por causa da pouca visibilidade na sombra (fig. 115,116).

Fig. 115

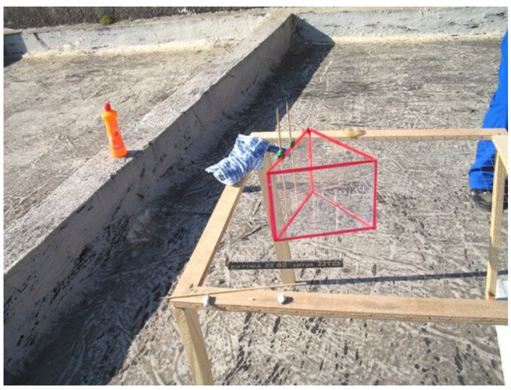


Fig. 116

Para o cubo, na face paralela o grupo 1 respondeu para o prisma de base quadrangular que *"nas várias posições que foram colocadas os palitos, suas medidas não mudaram, assim concluímos que são paralelos"* e na face não paralela responderam *"quando é paralela a sombra do sólido fica com a mesma medida, mas quando é não paralela à sombra ficam com a medida maior".*

Fig. 117

Os alunos experimentaram posições diferentes para os segmentos paralelos e perceberam somente que na face paralela as medidas se conservam, mas não concluíram se o paralelismo permanece na face não paralela ao plano de projeção.

Para o grupo 2, no prisma de base quadrangular, na face paralela, responderam que *"colocamos os palitos em vários sentidos e verificamos que sua sombra projetada é a mesma do sólido"* e na face não paralela *"são paralelos sendo que a sombra dos palitos tem segmentos maiores".*

Entendemos que os "vários sentidos" a que os alunos se referem deva ser várias posições dos palitos paralelos e na face não paralela perceberam que o paralelismo permanece, mas as medidas dos segmentos não.

O grupo 3 respondeu para o prisma de base triangular, face paralela "*Colocamos os palitos paralelos em várias posições e verificamos somente 3 posições se manteve o paralelismo no plano de projeção"* e na face não paralela respondem *"Fixamos os palitos na face não paralela e verificamos que a sombra dos palitos se alteravam mas mantinha o paralelismo".*

Para esse grupo, somente três posições mantinham o paralelismo dos palitos, é bem provável que a fixação dos mesmos de forma que estivessem paralelos não tenha ocorrido nas outras posições levando-os a essa conclusão. Já na face não paralela, fixaram os palitos e para este sólido responderam que o paralelismo se mantém, e *"a sombra dos palitos alteravam",* ou seja, as medidas das sombras dos palitos se alteraram.

Durante a atividade colhemos algumas conclusões dos alunos:

T - Não mudou, na paralela não muda nada, mesma coisa que aconteceu nas outras.

C - Aumenta na sombra, na projeção.

D - A sombra deu duas vezes maiores que a aresta do sólido tanto é que não deu para medir.

O aluno D desistiu do curso no início do bloco 3.

Aqui percebemos a dificuldade dos alunos de resolver esta atividade quando os objetos estão colocados na face não paralela ao plano de projeção, percebem que na face não paralela a sombra aumenta na projeção.

Nesta atividade, já há poucas conjecturas dos alunos em relação aos resultados possíveis que podem obter durante a atividade. Percebemos que durante a execução dos trabalhos, os alunos já pressupõem os resultados a partir das atividades anteriores, antes mesmo da manipulação e materialização dos objetos. O ambiente experimental (Boero, 1996, Parzysz, 2001) parece favorecer esse tipo de conclusão.

Análise da atividade E: Conservação das medidas dos ângulos

Propusemos a atividade da seguinte maneira

Cruze dois palitos de churrasco e mantendo o cruzamento entre eles, coloque-os em posições diferentes sobre a face paralela ao plano de projeção. Para cada posição:

Observe e compare os palitos e suas sombras correspondentes.

Compare o ângulo formado entre os dois palitos e o ângulo formado pela sombra dos dois palitos. O que você conclui? Justifique.

O objetivo desta atividade foi que os alunos percebessem que o cruzamento e o ângulo entre as varetas se conservam na sombra somente na face paralela ao plano de projeção, mesmo mudando de posição, mas sem a conservação dos ângulos na face não paralela ao plano de projeção.

Abaixo resumimos os resultados desta atividade:

Atividade E – Ângulo entre segmentos						
Perceberam a não conservação dos ângulos na face não paralela	Plano paralelo ao plano de projeção			Plano não paralelo ao plano de projeção		
	Sim	Sim c/ajuda	Não	Sim	Sim c/ajuda	Não
G1	X			X		
G2	X				X	
G3	X					X

Tab. 7

Percebemos na tabela, que os alunos não tiveram dificuldade de verificar que os ângulos se conservam na face paralela, mas necessitaram de ajuda para obter o resultado esperado no plano não paralelo ao plano de projeção, conforme foi previsto na análise a priori.

Uma dificuldade encontrada foi na colocação dos palitos cruzados, mantendo-os unidos durante a mudança de posições. Oferecemos fita adesiva para unir os palitos e fixá-los na face.

Os alunos tiveram dificuldade no uso do transferidor para conferir o ângulo entre os dois palitos, foi necessário interferir, mesmo assim houve distorções. Provavelmente porque houve penumbra, as sombras aparentam mais largas no horário da tarde dificultando a precisão da medição.

O grupo 1 tentou medir os ângulos das varetas, na face não paralela ao plano de projeção, na posição em que se encontrava ficava difícil a leitura do transferidor, sugerimos aos alunos que medissem os ângulos entre as varetas antes de posicioná-las de forma que a face onde estão fixados ficasse não paralela, ao plano de projeção.

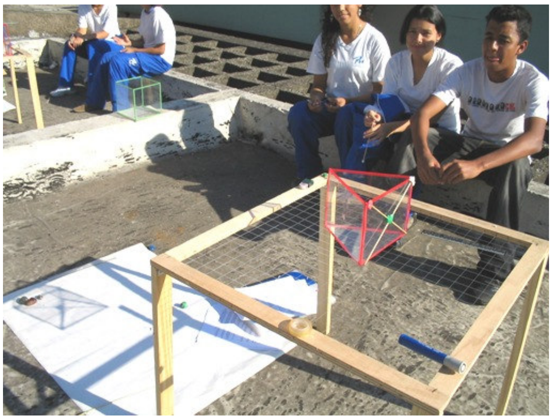


Fig. 118

Para o cubo na face paralela o grupo 1 respondeu *"Conclui que os dois ângulos possuem a mesma medida"* e na face não paralela *"os valores dos ângulos modificam."*

Para o prisma de base hexagonal, na face paralela *"os ângulos são exatamente da mesma medida"* e na face não paralela *"os ângulos na sombra ficaram maiores. Dois palitos se cruzando em forma perpendicular, no sólido, o palito paralelo ao chão tem 5 cm tendo a mesma medida na sua sombra. E o palito não paralelo ao chão tem 5 cm no sólido e na sombra, 13,0 cm".*

Percebemos aqui que o grupo 1 cruzou os palitos perpendicularmente (um caso particular dos segmentos concorrentes). Interessante notar que os alunos perceberam que o palito paralelo ao plano de projeção manteve suas medidas, mas o palito não paralelo modificou suas dimensões.

Para o grupo 2 no cubo, na face paralela, responderam *"eu concluí que o ângulo do triângulo e da sombra tem a mesma medida e o ângulo em ambos é 90°"*.

Os alunos consideraram o cruzamento das varetas na forma triangular para responder essa questão.

O grupo 3 respondeu para a face paralela do prisma de base quadrangular desta forma: *"Testamos três posições. Na P1 no sólido o ângulo de 95° e na sombra 85°. No P2 no sólido o ângulo deu 125° e na sombra deu 130°. Na 3ª posição no sólido o ângulo deu 175° e na sombra 173°, ou seja, houve alteração nos ângulos". "Na P1 os ângulos aumentaram 10°. Na P2, os ângulos diminuíram 5°. Na P3 os ângulos diminuíram apenas 2°".*

Nas comparações feitas pelas alunas, percebemos a dificuldade de manusear o transferidor, pois consideraram diferenças muito pequenas entre as medidas dos ângulos, tanto no sólido como na sombra.

Para o cubo, na face não paralela responderam que "o sólido formou um ângulo de 150° e na sombra um ângulo de 135°".

Já para este sólido a resposta está de acordo com o objetivo desta atividade.

Gravamos ainda algumas conjecturas dos alunos durante esta atividade:

J – *Sabe o que eu percebi que os negócios, tudo que a gente fez o comprimento, a largura o tamanho muda, mas os ângulos não.*

Medimos os ângulos da sombra e do sólido.

J - *A figura, por causa da sombra fica meio torta.*

É como nossa sombra

P - *Será que é por isso?*

C - *A projeção que o sol proporciona nos palitos na sombra.*

J - *Como se fosse nossa sombra vai ficar meio que inclinada.*

Os alunos, a essa altura, já tiram algumas conclusões em relação aos resultados obtidos nos diversos sólidos como podemos ver abaixo:

D – O mesmo ângulo. É tudo igual!

- O mesmo ângulo que está no prisma está na sombra também, mesmo o ângulo, as paralelas, os palitos têm o mesmo tamanho, tudo a mesma coisa.

T - *Na sombra e no sólido e as medidas também. O baricentro do prisma hexagonal e do baricentro do prisma hexagonal no papel, mesma coisa, semelhantes aos dois sólidos anteriores.*

Percebemos, nesta atividade, que os alunos já relacionam a posição dos raios solares com os resultados das sombras. A exploração dinâmica dos palitos e a materialização dos segmentos ajudam os alunos a chegarem a alguma conclusão, como o grupo 3 que registrou algumas posições das varetas mesmo com o uso inadequado do transferidor.

Algumas conjecturas interessantes dos alunos utilizando as mãos e o corpo para explicar o que estava acontecendo com a sombra:

T - *Minha cabeça e meus pés são paralelos, só meu corpo não, então só ele aumenta...* (gestos)

Ela está explicando, tentando entender a sombra formada pelo prisma quadrangular.

J - *Mas por que isso acontece?Porque quando é paralelo dá tudo certinho e quando não é dá tudo diferente.*

T - *Quando o sólido se movimenta... a sombra..., parece que os segmentos da sombra aumentam.*

C - *Não é por causa de onde bate o sol, onde bate a sombra.*

Percebemos aqui que os alunos já relacionam a face paralela à conservação de medidas, paralelismo, perpendicularismo, etc.,

Boero (1996) comenta que os gestos e as movimentações são importantes na formação das conjecturas iniciais.

Percebemos que para esta última atividade, somente o grupo 1 resolveu a atividade conforme havíamos previsto na análise a priori. Os grupos 2 e 3 não perceberam a não conservação do ângulo porque executaram a atividade diferente da que foi pedida, devem ter colocado os objetos sobre a face paralela ao plano de projeção e não na face não paralela, e por isso os resultados foram idênticos. Os palitos perpendiculares colocados na face não paralela ao plano de projeção produzem uma sombra de palitos cruzados, mas não perpendiculares.

Durante as atividades, percebemos que quanto mais os grupos questionam, mais levantam hipóteses para possíveis resultados (Boero, 1996), os alunos tendem a dar respostas mais adequadas dentro de nossa proposta de trabalho, fato que evidenciei mais no grupo 1 que nos demais grupos, talvez por estar como observadora e professora. A geometria concreta (Parzysz, 2001) permite que o aluno perceba melhor os objetos, experimentando a situação, mas é preciso interferir para que os alunos cheguem a resultados mais próximos dos esperados e a presença do professor é muito importante.

Abaixo transcrevo alguns registros dos observadores:

Observador 1

Os alunos têm certa dificuldade em saber em qual face paralela ao plano de projeção devem colocar os pontos... Resolvem o exercício sem problemas, concluindo que as medidas encontradas no sólido são iguais às correspondentes na sombra do sólido. A partir do momento em que essa constatação passou a se repetir, eles ficaram mais confiantes nela, passaram a ter mais certeza e passaram a prever que, no exercício seguinte, esse comportamento iria se repetir. Os alunos têm dúvida no significado dos termos "colineares", "perpendiculares", e "paralelismo". Têm desconhecimento no modo de usar o transferidor para determinar o ângulo. Mas, concluem, até por intuição, que os ângulos são iguais, tanto do sólido como o refletido.

De acordo com o observador 1, nesse bloco os alunos fizeram algumas conclusões, prevendo resultados em relação à sombra do sólido, indicando algumas conjecturas iniciais dos alunos.

Observador 2

"Tanto na seqüência 1 quanto na 2 as alunas colocaram o ponto nas arestas. Fizeram muitas hipóteses durante a experimentação, como que poderia aumentar ou diminuir na seqüência 1. Já na seqüência 2 ficaram na dúvida se as medidas estariam iguais ou não. Lembro que elas usaram incorretamente o transferidor. ...tiveram um pouco de dificuldade na compreensão de colineares, retas perpendiculares que apareceram nas duas seqüências"

"Eles acharam mais fácil esta atividade, devido a ser parecida com a seqüência anterior onde apenas as faces eram paralelas, e agora as faces são não-paralelas. Eles se sentiram mais seguros, mas ainda persistiam as dúvidas referentes às noções geométricas. Eles concluíram que, nas faces paralelas, as medidas dos objetos se conservam, já na não paralela as medidas de sua reflexão podem aumentar, ou diminuir dependendo da posição do sol."

Percebemos que, tanto o observador 1 como o 2, viram que os alunos têm dificuldades no manuseio do transferidor, provavelmente porque esse instrumento é pouco utilizado em Matemática no Ensino Médio, o seu uso é ensinado no Ensino Fundamental. Pode ser que os alunos não tenham lembrado inicialmente como usar ou desconhecem seu uso. Essa falha é comum no ensino da Geometria que foi levantada no capítulo I desta dissertação.

Os observadores também perceberam que os alunos formam hipóteses, conjecturas durante a experimentação. Era esperado esse tipo de comportamento porque exploramos duas situações, face paralela e face não paralela ao chão.

A pesquisadora, como observadora, também observou o uso das mãos representando a direção dos raios solares, do corpo pelos alunos tentando explicar o que acontecia com a sombra projetada no chão.

Como Boero (1996) comenta em sua pesquisa, essas conjecturas iniciais, hipóteses, questões com ou sem o uso do corpo para explicar uma situação, contribui para uma aprendizagem mais significativa.

Conclusão das atividades do bloco 1

Podemos concluir que, a partir das análises das atividades executadas pelos alunos, é importante a presença do professor para direcionar os trabalhos. Isto ficou evidente nos grupos 2 e 3, quando produziram respostas erradas porque colocaram alguns objetos na face paralela na seqüência II e não na face não paralela como foi pedido. Os dois grupos ficaram sob a orientação dos observadores que não intervieram nessa seqüência. Os alunos conseguiram verificar quase todas as propriedades da perspectiva cavaleira, exceção apenas às razões entre segmentos e o teorema de Tales, que foram revistos na etapa 1, mas os alunos não conseguiram fazer ligação alguma com a Geometria Espacial. As razões entre segmentos e o teorema de Tales são temas que fazem parte do currículo do 4º ciclo do Ensino Fundamental que muitas vezes é pouco trabalhado nas escolas e pouco revisto no Ensino Médio. Nós não prevíamos nenhuma aula para esses assuntos já que acreditávamos que já tinham sido ensinados e revistos.

Nem todas as propriedades da perspectiva foram levantadas pelos alunos, pelas razões acima citadas, mas percebemos, no entanto que a execução de atividades em ambiente externo, torna rica a troca de idéias, e permite uma interação entre os objetos e os alunos, que têm liberdade de questionar, propor idéias.

Como Boero (1996) coloca, é um ambiente rico para a aprendizagem, os alunos têm a possibilidade de materializar e manipular os objetos geométricos (Parzysz, 2001), de experienciar os problemas levantados e resolvê-los na presença do professor, fundamental para a articulação das atividades.

Institucionalização da Perspectiva Cavaleira

Antes de apresentarmos a perspectiva cavaleira como um objeto matemático, distribuímos para os grupos, três peças poligonais planas de acrílico (quadrado, hexágono e triângulo equilátero) e que colocassem cada uma das peças perpendiculares ao plano de projeção.

Os três grupos utilizaram uma parede vertical como plano de projeção. Nessa atividade era de se esperar que os alunos percebessem que em perspectiva cavaleira o quadrado é um paralelogramo, a perspectiva de um triângulo equilátero poderá ser um triângulo escaleno e um de hexágono regular num hexágono não regular.

Abaixo seguem as observações de cada grupo:

O grupo 1 concluiu que *"as formas mudaram, o quadrado virou um paralelepípedo. O hexágono que são seis paralelas ficou apenas com duas e o triângulo equilátero mudou para triângulo isósceles."*

Notamos na resposta desse grupo que chegaram às conclusões esperadas, considerando que, em vez de paralelepípedo que é uma figura tridimensional, os alunos queriam dizer paralelogramo, que o hexágono deixou de ser regular e o triângulo equilátero também. Os alunos fizeram suas conclusões perceptivamente.

O grupo 2 respondeu *"ao observar o quadrado, notamos que sua sombra formava um losango com os lados não paralelos. O triângulo equilátero formava na sombra um triângulo escaleno com os lados não paralelos. O hexágono formou na sombra um outro hexágono com os lados paralelos, mas com medidas diferentes do hexágono real".*

As alunas observaram que a sombra do quadrado formou um losango que é também um paralelogramo. Consideraram o hexágono na sombra, um hexágono regular, mas com medidas diferentes do hexágono de acrílico.

O grupo 3 respondeu *"Observamos e chegamos a várias conclusões. Fizemos passo a passo e percebemos os seguintes resultados: O quadrado se torna um losango. O triângulo equilátero num triângulo isósceles. O hexágono ficou um hexágono não regular sem seus lados iguais. Já o triângulo e o hexágono menor suas dimensões diminuíram".*

O grupo 3 também respondeu como o grupo 2, um losango no lugar do paralelogramo e consideraram a sombra do hexágono regular em um não regular.

Os grupos 2 e 3 também resolveram essa atividade visualmente.

Antes de iniciarmos as atividades do bloco 2, pedimos para que os alunos respondessem às seguintes questões:

1. Comparando os resultados de todas as atividades nos quatro sólidos, o que vocês concluem em relação às atividades desenvolvidas com as varetas e as projeções do:

a) Ponto médio

b) Baricentro

c) Medidas

d) Razão entre segmentos

e) Paralelismo

f) Perpendicularismo

2. Comparando os resultados das atividades das seqüências I e II, o que vocês podem concluir em relação às atividades e ao fato dos sólidos estarem com as faces paralelas na primeira seqüência e na segunda não?

Seguem abaixo as respostas do grupo 1 com relação à:

a) Ponto médio: *não altera*

b) Baricentro: *o ponto do baricentro não muda*

c) Medidas: *altera na projeção*

d) Razão entre segmentos: *Altera*

e) Paralelismo: *manteve a posição e altera o tamanho*

f) Perpendicularismo: *Aumenta os segmentos dependendo da posição do sol*

Pedimos aos alunos para compararem os resultados das atividades das seqüências I e II em relação às atividades e ao fato dos sólidos estarem com as faces paralelas na primeira seqüência e na segunda não.

