

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência de infinitas soluções para o problema

$$\Delta u + |u|^{\frac{4}{n-2}}u = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 3,$$

as quais possuem energia finita e que mudam de sinal. Para tanto, usaremos argumentos desenvolvidos por Ding [9]. Neste caso, resolveremos um problema, na esfera S^n , que é equivalente ao problema em questão.

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Abstract

In this work, we study the existence of infinite solutions to the problem

$$\Delta u + |u|^{\frac{4}{n-2}}u = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 3,$$

which has finite energy and change sign. To do this, we use arguments developed by Ding [9]. In this case, we solve a problem, on sphere S^n , that is equivalent to the problem in question.

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Teconologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sobre a Existência de Infinitas
Soluções com Energia Finita de Uma
Equação Elíptica em S^n

por

Jesualdo Gomes das Chagas

sob orientação do

Prof. Dr. Marco Aurelio Soares Souto

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Campina Grande - PB

Setembro/2005

Sobre a Existência de Infinitas Soluções com Energia Finita de Uma Equação Elíptica em S^n

por

Jesualdo Gomes das Chagas

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. José Fábio Bezerra Montenegro

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves

Prof. Dr. Marco Aurelio Soares Souto

Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Setembro/2005

Agradecimentos

- A Deus e à Sempre Virgem Maria, "Mãe do meu Senhor"(S. Lucas I, 43);
- Aos meus pais, Moisés e Selma;
- À minha esposa Adriana e ao nosso bebê, que nascerá em breve, se Deus assim o permitir;
- A todos os outros que também fazem parte de minha família;
- Ao professor Marco Aurelio que me orientou no desenvolvimento deste trabalho. Sempre paciente e compreensivo;
- Aos professores Claudianor O. Alves e José Fábio Montenegro pela disponibilidade nesta tarefa de me avaliar, fazendo parte da banca examinadora;
- A todos que fazem parte do departamento de Matemática e Estatística da UFCG;
- Aos meus colegas da graduação e da pós-graduação. Em especial a Ana Cristina, Tatiana, Iraponil, Juliana, Jesus, Moisés e Orlando.
- Aos meus amigos, não-necessariamente do Departamento de Matemática;
- Afinal, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Dedicatória

À Adriana e ao nosso bebê.

“Extra Ecclesia nullus omnino salvatur”
(IV Concílio de Latrão, Denzinger 430)

Conteúdo

Introdução	6
1 Espaços de Sobolev Sobre Variedades Compactas	9
1.1 Preliminares	9
1.2 A Integral em Vizinhanças Coordenadas	10
1.3 A Mudança de Parametrização	12
1.4 A Integral sobre Variedades Riemaniannas(sem bordo e compactas) . .	14
1.5 A Teoria da Medida e Integração	15
1.6 Os Espaços $L^r(M)$	15
1.7 Os Espaços de Sobolev $W^{1,r}(M)$	17
1.7.1 O Espaço de Sobolev $W^{1,r}(\Omega)$	17
1.7.2 O Espaço de Sobolev $W^{1,r}(M)$	21
1.8 As Imersões de Sobolev sobre a Variedade M	22
1.9 Regularização de soluções de EDP's Elípticas sobre M	23
2 Problema de Yamabe (Caso Subcrítico)	27
3 Existência de Infinitas Soluções com Energia Finita	32
3.1 Observações Preliminares	32
3.2 Lemas Iniciais	34
3.3 Uso do Princípio de Criticalidade Simétrica	40
3.4 Lemas Finais	41
A Variedades Riemannianas	46
A.1 Variedades Diferenciáveis	46

	ii
A.2 Espaço Tangente	47
A.3 Campo de Vetores	49
A.4 Métricas Riemannianas	50
A.5 Conexões Riemannianas	51
A.6 Curvatura	53
A.7 A Esfera S^n	55
A.7.1 Símbolos de Christoffel em S^n	55
A.7.2 Curvatura Escalar em S^n	56
A.8 Isometrias	57
B Gradiente, Divergente e Laplaciano	61
B.1 Gradiente	61
B.2 Divergente	63
B.3 Laplaciano	65
C Métricas Conformes	67
D Grupos Topológicos	74
Bibliografia	78

Introdução

Em 1960, foi formulado, por H. Yamabe, a seguinte conjectura: "Toda variedade Riemanniana compacta (M, g) , de dimensão $n \geq 3$, admite uma métrica conforme à g cuja curvatura escalar é constante". Tal problema, passou a ser chamado, desde então, de Problema de Yamabe.

Inicialmente, o próprio Yamabe [20] apresentou uma "prova" deste fato. Mas, em 1968, N.S. Trudinger [19] reexaminou o trabalho de Yamabe e descobriu um erro.

O problema foi completamente resolvido apenas em 1984. E, para tanto, contribuíram N. S. Trudinger [19], T. Aubin [3] e R. Schoen [18].

Em virtude da relação

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad (1)$$

entre curvaturas escalares, S_g e $S_{\tilde{g}}$, de métricas conformes (vide Apêndice C), onde $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ com $u > 0$ e $u \in C^\infty(M)$, nota-se que: resolver o problema de Yamabe é equivalente a demonstrarmos a existência de solução positiva para a equação

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad (2)$$

para algum número real λ .

Observe que, comparando-se (2) com

$$\Delta u + |u|^{\frac{4}{n-2}} u = 0, \quad (3)$$

vê-se que ao tentarmos encontrar uma solução positiva para (3), estamos, na verdade, procurando demonstrar que a métrica usual de \mathbb{R}^n , cuja curvatura escalar é nula, é conforme a uma métrica \tilde{g} de curvatura escalar constante e igual a $S_{\tilde{g}} = \frac{4(n-1)}{n-2}$.

No artigo de Gidas, Ni & Nirenberg [11], prova-se que qualquer solução positiva da equação elíptica

$$\Delta u + |u|^{\frac{4}{n-2}}u = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 3, \quad (4)$$

que possua energia finita, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx < \infty, \quad (5)$$

é necessariamente da forma

$$u(x) = \left(\frac{\sqrt{n(n-2)a}}{a^2 + |x - \xi|^2} \right)^{(n-2)/2}, \quad (6)$$

onde $a > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Nosso principal objetivo, neste trabalho, é o de apresentar um resultado devido a Ding [9], onde se estabelece que (4)-(5) possui uma infinidade de soluções que mudam de sinal.

Este trabalho é organizado da seguinte maneira:

No **Capítulo 1**, definimos a integral sobre variedades Riemannianas compactas e demonstramos alguns resultados de integração envolvendo divergente de campos e gradientes e laplacianos de funções. Definimos, também, os espaços de Lebesgue $L^r(M)$ e de Sobolev $W^{1,r}(M)$ em variedades compactas e provamos alguns resultados de imersões de Sobolev e de regularização de soluções de EDP's elípticas sobre M .

No **Capítulo 2**, enunciamos o problema de Yamabe no caso subcrítico, e demonstramos a existência de solução positiva para este caso.

No **Capítulo 3**, fazemos, inicialmente, algumas observações preliminares sobre o problema em questão, afim de concluirmos que: para demonstrarmos o que é proposto, basta provarmos o seguinte teorema:

Teorema 3.1 *Existe uma sequência de soluções u_k , com energia finita, do problema*

$$\Delta u + |u|^{\frac{4}{n-2}}u = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 3, \quad (7)$$

tal que $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k|^2 dx \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.

Fixamos nossa atenção, neste capítulo, à uma série de lemas que, consequentemente, visam demonstrar tal teorema. Em resumo, o que fazemos é o seguinte: mostramos que o problema em questão é, de certa forma, equivalente ao problema

$$\Delta v - \frac{1}{4}n(n-2)v + |v|^{q-2}v = 0, \quad v \in C^2(S^n), \quad q = 2^* = \frac{2n}{n-2}. \quad (8)$$

Depois, usamos o Princípio de Criticalidade Simétrica (vide Apêndice D) e um resultado, da Teoria de Pontos Críticos, devido à Ambrosetti & Rabinowitz [2], para demonstrarmos o Lema 3.2.7 (a seguir) e, assim, concluirmos a validade do Teorema 3.1.

Lema 3.2.7. Existe uma sequência $\{v_k\}$ de soluções de

$$\Delta v - \frac{1}{4}n(n-2)v + |v|^{q-2}v = 0, \quad v \in C^2(S^n), \quad q = 2^* = \frac{2n}{n-2}, \quad (9)$$

tal que $\int_{S^n} |v_k|^q dV \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, onde Δ denota o laplaciano com relação à métrica usual de S^n .

No **Apêndice A**, iniciamos fazendo uma breve revisão de alguns conceitos sobre variedades Riemannianas. Esta exposição inicial é feita de modo a combinar com a exposição em [7]. Logo após, calculamos os símbolos de Christoffel da esfera S^n , parametrizada pela projeção estereográfica, e a curvatura da esfera S^n . Por fim, colocamos uma seção sobre isometrias entre variedades, na qual apresentamos alguns resultados que são utilizados em outras partes deste trabalho.

No **Apêndice B**, definimos o gradiente e o laplaciano de uma função $f \in C^\infty(M)$, e o divergente de um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, onde M é uma variedade Riemanniana, além de demonstrarmos algumas expressões locais para o gradiente, divergente e laplaciano.

No **Apêndice C**, temos, como fato principal, a demonstração da relação (1) entre as curvaturas escalares, S_g e $S_{\tilde{g}}$ com relação às métricas conformes g e \tilde{g} , respectivamente, onde $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$.

No **Apêndice D**, fazemos algumas considerações sobre grupos topológicos. Aqui, demonstramos que $O(n+1)$ atua em $H^1(S^n)$ e apresentamos um resultado importante, o qual será denominado por *Princípio de Criticalidade Simétrica*, que será utilizado no Capítulo 3.

Capítulo 1

Espaços de Sobolev Sobre Variedades Compactas

1.1 Preliminares

Neste capítulo consideraremos (M, g) uma variedade Riemanniana orientável de dimensão n . Indicaremos, neste capítulo, uma parametrização genérica de uma vizinhança parametrizada Ω por $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, $\Omega = x(U)$. A variável no aberto U é $z = (x_1, \dots, x_n) \in U$.

Da seção 1.3 em diante estaremos considerando que M é uma variedade riemanniana compacta, orientável e sem bordo. Isto quer dizer que M pode ser coberto por um número finito de vizinhanças parametrizadas da forma $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Denotemos $\Omega_\alpha = x_\alpha(U_\alpha)$.

Para $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, vamos indicar por $D_j f(z)$ a derivada parcial de f com relação à coordenada x_j de z . Isto para distingüir do campo tangente $\frac{\partial}{\partial x_j}$ definido em Ω por

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p)(u) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(p) = D_j(u \circ x)(z), \quad u \in C^\infty(M),$$

onde $x(z) = p$.

Denotaremos por G o determinante da matriz $(g_{ij})_{n \times n}$ dos coeficientes da métrica g , sendo $(g^{ij})_{n \times n}$ sua inversa.

Devido à positividade da métrica, obtemos que existem $0 < \lambda \leq \Lambda$ tais que

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \forall p \in \Omega, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(p)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \forall p \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

e

$$\lambda^2 \leq G(p) \leq \Lambda^2, \quad \forall p \in \Omega. \quad (1.3)$$

1.2 A Integral em Vizinhanças Coordenadas

A integral de uma função u contínua em M , de suporte compacto contido numa vizinhança parametrizada $\Omega = x(U)$ é definida por

$$\int_M u dV = \int_U (u \circ x)(z) \sqrt{G \circ x}(z) dz. \quad (1.4)$$

Claro que nestas condições a função $u \circ x$ é contínua e possui suporte compacto no aberto U do \mathbb{R}^n e, portanto, a definição é consistente (demonstraremos mais adiante que tal definição não depende da parametrização contendo o suporte de u).

Vejam os alguns resultados sobre integrais de funções contínuas u com suporte compacto numa vizinhança parametrizada Ω . Indicaremos esta situação por

$$\text{supp } v \subset\subset \Omega.$$

Lema 1.2.1 *Sejam $u, v \in C^\infty(M)$, tais que $\text{supp } v \subset\subset \Omega$. Então:*

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle dV = - \int_M v \Delta u dV.$$

Prova. Utilizando a expressão (B.10) e integração por partes no \mathbb{R}^n , temos:

$$\begin{aligned} \int_M v \Delta u dV &= \int_U \frac{v \circ x}{\sqrt{G \circ x}} \sum_{i,j=1}^n D_i \left[(g^{ij} \circ x) \sqrt{G \circ x} D_j (u \circ x) \right] \sqrt{G \circ x} dz \\ &= \int_U (v \circ x) \sum_{i,j=1}^n D_i \left[(g^{ij} \circ x) \sqrt{G \circ x} D_j (u \circ x) \right] dz \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_U D_i (v \circ x) \left[(g^{ij} \circ x) D_j (u \circ x) \right] \sqrt{G \circ x} dz \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_M \frac{\partial v}{\partial x_i} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} dV \\ &= - \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle dV. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A respeito do divergente de um campo temos:

Lema 1.2.2 *Seja $Y \in \mathfrak{X}(M)$, tal que $\text{supp } Y \subset\subset \Omega$. Então:*

$$\int_M \text{div } Y dV = 0.$$

Prova. Primeiramente observe que sendo o campo Y , em Ω , dado por:

$$Y(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

então as funções $a_i \circ x$ possuem suporte compacto dentro de U . Defina o campo $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$F(z) = (\sqrt{G \circ x}(z) (a_1 \circ x)(z), \dots, \sqrt{G \circ x}(z) (a_n \circ x)(z)),$$

o qual tem por divergente

$$\text{div } F(z) = \sum_{i=1}^n D_i \left[\sqrt{G \circ x} (a_i \circ x) \right].$$

Agora basta usar o Teorema do Divergente em $U \subset \mathbb{R}^n$, e a expressão (B.7) do divergente do campo Y em Ω , para obter

$$\begin{aligned} \int_M \text{div } Y dV &= \int_U \frac{1}{\sqrt{G \circ x}} \sum_{i=1}^n D_i \left[\sqrt{G \circ x} (a_i \circ x) \right] \sqrt{G \circ x} dz \\ &= \int_U \sum_{i=1}^n D_i \left[\sqrt{G \circ x} (a_i \circ x) \right] dz = \int_U \text{div } F(z) dz = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observação. *Note que o Lema 1.2.1 segue como corolário do Lema 1.2.2 se considerarmos o campo $Y = v \nabla u$.*

Corolário 1.2.3 *Suponha que $u \in C^\infty(M)$ é tal que $\text{supp } u \subset\subset \Omega$. Então:*

$$\int_M \Delta u dV = 0.$$

Prova. Aplique o Lema 1.2.2 para $Y = \nabla u$. ■

Corolário 1.2.4 *Suponha $u, v \in C^\infty(M)$ com $\text{supp } v \subset\subset \Omega$. Então, para todo $j = 1, 2, 3, \dots, n$:*

$$\int_M \frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial v}{\partial x_j} dV = - \int_M \frac{v}{\sqrt{G}} \frac{\partial u}{\partial x_j} dV.$$

Prova. Defina o campo Y por

$$\begin{cases} Y(p) = 0 \text{ se } p \notin \Omega \\ Y(p) = \frac{u(p)v(p)}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \text{ se } p \in \Omega. \end{cases}$$

Usando a expressão (B.7) do divergente de Y , temos:

$$\operatorname{div} Y(p) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{uv}{\sqrt{G}} \sqrt{G} \right] = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_j} (uv) = \frac{1}{\sqrt{G}} v \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{1}{\sqrt{G}} u \frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

Usando o Lema 1.2.2, concluímos a demonstração. ■

1.3 A Mudança de Parametrização

Suponha que $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ e $x_\beta : U_\beta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ são parametrizações da mesma vizinhança $\Omega = x_\alpha(U_\alpha) = x_\beta(U_\beta)$. A variável no aberto U_α é $z = (x_1, \dots, x_n) \in U_\alpha$ e $q = (y_1, \dots, y_n) \in U_\beta$ é a variável em U_β . A mudança de variáveis $F : U_\alpha \rightarrow U_\beta$, $q = F(z) = x_\beta^{-1} \circ x_\alpha(z) = (y_1(z), \dots, y_n(z))$, tem derivada $C = F'(z) = \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_j} \right)_{n \times n}$, $y_k = y_k(x_1, \dots, x_n)$.

A notação $D_{x_j} f(z)$ vai indicar a derivada parcial de f com relação à coordenada x_j de z , e $D_{y_k} f(q)$ indicará a derivada parcial de f com relação à coordenada y_k de q . Considerando-se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e derivando-se $u \circ x_\alpha(z) = (u \circ x_\beta) \circ F(z)$ com relação à coordenada x_j , obtemos para $p = x_\alpha(z) = x_\beta(q)$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p)(u) = \frac{\partial u}{\partial x_j}(p) = D_{x_j}(u \circ x_\alpha)(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(z) D_{y_k}(u \circ x_\beta)(q),$$

que combinando com

$$\frac{\partial}{\partial y_k}(p)(u) = \frac{\partial u}{\partial y_k}(p) = D_{y_k}(u \circ x_\beta)(z)$$

nos leva às relações

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(p) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(z) \frac{\partial u}{\partial y_k}(p) \quad (1.5)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(z) \frac{\partial}{\partial y_k}(p), \quad \forall p \in \Omega. \quad (1.6)$$

Analogamente,

$$\frac{\partial u}{\partial y_\ell}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_\ell}(q) \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \quad (1.7)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y_\ell}(p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_\ell}(q) \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \quad (1.8)$$

onde $(F^{-1})'(q) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_\ell}\right)_{n \times n}$ que é a matriz inversa de $C = F'(z)$.

Indicaremos por B a matriz $(g_{ij})_{n \times n}$,

$$g_{ij}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$B^{-1} = (g^{ij})_{n \times n}$ e por L a matriz $(s_{k\ell})_{n \times n}$,

$$s_{k\ell}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_k}, \frac{\partial}{\partial y_\ell} \right\rangle, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n,$$

$L^{-1} = (s^{k\ell})_{n \times n}$. As matrizes B e L são simétricas, invertíveis e, utilizando a expressão (1.6), se relacionam por:

$$g_{ij} = \left\langle \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial y_\ell}{\partial x_i}(z) \frac{\partial}{\partial y_\ell}(p), \sum_{k=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(z) \frac{\partial}{\partial y_k}(p) \right\rangle,$$

de onde vem

$$g_{ij} = \sum_{\ell, k=1}^n \frac{\partial y_\ell}{\partial x_i}(z) s_{\ell k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(z),$$

que na notação matricial fica $B = C^T L C$ (aqui C^T indica a matriz transposta de C). Como $B^{-1} = C^{-1} L^{-1} (C^{-1})^T$, então

$$g^{ij} = \sum_{\ell, k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_\ell}(q) s^{\ell k} \frac{\partial x_j}{\partial y_k}(q). \quad (1.9)$$

Lema 1.3.1 *A definição da integral $\int_{\Omega} u dV$, independe da parametrização escolhida, ou seja,*

$$\int_{U_\alpha} (u \circ x_\alpha)(z) \sqrt{G \circ x_\alpha}(z) dz = \int_{U_\beta} (u \circ x_\beta)(q) \sqrt{S \circ x_\beta}(q) dq,$$

onde $G = \det(g_{ij})$ e $S = \det(s_{\ell k})$.

Prova. Como $B = C^T L C$, então $G = S(\det C)^2 = S(\det F'(z))^2$. Basta usar o Teorema de Mudança de Variáveis na Integral de Riemann

$$\int_{U_\beta} f(q) dq = \int_{U_\alpha} (f \circ F)(z) |\det F'(z)| dz,$$

no difeomorfismo $F : U_\alpha \rightarrow U_\beta$, $F = x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$, para $f : U_\beta \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(q) = (u \circ x_\beta)(q) \sqrt{S \circ x_\beta}(q)$. ■

1.4 A Integral sobre Variedades Riemaniannas(sem bordo e compactas)

Considere uma partição da unidade $\{\rho_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ subordinada à cobertura $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ de M (vide Definição A.1.3). Para uma função u contínua em M a integral sobre a variedade é definida da seguinte maneira: para cada α , a função $\rho_\alpha u$ possui suporte compacto dentro da vizinhança parametrizada Ω_α . Daí define-se a integral por:

$$\int_M u dV = \sum_{\alpha=1}^N \int_M \rho_\alpha u dV.$$

O Lema 1.3.1 mostra que esta definição independe da escolha da cobertura da variedade.

