

Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática

# Teoria do Grau e Aplicações

por

**Orlando Batista de Almeida**

sob orientação do

**Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Campina Grande - PB**

**Maio/2006**

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

# Teoria do Grau e Aplicações

por

**Orlando Batista de Almeida**

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Amauri da Silva Barros - UFAL**

---

**Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - UFCG**

---

**Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG**

**Orientador**

**Universidade Federal de Campina Grande  
Centro de Ciências e Tecnologia  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Curso de Mestrado em Matemática**

**Maio/2006**

# Resumo

Nesta dissertação, seguindo o trabalho do **Berestycki** [7] e idéias desenvolvidas por **Alves & de Figueiredo** [3] e **Alves, Corrêa & Gonçalves** [4], estudamos a Teoria do Grau de **Brouwer** e **Leray & Schauder**, bem como o **Método de Galerkin** para obter solução de alguns problemas elípticos.

# Abstract

In this of dissertation, motivated by work of **Berestycki** [7] and ideas conceived by **Alves & from Figueiredo** [3] and **Alves, Corrêa & Gonçalves** [4], we styding the theory of Degree from **Brouwer and Leray & Schauder**, well how the **Method from Galerkin** to obtain solution of some elliptic problems.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por toda benção e glória, saúde, força, coragem e perseverança para que eu pudesse concluir este trabalho.

Ao meu querido professor e amigo Claudianor, um profissional e um ser humano que dispensa comentários, pela atenção, compreensão, paciência, que teve comigo nesta difícil jornada.

Ao professor Marco Aurélio Souto, ser humano maravilhoso, que foi responsável pela minha vinda para o mestrado da UFCG.

Aos professores Aparecido Jesuíno, Bráulio Maia, Claudianor, Daniel Cordeiro e Marco Aurélio pelas disciplinas que lecionaram e, que com seus conhecimentos contribuíram de forma decisiva para a minha formação.

A todos que fazem parte do Departamento de Matemática e Estatística da UFCG, pelo acolhimento.

Ao meu irmão e amigo Otacílio Almeida pelo incentivo e apoio.

Aos queridos e inesquecíveis AMIGOS, Aldo Trajano, Moisés Dantas, José Fernando, Cícero, Luiz Paulo, Tatiana, Jesualdo e JESUS pelo companheirismo, motivação, paciência e humildade e, que indiretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Aos professores: Dr. Amauri da Silva Barros e Dr. José de Arimatéia Fernandes por si mostrarem prestativos e disponíveis para fazerem à avaliação deste meu trabalho de dissertação, fazendo parte da Banca Examinadora.

A toda minha família, em especial as minhas filhas: Michaella, Sabrina, O'hana e O'hara pela ausência e falta de atenção nos momentos que mais precisaram de mim, e que mesmo assim me deram muita força e incentivo para que pudesse concluir este curso de pós-graduação e, dizer que foi nelas que encontrei força e inspiração.

# Dedicatória

A minha mãe Edite, a minha esposa, minhas filhas: Michaela, Sabrina, O'hana e O'hara e aos meus irmãos.

# Notações:

- (1)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  produto interno.
- (2)  $[\cdot]$  referência bibliográfica.
- (3)  $(\cdot)$  referência citada no texto.
- (4)  $\rho\{A, B\}$  distância entre os conjuntos  $A$  e  $B$ .
- (5)  $\text{supt}\varphi$  suporte da função  $\varphi$ .
- (6) Se  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  é uma função, usamos ao longo da dissertação as seguintes notações:
  - (i)  $|f(x)|$  é a norma usual do  $\mathbb{R}^N$  para  $f(x)$ .
  - (ii)  $|x|$  é a norma usual do  $\mathbb{R}^N$  para  $x$ .
  - (iii)  $|x|$  é o valor absoluto de  $x$ , se  $n = 1$ .
  - (iv)  $|f'(x)|$  é a norma da transformação linear de  $f'(x)$ , se  $f$  for diferenciável.
- (7) Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função com  $X$  e  $Y$  espaços de Banach, usamos as mesmas notações do item (6) usando-se  $\|\cdot\|$  ao invés de  $|\cdot|$ .
- (8)  $\text{div}\varphi$  é o divergente da aplicação  $\varphi$ .
- (9)  $\text{diam}A$  é o diâmetro do conjunto  $A$ .
- (10)  $m(A)$  é a medida do conjunto  $A$ .
- (11)  $m^*(A)$  é a medida exterior do conjunto  $A$ .
- (12)  $J_f(x) = \det[f'(x)]$  é o valor do determinante jacobiano de  $f$  aplicado no ponto  $x$ .
- (13)  $\overline{B}_r(x)$  é a bola fechada de centro  $x$  e raio  $r$ .
- (14)  $\text{sgn}f$  é o sinal da função  $f$

# Conteúdo

<b>Introdução</b> . . . . .	8
<b>1 O Grau Topológico</b>	<b>12</b>
1.1 O Grau Topológico de Brouwer . . . . .	12
1.1.1 Definição do Grau para o Caso Regular . . . . .	16
1.1.2 Cálculo do Grau por Integração . . . . .	18
1.1.3 Definição do Grau para Funções Contínuas . . . . .	30
1.1.4 Propriedades Principais do Grau Topológico de Brouwer . . . . .	33
1.1.5 Consequências das Propriedades Principais do Grau Topológico de Brouwer . . . . .	38
1.1.6 O Grau Topológico de Brouwer num Espaço Vetorial de Dimensão Finita . . . . .	47
1.2 O Grau Topológico de Leray & Schauder . . . . .	49
1.2.1 Propriedades Fundamentais do Grau de Leray & Schauder . . . . .	55
1.2.2 Consequências das Principais Propriedades do Grau de Leray & Schauder . . . . .	62
<b>2 Existência de Solução para uma Classe de Equações Semilineares Elípticas de 2ª Ordem</b>	<b>67</b>
2.1 Preliminares Sobre Espaços de Schauder . . . . .	67
2.2 Alguns Resultados Clássicos . . . . .	68
2.2.1 Princípio do Máximo Clássico . . . . .	69
2.3 Um Princípio de Resolução para uma Classe de Problemas Semilineares.	71
<b>3 O Método de Galerkin e Aplicações</b>	<b>89</b>
3.1 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em. . . . .	89
3.2 Lema Fundamental . . . . .	91

3.3	Teorema Envolvendo Sub-Solução e Super-Solução. . . . .	92
3.4	Um Problema Auxiliar . . . . .	99
3.4.1	Unicidade de Solução para o Problema Singular . . . . .	115
3.4.2	Regularidade da Solução. . . . .	116
<b>A</b>	<b>Resultados de Análise em <math>\mathbb{R}^N</math>.</b>	<b>117</b>
<b>B</b>	<b>Resultados sobre os Espaços de Sobolev e Teoria da Medida e Integração</b>	<b>120</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>124</b>

# Introdução

Muitos problemas em Análise Funcional não-linear podem ser reduzidos ao estudo de encontrar soluções para equações do tipo:

$$\varphi(x) = b \tag{1}$$

sobre um espaço de Banach adequado.

A teoria do grau tem sido desenvolvida como um método utilizado para estudar o conjunto das soluções da equação (1), obtendo informações sobre a existência, multiplicidade e a natureza destas soluções.

Este tipo de abordagem tem sido usada principalmente em Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e Equações Diferenciais Parciais (EDP).

Neste trabalho, temos por objetivo apresentar a Teoria do Grau, que será estudada em duas etapas: Na primeira será feita o estudo do Grau Topológico de Brouwer que vale em espaços vetoriais de dimensão finita e na segunda etapa será estudado o Grau de Leray & Schauder que vale em espaços vetoriais de dimensão infinita, que teve por base o trabalho da Tese de Doutorado de Henry Berestycki [7] de 1975, cujo objeto de estudo foi Métodos Topológicos e Problemas Auxiliares Limitados. Uma vez mostrada a existência do grau topológico usamos o mesmo para obter soluções para duas classes de problemas elípticos. O método aplicado para obter as soluções dos problemas está centralizado no **Método de Galerkin** e no teorema do **Ponto Fixo de Schaeffer**.

No Capítulo 1, seguindo o trabalho de Berestycki [7], construímos o Grau Topo-

lógico de Brouwer, definindo o mesmo para o caso Regular. Depois estudamos o grau para as funções contínuas, e em seguida estudamos suas propriedades e as principais consequências dessas propriedades. Definimos o Grau de Leray & Schauder, trabalhamos as suas propriedades e as suas principais consequências.

No capítulo 2, norteado ainda pelo trabalho de Berestycki [7], definimos alguns espaços de Schauder com suas respectivas normas e apresentamos alguns resultados devido a Schauder. Usando a teoria do Grau de Leray & Schauder demonstramos o Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer, o qual juntamente com os resultados de Schauder são usados para mostrar a existência de solução para a seguinte classe de problemas elípticos quasilineares

$$\begin{cases} Lu = F(x, u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \quad (P)$$

onde,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um aberto limitado, o operador L diferencial é dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^N b_i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x)$$

com  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo uma função de classe  $C^2(\bar{\Omega})$ ,  $N \geq 1$  e  $F \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  com  $\alpha \in (0, 1)$ .

No capítulo 3, seguindo idéias desenvolvidas por **Alves & de Figueiredo** [3] (2003) e **Alves, Corrêa & Gonçalves** [4] (2005), usamos o grau de Brouwer para demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e uma consequência do mesmo, o qual chamaremos de Lema Fundamental, que é utilizado para mostrar a existência de solução positiva para a seguinte classe de problemas elípticos singulares

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{u^\gamma}, & \Omega \\ u > 0, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_1)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto limitado,  $0 < \gamma < 1$ ,  $N \geq 2$ . O método utilizado para obter tal solução é conhecido como **Método de Galerkin**, que é uma técnica de resolução

de alguns problemas não lineares, que consiste em aproximar o espaço  $H_0^1(\Omega)$  por uma sequência de subespaço de dimensão finita. Neste capítulo, usamos um resultado de Regularidade devido a Agmon [1], e também destacamos um importante resultado devido a Ambrosetti, Brézis e Cerami [5], que é um Teorema envolvendo Subsolução e Supersolução, o qual estabelece a unicidade de solução para uma classe de problemas singulares que inclui o problema  $(P_1)$ .

No apêndice **A**, recordamos algumas definições e enunciamos os principais teoremas de análise no  $\mathbb{R}^N$  utilizados neste trabalho.

No apêndice **B**, apresentamos alguns resultados envolvendo os espaços de Sobolev e Teoria da Medida e Integração que foram usados nesta dissertação.

# Capítulo 1

## O Grau Topológico

Nosso objetivo neste capítulo é definir e demonstrar os principais resultados sobre a teoria do grau de **Brouwer** e do grau de **Leray & Schauder**.

### 1.1 O Grau Topológico de Brouwer

Nesta seção iremos mostrar como é construído o grau de Brouwer. Começamos o nosso estudo com o seguinte resultado.

**Teorema 1.1** (*Teorema de Sard*) *Seja  $\Lambda$  um aberto do  $\mathbb{R}^N$ ,  $f$  uma função de classe  $\mathcal{C}^1(\Lambda, \mathbb{R}^N)$  e  $S = \{x \in \Lambda; J_f(x) = 0\}$ . Então,  $f(S)$  é um conjunto de medida nula.*

**Demonstração:** Seja  $\mathcal{C}$  um cubo fechado contido em  $\Lambda$  de lado  $a$ . Vamos dividir  $\mathcal{C}$  em  $K^N$  subcubos, com  $K$  um número natural.

Temos que a aplicação  $f'$  é uniformemente contínua em  $\mathcal{C}$ , pois  $f'$  é contínua e está definida no compacto  $\mathcal{C}$  (ver Teorema A.9), então dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\alpha > 0$  tal que

$$\forall x, y \in \mathcal{C} \text{ teremos } |x - y| < \alpha \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| < \epsilon. \quad (1.1)$$

Fixe  $K$  de maneira que os subcubos  $\tilde{C} \subset \mathcal{C}$  tenham diâmetro menor que  $\alpha$ . Desde que, o diâmetro de  $\tilde{C}$  é dado por  $\text{diam}(\tilde{C}) = \frac{a}{K}\sqrt{N}$ , então  $\frac{a}{K}\sqrt{N} < \alpha$ . Além disso,  $f$  é lipschitziana em  $\mathcal{C}$  com

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \forall x, y \in \mathcal{C}, \text{ com } M = \max_{z \in \mathcal{C}} |f'(z)|.$$

Dado  $x \in \mathcal{C} \cap S$ , existe  $\tilde{C} \subset \mathcal{C}$  tal que  $x \in \tilde{C} \cap S$ , então  $\forall y \in \tilde{C}$  tem-se

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Sendo  $diam(\tilde{C}) = \sup\{|x - y|; x, y \in \tilde{C}\}$  temos  $|x - y| \leq diam(\tilde{C})$  e assim

$$|f(x) - f(y)| \leq M diam(\tilde{C}).$$

Portanto,

$$f(y) \in \overline{\mathcal{B}}(f(x), M diam(\tilde{C})),$$

onde  $\mathcal{B}(f(x), M diam(\tilde{C}))$  é a bola fechada de centro  $f(x)$  e raio  $M diam(\tilde{C})$ . Desde que,  $y \in \tilde{C}$  é qualquer concluimos

$$f(\tilde{C}) \subset \overline{\mathcal{B}}(f(x), M diam(\tilde{C})).$$

Por outro lado, pelo teorema A.6 temos

$$f(y) - f(x) - f'(x)(y - x) = \int_0^1 [f'(x + t(y - x)) - f'(x)](y - x) dt.$$

Daí, segue

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| = \left| \int_0^1 [f'(x + t(y - x)) - f'(x)](y - x) dt \right|$$

o que implica

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| \leq \int_0^1 |[f'(x + t(y - x)) - f'(x)](y - x)| dt. \quad (1.2)$$

Sendo

$$|f'(x)| = \sup_{|v| \neq 0} \frac{|f'(x)v|}{|v|}$$

obtemos

$$\frac{|f'(x)v|}{|v|} \leq |f'(x)| \text{ e portanto } |f'(x)v| \leq |f'(x)||v|.$$

Assim, segue de (1.2)

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| \leq \int_0^1 |[f'(x + t(y - x)) - f'(x)]||y - x| dt.$$

Desde que,

$$|x + t(y - x) - x| = |t(y - x)| = |t||y - x| < |y - x| < \alpha,$$

pois  $t \in [0, 1]$ , segue de (1.1)

$$|f'(x + t(y - x)) - f'(x)| < \epsilon.$$

Consequentemente

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| \leq \epsilon |y - x|,$$

o que implica

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| \leq \epsilon \text{diam}(\tilde{C}). \quad (1.3)$$

Desde que,  $x \in \mathcal{C} \cap S$  tem-se que  $J_f(x) = 0$ . Logo  $f'(x)$  não é inversível e podemos afirmar que  $f'(x)(\mathbb{R}^N) \subset H$ , onde  $H$  é um hiperplano do  $\mathbb{R}^N$ .

Por (1.3) temos

$$|f(y) - (f(x) + f'(x)(y - x))| \leq \epsilon \text{diam}(\tilde{C}), \text{ onde } f'(x)(y - x) \in H$$

e sendo  $\rho(f(y), f(x) + H)$  a distância entre o ponto  $f(y)$  e o conjunto  $f(x) + H$ , por definição da função distância temos

$$\rho(f(y), f(x) + H) = \inf\{|f(y) - (f(x) + h)|; h \in H\}.$$

Assim, se considerarmos  $h = f'(x)(y - x)$ , obtemos

$$\rho(f(y), f(x) + H) \leq |f(y) - (f(x) + f'(x)(y - x))|, \forall h \in H$$

e com isso

$$\rho(f(y), f(x) + H) \leq \epsilon \text{diam}(\tilde{C}).$$

Desta forma,  $f(\tilde{C})$  está contido num paralelepípedo  $P$  de centro  $f(x)$  e volume

$$V(P) = 2\epsilon \text{diam}(\tilde{C})(2M \text{diam}(\tilde{C}))^{N-1}.$$

Sendo assim, a medida exterior do conjunto  $f(\tilde{C})$  é dada por

$$m^*(f(\tilde{C})) \leq 2\epsilon \text{diam}(\tilde{C})(2M \text{diam}(\tilde{C}))^{N-1}$$

implicando

$$m^*(f(\tilde{C})) \leq 2^N M^{N-1} \text{diam}(\tilde{C})^N \epsilon.$$

Logo

$$m^*(f(\tilde{C})) \leq 2^N M^{N-1} \left(\frac{a}{K} \sqrt{N}\right)^N \epsilon.$$

Agora, veja que

$$m^*(f(\mathcal{C} \cap S)) \leq \sum_{\tilde{C} \cap S \neq \emptyset} m^*(f(\tilde{C} \cap S))$$

e conseqüentemente

$$m^*(f(\mathcal{C} \cap S)) \leq \sum_{\tilde{C} \cap S \neq \emptyset} m^*(f(\tilde{C})),$$

donde obtemos

$$m^*(f(\mathcal{C} \cap S)) \leq 2^N M^{N-1} N^{\frac{N}{2}} \left(\frac{a}{K}\right)^N \cdot \epsilon \cdot K^N.$$

Portanto

$$m^*(f(\mathcal{C} \cap S)) \leq 2^N M^{N-1} N^{\frac{N}{2}} (a)^N \epsilon.$$

Considerando  $2^N M^{N-1} N^{\frac{N}{2}} (a)^N = \sigma$ , temos que  $m^*(f(\mathcal{C} \cap S)) \leq \sigma \epsilon$ .

Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$ , concluimos

$$m^*(f(\mathcal{C} \cap S)) = 0.$$

Agora, considere uma família de cubos abertos  $\{C_\lambda\}$  verificando

$$S \subset \bigcup_{S \cap C_\lambda \neq \emptyset} C_\lambda, \text{ com } C_\lambda \text{ aberto e } C_\lambda \subset \Lambda.$$

Segue do teorema de Lindëlof que existe  $\{C_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{C_\lambda\}$ , tal que

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (\overline{C}_j \cap S).$$

Daí, segue

$$f(S) \subset f\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (\overline{C}_j \cap S)\right),$$

implicando

$$f(S) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} f(\overline{C}_j \cap S).$$

Logo

$$m^*(f(S)) \leq m^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} f(\overline{C}_j \cap S)\right)$$

e conseqüentemente

$$0 \leq m^*(f(S)) \leq \sum_{\overline{C}_j \cap S \neq \emptyset} m^*(f(\overline{C}_j \cap S)) = 0,$$

donde concluimos

$$m^*(f(S)) = 0.$$

Conforme resultado da teoria da medida (ver Teorema B.3) temos que  $f(S)$  é mensurável com  $m(f(S)) = m^*(f(S)) = 0$ . ■

### 1.1.1 Definição do Grau para o Caso Regular

Considere  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um aberto limitado e  $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  o espaço das funções  $k$ -vezes continuamente diferenciáveis em  $\overline{\Omega}$ , isto é, o espaço das funções contínuas em  $\overline{\Omega}$  que possuem todas as derivadas até ordem  $k$ , sendo restrições de funções contínuas definidas em  $\overline{\Omega}$ .

Para o espaço  $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  vamos considerar a seguinte norma

$$\|\varphi\|_k = \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in \Omega} \|D^{(j)}\varphi(x)\|.$$

Sejam  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  e  $S = \{x \in \Omega; J_\varphi(x) = 0\}$ , onde  $J_\varphi$  representa a matriz jacobiana de  $\varphi$ . Seja  $b \in \mathbb{R}^N$  com  $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$ .

Se  $x \in \varphi^{-1}(\{b\})$  temos que  $J_\varphi(x) \neq 0$ , então pelo Teorema da Aplicação Inversa  $\varphi$  é um difeomorfismo de uma vizinhança  $\mathbf{U}$  de  $x$  sobre uma vizinhança  $\mathbf{V}$  de  $b$ , isto é,  $\varphi|_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \rightarrow \varphi(\mathbf{U}) = \mathbf{V}$  é um difeomorfismo.

**Afirmção:** O conjunto  $\varphi^{-1}(\{b\})$  é finito.

De fato,  $\varphi^{-1}(\{b\})$  é um fechado em  $\overline{\Omega}$ , conseqüentemente  $\varphi^{-1}(\{b\})$  é um fechado e limitado em  $\mathbb{R}^N$ , pois  $\varphi^{-1}(\{b\}) \subset \overline{\Omega}$ . Portanto,  $\varphi^{-1}(\{b\})$  é um compacto.

Para cada  $x \in \varphi^{-1}(\{b\})$ , considere a bola  $B_{r_x}(x) \subset \mathbf{U}_x$ .

Assim

$$\varphi^{-1}(\{b\}) \subseteq \bigcup_{x_j \in \varphi^{-1}(\{b\})} B_{r_j}(x_j),$$

e desde que  $\{B_{r_j}(x_j)\}$  é uma cobertura por abertos para o compacto  $\varphi^{-1}(\{b\})$ , pelo Teorema de Borel-Lebesgue podemos extrair uma subcobertura finita de maneira que

$$\varphi^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{j=1}^k B_{r_j}(x_j),$$

mostrando que  $\varphi^{-1}(\{b\})$  é finito, ou seja,  $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k\}$  com  $J_\varphi(\xi_i) \neq 0$  para todo  $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ .

**Definição 1.2** *Sejam  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  e  $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$ . Definimos o grau topológico de Brouwer da aplicação  $\varphi$  em relação a  $\Omega$  no ponto  $b$ , como sendo o número inteiro*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} \text{sgn}(J_\varphi(\xi_i))$$

onde  $\text{sgn}$  é a função sinal que é definida por

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ -1, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

**Exemplo 1.1** Considere a aplicação  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\varphi(x) = \text{sen } x$  com  $\Omega = (0, \frac{5\pi}{2})$  e  $b = \frac{\pi}{4}$ . Nosso objetivo é calcular o grau topológico de Brouwer de  $\varphi$  com relação a  $\Omega$  no ponto  $b$ , ou seja  $d(\varphi, \Omega, b)$ .

*Resolução:*

Devemos primeiramente verificar se  $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$ , para que o  $d(\text{sen } x, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4})$  esteja bem definido. Veja que:

$$\partial\Omega = \{0, \frac{5\pi}{2}\}, \quad \varphi(S) = \{x \in (0, \frac{5\pi}{2}); \cos x = 0\} = \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}, \quad \varphi(\partial\Omega) = \{0, 1\},$$

$$\varphi(S) = \{-1, 1\}, \text{ logo } \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S) = \{-1, 0, 1\}.$$

Com isso concluímos que  $\frac{\pi}{4} \notin \{-1, 0, 1\}$ .

Assim,

$$\varphi^{-1}(\{\frac{\pi}{4}\}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}.$$

Por definição,

$$d(\text{sen } x, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{\frac{\pi}{4}\})} \text{sgn}(J_\varphi(\xi_i))$$

logo,

$$d(\text{sen } x, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}) = \text{sgn}(\varphi'(\xi_1)) + \text{sgn}(\varphi'(\xi_2)) + \text{sgn}(\varphi'(\xi_3))$$

consequentemente,

$$d(\text{sen } x, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}) = 1 + (-1) + 1.$$

Portanto,

$$d(\text{sen } x, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}) = 1.$$

**Observação 1.1** Uma primeira observação que destacamos a partir da definição 1.2 é a seguinte igualdade

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

Com efeito, note primeiramente que

$$\varphi(x) = b \Leftrightarrow \varphi(x) - b = 0.$$

Considerando  $\varphi - b = \psi$  temos que  $\psi^{-1}(\{0\}) = \varphi^{-1}(\{b\})$ . Desta forma,

$$d(\varphi - b, \Omega, 0) = d(\psi, \Omega, 0),$$

que implica

$$d(\psi, \Omega, 0) = \sum_{\eta_i \in \psi^{-1}(\{0\})} \operatorname{sgn}[J_\psi(\eta_i)].$$

Desde que, a quantidade de parcelas dos dois somatórios

$$\sum_{\eta_i \in \psi^{-1}(\{0\})} \operatorname{sgn}[J_\psi(\eta_i)] \text{ e } \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} \operatorname{sgn}[J_\varphi(\xi_i)]$$

são iguais e

$$\psi(\eta_i) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\eta_i) - b = 0 \Leftrightarrow \varphi(\eta_i) = b$$

concluimos que  $\xi_i = \eta_i$ . Assim,

$$d(\psi, \Omega, 0) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} \operatorname{sgn}[J_\varphi(\xi_i)].$$

Portanto,

$$d(\psi, \Omega, 0) = d(\varphi, \Omega, b).$$

### 1.1.2 Cálculo do Grau por Integração

Considerando  $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k\}$  temos  $J_\varphi(\xi_i) \neq 0$  para todo  $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ . Logo pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança  $\mathbf{U}_i$  de  $\xi_i$  e  $\varphi(\mathbf{U}_i)$  de  $b$  tal que  $\varphi|_{\mathbf{U}_i} : \mathbf{U}_i \rightarrow \varphi(\mathbf{U}_i)$  com  $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$  é um difeomorfismo. Além disso, existe  $\epsilon > 0$  e vizinhanças  $B_\epsilon(b)$  de  $b$  e  $\mathbf{U}_i$  de  $\xi_i$  com  $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$  tais que

$$\varphi|_{\mathbf{U}_i} : \mathbf{U}_i \rightarrow B_\epsilon(b)$$

é um difeomorfismo.

Para todo  $\epsilon > 0$ , existe uma aplicação  $J_\epsilon \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  tal que  $\operatorname{supt} J_\epsilon \subset B_\epsilon(b)$  e  $\int_{\mathbb{R}^N} J_\epsilon(x) dx = 1$ , onde  $\operatorname{supt} J_\epsilon$  é o suporte da função  $J_\epsilon$ , que é definido por

$$\operatorname{supt} J_\epsilon = \overline{\{x \in \mathbb{R}^N; J_\epsilon(x) \neq 0\}}.$$

Agora, vamos definir

$$I_\epsilon = \int_{\Omega} J_\epsilon(\varphi(x)) J_\varphi(x) dx.$$

Note que

$$I_\epsilon = \int_{\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\}} J_\epsilon(\varphi(x)) J_\varphi(x) dx.$$

Fixando  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, considere as vizinhanças  $\mathbf{U}_i$  de  $\xi_i$ , desta forma  $I_\epsilon$  é dado por

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbf{U}_i} J_\epsilon(\varphi|_{\mathbf{U}_i}(x)) J_{\varphi|_{\mathbf{U}_i}}(x) dx,$$

onde  $\varphi_i = \varphi|_{\mathbf{U}_i}$  com  $1 \leq i \leq k$ . Sendo

$$\varphi(\mathbf{U}_i) = B_\epsilon(b) \text{ temos } \text{ que } \mathbf{U}_i = \varphi^{-1}(B_\epsilon(b)).$$

Assim

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^k \int_{\varphi_i^{-1}(B_\epsilon(b))} J_\epsilon(\varphi_i(x)) J_{\varphi_i}(x) dx.$$

Usando o Teorema de Mudança de Variáveis temos

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^k \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(\varphi_i(\varphi_i^{-1}(x))) J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) |J_{\varphi_i^{-1}}(x)| dx,$$

ou seja,

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^k \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(x) J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) |J_{\varphi_i^{-1}}(x)| dx. \quad (1.4)$$

Desde que

$$\varphi_i(\varphi_i^{-1}(x)) = x$$

temos

$$|J_{\varphi_i^{-1}}(x)| = \frac{1}{|J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))|}. \quad (1.5)$$

Usando a igualdade (1.5) em (1.4) obtemos

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^k \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(x) J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) \frac{1}{|J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))|} dx.$$

Observe que

$$\frac{J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))}{|J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))|} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) > 0 \\ -1 & , \text{ se } J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x)) < 0 \end{cases}$$

e portanto

$$\frac{J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))}{|J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))|} = \text{sgn}[J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))].$$

Consequentemente,

$$I_\epsilon = \sum_{i=1}^k \int_{B_\epsilon(b)} J_\epsilon(x) \text{sgn}[J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))] dx.$$

Desde que,

$$\operatorname{sgn}\left[J_{\varphi_i}(\varphi_i^{-1}(x))\right] = \operatorname{sgn}J_{\varphi}(\xi_i), \quad \forall x \in B_{\epsilon}(b),$$

segue-se que

$$I_{\epsilon} = \sum_{i=1}^k \int_{B_{\epsilon}(b)} J_{\epsilon}(x) \operatorname{sgn}[J_{\varphi}(\xi_i)] dx.$$

Assim,

$$I_{\epsilon} = \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn}[J_{\varphi}(\xi_i)] \int_{B_{\epsilon}(b)} J_{\epsilon}(x) dx.$$

Sendo  $\operatorname{supt}J_{\epsilon} \subset B_{\epsilon}(b)$  e

$$\int_{\mathbb{R}^N} J_{\epsilon}(x) dx = 1$$

temos

$$I_{\epsilon} = \sum_{i=1}^k \operatorname{sgn}[J_{\varphi}(\xi_i)]$$

donde podemos concluir que

$$I_{\epsilon} = d(\varphi, \Omega, b).$$

O número  $I_{\epsilon}$  é denominado a Forma Integral do Grau Topológico de Brouwer de  $\varphi$  com relação a  $\Omega$  no ponto  $b$ .

**Observação 1.2** *Podemos concluir a partir do que já foi visto sobre a teoria do grau que, se  $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$ , existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $\varphi(x_0) = b$ .*

De fato, se  $b \notin \varphi(\partial\Omega)$  temos

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} \operatorname{sgn}(J_{\varphi}(\xi_i)) = \int_{\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\}} J_{\epsilon}(\varphi(x)) J_{\varphi}(x) dx.$$

Sendo  $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$ , por hipótese, temos

$$\int_{\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\}} J_{\epsilon}(\varphi(x)) J_{\varphi}(x) dx \neq 0$$

implicando que  $\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\} \neq \emptyset$ . Consequentemente, existe  $x_{\epsilon} \in \Omega$  tal que  $|\varphi(x_{\epsilon}) - b| < \epsilon$ . Desde que  $\overline{\Omega}$  seja limitado, fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  temos que,  $\varphi(x_0) - b = 0$  concluímos que  $\varphi(x_0) = b$ .

**Lema 1.3** *Seja  $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  e  $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$ . Então, existe uma vizinhança  $\mathbf{U}$  de  $\varphi$  pela topologia de  $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  tal que  $\forall \psi \in \mathbf{U}$ , temos que:*

- (i)  $b \notin \psi(\partial\Omega)$ ,
- (ii)  $x \in \psi^{-1}(b) \Rightarrow J_{\psi}(x) \neq 0$ ,
- (iii)  $d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$ .

**Demonstração: Prova do item (i).**

Seja  $\epsilon_1 = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$  e vamos considerar a seguinte vizinhança de  $\varphi$

$$\|\psi - \varphi\|_{C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon_1}{2}. \quad (1.6)$$

**Afirmção:**  $b \notin \psi(\partial\Omega)$ .

De fato, segue de (1.6)

$$|\psi(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\epsilon_1}{2}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (1.7)$$

Assim, não existe  $x_0 \in \partial\Omega$  com  $\psi(x_0) = b$ , pois caso contrário, em (1.7) teríamos

$$|\psi(x_0) - \varphi(x_0)| \leq \frac{\epsilon_1}{2}, \quad \text{ou seja, } |b - \varphi(x_0)| \leq \frac{\epsilon_1}{2}$$

implicando que

$$\epsilon_1 = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} \leq \frac{\epsilon_1}{2},$$

que é um absurdo.

**Prova do item (ii).**

Considere  $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k\}$  e as vizinhanças  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \dots, \mathbf{U}_k$  e  $\epsilon > 0$ , tais que

$$\varphi_i = \varphi \Big|_{\mathbf{U}_i} : \mathbf{U}_i \rightarrow B_\epsilon(b)$$

é um difeomorfismo e vamos supor que

$$|J_{\varphi_i}(x)| > \eta > 0, \quad \forall x \in \mathbf{U}_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Usando o fato que  $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ , dado

$$\epsilon^* = \frac{1}{2M}, \quad \text{onde } 0 < M = \max\{|\varphi'(\xi_i)^{-1}|; i = 1, 2, 3, \dots, k\},$$

existe  $r > 0$  tal que

$$\forall x \in B_r(\xi_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, k \quad \text{tem-se } |\varphi'(x) - \varphi'(\xi_i)| < \epsilon^* = \frac{1}{2M}.$$

Logo,

$$|\varphi'(\xi_i)^{-1}[\varphi'(x) - \varphi'(\xi_i)]| \leq |\varphi'(\xi_i)^{-1}| |\varphi'(x) - \varphi'(\xi_i)|$$

e daí temos

$$|\varphi'(\xi_i)^{-1}[\varphi'(x) - \varphi'(\xi_i)]| < M \cdot \frac{1}{2M} = \frac{1}{2}, \quad \forall x \in B_r(\xi_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

O  $r$  é escolhido de tal maneira que

$$\operatorname{sgn} J_\varphi(x) = \operatorname{sgn} J_\varphi(\xi_i), \quad \forall x \in B_r(\xi_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Considere  $\mathbb{D} = \overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^k B_r(\xi_i)$ . Note que  $\mathbb{D}$  é um compacto, pois  $\mathbb{D}$  é um fechado e limitado, e além disso,  $b \notin \mathbb{D}$ .

Considere  $\epsilon_2 = \rho\{b, \varphi(\mathbb{D})\} > 0$  então, para  $\forall \psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  satisfazendo

$$\|\psi - \varphi\|_{C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon_2}{2}$$

devemos ter  $b \notin \psi(\mathbb{D})$ . Assim, as soluções da equação  $\psi(x) = b$ , caso existam, devem pertencer ao conjunto  $\bigcup_{i=1}^k B_r(\xi_i)$ .