Os alunos C, J e T responderam assim: *Comparando o I e o II percebemos que os pontos se mantêm, mas as medidas se modificaram e os ângulos também modificaram.*

Os alunos não fazem qualquer ligação com alguns tópicos da geometria plana para a geometria espacial como o paralelismo entre dois segmentos relacionando-o com o tampo da mesa e a sombra formada no chão. Cito como exemplo, o comentário feito pelos alunos J e G sobre o tampo da mesa que, não sendo sobreposto à sua sombra, não poderiam ser paralelos. Em momento algum, relacionaram os segmentos a razões, ao teorema de Tales, que é trabalhado na geometria plana e pouco explorado na geometria espacial. Nos dois últimos sólidos, os alunos colocaram que os resultados seriam iguais porque estão colocando os sólidos nas mesmas posições com as mesmas questões. Fizeram algumas conjecturas principalmente com o uso das mãos para mostrar a direção dos raios solares, paralelismos, concorrentes e perpendiculares. Fazem uso de registros simbólicos, registros figurais e muitos erros de português. Os alunos têm certa dificuldade de relacionar objetos da geometria plana na geometria espacial, é comum confundirem o lado com aresta, vértice no plano e vértice no espaço.

O grupo 2 respondeu à primeira questão da seguinte forma:

"Comparamos os sólidos com suas projeções e verificamos que as respectivas sombras dos quatro sólidos regulares refletidas pelo sol, têm medidas exatamente iguais, ou seja, as medidas e as distancias calculadas em ambos não mudam. O ponto médio localizado e todos os itens pedidos estão na mesma posição, tanto nos sólidos como nas projeções".

E a questão 2 foi respondida assim:

"As medidas dos sólidos com as faces paralelas sempre deram medidas iguais, só nas não paralelas, as medidas se alteraram (não batiam com as medidas do sólido)".

Percebemos que as alunas K. e N. observaram que há invariantes quando o plano é paralelo ao plano de projeção, mas não citaram, por exemplo, que o ponto médio e o baricentro também se conservam no plano não paralelo ao plano de projeção, parece não terem observado que os ângulos, tanto quanto as medidas, não se conservam no plano não paralelo. As alunas consideraram a sombra como uma reflexão do objeto. Durante as atividades deste bloco isso ficou evidente nas respostas dadas nas questões sobre ângulos, e posições entre retas.

O grupo 3 respondeu à primeira questão desta forma:

"No ponto médio dos sólidos paralelos não havia alteração. Nas medidas e nos sólidos de face não paralelos as medidas se alteraram."

"O baricentro na face paralela não se altera e na face não paralela as medidas se alteram."

"As medidas tiradas no sólido na face paralela não se alteraram já na face não paralela as medidas se alteraram".

"Os segmentos nos sólidos de face paralela não se alteram, na face não paralela as medidas se alteram."

"Na face paralela os palitos mantinham o paralelismo, na face não paralela também."

"Perpendicularismo - nos sólidos de face paralela a perpendicularidade dos palitos foram mantidos, já nas faces não paralelas a perpendicularidade se alterou do sólido para a sombra."

A questão 2 foi respondida desta forma:

"Comparando os resultados de todas as atividades das seqüências I e II podemos observar que, na seqüência I os resultados de todas as atividades não se alteram. Na seqüência II os resultados de todas as atividades se alteraram."

As alunas Ca e G perceberam as invariantes como o ponto médio, baricentro, o paralelismo, o perpendicularismo na face paralela ao plano de projeção, mas não perceberam a colinearidade dos pontos.

Não responderam em relação aos segmentos concorrentes e perpendiculares. Perceberam que as medidas modificam na face não paralela ao plano de projeção apesar de suas conclusões darem a impressão que fizeram a atividade em desacordo com o que foi pedido na face não paralela. Muito dos sólidos foram usados com os objetos sobre a face paralela ao plano de projeção e não no plano não paralelo. Faltou interferência por parte do observador e do pesquisador.

Em relação à questão 2, parece-nos que as alunas não perceberam as invariantes na seqüência II, considerando que todas as atividades alteraram.

A partir destas respostas, institucionalizamos a perspectiva cavaleira, onde a professora colocou o porquê do nome, da pesquisa, da existência das fugantes relacionadas aos raios solares, do coeficiente de redução e das propriedades existentes.

4.4 Análise das observações do bloco 2 - ambiente Cabri

O bloco 2, que utiliza o software Cabri-Géomètre, foi dividido em duas seqüências: a seqüência III que corresponde às atividades da seqüência I do bloco 1, onde os objetos estão sobre a face paralela ao plano de projeção e a seqüência IV que corresponde à seqüência II do bloco 1, com os objetos sobre a face não paralela ao plano de projeção.

A seqüência III foi executada na face do cubo, paralela ao plano de projeção (tela do computador). Esse cubo foi construído no Cabri pelos alunos e salvo como arquivo Cubo.

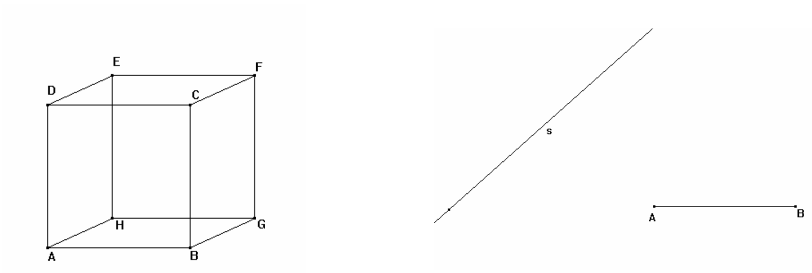
A seqüência IV foi executada no arquivo Plano α, onde estão construídos dois planos α e β sendo o plano α móvel de tal forma que inicialmente se apresenta paralelo ao plano β e com o auxílio do eixo x (pontilhado) este plano torna-se não paralelo ao plano β (plano de projeção). O movimento criado para o plano α serviu para que os alunos comparassem duas situações numa mesma atividade, observando o comportamento dos objetos matemáticos nos dois planos. Os planos α e β foram criados pela pesquisadora por exigir um conhecimento mais aprofundado do software Cabri e que não é o objeto da seqüência.

Nesta seqüência de atividades, o aluno deverá criar as retas fugantes arbitrariamente, pois que nesse caso não temos a direção dos raios solares.

A finalidade do bloco 2 foi de comprovar os resultados obtidos pelos alunos no bloco 1 e se houve algum avanço em termos de aprendizagem em relação às propriedades da perspectiva cavaleira. Esperávamos neste bloco, observar se o pólo do visto teve alguma influência no pólo do sabido.

Antes de iniciarmos a análise desta seqüência de atividades, propusemos aos alunos que construíssem um cubo em perspectiva cavaleira, pois que toda a seqüência III se apoiará nessa construção que foi proposta da seguinte maneira:

Construir um cubo ABCDEFGH a partir de um exemplo com as seguintes informações: a direção da fugante s, o coeficiente de redução k = 0,5, a base ABGH paralela ao plano horizontal e a aresta AB do cubo paralelo ao plano de projeção (tela do computador).



Nesta fase, os alunos se reagruparam de forma que no grupo 1 ficaram C e J, o grupo 2 formado pelas alunas T e N e o grupo 3 formado pelas alunas Ca, G e K.

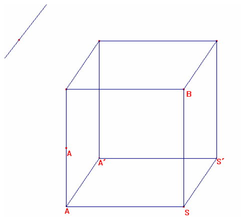
O grupo 1 começou esta atividade com dois segmentos, um deles oblíquo, o outro paralelo ao plano de projeção (tela do computador). Foram usadas fugantes paralelas ao segmento oblíquo. Usaram paralelas para terminar o cubo, mas percebemos que, ao movimentarmos o cubo, não usaram uma paralela para construir uma das arestas do cubo (ver cubo1[3]), havendo deformação na figura. Criaram o ponto médio e usaram circunferências para encontrar intersecções entre as fugantes e essas circunferências para determinar as arestas não paralelas ao plano de projeção.

[3] As figuras construídas no Cabri neste capítulo estão identificadas pelo nome dos arquivos que os alunos gravaram durante a execução das atividades.

O grupo 2 fez o que era esperado e o que tínhamos instituído anteriormente. Usaram o coeficiente de redução, fugantes e paralelas na construção do cubo.

O grupo 3 criou o cubo que aparentemente estava corretamente construído, mas ao longo das atividades percebemos que quando movimentado a partir do ponto B, o cubo não conserva suas propriedades, torna-se um paralelepípedo. As alunas provavelmente deixaram de usar o ponto de intersecção em algum dos vértices do cubo fazendo com que o ponto não se fixasse e, portanto, perdendo suas propriedades.

Fig. 119



Cubo1

Os alunos arquivaram suas construções como arquivo CUBO.

Os alunos foram muito persistentes, refizeram muitas vezes a mesma atividade até considerarem como bom o resultado. Algumas atividades foram refeitas várias vezes, com longos períodos de discussão e silêncio por parte dos alunos no software Cabri.

Depois da construção do cubo, foi proposta uma atividade que consistia em fixar um ponto sobre um objeto tridimensional (no caso um prisma esquelético), pois todas as atividades necessitam da construção da projeção de um ponto situado num plano num outro plano.

Distribuímos para cada grupo dois objetos tridimensionais, um cubo opaco e outro cubo esquelético, carretel de linha, barbantes, réguas, massa de modelar.

Um dos componentes do grupo determinou um ponto sobre a face do cubo opaco e sem que o outro aluno pudesse ver, deu a localização deste ponto para o colega que está com um cubo esquelético. O aluno localizou esse ponto no cubo enrolando o barbante no cubo, de forma que os fios ficassem paralelos a uma das arestas, em duas direções, o cruzamento entre essas linhas representou o ponto P sobre a face paralela de um objeto tridimensional e sua sombra P'.

Depois pedimos para que os alunos abrissem o arquivo CUBO no Cabri e fixassem um ponto P na face frontal do cubo.

Os alunos usaram segmentos concorrentes para fixar o ponto P.

Pedimos a seguir, que criassem a projeção do ponto P na face posterior do cubo. Depois de algumas tentativas, interferimos nos grupos para que pudessem fazer a projeção corretamente como foi explicado na análise a priori.

Durante a execução das atividades deste bloco, os alunos tiveram acesso aos sólidos e objetos que foram manipulados no bloco 1 na sala de informática, caso tivessem alguma dúvida em relação às atividades que foram propostas.

A seqüência III inicia-se com as mesmas atividades executadas no bloco 1.

Fig. 120

Análise da Atividade A: Ponto médio

Propusemos aos alunos que abrissem o arquivo CUBO e executassem a seguinte atividade:

C*onsidere dois pontos A e B sobre a face frontal paralela ao plano de projeção.*

Trace o segmento AB.

Ache o ponto médio M do segmento AB.

Determine o segmento A'B' onde A' e B' são as projeções dos pontos A e B na outra face paralela ao plano de projeção.

Determine o ponto médio M' do segmento A'B'.

Salve o trabalho.

Descreva como você determinou a projeção A'B' do segmento AB.

Como você determinou o ponto M' projeção do ponto M?

A finalidade desta atividade foi de que os alunos percebessem a conservação do ponto médio em perspectiva cavaleira no ambiente Cabri, tanto na face paralela como na face não paralela ao plano de projeção.

Nesta atividade, esperávamos que os alunos usassem retas fugantes como se fossem raios solares incidindo sobre a face paralela ao plano de projeção e sobre o segmento AB.

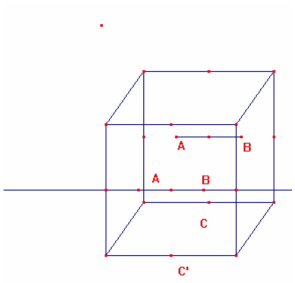
Daremos inicialmente uma visão global do que aconteceu na atividade A:

Comprovação da conservação do ponto médio com Cabri			
O segmento AB está contido num plano paralelo ao plano de projeção			
	G1	G2	G3
Construiu A'	S/C	S/C	S/C
Construiu B'	S/C	S/C	S/C
Construiu M' como ponto médio de A'B'	S/C	N	S/C
Construiu M' como projeção do ponto M	N	S	N
Fez uso do material concreto	S/C	S/C	S/C
S = sim S/C = sim com ajuda N = não			

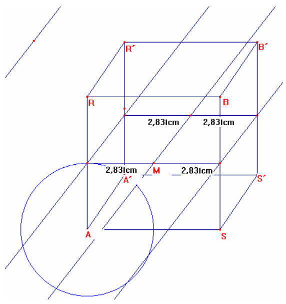
Tab.8

Conforme os resultados da tabela acima, percebemos que os alunos necessitam da ajuda do professor para a construção das projeções de pontos no plano paralelo ao plano de projeção, uma dificuldade que foi prevista na análise a priori. Percebemos também que os alunos precisaram fazer uso do material concreto para retomar as atividades do bloco 1.

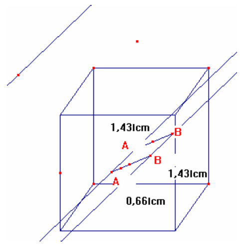
Estas são as soluções encontradas pelos grupos:



Pm1



pm2



pm3

O grupo1 usou a ferramenta Ponto Médio do Cabri para determinar os pontos A, B e M. Os alunos marcaram inicialmente, pontos médios nas arestas verticais da face frontal do cubo (pm1) e por eles traçaram uma reta. Criaram um segmento entre os pontos médios das arestas verticais frontais. Marcaram o ponto médio deste segmento, que é ponto médio da face. Marcaram outros pontos médios entre o ponto médio do segmento e o das arestas verticais. Esses dois pontos médios foram chamados de A e B. Os alunos repetiram o mesmo procedimento para a face posterior do cubo. Construíram M' como ponto médio do segmento A'B'. Não usaram fugantes.

O grupo 2 iniciou a atividade usando os pontos médios nas arestas verticais frontais do cubo. Usaram fugantes para encontrar as projeções dos pontos A, B e M na face posterior do cubo (pm2). Não utilizaram a estratégia esperada na análise a priori, mas o que é interessante aqui é observar é que as alunas usaram as arestas verticais da face posterior para localizar os pontos.

As alunas do grupo 3 tiveram muita dificuldade de fixar o segmento AB na face frontal do cubo, usaram fugantes para achar as projeções dos pontos A, B e M, mas sem o uso de retas verticais (pm3), dificultando a localização dos A' e B' na projeção. Construíram M' como ponto médio de A'B'.

Fizemos algumas intervenções nos três grupos em relação a fixação dos pontos no plano e na projeção destes.

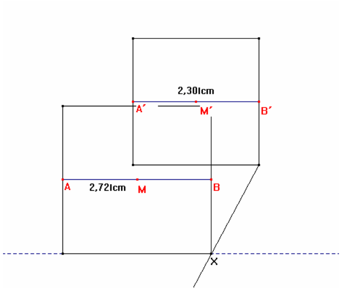
Abaixo resumimos os resultados obtidos nesta atividade no arquivo Plano α:

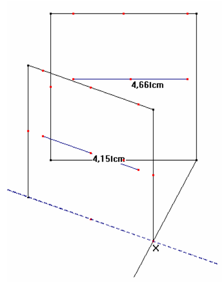
Comprovação da conservação do ponto médio com Cabri			
O segmento AB está contido num plano **não** paralelo ao plano de projeção			
	G1	G2	G3
Construiu A'	S/C	S/C	S/C
Construiu B'	S/C	S/C	S/C
Construiu M' como ponto médio de A'B'	S	N	S
Construiu M' como projeção do ponto M	S	S	N
Fez uso do material concreto	S/C	S/C	S/C
S = sim S/C = sim com ajuda N = não			

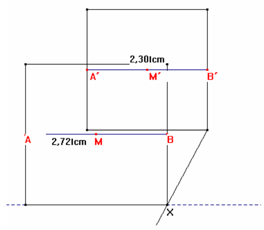
Tab. 9

Percebemos, pelos resultados da tabela acima, que os alunos necessitam de ajuda para construir as projeções dos pontos num plano não paralelo ao plano de projeção e retornar a geometria concreta, bloco 1.

Estas são as soluções encontradas pelos grupos:







pmα1 pmα2 pmα3

Os grupos 1 e 3 usaram a mesma estratégia. Construíram os pontos médios das arestas verticais para construir os segmentos AB e A'B'. Como não usaram fugantes, as medidas dos segmentos AB e sua projeção A'B' não são congruentes, já que a representação dos planos α e β são ligeiramente diferentes. Os alunos foram alertados sobre esta diferença, mas pelo visto foi ineficaz. O ponto M' foi construído como ponto médio do segmento A'B' (pmα1 e pmα3).

O grupo 2 (pmα2) usou a estratégia esperada na análise a priori. O segmento AB conserva sua medida quando o plano α é paralelo ao plano β e quando os dois planos não são paralelos o segmento A'B' não conserva sua medida.

Este grupo percebeu a necessidade das fugantes para a construção da projeção do segmento AB, mas precisei interferir porque perceberam a diferença entre os dois planos α e β, mas não recordavam da atividade do ponto A e sua projeção feita antes do início das atividades deste bloco. Usou fugantes para encontrar as projeções A', B' e M' no plano β.

Comparando as tabelas 7 e 8, percebemos que a maior dificuldade encontrada nesta atividade estava relacionada à construção do segmento A'B', projeção do segmento AB. Neste caso, procuramos fazer com que os alunos recordassem as atividades do cubo, do barbante e da fixação de um ponto na face frontal que descrevemos na análise a priori.

Os alunos não fizeram qualquer relação entre os segmentos AB e A'B' usando apenas a ferramenta distância/comprimento do Cabri. Não usaram o teorema de Tales para justificar que M' é ponto médio de A'B', isso foi previsto já que não estão familiarizados com deduções e provas em geometria, somente com medidas.

O grupo 1, apesar de ter feito conjecturas sobre as sombras no bloco 1, não relacionou com as fugantes no bloco 2, mesmo com a institucionalização feita no bloco 1. Neste caso, o pólo do sabido (enunciado) sobrepõe sobre o pólo do visto, pois os alunos não perceberam as diferenças quando os dois planos estavam paralelos, mesmo usando a ferramenta distância/comprimento do Cabri. Os grupos 2 e 3 usaram as fugantes para fazer as projeções dos pontos A, B e M no cubo, e somente o grupo 2 usou as fugantes no arquivo plano α. Para as alunas do grupo 2 houve um equilíbrio entre os pólos do visto e do sabido. O grupo 3 teve as mesmas dificuldades do grupo 1.

Durante a execução desta atividade no arquivo plano α, fizemos algumas intervenções nos grupos. A atividade foi mais difícil de ser executada nesta seqüência. A construção dos segmentos e das projeções exigiu a interferência da pesquisadora nos grupos. Procuramos lembrar aos alunos das situações no bloco 1, quando manipularam os objetos. Parece-nos aqui que a passagem da geometria concreta para a geometria espaço gráfica e vice-versa é um tanto difícil para os alunos.

Abaixo transcrevemos uma entrevista com o grupo 3 durante a execução dessa atividade no Cabri. O leitor irá perceber que foi necessário retomar a experiência no sol para que os alunos compreendessem a construção no Cabri.

P - *Esse plano é um pouquinho maior que o plano detrás não é?*

Se vocês estão num plano paralelo...

Como você faz a projeção na sombra?

São do mesmo tamanho?

C – *Não.*

P - *Mas se fosse no plano paralelo, se o sol está batendo neste segmento qual é o tamanho do segmento lá atrás?*

J – *Vai ser do mesmo tamanho?*

C - *Depende do sol que está batendo, ou não?*

C - *Se o sol está batendo daqui vai ficar... vai estar mais comprido na sombra.*

P - *Não estou falando da vertical...*

J – *O segmento AB... mesmo tamanho que aqui atrás...*

P – *Se eu estou fazendo as fugantes que são os raios solares passando por esse segmento, AB está na frente. Qual é o tamanho que vai ficar no plano β?*

Vocês acabaram de responder.

J - *Eles são do mesmo tamanho?*

Não, deixa eu arrumar

P - *Qual que vocês vão arrumar?*

C - *Na frente.*

J - *Não*

Não, na sombra.