Com esta definição podemos generalizar os Lemas 1.2.1, 1.2.2 e o Corolário 1.2.3, para uma função qualquer de $C^\infty(M)$, desde que M seja uma variedade compacta, como veremos a seguir.

Lema 1.4.1 *Sejam $u, v \in C^\infty(M)$, onde M é uma variedade riemanniana compacta e orientável. Então,*

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle dV = - \int_M v \Delta u dV.$$

Prova. Usando o Lema 1.2.1 nas funções $\rho_\alpha v$, temos

$$\begin{aligned} \int_M v \Delta u dV &= \sum_{\alpha=1}^N \int_M \rho_\alpha v \Delta u dV = - \sum_{\alpha=1}^N \int_M \langle \nabla u, \nabla(\rho_\alpha v) \rangle dV \\ &= - \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle dV. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 1.4.2 *Se $Y \in \mathfrak{X}(M)$, então*

$$\int_M \operatorname{div} Y dV = 0.$$

Prova. Usando o Lema 1.2.2 nos campos vetoriais $\rho_\alpha Y$, temos

$$\int_M \operatorname{div} Y dV = \sum_{\alpha=1}^n \int_M \operatorname{div}(\rho_\alpha Y) dV = 0. \quad \blacksquare$$

Corolário 1.4.3 *Se $u \in C^\infty(M)$, então:*

$$\int_M \Delta u dV = 0.$$

Prova. Aplique o Lema 1.4.2 para $Y = \nabla u$. \blacksquare

1.5 A Teoria da Medida e Integração

Considere \mathcal{B} a σ -álgebra de Borel, definida como sendo a menor σ -álgebra que contém a topologia \mathfrak{T} dos abertos de M . Nesta σ -álgebra de Borel \mathfrak{B} temos as seguintes propriedades:

- Um conjunto E pertence a \mathfrak{B} se, e somente se, $x^{-1}(E \cap \Omega)$ é Lebesgue-mensurável em U , para toda parametrização x ;

- Uma função simples

$$\psi = \sum_{k=1}^h \alpha_k \chi_{E_k}$$

é \mathfrak{B} -mensurável se, e somente se, $\psi \circ x$ é função simples Lebesgue-mensurável em U , para toda parametrização x ;

- Uma função $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathfrak{B} -mensurável se, e somente se, $u \circ x$ é Lebesgue-mensurável em U , para toda parametrização x ;
- Um conjunto mensurável $E \in \mathfrak{B}$ tem medida nula $\mu(E) = 0$ se, e somente se, a medida de Lebesgue de $x^{-1}(E \cap \Omega)$ é nula, para toda parametrização x ;

A medida de Lebesgue em M é a medida gerada a partir da aplicação enumerável aditiva $\mu : \mathfrak{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$, dada por:

$$\mu(E) = \int_E dV := \sum_{\alpha} \int_M \chi_E \rho_{\alpha}, \quad E \in \mathfrak{T}.$$

onde χ_E é a função característica do conjunto E . Sobre geração de medidas, veja [16] - Capítulo 9.

1.6 Os Espaços $L^r(M)$

Definição 1.6.1 *Seja $r \geq 1$. O Espaço $L^r(M)$ é definido como*

$$L^r(M) = \{u : M \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ é mensurável e } \int_M |u|^r dV < \infty\},$$

e está munido pela norma

$$\|u\|_{L^r(M)} = \left(\int_M |u|^r dV \right)^{\frac{1}{r}}.$$

O Espaço $L^r(M)$ é de Banach. Dizemos que $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável se $u \in L^1(M)$.

O lema a seguir facilitará o cálculo de integrais sobre M .

Lema 1.6.2 *Existe uma família finita de parametrizações $\{x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M\}_{\alpha=1}^N$, $\Omega_\alpha = x_\alpha(U_\alpha)$, satisfazendo:*

- (i) $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta = \emptyset$, $\alpha \neq \beta$;
- (ii) $M = \bigcup_{\alpha=1}^N \overline{\Omega_\alpha}$;
- (iii) *Para todo $u \in L^1(M)$, tem-se*

$$\int_M u dV = \sum_{\alpha=1}^N \int_{\Omega_\alpha} u dV.$$

Prova. Seja $\{(V_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha=1}^N$ um atlas de M . Considere, então,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= x_1(V_1) \\ \Omega_2 &= (M \setminus \overline{\Omega_1}) \cap x_2(V_2) \\ \Omega_3 &= [M \setminus (\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2})] \cap x_3(V_3) \\ &\vdots \\ \Omega_N &= \left[M \setminus \left(\bigcup_{\alpha=1}^{N-1} \overline{\Omega_\alpha} \right) \right] \cap x_N(V_N). \end{aligned}$$

Utilizando-se a família $\{\Omega_1, \dots, \Omega_N\}$, pode-se concluir o resultado desejado. ■

Agora, sem perda de generalidade, vamos supor que (1.1), (1.2) e (1.3) se verificam uniformemente em $\alpha = 1, 2, \dots, N$ em todas as parametrizações x_α .

Mais uma vez, vamos indicar qualquer parametrização $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$, por $x : U \rightarrow M$, $\Omega = x(U)$.

Para cada $u \in L^r(M)$, observe que $u \circ x \in L^r(U)$. Com efeito, usando (1.3) temos:

$$\lambda \int_U |u \circ x|^r dz \leq \lambda \int_U |u \circ x|^r \sqrt{G \circ x} dz = \int_\Omega |u|^r dV \leq \|u\|_{L^r(M)}^r, \quad (1.10)$$

ou seja,

$$\lambda^{\frac{1}{r}} \|u \circ x\|_{L^r(U)} \leq \|u\|_{L^r(M)},$$

para todo $u \in L^r(M)$. Isto diz que a aplicação $\pi : L^r(M) \rightarrow L^r(U)$, dada por $\pi(u) = u \circ x$ é linear e contínua. Por outro lado, usando (1.3),

$$\int_\Omega |u|^r dV = \int_U |u \circ x(z)|^r \sqrt{G \circ x} dz \leq \Lambda \int_U |u \circ x(z)|^r dz = \Lambda \|u \circ x\|_{L^r(U)}^r. \quad (1.11)$$

Mais ainda, combinando (1.10) e (1.11) temos

$$\lambda \|u \circ x\|_{L^r(U)}^r \leq \int_\Omega |u|^r dV \leq \Lambda \|u \circ x\|_{L^r(U)}^r \quad (1.12)$$

Lema 1.6.3 Temos que $u \in L^r(M)$ se, e somente se, $u \circ x_\alpha \in L^r(U_\alpha)$, para todo $\alpha = 1, 2, \dots, N$. A norma

$$\|u\|_r^* = \left(\sum_{\alpha=1}^n \|u \circ x\|_{L^r(U_\alpha)}^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

é equivalente à norma usual de $L^r(M)$.

Prova. Basta simplesmente combinar o ítem (iii) do Lema 1.6.2 e a desigualdade (1.12) para obter:

$$\lambda^{\frac{1}{r}} \|u\|_p^* \leq \|u\|_{L^r(M)} \leq \Lambda^{\frac{1}{r}} \|u\|_p^*,$$

para todo $u \in L^r(M)$. ■

1.7 Os Espaços de Sobolev $W^{1,r}(M)$

1.7.1 O Espaço de Sobolev $W^{1,r}(\Omega)$

Mais uma vez, fixe uma parametrização $x : U \rightarrow M$, $\Omega = x(U)$.

Definição 1.7.1 Seja $u \in L^1(\Omega)$. Dizemos que uma função $f \in L^1(\Omega)$ é a derivada $\frac{\partial}{\partial x_k}$ fraca de u (no sentido das distribuições) em $\Omega = x(U)$, se

$$\int_{\Omega} \frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial v}{\partial x_k} dV = - \int_{\Omega} f \frac{v}{\sqrt{G}} dV,$$

para todo $v \in C_0^\infty(\Omega)$, $\text{supp } v \subset\subset \Omega$ (tal definição independe da parametrização).

Observação 1.7.2 O Corolário 1.2.4 nos mostra que a derivada fraca f da definição acima coincide com $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, no caso de $u \in C^\infty(\Omega)$.

Lema 1.7.3 Seja $u \in L^1(\Omega)$. Então, u possui derivada $\frac{\partial}{\partial x_k}$ fraca em Ω se, e somente se, $u \circ x$ possui derivada fraca $D_k(u \circ x)$ em U . Mais ainda, se f é a sua derivada $\frac{\partial}{\partial x_k}$ fraca em Ω , então $f \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}$ é a derivada fraca $D_k(u \circ x)$ da função $u \circ x$.

Prova. Seja $\phi \in C_0^\infty(U)$. Considere $\psi \in C^\infty(\Omega)$ dada por $\psi = \phi \circ x^{-1}$. Certamente, temos que $\text{supp } \psi \subset\subset \Omega$ e $(\psi \circ x)(z) = \phi(z)$ e $D_k \phi(z) = D_k(\psi \circ x)(z) = \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(x(z))$

para todo $z \in U$. Dessa forma, utilizando a definição de f , a demonstração é concluída a partir da identidade abaixo:

$$\begin{aligned} \int_U (u \circ x) D_k \phi dz &= \int_U (u \circ x) \frac{D_k(\psi \circ x)}{\sqrt{G \circ x}} \sqrt{G \circ x} dz \\ &= \int_\Omega \frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} dV = - \int_\Omega \frac{f \psi}{\sqrt{G}} dV \\ &= - \int_U (f \circ x) \frac{(\psi \circ x)}{\sqrt{G \circ x}} \sqrt{G \circ x} dz = - \int_U (f \circ x) \phi dz. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definição 1.7.4 *Seja $u \in L^1(\Omega)$. Suponha que u possui todas as derivadas $\frac{\partial}{\partial x_k}$ fracas em $\Omega = x(U)$, denotadas por $f_k : V \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, n$. O gradiente fraco de u em $\Omega = x(U)$ é o campo*

$$\text{grad } u = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p) f_i(p) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad p \in x(U). \quad (1.13)$$

O gradiente fraco foi definido em $\Omega = x(U)$ para que $\text{grad } v = \nabla v$, quando $v \in C^\infty(\Omega)$ (veja (B.2)).

Lema 1.7.5 *Suponha que $u \in L^1(\Omega)$ possui gradiente fraco em Ω . Então, para todo $v \in C^\infty(\Omega)$, $\text{supp } v \subset\subset \Omega$, temos*

$$\int_\Omega \langle \text{grad } u, \nabla v \rangle dV = - \int_\Omega u \Delta v dV.$$

Prova. Observe, primeiramente, que, do mesmo modo como em (B.4), podemos verificar que

$$\langle \text{grad } u, \nabla v \rangle = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} f_i \frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad (1.14)$$

onde f_i é a derivada $\frac{\partial}{\partial x_i}$ fraca de u .

Utilizando (B.10), (1.14) e a definição dos f_k 's, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega u \Delta v dV &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{u}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[g^{ij} \sqrt{G} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dV \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{f_i g^{ij}}{\sqrt{G}} \sqrt{G} \frac{\partial v}{\partial x_j} dV \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega f_i g^{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} dV \\ &= - \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^n g^{ij} f_i \frac{\partial v}{\partial x_j} \right] dV \\ &= - \int_\Omega \langle \text{grad } u, \nabla v \rangle dV. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A partir de agora vamos indicar por $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ a função mensurável f_k dada na Definição

1.7.1. Neste caso, $D_k(u \circ x)(z) = \frac{\partial u}{\partial x_k} \circ x(z)$ quase sempre em U e, além disso,

$$\text{grad } u = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p) \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad p \in x(U). \quad (1.15)$$

e

$$\langle \text{grad } u, \text{grad } u \rangle = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}. \quad (1.16)$$

Seja Ω uma vizinhança parametrizada por $x : U \rightarrow \Omega$, com U aberto limitado e tal que são satisfeitos (1.1), (1.2) e (1.3).

Definição 1.7.6 *O espaço vetorial $W^{1,r}(\Omega) = \{u \in L^r(\Omega) : |\text{grad } u| \in L^r(\Omega)\}$ munido com a norma*

$$\|u\|_{W^{1,r}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^r dV + \int_{\Omega} |\text{grad } u|^r dV \right)^{\frac{1}{r}}.$$

é o Espaço de Sobolev $W^{1,r}$ sobre a vizinhança parametrizada Ω . Quando $r = 2$, $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ é um Espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dV + \int_{\Omega} \langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle dV.$$

Observe que a partir de (1.1) e (1.16), temos

$$\lambda^r \left(\sum_{i=1}^n |D_i(u \circ x)(z)|^2 \right)^{\frac{r}{2}} \leq |\text{grad } u|^r(p) \leq \Lambda^r \left(\sum_{i=1}^n |D_i(u \circ x)(z)|^2 \right)^{\frac{r}{2}},$$

para todo $z \in U$ e $p = x(z)$. Usando, ainda, a equação (1.3), segue que

$$\lambda^{r+1} \int_U \left[\sum_{i=1}^n |D_i(u \circ x)|^2 \right]^{\frac{r}{2}} dz \leq \int_{\Omega} |\text{grad } u|^r dV \leq \Lambda^{r+1} \int_U \left[\sum_{i=1}^n |D_i(u \circ x)|^2 \right]^{\frac{r}{2}} dz.$$

A última desigualdade e a desigualdade (1.12) demonstram o seguinte lema:

Lema 1.7.7 *a aplicação $\pi : W^{1,r}(\Omega) \rightarrow W^{1,r}(U)$, dada por $\pi(u) = u \circ x$ é um isomorfismo. As normas $\|u\|_{W^{1,r}(\Omega)}$ e $\|u\|_{\Omega,1,r} = \|u \circ x\|_{W^{1,r}(U)}$ são equivalentes.*

O Lema a seguir é uma versão da desigualdade de Poincaré para variedades:

Lema 1.7.8 *Existe uma constante $C = C_{r,\Omega} > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega} |v|^r dV \leq C \int_{\Omega} |\text{grad } v|^r dV$$

para todo $v \in W^{1,r}(\Omega)$, com $\text{supp } v \subset\subset \Omega$.

Prova. Esta prova é uma simples aplicação do Lema 1.7.7 e a desigualdade de Poincaré (corolário IX.19 em [12]). ■

Para finalizar esta subseção vamos mostrar que o gradiente fraco independe da parametrização escolhida. Para isto considere as parametrizações x_α e x_β dadas na seção 1.3 tais que $x_\alpha(U_\alpha) = \Omega = x_\beta(U_\beta)$. Suponha haja dois gradientes fracos para uma função $u \in L^1(\Omega)$, a saber:

$$\text{grad}_\alpha u = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p) \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad p \in \Omega. \quad (1.17)$$

$$\text{grad}_\beta u = \sum_{k,\ell=1}^n s^{k\ell}(p) \frac{\partial u}{\partial y_k}(p) \frac{\partial}{\partial y_\ell}, \quad p \in \Omega. \quad (1.18)$$

De acordo com a Proposição IX.6 em [12], as expressões (1.5) e (1.7) também são válidas para as derivadas fracas $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial u}{\partial y_k}$. Substituindo (1.5), (1.6) e (1.9) em (1.17), temos

$$\begin{aligned} \text{grad}_\alpha u &= \sum_{i,j=1}^n \left[\sum_{\ell,k=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_\ell}(q) s^{\ell k} \frac{\partial x_j}{\partial y_k}(q) \right] \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial x_j}, \\ &= \sum_{\ell,k=1}^n s^{\ell k} \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_\ell}(q) \frac{\partial x_j}{\partial y_k}(q) \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial x_j} \right], \\ &= \sum_{\ell,k=1}^n s^{\ell k} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \frac{\partial x_i}{\partial y_\ell}(q) \right] \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial y_k}(q) \frac{\partial}{\partial x_j} \right]. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\text{grad}_\alpha u = \sum_{k,\ell=1}^n s^{k\ell}(p) \frac{\partial u}{\partial y_k}(p) \frac{\partial}{\partial y_\ell} = \text{grad}_\beta u.$$

Lema 1.7.9 *O gradiente fraco não depende da parametrização escolhida, ou seja, se x_α e x_β são duas parametrizações tais que $x_\alpha(U_\alpha) = \Omega = x_\beta(U_\beta)$ então para uma função $u \in L^1(\Omega)$ onde está definida o gradiente fraco $\text{grad}_\alpha u$, também existe o gradiente fraco $\text{grad}_\beta u$ e deveremos ter*

$$\text{grad}_\alpha u = \text{grad}_\beta u.$$

Prova. Para concluir este resultado basta, depois do que já fizemos, mostrar que as derivadas fracas $\frac{\partial u}{\partial y_k}$ também existem, para todo $k = 1, 2, \dots, n$. Isto decorre do Lema 1.7.3 e da Proposição IX.6 em [12]. ■

1.7.2 O Espaço de Sobolev $W^{1,r}(M)$

Definição 1.7.10 *Seja $u \in L^1(M)$. Suponha que, para qualquer vizinhança parametrizada $x_\alpha : U \rightarrow \Omega_\alpha$, o gradiente fraco $\text{grad}_\alpha u$ está definido. Então o campo vetorial definido por $\text{grad } u = \text{grad}_\alpha u$ em Ω_α é chamado de gradiente fraco de u em M .*

O Lema 1.7.8 garante que a definição é consistente e que uma função $u \in L^1(M)$ possui, no máximo, um gradiente fraco. Certamente que $\text{grad } v = \nabla v$, quando $v \in C^\infty(M)$.

O Lema 1.7.5 pode ser generalizado como a seguir.

Lema 1.7.11 *Suponha que $u \in L^1(M)$ possui gradiente fraco em Ω . Então, para todo $v \in C^\infty(M)$, temos*

$$\int_M \langle \text{grad } u, \nabla v \rangle dV = - \int_M u \Delta v dV.$$

Prova. Basta fazer uso da partição da unidade, e proceder como na prova do Lema 1.4.1. ■

A partir de agora vamos usar a mesma notação ∇u para denotar o $\text{grad } u$.

Definição 1.7.12 *O espaço vetorial $W^{1,r}(M) = \{u \in L^r(M) : |\nabla u| \in L^r(M)\}$, munido com a norma*

$$\|u\|_{W^{1,r}(M)} = \left(\int_M |u|^r dV + \int_M |\nabla u|^r dV \right)^{\frac{r}{2}},$$

é o Espaço de Sobolev $W^{1,r}$ sobre a variedade M . Quando $r = 2$, $H^1(M) = W^{1,2}(M)$ é um Espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(u, v)_{H^1(M)} = \int_M uv dV + \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle dV.$$

Considere uma família de parametrizações com propriedades do Lema 1.6.2. O resultado abaixo é uma consequência imediata do Lema 1.7.7.

Lema 1.7.13 *As normas $\|u\|_{W^{1,r}(M)}$ e*

$$\|u\|_{1,r}^* = \left[\sum_{\alpha=1}^N |u|_{\Omega_\alpha,1,r}^r \right]^{\frac{1}{r}} = \left[\sum_{\alpha=1}^N \|u \circ x_\alpha\|_{W^{1,r}(U_\alpha)}^r \right]^{\frac{1}{r}}$$

são equivalentes em $W^{1,r}(M)$. Aqui, denotamos $|u|_{\Omega_\alpha,1,r}^r = \|u \circ x_\alpha\|_{W^{1,r}(U_\alpha)}^r$.

Observação 1.7.14 *Se $u \in W^{1,r}(M)$, $u \in L^\infty(M)$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe $C^1(\mathbb{R})$, então $v = f \circ u \in W^{1,r}(M)$ e $\nabla v = f'(u)\nabla u$.*

Observação 1.7.15 A observação anterior é válida se $u \in W^{1,r}(M)$ e $|f'(t)| \leq C$ para todo t real.