A aplicação  $\varphi' : \overline{\Omega} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  é contínua e com isso,  $\varphi'(\overline{\Omega})$  é um compacto em  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ . Por outro lado, a aplicação  $\det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, donde podemos concluir que a mesma é uniformemente contínua sobre uma vizinhança compacta  $K$  de  $\varphi'(\overline{\Omega})$ . Assim, existe  $\epsilon_3 > 0$  tal que

$$|X - Y| < \epsilon_3 \Rightarrow |\det X - \det Y| < \eta, \quad \forall X, Y \in K.$$

Se  $|X - Y| < \epsilon_3$ , para algum  $X \in \varphi'(\overline{\Omega})$  tem-se que  $Y \in K$ . Considerando agora a vizinhança de  $\varphi$  em  $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  dada por

$$\|\psi - \varphi\|_{C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon_3}{2} \quad \text{com } \psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$$

temos que

$$\forall x \in \Omega, \quad \psi'(x) \in K \quad \text{e} \quad |J_\psi(x) - J_\varphi(x)| < \eta.$$

Considerando

$$\mathbf{U}_1 = \left\{ \psi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N); \|\psi - \varphi\|_{C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon_4}{2} \right\}$$

onde,  $\epsilon_4 = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$  obtemos

$$J_\psi(x) \neq 0, \quad \forall \psi \in \mathbf{U}_1 \quad \text{e} \quad \forall x \in \bigcup_{i=1}^k B_r(\xi_i).$$

De fato, note que

$$|J_\varphi(x)| - |J_\psi(x)| \leq |J_\varphi(x) - J_\psi(x)| < \eta$$

implicando que

$$|J_\psi(x)| > |J_\varphi(x)| - \eta, \quad \forall x \in \bigcup_{i=1}^k B_r(\xi_i).$$

Mostrando que

$$J_\psi(x) \neq 0, \quad \forall \psi \in \mathbf{U}_1 \text{ e } \forall x \in \bigcup_{i=1}^k B_r(\xi_i),$$

provando assim, o item (ii).

**Prova do item (iii).**

Para demonstrar que

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b), \quad \forall \psi \in \mathbf{U}_1,$$

devemos mostrar que em cada bola  $B_r(\xi_i)$ , existe um único  $x_0^i \in B_r(\xi_i)$  tal que  $\psi(x_0^i) = b$ .

Fixe

$$a = 1 + \max_{1 \leq i \leq k} \{|\varphi'(\xi_i)^{-1}|\} > 0.$$

Podemos encontrar uma vizinhança  $\mathbf{U}$  de  $\varphi$  contida em  $\mathbf{U}_1$  tal que:

(1°)  $\forall \psi \in \mathbf{U}$ ,  $|\psi'(\xi_i)^{-1}| < a$ ,  $\forall i = 1, 2, 3, \dots, k$ , tendo em vista que a inversão de matrizes é uma imersão contínua.

(2°)  $|\psi'(\xi_i)^{-1}[\psi'(y) - \psi'(\xi_i)]| < \frac{3}{4}$ ,  $\forall y \in B_r(\xi_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ .

Para fixar as idéias, considere

$$\mathbf{U} = \{\psi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N); \|\varphi - \psi\|_{C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)} \leq \epsilon\} \text{ com } 0 < \epsilon < \min\left\{\epsilon_4, \frac{r}{4a}\right\}.$$

Neste caso,

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \epsilon < \frac{r}{4a}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Defina a função

$$\theta_i(x) = \psi'(\xi_i)^{-1}\psi(x), \quad \forall x \in B_r(\xi_i).$$

**Afirmção:**  $\theta_i - I$  é uma  $\frac{3}{4}$ -contração.

De fato,

$$|\theta'_i(x) - I| = \max\{|\theta'_i(x)v - v|; |v| = 1\}$$

implicando que

$$|\theta'_i(x) - I| = \max\{|\psi'(\xi_i)^{-1}\psi'(x)v - v|; |v| = 1\}.$$

Logo

$$|\theta'_i(x) - I| = \max\{|\psi'(\xi_i)^{-1}[\psi'(x)v - \psi'(\xi_i)v]|; |v| = 1\},$$

donde se obtém

$$|\theta'_i(x) - I| \leq \frac{3}{4}, \quad \forall x \in B_r(\xi_i).$$

Definindo  $\psi_i(x) = \theta_i - x$  tem-se que  $\theta_i = x + \psi_i(x)$ , onde  $\psi_i$  é  $\frac{3}{4}$ -contração. Usando o Lema A.17 – (ii),  $\theta_i$  é injetiva em  $B_r(\xi_i)$ , implicando que  $\psi$  é injetiva em  $B_r(\xi_i)$ .

Defina

$$\phi(x) = \theta_i(x + \xi_i) - \theta_i(\xi_i)$$

e note que

$$\phi(x) = x + (\theta_i(x + \xi_i) - x - \theta_i(\xi_i)).$$

Repetindo o mesmo argumento utilizado para mostrar que  $\theta_i - I$  é  $\frac{3}{4}$ -contração, podemos concluir que  $\theta_i(x + \xi_i) - x - \theta_i(\xi_i)$  é  $\frac{3}{4}$ -contração em  $B_r(0)$ .

Logo, pelo Lema A.17 temos que

$$\phi(B_r(0)) \supset B_{\frac{r}{4}}(0), \quad \text{ou seja, } \theta_i(B_r(\xi_i)) \supset B_r(0) + \theta_i(\xi_i) = B_{\frac{r}{4}}(0)(\theta_i(\xi_i)),$$

isto é,

$$\psi(B_r(\xi_i)) \supset \psi'(\xi_i)(B_{\frac{r}{4}}(\theta_i(\xi_i))).$$

Além disso,

$$\psi'(\xi_i)(B_{\frac{r}{4}}(\theta_i(\xi_i))) \supset B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i)), \quad (1.8)$$

pois para  $y \in B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i))$  temos

$$|\psi'(\xi_i)^{-1}(y) - \theta_i(\xi_i)| = |\psi'(\xi_i)^{-1}y - \psi'(\xi_i)^{-1}\psi(\xi_i)|$$

implicando que

$$|\psi'(\xi_i)^{-1}(y) - \theta_i(\xi_i)| = |\psi'(\xi_i)^{-1}[y - \psi(\xi_i)]|.$$

Assim

$$|\psi'(\xi_i)^{-1}(y) - \theta_i(\xi_i)| \leq |\psi'(\xi_i)^{-1}| |y - \psi(\xi_i)|,$$

e conseqüentemente

$$|\psi'(\xi_i)^{-1}(y) - \theta_i(\xi_i)| < a \frac{r}{4a} = \frac{r}{4}.$$

Desta forma,

$$\psi'(\xi_i)^{-1}(y) \in B_{\frac{r}{4}}(\theta(\xi_i))$$

que implica

$$y \in \psi'(\xi_i)(B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i))),$$

ou seja,

$$B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i)) \subset \psi'(\xi_i)(B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i))). \quad (1.9)$$

De (1.8) e (1.9) obtemos

$$\psi(B_r(\xi_i)) \supset B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i)). \quad (1.10)$$

Recorde que

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \frac{r}{4a}, \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

e com isso, para  $x = \xi_i$  temos

$$|\varphi(\xi_i) - \psi(\xi_i)| < \frac{r}{4a}$$

isto é,

$$|b - \psi(\xi_i)| < \frac{r}{4a}$$

implicando que  $b \in B_{\frac{r}{4a}}(\psi(\xi_i))$  e por (1.23) temos que  $b \in \psi(B_r(\xi_i))$ . Mostrando que existe um elemento  $x_0^i \in B_r(\xi_i)$  verificando  $\psi(x_0^i) = b$ . Desde que  $\psi$  injetiva, tal elemento é único. Portanto,

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b), \quad \forall \psi \in \mathbf{U}.$$

■

**Observação 1.3** *O item (iii) afirma que o grau topológico de Brouwer é localmente constante na topologia  $C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ .*

**Lema 1.4** *Sejam  $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  e  $b_1, b_2$  pontos de  $\mathbb{R}^N$  que não pertencem a  $\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$ . Se  $b_1$  e  $b_2$  estão na mesma componente conexa de  $\mathbb{R}^N \setminus (\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S))$ , tem-se que*

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

**Demonstração:** Sejam  $b_1$  e  $b_2$  pontos de  $\mathbb{R}^N \setminus (\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S))$ . Desde que, a componente conexa que contém  $b_1$  e  $b_2$  é um aberto em  $\mathbb{R}^N$ , pois  $\mathbb{R}^N \setminus (\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S))$  é um aberto, a mesma é conexa por caminhos, donde segue que existe

$$\begin{aligned} q: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\mapsto q(t) \in C_{b_1, b_2}, \end{aligned}$$

com  $q(0) = b_1$  e  $q(1) = b_2$  onde  $C_{b_1, b_2}$  é a componente contendo  $b_1$  e  $b_2$ . Note que  $q([0, 1]) \subset C_{b_1, b_2}$  é um compacto em  $\mathbb{R}^N$ . Assim, existem  $\epsilon > 0$  e  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_s\}$  tais que

$$q([0, 1]) \subset \bigcup_{i=1}^s B_\epsilon(x_i) \quad e \quad B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset, \quad \text{com } i = 1, 2, 3, \dots, s-1.$$

Vamos fixar nossa atenção a  $B_\epsilon(x_1)$  com  $x_1 = b_1$  e  $x_s = b_2$ .

Considere  $x \notin (\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S))$ . Assim  $d(\varphi, \Omega, x)$  está bem definido e pelo Lema 1.3 temos

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi - b_1, \Omega, 0).$$

Além disso,

$$\|(\varphi - b_1) - (\varphi - x)\|_{C^1} = |b_1 - x| < \epsilon,$$

e pelo Lema 1.3 com  $\epsilon$  suficientemente pequeno, temos que

$$d(\varphi - b_1, \Omega, 0) = d(\varphi - x, \Omega, 0), \quad \forall x \in B_\epsilon(b_1),$$

que implica

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, x), \quad \forall x \in B_\epsilon(x).$$

Seguindo com este raciocínio temos

$$d(\varphi, \Omega, x_i) = d(\varphi, \Omega, y), \quad \forall y \in B_\epsilon(x_i), \quad \text{com } i = 1, 2, 3, \dots, s.$$

Desde que  $B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset$  podemos concluir que

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

■

**Lema 1.5** *Seja  $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  e  $b_1, b_2$  pontos de  $\mathbb{R}^N$  que não pertencem a  $\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$ . Se  $b_1$  e  $b_2$  estão na mesma componente conexa de  $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ , temos que*

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

**Demonstração:** Considere  $\Theta$  a componente conexa de  $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$  que contém  $b_1$  e  $b_2$ . Sendo  $\Theta$  aberto e conexo, o mesmo é conexo por caminhos, logo existe um caminho

$$\begin{aligned} q : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\mapsto q(t) \in \Theta \end{aligned}$$

com  $q(0) = b_1$  e  $q(1) = b_2$ .

Usando a compacidade do conjunto  $q([0, 1])$ , existe  $\epsilon > 0$  satisfazendo

$$\overline{B}_\epsilon(q(t)) \subset \Theta, \quad \forall t \in [0, 1],$$

ou seja,

$$B_\epsilon(q(t)) = B_\epsilon(0) + q(t) = B_\epsilon(b_1) - (b_1 - q(t)) \subset \Theta.$$

Considere uma função  $J_\epsilon \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  com  $\text{supt} J_\epsilon = \overline{B}_\epsilon(b_1)$  e  $\int_{\mathbb{R}^N} J_\epsilon(x) dx = 1$ .

Aplicando o Lema A.19, considerando  $f(x) = J_\epsilon(x)$ ,  $K = \overline{B}_\epsilon(b_1)$  e  $\gamma(t) = b_1 - q(t)$  temos

$$J_\epsilon(x + \gamma(0)) - J_\epsilon(x + \gamma(1)) = \text{div } v(x),$$

que implica

$$J_\epsilon(x) - J_\epsilon(x + b_1 - b_2) = \text{div } v(x),$$

onde  $v \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  com  $\text{supt } v \cap \varphi(\partial\Omega) = \emptyset$ , pois  $\text{supt } v \subset \Theta$ .

Aplicando agora o Lema A.18, existe  $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  com  $\text{supt } u \subset \Omega$  e  $\text{div } u(x) = J_\varphi(x) \text{div } v(x)$ . Assim,

$$(J_\epsilon(\varphi(x)) - J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2)) J_\varphi(x) = \text{div } u(x)$$

e portanto,

$$\int_{\Omega} (J_\epsilon(\varphi(x)) - J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2)) J_\varphi(x) dx = \int_{\Omega} \text{div } u(x) dx.$$

Pelo Teorema do Divergente A.14 temos

$$\int_{\Omega} \text{div } u(x) dx = \int_{\partial\Omega} u \vec{\eta} dS = 0,$$

pois  $u(x) = 0$ ,  $\forall x \in \partial\Omega$ . Logo,

$$\int_{\Omega} (J_\epsilon(\varphi(x)) - J_\epsilon(\varphi(x) + b_1 - b_2)) J_\varphi(x) dx = 0$$

e conseqüentemente,

$$\int_{\Omega} J_{\epsilon}\varphi(x)J_{\varphi}(x) = \int_{\Omega} J_{\epsilon}(\varphi(x) + b_1 - b_2)J_{\varphi}(x)dx,$$

que implica

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = \int_{\Omega} J_{\epsilon}(\varphi(x) + b_1 - b_2)J_{\varphi}(x)dx.$$

Vamos mostrar que

$$d(\varphi, \Omega, b_2) = \int_{\Omega} J_{\epsilon}(\varphi(x) + b_1 - b_2)J_{\varphi}(x)dx.$$

Note que,

$$\int_{\Omega} J_{\epsilon}(\varphi(x) + b_1 - b_2)J_{\varphi}(x)dx = \int_{\Omega} J_{\epsilon}(\varphi(x) + b_1 - b_2)J_{\varphi(x)+b_1-b_2}(x)dx.$$

Definindo a função  $\psi(x) = \varphi(x) + b_1 - b_2$  temos que

$$\int_{\Omega} J_{\epsilon}(\varphi(x) + b_1 - b_2)J_{\varphi}(x)dx = \int_{\Omega} J_{\epsilon}(\psi(x))J_{\psi}(x)dx.$$

Logo

$$d(\psi, \Omega, b_1) = \int_{\Omega} J_{\epsilon}(\varphi(x) + b_1 - b_2)J_{\varphi}(x)dx,$$

isto é,

$$d(\varphi + b_1 - b_2, \Omega, b_1) = d(\varphi + b_1 - b_2 - b_1, \Omega, 0) = d(\varphi - b_2, \Omega, 0) = d(\varphi, \Omega, b_2),$$

e com isso concluímos que

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

■

**Definição 1.6** *Seja  $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ ,  $b \notin \varphi(\partial\Omega)$  e  $b \in \varphi(S)$ . Considere  $C_b$  a componente conexa de  $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ , que contém  $b$ . Sendo  $C_b$  um aberto, existe  $x \in C_b \setminus \varphi(S)$ . Definimos no que segue-se*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, x), \forall x \in C_b \setminus \varphi(S).$$

**Lema 1.7** *Para  $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  e  $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ , existe uma vizinhança  $\mathbf{U}$  de  $\varphi$  na topologia  $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  tal que para  $\forall \psi \in \mathbf{U}$  temos:*

(i)  $b \notin \psi(\partial\Omega)$ ,

(ii)  $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$ .

**Demonstração:** Temos duas possibilidades a considerar:

(1<sup>o</sup>)  $b \notin \varphi(S)$ , o resultado segue do Lema (1.3).

(2<sup>o</sup>)  $b \in \varphi(S)$ .