P - *Você está no real, você mexe na sombra ou no real?*

Percebemos neste diálogo com a pesquisadora que os alunos confundem um pouco a relação entre o objeto e sua sombra. A sombra se move se o objeto se move e não o contrário.

Análise da Atividade B: Conservação das medidas e da razão entre segmentos

A atividade B foi proposta da seguinte maneira:

Mantendo o seu trabalho aberto, apague o ponto M e crie o ponto C no segmento AB e sua projeção C' no segmento A'B'.

Movimente o ponto C sobre o segmento AB.

Observe e compare as diversas posições de C e os segmentos AC e CB e A'C' e C'B' suas respectivas projeções.

Salve o trabalho.

Compare as medidas dos segmentos. O que você conclui?

Quais as razões entre os segmentos AC, CB e A'C' e C'B'?

A finalidade desta atividade foi de que os alunos percebessem que a razão entre os segmentos AC e CB e entre os segmentos A'C' e C'B' é a mesma, e que o segmento AC e seu correspondente na projeção A'C' possuem as mesmas medidas, assim como os segmentos CB e C'B' , ou seja, há conservação da razão entre os segmentos e dos comprimentos.

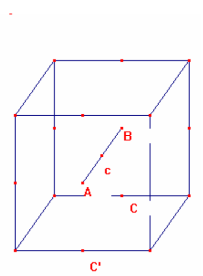
A seguir, resumimos os resultados obtidos nesta atividade no arquivo CUBO, face paralela ao plano de projeção:

Comprovação da conservação das medidas e da razão entre os segmentos			
O segmento AB está contido num plano paralelo ao plano de projeção			
	G1	G2	G3
Construiu A'	S/C	S/C	*
Construiu B'	S/C	S/	*
Construiu C'	S/C	S/C	*
Calculou $\frac{AC}{CB}$	N	N	*
Calculou $\frac{A'C'}{C'B'}$	N	N	*
Perceberam a conservação das medidas dos segmentos	S	S	*
* não há registro S = sim S/C = sim com ajuda N = não			

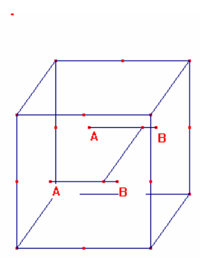
Tab. 10

Percebemos que os alunos necessitam de ajuda para construir as projeções dos segmentos no plano não paralelo ao plano de projeção. Não conseguiram relacionar as medidas e calcular as razões entre os segmentos como havíamos previsto na análise a priori, mas foram capazes de perceber a conservação da medida dos segmentos.

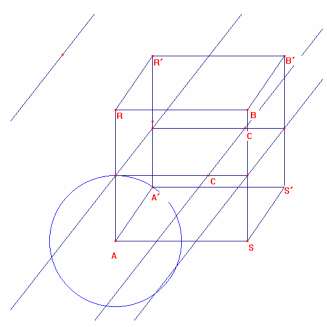
Estas são as soluções encontradas pelos grupos:



Pc1



pc2



pc3

Os alunos do grupo 1 construíram o segmento AB e o ponto C, mas ao movimentarmos o cubo percebemos que o segmento está no interior do cubo (pc1). O grupo 1 refez novamente a atividade (pc2), dessa vez, usando os pontos médios das arestas verticais frontais do cubo, traçaram uma reta e depois o segmento AB. Fizeram o mesmo na face posterior do cubo. Não usaram fugantes para construir as projeções de A' e B'. Usaram um segmento aparentemente paralelo à aresta não paralela ao plano de projeção para localizar o ponto C', que não está nomeado na figura.

A pesquisadora alertou os alunos que precisariam apagar o ponto médio e trocar por um ponto C, porque da forma como fizeram, apenas trocaram o nome do ponto.

O grupo 2 resolveu sua atividade utilizando-se de fugantes para encontrar as projeções A', B' e C', usando como auxiliar as arestas verticais do cubo (pc3).

Não temos o registro desta atividade no cubo para o grupo 3. As alunas, infelizmente, usaram um computador que precisava ser reiniciado várias vezes e essa atividade foi perdida.

Os grupos 1 e 2 não fizeram nenhuma relação com razões entre segmentos, mesmo tendo sido revisto na etapa 1, antes do início das atividades do bloco 1.

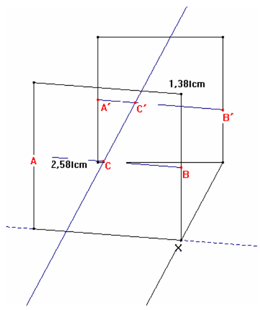
Abaixo resumimos os resultados obtidos desta atividade, no arquivo Plano α, no plano não paralelo ao plano de projeção.

Comprovação somente da conservação da razão entre os segmentos			
O segmento AB está contido num plano **não** paralelo ao plano de projeção			
	G1	G2	G3
Construiu A'	S/C	S/C	S/C
Construiu B'	S/C	S/C	S/C
Construiu C'	S/C	S/C	S/C
Calculou $\frac{AC}{CB}$	N	N	N
Calculou $\frac{A'C'}{C'B'}$	N	N	N
Perceberam a **não** conservação das medidas dos segmentos	S	S	S
S = sim	S/C = sim com ajuda	N = não	

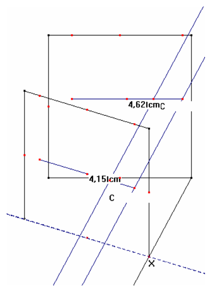
Tab. 11

Conforme a tabela acima, percebemos que os alunos necessitam de ajuda para construir as projeções dos pontos também no plano não paralelo. Não relacionaram as medidas dos segmentos às razões, como já havíamos colocado no plano paralelo, mas perceberam que não há conservação das medidas no plano não paralelo.

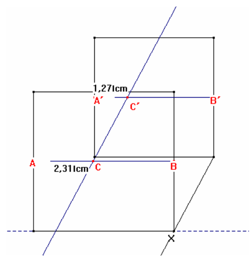
Estas são as soluções encontradas pelos grupos:



Pcα1



pcα2



pcα3

Os grupos 1 e 3 não usaram retas fugantes (pcα1, pcα3), construíram dois segmentos AB e A'B' a partir dos pontos médios das arestas verticais dos planos α e β respectivamente. Usaram fugante apenas para o ponto C', mas não para encontrar as projeções A' e B'. Os alunos não perceberam que a representação do plano α é ligeiramente maior que o do plano β (pólo do visto). Com o uso das retas fugantes teriam percebido a diferença entre os planos e talvez tivéssemos um resultado diferente deste (pólo do sabido).

Os alunos do grupo 1 escreveram "*achamos o ponto médio da aresta, nós achamos os pontos médios dos segmentos, e traçamos duas paralelas, e uma reta paralela à fugante da base B, que passava no centro das paralelas com os segmentos AB".*

Os alunos referem-se às paralelas que são base aos segmentos AB e A'B', mas não fugantes.

O grupo 2 usou retas fugantes para encontrar as projeções A', B' e C' no plano β (pcα2).

As alunas escreveram *"Fizemos um ponto no segmento e com uma paralela achamos o ponto C na outra face".*

O grupo 3 justificou sua construção da seguinte maneira: *"Colocamos um ponto C sobre o segmento AB, depois traçamos uma paralela da fugante para o ponto C. Com isso a paralela se cruzou com o segmento AB de beta e achamos o ponto de intersecção. Quando movimentamos o plano alfa, o ponto C de beta se alterou e o ponto C de alfa se manteve. O ponto que está sobre o segmento AB, não é ponto médio, pois, as medidas dos segmentos AC são diferentes de CB".*

Na primeira frase, percebemos que usaram a fugante para achar a projeção do ponto C no plano β. Na terceira frase, um tanto confusa, supomos que em vez de ponto C seja o segmento A'C' do plano β que se alterou, e o segmento AC no plano α se manteve. Justificaram o ponto C como não sendo ponto médio.

Comparando as tabelas 9 e 10, percebemos que os alunos ainda precisaram da ajuda da professora para construir a projeção dos pontos A, B e C. Esta atividade parece ter sido mais fácil de ser executada no arquivo CUBO, mas os alunos não associam as medidas dos segmentos a razões entre segmentos, mesmo tendo sido retomado na etapa 1. Não nos detivemos nesse conteúdo razões entre segmentos e teorema de Tales por acreditar que foram ensinados no Ensino Fundamental, mas por ser pouco retomado no Ensino Médio pode ter influenciado no resultado desta atividade. Percebemos que os resultados na geometria concreta (G0) permitiram que os alunos buscassem a mesma solução encontrada nas seqüências I e II do bloco 1 para resolver esta atividade no ambiente Cabri, que corresponde à geometria espaço-gráfica (G1).

Análise da Atividade C: Conservação do baricentro

A atividade C foi proposta da seguinte forma:

Construir um triângulo ABC na face frontal paralela ao plano de projeção.

Determine o triângulo A'B'C'. Observe e meça os lados A'B', B'C' e A'C' onde A', B' e C' são respectivas projeções de A, B e C.

Encontre o baricentro H do triângulo ABC.

Encontre o baricentro H' da projeção A'B'C' do triângulo ABC na outra face paralela ao plano de projeção.

Movimente o ponto A observando os triângulos e o baricentro.

Salve o trabalho.

1. *Como você determinou o triângulo A'B'C'? E a projeção H'?*
2. *Que conclusão você tirou em relação à medida dos lados entre os dois triângulos?*
3. *Compare os baricentros. Justifique.*
4. *Movimente o ponto A observando os triângulos e o baricentro, o que conclui?*

O objetivo desta atividade foi de que os alunos tivessem conseguido perceber, no ambiente informático, que há conservação da propriedade do baricentro no plano paralelo ao plano de projeção, mas não das medidas dos lados do triângulo ABC no plano não paralelo.

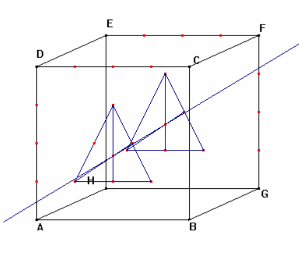
Abaixo resumimos os resultados obtidos nesta atividade no arquivo Cubo, na face paralela ao plano de projeção:

Comprovação da conservação do baricentro H do triângulo ABC com Cabri			
O triângulo ABC está contido num plano paralelo ao plano de projeção			
	G1	G2	G3
Construiu A’	S	S	N
Construiu B’	S	S	N
Construiu C’	S	S	N
Construiu o baricentro H’como intersecção das medianas	N	N	N
Construiu o baricentro H’ por projeção	S	S	N
Concluiu que as medidas dos lados se conservam	S	S	S
S = sim S/C = sim com ajuda		N = não	

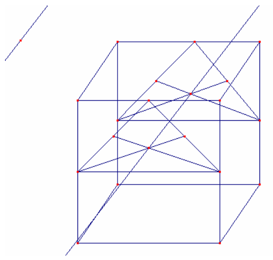
Tab. 12

Conforme a tabela acima, percebemos que os grupos 1 e 2 não necessitaram de ajuda para construir as projeções. Os alunos admitem a conservação das medidas dos lados e do baricentro pelo fato de trabalharmos com o cubo em duas faces paralelas. Já os alunos do grupo 3 tiveram dificuldades mesmo com ajuda e não obtiveram os resultados desejados a não ser para a conservação das medidas dos lados do triângulo.

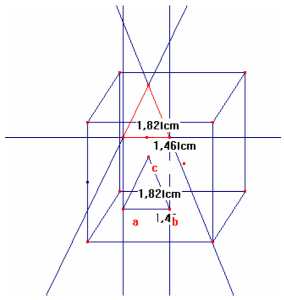
Estas são as soluções encontradas pelos grupos nesta atividade:



baricentro1



baricentro2



baricentro3

O grupo 1 usou vários pontos médios para traçar paralelas, tanto na face frontal, como na face posterior do cubo (baricentro1). Como é um cubo cujas faces possuem as mesmas dimensões, a estratégia usada pelos alunos é uma boa alternativa para a execução da atividade. Usaram fugantes para encontrar os vértices do triângulo, pontos médios e uma fugante para encontrar e o baricentro.

Os alunos escreveram *“Traçamos a fugante e em seguida traçamos a paralela da mesma. Logo encontramos a sua projeção. Traçamos os pontos médios, criamos o triângulo e achamos a sua projeção”.*

O grupo 2 usou uma estratégia diferente do grupo 1 e não esperada pela pesquisadora. As alunas usaram os pontos médios e traçaram os lados do triângulo tanto na face frontal como na face posterior do cubo (baricentro2), pontos médios, medianas para determinar o baricentro e uma fugante apenas para determinar o baricentro na projeção.

As alunas escreveram *"Achamos o ponto médio de cada aresta da face. Fizemos um triângulo e achamos o baricentro tirando o ponto médio do triângulo. Utilizamos as paralelas e achamos o baricentro na outra face. Com a fugante passando no centro dos baricentros, concluímos que são paralelos"*.

Supomos que o grupo 2 quis dizer que são paralelos, mas, na verdade, a fugante que as alunas criaram serviu para provar que o baricentro da face posterior é projeção do baricentro da face frontal.

O grupo 3 teve muita dificuldade para construir o triângulo ABC. Movimentando o cubo (baricentro3), percebemos que o triângulo ABC não está fixo na face frontal e nem sua projeção em vermelho na face posterior do cubo. Percebemos que as alunas não usaram nenhuma fugante para traçar o triângulo em vermelho. Nessa atividade fica evidente o pólo do sabido sobrepondo o pólo do visto, já que perceptivamente os triângulos sejam congruentes, mas o triângulo vermelho não é projeção do triângulo azul. Não construíram o baricentro H e sua projeção H'.

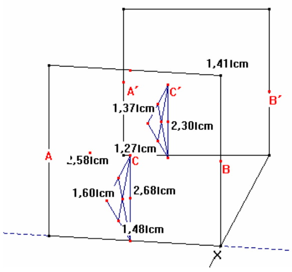
Abaixo os resultados dessa atividade para o arquivo plano α, plano não paralelo:

Comprovação da conservação do baricentro H do triângulo ABC com Cabri			
O triângulo ABC está contido num plano **não** paralelo ao plano de projeção			
	G1	G2	G3
Construiu A'	S/C	S/C	S/C
Construiu B'	S/C	S/C	S/C
Construiu C'	S/C	S/C	S/C
Construiu o baricentro H'como intersecção das medianas do triângulo A'B'C'	S	N	N
Construiu o baricentro H' como projeção de H	N	S	S
Concluiu que as medidas dos lados **não** se conservam	S	N	N
S = sim S/C = sim com ajuda N = não			

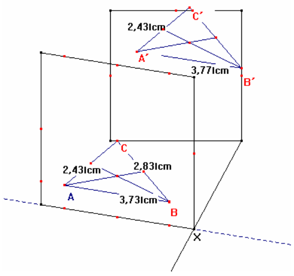
Tab. 13

Percebemos na tabela que, apesar da ajuda, os alunos não perceberam que não há conservação da medida dos lados no plano não paralelo devido a erros na construção da projeção do triângulo. Há uma dificuldade maior de executar a atividade no plano não paralelo.

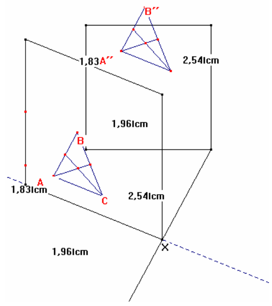
Estas são as soluções encontradas pelos grupos:



baricentroα1



baricentroα2



baricentroα3

O grupo 1 (baricentroα1) usou apenas uma fugante para construir a projeção dos vértices A e C no plano β. Para construir a projeção do triângulo ABC no plano β, usaram paralelas aos lados desse triângulo no plano β. Construíram os baricentros H e H' a partir das medianas dos triângulos ABC e A'B'C'.

O grupo 2 usou a mesma estratégia do grupo 1 (baricentroα2), usou paralelas aos lados do triângulo ABC no plano β para fazer sua projeção, não permitindo que o triângulo A'B'C' modificasse suas dimensões quando o eixo x é movimentado. Se as alunas tivessem utilizado retas verticais, como foi explicado na página 70, para localizar os pontos na projeção o triângulo A'B'C' modificaria suas dimensões como acontece na presença de raios solares. Neste caso há um erro de construção e que leva a conclusões errôneas apesar do uso de fugantes.

As alunas do grupo 3 conseguiram fixar o triângulo ABC no plano α (baricentroα3), usaram fugantes para encontrar as projeções dos vértices no plano β. Usaram o mesmo procedimento que o grupo 2, usaram paralelas aos lados do triângulo ABC na projeção, impedindo que o triângulo A'B'C' modificasse quando movimentamos o eixo x.

Os grupos 2 e 3 usaram a reta fugante para construir a projeção do baricentro H.

Comparando os resultados das tabelas 11 e 12, percebemos que há ainda a necessidade da ajuda do professor para construir as projeções dos pontos A, B e C no plano β.

Os alunos criaram suas próprias estratégias, tiveram muitas dificuldades na construção da projeção do triângulo ABC. A construção do baricentro não trouxe grandes dificuldades já que foi trabalhada anteriormente no bloco 1.

Percebemos, nesta atividade, que um erro de construção (pólo do visto) leva a uma falsa conclusão (pólo do sabido). No bloco 1, trabalhamos com o triângulo ABC e o baricentro concretamente (G0) e vimos o comportamento de sua sombra, tanto na face paralela, como na face não paralela ao plano de projeção, mas os alunos não levaram em conta os resultados obtidos em G0 para resolver esta atividade em G1. Tanto para o plano α, como para o plano β, as medidas se conservaram nas duas situações, planos paralelos e não paralelos.

As medidas dos lados foram encontradas, mas não há registros dos alunos comparando as medidas dos segmentos nos dois planos. Parece-nos que os grupos 2 e 3 consideraram a atividade como correta porque foi gravado desta forma.

Como prevíamos os alunos não perceberam nenhuma relação entre os planos e os planos implícitos nas figuras construídas, mas algumas conjecturas, através de tentativas de construção do triângulo e sua projeção usando as regras da perspectiva cavaleira foram percebidas.

No ambiente informático, os alunos já percebem a conservação do baricentro, tanto no plano paralelo como não paralelo, mas como os alunos ainda têm dificuldades na construção das figuras, a não conservação das medidas no plano não paralelo não pode ser verificada. Segundo Chaachoua (1998), este ambiente possibilita uma aprendizagem além daquela do papel e lápis, mas acredito que é preciso instrumentar melhor os alunos para que a propriedade da conservação de medidas seja aprendida.

Análise da atividade D: Paralelismo entre dois segmentos

Propusemos a atividade da seguinte forma:

Construa dois segmentos AB e MN paralelos sobre a face frontal paralela ao plano de projeção. Determine os segmentos A'B' e M'N' correspondentes às suas projeções sobre a outra face paralela ao plano de projeção.

Salve o trabalho.

Como você determinou essas projeções? Mantém o paralelismo? Justifique.

A finalidade desta atividade foi que os alunos verificassem que há conservação do paralelismo entre os segmentos A'B' e M'N' tanto na face paralela como na face não paralela ao plano de projeção no ambiente Cabri.

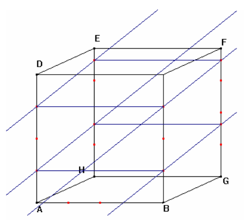
Abaixo resumimos os resultados dessa atividade no arquivo Cubo, na face paralela:

Comprovação do paralelismo com Cabri			
Segmentos AB e MN contidos num plano paralelo ao plano de projeção			
	G1	G2	G3
Construiu A'B'	S	S	S
Construiu M'N'	S	S	S
Verificou o paralelismo com Cabri	S	S	S
Verificou o paralelismo visualmente	N	N	N
S = sim S/C = sim com ajuda N = não			

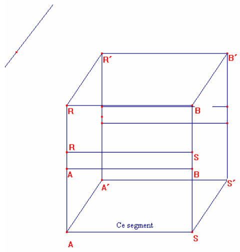
Tab. 14

Percebemos que as construções no cubo não necessitam de ajuda e o paralelismo foi verificado com o uso das ferramentas do Cabri.