Observação 1.7.16 Se $u \in W^{1,r}(M)$ e $\psi \in C^1(M)$ então $u\psi \in W^{1,r}(M)$ e $\nabla(u\psi) = \psi\nabla u + u\nabla\psi$.

Observação 1.7.17 Se $u, v \in W^{1,r}(M)$ e $u, v \in L^\infty(M)$ então $uv \in W^{1,r}(M)$ e $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$.

1.8 As Imersões de Sobolev sobre a Variedade M

Definição 1.8.1 Dizemos que uma função $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe $C^{k,\tau}$, e denotamos por $u \in C^{k,\tau}(M)$, se para cada vizinhança parametrizada $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, temos $u \circ x \in C^{k,\tau}(U)$.

Teorema 1.8.2 (Imersão de Sobolev para variedade compacta) Seja M uma variedade compacta orientável de dimensão n . Valem as seguintes afirmações:

- (i) Se $\frac{1}{s} \geq \frac{1}{r} - \frac{1}{n}$, então $W^{1,r}(M)$ está imerso continuamente em $L^s(M)$;
- (ii) (**Rellich-Kondrachov**) A imersão acima é compacta se $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} - \frac{1}{n}$;

Prova. Começaremos com a parte (i). Seja $\{x_\alpha : U_\alpha \rightarrow M\}_{\alpha=1}^N$ a parametrização dada pelo Lema 1.6.2. A imersão de Sobolev, dada no Teorema 7.26 em [8] (ou Teorema IX.16 em [12]), garante que para cada $\alpha = 1, 2, \dots, N$ existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que

$$\|v\|_{L^s(U_\alpha)} \leq C_\alpha \|v\|_{W^{1,r}(U_\alpha)}, \text{ para todo } v \in \|v\|_{W^{1,r}(U_\alpha)}.$$

Faça $C = \max\{C_1, \dots, C_N\}$. Usando a notação dos lemas 1.6.3 e 1.7.13 e as desigualdades acima temos:

$$(\|u\|_s^*)^s = \sum_{\alpha=1}^N \|u \circ x_\alpha\|_{L^s(U_\alpha)}^s \leq \sum_{\alpha=1}^N C_\alpha^s \|u \circ x_\alpha\|_{W^{1,r}(U_\alpha)}^s \leq C^s \sum_{\alpha=1}^N \|u \circ x_\alpha\|_{W^{1,r}(U_\alpha)}^s,$$

e, conseqüentemente,

$$\|u\|_s^* \leq \tilde{C} \|u\|_{1,r}^*$$

para algum \tilde{C} que só depende de C e da equivalência das normas $|\cdot|_r$ e $|\cdot|_s$ do \mathbb{R}^n . Finalmente, utilizando as equivalências das normas $\|u\|_s^*$ com $\|u\|_{L^s(M)}$ e $\|u\|_{1,r}^*$ com $\|u\|_{W^{1,r}(M)}$, o lema fica demonstrado. ■

Observação 1.8.3 Da imersão do lema anterior existe uma menor constante S_M tal que:

$$S_M \left(\int_M |u|^{2^*} dV \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_M (|\nabla u|^2 + u^2) dV \quad (1.19)$$

para todo $u \in H^1(M)$. Aqui $2^* = \frac{2n}{n-2}$.

1.9 Regularização de soluções de EDP's Elípticas sobre M

Voltemos à expressão (1.13) do gradiente fraco ∇u em uma vizinhança Ω parametrizada por $x : U \rightarrow \Omega$. Neste caso, $D_k(u \circ x)(z) = \frac{\partial u}{\partial x_k}(x(z))$ quase sempre em U e, além disso,

$$\nabla u = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p) \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad p \in x(U).$$

Usando a Proposição IX.5 em [12] e a expressão acima, temos a seguinte observação.

Observação 1.9.1 *Se $u \in W^{1,r}(M) \cap L^\infty(M)$, então, para cada $s > 1$, temos $|u|^s \in W^{1,r}(M)$, $\frac{\partial}{\partial x_k}(|u|^s) = s|u|^{s-2}u \frac{\partial u}{\partial x_k}$ e, conseqüentemente, $\nabla(|u|^s) = s|u|^{s-2}u \nabla u$.*

Agora, adaptaremos um resultado contido em Brezis & Kato [13]. Neste caso, é necessário o conceito de *função de Carathéodory*. Para tanto, consulte [10].

Proposição 1.9.2 *Sejam $Q \in L^{\frac{n}{2}}(M)$ uma função não-negativa e $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory. Se $v \in H^1(M)$ satisfaz em M , no sentido das distribuições, à equação*

$$-\Delta v = f(p, v), \quad (1.20)$$

e f verifica, para toda solução fraca u de (1.20),

$$|f(p, u)| \leq (Q(p) + C_0)|u|, \quad (1.21)$$

onde C_0 é uma constante, então $v \in L^r(M)$ para todo $r \in [1, +\infty)$. Mais ainda, existe uma constante positiva $C_r = C(r, C_0, Q)$ tal que

$$\|v\|_{L^{2^*(r+1)}(M)} \leq C_r \|v\|_{L^{2(r+1)}(M)}, \quad (1.22)$$

Para a demonstração da Proposição 1.9.2, precisaremos do lema a seguir:

Lema 1.9.3 *Seja $Q \in L^{\frac{n}{2}}(M)$ uma função não-negativa. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante $c_\varepsilon = c(\varepsilon, Q) > 0$ tal que*

$$\int_M Q(p)u^2 dV \leq \varepsilon \int_M |\nabla u|^2 dV + c_\varepsilon \int_M u^2 dV, \quad \forall u \in H^1(M). \quad (1.23)$$

Prova. Primeiramente, observe que a função Qu^2 é integrável, pois, se $u \in H^1(M)$, temos, pelas imersões de Sobolev, que $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(M)$, de onde segue que Q e u^2 pertencem à espaços de Lebesgue de expoentes conjugados.

Fixado $\varepsilon > 0$, seja $\tilde{c}_\varepsilon = \tilde{c}(\varepsilon, Q) > 0$ tal que

$$\|Q\|_{L^{\frac{n}{2}}(\{Q \geq \tilde{c}_\varepsilon\})} \leq \varepsilon S_M,$$

onde S_M é constante definida em (1.19). Temos

$$\begin{aligned} \int_M Q(p)u^2 dV &= \int_{\{Q \leq \tilde{c}_\varepsilon\}} Q(p)u^2 dV + \int_{\{Q \geq \tilde{c}_\varepsilon\}} Q(p)u^2 dV \\ &\leq \tilde{c}_\varepsilon \int_{\{Q \leq \tilde{c}_\varepsilon\}} u^2 dV + \int_{\{Q \geq \tilde{c}_\varepsilon\}} Q(p)u^2 dV \\ &\leq \tilde{c}_\varepsilon \int_M u^2 dV + \|Q\|_{L^{\frac{n}{2}}(\{Q \geq \tilde{c}_\varepsilon\})} \|u\|_{L^{2^*}(\{Q \geq \tilde{c}_\varepsilon\})}^2. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade (1.19) e a definição de \tilde{c}_ε , a desigualdade (1.23) fica provada para $c_\varepsilon = \tilde{c}_\varepsilon + \varepsilon$. \blacksquare

Agora, estamos prontos para demonstrar a Proposição 1.9.2.

Prova da Proposição 1.9.2. Para cada $k \in \mathbb{N}$ e $r > 0$, considere $A_k = \{p \in M : |v|^r \leq k\}$, $B_k = M \setminus A_k$.

Defina v_k por

$$v_k(p) = \begin{cases} v(p)|v|^{2r}(p), & p \in A_k \\ k^2 v(p), & p \in B_k \end{cases}.$$

Observe que $v_k \leq |v|^{2r+1}$. Portanto, a partir da Observação 1.9.1, podemos concluir que $v_k \in H^1(M)$ e

$$\nabla v_k(p) = \begin{cases} (2r+1)|v|^{2r}(p)\nabla v(p), & p \in A_k \\ k^2 \nabla v(p), & p \in B_k \end{cases}. \quad (1.24)$$

Como

$$\int_M \nabla v \nabla v_k dV = \int_M f(p, v) v_k dV,$$

então, substituindo (1.24) na última equação, obtemos

$$\begin{aligned} (2r+1) \int_{A_k} |v|^{2r} |\nabla v|^2 dV + k^2 \int_{B_k} |\nabla v|^2 dV &\leq \int_M |f(p, v) v_k| dV \\ &\leq \int_M (Q(p) + C_0) |v v_k| dV. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Agora, considere

$$\omega_k(p) = \begin{cases} v(p)|v|^r(p), & p \in A_k \\ k v(p), & p \in B_k \end{cases}.$$

Desse modo,

$$\omega_k^2 = v v_k \leq |v|^{2(r+1)}$$

e

$$\nabla \omega_k(p) = \begin{cases} (r+1)|v|^r(p)\nabla v(p), & p \in A_k \\ k \nabla v(p), & p \in B_k \end{cases}. \quad (1.26)$$

Um simples cálculo mostra que

$$\int_M |\nabla \omega_k|^2 dV = (r+1)^2 \int_{A_k} |v|^{2r} |\nabla v|^2 dV + k^2 \int_{B_k} |\nabla v|^2 dV. \quad (1.27)$$

De (1.25) e (1.27), temos

$$\frac{2r+1}{(r+1)^2} \int_M |\nabla \omega_k|^2 dV \leq \int_M (Q(p) + C_0) \omega_k^2 dV. \quad (1.28)$$

Seja c_r dado no Lema 1.9.3 com relação a $\varepsilon = \frac{2r+1}{2(r+1)^2}$. Assim,

$$\int_M |\nabla \omega_k|^2 dV \leq \tilde{C}_r \int_M \omega_k^2 dV, \quad (1.29)$$

$$\int_M (|\nabla \omega_k|^2 + \omega_k^2) dV \leq (\tilde{C}_r + 1) \int_M \omega_k^2 dV, \quad (1.30)$$

onde $\tilde{C}_r = \frac{2(r+1)^2}{2r+1}(C_0 + c_r)$. Suponha que $v \in L^{2(r+1)}(M)$ para algum $r > 0$.

Aplicando (1.19) em (1.30), ficamos com

$$\left[\int_{A_k} |\omega_k|^{2^*} dV \right]^{\frac{2}{2^*}} \leq \left[\int_M |\omega_k|^{2^*} dV \right]^{\frac{2}{2^*}} \leq S_M^{-1}(\tilde{C}_r + 1) \int_M \omega_k^2 dV,$$

ou seja,

$$\left[\int_{A_k} |v|^{2^*(r+1)} dV \right]^{\frac{2}{2^*}} \leq S_M^{-1}(\tilde{C}_r + 1) \int_M |v|^{2(r+1)} dV. \quad (1.31)$$

Agora, passando ao limite de $k \rightarrow +\infty$ em (1.31), temos que $v \in L^{2^*(r+1)}(M)$ e

$$\|v\|_{L^{2^*(r+1)}(M)} \leq C_r \|v\|_{L^{2(r+1)}(M)}, \quad (1.32)$$

onde

$$C_r = \left(S_M^{-1} \left[\frac{2(r+1)^2}{2r+1}(C_0 + c_r) + 1 \right] \right)^{\frac{1}{2(r+1)}}.$$

Observação: Mostramos, até agora, que vale a seguinte afirmação: se $v \in L^{2(r+1)}(M)$, para algum $r > 0$, então $v \in L^{2^*(r+1)}(M)$ e (1.32) é satisfeito. A demonstração da proposição segue dos argumentos abaixo:

Seja r_1 dado por $2(r_1 + 1) = 2^*$. Note que $0 < r_1$ e $v \in L^{2(r_1+1)}(M)$. Usando a desigualdade (1.32) temos $v \in L^{2^*(r_1+1)}(M)$. Agora, seja r_2 tal que $2(r_2 + 1) = 2^*(r_1 + 1)$. Veja que $0 < r_1 < r_2$ e $v \in L^{2(r_2+1)}(M)$. Novamente por (1.32), temos $v \in L^{2^*(r_2+1)}(M)$. Por este processo, obtemos uma seqüência crescente r_k dada por $2(r_{k+1} + 1) = 2^*(r_k + 1)$ e satisfazendo $v \in L^{2(r_{k+1}+1)}(M)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Daí,

$$r_{k+1} + 1 = \left[\frac{N}{N-2} \right]^k 2^*.$$

Finalmente, conclui-se que r_k tende para ∞ e, conseqüentemente, $v \in L^r(M) \forall r \geq 2$. Mas, como M é compacto, temos que $v \in L^r(M) \forall r \geq 1$. ■

Para finalizar esta seção, apresentamos um resultado de regularidade.

Teorema 1.9.4 *Nas hipóteses da Proposição 1.9.2, suponha que $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$. Então, a solução fraca $v \in H^1(M)$ é de classe $C^\infty(M)$.*

Prova. Já sabemos que $v \in L^r(M)$ para todo $r \geq 1$. Mostraremos que, numa vizinhança $\Omega = x(U)$, parametrizada por $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, a função $v \circ x$ é de classe C^∞ . Para isto, observe que, para todo $\psi \in C^\infty(M)$ de modo que $\text{supp } \psi \subset\subset \Omega$, temos

$$\int_M \nabla v \nabla \psi dV = \int_M f(p, v) \psi dV,$$

Pela definição da integral, para cada $\phi \in C_0^\infty(U)$ (definindo-se $\psi = \phi \circ x^{-1}$), temos:

$$\int_U \sum_{i,j=1}^n (g^{ij} \circ x) D_i(v \circ x) D_j \phi(z) \sqrt{G \circ x} dz = \int_U f(x(z), v \circ x) \phi(z) \sqrt{G \circ x} dz.$$

Isto quer dizer que $v \circ x$ é solução fraca (no sentido de $W^{1,2}(U)$) do problema

$$-Lu = \tilde{f}(z) = \sqrt{G(x(z))} f(x(z), (v \circ x)(z))$$

em U , para todo $r > 0$. Aqui, o operador L é estritamente elíptico e dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n D_j \left(\sqrt{G \circ x} (g^{ij} \circ x) D_i u \right).$$

Como $\tilde{f} \in L^2(U)$, o Teorema 8.8 em [8] implica que $v \circ x \in W^{2,2}(U')$, onde $U' \subset\subset U$. Daí, $v \circ x$ satisfaz no sentido forte (sentido de $W^{2,2}$), a equação $-L_o u = \tilde{f}(z)$, onde

$$L_o u = \sum_{i,j=1}^n \sqrt{G \circ x} (g^{ij} \circ x) D_{ij} u + \sum_{i,j=1}^n D_j \left(\sqrt{G \circ x} (g^{ij} \circ x) \right) D_i u.$$

Como $\tilde{f} \in W_{loc}^{2,2}(U)$, o Teorema 9.19 em [8] implica que $v \circ x \in W_{loc}^{4,2}(U)$. Iterando este argumento, temos que $\tilde{f} \in W_{loc}^{r,2}(U)$ e, conseqüentemente, $v \circ x \in W_{loc}^{r,2}(U)$ para todo $r \geq 1$. É conseqüência do Teorema 7.26, também em [8], que $v \circ x \in C^m(U)$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e, assim, $v \circ x \in C^\infty(U)$. ■

Capítulo 2

Problema de Yamabe (Caso Subcrítico)

Neste capítulo, demonstraremos um resultado, devido a Yamabe [20], que trata da existência de solução para a equação

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \lambda u^{r-1}, \quad 2 < r < 2^*, \quad (2.1)$$

onde g é a métrica Riemanniana da variedade diferenciável compacta M , e $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Seja $I : H^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional definido por

$$I(u) = \int_M |\nabla u|^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u^2 dV. \quad (2.2)$$

Fixado r tal que $2 < r < 2^*$, considere

$$H_r = \{u \in H^1(M); \|u\|_{L^r(M)} = 1\} \quad (2.3)$$

$$\lambda_r = \inf_{u \in H_r} I(u). \quad (2.4)$$

Teorema 2.1 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$. Dado $r \in (2, \frac{2n}{n-2})$, considere λ_r como em (2.4). Então, existe uma solução positiva $u = u_r \in C^\infty(M)$ da equação*

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} S_g u = \lambda_r u^{r-1}, \quad (2.5)$$

com a propriedade adicional de que $\int_M u^r dV_g = 1$.

Prova. Para uma melhor organização da demonstração, a dividiremos em algumas etapas:

Etapa 1. λ_r é finito.

Note que, dada uma função $u \in H_r$, temos, usando a Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \left| \int_M S_g u^2 dV \right| &\leq \int_M |S_g| |u|^2 dV \leq \|S_g\|_{L^\infty(M)} \int_M |u|^2 dV \\ &\leq \|S_g\|_{L^\infty(M)} \underbrace{\|u\|_{L^r(M)}^2}_{1} [\mu(M)]^{2s}, \end{aligned}$$

onde $\mu(M) = \int_M dV$ e $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{r}$.

Logo,

$$\left| \int_M S_g u^2 dV \right| \leq c_1 \text{ e } I(u) < +\infty,$$

onde c_1 é uma constante.

Então,

$$\int_M S_g u^2 dV \geq -c_1,$$

o que implica

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_M |\nabla u|^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u^2 dV \\ &\geq \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u^2 dV \\ &\geq -c_1 \frac{n-2}{4(n-1)}. \end{aligned}$$

Daí, podemos concluir que λ_r é finito.

Etapa 2. Existe $u = u_r \in H_r$, $u \geq 0$, tal que $I(u) = \lambda_r$.

Seja $(u_k) \subset H_r$ uma sequência minimizante para λ_r . Ou seja, (u_k) verifica:

(i) $\int_M |u_k|^r dV = 1, \forall k \in \mathbb{N}$;

(ii) $\lim_{k \rightarrow +\infty} I(u_k) = \lambda_r$.

Além disso,

(iii) podemos considerar $u_k \geq 0$;

(iv) (u_k) é limitada em $H^1(M)$.

O ítem (iii) pode ser verificado, observando-se o fato de que se $u \in H^1(M)$, então $|u| \in H^1(M)$ com

$$|\nabla |u|| \leq |\nabla u|, \quad u \in H^1(M),$$

cuja demonstração se encontra em [4]. De fato, temos, para cada k ,

$$\begin{aligned} I(|u_k|) &= \int_M |\nabla|u_k||^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g |u_k|^2 dV \\ &\leq I(u_k). \end{aligned}$$

Logo,

$$I(|u_k|) \longrightarrow \lambda_r.$$

Com relação ao ítem **(iv)**, observemos que

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{H^1(M)}^2 &= \|\nabla u_k\|_{L^2(M)}^2 + \|u_k\|_{L^2(M)}^2 \\ &= \int_M |\nabla u_k|^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u_k^2 dV + \\ &\quad - \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u_k^2 dV + \|u_k\|_{L^2(M)}^2 \\ &= I(u_k) - \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u_k^2 dV + \|u_k\|_{L^2(M)}^2 \\ &\leq I(u_k) + \left(\frac{n-2}{4(n-1)} \|S_g\|_{L^\infty(M)} + 1 \right) \|u_k\|_{L^2(M)}^2. \end{aligned}$$

Suponha k suficientemente grande de modo que

$$I(u_k) < \lambda_r + 1.$$

Sendo assim, usando-se a desigualdade $\|u_k\|_{L^2(M)}^2 \leq \|u_k\|_{L^r(M)}^2 [\mu(M)]^{2s}$, como no **Passo 1**, temos, para alguma constante positiva c_2 ,

$$\|u_k\|_{H^1(M)}^2 \leq (\lambda_r + 1) + \left(\frac{n-2}{4(n-1)} \|S_g\|_{L^\infty(M)} + 1 \right) c_2,$$

de onde segue que (u_k) é limitada.

Agora, usando o fato de que $H^1(M)$ é um espaço reflexivo, considere $u \in H^1(M)$ tal que (u_k) convirja fracamente para u . Utilizando-se das imersões de Sobolev, sabemos que existe uma subsequência de (u_k) , a qual ainda denotaremos por (u_k) , tal que $u_k \longrightarrow u$ na norma de $L^r(M)$.