Seja  $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$ . Pelo **Teorema de Sard** existe  $b_1 \notin \varphi(S)$  satisfazendo

$$|b_1 - b| < \frac{r}{4}$$

pois caso contrário,

$$B_{\frac{r}{4}}(b) \subseteq \varphi(S)$$

e assim

$$0 < m(B_{\frac{r}{4}}(b)) \leq m(\varphi(S)),$$

que é um absurdo. Além disso, tem-se também

$$B_{\frac{r}{4}}(b) \subset \mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$$

portanto,  $b$  e  $b_1$  estão na mesma componente conexa de  $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ . Usando a definição do grau para o caso  $b \in \varphi(S)$  temos que

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b_1). \quad (1.11)$$

Temos que  $b_1 \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$ , assim aplicando o Lema 1.3 encontramos uma vizinhança  $\mathbf{U}$  de  $\varphi$  em  $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  de maneira que,  $\forall \psi \in \mathbf{U}$  temos

$$b_1 \notin \psi(\partial\Omega) \cup \psi(S) \quad e \quad d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\psi, \Omega, b_1). \quad (1.12)$$

Note agora que

$$\rho\{b, \psi(\partial\Omega)\} \geq \frac{r}{2}, \quad \forall \psi \in \mathbf{U}$$

implicando

$$B_{\frac{r}{4}}(b) \subset \mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega), \quad \forall \psi \in \mathbf{U}.$$

Portanto,  $b$  e  $b_1$  estão na mesma componente conexa de  $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega)$ ,  $\forall \psi \in \mathbf{U}$ . Assim,

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1). \quad (1.13)$$

Segue de (1.11), (1.12) e (1.13) que  $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$ . ■

**Lema 1.8** (*Invariância por Homotopia de Classe  $C^2$* ) Seja  $H(x, t) \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^N)$ , com  $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ . Então,

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv \text{constante}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

**Demonstração:** As funções  $H$  e  $\frac{\partial H}{\partial x}$  são uniformemente contínuas em  $\bar{\Omega} \times [0, 1]$ . Então, para cada  $\tau \in [0, 1]$  fixado e  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$t \in [0, 1], |t - \tau| < \delta \Rightarrow \|H(\cdot, t) - H(\cdot, \tau)\|_{C^1} < \epsilon$$

(ver Teorema A.10). Segue do Lema 1.7 que

$$d(H(\cdot, \tau), \Omega, b) = d(H(\cdot, t), \Omega, b)$$

para  $t$  suficientemente próximo de  $\tau$ . Assim, a função  $t \mapsto d(H(\cdot, t), \Omega, b)$  é localmente constante em  $[0, 1]$ . Sendo  $[0, 1]$  um compacto e conexo, podemos afirmar que a mesma é constante. ■

### 1.1.3 Definição do Grau para Funções Contínuas

Sejam  $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ ,  $b \notin \varphi(\partial\Omega)$  e  $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$ . Sendo  $C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  denso em  $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ , devido ao **Teorema de Aproximação de Weirstrass**, existe  $\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  com  $\|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r}{2}$ .

Fixando

$$\mathbf{U} = \{\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N); \|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r}{2}\},$$

tem-se

$$d(\psi_1, \Omega, b) = d(\psi_2, \Omega, b), \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in \mathbf{U}.$$

De fato, defina a aplicação

$$\begin{aligned} H : \bar{\Omega} \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (x, t) &\mapsto H(x, t) = t\psi_1(x) + (1 - t)\psi_2(x). \end{aligned}$$

Observe que,  $H \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^N)$  e  $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ .

Vamos justificar que

$$b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1]).$$

Para  $x \in \bar{\Omega}$ , e para cada  $t \in [0, 1]$  temos

$$|H(x, t) - \varphi(x)| = |t\psi_1(x) + (1 - t)\psi_2(x) - t\varphi(x) - (1 - t)\varphi(x)|,$$

que implica

$$|H(x, t) - \varphi(x)| = |t(\psi_1(x) - \varphi(x)) + (1 - t)(\psi_2(x) - \varphi(x))|.$$

Portanto,

$$|H(x, t) - \varphi(x)| \leq t|\psi_1(x) - \varphi(x)| + (1 - t)|\psi_2(x) - \varphi(x)|, \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Desde que

$$|\psi_1(x) - \varphi(x)| \leq \|\psi_1 - \varphi\|_\infty \quad \text{e} \quad |\psi_2(x) - \varphi(x)| \leq \|\psi_2 - \varphi\|_\infty, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

segue-se que

$$|H(x, t) - \varphi(x)| \leq t\|\psi_1 - \varphi\|_\infty + (1 - t)\|\psi_2 - \varphi\|_\infty, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Logo

$$|H(x, t) - \varphi(x)| < t\frac{r}{2} + (1 - t)\frac{r}{2},$$

implicando

$$|H(x, t) - \varphi(x)| < \frac{r}{2} \tag{1.14}$$

e conseqüentemente

$$b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1]),$$

pois caso contrário, existiria  $x_0 \in \partial\Omega$  e  $t_0 \in [0, 1]$  tais que  $H(x_0, t_0) = b$ , e com isso

$$|H(x_0, t_0) - \varphi(x_0)| < \frac{r}{2},$$

que implicaria

$$|b - \varphi(x_0)| < \frac{r}{2}$$

o que é um absurdo, pois sendo  $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\}$  tem-se

$$|b - \varphi(x)| \geq r.$$

Portanto,

$$b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1]).$$

Pelo Lema 1.8 temos

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv \text{constante}, \forall t \in [0, 1],$$

que implica

$$d(H(\cdot, 0), \Omega, b) = d(H(\cdot, 1), \Omega, b),$$

isto é,

$$d(\psi_2, \Omega, b) = d(\psi_1, \Omega, b).$$

**Definição 1.9** Definimos o Grau Topológico de Brouwer para  $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$  com  $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ , como sendo

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b), \quad \forall \psi \in \mathbf{U}.$$

**Observação 1.4** Assim, para toda  $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  com  $b \notin \psi(\partial\Omega)$ , temos que  $d(\psi, \Omega, b)$  está bem definido e não depende da  $\psi$  escolhida, como foi mostrado acima.

Um primeiro resultado obtido a partir da definição 1.9 é o seguinte

**Lema 1.10** Seja  $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  e  $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ . Então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

**Demonstração:** De acordo com a definição do grau topológico de Brouwer para as funções contínuas temos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b), \quad \forall \psi \in \mathbf{U}. \quad (1.15)$$

Fixando uma  $\psi \in \mathbf{U}$  observamos que

$$\varphi(x) = b \Rightarrow (\varphi - b)(x) = 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

e

$$\|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{r}{2}, \quad \text{onde } r = \rho\{0, (\varphi - b)(\partial\Omega)\},$$

pois

$$r = \rho\{0, (\varphi - b)(\partial\Omega)\} = \inf\{|0 - (\varphi - b)(x)|; x \in \partial\Omega\} = \inf\{|b - \varphi(x)|; x \in \partial\Omega\} = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\}.$$

Consequentemente,

$$\|\psi - b + b - \varphi\|_\infty < \frac{r}{2}$$

implicando que

$$\|(\psi - b) - (\varphi - b)\|_\infty < \frac{r}{2},$$

e portanto,

$$d(\varphi - b, \Omega, 0) = d(\psi - b, \Omega, 0). \quad (1.16)$$

Claramente,

$$b \notin \psi(\partial\Omega), \quad \forall \psi \in \mathbf{U}.$$

Considere agora  $b_1 \notin \psi(S)$  que está na mesma componente conexa de  $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega)$  que contém  $b$ . Assim

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1) = d(\psi - b_1, \Omega, 0). \quad (1.17)$$

Escolhendo  $b_1$  suficientemente próximo de  $b$  tal que

$$\|(\psi - b) - (\psi - b_1)\|_\infty = \|b_1 - b\|_\infty = |b_1 - b| < \epsilon < \frac{1}{2} \rho\{0, (\psi - b)(\partial\Omega)\},$$

obtemos

$$d(\psi - b, \Omega, 0) = d(\psi - b_1, \Omega, 0). \quad (1.18)$$

De (1.15) – (1.18) concluimos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1) = d(\psi - b_1, \Omega, 0) = d(\psi - b, \Omega, 0) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

Portanto,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

■

### 1.1.4 Propriedades Principais do Grau Topológico de Brouwer

#### (P<sub>1</sub>) Continuidade

Sejam  $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  e  $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ . Existe uma vizinhança  $V$  de  $\varphi$  na topologia  $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ , tal que para  $\forall \psi \in V$  temos que:

(i)  $b \notin \psi(\partial\Omega)$ ,

(ii)  $d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$ .

**Demonstração:** Sejam  $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$  e  $V = \{H \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N); \|\varphi - H\|_\infty < \frac{r}{4}\}$ .

Se  $H \in V$  temos  $b \notin H(\partial\Omega)$  e

$$\rho\{b, H(\partial\Omega)\} \geq \frac{3r}{4}, \quad (1.19)$$

pois

$$|b - H(x)| = |b - \varphi(x) + \varphi(x) - H(x)|,$$

que implica

$$|b - H(x)| \geq |b - \varphi(x)| - |\varphi(x) - H(x)|. \quad (1.20)$$

Desde que,

$$|b - \varphi(x)| \geq r, \quad \forall x \in \partial\Omega$$

e

$$\|\varphi - H\|_\infty = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\varphi(x) - H(x)|,$$

deduzimos que

$$|\varphi(x) - H(x)| \leq \|\varphi - H\|_\infty < \frac{r}{4}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

implicando por (1.20)

$$|b - H(x)| \geq r - \frac{r}{4}.$$

Consequentemente

$$|b - H(x)| \geq \frac{3r}{4} > 0, \quad \forall x \in \partial\Omega$$

mostrando assim que  $b \notin H(\partial\Omega)$ .

Agora fixe  $\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  satisfazendo  $\|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r}{8}$ . Usando a definição do grau topológico de Brouwer para funções contínuas temos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b). \quad (1.21)$$

Definindo para  $H \in V$  o número  $r' = \rho\{b, H(\partial\Omega)\}$  temos que  $r' \geq \frac{3r}{4}$  e

$$\|\psi - H\|_\infty < \frac{r'}{2}.$$

De fato, para  $x \in \bar{\Omega}$  temos

$$|\psi(x) - H(x)| = |\psi(x) - \varphi(x) + \varphi(x) - H(x)|,$$

que implica

$$|\psi(x) - H(x)| \leq |\psi(x) - \varphi(x)| + |H(x) - \varphi(x)|.$$

Desde que,

$$|\psi(x) - \varphi(x)| \leq \|\psi - \varphi\|_\infty \quad \text{e} \quad |\psi(x) - H(x)| \leq \|\psi - H\|_\infty, \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

temos que

$$|\psi(x) - H(x)| \leq \|\psi - \varphi\|_\infty + \|H - \varphi\|_\infty.$$

Assim,

$$|\psi(x) - H(x)| < \frac{r}{8} + \frac{r}{4} = \frac{3r}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3r}{4} < \frac{r'}{2}$$

e portanto,

$$|\psi(x) - H(x)| < \frac{r'}{2}.$$

Como o conjunto  $\{|\psi(x) - H(x)|; x \in \bar{\Omega}\}$  é limitado superiormente, pelo postulado de Dedekind, o mesmo possui supremo. Assim,

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |\psi(x) - H(x)| < \frac{r'}{2}$$

e com isso,

$$\|\psi - H\|_{\infty} < \frac{r'}{2}.$$

Usando novamente a definição do grau topológico de Brouwer temos

$$d(H, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b). \quad (1.22)$$

De (1.21) e (1.22) concluímos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(H, \Omega, b), \quad \forall H \in V.$$

■

### (P<sub>2</sub>) Invariância do Grau por Homotopia

Sejam  $H \in C(\bar{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^N)$  e  $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ . Então,

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv \text{constante}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

**Demonstração:** Para  $\tau \in [0, 1]$  fixado, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$t \in [0, 1], |t - \tau| < \delta \Rightarrow \|H(\cdot, t) - H(\cdot, \tau)\|_{\infty} < \epsilon.$$

Usando a propriedade (P<sub>1</sub>) a aplicação  $t \mapsto d(H(\cdot, t), \Omega, b)$  é localmente constante. Sendo  $[0, 1]$  um conjunto compacto e conexo, segue que a função  $t \mapsto d(H(\cdot, t), \Omega, b)$  é constante, isto é,

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv \text{constante}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

■

### (P<sub>3</sub>) O Grau é Constante em Componentes Conexas de $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ .

Se  $b_1$  e  $b_2$  estão na mesma componente conexa de  $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ , tem-se que

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

**Demonstração:** Sejam  $b_1$  e  $b_2$  pontos de  $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$  que pertencem a mesma componente conexa  $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ . Desde que, a componente conexa que contém  $b_1$  e  $b_2$  é um

aberto em  $\mathbb{R}^N$ , pois  $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$  é um aberto, a mesma é conexa por caminhos, e com isso existe

$$\begin{aligned} q : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\mapsto q(t) \in C_{b_1, b_2}, \end{aligned}$$

com  $q(0) = b_1$  e  $q(1) = b_2$  onde  $C_{b_1, b_2}$  é a componente conexa que contém  $b_1$  e  $b_2$ . Note que  $q([0, 1]) \subset C_{b_1, b_2}$  é um compacto em  $\mathbb{R}^N$ . Assim, existem  $\epsilon > 0$  e  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_s\}$  tais que

$$q([0, 1]) \subset \bigcup_{i=1}^s B_\epsilon(x_i) \quad e \quad B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset, \quad \text{com } i = 1, 2, 3, \dots, s-1.$$

Vamos fixar nossa atenção a  $B_\epsilon(x_1)$  com  $x_1 = b_1$  e  $x_s = b_2$ . Considerando  $x \notin \varphi(\partial\Omega)$ , temos que  $d(\varphi, \Omega, x)$  está bem definido e pelo Lema 1.10 temos

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi - b_1, \Omega, 0).$$

Além disso,

$$\|(\varphi - b_1) - (\varphi - x)\|_{C^1} = |b_1 - x| < \epsilon.$$

Assim, pelo Lema 1.4 e  $\epsilon$  suficientemente pequeno, temos

$$d(\varphi - b_1, \Omega, 0) = d(\varphi - x, \Omega, 0), \quad \forall x \in B_\epsilon(b_1),$$

que implica

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, x), \quad \forall x \in B_\epsilon(x).$$

Seguindo com este raciocínio temos

$$d(\varphi, \Omega, x_i) = d(\varphi, \Omega, y), \quad \forall y \in B_\epsilon(x_i), \quad \text{com } i = 1, 2, 3, \dots, s.$$

Desde que  $B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset$  concluímos que

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

■

#### (P<sub>4</sub>) Aditividade

Seja  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  com  $\Omega_1, \Omega_2$  abertos, disjuntos e limitados. Se  $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2)$  temos que:

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b).$$

**Demonstração:** Sejam  $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$  e  $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2) = \varphi(\partial\Omega)$  com  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$  e  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ .

Considere

$$\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \text{ com } \|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{r^*}{2}$$

onde

$$r^* = \min\{\rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\}, \rho\{b, \varphi(\partial\Omega_1)\}, \rho\{b, \varphi(\partial\Omega_2)\}\}.$$

Usando a definição do grau topológico de Brouwer para funções contínuas temos

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b),$$

$$d(\varphi, \Omega_1, b) = d(\psi, \Omega_1, b)$$

e

$$d(\varphi, \Omega_2, b) = d(\psi, \Omega_2, b).$$

Escolha  $b_1 \notin \psi(S)$  e que pertença as componentes de  $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega)$ ,  $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega_1)$  e  $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega_2)$  que contém  $b$ .

Assim

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1),$$

$$d(\psi, \Omega_1, b) = d(\psi, \Omega_1, b_1)$$

e

$$d(\psi, \Omega_2, b) = d(\psi, \Omega_2, b_1).$$

Segue da teoria do grau topológico de Brouwer para o caso regular

$$d(\psi, \Omega, b_1) = \sum_{\xi_i \in \psi^{-1}(\{b_1\}) \cap \Omega_1} \text{sgn}[J_\psi(\xi_i)] + \sum_{\xi_i \in \psi^{-1}(\{b_1\}) \cap \Omega_2} \text{sgn}[J_\psi(\xi_i)].$$

implicando

$$d(\psi, \Omega, b_1) = d(\psi, \Omega_1, b_1) + d(\psi, \Omega_2, b_1).$$

Portanto

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b).$$

■

### 1.1.5 Consequências das Propriedades Principais do Grau Topológico de Brouwer

(C<sub>1</sub>) (Normalização) Seja  $I$  a projeção canônica de  $\bar{\Omega}$  em  $\mathbb{R}^N$ , isto é,  $I(x) = x$  então,

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & , se \quad b \in \Omega \\ 0 & , se \quad b \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

**Demonstração:** Se  $b \in \Omega$ , então

$$d(I, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in I^{-1}(\{b\})} sgn J_I(\xi_i) = sgn J_I(\xi_i).$$

Como  $J_I(\xi_i) = 1 > 0$  e

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & , se \quad t > 0 \\ -1 & , se \quad t < 0 \end{cases}$$

temos que

$$d(I, \Omega, b) = 1.$$

Agora, se  $b \notin \bar{\Omega}$  temos

$$d(I, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in I^{-1}(\{b\})} sgn J_I(\xi_i) = \int_{\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\}} J_\epsilon(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) dx.$$

Note que,  $\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\} = \emptyset$ , e com isso

$$\int_{\{x \in \Omega; |\varphi(x) - b| < \epsilon\}} J_\epsilon(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x) dx = 0.$$

Consequentemente

$$d(I, \Omega, b) = 0$$

■

(C<sub>2</sub>) (Existência de Solução) Se  $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$  então, existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $\varphi(x_0) = b$ .

**Demonstração:** Sejam  $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ ,  $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ , e  $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} > 0$ . Como  $C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  é denso em  $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass (ver Teorema A.11), existe  $\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ , com  $\|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{r}{2}$ , tal que

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b).$$

Escolhendo  $b_1$  suficientemente próximo de  $b$  com  $b_1 \in C_b \setminus \psi(S)$ , temos

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b_1).$$

Sendo  $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$ , por hipótese, temos que  $d(\psi, \Omega, b_1) \neq 0$ , implicando que existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $\psi(x_0) = b_1$ , pela mesma justificativa feita na observação 1.2.