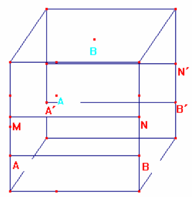
Estas são as soluções encontradas pelos grupos:



pp1



pp2



pp3

O grupo 1 usou sua estratégia dos pontos médios para construir as retas paralelas na face frontal e posterior do cubo (pp1). Usaram fugantes para construir as projeções das paralelas da face frontal.

Os alunos escreveram *"Traçamos a fugante e, em seguida, traçamos a paralela das mesmas, logo encontramos a sua projeção*".

O grupo 2 executou a atividade criando dois segmentos paralelos AB e MN na face frontal do cubo (pp2), usaram as fugantes e traçaram suas projeções da face posterior.

As alunas escreveram: *"Colocamos dois segmentos na frente e depois usamos a paralela em relação à fugante. Elas se cruzaram e passamos o segmento".*

O grupo 3 resolveu a atividade usando a mesma estratégia do grupo 2. As alunas usaram fugantes e as arestas verticais da face posterior do cubo (pp3) para localizar os pontos A', B', M' e N'.

A verificação do paralelismo nos três grupos se dá pelo uso de paralelas na construção dos segmentos AB e MN e suas projeções.

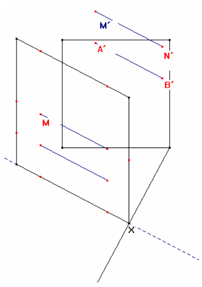
Abaixo resumimos os resultados para esta atividade no arquivo plano α, plano não paralelo:

Comprovação do paralelismo com Cabri			
Segmentos AB e MN contidos num plano **não** paralelo ao plano de projeção			
	G1	G2	G3
Construiu A'B'	*	S/C	S/C
Construiu M'N'	*	S/C	S/C
Verificou o paralelismo com Cabri	*	S	S
Verificou o paralelismo visualmente	*	N	N
* não há registro S = sim S/C = sim com ajuda N = não			

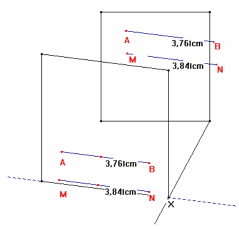
Tab. 15

Considerando os resultados da tabela, percebemos que no plano não paralelo os alunos necessitam de ajuda para construir as projeções dos segmentos. O paralelismo foi verificado através do uso das ferramentas do Cabri.

Estas são as soluções encontradas pelos grupos:



ppα1



ppα2

Não temos os registros dessa atividade no plano α para o grupo 1. É possível que tenham tido problemas para salvar o trabalho, ou não fizeram a atividade.

Os grupos 2 e 3 usaram retas paralelas para construir os segmentos AB e MN e fugantes para construir as projeções no plano β (ppα1, ppα2). As alunas do grupo 3 não usaram retas verticais auxiliares para localizar corretamente a projeção dos pontos A, B, M e N. Fixaram as medidas das projeções A'B' e M'N' porque foram criadas a partir de retas paralelas aos segmentos do plano α. As medidas dos segmentos no plano β deveriam ter modificado à medida que o eixo x era movimentado. Há um erro de construção. Somente os pontos deveriam ter sido projetados sem criar paralelas aos segmentos do plano α. Essa construção pode provocar dúvidas e ir de encontro aos resultados obtidos na seqüência II no bloco 1, quando os alunos colocaram os objetos na face não paralela e, nessa seqüência, tinham percebido que as medidas se alteravam, sendo que o mesmo deveria ter ocorrido no ambiente Cabri.

A verificação do paralelismo se deu pelo fato das alunas usarem retas paralelas para criarem seus segmentos.

Em entrevista, o grupo 3 referiu-se à atividade comparando com aquela que foi executada no bloco 1, na presença dos raios solares.

C – *A gente fez uma reta paralela ao eixo x e outra reta paralela.*

A gente traçou o segmento AB sobre essa paralela e o segmento MN.

Aí depois a gente traçou para fazer a sombra. A gente traçou paralelas as fugantes.

K - *Como se fosse em direção ao sol.*

Depois passamos os segmentos determinamos. Usamos o ponto de intersecção.

G - *E as retas se movimentam junto com o plano.*

P – *E as medidas?*

G - *E as medidas se mantêm.*

P - *Primeiro vocês devem verificar no paralelo*

E no não paralelo?

K - *As medidas se alteram.*

Comparando os resultados das tabelas 13 e 14, percebemos que os alunos usam as fugantes para localizar as projeções A', B', M' e N'. O paralelismo é verificado com o uso das retas paralelas no ambiente Cabri. Não existe mais dificuldade de fixar os segmentos na face frontal do cubo e no plano α, mas é difícil para os alunos localizarem as projeções sem o auxílio de retas verticais e as fugantes.

Os alunos intuitivamente usam o paralelismo quando dois planos estão paralelos, mas as medidas modificam no plano não paralelo e isso é difícil de ser construído no ambiente Cabri se não relacioná-los às fugantes.

Era de se esperar um comportamento mais simples dos alunos, fazendo uso de fugantes, comparação de medidas na justificação de suas construções já que a justificativa apresentada na análise a priori é complexa para o nível de ensino encontrado no ensino médio das escolas públicas.

Notamos um avanço nas construções no ambiente Cabri. Percebemos que nesta atividade, os alunos conseguiram aproximar os resultados obtidos em G0 (geometria concreta) e a propriedade aprendida no ambiente informático.

Análise da atividade E: Conservação das medidas dos ângulos

Propusemos a seguinte atividade:

Construa dois segmentos concorrentes entre si AB e RS sobre a face frontal paralela ao plano de projeção.

Construa os segmentos A'B' e R'S' respectivas projeções de AB e RS sobre a outra face paralela ao plano de projeção.

Salve o trabalho.

1. *Como você determinou as projeções?*
2. *O cruzamento é mantido? Justifique.*
3. *Compare o ângulo formado entre os segmentos AB e RS e A'B' e R'S'. Justifique.*

O objetivo desta atividade foi de que os alunos percebessem que há conservação do ângulo somente no plano paralelo, mas há conservação do ponto de intersecção entre os segmentos AB e RS tanto no plano paralelo como no plano não paralelo.

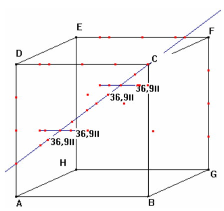
Abaixo resumimos os resultados obtidos nesta atividade no arquivo Cubo, na face paralela ao plano de projeção:

Conservação do ângulo com Cabri			
As retas concorrentes AB e RS estão contidas num plano paralelo ao plano de projeção			
	G1	G2	G3
Construiu A'B'	S	*	S
Construiu R'S'	S	*	S
Mediu o ângulo $S\hat{C}R$ com Cabri	N	*	N
Mediu o ângulo $S'\hat{C}'R'$ com Cabri	N	*	N
* não há registro S = sim S/C = sim com ajuda N = não			

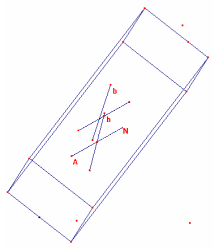
Tab. 16

Percebemos que os alunos não necessitam de ajuda no plano paralelo para construir as projeções dos segmentos. Não mediram os ângulos com o Cabri.

Estas são as soluções encontradas pelos grupos:



Cc1



cc2

O grupo 1 usou a estratégia dos pontos médios (cc1), traçou retas paralelas e cruzou segmentos.

Os alunos escreveram *"Traçamos as concorrentes usando as paralelas e fizemos* *suas projeções utilizando os mesmos princípios".*

Não temos esta atividade gravada em disquetes para o cubo do grupo 2, apenas no plano α.

As alunas do grupo 3 conseguiram fixar os segmentos secantes na face frontal do paralelepípedo (cc2), erros de construção do cubo já mencionados no início da análise do bloco 2, usaram fugantes para encontrar a projeção desses segmentos, não usaram as retas verticais paralelas às arestas, mas paralelas aos segmentos da face frontal.

Os grupos 1 e 3 não mediram os ângulos $S\hat{C}R$ e $S'\hat{C}'R'$ com o Cabri.

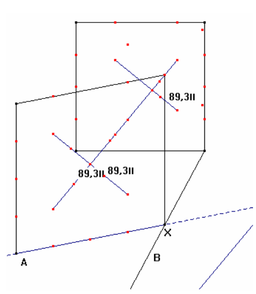
Abaixo resumimos os resultados desta atividade no arquivo plano α, plano não paralelo ao plano de projeção:

Não conservação do ângulo com Cabri			
As retas concorrentes AB e RS estão contidas num plano **não** paralelo ao plano de projeção			
	G1	G2	G3
Construiu A'B'	S	S	S
Construiu R'S'	S	S	S
Mediu o ângulo $S\hat{C}R$ com Cabri	S/C	S/C	S/C
Mediu o ângulo $S'\hat{C}'R'$ com Cabri	S/C	S/C	S/C
S = sim S/C = sim com ajuda N = não			

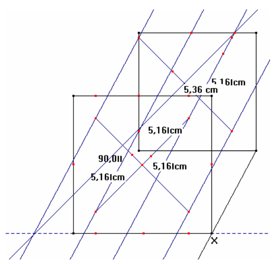
Tab. 17

Percebemos por esta tabela que os alunos necessitam de ajuda para medir o ângulo com o Cabri, uma dificuldade que foi prevista na análise a priori.

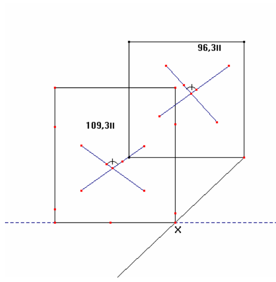
Estas são as soluções encontradas pelos alunos:



Ccα1



ccα2



ccα3

O grupo 1 usou a mesma estratégia dos pontos médios (ccα1).

Os alunos escreveram *"utilizando os pontos médios e a fugante achamos a projeção das concorrentes e percebemos que o tamanho muda mas o ângulo continua o mesmo".*

Os alunos não fizeram uso das fugantes para encontrar as projeções dos segmentos secantes, o ângulo tem uma ligeira modificação quando movimentamos o eixo x. A construção é incorreta porque usaram paralelas aos segmentos do plano α no plano β.

Percebemos que as alunas do grupo 2 usaram as diagonais do plano α para construir os segmentos secantes e fugantes para construir as projeções no plano β (ccα2). Usaram paralelas aos segmentos do plano α e β impedindo que os segmentos do plano β modificassem de tamanho quando o eixo x é movimentado, como aconteceu no bloco 1, na seqüência II no plano não paralelo ao plano de projeção.

O grupo 3 fixou os segmentos secantes e traçou fugantes para criar suas projeções (ccα3), mas não usaram retas verticais para localizar os pontos corretamente, consequentemente as dimensões dessas projeções não são as mesmas nem os ângulos serão correspondentes aos do plano α quando este está paralelo ao plano β.

Comparando as tabelas 15 e 16, percebemos que os alunos constroem as projeções A'B' e R'S' sem a ajuda do professor.

Com a movimentação dos segmentos os alunos não perceberam modificações no ângulo, na intersecção e nos comprimentos dos segmentos na projeção pelos erros de construção. O uso de retas verticais para a localização dos pontos no plano β foi uma dificuldade evidente nos três grupos. Para medir o ângulo no Cabri exigiu certa habilidade por parte dos alunos. Foi necessário fazer algumas intervenções retomando o bloco 1, relacionando os raios solares e as fugantes no Cabri e auxiliá-los com a ferramenta ângulo. Procuramos retomar a geometria concreta, no bloco 1 para que os alunos relacionassem com os resultados a serem obtidos no ambiente Cabri (G1–geometria espaço-gráfica).

Os estudantes fizeram uso do Cabri medindo e comparando os segmentos AB e RS no plano α e suas projeções A'B' e R'S' no plano β quando movimentaram a reta x sob o plano α. Também compararam as medidas dos ângulos $S\hat{C}B$ e $S'\hat{C}B'$.

Os alunos não conseguiram perceber os planos γ e δ que explicamos na análise a priori, mas os alunos utilizaram alguns elementos da perspectiva cavaleira na construção da projeção, principalmente fugantes e a conservação do ponto médio, uma de suas propriedades. Não souberam, no entanto, trazer para a seqüência IV, no plano α, as propriedades encontradas na seqüência II do bloco 1, a não conservação das medidas e dos ângulos.

A propriedade da perspectiva cavaleira: conservação das medidas dos ângulos foi parcialmente apropriada pelos alunos no ambiente Cabri porque faltou habilidade no uso dos recursos do Cabri.

Conclusão das atividades do bloco 2

Concluímos que as atividades no cubo foram mais fáceis de serem executadas, com estratégias não esperadas, mas interessantes e possíveis que não interferiram no resultado da seqüência. No plano paralelo é mais fácil para o aluno perceber as propriedades da perspectiva cavaleira. No plano α, as dificuldades foram bem maiores, um dos motivos para isso foi que a representação do plano α era ligeiramente maior que o do plano β, confundindo os alunos. Eles repetem as estratégias usadas no cubo para os planos, e os resultados não poderiam ser corretos. Se os alunos tivessem feito uso das retas fugantes os resultados no plano α poderiam ser outros para os grupos 1 e 3. Seriam necessárias algumas sessões para que percebessem a importância de paralelas verticais para localizar pontos na projeção. Os alunos usaram alguns elementos que fazem parte da perspectiva cavaleira, fugantes, paralelas e a conservação do ponto médio.

Os grupos refizeram muitas das atividades acima, algumas com 500 arquivos registrados da mesma atividade, isso significa que os alunos buscavam a melhor solução e percebemos que, à medida que executavam as atividades, fixavam melhor os pontos, segmentos nos planos, um bom momento para aprendizagem diferente do papel e lápis (Chaachoua, 1998).

Também percebemos que há muita dificuldade na passagem da geometria concreta (G0) para a espaço-gráfica (G1) e que os resultados obtidos em G0 influenciam os resultados em G1. Em muitos momentos, percebemos o sabido sobrepondo ao percebido (ponto médio, razão entre segmentos, baricentro). As atividades foram executadas de acordo com o enunciado (pólo do sabido), mas ao movimentarmos os objetos percebíamos o erro (pólo do percebido) que Parzysz (2001), uma contaminação do sabido sobre o percebido.

4.5 Análise das observações do bloco 3 - Problemas

O bloco 3 foi concebido para investigar quais as regras da perspectiva cavaleira estabelecidas na interação entre os blocos 1 e 2 foram utilizadas como ferramenta na resolução de problemas de geometria espacial.

1. Construção de um losango em perspectiva cavaleira a partir de um retângulo

A atividade foi proposta da seguinte forma:

Construa um retângulo ABCD perpendicular ao plano de projeção (parede ou chão) e sendo o lado AB paralelo ao plano de projeção.

Construa sua projeção no plano paralelo usando um coeficiente de redução 0,5.

Construa um losango MNOP a partir dos pontos médios do retângulo e a seguir a sua projeção M'N'O'P' sobre a projeção A'B'C'D' do retângulo.

Explique e justifique a sua construção.

A finalidade desta atividade foi de que os alunos utilizassem a definição e as propriedades da perspectiva cavaleira, tanto para construir o retângulo como o losango. Foi uma atividade direcionada, onde os alunos puderam mobilizar os conceitos de coeficiente de redução, de retas fugantes, de paralelismo e de pontos médios.

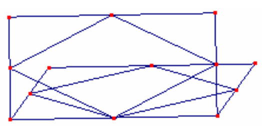
Abaixo, resumimos os resultados desta atividade:

Propriedades da perspectiva cavaleira utilizadas na construção de um losango			
	G1	G2	G3
Coeficiente de redução	P	S	S
Ponto médio	S	S	S
Fugantes	S	S	S
Circunferência (como compasso)	S	S	S
Paralelas	S	S	S
S = sim N = não	P = Parcialmente		

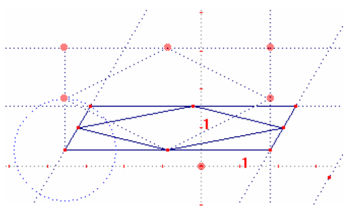
Tab. 18

Percebemos que os alunos ainda têm alguma dificuldade no uso coeficiente de redução, mas usaram as propriedades da perspectiva cavaleira para construir o losango, como as fugantes, conservação do ponto médio.

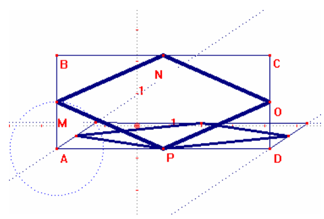
Estas são as soluções encontradas nesta atividade pelos grupos:



R1



R2



R3

O grupo 1 usou um coeficiente de redução diferente do que foi pedido na atividade. Os alunos não estabeleceram uma relação entre a circunferência e o transporte da medida do segmento para a fugante, que corresponde ao transporte de medidas feita pelo compasso.

Os grupos 2 e 3 já utilizaram a circunferência para transportar a medida do segmento para a fugante (R2, R3).

O grupo 2 explicou a construção da seguinte forma: *"Fizemos um retângulo ABCD e com seus pontos médios construímos um losango. Usamos uma fugante e suas paralelas para poder fazer sua projeção deitada com a ajuda do coeficiente de redução para formar a sombra, daí a projeção"*.

O que é interessante na frase das alunas é sua "*projeção deitada*", demonstrando que as alunas percebem um plano diferente do plano do retângulo perpendicular ao plano de projeção que é a folha de papel. O sabido e o percebido estão equilibrados aqui.

As alunas não registraram sua atividade no questionário, mas colhemos suas idéias em entrevista que transcrevemos abaixo:

C - *O retângulo que a gente usou foi o polígono, a gente construiu depois a gente usou o coeficiente de redução, achou o ponto médio, o retângulo, aí depois uma circunferência do ponto A até o coeficiente de redução, aí pegamos uma reta, que são paralelas fugantes.*

Depois a gente pegou o ponto médio.

A gente traçou a fugante pelo ponto A, depois a gente achou o ponto médio do coeficiente e traçamos uma reta. Depois a gente fez uma paralela a fugante pelo ponto B e formar a sombra do retângulo.

Depois achamos os pontos médios do lado do retângulo para fazer o losango. Esse retângulo é o mesmo que o primeiro igual.

Qual é o nome dele?... Tortinho... paralelogramo.

Concluímos que os alunos têm certa dificuldade para trabalhar com o coeficiente de redução e as alunas manifestaram essa dificuldade em uma entrevista final.

Percebemos que a geometria concreta (G0) e a geometria espaço-gráfica (G1) permitiram a apropriação de regras da perspectiva cavaleira (G2) para esta atividade.

2. Construção de uma pirâmide reta cuja base é um triângulo equilátero

A atividade foi proposta da seguinte forma:

Construa um triângulo equilátero ABC perpendicular ao plano de projeção (parede ou chão) e sendo o lado AB paralelo ao plano de projeção.

Construa sua projeção no plano paralelo usando um coeficiente de redução 0,5.

Construa o baricentro do triângulo A'B'C' projeção de ABC.

A seguir construa uma pirâmide regular tendo como base esse triângulo.

A finalidade desta atividade é verificar se os alunos usam as propriedades levantadas nas seqüências anteriores: paralelismo, conservação do baricentro, conservação dos pontos médios e os elementos para a construção desta pirâmide em perspectiva cavaleira: coeficiente de redução, o uso de uma perpendicular e fugantes.