Daí, temos $\|u\|_{L^r(M)} = 1$ e, portanto, $u \in H_r$. Da convergência em $L^r(M)$ e do fato de que $u_k \geq 0$, obtemos que $u \geq 0$ qtp em M , visto que (u_k) converge em quase todo ponto para u .

Além disso, temos

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(M)}^2 &\leq \liminf \|u_k\|_{H^1(M)}^2 \\ &\leq \liminf \left(\|\nabla u_k\|_{L^2(M)}^2 + \|u_k\|_{L^2(M)}^2 \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\nabla u\|_{L^2(M)}^2 + \|u\|_{L^2(M)}^2 \leq \liminf \|\nabla u_k\|_{L^2(M)}^2 + \|u_k\|_{L^2(M)}^2,$$

o que implica

$$\|\nabla u\|_{L^2(M)}^2 \leq \liminf \|\nabla u_k\|_{L^2(M)}^2.$$

Sendo assim, observe que

$$\begin{aligned} \lambda_r \leq I(u) &= \int_M |\nabla u|^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g |u|^2 dV \\ &\leq \liminf \|\nabla u_k\|_{L^2(M)}^2 + \frac{n-2}{4(n-1)} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_M S_g |u_k|^2 dV \\ &= \liminf \left(\int_M |\nabla u_k|^2 dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g |u_k|^2 dV \right) \\ &= \liminf I(u_k) = \lambda_r. \end{aligned}$$

Logo,

$$I(u) = \lambda_r.$$

Aplicando-se o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (para Espaços de Banach), obtemos que existe uma constante $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_M \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle dV + \frac{n-2}{4(n-1)} \int_M S_g u \phi dV = \alpha \int_M u^{r-1} \phi dV.$$

Substituindo-se $\phi = u$, obtemos $I(u) = \alpha$ e, portanto, $\alpha = \lambda_r$, o que nos leva a concluir que u é solução fraca de (2.5).

Etapa 3. u é positiva e de classe C^∞ .

Seja $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(p, t) = \left(\lambda_r |t|^{r-2} - \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(p) \right) t.$$

Note que u é solução fraca de

$$-\Delta u = f(p, u)$$

e, além disso,

$$|f(p, u)| \leq (Q(p) + C_0)|u|,$$

onde $Q = \lambda_r |u|^{r-2} \in L^{\frac{n}{2}}(S^n)$ e C_0 é uma constante tal que $\left| \frac{n-2}{4(n-1)} S_g(p) \right| \leq C_0$, para todo $p \in S^n$.

Utilizando a Proposição 1.9.2, conclui-se que $u \in C^\infty(M)$. Além disso, como $u \geq 0$, podemos, a partir do Princípio de Máximo (próximo teorema), concluir que u é positiva em M . ■

Teorema (Princípio de Máximo). *Suponha que h é uma função não-negativa, regular, definida na variedade compacta M , e $u \in C^2(M)$ satisfaz $(\Delta + h)u \geq 0$. Se u atinge o mínimo $m \leq 0$, então u é constante em M .*

Tal teorema pode ser demonstrado utilizando-se os resultados contidos em [8] e um procedimento de *colagem*.

Capítulo 3

Existência de Infinitas Soluções com Energia Finita

Como já mencionado na introdução, sabemos que qualquer solução positiva da equação elíptica

$$\Delta u + |u|^{\frac{4}{n-2}}u = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 3, \quad (3.1)$$

que possua energia finita, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx < \infty, \quad (3.2)$$

é necessariamente da forma

$$u(x) = \left(\frac{\sqrt{n(n-2)}a}{a^2 + |x - \xi|^2} \right)^{(n-2)/2}, \quad (3.3)$$

onde $a > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Nosso objetivo neste capítulo é o de demonstrar, para $n \geq 3$, o seguinte teorema:

Teorema 3.1 (Ding [9]) *Existe uma sequência de soluções u_k do problema (3.1)-(3.2) tais que $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k|^2 dx \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.*

3.1 Observações Preliminares

a) Se $u(x)$ é solução de (3.1), então, para cada $\lambda > 0$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, a função $v(x) = \lambda^{(n-2)/2}u[(x - \xi)\lambda]$ é também solução de (3.1).

Com efeito, observe que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \lambda^{\frac{n-2}{2}} \lambda \frac{\partial u}{\partial x_i}(\lambda(x - \xi)),$$

de onde segue que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \lambda^{\frac{n+2}{2}} \frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j}(\lambda(x - \xi)).$$

Desse modo, podemos concluir que

$$\Delta v(x) = \lambda^{\frac{n+2}{2}} \Delta u(\lambda(x - \xi)). \quad (3.4)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |v(x)|^{\frac{4}{n-2}} v(x) &= |\lambda^{\frac{n-2}{2}} u[(x - \xi)\lambda]|^{\frac{4}{n-2}} \lambda^{\frac{n-2}{2}} u[(x - \xi)\lambda] \\ &= \lambda^2 |u[(x - \xi)\lambda]|^{\frac{4}{n-2}} \lambda^{\frac{n-2}{2}} u[(x - \xi)\lambda] \\ &= \lambda^{\frac{n+2}{2}} |u[(x - \xi)\lambda]|^{\frac{4}{n-2}} u[(x - \xi)\lambda] \\ &= \lambda^{\frac{n+2}{2}} (-\Delta u(\lambda(x - \xi))). \end{aligned}$$

Agora, usando (3.4), concluímos o que foi afirmado no ítem **a**). ■

b) As funções u e v , dadas no ítem **a**) acima, possuem a mesma energia.

De fato, note que

$$\left[\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \right]^2 = \lambda^n \left[\frac{\partial u}{\partial x_i}(\lambda(x - \xi)) \right]^2.$$

Logo,

$$|\nabla v(x)|^2 = \lambda^n |\nabla u(\lambda(x - \xi))|^2.$$

Usando o fato de que o determinante jacobiano da função $\varphi(x) = \lambda(x - \xi)$ é igual a λ^n , podemos aplicar o Teorema de Mudança de Variáveis, para obtermos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\lambda(x - \xi))|^2 dx,$$

como queríamos demonstrar. ■

c) Diremos que duas soluções u e v de (3.1) são equivalentes se possuem a mesma energia. Neste caso, temos que todas as soluções da forma (3.3) são equivalentes.

Efetivamente, sejam

$$u(x) = \left(\frac{\sqrt{n(n-2)a}}{a^2 + |x - \xi|^2} \right)^{(n-2)/2} \quad \text{e} \quad v(x) = \left(\frac{\sqrt{n(n-2)b}}{b^2 + |x - \eta|^2} \right)^{(n-2)/2},$$

como em (3.3).

Considere $\lambda > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\lambda = \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{\lambda\eta - \xi}{\lambda}.$$

Para concluir o que é desejado, basta observar que

$$v(x) = \lambda^{\frac{n-2}{2}} u(\lambda(x - \theta))$$

e utilizar o ítem **b**). ■

3.2 Lemas Iniciais

Nesta seção, estaremos considerando (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas de dimensões maiores do que, ou iguais a, 3. Suporemos que existe um difeomorfismo conforme $f : M \rightarrow N$, isto é,

$$f^*h = \varphi^{\frac{4}{n-2}}g,$$

para alguma função positiva $\varphi \in C^\infty(M)$, onde f^*h denota a métrica em M definida por

$$f^*h_p(v_1, v_2) = h_{f(p)}(df_p(v_1), df_p(v_2)), \quad p \in M, \quad v_1, v_2 \in T_pM.$$

As curvaturas escalares de (M, g) e (N, h) serão denotados por S_g e S_h , respectivamente. No lema seguinte, $F : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $\tilde{\varphi} = \varphi \circ f^{-1}$.

Lema 3.2.1 *Suponha que $v : N \rightarrow \mathbb{R}$ é solução de*

$$\Delta_h v - \beta S_h(y)v + \tilde{\varphi}(y)^{1-q}F(f^{-1}(y), \tilde{\varphi}(y)v) = 0, \quad v \in C^2(N), \quad (3.5)$$

onde $q = 2^* = 2n/(n-2)$ e $\beta = (n-2)/[4(n-1)]$. Então, $u = (v \circ f)\varphi$ é solução de

$$\Delta_g u - \beta S_g(x)u + F(x, u) = 0, \quad u \in C^2(M). \quad (3.6)$$

Mais ainda,

$$\int_M |u|^q dV_g = \int_N |v|^q dV_h. \quad (3.7)$$

Prova. Suponha que $v \in C^2(N)$ é solução de (3.5). Então, para todo $x \in M$, temos

$$(\Delta_h v)(f(x)) - \beta S_h(f(x))v(f(x)) + \varphi(x)^{1-q}F(x, \varphi(x)v(f(x))) = 0.$$

Utilizando-se os resultados da seção A.8 sobre isometrias(mais precisamente, o Corolário (A.8.6) e o Teorema (A.8.7)), obtemos

$$\Delta_{\tilde{h}}(v \circ f)(x) - \beta S_{\tilde{h}}(x)(v \circ f)(x) + \varphi(x)^{1-q}F(x, \varphi(x)(v \circ f)(x)) = 0,$$

onde $\tilde{h} = f^*h$.

Portanto, $w = v \circ f$ é solução de

$$\Delta_{\tilde{h}}w - \beta S_{\tilde{h}}w + \varphi^{1-q}F(x, \varphi w) = 0. \quad (3.8)$$

Além disso, usando o fato de que $\tilde{h} = \varphi^{\frac{4}{n-2}}g$, temos, em virtude do Teorema C.2,

$$\Delta_g\varphi - \beta S_g\varphi + \beta S_{\tilde{h}}\varphi^{q-1} = 0. \quad (3.9)$$

Considerando-se $u = w\varphi$, podemos aplicar o Teorema C.4, para obtermos

$$\Delta_{\tilde{h}}w = \Delta_{\tilde{h}}(\varphi^{-1}u) = \frac{1}{\varphi^{q-1}}\Delta_gu - \frac{u}{\varphi^q}\Delta_g\varphi. \quad (3.10)$$

Agora, de (3.8), (3.9) e (3.10), podemos concluir que

$$\varphi^{1-q}\Delta_gu - u\varphi^{-q}[\beta S_g\varphi - \beta S_{\tilde{h}}\varphi^{q-1}] - \beta S_{\tilde{h}}u\varphi^{-1} + \varphi^{1-q}F(x, u) = 0,$$

o que implica

$$\varphi^{1-q}[\Delta_gu - \beta S_gu + F(x, u)] = 0,$$

ou melhor,

$$\Delta_gu - \beta S_gu + F(x, u) = 0.$$

Portanto, $u = (v \circ f)\phi$ é solução de (3.6).

Agora, observe que usando a Observação C.3 e o Teorema A.8.8, temos as seguintes igualdades

$$\int_N |v|^q dV_h = \int_M |v \circ f|^q dV_{\tilde{h}} = \int_M |v \circ f|^q \varphi^q dV_g = \int_M |u|^q dV_g,$$

o que finaliza a demonstração. ■

Lema 3.2.2 *Cada solução v da equação*

$$\Delta v - \frac{1}{4}n(n-2)v + |v|^{q-2}v = 0, \quad v \in C^2(S^n), \quad q = 2^* = \frac{2n}{n-2}, \quad (3.11)$$

onde Δ é o Laplaciano com relação à métrica usual em S^n , corresponde a uma solução u da equação

$$\Delta u + |u|^{\frac{4}{n-2}}u = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad (3.12)$$

satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx = \int_{S^n} |v|^q dV. \quad (3.13)$$

Prova. Denotaremos por h a métrica usual em S^n e por g a métrica usual em \mathbb{R}^n .

Seja $\pi : S^n - \{p\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, a projeção estereográfica, onde $p = (0, \dots, 0, 1)$. Considere $f = \pi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{p\}$, ou seja,

$$f(y) = \left(\frac{2y_1}{1 + |y|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + |y|^2}, \frac{|y|^2 - 1}{1 + |y|^2} \right).$$

Pelo fato de f ser um difeomorfismo, podemos induzir em \mathbb{R}^n uma métrica \tilde{g} através de f . Dessa forma, f é uma isometria entre $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$ e $(S^n - \{p\}, h)$. Assim, de acordo com os resultados da seção A.8 sobre isometrias, temos

$$\tilde{g}_{ij} = h_{ij} \circ f. \quad (3.14)$$

A função f é, também, uma parametrização para S^n , e, além disso, sabemos que

$$\begin{cases} h_{ij}(f(x)) = 0, & i \neq j \\ h_{ii}(f(x)) = \left(\frac{2}{1 + |x|^2} \right)^2. \end{cases}$$

Por (3.14), temos

$$\begin{cases} \tilde{g}_{ij}(x) = 0, & i \neq j \\ \tilde{g}_{ii}(x) = \left(\frac{2}{1 + |x|^2} \right)^2. \end{cases}$$

Assim, \tilde{g} é conforme à $g(g_{ij} \equiv 0, i \neq j$ e $g_{ii} \equiv 1)$ e, além disso,

$$\tilde{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g, \quad (3.15)$$

onde

$$\varphi(x) = \left(\frac{2}{1 + |x|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}. \quad (3.16)$$

Considere $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F(x, y) = |y|^{\frac{4}{n-2}} y. \quad (3.17)$$

Temos, também, que a curvatura escalar S_h da esfera S^n é $n(n-1)$. Então,

$$\Delta_h v - \beta S_h(y)v + \tilde{\varphi}(y)^{1-q} F(f^{-1}(y), \tilde{\varphi}(y)v) = 0, \quad v \in C^2(S^n - \{p\}), \quad (3.18)$$

onde $\tilde{\varphi} = \varphi \circ f^{-1}$, equivale à equação

$$\Delta_h v - \frac{1}{4} n(n-2)v + |v|^{q-2} v = 0, \quad v \in C^2(S^n - \{p\}). \quad (3.19)$$

Se v é solução de (3.11), então $v|_{S^n - \{p\}}$ é solução de (3.19). Logo, usando-se o Lema 3.2.1, a esta última, corresponde uma solução u da equação

$$\Delta_g u - \beta S_g(x)u + F(x, u) = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^n),$$

ou seja, da equação (3.12).

Resta-nos, agora, demonstrar a identidade (3.13). Com este intuito, podemos usar o Lema 3.2.1, para obtermos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx = \int_{S^n \setminus \{p\}} |v|_{S^n \setminus \{p\}}^q dV.$$

Como,

$$\int_{S^n \setminus \{p\}} |v|_{S^n \setminus \{p\}}^q dV = \int_{S^n} |v|^q dV,$$

concluimos, a partir destas duas últimas igualdades,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx = \int_{S^n} |v|^q dV. \quad (3.20)$$

Agora, multiplicando (3.12) por u , obtemos

$$-u\Delta u = |u|^q. \quad (3.21)$$

Como $|u|^q$ é integrável em \mathbb{R}^n , então $-u\Delta u$ também é integrável em \mathbb{R}^n . Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^n} -u\Delta u dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx. \quad (3.22)$$

Afirmção A. A função $|\nabla u|^2$ é integrável em \mathbb{R}^n e vale a seguinte igualdade:

$$\int_{\mathbb{R}^n} -u\Delta u dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx. \quad (3.23)$$

Logo, de (3.20), (3.22) e (3.23), conclui-se a demonstração. ■

Prova da Afirmção A.

Observação 3.2.3 Nesta demonstração, usaremos propriedades do espaço $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Para mais detalhes consulte [1]

Denotemos $w = v|_{S^n \setminus \{p\}} \circ f$. Desse modo, temos $u = w\varphi$. Como $v \in C^2(S^n)$ e S^n é compacto, então v e $\frac{\partial v}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, são limitados. Logo, w e $D_i w$ são limitados, onde $D_i w$ denota a derivada parcial de w como relação à i -ésima coordenada. No que segue, denotamos k_1, k_2, k_3, k_4 como sendo constantes convenientes.

Usando o Teorema do Divergente, temos, fixado $R > 0$,

$$\int_{B_R(0)} \operatorname{div} (u\nabla u) dx = \int_{S_R(0)} \left\langle u(x)\nabla u(x), \frac{x}{R} \right\rangle d\sigma,$$

onde $S_R(0)$ é a esfera em \mathbb{R}^n com centro na origem e raio R . Daí,

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} (u\Delta u + |\nabla u|^2) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{S_R(0)} \frac{x_i}{R} u D_i u d\sigma \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{S_R(0)} \frac{x_i}{R} w \varphi D_i (w \varphi) d\sigma \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{S_R(0)} \frac{x_i}{R} w \varphi (w D_i \varphi + \varphi D_i w) d\sigma. \end{aligned}$$

A partir da limitação de w e $D_i w$, temos

$$\left| \int_{B_R(0)} (u\Delta u + |\nabla u|^2) dx \right| \leq k_1 \sum_{i=1}^n \int_{S_R(0)} \left| \frac{x_i}{R} \varphi D_i \varphi \right| d\sigma + k_2 \sum_{i=1}^n \int_{S_R(0)} \varphi^2 d\sigma.$$

Como

$$|D_i \varphi(x)| = \frac{n-2}{2} |x_i| \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{\frac{n}{2}},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_R(0)} (u\Delta u + |\nabla u|^2) dx \right| &\leq k_1 \sum_{i=1}^n \int_{S_R(0)} \frac{(n-2)x_i^2}{2R} \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{\frac{n}{2}} d\sigma + \\ &\quad + k_2 \sum_{i=1}^n \int_{S_R(0)} \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{n-2} d\sigma \\ &\leq k_3 \sum_{i=1}^n \int_{S_R(0)} \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{n-1} d\sigma + \\ &\quad + k_2 \sum_{i=1}^n \int_{S_R(0)} \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{n-2} d\sigma. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left| \int_{B_R(0)} (u\Delta u + |\nabla u|^2) dx \right| \leq k_4 \text{Vol}(S_R(0)) \left[\left(\frac{2}{1+R^2} \right)^{n-1} + \left(\frac{2}{1+R^2} \right)^{n-2} \right], \quad (3.24)$$

onde $\text{Vol}(S_R(0))$ é o volume de $S_R(0)$.

Além disso, sabe-se que

$$\text{Vol}(S_R(0)) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} R^{n-1}, \quad (3.25)$$

onde a função $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada *função gama* e é definida por

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt.$$

Assim, pode-se concluir que o limite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \text{Vol}(S_R(0)) \left[\left(\frac{2}{1+R^2} \right)^{n-1} + \left(\frac{2}{1+R^2} \right)^{n-2} \right] \quad (3.26)$$

existe.

De (3.22), (3.24) e (3.26), conclui-se que $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$, então u pertence ao espaço

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^n) = \left\{ v \in L^{2^*}; \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

o qual possui norma proveniente do produto interno

$$\langle w, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla w \nabla v dx.$$

Também temos que a norma de $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ é equivalente à norma

$$\|v\|_0 = \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.27)$$

O espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, podemos considerar uma sequência $(u_\ell) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ convergente em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ para u . Usando o fato de que u é solução de (3.12), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_\ell \nabla u dx = \int_{\mathbb{R}^n} -u_\ell \Delta u dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_\ell u |u|^{q-2} dx.$$

Portanto, utilizando-se a norma (3.27), nota-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_\ell \nabla u dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_\ell u |u|^{q-2} dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx,$$

onde, para concluirmos a última convergência, trabalhamos com a desigualdade de Hölder.

Daí, conclui-se a validade da Afirmação A. ■

Observação 3.2.4 Note que, para $n \geq 4$, o limite em (3.26) é igual a zero. Portanto, já poderíamos, neste ponto, termos concluído a validade da Afirmação A para o caso $n \geq 4$.

Observação 3.2.5 Para $n \geq 4$, temos $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Entretanto, se $n = 3$, então $\varphi \in D^{1,2}(\mathbb{R}^3) \setminus H^1(\mathbb{R}^3)$.

Observação 3.2.6 Em virtude de (C.1), obtemos que φ em (3.16) verifica

$$\Delta\varphi + \frac{n(n-2)}{4}|\varphi|^{\frac{4}{n-2}}\varphi = 0. \quad (3.28)$$

Compare este resultado com (3.1)-(3.3).