**Afirmção:**  $b \in \varphi(\Omega)$ .

De fato, caso contrário

$$b \notin \varphi(\bar{\Omega}) \text{ com } \rho\{b, \varphi(\bar{\Omega})\} > 0.$$

Fixe  $\delta > 0$  e considere o seguinte conjunto  $(\varphi(\bar{\Omega}))_\delta = \{x \in \mathbb{R}^N; \rho\{x, \varphi(\bar{\Omega})\} < \delta\}$ , que é uma delta vizinhança de  $\varphi(\bar{\Omega})$ , onde

$$0 < \delta < \frac{1}{2}\rho\{b, \partial(\varphi(\bar{\Omega}))\}.$$

Fixado  $\psi$  de maneira que  $\|\psi - \varphi\|_\infty < \delta$  temos que  $\psi(\bar{\Omega}) \subset (\varphi(\bar{\Omega}))_\delta$ . De fato,

$$|\psi(x) - \varphi(x)| \leq \|\psi - \varphi\|_\infty < \epsilon < \delta, \text{ onde } 0 < \epsilon < \frac{r}{2}.$$

Assim

$$\rho\{\psi(x), \varphi(\bar{\Omega})\} < \epsilon < \delta,$$

que implica

$$\psi(x) \subset (\varphi(\bar{\Omega}))_\delta, \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

e conseqüentemente

$$\psi(\bar{\Omega}) \subset (\varphi(\bar{\Omega}))_\delta.$$

Logo,  $\psi(\bar{\Omega}) \cap \{b_1\} = \emptyset$ , que é um absurdo, pois  $b_1 \in \psi(\bar{\Omega})$ . Portanto,  $b \in \varphi(\Omega)$  e segue-se que existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $\varphi(x_0) = b$ . ■

**Observação 1.5** Como consequência de **(C<sub>2</sub>)** temos que se  $b \notin \varphi(\bar{\Omega})$ , então

$$d(\varphi, \Omega, b) = 0.$$

**(C<sub>3</sub>)** Se  $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$ , então  $\varphi(\Omega)$  é uma vizinhança de  $b$ , isto é, existe  $\delta > 0$  tal que

$$B_\delta(b) \subset \varphi(\Omega).$$

**Demonstração:** Sendo  $C_b$  a componente conexa de  $b$  em  $\mathbb{R}^N \setminus \varphi(\partial\Omega)$ , então para  $\forall z \in C_b$  tem-se

$$d(\varphi, \Omega, z) = d(\varphi, \Omega, b) \neq 0,$$

por hipótese. Assim, por **(C<sub>2</sub>)**, para cada  $z \in C_b$  existe  $y \in \Omega$  tal que  $\varphi(y) = z$  e portanto  $C_b \subset \varphi(\Omega)$ . Desde que,  $C_b$  é um conjunto aberto e  $b \in C_b$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(b) \subset C_b \subset \varphi(\Omega)$ . Portanto,  $B_\delta(b) \subset \varphi(\Omega)$ . ■

**(C<sub>4</sub>)** Se  $\varphi(\Omega)$  está contido num subespaço próprio de  $\mathbb{R}^N$  temos que  $d(\varphi, \Omega, b) = 0$ .

**Demonstração:** Seja  $V$  um subespaço próprio de  $\mathbb{R}^N$  tal que  $\varphi(\Omega) \subset V$ . Se  $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$ , então por **(C<sub>3</sub>)**, existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(b) \subset \varphi(\Omega) \subset V$  como todo subespaço próprio de um espaço que contém uma bola é o próprio espaço, concluímos que  $V = \mathbb{R}^N$ , que é um absurdo. Portanto,  $d(\varphi, \Omega, b) = 0$ . ■

**(C<sub>5</sub>) (Excisão)** Seja  $K \subset \bar{\Omega}$  um compacto e  $b \notin \varphi(K) \cup \varphi(\partial\Omega)$ . Então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega \setminus K, b).$$

**Demonstração:** Por definição, o grau topológico de Brouwer de  $\varphi$  com relação a  $\Omega$  no ponto  $b$ ,  $d(\varphi, \Omega, b)$ , está bem definido, pois  $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ . Para que faça sentido a igualdade

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega \setminus K, b)$$

devemos mostrar que

$$b \notin \varphi(\partial(\Omega \setminus K)).$$

**Afirmação:**

$$b \notin \varphi(\partial(\Omega \setminus K)) \subseteq \varphi(\partial\Omega \cup \partial K).$$

De fato, caso contrário  $b \in \varphi(\partial\Omega \cup \partial K)$  e assim existiria  $x_0 \in \partial\Omega \cup \partial K$  tal que

$$\varphi(x_0) = b \text{ com } x_0 \in \partial\Omega, \text{ isto é, } b \in \varphi(\partial\Omega)$$

ou

$$\varphi(x_0) = b \text{ com } x_0 \in \partial K, \text{ isto é, } b \in \varphi(\partial K),$$

que é um absurdo, pois por hipótese  $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(K)$ . Portanto,  $b \notin \varphi(\partial(\Omega \setminus K))$ .

Fixe  $\psi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$  com

$$\|\psi - \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{2} \min\{\rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\}, \rho\{b, \varphi(K)\}\}.$$

Então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) \text{ e } d(\varphi, \Omega \setminus K, b) = d(\psi, \Omega \setminus K, b).$$

Segue da última condição que  $b \notin \psi(K)$ . De fato, sendo

$$\|\psi - \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(K)\}$$

e se  $b \in \psi(K)$ , então existe  $x_0 \in K$  tal que  $\psi(x_0) = b$ .

Assim,

$$|b - \varphi(x_0)| = |\psi(x_0) - \varphi(x_0)| \leq \|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(K)\}.$$

Desde que

$$\rho\{b, \varphi(K)\} = \inf\{|b - \varphi(y)|; y \in K\}$$

temos

$$\rho\{b, \varphi(K)\} \leq |b - \varphi(x_0)|.$$

Logo

$$\rho\{b, \varphi(K)\} < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(K)\},$$

que é um absurdo. Mostrando que  $b \notin \psi(K)$ .

Vamos mostrar agora que  $b \notin \psi(\partial\Omega)$ .

De fato, como  $b \notin \psi(\partial\Omega)$  e  $\|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\}$  supondo, por absurdo, que  $b \in \psi(\partial\Omega)$  deve existir  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que  $\psi(x_0) = b$ .

Assim,

$$|\psi(x_0) - \varphi(x_0)| \leq \|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\},$$

isto é,

$$|b - \varphi(x_0)| < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\}.$$

Portanto,

$$\rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} < \frac{1}{2} \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\},$$

que é um absurdo. Portanto,  $b \notin \psi(\partial\Omega)$ .

Agora vamos mostrar que  $b \notin \psi(\partial(\Omega \setminus K))$ .

Se  $b \in \psi(\partial(\Omega \setminus K)) \subseteq \psi(\partial\Omega \cup \partial K)$ , temos que

$$b = \psi(x_0) \text{ com } x_0 \in \partial\Omega \text{ e com isso } b \in \psi(\partial\Omega),$$

ou

$$b = \psi(x_0) \text{ com } x_0 \in \partial K \text{ e com isso } b \in \psi(\partial K),$$

que é um absurdo, pois já foi mostrado que  $b \notin \psi(\partial\Omega) \cup \psi(K)$ . Mostrando desta forma que  $b \notin \psi(\partial(\Omega \setminus K))$ .

Desde que  $\{b\} \cap \psi(K) = \emptyset$ ,  $\{b\} \cap \psi(\partial\Omega) = \emptyset$  e  $\{b\} \cap \psi(\partial(\Omega \setminus K)) = \emptyset$  temos  $\rho\{b, \psi(K)\} > 0$ ,  $\rho\{b, \psi(\partial\Omega)\} > 0$  e  $\rho\{b, \psi(\partial\Omega \cup \partial K)\} > 0$ .

Considerando

$$\alpha = \frac{1}{2} \inf\{\rho\{b, \psi(K)\}, \rho\{b, \psi(\partial\Omega)\}, \rho\{b, \psi(\partial\Omega \cup \partial K)\}\} > 0,$$

pelo Teorema de Sard, existe  $c \in B_\alpha(b)$  tal que

$$\forall x \in \psi^{-1}(\{c\}) \text{ tem-se } J_\psi(x) \neq 0.$$

Caso contrário,  $\forall c \in B_\alpha(b)$ , existe  $x_0 \in \psi^{-1}(\{c\})$  com  $J_\psi(x_0) = 0$  implicando que  $x_0 \in S$ . Logo,

$$\psi(x_0) = c \Rightarrow c \in \psi(S) \Rightarrow \psi(S) \supseteq B_\alpha(b)$$

e assim,

$$0 = m(\psi(S)) \geq m(B_\alpha(b)) = Vol(B_\alpha(b)) > 0,$$

que é um absurdo.

Note que,  $c \notin \psi(K)$  implica que não existe  $x_0 \in K$  tal que  $\psi(x_0) = c$ , e como  $\psi^{-1}(\{c\}) \subset \Omega$  temos  $\psi(x) = c \Rightarrow \psi^{-1}(\{c\}) \subset \Omega \setminus K$ . Pela escolha do  $\alpha$  temos que  $c \notin \psi(K)$ ,  $b$  e  $c$  estão na mesma componente conexa de  $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial\Omega)$  e de  $\mathbb{R}^N \setminus \psi(\partial(\Omega \setminus K))$ , respectivamente. Consequentemente,

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, c) \text{ e } d(\psi, \Omega \setminus K, b) = d(\psi, \Omega \setminus K, c).$$

Desde que estamos tratando do grau topológico de Brouwer no caso regular temos

$$d(\psi, \Omega, c) = \sum_{\xi_i \in \psi^{-1}(\{c\})} \text{sgn} J_\psi(\xi_i) = \sum_{\xi_i \in \psi^{-1}(\{c\}) \cap (\Omega \setminus K)} \text{sgn} J_\psi(\xi_i)$$

que implica

$$d(\psi, \Omega, c) = \sum_{\xi_i \in \Omega \setminus K} \text{sgn} J_\psi(\xi_i),$$

ou seja,

$$d(\psi, \Omega, c) = d(\psi, \Omega \setminus K, c).$$

Portanto,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, c) = d(\psi, \Omega \setminus K, c) = d(\psi, \Omega \setminus K, b) = d(\varphi, \Omega \setminus K, b).$$

Mostrando assim que

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega \setminus K, b).$$

■

(C<sub>6</sub>) Seja  $\{\Omega_i\}_{i \in I}$  uma família de conjuntos abertos contidos em  $\Omega$ , dois a dois disjuntos, e  $b$  um ponto tal que

$$\varphi^{-1}(b) \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i.$$

Então,  $d(\varphi, \Omega_i, b) = 0$  a menos de um número finito de índices  $i \in I$  e mais

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i \in I} d(\varphi, \Omega_i, b).$$

### Demonstração:

Devemos mostrar que o grau  $d(\varphi, \Omega, b)$  está bem definido e para isso devemos provar que  $b \notin \varphi(\partial\Omega_i)$ ,  $\forall i \in I$ .

**Afirmção:**  $b \notin \varphi(\partial\Omega_i)$ ,  $\forall i \in I$ . Caso contrário, existiria um índice  $i$  tal que  $b \in \varphi(\partial\Omega_i)$ , e daí existiria  $x_0 \in \partial\Omega_i$  tal que  $\varphi(x_0) = b$ , que implica  $x_0 \in \varphi^{-1}(\{b\})$ . Assim  $x_0 \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i$  e conseqüentemente,  $x_0 \in \Omega_{j_0}$  com  $j_0 \in I$ . Logo  $x_0 \in \Omega_{j_0} \cap \partial\Omega_i$  e com isso  $\Omega_{j_0} \cap \partial\Omega_i \neq \emptyset$ , que é um absurdo, pois  $\Omega_{j_0} \cap \partial\Omega_i = \emptyset$ . Portanto,  $b \notin \varphi(\partial\Omega_i)$ ,  $\forall i \in I$  e conseqüentemente  $d(\varphi, \Omega_i, b)$  está bem definido para todo  $i \in I$ . Desde que  $\varphi^{-1}(\{b\}) = \{x \in \bar{\Omega}; \varphi(x) = b\}$  é compacto, pois é fechado (devido ao fato de ser imagem inversa de um fechado por uma função contínua) e limitado pois  $\varphi^{-1}(\{b\})$  é finito, existe um número finito de abertos  $\Omega_i \subset \Omega$ , que cobrem  $\varphi^{-1}(\{b\})$ , ou seja, existe um conjunto finito de índices  $I_0$  tais que

$$\varphi^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{i \in I_0} \Omega_i \subset \Omega \text{ com } I_0 \subset I.$$

Dessa forma, para todo  $i \in I \setminus I_0$ ,  $b \notin \varphi(\overline{\Omega}_i)$  e pela observação 1.4 temos que  $d(\varphi, \Omega_i, b) = 0$ . Sendo  $K = \overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i \in I_0} \Omega_i$  um compacto, pois  $K = \overline{\Omega} \cap (\bigcap_{i \in I_0} \Omega_i^c)$  então  $K$  é fechado e como,  $K \subset \overline{\Omega}$ , então  $K$  é limitado e consequentemente compacto. Sendo  $b \notin \varphi(K)$ , pela propriedade da excisão (**C<sub>5</sub>**) segue-se que

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega \setminus K, b) = d(\varphi, \Omega \setminus (\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i \in I_0} \Omega_i), b) = d(\varphi, \bigcup_{i \in I_0} \Omega_i, b).$$

Assim, pela propriedade aditiva do grau topológico de Brouwer, obtemos

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i \in I_0} d(\varphi, \Omega_i, b),$$

ou seja,

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i \in I} d(\varphi, \Omega_i, b).$$

■

(**C<sub>7</sub> (Dependência da Fronteira)**) Suponha que  $\varphi = \Psi$  em  $\partial\Omega$  e que  $\varphi, \Psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ . Então,  $\forall b \notin \varphi(\partial\Omega) = \Psi(\partial\Omega)$  tem-se que  $d(\varphi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b)$ .

**Demonstração:**

Considere a seguinte aplicação contínua

$$\begin{aligned} H : \Omega \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (x, t) &\mapsto H(x, t) = t \cdot \varphi(x) + (1 - t) \cdot \psi(x). \end{aligned}$$

**Afirmção:**  $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ .

De fato, caso contrário existiria  $x_0 \in \partial\Omega$  e  $t \in [0, 1]$  tal que  $b = H(x_0, t)$ . Como  $\varphi = \psi$  em  $\partial\Omega$ , por hipótese, para todo  $x \in \partial\Omega$  temos

$$H(x, t) = t \cdot \varphi(x) + (1 - t) \cdot \varphi(x) = \varphi(x) = \psi(x).$$

Considerando  $x = x_0$  segue-se que  $b = H(x_0, t) = \varphi(x_0)$  o que é um absurdo, pelo fato que  $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ , mostrando que  $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ . Sendo o grau topológico de Brouwer invariante por homotopia, concluímos que

$$d(H(\cdot, 0), \Omega, b) = d(H(\cdot, 1), \Omega, b),$$

donde segue-se que

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b).$$

■

(C<sub>8</sub>) Sendo  $\varphi, \Psi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ , e supondo que existe  $\tilde{H} \in C(\partial\Omega \times [0, 1], \mathbb{R}^N)$  com  $\tilde{H}(\cdot, 0) = \varphi|_{\partial\Omega}$  e  $\tilde{H}(\cdot, 1) = \Psi|_{\partial\Omega}$  tem-se que  $d(\varphi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b)$ .

**Demonstração:** Pelo Teorema de Tietze (*ver Teorema A.12*), podemos estender  $\tilde{H}$  a uma função  $H$  contínua sobre  $\overline{\Omega} \times [0, 1]$  a valores no  $\mathbb{R}^N$ .

Assim,

$$\bar{\varphi} = \tilde{H}(\cdot, 0) = H(\cdot, 0)|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega} \text{ e } \bar{\psi} = \tilde{H}(\cdot, 1) = H(\cdot, 1)|_{\partial\Omega} = \psi|_{\partial\Omega},$$

ou seja,  $\bar{\varphi} = \varphi|_{\partial\Omega}$  e  $\bar{\psi} = \psi|_{\partial\Omega}$ , onde  $\bar{\varphi}$  e  $\bar{\psi}$  são extensões de  $\varphi|_{\partial\Omega}$  e  $\psi|_{\partial\Omega}$ , respectivamente.