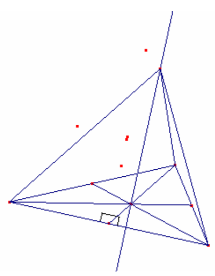
Abaixo, resumimos os resultados desta atividade:

Propriedades da perspectiva cavaleira utilizadas na construção de uma pirâmide reta de base triangular			
	G1	G2	G3
Coeficiente de redução	S	S	P
Ponto médio	S	S	S
Fugantes	S	S	S
Circunferência (como compasso)	S	S	S
Paralelas	S	S	S
Altura do triângulo	S	S	N
Baricentro	S	S	S
Altura da pirâmide Perpendicular pelo baricentro	S	N	N
S = sim	N = não	P = Parcialmente	

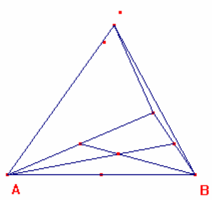
Tab. 19

De acordo com os resultados da tabela acima, percebemos que os alunos usam as propriedades da perspectiva cavaleira para a construção da pirâmide: fugantes, conservação do ponto médio, conservação do baricentro. Os alunos têm dificuldades com relação ao uso da circunferência e do coeficiente de redução e também da necessidade do uso da perpendicular para construir a altura da pirâmide pelo baricentro.

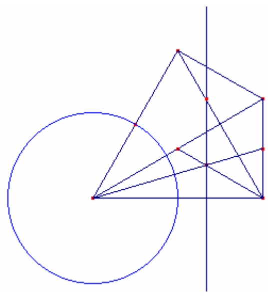
Estas são as soluções encontradas pelos grupos:



Pt1



Pt2



Pt3

Os alunos criaram o triângulo equilátero através da ferramenta polígono regular do Cabri.

O grupo 1, nesta atividade, usou corretamente a circunferência (função do compasso) para transferir a metade da altura do triângulo para a fugante (Pt1). Percebemos que os alunos traçam uma perpendicular pelo baricentro e constroem a altura da pirâmide como foi pedido no enunciado. A pirâmide Pt1 está em posição diversa da que foi pedida pela atividade porque foi movimentada para verificar se suas propriedades permaneciam em outra posição e gravada em arquivo desta forma.

O grupo 2 não teve dificuldade no uso da circunferência para transferir a metade da altura do triângulo na fugante (Pt2), mas não conseguiu criar a altura da pirâmide, não percebeu que era necessário traçar uma perpendicular pelo baricentro do triângulo em perspectiva cavaleira.

O grupo 3 usou um coeficiente de redução diferente do que foi pedido (Pt3), marcou os pontos médios das arestas do triângulo, não paralelas ao plano de projeção, traçou uma fugante. Uma circunferência e uma perpendicular foram traçadas, mas não tiveram função na construção.

Os grupos 1 e 2 usaram as propriedades levantadas nas seqüências anteriores: paralelismo, conservação do baricentro, conservação dos pontos médios e os elementos para a construção em perspectiva cavaleira: coeficiente de redução e fugantes.

A pesquisadora interveio nas atividades dos grupos 2 e 3 para que percebessem a necessidade de construir a altura pelo baricentro comparando com o sólido à vista.

Percebemos que é dificil a passagem de G0 – geometria concreta (3D) para G1 – geometria espaço-gráfica (2D) para alguns alunos porque não criaram uma perpendicular para construir a altura da pirâmide.

3. Construção de uma pirâmide reta de base quadrada

Propusemos a atividade da seguinte forma:

Construa uma pirâmide de base quadrada usando propriedades da perspectiva cavaleira. A base da pirâmide está contida num plano perpendicular ao plano de projeção e é paralela ao plano horizontal.

A finalidade da atividade era a utilização das propriedades da perspectiva cavaleira que foram levantadas nas seqüências anteriores.

Abaixo resumimos os resultados desta atividade:

Propriedades da perspectiva cavaleira utilizadas na construção de uma pirâmide reta de base quadrada			
	G1	G2	G3
Coeficiente de redução	P	N	P
Ponto médio	S	N	S
Fugantes	S	N	S
Circunferência (como compasso)	N	N	N
Paralelas	S	N	S
Altura da pirâmide perpendicular pelo ponto médio	S	N	S
S = sim N = não P = Parcialmente			

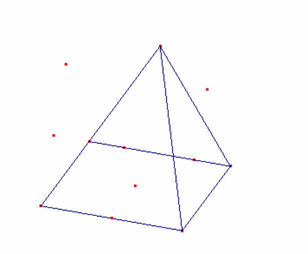
Tab. 20

Analisando a tabela acima, percebemos o uso das propriedades da perspectiva cavaleira com exceção do grupo 2. O coeficiente de redução, a circunferência (como compasso), e uma perpendicular para construir a altura da pirâmide continuam sendo dificuldades para os alunos.

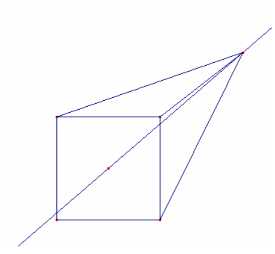
Analisando a tabela acima, percebemos que os alunos usaram propriedades da perspectiva cavaleira como fugantes, coeficiente de redução, conservação do ponto médio.

Eles têm dificuldades no uso da circunferência como compasso, e, consequentemente o coeficiente de redução 0,5, dificuldade de perceber a necessidade de uma perpendicular pelo ponto médio do quadrado.

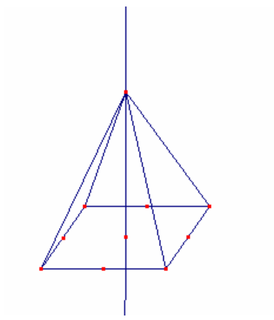
Estas foram as soluções encontradas pelos alunos:



pq1



pq2



pq3

O grupo 1 construiu o quadrado em perspectiva cavaleira utilizando-se de um coeficiente de redução aleatório, usou o ponto médio do quadrado paralelo ao plano de projeção apenas para criar uma reta. Usou fugantes e uma perpendicular pelo baricentro para traçar a altura da pirâmide (pq1).

O grupo 2 construiu uma pirâmide sem utilizar nenhuma propriedade da perspectiva cavaleira. O quadrado foi construído a partir da ferramenta polígono regular do

Cabri. Pelo ponto médio do quadrado paralelo ao plano de projeção criaram uma reta e, nessa reta, colocaram um ponto e depois traçaram as arestas da pirâmide. Ao movimentarmos a pirâmide por um dos vértices, houve deformação da figura (pq2). Parece-nos um retrocesso na atividade.

O grupo 3 construiu o quadrado em perspectiva cavaleira, mas a circunferência traçada não tem função de transferir a medida do raio da circunferência na fugante. Fez uso da perpendicular no baricentro. Criou a altura e construiu a pirâmide.

A maior dificuldade que os alunos encontraram foi no uso do coeficiente de redução 0,5. Durante a execução da atividade, pedimos aos alunos que comparassem o sólido (G0-geometria concreta) à vista e percebessem a altura existente e a relacionassem com a figura construída no Cabri (G1-geometria espaço-gráfica).

4. Construção de um prisma reto cuja base é um triângulo equilátero

Propusemos esta atividade da seguinte forma:

Construa um prisma de base triangular usando propriedades da perspectiva cavaleira. A base do prisma deverá ser perpendicular ao plano de projeção e paralela ao plano horizontal.

Nessa atividade, esperávamos que os alunos conseguissem fazer essa construção usando propriedades da perspectiva cavaleira, principalmente o paralelismo entre as retas. Aqui, a dificuldade em perceber a necessidade de uma reta perpendicular ao lado A'B' do triângulo A'B'C' para construir o prisma foi superada.

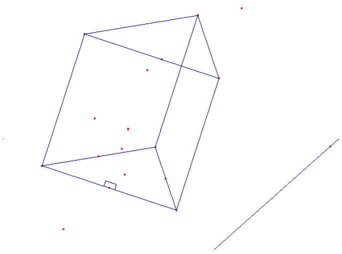
Abaixo, resumimos os resultados desta atividade:

Tab. 21

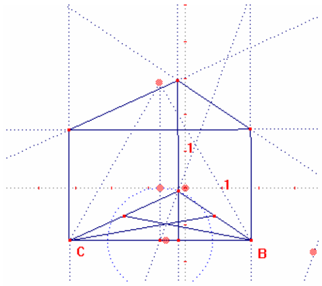
Propriedades da perspectiva cavaleira utilizadas na construção do prisma reto de base triangular			
	G1	G2	G3
Coeficiente de redução	S	S	P
Ponto médio	S	S	S
Fugantes	S	S	S
Circunferência (como compasso)	S	S	N
Paralelas	S	S	S
Altura do triângulo	S	S	N
Baricentro	S	S	S
Altura do prisma Perpendicular pelo vértice	S	S	S
S = sim N = não P = Parcialmente			

Na tabela acima, percebemos o uso das propriedades da perspectiva cavaleira, mas ainda com dificuldades no uso do coeficiente de redução 0,5 e da circunferência como compasso. Nesta atividade, os alunos perceberam a necessidade da perpendicular para construir a altura do prisma.

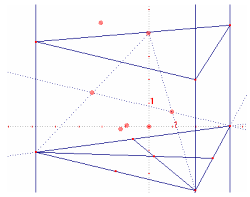
Estas são as soluções encontradas pelos grupos:



Prq1



Prq2



Prq3

O grupo 1 usou corretamente o coeficiente de redução 0,5 (prq1), fugantes e perpendiculares para a construção do prisma. A figura prq1 não está com uma das arestas da base paralela ao plano de projeção porque os alunos movimentaram o prisma para verificar a conservação de suas propriedades. Os alunos gravaram o trabalho nesta posição.

O grupo 2 não teve dificuldade de criar uma perpendicular para traçar a altura do prisma (Prq2) como teve na construção da pirâmide de base triangular. As alunas escreveram *"a partir do triângulo achamos sua base deitada e fizemos o baricentro utilizando as retas perpendiculares e as paralelas e levantamos o prisma"*. Nesta frase, as alunas já visualizam a figura em 3D como era esperado. O visto e o sabido estão em equilíbrio.

O grupo 3 usou a mesma base triangular da pirâmide para construir este prisma (Prq3). O triângulo equilátero em perspectiva cavaleira tem coeficiente de redução diferente do que foi pedido.

Nesta atividade, a geometria concreta (G0) se relaciona com a geometria espaço-gráfica (G1) porque já foi compreendida a figura 3D no plano. Percebemos que os alunos ainda têm dificuldade em relação ao coeficiente de redução e ao uso da circunferência com função de compasso para transportar as medidas.

5. Construção de um prisma reto de base quadrada

A atividade foi proposta da seguinte forma:

Construa um prisma de base quadrada usando propriedades da perspectiva cavaleira.

A base do prisma deverá estar contida num plano perpendicular ao plano de projeção e paralelo ao plano horizontal.

Nesta atividade, esperávamos que os alunos conseguissem construir esta figura que foi muito utilizada na seqüência I e II do bloco 1.

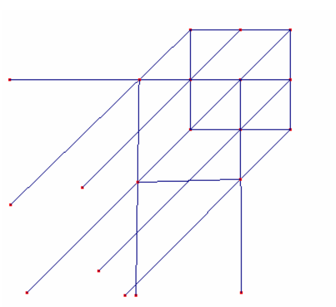
Abaixo, resumimos os resultados desta atividade:

Propriedades da perspectiva cavaleira utilizadas na construção do prisma de base quadrada			
	G1	G2	G3
Coeficiente de redução	P	P	P
Ponto médio	S	S	S
Fugantes	N	S	N
Circunferência (como compasso)	N	N	N
Paralelas	S	S	S
Segmentos visualmente 'paralelos'	S	S	S
S = sim N = não P = Parcialmente			

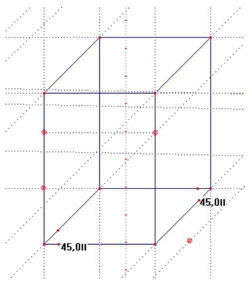
Tab. 22

Nesta tabela, fica evidente a dificuldade dos alunos no uso do coeficiente de redução 0,5 e da circunferência como compasso, mas utilizam-se das fugantes e dos pontos médios para construir o prisma.

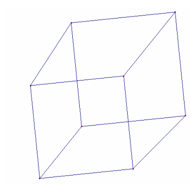
Estas são as soluções apresentadas pelos grupos:



prismaq1



prismaq 2



prismaq3

Todos os grupos não usaram a circunferência como compasso para a transferência de medidas, usaram coeficientes de redução aleatórios.

O grupo 1 usou uma estratégia bem diferente. Os alunos usaram segmentos de reta aparentemente paralelos entre si, um coeficiente de redução aleatório (Prismaq1). Esse tipo de construção, no ambiente Cabri, não mantém as propriedades da figura, não há garantia de paralelismo entre os segmentos sem o uso da ferramenta reta paralela do Cabri. Houve deformação durante a movimentação da figura.

A dificuldade para esses alunos foi compreender que o software Cabri tem premissas que devem ser respeitadas. Acompanhamos a construção e questionamos a execução, mas os alunos insistiram nela. O pólo do visto é visível aqui, mas as propriedades não se conservam (pólo do sabido).

Os alunos não usaram fugantes, paralelas do Cabri. Essa construção é diferente das demais construções que o grupo 1 fez ao longo do bloco 3, parece-nos um retrocesso em relação às atividades até aqui executadas.

O grupo 2 construiu seu prisma (prismaq2), construiu uma circunferência, mas sem função de transporte de medida na figura. Houve uma deformação quando o prisma foi movimentado, provavelmente porque usou segmentos sem o auxílio de retas paralelas. Num outro arquivo as alunas conseguiram resolver a atividade.

O grupo 3 usou algumas retas fugantes e segmentos para construir seu prisma (prismaq3). Algumas arestas não foram construídas com o auxílio de retas paralelas. Ao movimentar o prisma, houve deformação. Em entrevista, consideraram a construção mais difícil.

Parece que houve um retrocesso em relação às outras atividades pelas dificuldades encontradas. A dificuldade na construção desse prisma é evidente.

Comparando os resultados de todas as 5 atividades deste bloco, percebemos que no ambiente externo com a materialização e manipulação dos objetos (Boero, 1996; Parzysz, 2001) e recriados no ambiente Cabri favorecem a aprendizagem das propriedades da perspectiva cavaleira (Chaachoua, 1998). A dificuldade está no uso das ferramentas e nas construções das figuras, não da apropriação das propriedades da perspectiva cavaleira.

6. Problema 1 - Rebatimento de um ponto

A atividade foi proposta da seguinte forma:

3.7.7 Problema 1

O rebatimento é uma técnica muito usada para transportar um ponto que está numa face frontal paralela ao plano de projeção (face em verdadeira grandeza) para uma face qualquer do cubo ou vice-versa.

Na figura abaixo, a face frontal ABCD será rebatida sobre a face ABGH. Sendo o ponto P pertencente à face ABCD, o ponto P’ rebatido deve estar na mesma posição na face ABGH em perspectiva cavaleira. Após o rebatimento da face ABCD, o ponto D irá coincidir com o ponto H e o ponto C irá coincidir com o ponto G.

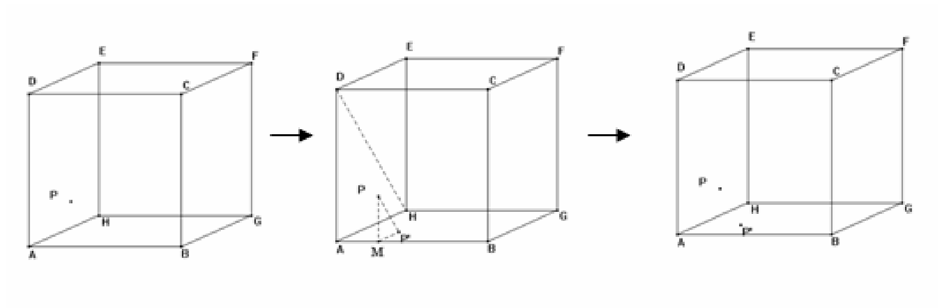


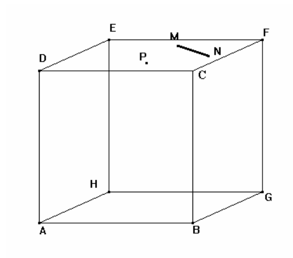
Fig.A Fig.B Fig.C

Com base no texto anterior, resolva o seguinte problema:

É dado o cubo em perspectiva cavaleira.

Na face superior do cubo ABCDEFGH está o segmento MN e o ponto P.

Construa a reta perpendicular ao segmento MN, passando pelo ponto P.



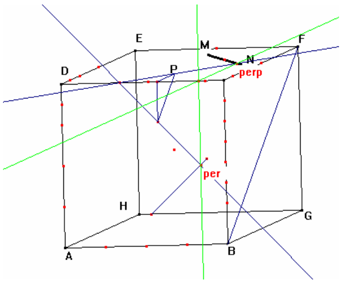
O objetivo desta atividade foi observar como os alunos resolveriam o problema. Algumas das propriedades da perspectiva cavaleira foram colocadas em jogo durante a execução da atividade. Queríamos observar se a perpendicular seria traçada imediatamente no plano DCFE e como os alunos usariam a técnica do rebatimento que explicamos na análise a priori. Essa estratégia não foi detectada nas atividades executadas pelos grupos, como veremos a seguir.

Problema 1 – Rebatimento de um ponto			
	G1	G2	G3
Rebateram o ponto P	S	S	S
Rebateram o ponto M	S	N	S
Rebateram o ponto N	S	N	S
Obtiveram o ponto de intersecção da perpendicular que passa pelo ponto P' e pelo segmento M'N' no plano frontal	S	N	S
Rebateram o ponto de intersecção	S	N	S
S = sim N = não P = Parcialmente			

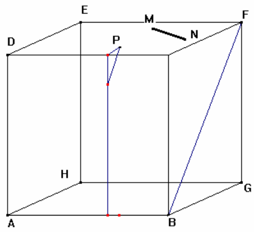
Tab. 23

Nesta tabela, percebemos que os alunos usaram fugantes para rebater os pontos, supomos que tenham percebido que o segmento MN está em verdadeira grandeza e que precisavam do rebatimento porque o segmento MN na face superior do cubo não tem suas medidas conservadas em relação ao rebatido na face frontal, paralela ao cubo.

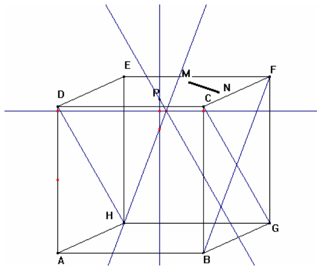
Estas são as soluções encontradas pelos grupos:



r1



r2



r3

O grupo 1 tentou inicialmente, rebater o ponto P usando uma paralela à diagonal DH passando pelo ponto E. Quando foi solicitado aos alunos que movimentassem o cubo, o ponto P ficou no interior do cubo e não na face frontal. Usaram uma paralela aleatória, pois não há nenhuma relação com o ponto P. Em um outro momento, os alunos rebateram corretamente o ponto P, apesar de não ter sido nomeado na face frontal do cubo, criaram o segmento M'N' na face frontal, mas não na posição do segmento MN correspondente na face superior. Nesse momento, tivemos que intervir, mostramos um cubo de papel com corte simbolizando um segmento MN e um ponto P sobre a face superior, essa face funcionou como tampa e dobrada sobre a face frontal. Os alunos perceberam que o segmento MN não estava construído corretamente. Mostramos aos alunos que a mesma estratégia utilizada no ponto P deveria ser usada para encontrar os pontos M e N.