Do Lema 3.2.2, observamos que, para provar o Teorema 3.1, basta provar o lema seguinte.

Lema 3.2.7 Existe uma sequência $\{v_k\}$ de soluções de (3.11) tal que $\int_{S^n} |v_k|^q dV \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.

3.3 Uso do Princípio de Criticalidade Simétrica

Daqui por diante, usaremos as definições e resultados contidos no Apêndice D. Além disso, dado $z \in \mathbb{R}^{n+1}$, consideremos $k, m \in \mathbb{N}$ tais que $k+m = n+1$, e denotemos $z = (x, y)$, onde $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ e $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Dessa forma, S^n pode ser descrita como

$$S^n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; |x|^2 + |y|^2 = 1\}. \quad (3.29)$$

Agora, considere o conjunto

$$G = \{\Phi \in Gl_{n+1}(\mathbb{R}); \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{pmatrix}, \text{ onde } \Phi_1 \in O(k), \Phi_2 \in O(m)\}.$$

Verifica-se, facilmente, que:

- 1) $\Phi \in G \Rightarrow \Phi^{-1} \in G$;
- 2) $\Phi, \Phi' \in G \Rightarrow \Phi\Phi' \in G$;
- 3) $G \subset O(n+1)$;

Portanto, podemos concluir que (G, \cdot) munido da topologia induzida por $Gl_{n+1}(\mathbb{R})$ é um subgrupo topológico de $O(n+1)$. Além disso, restringindo a ação de $O(n+1)$, em $H^1(S^n)$, ao conjunto $G \times H^1(S^n)$, temos uma ação de G em $H^1(S^n)$.

O fixo de G em $H^1(S^n)$ será denotado por X_G , isto é,

$$X_G = \{v \in H^1(S^n); \Phi v = v, \forall \Phi \in G\}.$$

Podemos, também, escrever

$$X_G = \{v \in H^1(S^n); v(\Phi x) = v(x), \forall \Phi \in G \text{ e q.s. em } S^n\}. \quad (3.30)$$

Nota-se, a partir do Princípio de Criticalidade Simétrica (Teorema D.11) e do Exemplo D.9, que se $u \in X_G$, é ponto crítico do funcional

$$J(v) = \int_{S^n} \left[\frac{1}{2} (|\nabla v|^2 + cv^2) - \frac{1}{q} |v|^q \right] dV, \quad (3.31)$$

restrito ao subespaço X_G , então u é ponto crítico de J em $H^1(S^n)$, visto que $J \in C^1$.

Portanto, observando-se que o funcional J é o funcional de Euler-Lagrange associado a (3.11), o Lema 3.2.7 fica demonstrado se conseguirmos estabelecer o seguinte:

Lema 3.3.1 *Existe uma sequência $\{v_k\}$ de pontos críticos de J , restritos à X_G , tal que $\int_{S^n} |v_k|^q dV \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.*

Observação 3.3.2 *Dado $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 \\ 0 & \Phi_2 \end{pmatrix} \in G$ e $z = (x, y) \in S^n$, temos $\Phi z = (\Phi_1 x, \Phi_2 y)$.*

Observação 3.3.3 *Fixados $x, y \in S^\ell$, existe $\Phi \in O(\ell + 1)$ tal que $x = \Phi y$.*

3.4 Lemas Finais

De Ambrosetti e Rabinowitz [2], observa-se que o seguinte resultado se verifica.

Lema 3.4.1 *Seja X um subespaço fechado de $H^1(S^n)$. Suponha que a imersão $X \subset L^q(S^n)$, $q = 2^* = \frac{2n}{n-2}$, é compacta. Então, a restrição $J|_X$ satisfaz a condição de Palais-Smale. Mais ainda, se X tem dimensão infinita, então $J|_X$ possui uma sequência de pontos críticos v_k em X , tal que $\int_{S^n} |v_k|^q dV \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$.*

Para demonstrarmos o Lema 3.3.1, usaremos o Lema 3.4.1. Com este objetivo, verificaremos, primeiramente, as seguintes propriedades do subespaço X_G :

P1) $\dim X_G = \infty$.

Com efeito, basta observar que, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, a função $v_\ell \in H^1(S^n)$ definida por $v_\ell(z) = |x|^\ell |y|^\ell$, $z = (x, y)$, pertence a X_G .

P2) X_G é fechado.

Inicialmente, observe que, fixado $\Phi \in G$, temos, em virtude do item **iv)** da Definição D.6, que a função $u \mapsto \Phi u$ é contínua. Logo, a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi_\Phi &: H^1(S^n) \longrightarrow H^1(S^n) \\ u &\longmapsto \Psi_\Phi(u) = u - \Phi u \end{aligned}$$

é contínua. Desse modo, para cada $\Phi \in G$, o conjunto $\Psi_{\Phi}^{-1}(\{0\})$ é fechado.

Agora, note que

$$X_G = \{u \in H^1(S^n); \Psi_{\Phi}(u) = 0, \forall \Phi \in G\},$$

isto é,

$$X_G = \bigcap_{\Phi \in G} \Psi_{\Phi}^{-1}(\{0\}).$$

Portanto, X_G é fechado.

Caso 1.

Consideremos, inicialmente, o caso em que $n \geq 5$. Desse modo, escolha $k, m \in \mathbb{N}$ tais que $k + m = n + 1$ e $k \geq m \geq 3$. Note que, sendo assim, temos $k < n$ e, portanto, $\frac{2k}{k-2} > \frac{2n}{n-2}$. Logo, o seguinte lema, junto com o Lema 3.4.1, nos leva ao resultado desejado, para este caso.

Lema 3.4.2 *Para $r = \frac{2k}{k-2}$ e $1 \leq p \leq r$, a imersão $X_G \subset L^p(S^n)$ é contínua. Tal imersão é compacta se $1 \leq p < r$.*

Prova. Sejam $u \in X_G$ e $Q \subset S^n$ tais que o conjunto $S^n \setminus Q$ tenha medida nula e $u(\Phi z) = u(z)$, $\forall \Phi \in G$ e $\forall z \in Q$. Sendo $z = (x, y) \in Q$, como em (3.29), temos

$$u(\Phi_1 x, \Phi_2 y) = u(z), \forall \Phi_1 \in O(k) \text{ e } \forall \Phi_2 \in O(m). \quad (3.32)$$

Afirmção B. *A função u depende apenas de $|x|$ ou, equivalentemente, de $|y|$.*

De fato, considere $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Q$ tais que $|x_1| = |x_2|$. Como $|x_1|^2 + |y_1|^2 = 1$ e $|x_2|^2 + |y_2|^2 = 1$, então $|y_1| = |y_2|$. Usando a observação 3.3.3, concluímos que existem $\Phi_1 \in O(k)$ e $\Phi_2 \in O(m)$ tais que

$$x_1 = \Phi_1 x_2 \text{ e } y_1 = \Phi_2 y_2.$$

Logo,

$$u(x_1, y_1) = u(\Phi_1 x_2, \Phi_2 y_2) = u(x_2, y_2),$$

de onde segue o afirmado.

Agora, observe que se $z = (s, t) \in S^n$ é tal que $t_i \neq 0$ para algum $i = 1, \dots, m$, podemos considerar uma vizinhança U , de z , e $\delta_1 > 0$ tais que a aplicação $h : U \rightarrow B_{\delta_1}^k(s) \times B_{\delta_1}^{m-1}(\bar{t}) \subset \mathbb{R}^n$ dada por

$$h(x, y) = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_m) \quad (3.33)$$

é um difeomorfismo, onde $\bar{t} = (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_m)$.

Analogamente, se $z = (s, t) \in S^n$ é tal que $s_i \neq 0$ para algum $i = 1, \dots, k$, podemos considerar uma vizinhança V , de z , e $\delta_2 > 0$ tais que a aplicação $f : V \longrightarrow B_{\delta_2}^{k-1}(\bar{s}) \times B_{\delta_2}^m(t) \subset \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(x, y) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m) \quad (3.34)$$

é um difeomorfismo, onde $\bar{s} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_m)$.

Usando a Afirmação B, concluímos que estão 'bem definidas' as funções $v_u : B_{\delta_1}^k(s) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $w_u : B_{\delta_2}^m(t) \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$v_u(x) = (u \circ h^{-1})(x, \bar{y}), \quad (x, \bar{y}) \in B_{\delta_1}^k(s) \times B_{\delta_1}^{m-1}(\bar{t})$$

e

$$w_u(y) = (u \circ f^{-1})(\bar{x}, y), \quad (\bar{x}, y) \in B_{\delta_2}^{k-1}(\bar{s}) \times B_{\delta_2}^m(t).$$

Podemos assumir que S^n é coberto por um número finito de parametrizações da forma (3.33) e da forma (3.34), digamos $\{(U_\alpha, h_\alpha)\} \cup \{(V_\beta, f_\beta)\}$. Além disso, também assumiremos que as parametrizações são tais que as componentes (g_{ij}) da métrica, em quaisquer cartas, verificam as condições (1.1), (1.2) e (1.3). No que segue, os c_i 's sempre denotam constantes.

Dada uma função diferenciável $u \in X_G$, temos, numa vizinhança U ,

$$\begin{aligned} \int_U |u|^p dV &= \int_{B_{\delta_1}^k \times B_{\delta_1}^{m-1}} |u \circ h^{-1}|^p \sqrt{\det(g_{ij} \circ h^{-1})} dx d\bar{y} \\ &\leq c_1 \int_{B_{\delta_1}^{m-1}} \left[\int_{B_{\delta_1}^k} |u \circ h^{-1}|^p dx \right] d\bar{y} \\ &= c_1 \int_{B_{\delta_1}^{m-1}} \left[\int_{B_{\delta_1}^k} |v_u|^p dx \right] d\bar{y} \\ &\leq c_2 \|v_u\|_{L^p(B_{\delta_1}^k)}^p, \end{aligned}$$

o que implica

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq c_2 \|v_u\|_{L^p(B_{\delta_1}^k)}. \quad (3.35)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_U |\nabla u|^2 dV &= \int_U \left[\sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] dV \geq c_3 \int_U \left[\sum_i \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right] dV \\ &= \int_{B_{\delta_1}^k \times B_{\delta_1}^{m-1}} \left[\sum_i \left| \frac{\partial(u \circ h^{-1})}{\partial x_i} \right|^2 \right] \sqrt{\det(g_{j\ell} \circ h^{-1})} dx d\bar{y} \\ &\geq c_4 \int_{B_{\delta_1}^{m-1}} \left[\int_{B_{\delta_1}^k} |\nabla v_u|^2 dx \right] d\bar{y}, \end{aligned}$$

donde se conclui que

$$\|\nabla u\|_{L^2(U)} \geq c_5 \|\nabla v_u\|_{L^2(B_{\delta_1}^k)}. \quad (3.36)$$

A partir de (3.35) e (3.36), obtemos

$$\|u\|_{H^1(U)} \geq c_6 \|v_u\|_{H^1(B_{\delta_1}^k)}. \quad (3.37)$$

Usando o fato de que $H^1(B_{\delta_1}^k)$ está imerso continuamente em $L^p(B_{\delta_1}^k)$ para $1 \leq p \leq \frac{2k}{k-2}$, e as desigualdades (3.35) e (3.37), obtemos que existe $c_7 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq c_7 \|u\|_{H^1(U)}, \quad (3.38)$$

para $1 \leq p \leq \frac{2k}{k-2}$.

Com um procedimento análogo, usando a parametrização f^{-1} , mostra-se

$$\|u\|_{L^p(V)} \leq c_8 \|u\|_{H^1(V)}, \quad (3.39)$$

para $1 \leq p \leq \frac{2m}{m-2}$.

Como $k \geq m$, então $\frac{2k}{k-2} \leq \frac{2m}{m-2}$. Portanto, em qualquer vizinhança W de S^n , obtemos

$$\|u\|_{L^p(W)} \leq c_9 \|u\|_{H^1(W)}, \quad (3.40)$$

para $1 \leq p \leq \frac{2k}{k-2}$.

Esta última desigualdade nos leva ao fato de que a imersão $X_G \subset L^p(S^n)$, para $1 \leq p \leq \frac{2k}{k-2}$, é contínua.

Compacidade.

Seja $(u_j) \subset X_G$ uma sequência limitada em $H^1(U)$, isto é, existe $R > 0$ tal que

$$\|u_j\|_{H^1(U)} \leq R, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Por (3.37), temos que (v_{u_j}) é limitada em $H^1(B_{\delta_1}^k)$ e, conseqüentemente, possui uma subsequência, a qual ainda denotaremos por (v_{u_j}) , que converge em $L^p(B_{\delta_1}^k)$, $1 \leq p < \frac{2k}{k-2}$, para $v_u \in L^p(B_{\delta_1}^k)$. Portanto, usando (3.35), temos que (u_j) converge em $L^p(U)$, $1 \leq p < \frac{2k}{k-2}$, para $v_u \circ h \in L^p(U)$. Raciocínio análogo pode ser aplicado nas vizinhanças do tipo (3.34).

Desse modo, como S^n é coberto por um número finito de parametrizações, podemos concluir que X_G está imerso compactamente em $L^p(S^n)$, para $1 \leq p < r$.

Caso 2.

Corolário 3.4.3 *Para $n = 3$, temos X_G imerso compactamente em $L^p(S^n)$ com $1 \leq p < \infty$. Para $n = 4$, temos X_G imerso compactamente em $L^p(S^n)$ com $1 \leq p < r$.*

Prova. A demonstração é um procedimento análogo ao do Lema 3.4.2. No caso $n = 3$, basta considerar $k = 2$, $m = 2$ e as imersões de Sobolev em \mathbb{R}^2 . No caso $n = 4$, basta considerar $k = 3$, $m = 2$ e as imersões de Sobolev em \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 . ■

Portanto, usando as propriedades **P1)** e **P2)**, o Lema 3.4.2 e o Corolário 3.4.3, podemos concluir a validade do Lema 3.3.1, através do Lema 3.4.1.

Depois disso, só resta-nos demonstrar o lema a seguir:

Lema 3.4.4 *As soluções fracas de (3.11) são, na verdade, de classe C^∞ .*

Prova. Sejam v uma solução fraca de (3.11) e $f : S^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(p, t) = \left(|t|^{q-2} - \frac{n(n-2)}{4} \right) t.$$

Note que, desse modo, v é solução fraca de

$$-\Delta u = f(p, v)$$

e, além disso,

$$|f(p, v)| \leq (Q(p) + C_0)|v|,$$

onde $Q = |v|^{q-2} \in L^{\frac{n}{2}}(S^n)$ e $C_0 = \frac{n(n-2)}{4}$.

Portanto, a partir da Proposição 1.9.2, concluímos que $v \in C^\infty(S^n)$. ■

Apêndice A

Variedades Riemannianas

Neste apêndice, apresentaremos alguns resultados e definições relativos às variedades diferenciáveis, os quais são relevantes neste trabalho. Mais detalhes em [7].

A.1 Variedades Diferenciáveis

Definição A.1.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que:*

(1) $\bigcup_{\alpha} x_\alpha(U_\alpha) = M$;

(2) *Para todo par (α, β) com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W) \rightarrow x_\beta^{-1}(W)$ são diferenciáveis;*

(3) *A família $F = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).*

O par (U_α, x_α) , ou a aplicação x_α , é chamado uma parametrização, um sistema de coordenadas, ou uma carta local, de M em torno do ponto $p \in x_\alpha(U_\alpha)$. Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ satisfazendo as condições (1) e (2) é chamada atlas, ou estrutura diferenciável de M .

Exemplos. *São variedades diferenciáveis os seguintes conjuntos:*

$$\mathbb{R}^n, S^n \text{ e } P^n(\mathbb{R}) = \{\text{retas de } \mathbb{R}^{n+1} \text{ que passam pela origem}\}.$$

Observação A.1.2 *O atlas da variedade diferenciável M faz dela um espaço topológico, onde $A \subset M$ é aberto se $x^{-1}(A \cap x(U))$ é um aberto de \mathbb{R}^n , qualquer que seja a parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$.*

Definição A.1.3 Dizemos que uma família $\{f_\alpha\}$ de funções diferenciáveis $f_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma partição diferenciável da unidade se:

- (i) Para todo α , $f_\alpha \geq 0$ e o suporte de f_α está contido em uma vizinhança coordenada $V_\alpha = x_\alpha(U_\alpha)$ de uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ de M ;
- (ii) A família $\{V_\alpha\}$ é localmente finita;
- (iii) $\sum_{\alpha} f_\alpha(p) = 1$, para todo $p \in M$.

Dizemos que a partição $\{f_\alpha\}$ da unidade está subordinada à cobertura $\{V_\alpha\}$.

Restrições quanto à topologia de M :

Axioma de Hausdorff. Dados dois pontos distintos de M , existem vizinhanças destes dois pontos as quais não se intersectam.

Axioma de base enumerável. A variedade M pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas.

A variedade M é conexa.

Estas considerações são importantes devido ao resultado abaixo.

Teorema A.1.4 Uma variedade diferenciável M possui uma partição diferenciável da unidade se, e somente se, toda componente conexa de M é de Hausdorff e possui base enumerável.

A.2 Espaço Tangente

Definição A.2.1 Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis de dimensões n e m , respectivamente. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é dita ser diferenciável em $p \in M_1$ se, dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M_2$ em $\varphi(p)$, existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação

$$y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $x^{-1}(p)$. Mais ainda, diz-se que φ é diferenciável em um aberto de M_1 se é diferenciável em todos os pontos desse aberto.

Definição A.2.2 Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é chamada uma curva (diferenciável) em M . Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $C^\infty(M)$ o conjunto das funções $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in C^\infty(M). \quad (\text{A.1})$$

Um vetor tangente em $p \in M$ é um vetor tangente, em $t = 0$, a alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será denotado por T_pM .

De acordo com as notações na definição A.2.2, escolha uma parametrização $x : U \longrightarrow M$ em $p = x(q)$ e escreva

$$\begin{aligned} & (x^{-1} \circ \alpha)(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \text{e} & (f \circ x)(q) = \tilde{f}(x_1, \dots, x_n), \quad q = (x_1, \dots, x_n) \in U. \end{aligned}$$

Assim,

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \tilde{f}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right|_{t=0} = \sum_i x'_i(0) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(q).$$

Portanto, o vetor $\alpha'(0)$ pode ser expresso, através da parametrização x , por

$$\alpha'(0) = \sum_i x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (\text{A.2})$$

onde $\frac{\partial}{\partial x_i}$ denota o vetor pertencente ao conjunto T_pM tal que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial(f \circ x)}{\partial x_i}(x^{-1}(p)), \quad \forall f \in C^\infty(M). \quad (\text{A.3})$$

Observação A.2.3 Com as operações usuais de funções, nota-se que T_pM é espaço vetorial. Além disso, escolhida uma parametrização $x : U \longrightarrow M$ em $p = x(q)$, pode-se ver que o conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ é uma base de T_pM , a qual chamamos de base associada à parametrização (U, x) .

Definição A.2.4 O espaço vetorial T_pM é chamado espaço tangente de M em p .

Proposição A.2.5 Sejam M_1 e M_2 variedades de dimensões n e m , respectivamente. Seja $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_p(M_1)$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_p(M_1) \longrightarrow T_{\varphi(p)}(M_2)$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α .

Definição A.2.6 A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pela Proposição A.2.5 é chamada diferencial de φ em p .

Definição A.2.7 Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação φ de M_1 em M_2 é um difeomorfismo se ela é diferenciável, biunívoca e sua inversa φ^{-1} é diferenciável.

A.3 Campo de Vetores

Definição A.3.1 *Seja M uma variedade diferenciável. O conjunto $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$ é chamado de fibrado tangente da variedade M .*

Proposição A.3.2 *O fibrado tangente TM é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$, onde M tem dimensão n .*

Definição A.3.3 *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. O campo é dito diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável.*

Notação. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M .

Também é conveniente pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ definida por

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \quad f \in C^\infty(M),$$

onde f indica, por um abuso de notação, a expressão de f na parametrização (U, x) .