Desde que, o grau topológico de Brouwer é invariante por homotopia temos que

$$d(\tilde{H}(\cdot, 0), \Omega, b) = d(\tilde{H}(\cdot, 1), \Omega, b),$$

mostrando que

$$d(\bar{\varphi}, \Omega, b) = d(\bar{\psi}, \Omega, b).$$

De acordo com a propriedade (C<sub>7</sub>) temos

$$d(\bar{\varphi}, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b) \text{ pois } \bar{\varphi}|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}.$$

De modo análogo, temos

$$d(\bar{\psi}, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b) \text{ pois } \bar{\psi}|_{\partial\Omega} = \psi|_{\partial\Omega}.$$

Portanto,  $d(\varphi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b)$ . ■

(C<sub>9</sub>) **(Teorema da Não-Contração da Bola Unitária)**

Não existe aplicação contínua  $\varphi : \overline{B_1(0)} \rightarrow \partial B_1(0)$  com  $\varphi|_{\partial B_1(0)} \equiv I$ .

**Demonstração:** Suponha que exista tal aplicação  $\varphi$ . Por (C<sub>3</sub>) temos

$d(\varphi, B_1(0), 0) = 0$ , pois  $0 \notin \varphi(\overline{B_1(0)})$ . Por outro lado, como  $\varphi|_{\partial B_1(0)} \equiv I|_{\partial B_1(0)}$  e usando as propriedades (C<sub>1</sub>) e (C<sub>8</sub>) deduzimos que

$$0 = d(\varphi, B_1(0), 0) = d(I, B_1(0), 0) = 1,$$

que é um absurdo. Logo temos (C<sub>9</sub>). ■

(C<sub>10</sub>) Se  $N$  é ímpar, não existe aplicação contínua  $H : S^{N-1} \times [0, 1] \rightarrow S^{N-1}$  verificando  $H(x, 0) = x$  e  $H(x, 1) = -x$ ,  $\forall x \in S^{N-1}$ .

**Demonstração:**

Observe que  $S^{N-1} = \partial B_1(0)$  em  $\mathbb{R}^N$ . Suponha que exista tal aplicação  $H$ .

Agora, considere  $\bar{\Omega} = \bar{B}_1(0)$ ,  $b = 0$ ,  $\varphi(x) = x$  e  $\psi(x) = -x$ ,  $\forall x \in S^{N-1}$ , onde  $\varphi, \psi \in C(\bar{B}_1(0), \mathbb{R}^N)$ .

Por **(C<sub>7</sub>)** temos

$$d(I, B_1(0), 0) = d(-I, B_1(0), 0). \quad (1.23)$$

Mas, por **(C<sub>1</sub>)** temos que  $d(I, B_1(0), 0) = 1$ . Por outro lado, o grau topológico de Brouwer é dado por

$$d(-I, B_1(0), 0) = \sum_{\xi_i \in (-I)^{-1}(\{0\})} \text{sgn} J_{-I}(\xi_i) = \text{sgn} J_{-I}(0) = (-1)^N.$$

Sendo  $N$  é ímpar, concluímos que  $d(-I, B_1(0), 0) = -1$ , que contradiz (1.23).

Portanto não existe tal aplicação  $H$ . ■

**(C<sub>11</sub>)** Se  $N$  é ímpar, não existe aplicação contínua  $\varphi : S^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^N$  com  $\varphi(x) \neq 0$  e  $\langle \varphi(x), x \rangle = 0$ ,  $\forall x \in S^{N-1}$ .

**Demonstração:**

Suponha que exista tal aplicação  $\varphi$ . Considere

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|} \text{ e } H(x, t) = x \cos(\pi t) + \psi(x) \sin(\pi t),$$

para  $x \in S^{N-1}$  e  $t \in [0, 1]$ .

Note que,  $\psi(x) \in S^{N-1}$  e  $H(x, t) \in S^{N-1}$ , pois

$$|H(x, t) - 0|^2 = |H(x, t)|^2 = |x \cos(\pi t) + \psi(x) \sin(\pi t)|^2,$$

que implica

$$|H(x, t)|^2 = |x|^2 \cos^2(\pi t) + \sin(2\pi t) \langle x, \psi(x) \rangle + |\psi(x)|^2 \sin^2(\pi t).$$

Sendo  $|x| = 1$ ,  $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|}$  e  $\langle \varphi(x), x \rangle = 0$  temos  $|H(x, t)| = 1$ . Então,  $|H(x, t)| = 1, \forall x \in S^{N-1}$  e  $t \in [0, 1]$ . Agora, observe que

$$H \in C(S^{N-1} \times [0, 1], S^{N-1}),$$

$$H(x, 0) = x \cdot \cos(\pi \cdot 0) + \psi(x) \cdot \sin(\pi \cdot 0) = x \cdot 1 + \psi(x) \cdot 0 = x$$

e

$$H(x, 1) = x \cdot \cos(\pi \cdot 1) + \psi(x) \cdot \sin(\pi \cdot 1) = x \cdot (-1) + \psi(x) \cdot 0 = -x,$$

o que contradiz a propriedade **(C<sub>10</sub>)**. Portanto, não existe a aplicação  $\varphi$  considerada no início da demonstração. ■

### 1.1.6 O Grau Topológico de Brouwer num Espaço Vetorial de Dimensão Finita

Considere  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $\varphi \in C(\overline{\Omega}, V)$ , onde  $\Omega$  é um aberto limitado de  $V$ . O grau topológico de Brouwer pode ser estudado de maneira análoga ao que fizemos no  $\mathbb{R}^N$ .

Uma pergunta natural que surge é saber se mudando a base de  $V$ , o grau topológico de Brouwer é alterado. No que segue, seja  $\beta_1$  uma outra base de  $V$ ,  $\varphi_1 = M^{-1} \circ \varphi \circ M$ , onde  $M(\Omega_1) = \Omega$ ,  $M(b_1) = b$  e  $M$  é a matriz mudança de base. Veja que, se  $\varphi(x) = b$  e  $M(x_1) = x$  temos

$$\varphi_1(x_1) = (M^{-1} \circ \varphi \circ M)(x_1) = (M^{-1} \circ \varphi)(M(x_1)) = (M^{-1} \circ \varphi)(x) = M^{-1}(\varphi(x)) = M^{-1}(b) = b_1.$$

Uma resposta a tal pergunta é encontrada no lema que segue.

**Lema 1.11** *O grau topológico de Brouwer é independente da base escolhida, isto é,*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi_1, \Omega_1, b_1).$$

**Demonstração:** Vamos considerar apenas o caso regular, ou seja,  $\varphi_1 \in C^1(\overline{\Omega}_1, V)$  e  $b_1 \notin \varphi_1(\Omega_1) \cup \varphi_1(S)$ . Sendo  $\varphi_1 = M^{-1} \circ \varphi \circ M$  e usando a regra da cadeia temos  $\varphi_1'(x_1) = M^{-1} \circ \varphi'(x) \circ M$ , e portanto

$$\det(\varphi_1'(x_1)) = \det(M^{-1} \circ \varphi'(x) \circ M).$$

Usando uma propriedade dos determinantes tem-se

$$\det(\varphi_1'(x_1)) = \det(M^{-1}) \cdot \det(\varphi'(x)) \cdot \det(M).$$

Desde que,  $\det(M^{-1}) \cdot \det(M) = 1$  segue-se que

$$\det(\varphi_1'(x_1)) = \det(\varphi'(x)).$$

Logo

$$J_{\varphi_1}(x_1) = J_{\varphi}(x)$$

e daí obtemos

$$\text{sgn}(J_{\varphi_1}(x_1)) = \text{sgn}(J_{\varphi}(x)).$$

Consequentemente

$$\sum_{x_1 \in \varphi_1^{-1}(\{b_1\})} \text{sgn}(J_{\varphi_1}(x_1)) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(\{b\})} \text{sgn}(J_{\varphi}(x)),$$

ou seja,

$$d(\varphi_1, \Omega_1, b_1) = d(\varphi, \Omega, b).$$

■

Vamos considerar a seguinte situação, onde a aplicação  $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um aberto com  $m < N$ . Com o objetivo de usar a teoria do grau topológico de Brouwer, podemos considerar a aplicação  $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  supondo que a mesma possui  $N - m$  componentes (coordenadas) nulas, isto é,

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_m(x), 0, 0, \dots, 0).$$

**Lema 1.12** *Seja  $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$  com  $m < N$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  e  $\Phi(x) = x - \varphi(x)$ ,  $\forall x \in \bar{\Omega}$ . Se  $b \in \mathbb{R}^m$  e  $b \notin \Phi(\partial\Omega)$ , então*

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi|_{\bar{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, b).$$

**Demonstração:** Observe que  $b \notin \Phi|_{\bar{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}(\partial_{\mathbb{R}^m}(\Omega \cap \mathbb{R}^m))$ , pois  $\partial_{\mathbb{R}^m}(\Omega \cap \mathbb{R}^m) \subset \partial\Omega$ . Vamos considerar apenas o caso regular, isto é,  $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$  e  $b \notin \Phi(S)$ . Além disso,  $\Phi^{-1}(\{b\}) \subset \mathbb{R}^m$ , pois  $b \in \mathbb{R}^m$ . Temos que

$$\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \Phi'|_{\Omega \cap \mathbb{R}^m}(x) & A \\ 0 & I_{N-m} \end{pmatrix}$$

$\forall x \in \Omega \cap \mathbb{R}^m$ . Assim,

$$\det(\Phi'(x)) = \det(\Phi'|_{\Omega \cap \mathbb{R}^m}(x)), \quad \forall x \in \Phi^{-1}(\{b\}).$$

Logo

$$J_{\Phi}(x) = J_{\Phi|_{\bar{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}}(x), \quad \forall x \in \Phi^{-1}(\{b\})$$

e com isso,

$$\text{sgn}(J_{\Phi}(x)) = \text{sgn}(J_{\Phi|_{\bar{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}}(x)).$$

Consequentemente

$$\sum_{x \in \Phi^{-1}(\{b\})} \text{sgn}(J_{\Phi}(x)) = \sum_{x \in \Phi^{-1}|_{\bar{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}(\{b\})} \text{sgn}(J_{\Phi|_{\bar{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}}(x)).$$

Portanto, segue da teoria do grau topológico de Brouwer, para o caso regular, que

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi|_{\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, b).$$

■

## 1.2 O Grau Topológico de Leray & Schauder

No que segue-se vamos denotar por  $E$  um espaço de Banach real e  $\Omega \subset E$  um aberto limitado. A função distância entre conjuntos associada a norma de  $E$ , será denotada por  $\rho$ , isto é,  $\rho(A, B) = \inf\{\|a - b\|; a \in A, b \in B\}$  com  $A, B \subset E$ . Seja  $T \in C(\overline{\Omega}, E)$  uma aplicação tal que  $T(\overline{\Omega})$  está contido num subespaço de dimensão finita de  $E$ . A aplicação  $\Phi = I - T$  é chamada de Perturbação de Dimensão Finita da Identidade.

**Definição 1.13** *Seja  $b \in E$  com  $b \notin \Phi(\partial\Omega)$ . Se  $F$  é um subespaço de  $E$  de dimensão finita contendo  $T(\overline{\Omega})$  e  $b$ , definimos o **grau de Leray & Schauder de  $\Phi$  com relação a  $\Omega$  no ponto  $b$ , como sendo o número inteiro***

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Vamos mostrar que esta definição é consistente, isto é, independe da escolha do subespaço  $F$ . De fato, sejam  $F_1$  e  $F_2$  dois subespaços de  $E$  de dimensão finita tais que

$$T(\overline{\Omega}) \subset F_1, \quad T(\overline{\Omega}) \subset F_2 \quad e \quad b \in F_1 \cap F_2.$$

Sendo  $F = F_1 \cap F_2$  um subespaço de  $F_1$  e também de  $F_2$ , que contém  $T(\overline{\Omega})$  e  $b$ , segue-se do Lema 1.12 que

$$d(\Phi|_{\overline{\Omega} \cap F_1}, \Omega \cap F_1, b) = d(\Phi|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b)$$

e

$$d(\Phi|_{\overline{\Omega} \cap F_2}, \Omega \cap F_2, b) = d(\Phi|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Portanto,

$$d(\Phi|_{\overline{\Omega} \cap F_1}, \Omega \cap F_1, b) = d(\Phi|_{\overline{\Omega} \cap F_2}, \Omega \cap F_2, b),$$

e a definição do grau de Leray-Schauder é consistente.

**Definição 1.14** Diremos que uma aplicação  $T : \overline{\Omega} \rightarrow E$  é compacta, se  $T$  é contínuo e  $T(\overline{\Omega})$  é relativamente compacto em  $E$ , ou seja,  $\overline{T(\overline{\Omega})}$  é um compacto em  $E$ .

No que segue-se denotaremos por  $Q(\overline{\Omega}, E)$  o espaço de Banach dos operadores compactos  $T : \overline{\Omega} \rightarrow E$  munido da norma da convergência uniforme, isto é,

$$\|T\|_{\infty, \overline{\Omega}} = \|T\|_{\infty} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|T(x)\|, \text{ onde } \|\cdot\| \text{ é uma norma em } E.$$

**Lema 1.15** Seja  $K$  um compacto de  $E$ . Para todo  $\epsilon > 0$ , existe um subespaço de dimensão finita  $F_{\epsilon} \subset E$  e uma aplicação  $g_{\epsilon} \in C(K, F_{\epsilon})$  verificando

$$\|x - g_{\epsilon}(x)\| < \epsilon, \forall x \in K.$$

**Demonstração:** Sendo  $K$  um compacto, dado  $\epsilon > 0$ , existe uma quantidade finita de pontos  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_p \in E$  tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^p B_{\epsilon}(y_i).$$

Seja  $F_{\epsilon}$  o subespaço gerado por  $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_p\}$  e defina a função

$$\begin{aligned} b_i : K &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto b_i(x), i = 1, 2, \dots, p, \end{aligned}$$

onde

$$b_i(x) = \begin{cases} \epsilon - \|x - y_i\| & , \text{ se } x \in B_{\epsilon}(y_i) \\ 0 & , \text{ se } x \in (B_{\epsilon}(y_i))^c. \end{cases}$$

Observe que

$$b_i(x) \geq 0, \forall x \in E \text{ e que } \sum_{i=1}^p b_i(x) > 0, \forall x \in K.$$

Defina a função  $g_{\epsilon}$  de  $K$  em  $F_{\epsilon}$  por

$$g_{\epsilon}(x) = \frac{\sum_{i=1}^p b_i(x)y_i}{\sum_{i=1}^p b_i(x)}.$$

Veja que a função  $g_{\epsilon}$  está bem definida, isto é,  $\forall x \in K$  temos  $g_{\epsilon}(x) \in F_{\epsilon}$  pois,  $g_{\epsilon}(x)$  é uma combinação linear dos  $y_i$ .

A aplicação  $g_{\epsilon}$  é contínua em  $K$ , pois é um quociente de funções contínuas, onde

$\sum_{i=1}^p b_i(x) > 0$  e  $g_\epsilon(x) \in F_\epsilon, \forall x \in K$ .

Além disso, temos

$$\|x - g_\epsilon(x)\| = \left\| \frac{\sum_{i=1}^p b_i(x) \cdot x}{\sum_{i=1}^p b_i(x)} - \frac{\sum_{i=1}^p b_i(x) \cdot y_i}{\sum_{i=1}^p b_i(x)} \right\|,$$

que implica

$$\|x - g_\epsilon(x)\| \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^p b_i(x)} \cdot \sum_{i=1}^p b_i(x) \cdot \|x - y_i\|.$$

Assim,

$$\|x - g_\epsilon(x)\| < \frac{1}{\sum_{i=1}^p b_i(x)} \cdot \sum_{i=1}^p b_i(x) \cdot \epsilon,$$

e portanto,

$$\|x - g_\epsilon(x)\| < \epsilon, \forall x \in K.$$

■

**Lema 1.16** *Seja  $\Phi$  uma perturbação compacta da identidade, onde  $\Phi = I - T$ ,  $T : \bar{\Omega} \rightarrow E$  e  $T \in Q(\bar{\Omega}, E)$ . Então:*

(I)  $\Phi$  é um operador fechado (isto é, a imagem por  $\Phi$  de um fechado é um conjunto fechado.)

(II)  $\Phi$  é própria (isto é, a imagem inversa por  $\Phi$  de um compacto é um conjunto compacto.)

**Demonstração:** (I)  $\Phi$  é fechado.

Devemos mostrar que, se  $G \subset \bar{\Omega}$  é um fechado em  $E$ , então  $\Phi(G)$  é um fechado em  $E$ .

Seja  $G \subset \bar{\Omega}$  um conjunto fechado e  $\{u_n\} \subset G$  tal que  $\Phi(u_n) \rightarrow z$  em  $E$ .

Nosso objetivo é mostrar que  $z \in \Phi(G)$ .