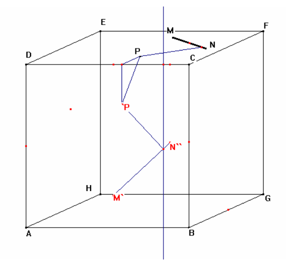
Esse grupo, desde o início das atividades no Cabri, usou o ponto médio como ferramenta. Nessa atividade não foi diferente. Percebemos que foram usados pontos médios, foram traçadas retas paralelas e interceptadas duas paralelas verticais na face frontal. Essa duas paralelas foram criadas a partir de pontos de intersecção da aresta CD com as retas que passam pelos pontos M e N na face superior.

Percebemos na figura r1 que o grupo 1 usou o rebatimento para encontrar os pontos M e N (retas verdes). Para encontrar a perpendicular que passa pelo ponto P e intersecta o segmento MN, os alunos criaram uma perpendicular ao segmento M'N' da face frontal passando pelo ponto P', que não foi denominado por eles, e, a partir do ponto de interseção entre essa reta e a aresta CD, traçaram a perpendicular ao segmento MN que passa pelo ponto P. Podemos verificar que a estratégia utilizada pelos alunos é diferente da esperada pela pesquisadora. As retas verdes correspondem a uma solução possível sugerida na análise a priori e serviu para verificar se a construção feita pelos alunos era possível.

O grupo 2 não continuou a atividade ou arquivos foram perdidos, só temos o início da construção. As alunas começaram usando paralelas e rebateram corretamente o ponto P na face frontal do cubo (r2).

O grupo 3 iniciou a atividade usando paralelas, uma delas paralela ao segmento BF passando pelo vértice H e uma paralela à aresta BC pelo ponto P (r3). Criou uma paralela à aresta CD passando pela intersecção das duas paralelas. Pedimos para que as alunas movimentassem o cubo e percebessem que o triângulo formado por essas paralelas era interno ao cubo, nenhum ponto pertencia à face frontal.

As alunas refizeram a construção, conseguiram fazer a projeção do ponto P' não nomeado e N' na face frontal, mas não perceberam que o ponto M' não era projeção de M. Nesse momento, interviemos como no grupo 1, explicando como seria a posição do segmento MN rebatido se o ponto P e este segmento estivessem sobre uma tampa de uma caixa, portanto retornamos para a geometria concreta para que pudessem representá-la na geometria espaço-gráfica, no ambiente Cabri. Na figura r3a, as alunas usaram a estratégia que esperávamos na análise a priori para encontrar o ponto Q no segmento MN. Percebemos que o ambiente Cabri favoreceu na aprendizagem de regras da perspectiva cavaleira para resolver esta atividade.



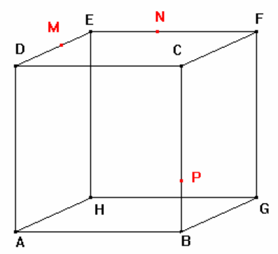
r3a

7. Problema 2

O objetivo desse problema foi verificar se a interação das atividades executadas nos blocos 1 e 2 levam os alunos a perceber melhor o espaço. Esperávamos que eles identificassem as posições das retas que estão contidas nas faces do cubo. A atividade foi direcionada para permitir uma visão das ações dos alunos sobre cada item proposto.

Os alunos criaram um cubo ABCDEFGH em perspectiva cavaleira, consideraram um ponto M pertencente à aresta DE, um ponto N pertencente à aresta EF e um ponto P pertencente à aresta BC (fig. 120).

Fig. 120



A seguir, 7 questões foram propostas:

8) Trace as retas MN e DC.

9) Visualmente, as retas que estão no espaço MN e DC se intersectam num ponto que denominaremos de X. Mas nós sabemos que duas retas no espaço podem ser paralelas, concorrentes ou reversas. Qual a posição relativa dessas duas retas? Justifique a sua resposta.

10) Visualmente, as retas que estão no espaço XP e AD se intersectam num ponto que denominaremos de ponto Q. Qual a posição relativa dessas duas retas? Justifique a sua resposta.

11) Considere um plano α que passa pelos pontos M, N e P.

12) O ponto X pertence a esse plano? Justifique a sua resposta. E o ponto Q pertence a esse plano? Justifique sua resposta.

13) Repetir o mesmo raciocínio para as retas MN e CF e encontrar cinco pontos pertencentes ao plano α.

14) Você acabou de achar a intersecção de um cubo por um plano que passa pelos pontos M, N e P. Construa esse polígono.

Verificando as respostas dos alunos, há um problema na questão 5. Como não recebemos as folhas de atividades dos alunos para conferir, houve uma mudança nessa questão, onde se lê "O ponto X pertence a esse plano", foi digitado "O ponto H pertence a esse plano".

Abaixo, resumimos os resultados desta atividade:

Problema 2			
	G1	G2	G3
Construíram o ponto X	S	S	S
Construíram o ponto Q	N	S	S
Construíram o ponto K	N	S	S
Construíram o ponto Z	N	S	S
Perceberam a posição das retas MN e DC	S	S	S
Justificaram a posição das retas MN e DC	S	N	S
Perceberam a posição das retas XP e DA	S	S	S
Justificaram a posição das retas XP e DA	S	N	S
Perceberam a posição das retas MN e CF	–	N	N
Justificaram a posição das retas MN e CF	–	N	N
Perceberam a posição das retas PK e FG	–	N	N
Justificaram a posição das retas PK e FG	–	N	N
Construíram o polígono	P	P	P
S = sim N = não P = Parcialmente			

Tab. 24

Considerando os resultados da tabela acima, percebemos que os alunos conseguiram identificar a posição das retas MN, DC, XP e DA e o polígono, apesar de não terem percebido e justificado outras retas.

O grupo 1 não completou a atividade ou as questões 6 e 7 foram perdidas. Essas questões referem-se à posição entre as retas MN e CF, entre PK e FG.

Os alunos responderam às questões acima da seguinte forma:

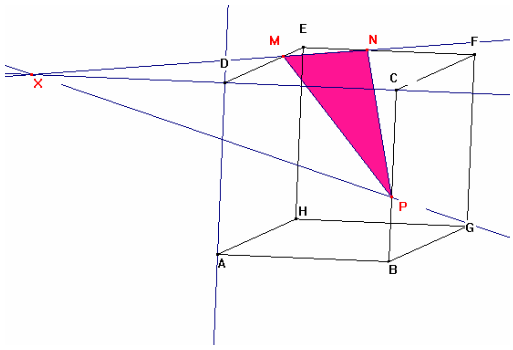
2) *"A posição relativa dessas retas é concorrente, pois elas cruzam em um determinado ponto".*

3) *"As duas retas XP e AD são concorrentes, pois elas se cruzam, mas não são perpendiculares, pois nesse cruzamento não há uma formação de um ângulo de 90°".*

4) *"O ponto H não pertence a esse plano, pois não existe contato com esses segmentos e o Q também".*

Os alunos do grupo 1 responderam corretamente às questões 2 e 3, mas não souberam justificar. Já na questão 5, numerada pelos alunos como questão 4, o ponto H não pertence ao plano, mas os alunos não registram quais são os segmentos a que estão se referindo. Com relação ao ponto Q, faltou criá-lo na atividade e pode ter dificultado a visibilidade no exercício (p1). Perceberam apenas o plano MNP como triângulo.

p1



O grupo 2 respondeu às questões da seguinte forma:

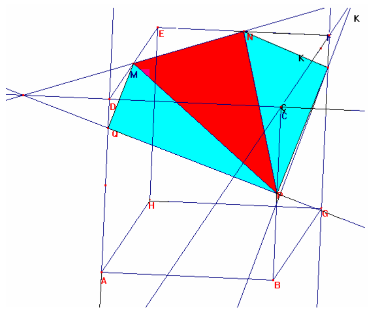
2) *"As retas MN e DC são concorrentes"*.

3) *"As retas XP e AD são concorrentes*".

5) *"Os pontos H e Q não pertencem ao plano alfa"*.

As alunas não justificaram as respostas em relação à posição das retas. Não se referiram às retas CF, PK e FG como foi pedido na questão 6. Na questão 5, o ponto Q pertence ao plano α e não como foi colocado pelas alunas. As alunas perceberam o plano α, o triângulo e o pentágono porque pintaram a figura.

p2



O grupo 3 respondeu às questões da seguinte forma:

2) *"As retas MN e DC são concorrentes, pois se cruzam formando o ponto P e se encontram no mesmo plano"*.

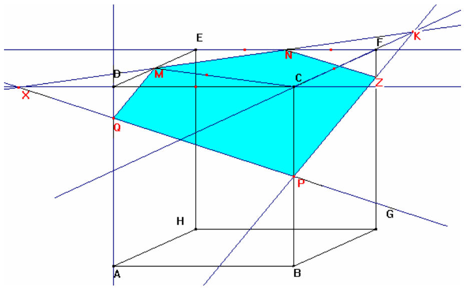
3) *"As retas PX e AD são concorrentes e estão no mesmo plano"*.

5) *"O ponto H não pertence ao plano porque não pertence ao plano DEFC, CBF. O Q também não pertence"*.

As alunas não fizeram referência às retas CF, PK e FG como foi pedido na questão 6.

O grupo 3 justifica corretamente as questões 2 e 3, mas na questão 5, o ponto Q pertence ao plano MNZPQ, ao contrário da resposta dada pelo grupo (p3).

p3



Essa atividade tinha por finalidade mostrar o potencial da perspectiva cavaleira na resolução dos problemas em geometria espacial.

Os itens 1,2 e 3 procuravam colocar o aluno diante da problemática de reconhecer a posição relativa de duas retas no espaço. Somente o grupo 3 justifica corretamente as questões. Houve pequenos indícios de saltos de validações perceptivas para validações dedutivas.

O item 5 colocaria o aluno diante de um postulado da geometria espacial que diz: Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então, a reta está contida no plano, mas, como houve um erro de digitação, não foi possível verificar se os alunos teriam justificado alguma resposta positiva a esta questão, mas as questões 2 e 3 indicam o postulado. Como os alunos erraram a posição do ponto Q, acredito que não teriam ainda condições de responder à questão. Uma construção com a perspectiva cavaleira mostra a necessidade do uso de postulados e, portanto, valoriza os aspectos teóricos da Geometria.

A questão 6 não foi totalmente respondida provavelmente porque os alunos acharam que somente as construções das retas interessavam.

A dificuldade do problema nos levou a propor esta atividade passo a passo. Perdeu-se a visão global da situação, mas ganhou-se na organização de algumas idéias básicas da Geometria Espacial. Procuramos verificar nas soluções apresentadas pelos alunos (pólo do sabido) o quanto esta atividade remete a aspectos teóricos da geometria.

Conclusão das atividades do Bloco 3

Concluímos nesse bloco que os alunos usaram elementos da perspectiva cavaleira na construção de suas figuras como as fugantes, coeficiente de redução, conservação dos pontos médios.

No caso do coeficiente de redução 0,5 que foi exigido somente na construção do losango, percebemos que os alunos têm dificuldades na compreensão desse conceito.

Uma outra dificuldade apresentada pelos alunos é a construção da altura dos prismas e das pirâmides, mesmo com a presença dos sólidos, no ambiente Cabri. Usamos os sólidos para mostrar a altura dos prismas e pirâmides, ou seja, foi preciso retornar a geometria concreta (G0) para buscar suporte para representar a altura desses objetos no ambiente Cabri (geometria espaço-gráfica- G1) resgatando todas as propriedades que foram vistas nos blocos 1 e 2 (geometria proto-axiomática – G2). Mesmo assim, alguns alunos não conseguiram construir a altura do sólido na tela do computador. Tal construção necessitava da propriedade da conservação do ângulo reto, o que não ocorreu pois, nesse caso, a altura é ortogonal às arestas de base.

A produção dos alunos nos mostrou um avanço na percepção dos objetos tridimensionais principalmente na realização dos problemas 1 e 2. Usaram propriedades da perspectiva cavaleira, como a conservação do ponto médio, baricentro, paralelas, mas ainda com dificuldades na manipulação com o software Cabri.

Neste bloco, a intervenção da professora se fez necessária para que os alunos conseguissem realizar seus trabalhos. Isto mostra que a apropriação das regras da perspectiva cavaleira não é suficiente para o seu uso espontâneo na resolução de um problema. Apesar de todas as institucionalizações realizadas, a falta de conhecimento dos alunos em relação a diversas propriedades geométricas exigiu a presença constante da professora.

Nenhum dos grupos tentou resolver o problema 1 usando uma perpendicular pelo ponto P no segmento MN inicialmente. Procuraram resolver seguindo o rebatimento que foi colocado anteriormente. Percebemos que a maior dificuldade encontrada pelos alunos está nas intersecções entre retas que passam pelos pontos M, N e P. Tiveram dificuldade de perceber o comportamento do rebatimento do segmento MN sobre a face frontal. Foi necessária a intervenção da professora, usando um cubo de papel e com a utilização de um corte que simbolizava o segmento MN sobre uma das faces. Essa face funcionou como uma tampa que ao ser rebatida de 90° na face frontal, mostrava a posição do segmento MN nessa face em verdadeira grandeza, isto é, voltamos para a geometria concreta.

No problema 2, os alunos usaram as mãos para entender a posição relativa das retas MN, AD, DC, PX e outras. A dificuldade que este problema apresentou foi na nomenclatura utilizada no enunciado, tal como reta reversa. Os alunos precisaram da intervenção da professora para identificar as posições relativas das retas no espaço.

Capítulo V

CONCLUSÃO

No início da dissertação, destacamos nossa preocupação em relação à representação de objetos tridimensionais no plano. Procuramos motivos para justificar a nossa pesquisa em Geometria. Consultamos trabalhos sobre as condições de ensino da Geometria no Brasil, buscamos subsídios para mostrar a importância do desenho e como representar objetos tridimensionais no plano. Aceitamos resultados que apontam a perspectiva cavaleira como uma representação acessível aos alunos, fácil de executar e dar equilíbrio entre o que se sabe sobre o objeto (propriedades) e o que se vê. Além disso, assumimos resultados que apontam que a introdução do ambiente informático dentro do sistema de ensino pode modificar as relações dos sujeitos sobre objetos matemáticos porque estes irão vivenciar de outro modo, além de possibilitar o estudo dos objetos de ensino que o ambiente do papel e lápis não pode oferecer (Chaachoua, 1998).

Em nossa fundamentação teórica, as pesquisas de Parzysz (1989), Boero (1996) e Chaachoua (1998) nos subsidiaram no desenvolvimento desta dissertação. Parzysz (2001) que distingue quatro geometrias: a geometria concreta (G0), a geometria espaço-gráfica (G1), a geometria proto-axiomática (G2) e a geometria axiomática (G3). Em suas pesquisas, trata também das representações dos objetos tridimensionais no plano, onde aponta o conflito entre o que vemos e o que sabemos sobre o objeto, ou seja, o conflito entre o visto e o sabido. Boero (ibid), que destaca a importância das conjecturas, hipóteses, questionamentos durante a experimentação na formação de uma geometria racional e Chaachoua (ibid) que argumenta que a aprendizagem também ocorre num ambiente informatizado.

Também buscamos subsídios históricos para nosso objeto matemático, a perspectiva cavaleira. Tais idéias nos mostraram as dificuldades existentes na construção desse objeto matemático.

Concebemos uma seqüência de atividades com suas respectivas análises a priori e a posteriori.

Durante a execução das atividades do bloco 1, os alunos materializaram e manipularam os objetos geométricos, levantaram conjecturas, sobre as sombras dos objetos colocados em faces paralelas e não paralelas ao plano de projeção, que no nosso caso foi o chão. Para explicar a formação das sombras no chão, alguns alunos usaram as mãos. O corpo também foi acionado para demonstrar como os raios solares incidiam sobre os sólidos para a formação das sombras. As produções dos alunos no bloco 1 mostraram que o ambiente externo é favorável ao processo de aprendizagem das propriedades da perspectiva cavaleira.

No bloco 2, representamos os mesmos objetos utilizados no bloco 1 no ambiente Cabri. Nesse bloco, as produções dos alunos mostraram que o processo de apropriação de um ambiente informático como o software Cabri-Géomètre não pode se limitar apenas a um trabalho de algumas horas antes de se iniciar a seqüência de ensino. É necessário que o aluno já tenha uma certa experiência com o uso do software antes de ser submetido a uma seqüência de ensino num ambiente informático. Muitas das dificuldades ocorridas ao longo do nosso trabalho foram decorrentes dessa pouca familiarização com o software. Contudo a introdução do software foi um fator de grande motivação para os alunos e muitas das atividades foram realizadas apesar de todas as dificuldades inerentes ao programa.

Percebemos ao longo do trabalho que as seqüências no plano paralelo tanto no ambiente externo como no ambiente Cabri são mais fáceis de executar que no plano não paralelo.

Consideramos importante da parte do professor a retomada de alguns conteúdos do Ensino Fundamental e Médio, como por exemplo, o teorema de Tales tanto no plano como no espaço.

No bloco 3, para utilizar as regras da perspectiva cavaleira na resolução de problemas de geometria espacial, os alunos precisaram de muitas ajudas.

A partir dos resultados obtidos nos três blocos, podemos apresentar alguns elementos de resposta às nossas questões de pesquisa:

Em que medida o estabelecimento de um jogo dialético entre a Geometria concreta e a Geometria espaço-gráfica contribui para a apropriação das regras da perspectiva cavaleira? E em que medida essa apropriação favorece a resolução de problemas da Geometria Espacial?

A geometria concreta permitiu fazer conjecturas de algumas propriedades da perspectiva cavaleira que puderam ser confirmadas empiricamente pelo software de geometria dinâmica. No entanto, propriedades tais como o estabelecimento da invariância da razão entre segmentos ou a razão de um segmento perpendicular ao plano de projeção e a sua respectiva projeção oblíqua só foram estabelecidas com a intervenção do professor. A solicitação da geometria concreta como auxiliar da geometria espaço-gráfica ($G0 \rightarrow G1$) se revelou frutífera em algumas atividades. Entre elas podemos citar a construção de um ponto sobre uma face do cubo e o rebatimento de um ponto situado na face superior do cubo na face frontal.

A partir da produção dos alunos podemos dizer que o estabelecimento deste jogo dialético entre a geometria concreta – G0, onde os objetos geométricos são materializados e manipulados em ambiente externo, na presença de raios solares e a geometria espaço gráfica – G1, onde os objetos são representados no ambiente informático, contribuiu para a apropriação das regras da perspectiva cavaleira. Mas ressaltamos que há necessidade de retomar conteúdos do Ensino Fundamental no Ensino Médio para que a apropriação se dê em sua totalidade. Além disso, é fundamental instrumentar os alunos com relação ao software Cabri-Géomètre.

Quanto à segunda questão: Em que medida essa apropriação favorece a resolução de problemas da Geometria Espacial? A análise das produções dos alunos mostrou que a ausência de conhecimentos dos alunos fez com que a função da perspectiva cavaleira nessa seqüência fosse apenas de técnica de desenho (Korkmaz, 2003) e não de ferramenta para auxiliar na resolução dos problemas.

A seqüência não conseguiu mostrar aos alunos que a perspectiva cavaleira, pode favorecer o tratamento de outras noções do espaço embora, várias pesquisas apontem para a necessidade de se ensinar a perspectiva cavaleira no Ensino Fundamental e Médio.

Outras seqüências de ensino poderiam ser concebidas para estudar a complexidade da passagem da técnica de desenho para ferramenta na resolução de problemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE. Michele. **L'evolution des problématiques em didactique de l'anayse**. Recherches em Didactique des Mathématiques.Vol.18.nº 2. (pp231-262).