Lema A.3.4 *Sejam X e Y são campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M . Então, existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in C^\infty(M)$, $Zf = (XY - YX)f$.*

Definição A.3.5 *O campo vetorial diferenciável Z dado no lema A.3.4 é chamado o colchete (de Lie) dos campos X e Y , e é denotado por $[X, Y]$; ou seja, escrevemos*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Definição A.3.6 *Um campo vetorial ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é uma aplicação que a cada $t \in I$ associa um vetor tangente $V(t) \in T_pM$, a qual é diferenciável no seguinte sentido: se f é uma função diferenciável em M , então a função $t \mapsto V(t)f$ é diferenciável em I . O campo vetorial $dc \left(\frac{d}{dt} \right)$, indicado por $\frac{dc}{dt}$ é chamado campo velocidade (ou tangente) de c .*

Observação A.3.7 *Sempre suporemos um atlas $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ para M de modo que os campos $X_i^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \in \mathfrak{X}(x_\alpha(U_\alpha))$ sejam passíveis de extensão em M .*

A.4 Métricas Riemannianas

Definição A.4.1 Uma métrica Riemanniana ou estrutura Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência g que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno no espaço tangente T_pM , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas em torno de p , então, para cada (i, j) , a função $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q, \quad (\text{A.4})$$

onde $q = x(x_1, \dots, x_n)$, é diferenciável.

As funções g_{ij} são chamadas expressões da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas (U, x) . Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma variedade Riemanniana.

Proposição A.4.2 Considere $(g^{ij})_{n \times n}$ a matriz inversa da matriz $(g_{ij})_{n \times n}$. Então,

$$\frac{\partial g^{il}}{\partial x_j} = - \sum g^{ik} g^{ml} \frac{\partial g_{km}}{\partial x_j}. \quad (\text{A.5})$$

Prova. Observe que

$$\sum_k g_{ik} g^{kl} = \delta_{il}.$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_k g_{ik} g^{kl} \right) = 0,$$

o que implica

$$\sum_k \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} g^{kl} = - \sum_k g_{ik} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x_j}.$$

Denotando-se $D = \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} \right)_{n \times n}$, $B = (g_{ik})_{n \times n}$ e $C = \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_j} \right)_{n \times n}$, temos, a partir da última igualdade,

$$DB^{-1} = -BC.$$

Assim,

$$C = -B^{-1}DB^{-1}.$$

Daí, efetuando-se o produto no lado direito da igualdade, pode-se concluir (A.5). ■

Definição A.4.3 O comprimento ou norma de um vetor tangente $u \in T_pM$ é definido por

$$\|u\| = \|u\|_p = \sqrt{\langle u, u \rangle_p}.$$

Observação A.4.4 *Seja $f : M \rightarrow N$ uma imersão, isto é, f é diferenciável e $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se N tem uma estrutura Riemanniana, podemos munir M com uma estrutura Riemanniana definindo*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad u, v \in T_p M.$$

A métrica de M obtida dessa maneira é dita induzida por f .

Definição A.4.5 *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado isometria se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad (\text{A.6})$$

quaisquer que sejam $p \in M$ e $u, v \in T_p M$.

Teorema A.4.6 *Uma variedade diferenciável M (de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.*

A.5 Conexões Riemannianas

Definição A.5.1 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, indicada por $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, a qual satisfaz às seguintes propriedades:*

- (i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
- (ii) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- (iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.

Observação A.5.2 *A partir de (iii), pode-se mostrar que a conexão afim é uma noção local, isto é, se os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ coincidem, em algum aberto $A \subset M$, com campos $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(M)$, respectivamente, então $\nabla_X Y$ e $\nabla_{\bar{X}} \bar{Y}$ coincidem em A .*

Observação A.5.3 *Pode-se mostrar também que $\nabla_X Y(p)$ depende apenas do valor de $X(p)$ e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X .*

Observação A.5.4 *Considerando-se os campos $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{X}(M)$, podemos escrever $\nabla_{X_i} X_j$ em $x(U)$ como*

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k.$$

Como $\nabla_{X_i} X_j$ é um campo diferenciável, temos que as funções Γ_{ij}^k são diferenciáveis. Tais funções são chamadas símbolos de Christoffel associados à parametrização (U, x) .

Proposição A.5.5 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então, existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial ao longo de c , denotado por $\frac{DV}{dt}$, tal que:*

$$\text{a) } \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt};$$

$$\text{b) } \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{Dv}{dt};$$

Onde W é um campo de vetores ao longo de c , e f é uma função diferenciável em I .

$$\text{c) } \textit{Se } V \textit{ é induzido por um campo de vetores } Y, \textit{ isto é, } V(t) = Y(c(t)), \textit{ então } \frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}}Y.$$

Definição A.5.6 *Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{Dv}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.*

Definição A.5.7 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana \langle, \rangle . A conexão é dita compatível com a métrica \langle, \rangle quando, para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P, P' ao longo de c , tivermos $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$.*

Proposição A.5.8 *Suponha que uma variedade Riemanniana M tem uma conexão ∇ compatível com a métrica. Sejam V e W campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$. Então,*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{dV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{dW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I. \quad (\text{A.7})$$

Corolário A.5.9 *Uma conexão afim ∇ numa variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (\text{A.8})$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição A.5.10 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando, quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \quad (\text{A.9})$$

Teorema A.5.11 (Levi-Civita) *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M que é simétrica e compatível com a métrica. Tal conexão é chamada conexão Riemanniana.*

Observação A.5.12 *Dada uma parametrização (U, x) de M , os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos de componentes da métrica são dados por*

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) g^{km}. \quad (\text{A.10})$$

Observação A.5.13 *Usando-se (A.10) e (A.5), podemos concluir que*

$$\frac{\partial g^{il}}{\partial x_j} = - \sum_k g^{ik} \Gamma_{jk}^l - \sum_m g^{ml} \Gamma_{jm}^i. \quad (\text{A.11})$$

A.6 Curvatura

Definição A.6.1 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma lei que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_{[X, Y]}Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M), \quad (\text{A.12})$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Dada uma parametrização (U, x) , ponhamos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l.$$

As funções R_{ijk}^l são chamadas de componentes da curvatura R em (U, x) . Usando a equação (A.12) podemos obter a seguinte expressão de R_{ijk}^l em termos dos coeficientes Γ_{ij}^k :

$$R_{ijk}^l = \sum_s \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l - \sum_s \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l + \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i}. \quad (\text{A.13})$$

Proposição A.6.2 *Suponha que os campos $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ coincidam, no ponto $p \in M$, com os campos $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{T} \in \mathfrak{X}(M)$, respectivamente. Então,*

$$\langle R(X, Y)Z, T \rangle (p) = \langle R(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}, \bar{T} \rangle (p).$$

Definição A.6.3 *Dados $x, y, z, t \in T_p M$, definimos*

$$(x, y, z, t) = \langle X, Y, Z, T \rangle (p),$$

onde $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $X(p) = x, Y(p) = y, Z(p) = z$ e $T(p) = t$.

Notação. Denotaremos por $|x \wedge y|$ a expressão

$$\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}.$$

Proposição A.6.4 *Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bidimensional de $T_p M$ e sejam $x, y \in \sigma$ vetores linearmente independentes. Então,*

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2} \quad (\text{A.14})$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição A.6.5 *Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_p M$, o número $K(\sigma) = K(x, y)$ em (A.14), onde $\{x, y\}$ é uma base de σ , é chamado curvatura seccional de σ em p .*

Definição A.6.6 *Seja $x \in T_p M$ tal que $\|x\| = 1$. Escolha uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano, em $T_p M$, ortogonal a x . Os números*

$$\begin{aligned} \text{Ric}(x) &= \sum_i (x, z_i, x, z_i) \\ \text{e} \quad S(p) &= \sum_j \text{Ric}(z_j) = \sum_{ij} (z_i, z_j, z_i, z_j), \quad x = z_n, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

são chamados curvatura de Ricci na direção x e curvatura escalar em p , respectivamente.

Observação A.6.7 Tais curvaturas independem da escolha das bases. Para concluir isto com relação à curvatura de Ricci, basta observar que $\text{Ric}(x) = Q(x, x)$, onde a aplicação Q é definida por $Q(x, y) = \text{Tr}(z \mapsto R(x, z)y)$. Já com relação à curvatura escalar, basta verificar que $S(p)$ é o traço da aplicação linear auto-adjunta $\mathcal{K} : T_p M \rightarrow T_p M$, a qual é correspondente à forma quadrática Q em $T_p M$, isto é,

$$\langle \mathcal{K}(x), y \rangle = Q(x, y).$$

Proposição A.6.8 *Dada uma carta local (U, x) , a curvatura escalar S_g da variedade Riemanniana (M, g) pode ser escrita, em $x(U)$, como*

$$S_g = \sum_{ijk} g^{ik} R_{ijk}^j \quad (\text{A.16})$$

Prova. Para demonstrar (A.16) usaremos o seguinte resultado de álgebra linear: *seja $T : V \rightarrow V$ uma aplicação linear num espaço vetorial V , de dimensão n , munido com produto interno. Seja $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V . Então, o traço de T é dado por*

$$\text{Tr}(T) = \sum_{kl} g^{kl} \langle T(v_l), v_k \rangle,$$

onde $(g^{kl})_{n \times n}$ é a matriz inversa de $(g_{kl})_{n \times n} = (\langle v_k, v_l \rangle)_{n \times n}$.

Considerando-se a carta (U, x) e a base $\{X_1, \dots, X_n\}$, associada à x , podemos usar o resultado referido para obtermos

$$\begin{aligned} S_g &= \text{Tr}(\mathcal{K}) = \sum_{ij} g^{ij} \langle \mathcal{K}(X_j), X_i \rangle = \sum_{ij} g^{ij} Q(X_j, X_i) \\ &= \sum_{ij} g^{ij} \cdot \text{Tr}(Z \mapsto R(X_j, Z)X_i) = \sum_{ij} g^{ij} \left[\sum_{ls} g^{ls} \langle R(X_j, X_s)X_i, X_l \rangle \right] \\ &= \sum_{ijkl} g^{ij} g^{ls} R_{jsi}^k g_{kl}. \end{aligned}$$

Daí,

$$S_g = \sum_{ijks} g^{ij} R_{jsi}^k \delta_{sk},$$

de onde segue (A.16). ■

A.7 A Esfera S^n

Vamos, primeiramente, calcular a expressão dos símbolos de Christoffel na esfera S^n considerando-se uma parametrização dada pela projeção estereográfica. Depois, calcularemos, na vizinhança coordenada associada a esta parametrização, a expressão da curvatura escalar. Estaremos considerando em S^n a métrica induzida pelo \mathbb{R}^n através da aplicação identidade.

A.7.1 Símbolos de Christoffel em S^n

Seja π projeção estereográfica que associa a cada ponto $p = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$, com exceção do Pólo Norte $N = (0, \dots, 0, 1)$, a interseção do plano $x_{n+1} = 0$ com a reta determinada por N e p . A parametrização que consideraremos é $f = \pi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$, ou seja,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{|x|^2 - 1}{1 + |x|^2} \right).$$

Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(-\frac{4x_1 x_i}{(1 + |x|^2)^2}, \dots, \underbrace{\frac{2(1 + |x|^2) - 4x_i^2}{(1 + |x|^2)^2}}_{i\text{-ésima posição}}, \dots, -\frac{4x_n x_i}{(1 + |x|^2)^2}, \frac{4x_i}{(1 + |x|^2)^2} \right)$$

Daí, podemos obter

$$\begin{aligned} &g_{ij}(x) = 0, \quad i \neq j \\ \text{e} \quad &g_{ii}(x) = \left(\frac{2}{1 + |x|^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Logo, os coeficientes da matriz inversa (g^{ij}) são dados por

$$g^{ij}(x) = 0, \quad i \neq j$$

e

$$g^{ii}(x) = \left(\frac{1 + |x|^2}{2} \right)^2.$$

Usando estas equações e a expressão (A.10) podemos concluir que:

- (1) $\Gamma_{ij}^m = 0$, i, j, m distintos;
- (2) $\Gamma_{ii}^m = \frac{2x_m}{1 + |x|^2}$, $i \neq m$;
- (3) $\Gamma_{im}^i = \frac{-2x_m}{1 + |x|^2}$, $i \neq m$;
- (4) $\Gamma_{mm}^m = \frac{-2x_m}{1 + |x|^2}$.

A.7.2 Curvatura Escalar em S^n

Usando (A.16), as componentes g_{ij} da métrica usual da esfera S^n e os símbolos de Christoffel calculados anteriormente, a curvatura escalar S_g de S^n , nesta parametrização, pode ser escrita como

$$S_g = \sum_{kj} g^{kk} R_{kjk}^j.$$

A partir de (A.13), temos

$$R_{kjk}^j = \frac{\partial \Gamma_{kk}^j}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^j}{\partial x_k} + \sum_l \Gamma_{kk}^l \Gamma_{jl}^j - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{kl}^j.$$

É imediato verificar que $R_{kkk}^k = 0$. Entretanto, no caso em que $j \neq k$, temos

$$\begin{aligned} R_{kjk}^j &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{2x_j}{1 + |x|^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{-2x_k}{1 + |x|^2} \right) + \sum_{\substack{l \neq k \\ l \neq j}} \left(\frac{2x_l}{1 + |x|^2} \right) \left(\frac{-2x_l}{1 + |x|^2} \right) + \\ &+ \left(\frac{-2x_k}{1 + |x|^2} \right) \left(\frac{-2x_k}{1 + |x|^2} \right) + \left(\frac{2x_j}{1 + |x|^2} \right) \left(\frac{-2x_j}{1 + |x|^2} \right) + \\ &- \left(\frac{-2x_j}{1 + |x|^2} \right) \left(\frac{2x_j}{1 + |x|^2} \right) - \left(\frac{-2x_k}{1 + |x|^2} \right) \left(\frac{-2x_k}{1 + |x|^2} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$R_{kjk}^j = \left(\frac{2}{1 + |x|^2} \right)^2,$$

o que implica

$$g^{kk} R_{kjk}^k = 1, \quad k \neq j.$$

Desse modo, como

$$S_g = \sum_{k \neq j} g^{kk} R_{kjk}^k,$$

concluimos que

$$S_g \equiv n(n-1).$$

A.8 Isometrias

Nesta seção, denotaremos por g e \bar{g} as métricas das variedades Riemannianas M e N , respectivamente, e suporemos a existência de uma isometria $f : M \rightarrow N$. Além disso, consideraremos:

- a) $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ um atlas para M ;
- b) $\{(U_\alpha, f \circ x_\alpha)\}$ o atlas de N associado ao atlas $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ de M ;
- c) $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$ a base de $T_p M$ associada à parametrização $x : U \rightarrow M$;
- d) $\{\frac{\partial}{\partial y_1}(f(p)), \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}(f(p))\}$ a base de $T_{(f(p))} N$ associada à parametrização $y = f \circ x : U \rightarrow N$.

Lema A.8.1 Dada uma função $u \in C^\infty(M)$, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(u \circ f^{-1})}{\partial y_i}(f(p)), \quad p \in x(U). \quad (\text{A.17})$$

Ou ainda,

$$\frac{\partial(u \circ f^{-1})}{\partial y_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \circ f^{-1}. \quad (\text{A.18})$$

Prova. Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u \circ f^{-1})}{\partial y_i}(f(p)) &= \frac{\partial(u \circ f^{-1}) \circ (f \circ x)}{\partial y_i}((f \circ x)^{-1}(f(p))) \\ &= \frac{\partial(u \circ x)}{\partial x_i}(x^{-1}(p)) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_i}(p), \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. ■

Lema A.8.2 Os vetores das bases associadas às parametrizações dadas se relacionam através da equação

$$df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right) = \frac{\partial}{\partial y_i}(f(p)). \quad (\text{A.19})$$

Prova. Note que $y^{-1} \circ f \circ x = I$, onde I é a aplicação identidade. Assim, as coordenadas de $df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right)$ com relação à base $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}(f(p)), \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}(f(p)) \right\}$ são dadas pelo produto $dI_{x^{-1}(p)}(0, \dots, 1, \dots, 0)$, onde $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ são as coordenadas de $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ em relação à base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\}$. Daí, conclui-se (A.19). ■

Teorema A.8.3 *As métricas g e \bar{g} relacionam-se da seguinte maneira:*

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} \circ f^{-1}. \quad (\text{A.20})$$

Consequentemente,

$$\bar{g}^{ij} = g^{ij} \circ f^{-1}. \quad (\text{A.21})$$

Prova. Dado $q \in N$, considere $p \in M$ tal que $f(p) = q$. Desse modo, sendo $f \circ x : U \rightarrow N$ uma parametrização tal que $q \in f(x(U))$, temos

$$\bar{g}_{ij}(q) = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}(f(p)), \frac{\partial}{\partial y_j}(f(p)) \right\rangle_{f(p)}.$$

Usando (A.19) e o fato de que f é isometria, obtemos

$$\bar{g}_{ij}(q) = \left\langle df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right), df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right) \right\rangle_{f(p)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p = g_{ij}(p).$$

Portanto (A.20) fica demonstrada e (A.21) é consequência de (A.20). ■

Teorema A.8.4 *Os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^m e $\bar{\Gamma}_{ij}^m$ associados às parametrizações (U, x) e $(U, f \circ x)$, respectivamente, relacionam-se da seguinte maneira:*

$$\bar{\Gamma}_{ij}^m = \Gamma_{ij}^m \circ f^{-1}. \quad (\text{A.22})$$

Prova. Dado $q \in N$, consideremos $p \in M$ tal que $f(p) = q$, e $f \circ x : U \rightarrow N$ uma parametrização tal que $q \in f(x(U))$.

Temos que

$$\bar{\Gamma}_{ij}^m(q) = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial y_i}(q) + \frac{\partial \bar{g}_{ik}}{\partial y_j}(q) - \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial y_k}(q) \right) \bar{g}^{km}(q).$$

Usando (A.17), (A.20) e (A.21), obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{ij}^m(q) &= \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial(\bar{g}_{jk} \circ f)}{\partial x_i}(p) + \frac{\partial(\bar{g}_{ik} \circ f)}{\partial x_j}(p) - \frac{\partial(\bar{g}_{ij} \circ f)}{\partial x_k}(p) \right) (\bar{g}^{km} \circ f)(p). \\
&= \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}(p) + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(p) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(p) \right) g^{km}(p). \\
&= \Gamma_{ij}^m(p).
\end{aligned}$$

Daí, conclui-se (A.22). ■

Observação A.8.5 *A partir de (A.22) e (A.13), podemos concluir que*

$$\bar{R}_{ijk}^l = R_{ijk}^l \circ f^{-1}.$$

Através desta última igualdade e de (A.16), verifica-se facilmente o seguinte:

Corolário A.8.6 *As curvaturas escalares S_g e $S_{\bar{g}}$, respectivamente de M e N , relacionam-se de acordo com a equação*

$$S_{\bar{g}} = S_g \circ f^{-1}. \quad (\text{A.23})$$

Teorema A.8.7 *A partir destes resultados anteriores, temos o seguinte:*

- (i) $\Delta_{\bar{g}}(u \circ f^{-1}) = (\Delta_g u) \circ f^{-1}$;
- (ii) $|\nabla_{\bar{g}}(u \circ f^{-1})|^2 = |\nabla_g u|^2 \circ f^{-1}$.

Prova. Note que

$$\begin{aligned}
\Delta_{\bar{g}}(u \circ f^{-1})(f(p)) &= \frac{1}{\sqrt{\det(\bar{g}_{ij}(f(p)))}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\sqrt{\det(\bar{g}_{ij})} \bar{g}^{ij} \frac{\partial(u \circ f^{-1})}{\partial y_j} \right) (f(p)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\det(\bar{g}_{ij}(f(p)))}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det(\bar{g}_{ij} \circ f)} (\bar{g}^{ij} \circ f) \frac{\partial(u \circ f^{-1})}{\partial y_j} \circ f \right) (p).
\end{aligned}$$

Usando, agora, (A.18), (A.20) e (A.21), concluimos que

$$\Delta_{\bar{g}}(u \circ f^{-1})(f(p)) = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij}(p))}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\det(g_{ij})} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) (p),$$

o que implica em (i).