Usando a hipótese que  $T$  é um operador compacto, existe uma subsequência  $\{u_{n_p}\} \subset \{u_n\}$  e  $w \in E$  tal que  $T(u_{n_p}) \rightarrow w$  em  $E$ . Sendo  $\Phi = I - T$  temos

$$\Phi(u_{n_p}) = I(u_{n_p}) - T(u_{n_p})$$

implicando

$$u_{n_p} = \Phi(u_{n_p}) + T(u_{n_p}).$$

Desde que

$$\Phi(u_n) \rightarrow z \text{ em } E \text{ e } T(u_{n_p}) \rightarrow w \text{ em } E$$

concluimos que

$$u_{n_p} \rightarrow z + w \text{ em } E.$$

Agora, pela continuidade da  $\Phi$ , obtemos

$$\Phi(u_{n_p}) \rightarrow \Phi(z + w) \text{ em } E$$

e pela unicidade dos limites temos

$$\Phi(z + w) = z.$$

Como  $G$  é um conjunto fechado em  $E$ ,  $\{u_{n_p}\} \subset G$  e  $u_{n_p} \rightarrow z + w$ , devemos ter

$$z + w \in G.$$

Portanto,  $z \in \Phi(G)$ . Mostrando que  $\Phi(G)$  é um conjunto fechado.

(II)  $\Phi$  é própria.

Devemos mostrar que, se  $K \subset E$  é um conjunto compacto, então  $\Phi^{-1}(K)$  é um conjunto compacto.

Nosso objetivo é mostrar que toda sequência  $\{u_n\} \subset \Phi^{-1}(K)$ , possui uma subsequência convergente em  $E$  com limite em  $\Phi^{-1}(K)$ .

Seja  $\{u_n\} \subset \Phi^{-1}(K)$ . Logo existe,  $\{v_n\} \subset K$  com  $\Phi(u_n) = v_n$ . Sendo  $K$  um compacto, existe uma subsequência

$$\{v_{n_j}\} \subset \{v_n\} \text{ e } v \in E$$

de maneira que  $v_{n_j} \rightarrow v$  em  $E$ . Usando a definição de  $\Phi$  temos

$$\Phi(u_{n_j}) = I(u_{n_j}) - T(u_{n_j}),$$

e portanto,

$$u_{n_j} = v_{n_j} + T(u_{n_j}).$$

Segue da compacidade do operador  $T$  que existe uma subsequência

$$u_{n_{j_p}} \subset u_{n_j} \text{ e } z \in E \text{ tal que } T(u_{n_{j_p}}) \rightarrow z \text{ em } E.$$

Assim,

$$u_{n_{j_p}} = \Phi(u_{n_{j_p}}) + T(u_{n_{j_p}}) \text{ e com isso } u_{n_{j_p}} \rightarrow v + z \text{ em } E.$$

Como  $\Phi$  uma aplicação contínua, o conjunto  $\Phi^{-1}(K)$  é um conjunto fechado em  $\bar{\Omega}$ , logo é um conjunto fechado em  $E$  e conseqüentemente  $v + z \in \Phi^{-1}(K)$ . Mostrando que  $\Phi^{-1}(K)$  é um conjunto compacto. ■

Considere o operador  $T \in Q(\bar{\Omega}, E)$ ,  $\Phi = I - T$ ,  $\Phi \in C(\bar{\Omega}, E)$  e um ponto  $b \notin \Phi(\partial\Omega)$ . De acordo com o Lema 1.16 temos que  $\Phi(\partial\Omega)$  é um conjunto fechado em  $E$ , logo  $r = \rho\{b, \Phi(\partial\Omega)\} > 0$ . Fixando  $K = \overline{T(\bar{\Omega})}$ , do Lema 1.15 encontramos um subespaço de dimensão finita  $F_{\frac{r}{2}} \subset E$  e uma função contínua

$$\begin{aligned} g_{\frac{r}{2}} : K &\rightarrow F_{\frac{r}{2}} \\ x &\mapsto g_{\frac{r}{2}}(x), \end{aligned}$$

satisfazendo

$$\|x - g_{\frac{r}{2}}(x)\| < \frac{r}{2}, \forall x \in K,$$

onde  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(y_n)$  com  $y_n \in \bar{\Omega}$ . Definindo

$$T_r(u) = g_{\frac{r}{2}}(T(u)), \forall u \in \bar{\Omega} \text{ e } \Phi_r = (I - T_r)(u), \forall u \in \bar{\Omega}$$

observamos que  $\Phi_r$  é uma perturbação de dimensão finita da identidade com  $b \notin \Phi_r(\partial\Omega)$ . De fato, para  $x \in \partial\Omega$  temos

$$\|b - \Phi_r(x)\| = \|b - \Phi(x) + \Phi(x) - \Phi_r(x)\|$$

e portanto,

$$\|b - \Phi_r(x)\| \geq \|b - \Phi(x)\| - \|\Phi(x) - \Phi_r(x)\|. \quad (1.24)$$

Desde que,

$$\|b - \Phi(x)\| \geq r, \forall x \in \partial\Omega$$

sendo  $\Phi(x) = x - T(x)$  e  $\Phi_r(x) = x - T_r(x)$ ,  $\forall x \in \bar{\Omega}$ , temos

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| = \|(x - T(x)) - (x - T_r(x))\|$$

implicando

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| = \|T(x) - T_r(x)\|,$$

ou seja,

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| = \|T(x) - g_{\frac{r}{2}}(T(x))\|.$$

Fazendo  $T(x) = w \in K$  obtemos

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| = \|w - g_{\frac{r}{2}}(w)\| < \frac{r}{2},$$

que implica

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| \leq \frac{r}{2}, \quad \forall w \in K.$$

Portanto, da desigualdade (1.24) temos

$$\|b - \Phi_r(x)\| \geq r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$$

donde segue-se que

$$\|b - \Phi_r(x)\| > \frac{r}{2} > 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

O conjunto  $\{\|b - \Phi_r(x)\|; x \in \partial\Omega\}$  é limitado inferiormente e pelo postulado de Dedekind possui ínfimo. Assim,

$$\inf\{\|b - \Phi_r(x)\|; x \in \partial\Omega\} \geq \frac{r}{2}$$

implicando que  $\rho\{b, \Phi_r(\partial\Omega)\} \geq \frac{r}{2} > 0$ . Mostrando que  $b \notin \Phi_r(\partial\Omega)$ . Agora, já podemos calcular o grau de  $\Phi_r$ , pois o mesmo está definido com relação a  $\Omega$  no ponto  $b$  e será definido da seguinte maneira.

**Definição 1.17** *Seja  $\Phi$  uma perturbação compacta da identidade, isto é,  $\Phi = I - T$ , onde  $T : \bar{\Omega} \rightarrow E$  com  $T \in Q(\bar{\Omega}, E)$ . Definimos o **grau de Leray & Schauder de  $\Phi$  com relação a  $\Omega$  no ponto  $b$** , como sendo*

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_r, \Omega, b),$$

onde  $\Phi_r$  é uma perturbação de dimensão finita da identidade satisfazendo

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| \leq \frac{r}{2}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Vamos mostrar que a definição é consistente, isto é, não depende da escolha do  $\Phi_r$ .

Sejam  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  duas perturbações de dimensão finita da identidade, denotadas por  $\Phi_1 = I - T_1$  e  $\Phi_2 = I - T_2$  com

$$\|\Phi(x) - \Phi_1(x)\| \leq \frac{r}{2} \quad e \quad \|\Phi(x) - \Phi_2(x)\| \leq \frac{r}{2}, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Considere também  $F_1$  e  $F_2$  subespaços de  $E$  de dimensão finita, que contêm  $T_1(\bar{\Omega})$  e  $T_2(\bar{\Omega})$ , respectivamente e, também o vetor  $b \in E$ . Fixe  $F$  um subespaço de  $E$  de dimensão finita que contém  $F_1 + F_2$  e  $b$ . Assim,  $T_1(\bar{\Omega}) \subset F$ ,  $T_2(\bar{\Omega}) \subset F$  e  $b \in F$ . Conseqüentemente, pela definição do grau de uma perturbação finita da identidade, temos

$$d(\Phi_1, \Omega, b) = d(\Phi_1|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b)$$

e

$$d(\Phi_2, \Omega, b) = d(\Phi_2|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Defina a seguinte homotopia

$$\begin{aligned} H : \bar{\Theta} \times [0, 1] &\rightarrow F \\ (x, t) &\mapsto H(x, t) = t \cdot \Phi_1|_{\bar{\Omega} \cap F}(x) + (1 - t) \cdot \Phi_2|_{\bar{\Omega} \cap F}(x) \text{ com } \Theta = \bar{\Omega} \cap F. \end{aligned}$$

Temos que  $b \notin H(\partial\Theta \times [0, 1])$ . De fato, usando a invariância do grau de Brouwer, por homotopia segue-se que

$$d(H(\cdot, 0), \Theta, b) = d(H(\cdot, 1), \Theta, b).$$

Desde que  $H(\cdot, 0) = \Phi_1|_{\bar{\Omega} \cap F}$ ,  $H(\cdot, 1) = \Phi_2|_{\bar{\Omega} \cap F}$  e  $\Theta = \bar{\Omega} \cap F$  concluímos que

$$d(\Phi_2|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b) = d(\Phi_1|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Portanto,  $d(\Phi_2, \Omega, b) = d(\Phi_1, \Omega, b)$ . Mostrando que a definição do grau de Leray & Schauder de  $\Phi$  com relação a  $\Omega$  no ponto  $b$  é consistente.

### 1.2.1 Propriedades Fundamentais do Grau de Leray & Schauder

No que segue, vamos usar sempre  $T \in Q(\bar{\Omega}, E)$  e  $\Phi = I - T$ .

#### (P<sub>1</sub>) Continuidade em relação ao operador T

Existe uma vizinhança  $U$  de  $T$  em  $Q(\bar{\Omega}, E)$  tal que  $\forall S \in U$  temos que:

$$(i) \ b \notin (I - S)(\partial\Omega),$$

$$(ii) \ d(I - S, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega, b).$$

#### Demonstração:

Fixe  $r = \rho\{b, \Phi(\partial\Omega)\} > 0$ ,  $U = \{S \in Q(\bar{\Omega}, E); \|S - T\|_\infty < \frac{r}{2}\}$  e  $S \in U$ . Definindo

$\Psi = I - S$  temos que  $\rho\{b, \Psi(\partial\Omega)\} \geq \frac{r}{2}$  e  $b \notin \Psi(\partial\Omega)$ . De fato, para  $x \in \partial\Omega$  temos

$$\|b - \Psi(x)\| = \|b - \Phi(x) + \Phi(x) - \Psi(x)\|$$

implicando

$$\|b - \Psi(x)\| \geq \|b - \Phi(x)\| - \|\Phi(x) - \Psi(x)\|. \quad (1.25)$$

Uma vez que

$$\|\Phi(x) - \Psi(x)\| \leq \|T - S\|_\infty < \frac{r}{2}, \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad e \quad \|b - \Phi(x)\| \geq r$$

temos

$$\|b - \Psi(x)\| \geq \frac{r}{2} > 0.$$

Sendo o conjunto  $\{\|b - \Psi(x)\|; x \in \partial\Omega\}$  limitado inferiormente, pelo postulado de Dedekind o mesmo possui ínfimo. Logo

$$\inf\{\|b - \Psi(x)\|; x \in \partial\Omega\} \geq \frac{r}{2} \quad e \quad \text{assim} \quad \rho\{b, \Psi(\partial\Omega)\} \geq \frac{r}{2} > 0.$$

Observando que  $\{b\}$  é um compacto e  $\Psi(\partial\Omega)$  um fechado, concluímos que  $b \notin \Psi(\partial\Omega)$ .

Considere  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  duas perturbações de dimensão finita da identidade, verificando  $\|\Phi(x) - \Phi_1(x)\| \leq \frac{r}{4}$  e  $\|\Psi(x) - \Phi_2(x)\| \leq \frac{r}{4}$ ,  $\forall x \in \bar{\Omega}$ . Logo, pela definição do grau de Leray & Schauder temos

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_1, \Omega, b) = d(\Phi_1|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b)$$

e

$$d(\Psi, \Omega, b) = d(\Phi_2, \Omega, b) = d(\Phi_2|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b),$$

onde  $F$  é um subespaço de dimensão finita contendo  $T_1(\bar{\Omega})$ ,  $S_1(\bar{\Omega})$  e o ponto  $b$ , com  $\Phi_1 = I - T_1$  e  $\Phi_2 = I - S_1$ . Defina a seguinte homotopia

$$\begin{aligned} H : \bar{\Theta} \times [0, 1] &\rightarrow F \\ (x, t) &\mapsto H(x, t) = t\Phi_1|_{\bar{\Omega} \cap F}(x) + (1-t)\Phi_2|_{\bar{\Omega} \cap F}(x), \quad \text{com } \Theta = \bar{\Omega} \cap F. \end{aligned}$$

Temos que  $b \notin H(\partial\Theta \times [0, 1])$ , pois

$$\|H(x, t) - \Phi(x)\| = \|t\Phi_1|_{\bar{\Omega} \cap F}(x) + (1-t)\Phi_2|_{\bar{\Omega} \cap F}(x) - t\Phi(x) - (1-t)\Phi(x)\|.$$

Donde obtemos

$$\|H(x, t) - \Phi(x)\| \leq |t|\|\Phi_1|_{\bar{\Omega} \cap F}(x) - \Phi(x)\| + |1-t|\|\Phi_2|_{\bar{\Omega} \cap F}(x) - \Phi(x)\|.$$

Desde que

$$\|\Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}}(x) - \Phi(x)\| \leq \frac{r}{4} \quad \text{e} \quad \|\Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}}(x) - \Phi(x)\| \leq \frac{r}{4},$$

com  $\Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}} = I - T_1$  e  $\Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}} = I - T_2$  temos

$$\|H(x, t) - \Phi(x)\| \leq t \cdot \frac{r}{4} + (1 - t) \cdot \frac{r}{4} = \frac{r}{4} > 0.$$

Portanto,  $\|H(x, t) - \Phi(x)\| \leq \frac{r}{4}$ ,  $\forall x \in \overline{\Omega}$ . Sendo  $\partial\Theta = \partial(\Omega \cap F) = \partial\Omega \cap F$ , segue-se que

$$\rho\{b, H(\partial\Theta \times [0, 1])\} \geq \frac{r}{2},$$

pois, para cada  $x \in \partial(\Omega \cap F)$

$$\|b - H(x, t)\| = \|b - \Phi(x) + \Phi(x) - H(x, t)\|$$

e assim,

$$\|b - H(x, t)\| \geq \|b - \Phi(x)\| - \|\Phi(x) - H(x, t)\|.$$

Daí, segue-se que

$$\|b - H(x, t)\| \geq \frac{r}{2}, \quad \forall x \in \partial(\Omega \cap F).$$

Sendo o conjunto

$$\{\|b - H(x, t)\|; x \in \partial(\Omega \cap F), t \in [0, 1]\}$$

limitado inferiormente, pelo postulado de Dedekind possui ínfimo, logo

$$\inf\{\|b - H(x, t)\|; x \in \partial(\Omega \cap F), t \in [0, 1]\} \geq \frac{r}{2}$$

e conseqüentemente  $\rho\{b, H(\partial(\Omega \cap F))\} \geq \frac{r}{2} > 0$ . Logo,  $b \notin H(\partial\Theta \times [0, 1])$ . Usando a invariância do grau de Brouwer por homotopia segue-se que

$$d(H(\cdot, 0), \Theta, b) = d(H(\cdot, 1), \Theta, b).$$

Desde que,  $H(\cdot, 0) = \Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}}$ ,  $H(\cdot, 1) = \Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}}$ , e  $\Theta = \overline{\Omega} \cap F$  temos que

$$d(\Phi_{2|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b) = d(\Phi_{1|_{\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b).$$

Portanto,  $d(\Psi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega, b)$ . ■

### (P<sub>2</sub>) Invariância do Grau por Homotopia

Seja  $H$  uma aplicação tal que  $H \in C(\overline{\Omega} \times [0, 1], E)$ , definida por  $H(x, t) = x - S(x, t)$ ,

onde  $S \in Q(\bar{\Omega} \times [0, 1], E)$ . Se  $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ , então o grau  $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$  é constante em  $[0, 1]$ .

**Demonstração:**

Considerando  $r = \rho\{b, H(\partial\Omega \times [0, 1])\}$ , vamos mostrar que  $r > 0$ . Para este fim defina a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \widehat{H} : \bar{\Omega} \times [0, 1] &\rightarrow E \times \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto \widehat{H}(x, t) = (x, t) - (S(x, t), t), \end{aligned}$$

isto é,

$$\widehat{H}(x, t) = (x - S(x, t), 0).$$

Neste caso, temos que  $\widehat{H} = I - \widehat{S}$  com  $\widehat{S} : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow E \times \mathbb{R}$  dada por  $\widehat{S}(x, t) = (S(x, t), t)$  uma perturbação compacta da identidade, no espaço de Banach  $E \times \mathbb{R}$ , pois  $S$  é um operador compacto.

**Afirmção:** O operador  $\widehat{S}$  é um operador compacto.

De fato, devemos mostrar que

(i)  $\widehat{S}$  é contínuo,

(ii) Sendo  $U$  limitado, então  $\overline{\widehat{S}(U)}$  é compacto.

**Prova de (i).**

Desde que,  $S$  é um operador compacto tem-se que  $S$  é contínuo, e portanto  $\widehat{S}$  é contínuo.