ARTIGUE. Michele. **Ingénierie didactique.** Recherches em Didactique des Mathématiques, v.9.nº 3.pp. 281-308. Grenoble. 1988.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT. NBR 6023**.** Informação e Documentação - Referências-Elaboração. RJ. Agosto/2002.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT. NBR 10520. Informação e Documentação – Citações em documentos – Apresentação. RJ. Agosto/2002.
_____. ABNT. NBR 14724. Informação e documentação- Trabalhos acadêmicos – Apresentação. RJ. Agosto 2002.

AUDIBERT, Gerard. **La Perspective Cavalière**. I.A.P.M.E.P. Association dês Professeurs de Mathématiques de l'"Enseignement Publics) .Nº 75 .ISBN 2-902680-54-6. 1990.

_____. **La Perspective cavalière et la representation de l'espace**. Didactique et Accquisition des Connaissences Scientifiques, Actes du Colloque de Sévres. La Pensée Savage. Grenoble.1987.

BKOUCHE R., Souflet M. **Axiomatique, formalisme, théorie.** Bulletin Inter-Irem «Enseignement de la géométrie» (23) pp.3-24,1983.

BONGIOVANNI, Vincenzo. **Descobrindo o cabri-géomètre: caderno de atividades/**Vincenzo Bongiovanni, Tânia M.M. Campos, Saddo A. Almouloud. São Paulo. FTD, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF,1998.

CAVALCA. Antonio P. V. **Espaço e representação gráfica visualização e interpretação**. Dissertação de Mestrado. PUC. SP. 1997.

CHAACHOUA, Hamid. **Dessin comme modèle d'un objet géométrique de l'espace dans deux environnements: papier-crayon et informatique**. EIAH : Environnements Informatiques d'Aprentissage Humain.Leibiniz – Grenoble.France.1998.

CHEVALLARD, Yves. **Estudar Matemáticas. O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem/**Yves Chevallard, Marianna Bosch e Josp Gascón; trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre. Artmed Editora. ISBN B5-7307-769-7. 2001.

COSTA, Cristiano Othon de Amorim. **A perspectiva no olhar – Ciência e Arte do renascimento**. (p. 67, 80). Dissertação de Mestrado. PUC – SP. 2004.

FLORES, Cláudia Regina. **Olhar, Saber, Representar: Ensaios sobre a representação em perspectiva.** Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis-Santa Catarina. 2003.

GONÇALVES, Maria Elisa R. CARVALHO, Anna Maria P.**As Atividades de Conhecimento Físico: um exemplo relativo à sombra.** Faculdade de Educação – USP. São Paulo-SP. Caderno. Cat. Ensino Física. V.12, n.1,p.7-16, abril.1995.

KORKMAZ,Ozlem. **La perspective Cavaliere en Classe de Second: Savoir Geometrique ou technique de Dessin**.Université Joseph Fourier – Grenoble1 – França. (2002-2003).

MACHADO. Silvia D. A. et al. **Educação Matemática: uma introdução.** São Paulo. EDUC. Série Trilhas. ISBN 85-283-0158-3. 2ª Edição. 212p. 2002

MEDALHA, Vera L. L**. A visualização no estudo da Geometria Espacial**. Universidade Santa Úrsula Dissertação de mestrado. RJ. MEM/USU-1997.

PANOFSKY, Erwin. **A perspectiva como forma simbólica**. Tradução: Elisabete Nunes. Lisboa. Portugal. Edições 70, 1999.

PARZYSZ, Bernard. **Espace Géometrie et Dessin. Une Ingènierie didactique pour l'aprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la pespective parallèle au lycée.**Recherches em Didactique des Mathématiques.Vol 11, nº 23.9pp 211-240).1991

______. Representation of space and students' conceptions at high school level. Educational Studies in Mathematics .nº 22 (pp 575-593). 1991.

______. Représéntations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir(thèse).Université Paris-7. (1989).

______. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. Extrait du colloque de la COPIRELEM- Tours-.Actes du XXVIII- IREM Université de Tours. 2001.

PESCUMA, Derma. **Referências Bibliográficas. Um guia para documentar suas pesquisas/**Derma Pescuma, Antônio Paulo F. de Castilho – São Paulo. Olho d'Água, 2003. ISBN 85-85428-77-5

______. Trabalho acadêmico – O que é? Como fazer? Um guia para sua elaboração/Derma Pescuma, Antônio Paulo Ferreira de Castilho. São Paulo. Olho d'Água,2005.

______.Projeto de Pesquisa. O que é? Como fazer? Um guia para sua elaboração/ Derma Pescuma, Antônio Paulo Ferreira de Castilho. São Paulo. Olho d'Água,2005.

PIAGET e INHELDER. **A Psicologia da criança**. Trad. Octávio Mendes Cajado.5ª ed. Ed.DIFEL. Rio de Janeiro. 1978.

PIRES, Célia Maria; CURI, Edda; CAMPOS, Tânia M.M. **Espaço & Forma: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental**. São Paulo. PROEM. 2000.

ROMMEVAUX, Marie-Paule. **Lê discernement des plans dans une situation tridimensionnelle (Discerning the plans in a three-dimensional situation)**. Educação Matemática pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática/Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – n.1 (março de 1999) – São Paulo:EDUC,1999–semestral.ISSN1516-5388.

ROUSSELET, Michel. **Dessiner L'espace ou Comment employer Cabri-Géometrè en geómetrie dans L'espace.** Editions Archimede. ISBN2- 9506960-7-4 (pp 23 –69). 1995.

SINISGALLI, Rocco, **I sei libri della prospettiva di Guidobaldo dei Marchesi del Monte.** Roma: L'Erma di Bretschneider, (Universitá degli studi di Roma << La Sapienza>>. (Facolta di architettura dipartimento di rappresentazione e rilievo). 1984.

TATON, René. **L'oeuvre Mathematique de Girard Desargues**. 10ª édition. Librairie Philosphique J. URIN. Sorbonne. Paris. 1988 .

BIBLIOGRAFIA DE E-ARTIGOS

ABRAHAM BOSSE**,** graveur en taille-douce et théoricien de l'art français. Disponível em: <http://www.culture.gouv.fr/culture/actualites/celebrations2004/abosse.htm> acesso em 09/02/2005

ALMOULOUD, Saddo Ag. **A Geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e aluno.** Revista Brasileira de Educação, n.27.2004. Disponível em: <http://www.anped.org.br/rbe27/anped-n27-art06.pdf >. Acesso em 11/04/2005.

_____. **Uma caracterização dos professores de matemática de 5ª a 8ª série da rede pública do Estado de São Paulo.** Disponível em: <<http://www.educacaoonline.pro.br/art_uma_caracterizacao_dos_professores_de_matematica.asp. Acesso em 12/09/2005.

APONTAMENTOS de Computação Gráfica. Visualização. Universidade de Coimbra. Faculdade de Ciência e Tecnologia. 2004/2005. Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores. Disponível em: < http://www.deec.uc.pt/php/dow_doc.php?id_doc=635&anolectivo=0405> . Acesso em 08/09/2005.

BESSOT, Didier & LE GOFF, Jean-Pierre. "**Les traités de perspective et d'architecture à la Renaissance : notes d'une exposition"**, in *Cahiers de la perspective*, n° 3. Caen, IREM de B.-N., 1987.Disponível em:
< http://www.utc.fr/arco/publications/intellectica/n15/15_08_Arnold-Lebrun.pdf>. Acesso 23/10/05

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais/ Ensino Médio.** Vol.III Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 1998. Disponível em:
< http://pound.uol.com.br/amcc/jpp/jp05/jp03e.htm> . Acesso em 16/01/01.

DESENHO para Geologia. v. 1. Perspectivas. Equipe de Professores de Desenho. USP. Escola Politécnica. Depto. de Engenharia de Construção Civil. PCC. 2005. Disponível em: < http://pcc2110.pcc.usp.br/conteudo/ApostilaPCC2110-v1-2005.pdf >. Acesso em 15/09/2005.

DU CERCEAU, A . **Architecture, Textes et Images**, XVI°- XVII° siècles.Les Livres D'Architecture. Livre D'Architecture. Disponível em: < http://www.cesr.univ-tours.fr/architectura/Traite/Images/LES1592Index.asp>. Acesso em 06/09/2005.

______. A . **Architecture, Textes et Images**, XVI°- XVII° siècles. Leçons de Perspective Positive. Disponível em: <http://www.cesr.univ-tours.fr/architectura/Traite/Images/LES1171Index.asp>. Acesso em 06/09/2005.

DÜRER, Albrecht. Virtuelle Welten aus dem Rechner,Symbiose von Wissenschaft und Kunst. Disponível em: <http://www-m2.ma.tum.de/Veroeffentlichungen/VirtuelleWelten/> .Acesso em 06/09/2005.

FOUQUAT,Véronique, JAMMOT M.P**. L'espace figuré: la perspectiva – Perception et représentation de l'espace.Département Education**. **Série Science et Art**. Juillet 2001. Disponível em: <http://www.cite-sciences.fr/francais/ala-cite/act-educ/education/ressources/science_art/pdf/represente-space.pdf >. Acesso em 24/06/2004.

FRANÇA. Groupement National d'equipes de Recherche en Didactique des Mathematiques. **Preuve et Demonstration**. Ministère Éducation Nationale. 2003 http://eduscol.education.fr/index.php?./D0124/greco_preuve.htm

GENEVÈS. B, LABORDE**,** Colette. **Perspective cavalière et scientificité. Equipe Informatique et Apprentissage des Mathématiques (IAM). Suj Memoire IAM.** Disponível em: **<** http://www-eiah.imag.fr/DEA/Enseignements/SujetIAM **>** acesso em 27/03/2004

GEOMETRIE dans l'espace – Ce qu'il faut savoir. Disponível em: <http://www.ac-grenoble.fr/lycee/LAB/jr2000/espace/pages/incidence0.htm>> acesso em 15/08/2004.

GUTIÉRREZ, Angel. **Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial**. Revista EMA n. 3, v.3 p.193-220. 1998. Disponível em <www.uv.es/Angel.Gutierrez/textos.html. Acesso em 07/10/2005.

JOIN-LAMBERT, Sophie; MANCEAU, Jean-Pierre. **Abraham Bosse et l'Académie Royale.** Université Michel de Montaigne Bordeaux 3. Domaine Universitaire 33607

KUBOVY. M, TYLER. C. **The psychology of perspective and renaissance art .The arrow in the eye. Chapter III: Brunelleschi's Peepshow .The Invention of Perspective**. Online Book. Disponível em: <<http://webexhibits.org/arrowintheeye/brunelleschi1.html>> Acesso em 28/09/2005.

PESSAC. Disponível em: <http://3b3b3b.free.fr/grandville/Bosse.htm>. Acesso em 26/01/2005

LABORDE, Collete. **Éléments méthodologiques et spécifités disciplinaires - Mathématiques**. Disponível em:
< http://www.eiah.imag.fr/EIAH/DEA/Enseignements/ModulD3.htm>. Acesso em 20/04/2004.

______. **La géométrie comme outil de modélisation.**Equipe Informatique et Apprentissage des Mathématiques (IAM). Disponível em:
< http://www.eiah.imag.fr/EIAH/DEA/Enseignements/Sujet1.AM>.Acesso em 20/04/2004.

MENEGHETTI, Renata Cristina G. **O Conhecimento Matemático no Realismo e no Idealismo: compreensão e reflexão**. Revista Episteme. Porto Alegre. RS. n.16.p.137-149.2003. Disponível em:
<http://www.ilea.ufrgs.br/episteme/portal/pdf/numero16/episteme16_artigo_meneghetti.pdf> Acesso em 09/09/2005.

OSTA, Irman. **Spatial representation through relative object space and absolute software space**.American University Beirut. Education Department. Disponível em:
<http://www.utc.fr/arco/publications/intellectica/n15/15_08_Arnold-Lebrun.pdf> Acesso em 24/10/05.

O QUE É Geometria descritiva? Disponível em: < http://oliveiros.tripod.com/gdesc1.htm > Acesso em 21/08/2004

PARZYSZ, B.**Reflexions autour des concepts de Savoir et de transposition: Ecologie des savoirs.**Disponível em <http://www.eiah.imag.fr/EIAH/DEA/Enseignements>. Acesso em 20/04/2004.

PHILLIPS, Nigel. **Jean Dubreuil. [A collection of Jesuit works against Girard Desargues and the new "perspective universelle".]** Paris: Melchior Tavernier & François *l'Anglois, dit Chartres, 1641-1642.* Disponível em: < http://www.polybiblio.com/phillips/1131.html > Acesso em 27/05/2005.

POURQUOI des perspectives cavalières? Disponível em:
< http://mapage.noos.fr/rferreol/langage/notations/notations2.htm>.Acesso em 27/05/2004.

ROBOTTI, Elisabetta. **Le rôle médiateur de la verbalisation entre les aspects figuraux et théoriques dans un problème de démonstration en géométrie plane**. Thèse de doctorat (19 juin 2002), Leibniz / IMAG, Universite Joseph-Fourier - Grenoble I. Disponível em: <http://tel-ujf.ujf-grenoble.fr/alpha.htm > <http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/45/87/index_fr.html > Acesso em 09/08/2005.

VELOSO, Eduardo**. Inovação no Ensino da Geometria. Perspectiva Cavaleira.** Texto de Apoio. Disponível em: **<**http://www.apm.pt/apm/Geometria/inoveg/curso.html> .Acesso 27/05/2004**.**

BIBLIOGRAFIA DE CD-ROM

CABRI-GÉOMÈTRE II. **O caderno de Geometria Interativa**. Versão 1.0 MS Windows. Universidade Joseph Fourier. CD-ROM.

ANEXOS

ANEXO 1

Seqüência experimental I - Face paralela ao plano de projeção
Cubo

Colocar o cubo de forma que uma das faces seja paralela a um plano de projeção (parede, chão).

A.

Considere dois pontos A e B no cubo (use bolinhas de massa de modelar coloridas para determinar os pontos, uma cor para cada ponto) sobre uma face paralela ao plano de projeção.

Ache o ponto médio M do segmento AB (use régua e caneta para traçar o segmento)

Ache o ponto médio M' do segmento A'B' onde A' e B' são as sombras correspondentes dos pontos A e B.

O que você conclui sobre o ponto médio M no sólido e sua sombra M'?

Justifique.

....
....
....

B.

Construa um segmento AB (use régua, caneta e as bolinhas de massa de modelar para os pontos, uma cor para cada ponto) sobre a face paralela ao plano de projeção.

Considere um ponto C pertencente ao segmento AB e que não seja ponto médio (use massa de modelar para determinar o ponto C também).

Relacione os segmentos AC, CB, A'C' e C'B' onde A',B',C' são as sombras respectivamente dos pontos A, B e C. O que você conclui em relação as medidas destes segmentos? Que relações você pode obter entre estes segmentos? Justifique.

....
....
....

C.

Construa um triângulo ABC (marcar os vértices com massa de modelar, cada ponto com uma cor diferente, e usar régua para marcar os lados do triângulo) contido na face paralela ao plano de projeção.

Encontre o baricentro do triângulo ABC.

Encontre o baricentro do triângulo A'B'C' sombra correspondente ao triângulo ABC.

Compare os baricentros.

Compare o baricentro do triângulo ABC e o baricentro de sua sombra A'B'C'. O que você conclui?

Justifique...
....
....

D.

Coloque dois palitos de churrasco paralelos entre si e mantendo o paralelismo entre eles, coloque-os em posições diferentes sobre a face paralela ao plano de projeção. Para cada posição verifique se os segmentos correspondentes das sombras dos palitos são paralelos.

Para cada posição verifique se os segmentos correspondentes das sombras dos palitos são paralelos. De que forma você fez esta verificação?

Justifique.

....
....
....
....

E.

Cruze dois palitos de churrasco e mantendo o cruzamento entre eles, colocá-los em posições diferentes sobre a face paralela ao plano de projeção. Para cada posição:

Observar e comparar os palitos e suas sombras correspondentes.

Compare o ângulo formado entre os dois palitos e o ângulo formado pela sombra dos dois palitos. O que você conclui?

Justifique.

....
....
....

ANEXO 2

Seqüência experimental II - Face não paralela ao plano de projeção
Cubo

Colocar o cubo de forma que uma das faces NÃO seja paralela a um plano de projeção (parede, chão)

A.

Considere dois pontos A e B no cubo (use bolinhas de massa de modelar coloridas para determinar os pontos, uma cor para cada ponto) sobre uma face não paralela ao plano de projeção.

Ache o ponto médio M do segmento AB (use régua e caneta para traçar o segmento)

Ache o ponto médio M' do segmento A'B' onde A' e B' são as sombras correspondentes dos pontos A e B.

Compare as medidas. O que você conclui sobre o ponto médio M no sólido e sua sombra M'?Justifique.

....
....
....

B.

Construa um segmento AB (use régua, caneta e as bolinhas de massa de modelar para os pontos, uma cor para cada ponto) sobre uma face não paralela ao plano de projeção.

Considere um ponto C pertencente ao segmento AB e que não seja ponto médio (use massa de modelar para determinar o ponto C também).

Compare as medidas dos segmentos AC, CB, A'C' e C'B' onde A',B',C' são as sombras respectivamente dos pontos A, B e C. O que você conclui em relação as medidas destes segmentos? Justifique

....
....
....

C.

Considere um triângulo ABC (marcar os vértices com massa de modelar, cada ponto com uma cor diferente, e usar régua para marcar os lados do triângulo) contido em uma face não paralela ao plano de projeção.

Encontre o baricentro do triângulo ABC.

Encontre o baricentro da sombra do triângulo ABC.

Compare o baricentro do triângulo ABC e baricentro de sua sombra. O que você conclui? Justifique.

....
....
....

D.

Coloque dois palitos de churrasco paralelos entre si e mantendo o paralelismo entre eles, coloque-os em posições diferentes sobre uma face não paralela ao plano de projeção. Para cada posição observe e compare os segmentos correspondentes às sombras dos palitos.

Para cada posição verifique se os segmentos correspondentes das sombras dos palitos são paralelos. De que forma você fez esta verificação? Justifique.

....
....
....

E.

Cruze dois palitos de churrasco e mantendo o cruzamento entre os dois palitos, colocá-los em posições diferentes sobre uma face não paralela ao plano de projeção. Para cada posição:

Observe e compare os palitos com suas respectivas sombras.

Compare o ângulo formado entre os dois palitos e o ângulo formado pela sombra dos dois palitos. O que você conclui? Justifique.

....
....
....

ANEXO 3

Responda:

1. Comparando os resultados de todas as atividades nos quatro sólidos, o que vocês concluem em relação às atividades desenvolvidas com as varetas e as projeções do:

a) Ponto Médio
b) Baricentro
c) Medidas
d) Razão entre segmentos
e) Paralelismo
f) Perpendicularismo

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Comparando os resultados das atividades das seqüências I e II o que vocês podem concluir em relação às atividades e ao fato dos sólidos estarem com as faces paralelas na primeira seqüência e na segunda não?
....
....
....
....
....
....
....
....
....

ANEXO 4

Tarefa

Serão distribuídas aos grupos de alunos peças de acrílico de forma quadrada outra na forma de um triângulo eqüilátero e uma na forma de hexágono regular.

Um dos lados de cada uma das peças deverá estar paralelo a um plano de projeção (parede), mas a peça deve estar perpendicular ao plano.

Observar e comparar as sombras projetadas na parede com a peça de acrílico.

Questionário

Que conclusões você obteve ao observar as peças em acrílico e as sombras correspondentes?...
....
....
....