Além disso, observe que

$$\begin{aligned}
|\nabla_{\bar{g}}(u \circ f^{-1})|^2(f(p)) &= \sum_{ij} \bar{g}^{ij}(f(p)) \frac{\partial(u \circ f^{-1})}{\partial y_i}(f(p)) \frac{\partial(u \circ f^{-1})}{\partial y_j}(f(p)) \\
&= \sum_{ij} g^{ij}(p) \frac{\partial u}{\partial x_i}(p) \frac{\partial u}{\partial x_j}(p).
\end{aligned}$$

Daí, segue (ii). ■

No próximo teorema, estamos supondo a definição de integral em variedades Riemannianas, a qual se encontra no Capítulo 1.

Teorema A.8.8 *Seja $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e integrável. Então,*

$$\int_M u dV_g = \int_N (u \circ f^{-1}) dV_{\bar{g}}. \quad (\text{A.24})$$

Prova. Demonstraremos tal igualdade no caso em que $\text{supp}(u) \subset\subset x(U)$, onde estamos denotando por $\text{supp}(u)$ o suporte da função u . Inicialmente, observemos que

$$\int_M u dV_g = \int_U (u \circ x) \sqrt{\det(g_{ij} \circ x)}.$$

Como $\text{supp}(u) \subset\subset x(U)$, então $\text{supp}(u \circ f^{-1}) \subset\subset f(x(U))$. Logo,

$$\int_N (u \circ f^{-1}) dV_{\bar{g}} = \int_U ((u \circ f^{-1}) \circ (f \circ x)) \sqrt{\det(\bar{g}_{ij} \circ (f \circ x))}.$$

Destas duas últimas equações, conclui-se o que queríamos demonstrar. ■

Apêndice B

Gradiente, Divergente e Laplaciano

B.1 Gradiente

Definição B.1.1 *Seja $f \in C^\infty(M)$, onde M é uma variedade Riemanniana. O gradiente de f é o campo de vetores em M , denotado por ∇f , definido pela seguinte condição:*

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p(v), \quad p \in M, \quad v \in T_p M. \quad (\text{B.1})$$

Proposição B.1.2 *Se $f, g \in C^\infty(M)$, então:*

- (i) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;
- (ii) $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.

Prova. Omitiremos esta demonstração em virtude de se tratar de um simples uso das propriedades da diferencial de uma aplicação. ■

Proposição B.1.3 *Sejam $x : U \rightarrow M$ uma parametrização de M , e $f \in C^\infty(M)$. Então, na vizinhança $x(U)$, temos*

$$\nabla f = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (\text{B.2})$$

Consequentemente, $\nabla f \in \mathfrak{X}(M)$.

Prova. Nesta demonstração, iremos usar o fato de que

$$df_p(v) = v(f), \quad p \in M, \quad v \in T_pM.$$

Suponha que, nesta parametrização, tenhamos

$$\nabla f = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Portanto, em $x(U)$,

$$\left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_i a_i \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_i a_i g_{ij}. \quad (\text{B.3})$$

Assim, denotando $F = \left(\left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \right)_{n \times 1}$, $A = (a_i)_{n \times 1}$ e $B = (g_{ij})_{n \times n}$, decorre de (B.3) que $F = BA$. Sendo B invertível, temos $A = B^{-1}F$. Desse modo,

$$a_i = \sum_j g^{ij} \left\langle \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \sum_j g^{ij} df \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j},$$

de onde segue o resultado afirmado. ■

Observação B.1.4 Utilizando a expressão (B.2) do gradiente, obtemos

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}. \quad (\text{B.4})$$

Com efeito, temos

$$\nabla u = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \nabla v = \sum_{k,\ell=1}^n g^{k\ell} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_\ell}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \nabla u, \nabla v \rangle &= \sum_{i,j,k,\ell=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} g_{j\ell} g^{k\ell} \frac{\partial v}{\partial x_k} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \left(\sum_{\ell=1}^n g_{j\ell} g^{\ell k} \right) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \delta_{jk} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_k} \\ &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

B.2 Divergente

Definição B.2.1 *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. O divergente de X é a função $\operatorname{div} X : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} T_p M & \longrightarrow & T_p M \\ v & \longmapsto & (\nabla_v X)(p) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

onde Tr denota o traço da aplicação em questão e ∇ é a conexão de M .

Proposição B.2.2 *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$. Então:*

- (i) $\operatorname{div} (X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y$;
- (ii) $\operatorname{div} (fX) = f \cdot \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle$.

Prova. É fácil concluirmos a validade do item (i). Portanto, faremos apenas a demonstração do item (ii).

Para cada $p \in M$, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (fX)(p) &= \operatorname{Tr}(v \longmapsto \nabla_v (fX)(p)) \\ &= \operatorname{Tr}(v \longmapsto f(p)\nabla_v X(p) + v(f)X(p)) \\ &= f(p)\operatorname{Tr}(v \longmapsto \nabla_v X(p)) + \sum_i \langle e_i(f)X(p), e_i \rangle, \end{aligned}$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base ortonormal de $T_p M$.

Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (fX)(p) &= f(p)\operatorname{div} X(p) + \sum_i e_i(f) \langle X(p), e_i \rangle \\ &= f(p)\operatorname{div} X(p) + \sum_i \langle \nabla f(p), e_i \rangle \langle X(p), e_i \rangle \\ &= f(p)\operatorname{div} X(p) + \langle \nabla f(p), X(p) \rangle, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Proposição B.2.3 *Sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $x : U \longrightarrow M$ uma parametrização de modo que, em $x(U)$, tenhamos $X = \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$. Então, nesta parametrização,*

$$\operatorname{div} X = \sum_i \left[\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_j a_j \Gamma_{ij}^i \right]. \quad (\text{B.6})$$

Consequentemente, $\operatorname{div} X \in C^\infty(M)$.

Prova. Por definição, para cada $p \in M$,

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{Tr}(H_p),$$

onde $H_p(v) = \nabla_v X(p)$, $v \in T_p M$.

Note que

$$\begin{aligned}
H_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \\
&= \sum_j \left(a_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_j \left(\sum_k a_j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\
&= \sum_k \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} + \sum_j a_j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Desta última expressão, podemos concluir que

$$\text{Tr}(H_p) = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \sum_j a_j \Gamma_{1j}^1 \right) + \cdots + \left(\frac{\partial a_n}{\partial x_n} + \sum_j a_j \Gamma_{nj}^n \right).$$

Daí, notamos que a equação (B.6) é verificada. ■

Proposição B.2.4 *Considerando-se as mesmas hipóteses da Proposição B.2.3, obtemos*

$$\text{div } X = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \sqrt{G} \right), \quad (\text{B.7})$$

onde $G = \det(g_{kj})$.

Prova. Será necessário utilizar, nesta demonstração, o seguinte resultado: *Se $A \in C^\infty((a, b); Gl_n(\mathbb{R}))$, então $(\det A)' = \det A \cdot \text{Tr}(A' A^{-1})$ em (a, b) .*

Observe que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \sqrt{G} \right) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \sqrt{G} + \frac{a_i}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial x_i}.$$

Em virtude do resultado citado anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x_i} &= G \cdot \text{Tr} \left[\left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} \right)_{n \times n} (g^{kj})_{n \times n} \right] \\
&= G \left(\sum_k \frac{\partial g_{1k}}{\partial x_i} g^{k1} + \cdots + \sum_k \frac{\partial g_{nk}}{\partial x_i} g^{kn} \right) \\
&= G \left(\sum_{kj} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} \right).
\end{aligned}$$

Desse modo,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \sqrt{G} \right) = \sqrt{G} \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{a_i}{2} \sum_{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} \right). \quad (\text{B.8})$$

Por outro lado, usando (B.6),

$$\text{div } X = \sum_i \left[\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{jk} \frac{a_i}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) g^{ki} \right].$$

Logo,

$$\operatorname{div} X = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{ijk} \frac{a_j}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{ki} + \sum_{ijk} \frac{a_j}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} g^{ki} - \sum_{ijk} \frac{a_j}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} g^{ki}.$$

Observando-se que a segunda e quarta parcelas, nesta soma, se anulam, resta-nos que

$$\operatorname{div} X = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{ijk} \frac{a_j}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} g^{ki},$$

o que implica

$$\operatorname{div} X = \sum_i \left[\frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{a_i}{2} \sum_{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} g^{kj} \right].$$

Desta última igualdade e de (B.8), obtemos o resultado desejado. ■

B.3 Laplaciano

Definição B.3.1 *Seja $f \in C^\infty(M)$. O laplaciano de f é a aplicação $\Delta f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\Delta f(p) = \operatorname{div} (\nabla f)(p). \quad (\text{B.9})$$

É imediato verificar que $\Delta f \in C^\infty(M)$.

Definição B.3.2 *O operador $f \longmapsto \Delta f$ de $C^\infty(M)$ em $C^\infty(M)$ é chamado operador de Laplace-Beltrami.*

Proposição B.3.3 *Sejam $f, g \in C^\infty(M)$. Então:*

- (i) $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$;
- (ii) $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$.

Prova. Basta usar as proposições B.1.2 e B.2.2. ■

Proposição B.3.4 *sejam $f \in C^\infty(M)$ e $x : U \longrightarrow M$ uma parametrização. Então, em $x(U)$,*

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{G} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \quad (\text{B.10})$$

onde $G = \det(g_{ij})$.

Prova. Este resultado segue imediatamente de (B.9) utilizando-se as identidades (B.2) e (B.7). ■

Proposição B.3.5 *Sob as mesmas hipóteses da Proposição B.3.4, temos*

$$\Delta f = \sum_{ij} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \Gamma_{ij}^k \right). \quad (\text{B.11})$$

Prova. Substituindo (B.2) e (B.6), temos

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) + \sum_k \left(\sum_j g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \Gamma_{ik}^i \right] \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{ijk} g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^i. \end{aligned}$$

Usando (A.11), obtemos

$$\Delta f = - \sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{ik}^j \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{ijm} g^{jm} \Gamma_{im}^i \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{ijk} g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^i.$$

Observando-se que a segunda e quarta parcelas, desta soma, se anulam, concluimos que

$$\Delta f = \sum_{ij} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \Gamma_{ij}^k \right),$$

como queríamos demonstrar. ■

Apêndice C

Métricas Conformes

Definição C.1 *Sejam g e \tilde{g} métricas Riemannianas numa variedade diferenciável M . Dizemos que tais métricas são conformes se existe uma função $\phi \in C^\infty(M)$ positiva tal que $\tilde{g} = \phi g$.*

Teorema C.2 *Se g e \tilde{g} são métricas conformes em uma Variedade Riemanniana M , isto é, $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$, sendo u é uma função diferenciável positiva de M em \mathbb{R} , então as curvaturas escalares (respectivamente denotadas por S_g e $S_{\tilde{g}}$) associadas a tais métricas, relacionam-se através da equação*

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)}uS_g = \frac{n-2}{4(n-1)}u^{\frac{n+2}{n-2}}S_{\tilde{g}}. \quad (\text{C.1})$$

Prova. A prova de tal fato se dá através de alguns cálculos, como veremos a seguir. Para efeito de simplificação, estabeleceremos, nesta seção, a notação $r = \frac{4}{n-2}$. Além disso, as notações associadas ao símbolo \sim sempre farão referência à métrica \tilde{g} . Por exemplo, \tilde{g}_{ij} denotará as componentes da métrica \tilde{g} .

Passo 1

Como $\tilde{g} = u^r g$, então $\tilde{g}_{ij} = u^r g_{ij}$ e $\tilde{g}^{ij} = u^{-r} g^{ij}$. Usando a expressão dos símbolos de Christoffel numa parametrização $x : U \rightarrow M$ e denotando $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^l &= \frac{1}{2} \sum_k (\partial_i \tilde{g}_{jk} + \partial_j \tilde{g}_{ik} - \partial_k \tilde{g}_{ij}) \tilde{g}^{kl} \\ &= \frac{1}{2} \sum_k [\partial_i (u^r g_{jk}) + \partial_j (u^r g_{ik}) - \partial_k (u^r g_{ij})] u^{-r} g^{kl} \\ &= \frac{1}{2} r u^{-1} \sum_k (g_{jk} \partial_i u + g_{ik} \partial_j u - g_{ij} \partial_k u) g^{kl} + \frac{1}{2} \sum_k (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) g^{kl}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^l = \Gamma_{ij}^l + \frac{1}{2}ru^{-1} \left[\sum_k (g_{kj}g^{kl}\partial_i u) + \sum_k (g_{ik}g^{kl}\partial_j u) - \sum_k (g_{ij}g^{kl}\partial_k u) \right],$$

o que implica

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^l = \Gamma_{ij}^l + \frac{1}{2}ru^{-1} \left[\delta_{jl}\partial_i u + \delta_{il}\partial_j u - \sum_k (g_{ij}g^{kl}\partial_k u) \right]. \quad (\text{C.2})$$

Como a expressão da curvatura escalar $S_{\tilde{g}}$ em termos de componentes da métrica é dada por

$$S_{\tilde{g}} = \sum_{ijk} \tilde{g}^{ik} \tilde{R}_{ijk}^j,$$

então

$$S_{\tilde{g}} = \sum_{ijk} u^{-r} g^{ik} \left[\partial_j \tilde{\Gamma}_{ik}^j - \partial_i \tilde{\Gamma}_{jk}^j + \sum_s \tilde{\Gamma}_{ik}^s \tilde{\Gamma}_{js}^j - \sum_s \tilde{\Gamma}_{jk}^s \tilde{\Gamma}_{is}^j \right]. \quad (\text{C.3})$$

Substituindo (C.2) em (C.3), obtemos

$$\begin{aligned} u^r S_{\tilde{g}} = & \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \left[\Gamma_{ik}^j + \frac{1}{2}ru^{-1} \left(\delta_{kj}\partial_i u + \delta_{ij}\partial_k u - \sum_m g_{ik}g^{mj}\partial_m u \right) \right] + \\ & - \sum_{ijk} g^{ik} \partial_i \left[\Gamma_{jk}^j + \frac{1}{2}ru^{-1} \left(\delta_{kj}\partial_j u + \delta_{jj}\partial_k u - \sum_m g_{jk}g^{mj}\partial_m u \right) \right] + \\ & + \sum_{ijks} g^{ik} \left[\Gamma_{ik}^s + \frac{1}{2}ru^{-1} \left(\delta_{ks}\partial_i u + \delta_{is}\partial_k u - \sum_m g_{ik}g^{ms}\partial_m u \right) \right] \cdot \\ & \cdot \left[\Gamma_{js}^j + \frac{1}{2}ru^{-1} \left(\delta_{sj}\partial_j u + \delta_{jj}\partial_s u - \sum_p g_{js}g^{pj}\partial_p u \right) \right] + \\ & - \sum_{ijks} g^{ik} \left[\Gamma_{jk}^s + \frac{1}{2}ru^{-1} \left(\delta_{ks}\partial_j u + \delta_{js}\partial_k u - \sum_m g_{jk}g^{ms}\partial_m u \right) \right] \cdot \\ & \cdot \left[\Gamma_{is}^j + \frac{1}{2}ru^{-1} \left(\delta_{sj}\partial_i u + \delta_{ij}\partial_s u - \sum_l g_{is}g^{lj}\partial_l u \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Passo 2

Denotaremos, de agora em diante, por A , B , C e D , a primeira, segunda, terceira e quarta parcelas, respectivamente, da soma no lado direito da igualdade na equação (C.4).

Observe, então, que

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \Gamma_{ik}^j + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijk} g^{ik} \delta_{kj} \partial_{ji} u + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijk} g^{ik} \delta_{ij} \partial_{jk} u + \\
&\quad - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik} g^{mj} \partial_m u) - \frac{ru^{-2}}{2} \sum_{ijk} g^{ik} \delta_{kj} \partial_j u \partial_i u + \\
&\quad - \frac{ru^{-2}}{2} \sum_{ijk} g^{ik} \delta_{ij} \partial_j u \partial_k u + \frac{ru^{-2}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} g_{ik} \partial_j u \partial_m u \\
&= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \Gamma_{ik}^j + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ki} u + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_{jk} u + \\
&\quad - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik} g^{mj} \partial_m u) - \frac{ru^{-2}}{2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_j u \partial_k u + \\
&\quad - \frac{ru^{-2}}{2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_j u \partial_k u + \frac{nr u^{-2}}{2} \sum_{mj} g^{mj} \partial_j u \partial_m u \\
&= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \Gamma_{ik}^j + ru^{-1} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ki} u - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \\
&\quad - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} g_{ik} \partial_j (g^{mj}) \partial_m u - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} g_{ik} g^{mj} \partial_{mj} u + \\
&\quad + \frac{(n-2)ru^{-2}}{2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_j u \partial_k u \\
&= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \Gamma_{ik}^j + ru^{-1} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ki} u - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \\
&\quad - \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{jm} \partial_j (g^{mj}) \partial_m u - \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{jm} g^{mj} \partial_{mj} u + 2u^{-2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_j u \partial_k u.
\end{aligned}$$

Usando a igualdade em (A.5), temos

$$\partial_j (g^{mj}) = - \sum_{ik} g^{mi} \partial_j (g_{ik}) g^{jk}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_j \Gamma_{ik}^j - 2u^{-1} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ki} u - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \\
&\quad + \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{mi} \partial_j (g_{ik}) g^{jk} \partial_m u + 2u^{-2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_j u \partial_k u.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
B &= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_i \Gamma_{jk}^j + \sum_{ijk} g^{ik} \partial_i \left[\frac{ru^{-1}}{2} \left(\delta_{kj} \partial_j u + \delta_{jj} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{mj} \partial_m u \right) \right] \\
&= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_i \Gamma_{jk}^j + \sum_{ijk} g^{ik} \partial_i \left[\sum_j \frac{ru^{-1}}{2} \left(\delta_{kj} \partial_j u + \delta_{jj} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{mj} \partial_m u \right) \right] \\
&= \sum_{ijk} g^{ik} \partial_i \Gamma_{jk}^j + \frac{nr}{2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_i (u^{-1} \partial_k u),
\end{aligned}$$

o que implica

$$B = \sum_{ijk} g^{ik} \partial_i \Gamma_{jk}^j - \frac{nr u^{-2}}{2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_i u \partial_k u + \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u. \quad (C.6)$$

Podemos, também, desenvolver o produto em C , para obtermos

$$\begin{aligned} C &= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^j + \frac{r u^{-1}}{2} \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \left(\delta_{sj} \partial_j u + \delta_{jj} \partial_s u - \sum_p g_{js} g^{pj} \partial_p u \right) + \\ &+ \frac{r u^{-1}}{2} \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{js}^j \left(\delta_{ks} \partial_i u + \delta_{is} \partial_k u - \sum_m g_{ik} g^{ms} \partial_m u \right) + \\ &+ \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijks} g^{ik} \left(\delta_{ks} \partial_i u + \delta_{is} \partial_k u - \sum_m g_{ik} g^{ms} \partial_m u \right) \cdot \\ &\cdot \left(\delta_{sj} \partial_j u + \delta_{jj} \partial_s u - \sum_p g_{js} g^{pj} \partial_p u \right) \\ &= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^j + \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{ik} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \partial_s u + \frac{r u^{-1}}{2} \sum_{ijs} g^{is} \Gamma_{js}^j \partial_i u + \\ &+ \frac{r u^{-1}}{2} \sum_{jks} g^{sk} \Gamma_{js}^j \partial_k u - \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{jms} g^{ms} \Gamma_{js}^j \partial_m u + \\ &+ \frac{nr^2 u^{-2}}{4} \sum_{ik} g^{ik} \delta_{ks} \partial_i u \partial_s u + \frac{nr^2 u^{-2}}{4} \sum_{iks} g^{ik} \delta_{is} \partial_k u \partial_s u + \\ &- \frac{nr^2 u^{-2}}{4} \sum_{iksm} g^{ik} g_{ik} g^{ms} \partial_m u \partial_s u \\ &= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^j + \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{ik} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \partial_s u + \frac{(2-n) r u^{-1}}{2} \sum_{jks} g^{ks} \Gamma_{js}^j \partial_k u + \\ &+ \left(\frac{nr^2 u^{-2}}{2} - \frac{n^2 r^2 u^{-2}}{4} \right) \sum_{ks} g^{ks} \partial_k u \partial_s u. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} C &= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^j + \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{ik} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \partial_s u + 2u^{-1} \sum_{jks} g^{ks} \Gamma_{js}^j \partial_k u + \\ &+ \frac{4nu^{-2}}{2-n} \sum_{ks} g^{ks} \partial_k u \partial_s u. \end{aligned} \quad (C.7)$$