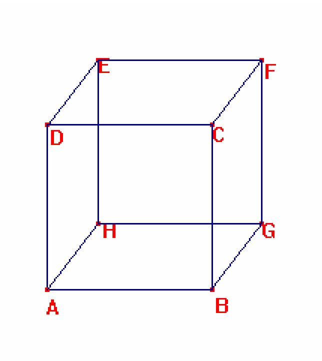
ANEXO 5

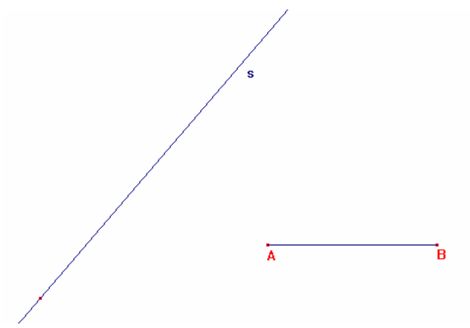
Seqüência Experimental III – Cabri Géomètre

Arquivo CUBO

Construção de um Cubo

Observe o cubo ABCDEFGH.





Construa o cubo A’B’C’D’E’F’G’H’ tendo uma reta ‘s’ qualquer e um segmento AB de 5cm de comprimento e um coeficiente de redução 0,5.

Salve com o nome de arquivo CUBO.

Abra o arquivo CUBO

A.

Considere dois pontos A e B sobre a face frontal paralela ao plano de projeção.

Trace o segmento AB.

Ache o ponto médio M do segmento AB.

Determine o segmento A’B’ onde A’ e B’ na outra face paralela ao plano de projeção onde A’ e B’ são as projeções dos pontos A e B.

Determine o ponto médio M’do segmento A’B’.

Salve seu trabalho como CUBO1

B.

Mantendo o seu trabalho aberto, apague o ponto M e crie o ponto C no segmento AB e sua projeção C’ no segmento A’B’.

Movimente o ponto C sobre o segmento AB.

Observe e compare as diversas posições de C e os segmentos AC e CB e A’C’ e C’B’ suas respectivas projeções.

Salve o trabalho.

1. Descreva como você determinou as projeções A’B’ do segmento AB.

....
....
....
....

2. Como você determinou o ponto M' projeção do ponto M?

....
....
....

3. Compare as medidas dos segmentos. O que você conclui?

....
....
....

4. Quais as razões entre os segmentos AC, CB e A'C' e C'B'.

....
....
....

C. Abra o arquivo CUBO

Construir um triângulo ABC na face frontal paralela ao plano de projeção.

Determinar o triângulo A'B'C'. Observar e medir os lados A'B', B'C' e A'C' onde A', B' e são as respectivas projeções de A, B e C.

Encontre o baricentro H do triângulo ABC.

Encontre o baricentro H' da projeção A'B'C'do triângulo ABC na outra face paralela ao plano de projeção.

Movimente o ponto A observando os triângulos e o baricentro.

Salve o trabalho.

1. Como você determinou o triângulo A'B'C'? E a projeção H'?

....
....
....

2. Que conclusão você tirou em relação a medida dos lados entre os dois triângulos?

....
....
....

3. Compare os baricentros. Justifique.

....
....
....

4. Movimente o ponto A observando os triângulos e o baricentro, o que conclui?

....
....
....

D. Abra o arquivo CUBO

Construa dois segmentos AB e MN paralelos sobre a face frontal paralela ao plano de projeção. Determine os segmentos A'B' e M'N'correspondentes as suas projeções sobre a outra face paralela ao plano de projeção.

Salve o trabalho.

Como você determinou essas projeções? Mantém o paralelismo?Justifique.

....
....
....

E. Abra o arquivo CUBO

Construa dois segmentos concorrentes entre si AB e RS sobre a face frontal paralela ao plano de projeção.

Construa os segmentos A'B' e R'S' respectivas projeções de AB e RS sobre a outra face paralela ao plano de projeção.

Salve o trabalho.

1. Como você determinou as projeções?

....
....
....

2. O cruzamento é mantido? Justifique.

....
....
....

3. Compare o ângulo formado entre os segmentos AB e RS e A'B' e R'S'. Justifique.

....
....
....

ANEXO 6

Seqüência experimental IV – Cabri-Géomètre
Arquivo Plano α

Abra o arquivo Plano α

A.

Considere dois pontos A e B sobre o plano α.
Trace o segmento AB.
Ache o ponto médio M do segmento AB.
Determine o segmento A'B' onde A' e B' no plano β paralelo ao plano de projeção onde A' e B' são as projeções dos pontos A e B.
Determine o ponto médio M'do segmento A'B'.
Salve o trabalho.

B.

Mantendo o seu trabalho aberto, apague o ponto M e crie o ponto C no segmento AB e sua projeção C' no segmento A'B'.
Movimente o ponto C sobre o segmento AB.
Observe e compare as diversas posições de C e os segmentos AC e CB e A'C' e C'B' suas respectivas projeções.
Salve o trabalho.

1. Descreva como você determinou as projeções A'B' do segmento AB.
....
....
....
2. Como você determinou o ponto M' projeção do ponto M?
....
....
....
3. Compare as medidas dos segmentos? O que você conclui?
....
....
....
4. Quais as razões entre os segmentos AC, CB e A'C' e C'B'.
....
....
....

C. Abra o arquivo Plano α

Construir um triângulo ABC no plano α.
Determinar o triângulo A'B'C' no plano β paralelo ao plano de projeção. Observar e medir os lados A'B', B'C' e A'C' onde A', B' e são as respectivas projeções de A, B e C.
Encontre o baricentro H do triângulo ABC.
Encontre o baricentro H' da projeção A'B'C'do triângulo ABC no plano β.

Movimente o ponto A observando os triângulos e o baricentro.
Salve o trabalho.

1. Como você determinou o triângulo A'B'C'? E a projeção H'?
....
....
....

2. Que conclusão você tirou em relação a medida dos lados entre os dois triângulos?
....
....
....

3. Compare os baricentros. Conseguiram justificar?
....
....
....

4. Movimentando o ponto A observando os triângulos e o baricentro, o que conclui?
....
....
....

D. Abra o arquivo Plano α

Construa dois segmentos AB e MN paralelos sobre o plano α. Determine os segmentos A'B' e M'N'correspondentes as suas projeções sobre o plano β paralelo ao plano de projeção.
Salve o trabalho.

Como você determinou essas projeções? Mantém o paralelismo? Justificaram?
....
....
....

E.Abra o arquivo Plano α

Construa dois segmentos concorrentes entre si AB e RS sobre o plano α.
Construa os segmentos A'B' e R'S' respectivas projeções de AB e RS sobre o plano β paralelo ao plano de projeção.
Salve o trabalho..
....
....
....

ANEXO 7

Bloco 3 - Construções no Cabri-Géomètre

A. Construa um retângulo ABCD perpendicular ao plano de projeção (parede ou chão) e sendo o lado AB paralelo ao plano de projeção.
Construa sua projeção no plano paralelo usando um coeficiente de redução 0,5.
Construa um losango MNOP a partir dos pontos médios do retângulo e a seguir a sua projeção M'N'O'P' sobre a projeção A'B'C'D' do retângulo.
Explique e justifique a sua construção
....
....
....
....

B. Construa um triângulo eqüilátero ABC perpendicular ao plano de projeção (parede ou chão) e sendo o lado AB paralelo ao plano de projeção.
Construa sua projeção no plano paralelo usando um coeficiente de redução 0,5.
Construa o baricentro do triangulo A'B'C' projeção de ABC.
A seguir construa uma pirâmide regular tendo por base esse triângulo.
....
....
....
....

C. Construa uma pirâmide de base quadrada usando propriedades da perspectiva cavaleira. A base deverá ser perpendicular ao plano de projeção e paralelo ao plano horizontal.
....
....
....
....

D. Construa um prisma de base triangular usando propriedades da perspectiva cavaleira. A base deverá ser perpendicular ao plano de projeção e paralelo ao plano horizontal.
....
....
....
....

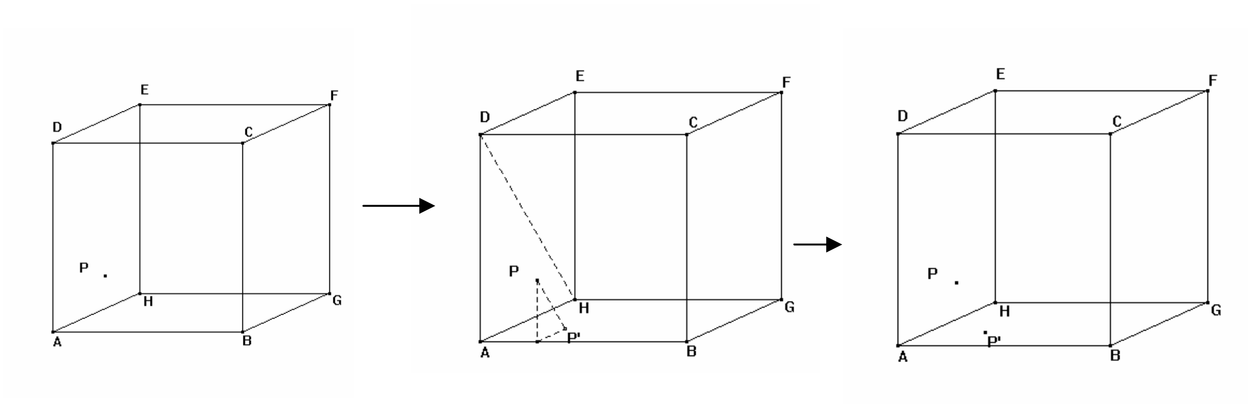
E. Construa um prisma de base quadrada usando propriedades da perspectiva cavaleira. A base deverá ser perpendicular ao plano de projeção e paralelo ao plano horizontal.
....
....
....
....

ANEXO 8

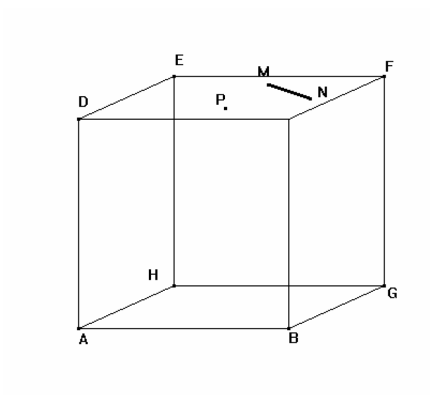
Problema 1

Rebatimento de um ponto sobre uma face de um cubo

O rebatimento é uma técnica muito usada para rebater um ponto que está numa face frontal paralela ao plano de projeção (face em verdadeira grandeza) para uma face qualquer do cubo ou vice-versa.
Imagine que você tenha uma caixa com a forma de um cubo e esta caixa possui uma face como tampa. Esta tampa tem um ponto. Este ponto deve coincidir com o ponto de uma face quando a tampa é totalmente dobrada para fora da caixa sobre essa face.
Na figura abaixo, a face frontal ABCD seria a tampa e deverá fechar sobre a face ABGH sendo o ponto P pertencente a face ABCD, o ponto P’ deve estar na mesma posição na face ABGH em perspectiva cavaleira.



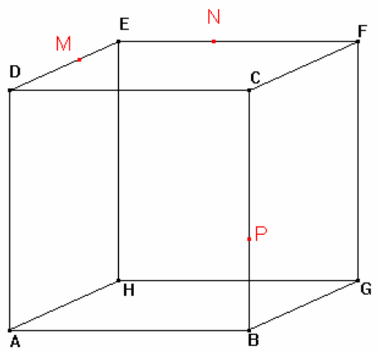
Com base no texto acima resolva o problema abaixo:
Dado o cubo ABCDEFGH, na face superior está o segmento MN e o ponto P.
Construa a reta perpendicular ao segmento MN passando pelo ponto P.



ANEXO 9

Problema 2

Crie um cubo ABCDEFGH, sendo a face ABCD frontal paralela ao plano de projeção.



1) Trace as retas MN e DC.
2) Visualmente, as retas que estão no espaço MN e DC se intersectam num ponto que denominaremos de X. Mas nós sabemos que duas retas no espaço podem ser paralelas, concorrentes e reversas. Qual a posição relativa dessas duas retas? Justifique a sua resposta.
3) Visualmente, as retas que estão no espaço XP e AD se intersectam num ponto que denominaremos de ponto Q. Qual a posição relativa dessas duas retas? Justifique a sua resposta.
4) Considere um plano α que passa pelos pontos M, N e P.
5) O ponto X pertence a esse plano? Justifique a sua resposta. E o ponto Q pertence a esse plano? Justifique sua resposta.
6) Repetir o mesmo raciocínio para as retas MN e CF e encontre cinco pontos pertencentes ao plano α.
7) Você acabou de achar a intersecção de um cubo por um plano que passa pelos pontos M, N e P. Construa esse polígono.

ANEXO 10

Questionário dos Observadores para a seqüência experimental I
Face paralela ao plano de projeção

1. Enquanto observador da seqüência o que achou desta seqüência? Percebeu se os alunos fizeram alguma conjectura em relação à atividade proposta?
....
....
....

2. Observando os alunos na atividade do Ponto Médio, que comportamentos, que atitudes e estratégias foram utilizadas por eles? Conseguiram resolver a atividade? Quais foram os erros ou dificuldades percebidas? Fizeram conjecturas?
....
....
....

3. Compararam as distâncias? Como fizeram?

....
....
....

4. Em relação ao Baricentro, percebeu alguma dificuldade nos alunos? Se sim quais foram estas dificuldades? Que estratégias foram observadas para resolverem a atividade? Fizeram conjecturas?

....
....
....

5. E em relação às medidas dos lados do triângulo ABC?

....
....
....

6. Em relação ao paralelismo, nos segmentos secantes e o ângulo formado entre as varetas e suas respectivas sombras, o que você percebeu? Houve alguma dificuldade para resolver estas atividades? Quais dificuldades? Quais estratégias você pode observar em relação ao paralelismo, a concorrência e ao perpendicularismo entre as varetas e suas projeções? Fizeram conjecturas em relação aos resultados obtidos?
....
....
....

7. Os alunos conseguiram chegaram a alguma conclusão em relação a atividades desenvolvidas em todos os sólidos nesta seqüência? Qual foi a conclusão que eles chegaram e como chegaram a esta conclusão?
....
....
....

ANEXO 11

Questionário dos Observadores para a seqüência experimental II
Face não paralela ao plano de projeção

1. Enquanto observador da seqüência o que achou desta seqüência? Percebeu se os alunos fizeram alguma conjectura em relação à atividade proposta?
....
....
....
2. Observando os alunos na atividade do Ponto Médio, que comportamentos, que atitudes e estratégias foram utilizadas por eles? Conseguiram resolver a atividade? Quais foram os erros ou dificuldades percebidas? Fizeram conjecturas?
....
....
....
3. Compararam as distâncias? Como fizeram?
....
....
....
4. Em relação ao Baricentro, percebeu alguma dificuldade nos alunos? Se sim quais foram estas dificuldades? Que estratégias foram observadas para resolverem a atividade? Fizeram conjecturas?
....
....
....
5. E em relação às medidas dos lados do triângulo ABC?
....
....
....
6. Em relação ao paralelismo, nos segmentos secantes e o ângulo formado entre as varetas e suas respectivas sombras, o que você percebeu? Houve alguma dificuldade para resolver estas atividades? Quais dificuldades? Quais estratégias você pode observar em relação ao paralelismo, a concorrência e ao perpendicularismo entre as varetas e suas projeções? Fizeram conjecturas em relação aos resultados obtidos?
....
....
....
7. Os alunos conseguiram chegaram a alguma conclusão em relação a atividades desenvolvidas em todos os sólidos nesta seqüência? Qual foi a conclusão que eles chegaram e como chegaram a esta conclusão?
....
....
....

Anexo 12

Curso de Geometria Espacial no software Cabri-Géomètre

Curso de Geometria Espacial no software Cabri-Géomètre

Convite

Convidamos você a participar de uma pesquisa em Geometria Espacial abordando as ferramentas do Software Cabri-Géomètre. Além de participar da pesquisa, você terá a oportunidade de rever conceitos em Geometria Plana, aprender novos conceitos matemáticos em Geometria Espacial através de atividades com sólidos e no computador. O curso é totalmente gratuito.
O curso terá duração prevista de 1 mês, com duas aulas semanais:
Quartas-feiras: das 14:30h às 17:00h
Sextas-feiras: das 14:00h às 17:00h
Início das aulas: 31/03/2005
O curso será ministrado na Sala de Informática da E.E. Rui Bloem.

ANEXO 13

AUTORIZAÇÕES

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
COORDENADORIA DE ENSINO DA REGIÃO METROPOLITANA DA GRANDE SÃO PAULO
DIRETORIA DE ENSINO CENTRO OESTE
Escola Estadual "RUI BLOEM"

DECLARAÇÃO

Autorizo a mestranda Yumi Kodama, aluna do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, fazer uso do nome e imagens da E.E.Rui Bloem coletadas durante o Curso de Geometria Espacial ministrado nos meses Abril, Maio e Junho de 2005, em sua dissertação de mestrado.

São Paulo, 20 de Março de 2006

Sabrya

Dóris Cristina G. Saboya
RG. 8.158.098
Vice-Diretor de Escola

umi

e: "camabecri" <camabecri@ig.com.br>
ara: <yuka.dama@ig.com.br>
nviada em: quinta-feira, 8 de dezembro de 2005 20:45
ssunto: Re: Autorização

prof a senhora esta bem...Eu nao fiz fuvest ,pois nao tinha opicao de curso para mim.Quanto as autorizacoes estao ndo encaminhadas pela Dori.Beijos Tati ,a nao posso esquecer de agradecer pelo curso,pois estou estudando para o e cai muita coisa na qual a senhora me ensinou....Obrigada!!!

umi

e: "natalia correia alegre" <miladynatalia@hotmail.com>
ara: <yuka.dama@ig.com.br>
nviada em: sábado, 3 de dezembro de 2005 13:47
ssunto: RE: Autorização

prof !!! td bem sim! e com vc??
i mais 3 dias d colegial.... depois !! férias!!!!!
stei sim.... tirei 40 hehe e 49 no emen....como a prova da fuvest este
foi mto mal reformulada eles vao abaixar a nota d corte... pricisavad no
nimo 58 aiai.... mas ainda tem a unesp!!!!
publique tda minhas fotos q vc quiser hehehe !!!
o

Autorizo a mestranda Yumi Kodama, aluna do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, fazer uso das imagens do meu filho Carlos Leonardo dos Santos, matriculado no 3º B coletadas durante o Curso de Geometria Espacial ministrado nos meses abril, maio e junho de 2005, na E.E.Rui Bloem em sua dissertação de mestrado.

São Paulo, 09 / 12 /2005

Carlos Leonardo
Ass. do aluno

Carlos Leonardo
Ass. do responsável.

Autorizo a mestranda Yumi Kodama, aluna do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP, fazer uso das imagens do meu filho Jean Claudio de Andrade Santos, matriculado no 3º B coletadas durante o Curso de Geometria Espacial ministrado nos meses abril, maio e junho de 2005, na E.E.Rui Bloem em sua dissertação de mestrado.

São Paulo, 15 / 02 /2006

Jean Claudio de A. Santos
Ass. do aluno

Jean Claudio de A. Santos
Ass. do responsável.

Baixar livros de Literatura
Baixar livros de Literatura de Cordel
Baixar livros de Literatura Infantil
Baixar livros de Matemática
Baixar livros de Medicina
Baixar livros de Medicina Veterinária
Baixar livros de Meio Ambiente
Baixar livros de Meteorologia
Baixar Monografias e TCC
Baixar livros Multidisciplinar
Baixar livros de Música
Baixar livros de Psicologia
Baixar livros de Química
Baixar livros de Saúde Coletiva
Baixar livros de Serviço Social
Baixar livros de Sociologia
Baixar livros de Teologia
Baixar livros de Trabalho
Baixar livros de Turismo