Finalmente, observe que

$$\begin{aligned}
D &= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^j + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{jk}^s \left(\delta_{sj} \partial_i u + \delta_{ij} \partial_s u - \sum_l g_{is} g^{lj} \partial_l u \right) + \\
&+ \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{is}^j \left(\delta_{ks} \partial_j u + \delta_{js} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{ms} \partial_m u \right) + \\
&+ \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijks} g^{ik} \left(\delta_{ks} \partial_j u + \delta_{js} \partial_k u - \sum_m g_{jk} g^{ms} \partial_m u \right) \cdot \\
&\cdot \left(\delta_{sj} \partial_i u + \delta_{ij} \partial_s u - \sum_l g_{is} g^{lj} \partial_l u \right) \\
&= \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^j + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{jk}^j \partial_i u + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{jks} g^{jk} \Gamma_{jk}^s \partial_s u + \\
&- \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijksl} g^{ik} \Gamma_{jk}^s g_{is} g^{jl} \partial_l u + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijs} g^{is} \Gamma_{is}^j \partial_j u + \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{iks} g^{ik} \Gamma_{is}^s \partial_k u + \\
&- \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijksm} g^{ik} \Gamma_{is}^j g_{jk} g^{ms} \partial_m u + \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijks} g^{ik} \delta_{ks} \partial_j u \delta_{sj} \partial_i u + \\
&+ \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijks} g^{ik} \delta_{ks} \partial_j u \delta_{ij} \partial_s u - \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijksl} g^{ik} \delta_{ks} \partial_j u g_{is} g^{jl} \partial_l u + \\
&+ \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijks} g^{ik} \delta_{js} \partial_k u \delta_{sj} \partial_i u + \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijksl} g^{ik} \delta_{js} \partial_k \delta_{ij} \partial_s u + \\
&- \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijksl} g^{ik} \delta_{js} \partial_k u g_{is} g^{jl} \partial_l u - \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijksm} g^{ik} g_{jk} g^{ms} \partial_m u \delta_{sj} \partial_i u + \\
&- \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijksm} g^{ik} g_{jk} g^{ms} \partial_m u \delta_{ij} \partial_s u + \frac{r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ijksm} g^{ik} g_{jk} g^{ms} \partial_m u g_{is} g^{jl} \partial_l u.
\end{aligned}$$

Daí, podemos concluir que

$$D = \sum_{ijks} g^{ik} \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^j + ru^{-1} \sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{ik}^j \partial_j u + \frac{(2-n)r^2 u^{-2}}{4} \sum_{ik} g^{ik} \partial_k u \partial_i u. \quad (\text{C.8})$$

Passo 3

Substituindo-se (C.5)-(C.8) em (C.4) e usando a expressão da curvatura escalar S_g em termos de componentes da métrica, notamos que

$$\begin{aligned}
u^r S_{\tilde{g}} &= S_g - 2u^{-1} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u - \frac{ru^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \\
&+ \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{ijkm} g^{mi} \partial_j (g_{ik}) g^{kj} \partial_m u + 2u^{-2} \sum_{jk} g^{jk} \partial_j u \partial_k u + \\
&+ \frac{nr u^{-2}}{2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_i u \partial_k u - \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u + \frac{nr u^{-1}}{2} \sum_{iks} g^{ik} \Gamma_{ik}^s \partial_s u \\
&- 2u^{-1} \sum_{jks} g^{ks} \Gamma_{js}^j \partial_k u + \frac{4nu^{-2}}{2-n} \sum_{ks} g^{ks} \partial_k u \partial_s u - ru^{-1} \sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{ik}^j \partial_j u + \\
&- \frac{4u^{-2}}{2-n} \sum_{ks} g^{ks} \partial_k u \partial_s u.
\end{aligned}$$

Ou melhor,

$$\begin{aligned}
u^{r+1}S_{\bar{g}} &= uS_g - \frac{4(n-1)}{n-2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u - \frac{r}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \\
&\quad + \frac{nr}{2} \sum_{ijkm} g^{mi} \partial_j (g_{ik}) g^{kj} \partial_m u + 2 \sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{ik}^j \partial_j u - 2 \sum_{jks} g^{ks} \Gamma_{js}^j \partial_k u.
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Usando, agora, a expressão dos símbolos de Christoffel em termos de componentes da métrica, pode-se observar que

$$\sum_{ijk} g^{ik} \Gamma_{ik}^j \partial_j u - \sum_{jks} g^{ks} \Gamma_{js}^j \partial_k u = \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_l (g_{js}) \partial_k u - \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_s (g_{jl}) \partial_k u.$$

Substituindo tal igualdade em (C.9), obtemos

$$\begin{aligned}
u^{r+1}S_{\bar{g}} &= uS_g - \frac{4(n-1)}{n-2} \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u - \frac{r}{2} \sum_{ijkm} g^{ik} \partial_j (g_{ik}) g^{mj} \partial_m u + \\
&\quad + \frac{nr}{2} \sum_{ijkm} g^{mi} \partial_j (g_{ik}) g^{kj} \partial_m u + 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_l (g_{js}) \partial_k u + \\
&\quad - 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_s (g_{jl}) \partial_k u.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\frac{n-2}{n-1} u^{\frac{n+2}{n-2}} S_{\bar{g}} &= \frac{n-2}{n-1} uS_g - 4 \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u - 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_s (g_{jl}) \partial_k u + \\
&\quad + 4 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_l (g_{js}) \partial_k u.
\end{aligned}$$

A última parcela do lado direito desta igualdade pode ser escrita como uma soma, da seguinte maneira:

$$4 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_l (g_{js}) \partial_k u = 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} \partial_l (g_{js}) \partial_k u + 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{lj} \partial_j (g_{ls}) \partial_k u.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\frac{n-2}{n-1} u^{\frac{n+2}{n-2}} S_{\bar{g}} &= \frac{n-2}{n-1} uS_g - 4 \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u + \\
&\quad + 2 \sum_{jksl} g^{ks} g^{jl} [\partial_l (g_{js}) + \partial_j (g_{ls}) - \partial_s (g_{jl})] \partial_k u \\
&= \frac{n-2}{n-1} uS_g - 4 \sum_{ik} g^{ik} \partial_{ik} u + 4 \sum_{jkl} g^{jl} \Gamma_{jl}^k \partial_k u \\
&= \frac{n-2}{n-1} uS_g - 4 \sum_{jl} g^{jl} \left(\partial_{jl} u - \sum_k \Gamma_{jl}^k \partial_k u \right).
\end{aligned}$$

Entretanto, pela Proposição B.3.5,

$$\Delta_g u = \sum_{jl} g^{jl} \left(\partial_{jl} u - \sum_k \Gamma_{jl}^k \partial_k u \right).$$

Portanto,

$$-\Delta_g u + \frac{n-2}{4(n-1)} u S_g = \frac{n-2}{4(n-1)} u^{\frac{n+2}{n-2}} S_{\tilde{g}},$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação C.3 Se $\tilde{g} = v^{\frac{4}{n-2}} g$ para alguma função positiva $v \in C^\infty(M)$, então, denotando $\tilde{G} = \det(\tilde{g}_{ij})$ e $G = \det(g_{ij})$, temos

$$\sqrt{\tilde{G}} = v^{2^*} \sqrt{G}, \quad (\text{C.10})$$

onde $2^* = \frac{2n}{n-2}$.

Teorema C.4 Se $\tilde{g} = v^{\frac{4}{n-2}} g$ para alguma função positiva $v \in C^\infty(M)$, então

$$\Delta_{\tilde{g}}(v^{-1}u) = \frac{1}{v^{2^*-1}} \Delta_g u - \frac{u}{v^{2^*}} \Delta_g v, \quad \forall u \in C^\infty(M). \quad (\text{C.11})$$

Prova. Observe que,

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{g}}(v^{-1}u) &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{G}}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{\tilde{G}} \tilde{g}^{ij} \partial_j (v^{-1}u) \right) \\ &= \frac{1}{v^{2^*} \sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(v^{2^*} \sqrt{G} v^{\frac{-4}{n-2}} g^{ij} \partial_j (v^{-1}u) \right) \\ &= \frac{1}{v^{2^*} \sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{G} v^2 g^{ij} \partial_j (v^{-1}u) \right) \\ &= \frac{1}{v^{2^*} \sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{G} g^{ij} v \partial_j u \right) - \frac{1}{v^{2^*} \sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{G} g^{ij} u \partial_j v \right) \\ &= \frac{1}{v^{2^*} \sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{G} g^{ij} \partial_j u \right) v + \frac{1}{v^{2^*} \sqrt{G}} \sum_{ij} \sqrt{G} g^{ij} \partial_i v \partial_j u + \\ &\quad - \frac{1}{v^{2^*} \sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{G} g^{ij} \partial_j v \right) u - \frac{1}{v^{2^*} \sqrt{G}} \sum_{ij} \sqrt{G} g^{ij} \partial_j v \partial_i u \\ &= \frac{1}{v^{2^*} \sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{G} g^{ij} \partial_j u \right) v - \frac{1}{v^{2^*} \sqrt{G}} \sum_{ij} \partial_i \left(\sqrt{G} g^{ij} \partial_j v \right) u, \end{aligned}$$

de onde segue a equação (C.11). ■

Apêndice D

Grupos Topológicos

Neste apêndice, apresentaremos algumas definições e resultados que serão úteis no Capítulo 3.

Definição D.1 *Um par $((G, \cdot), (G, \tau))$ formado por um grupo e um espaço topológico, com mesmo conjunto subjacente, chama-se um grupo topológico se a aplicação $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ de $G \times G$ em G for contínua, onde consideramos em $G \times G$ a topologia produto.*

Exemplo D.2.

Seja $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais quadradas de ordem n . Consideraremos em $M_n(\mathbb{R})$ a topologia proveniente da norma

$$\|(a_{ij})_{n \times n}\| = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}.$$

O conjunto $Gl_n(\mathbb{R})$ das matrizes invertíveis de ordem n , com a topologia induzida pela topologia de $M_n(\mathbb{R})$, é um grupo topológico.

Antes de apresentarmos outro exemplo de grupo topológico, faremos a seguinte definição.

Definição D.3 *Uma matriz real Φ é uma matriz ortogonal se suas colunas constituem uma base ortonormal para \mathbb{R}^n . O conjunto de todas as matrizes ortogonais $n \times n$ é denotado por $O(n)$.*

Exemplo D.4.

O conjunto $O(n) \subset Gl_n(\mathbb{R})$ é um grupo topológico com a topologia induzida pela topologia de $Gl_n(\mathbb{R})$.

Proposição D.5 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) $\Phi \in O(n)$;
- b) $\Phi^t \Phi = I_n$;
- c) $\langle \Phi x, \Phi y \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$;
- d) $\|\Phi x\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Definição D.6 (Ação de um grupo topológico) *Uma ação de um grupo topológico G sobre um espaço de Hilbert H é definida como sendo uma aplicação $\varphi : G \times H \longrightarrow H$ tal que:*

- i) $\varphi(e, u) = u$, $\forall u \in H$, onde e é o elemento neutro em G ;
- ii) $\varphi(gh, u) = \varphi(g, \varphi(h, u))$, $\forall u \in H$, $\forall g, h \in G$;
- iii) dado $g \in G$, a aplicação $u \longmapsto \varphi(g, u)$ é linear;
- iv) $\|\varphi(g, u)\| = \|u\|$ $\forall u \in H$, $\forall g \in G$.

Neste caso, dizemos que o G atua sobre H .

Geralmente, denota-se $\varphi(g, u)$ como gu . É o que faremos daqui em diante. Neste caso, por exemplo, o item **ii)** da Definição D.6 se escreve como uma espécie de associatividade, como segue: $(gh)u = g(hu)$.

Exemplo D.7 (Ação de $O(n+1)$ em $H^1(S^n)$).

Mostraremos que a aplicação

$$\begin{aligned} O(n+1) \times H^1(S^n) &\longrightarrow H^1(S^n) \\ (\Phi, u) &\longmapsto \Phi u : S^n \longrightarrow \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

onde

$$\Phi u(x) = u(\Phi^{-1}x). \quad (\text{D.2})$$

é uma ação.

Note que (D.2) faz sentido, pois, em virtude do item **d)** da Proposição D.5, obtemos que $\Phi^{-1}x \in S^n$, $\forall x \in S^n$.

i) Seja I a identidade em $O(n+1)$. Então,

$$Iu(x) = u(I^{-1}x) = u(x), \quad \forall x \in S^n,$$

o que implica

$$Iu = u.$$

ii) Sejam $\Phi_1, \Phi_2 \in O(n+1)$. Assim, dado $x \in S^n$,

$$(\Phi_1\Phi_2)u(x) = u((\Phi_1\Phi_2)^{-1}x) = u(\Phi_2^{-1}\Phi_1^{-1}x)$$

e

$$\Phi_1(\Phi_2u)(x) = \Phi_2u(\Phi_1^{-1}x) = u(\Phi_2^{-1}\Phi_1^{-1}x),$$

implicam que

$$(\Phi_1\Phi_2)u = \Phi_1(\Phi_2u).$$

iii) Considere $\alpha \in \mathbb{R}$, $u, v \in H^1(S^n)$ e $\Phi \in O(n+1)$. Desse modo,

$$\Phi(\alpha u + v)(x) = (\alpha u + v)(\Phi^{-1}x) = \alpha u(\Phi^{-1}x) + v(\Phi^{-1}x) = (\alpha(\Phi u) + \Phi v)(x),$$

nos leva ao fato de que a aplicação $u \mapsto \Phi u$ é linear.

iv) Escolha $u \in C^\infty(S^n)$ e $\Phi \in O(n+1)$. A partir do ítem c) da Proposição D.5, obtemos que $\Phi : S^n \rightarrow S^n$ é uma isometria. Portanto, usando os resultados da Seção A.8, temos

$$\int_{S^n} u^2 dV = \int_{S^n} (u \circ \Phi^{-1})^2 dV$$

e

$$\int_{S^n} |\nabla(u \circ \Phi^{-1})|^2 dV = \int_{S^n} (|\nabla u|^2 \circ \Phi^{-1}) dV = \int_{S^n} |\nabla u|^2 dV.$$

Portanto,

$$\|u\|_{H^1(S^n)} = \|u \circ \Phi^{-1}\|_{H^1(S^n)} = \|\Phi u\|_{H^1(S^n)}.$$

Dessa forma, concluímos que a aplicação definida em (D.1)-(D.2) é uma ação usando-se o fato de que $C^\infty(S^n)$ é denso em $H^1(S^n)$. \blacksquare

Definição D.8 *Seja G um grupo topológico que atua sobre um espaço de Hilbert H . Um funcional $I : H \rightarrow \mathbb{R}$ é dito invariante por G se*

$$I(\Phi u) = I(u), \quad \forall \Phi \in G, \quad \forall u \in H. \quad (\text{D.3})$$

Exemplo D.9.

O funcional $J : H^1(S^n) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(v) = \int_{S^n} \left[\frac{1}{2}(|\nabla v|^2 + cv^2) - \frac{1}{q}|v|^q \right] dV \quad (\text{D.4})$$

é invariante com relação à ação de $O(n+1)$ em $H^1(S^n)$.

Para concluir isto, basta observar que, dado $\Phi \in O(n+1)$ e $v \in H^1(S^n)$,

$$\begin{aligned} J(\Phi v) &= \int_{S^n} \left[\frac{1}{2} (|\nabla(\Phi v)|^2 + c(\Phi v)^2) - \frac{1}{q} |\Phi v|^q \right] dV \\ &= \int_{S^n} \left[\frac{1}{2} (|\nabla(v \circ \Phi^{-1})|^2 + c(v \circ \Phi^{-1})^2) - \frac{1}{q} |v \circ \Phi^{-1}|^q \right] dV. \end{aligned}$$

A partir daí, podemos usar os resultados da seção A.8 e o fato de que $\Phi : S^n \rightarrow S^n$ é isometria, para obtermos que

$$J(v) = \int_{S^n} \left[\frac{1}{2} (|\nabla(v \circ \Phi^{-1})|^2 + c(v \circ \Phi^{-1})^2) - \frac{1}{q} |v \circ \Phi^{-1}|^q \right] dV.$$

Logo

$$J(\Phi v) = J(v)$$

e, conseqüentemente, J é invariante por $O(n+1)$.

Definição D.10 *Suponha que o grupo topológico G atua no espaço de Hilbert H . O subespaço*

$$\text{Fix}(G) = \{u \in H; \Phi u = u \forall \phi \in G\}$$

é chamado o fixo de G em H .

Teorema D.11 (Princípio de Criticalidade Simétrica) *Suponha que G é um grupo topológico que atua sobre um espaço de Hilbert H e que $I : H \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional de classe C^1 invariante por G . Se existe $u \in H$ tal que u é ponto crítico de I , restrito ao $\text{Fix}(G)$, então u é ponto crítico de I em H .*

Prova. Veja Teorema 2.2 em [15]. ■

Bibliografia

- [1] **Alves, C. O.**, Existência de Solução Positiva de Equações Elípticas Não-Lineares Variacionais em \mathbb{R}^n , Tese de Doutorado, UNB, Brasília, 1996.
- [2] **Ambrosetti, A., Rabinowitz, P. H.**, Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications, J. Funct. Anal., 14, 349-381 (1973).
- [3] **Aubin, Thierry**, Métriques Riemanniennes et Courbure, J. Diff. Geom., 4, 383-424.
- [4] **Aubin, Thierry**, Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [5] **Carmo, Manoel de**, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice Hall, New Jersey, 1976.
- [6] **Carmo, Manoel de**, Formas Diferenciais e Aplicações, Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1983.
- [7] **Carmo, Manoel de**, Geometria Riemanniana, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [8] **D. Gilbarg & D. Trudinger**, Elliptic Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [9] **Ding, W.**, On a conformally invariant elliptic equation on \mathbb{R}^n , Commun. Math. Phys., 107, 331-335 (1986).
- [10] **Figueredo, D. G. de**, Lectures on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours, Campinas, 1987.
- [11] **Gidas, B., Ni, W. M. e Nirenberg, L.**, Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Math. Phys., 68, 209-243 (1979).
- [12] **H. Brezis**, Analyse Fonctionnelle - Théorie et applications, Masson, Paris, 1996.
- [13] **H. Brezis & T. Kato**, Remarks on the Schrödinger operator with regular complex potentials, J. Math. pures et appl., 58, 1979, p. 137-151.

- [14] **O. H. Miyagaki**, Equações Elípticas Modeladas em Variedades Riemannianas: Uma Introdução, João Pessoa - PB, Janeiro de 2004.
- [15] **Luís Paulo de L. Cavalcante**, Existência de Soluções Positivas para uma Classe de Problemas Elípticos não Lineares em Domínios não Limitados, Dissertação de Mestrado, Campina Grande-PB, Outubro de 2004.
- [16] **R. G. Bartle**, The Elements of Integration, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [17] **Rodrigues, Alexandre A. M.**, Introdução à Teoria dos Grupos de Lie, sexto colóquio brasileiro de matemática, Poços de Caldas, 1967.
- [18] **Schoen, R.**, Conformal Deformation of a Riemannian Metric to Constant Scalar Curvature, J. Diff. Geom., 20, 479-495 (1984).
- [19] **Trudinger, N. S.**, Remarks Concerning the Conformal Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds, Ann Scuola Norm. Pisa, 22, 267-274 (1968).
- [20] **Yamabe, H.**, On Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds, Osaka Math. J. 12 21-37(1960).

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)