**Prova de (ii).**

Seja  $R_n = (x_n, t_n)$  uma sequência em  $\bar{\Omega} \times [0, 1]$ . Segue do Teorema de Bolzano-Weierstrass que existe uma subsequência  $(t_{n_j}) \subset (t_n)$  tal que  $t_{n_j} \rightarrow t_0$ . Desde que  $S$  é compacto temos que existe uma subsequência

$$R_{n_{j_k}} = (x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) \text{ tal que } (x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) \rightarrow y_0 \text{ em } E \text{ com } (t_{n_{j_k}}) \subset (t_{n_j}).$$

Logo

$$(S(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}), t_{n_{j_k}}) \rightarrow (y_0, t_0) \text{ em } E \times \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\widehat{S}(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}) = (S(x_{n_{j_k}}, t_{n_{j_k}}), t_{n_{j_k}}) \rightarrow (y_0, t_0) \text{ em } E \times \mathbb{R}.$$

Portanto,  $\widehat{S}$  é um operador compacto.

Pelo Lema 1.16  $\widehat{H}(\partial\Omega \times [0, 1])$  é um fechado, isto é,  $H(\partial\Omega \times [0, 1], 0)$  é um fechado em

$E \times \mathbb{R}$  o que implica  $H(\partial\Omega \times [0, 1])$  é um fechado  $E$ . Desde que,  $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$  podemos concluir que  $r > 0$ .

Fixe  $K = \overline{S(\overline{\Omega} \times [0, 1])} \subset E$ . Pelo Lema 1.15 existe um subespaço de dimensão finita  $F_{\frac{r}{2}} \subset E$  e uma aplicação  $g_{\frac{r}{2}} \in C(K, F_{\frac{r}{2}})$  verificando

$$\|x - g_{\frac{r}{2}}(x)\| < \frac{r}{2}, \forall x \in K.$$

Definindo

$$H_1(x, t) = x - g_{\frac{r}{2}}(S(x, t)), \forall x \in \overline{\Omega}, \forall t \in [0, 1]$$

encontramos

$$\|H(x, t) - H_1(x, t)\| < \frac{r}{2}, \forall x \in \overline{\Omega}, \forall t \in [0, 1].$$

De fato,

$$\|H(x, t) - H_1(x, t)\| = \|(x - S(x, t)) - (x - g_{\frac{r}{2}}(S(x, t)))\|$$

implicando

$$\|H(x, t) - H_1(x, t)\| = \|S(x, t) - g_{\frac{r}{2}}(S(x, t))\|.$$

Considerando  $w = S(x, t) \in K$ , temos  $\|H(x, t) - H_1(x, t)\| = \|w - g_{\frac{r}{2}}(w)\|$  e portanto

$$\|H(x, t) - H_1(x, t)\| < \frac{r}{2}, \forall x \in \overline{\Omega}, \forall t \in [0, 1].$$

Desde que,

$$\{\|H(x, t) - H_1(x, t)\|; x \in \overline{\Omega}, t \in [0, 1]\}$$

é limitado superiormente, pelo postulado de Dedekind

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} \|H(x, t) - H_1(x, t)\| < \frac{r}{2} \text{ com } t \in [0, 1]$$

e com isso,

$$\|H(\cdot, t) - H_1(\cdot, t)\| < \frac{r}{2}, \forall t \in [0, 1].$$

Então, pela propriedade  $(P_1)$

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) = d(H_1(\cdot, t), \Omega, b), \forall t \in [0, 1].$$

Usando a invariância do grau por homotopia temos

$$d(H_1(\cdot, t)|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b) \equiv \text{constante},$$

onde  $F$  é um subespaço de dimensão finita que contém  $\overline{g_{\frac{r}{2}}(S(\overline{\Omega} \times [0, 1]))}$  e  $b$ .

Aplicando a definição do grau de Leray & Schauder para  $H_1$  temos

$$d(H_1(\cdot, t), \Omega, b) = d(H_1(\cdot, t)|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b), \forall t \in [0, 1].$$

Portanto,

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) \equiv \text{constante.}$$

■

Antes de enunciarmos a próxima propriedade, precisamos do seguinte lema.

**Lema 1.18** *Se  $b \notin \Phi(\partial\Omega)$ , então  $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi - b, \Omega, 0)$ .*

**Demonstração:** Seja  $F \subset E$  um subespaço de dimensão finita que contém  $b$  e  $T_r(\overline{\Omega})$ .

Então,

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_r, \Omega, b) = d(\Phi_r|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Segue do grau topológico de Brouwer que

$$d(\Phi_r|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b) = d(\Phi_r|_{\overline{\Omega} \cap F} - b, \Omega \cap F, 0).$$

Note que

$$\Phi_r|_{\overline{\Omega} \cap F} - b = (\Phi_r - b)|_{\overline{\Omega} \cap F}$$

e assim

$$d(\Phi, \Omega, b) = d((\Phi_r - b)|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, 0).$$

Por outro lado, da definição do grau de Leray & Schauder segue-se que

$$d(\Phi_r - b, \Omega, 0) = d((\Phi_r - b)|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, 0).$$

Sendo,  $\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| \leq \frac{r}{2}$ ,  $\forall x \in \overline{\Omega}$  e tendo em vista que

$$\|(\Phi - b) - (\Phi_r - b)\| = \|\Phi - \Phi_r\| \leq \frac{r}{2}$$

obtemos

$$d(\Phi - b, \Omega, 0) = d(\Phi_r - b, \Omega, 0).$$

Portanto,

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi - b, \Omega, 0).$$

■

**(P<sub>3</sub>) O Grau é Constante em Componentes Conexas de  $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial\Omega)$** 

Se  $b_1$  e  $b_2$  estão na mesma componente conexa de  $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial\Omega)$ , então

$$d(\Phi, \Omega, b_1) = d(\Phi, \Omega, b_2).$$

**Demonstração:** Sejam  $b_1$  e  $b_2$  pontos de  $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial\Omega)$  que pertencem à mesma componente conexa de  $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial\Omega)$ . Desde que a componente conexa que contém  $b_1$  e  $b_2$  é um aberto em  $\mathbb{R}^N$ , pois  $\mathbb{R}^N \setminus \Phi(\partial\Omega)$  é um aberto, esta componente conexa é conexa por caminhos. Assim, existe um caminho

$$\begin{aligned} q : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\mapsto f(t) \in C_{b_1, b_2} \text{ com } b_1 = q(0) \text{ e } b_2 = q(1), \end{aligned}$$

onde  $C_{b_1, b_2}$  é a componente conexa que contém o caminho que liga  $b_1$  à  $b_2$ . Note que,  $q([0, 1]) \subset C_{b_1, b_2}$  é um compacto em  $\mathbb{R}^N$ . Assim, existem  $\epsilon > 0$  e  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_s\}$  tais que

$$f([0, 1]) \subset \bigcup_{i=1}^s B_\epsilon(x_i) \text{ com } B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset,$$

onde  $i = 1, 2, 3, \dots, s-1$ . Vamos fixar atenção na bola  $B_\epsilon(x_1)$  e, considere  $b_1 = x_1$  e  $b_2 = x_s$ .

Seja  $x \in B_\epsilon(x_1)$  de modo que  $x \notin \Phi(\partial\Omega)$ . Logo  $d(\Phi, \Omega, b)$  e

$$d(\Phi, \Omega, b_1) = d(\Phi, \Omega, x),$$

pois

$$\|(\Phi - b_1) - (\Phi - x)\|_\infty = \|b_1 - x\|_\infty = \|b_1 - x\| < \epsilon.$$

Portanto, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno,

$$d(\Phi - b_1, \Omega, 0) = d(\Phi - x, \Omega, 0)$$

o que implica

$$d(\Phi, \Omega, b_1) = d(\Phi, \Omega, x), \quad \forall x \in B_\epsilon(b_1).$$

Seguindo este raciocínio deduzimos

$$d(\Phi, \Omega, x_i) = d(\Phi, \Omega, y), \quad \forall y \in B_\epsilon(x_i) \text{ com } i = 1, 2, 3, \dots, s.$$

Desde que,  $B_\epsilon(x_i) \cap B_\epsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots, s-1$ , podemos concluir que

$$d(\Phi, \Omega, b_1) = d(\Phi, \Omega, b_2).$$

■

#### (P<sub>4</sub>) Aditividade

Sejam  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  e  $\Omega_1, \Omega_2$  abertos, disjuntos e limitados em  $E$  com  $b \notin \Phi(\partial\Omega_1) \cup \Phi(\partial\Omega_2)$ . Então,  $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega_1, b) + d(\Phi, \Omega_2, b)$ .

**Demonstração:** Sendo  $\Phi$  uma perturbação compacta da identidade, o grau de Leray & Schauder de  $\Phi$  é dado por  $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_r, \Omega, b)$ , onde  $\Phi_r$  é uma perturbação de dimensão finita da identidade, que satisfaz

$$\|\Phi(x) - \Phi_r(x)\| \leq \frac{r}{2}, \forall x \in \bar{\Omega} \text{ com } \Phi = I - T \text{ e } \Phi_r = I - T_r.$$

Assim,  $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_r|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b)$  onde,  $F$  é um subespaço de dimensão finita que contém  $T_r(\bar{\Omega})$  e  $b$ . Por hipótese,  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  e  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ . Logo,

$$\Omega \cap F = (\Omega_1 \cap F) \cup (\Omega_2 \cap F).$$

Usando a aditividade do grau de Brouwer temos

$$d(\Phi_r|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b) = d(\Phi_r|_{\bar{\Omega}_1 \cap F}, \Omega_1 \cap F, b) + d(\Phi_r|_{\bar{\Omega}_2 \cap F}, \Omega_2 \cap F, b).$$

Portanto,  $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega_1, b) + d(\Phi, \Omega_2, b)$ . ■

## 1.2.2 Consequências das Principais Propriedades do Grau de Leray & Schauder

(C<sub>1</sub>)(Normalização) Seja  $I$  a projeção canônica de  $\bar{\Omega}$  em  $E$ , isto é,  $I(x) = x$ , então

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } b \in \Omega \\ 0, & \text{se } b \notin \bar{\Omega}. \end{cases}$$

**Demonstração:** Considerando  $F = \langle b \rangle$ , o espaço gerado por  $b$ , que é um espaço de dimensão finita, então  $d(I, \Omega, b) = d(I|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b)$ . Usando a propriedade (C<sub>1</sub>) do grau topológico de Brouwer temos

$$d(I|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } b \in \Omega \cap F \\ 0, & \text{se } b \notin \bar{\Omega} \cap F, \end{cases}$$

donde segue o resultado. ■

(C<sub>2</sub>) Se  $b \notin \Phi(\overline{\Omega})$ , então,  $d(\Phi, \Omega, b) = 0$ .

**Demonstração:** Sendo  $\Phi = I - T$  uma perturbação compacta da identidade, pelo Lema 1.16 temos que  $\Phi$  é fechado. Logo  $\alpha = \rho\{b, \Phi(\overline{\Omega})\} > 0$ . Por outro lado,  $\alpha \leq r = \rho\{b, \Phi(\partial\Omega)\} > 0$  e pelo Lema 1.15 existe uma perturbação de dimensão finita da identidade  $\Phi_\alpha \in C(\overline{\Omega}, E)$  tal que

$$\|\Phi(x) - \Phi_\alpha(x)\| < \frac{\alpha}{2}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

**Afirmção:**  $b \notin \Phi_\alpha(\overline{\Omega})$ .

De fato, para  $x \in \overline{\Omega}$  temos

$$\|b - \Phi_\alpha(x)\| = \|b - \Phi(x) + \Phi(x) - \Phi_\alpha(x)\|$$

implicando

$$\|b - \Phi_\alpha(x)\| \geq \|b - \Phi(x)\| - \|\Phi(x) - \Phi_\alpha(x)\|$$

e conseqüentemente

$$\|b - \Phi_\alpha(x)\| \geq \frac{\alpha}{2}.$$

O conjunto  $\{\|b - \Phi_\alpha(x)\|; x \in \overline{\Omega}\}$  é limitado inferiormente e pelo postulado de Dedekind possui ínfimo. Logo

$$\inf\{\|b - \Phi_\alpha(x)\|; x \in \overline{\Omega}\} \geq \frac{\alpha}{2}$$

o que implica  $\rho\{b, \Phi_\alpha(\overline{\Omega})\} \geq \frac{\alpha}{2} > 0$ . Desde que,  $\{b\}$  é um compacto e  $\Phi_\alpha(\overline{\Omega})$  é um fechado, tem-se  $\rho\{b, \Phi_\alpha(\partial\Omega)\} > 0$ , mostrando que  $b \notin \Phi_\alpha(\overline{\Omega})$ . Por definição

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi_\alpha, \Omega, b) = d(\Phi_\alpha|_{\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b),$$

onde  $F$  é o subespaço de dimensão finita de  $E$  que contém  $b$  e  $T(\overline{\Omega})$ . Observando que  $b \notin \Phi_\alpha|_{\overline{\Omega} \cap F}(\overline{\Omega} \cap F)$ , pela propriedade (C<sub>3</sub>) do grau topológico de Brouwer, concluímos que  $d(\Phi, \Omega, b) = 0$ . ■

(C<sub>3</sub>) **(Existência de Solução)** Se  $d(\Phi, \Omega, b) \neq 0$ , então existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $\varphi(x_0) = b$ .

**Demonstração:** Pela propriedade (C<sub>2</sub>) temos que, se  $b \notin \Phi(\overline{\Omega})$ , então  $d(\Phi, \Omega, b) = 0$ .

Fazendo a negação da propriedade  $(C_2)$  temos que, se  $d(\Phi, \Omega, b) \neq 0$ , então existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $\Phi(x_0) = b$ . Mostrando a propriedade  $(C_3)$ . ■

$(C_4)$  Se  $\Phi(\Omega)$  está contido em um subespaço próprio de  $E$ , então  $d(\Phi, \Omega, b) = 0$ .

**Demonstração:** Considere  $V$  um subespaço próprio de  $E$  tal que  $\Phi(\Omega) \subset V$ . Se  $d(\Phi, \Omega, b) \neq 0$ , então pela propriedade  $(C_3)$ ,  $\Phi(\Omega)$  é uma vizinhança de  $b$ , ou seja, existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(b) \subset \Phi(\Omega) \subset V$  e portanto  $V = E$ , o que é um absurdo, pois  $V$  é um subespaço próprio de  $E$ . Portanto,  $d(\Phi, \Omega, b) = 0$ . ■

$(C_5)$  (**Excisão**) Seja  $K$  um fechado contido em  $\bar{\Omega}$  com  $b \in \Phi(K)$ . Então,  $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega \setminus K, b)$ .

**Demonstração:** Usando a definição do grau de Leray & Schauder temos que

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi|_{\bar{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b),$$

onde  $F$  é um subespaço de dimensão finita que contém  $T(\bar{\Omega})$  e  $b$  com  $b \in E$  e  $b \notin \Phi(\partial\Omega)$ . Aplicando a propriedade  $(C_5)$  do grau topológico de Brouwer, segue o resultado. ■

$(C_6)$  Seja  $\{\Omega_i\}_{i \in \Gamma}$  uma família de abertos, dois a dois disjuntos, contidos em  $\Omega$  com

$$\Phi^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{i \in \Gamma} \Omega_i.$$

Então, o grau  $d(\Phi, \Omega, b) = 0$ , a menos de um número finito de índices  $i \in \Gamma$ . Além disso,

$$d(\Phi, \Omega, b) = \sum_{i \in \Gamma} d(\Phi, \Omega_i, b).$$

**Demonstração:** Uma vez que  $b \notin \Phi(\partial\Omega_i)$  pelo Lema 1.16  $\Phi^{-1}(\{b\})$  é um compacto, pois estamos usando o fato que  $\Phi$  é própria. Pelo Teorema A.4, existe um número finito de abertos  $\Omega_i \subset \Omega$  que cobrem  $\Phi^{-1}(\{b\})$ , isto é, existe um conjunto finito  $\Gamma_0$  de índices tal que  $\Phi^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{i \in \Gamma_0} \Omega_i$  com  $\Omega_i \subset \Omega$ . Portanto,  $\forall i \in \Gamma \setminus \Gamma_0$  temos que  $b \notin \Phi(\Omega_i)$  e pela propriedade  $(C_2)$  temos  $d(\Phi, \Omega_i, b) = 0$ .

Considerando que  $K = \bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i \in \Gamma_0} \Omega_i$  é um compacto, pois

$$K = \bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i \in \Gamma_0} \Omega_i = \bar{\Omega} \cap \left( \bigcup_{i \in \Gamma_0} \Omega_i \right)^c = \bar{\Omega} \cap \left( \bigcap_{i \in \Gamma_0} \Omega_i^c \right),$$

temos que  $K$  é fechado e como  $K \subset \bar{\Omega}$  temos que  $K$  é limitado e conseqüentemente  $K$  é compacto. Temos que  $b \notin \Phi(K)$ , pois  $\Phi(b) \in \bigcup_{i \in \Gamma_0} \Omega_i$ . Pela propriedade da excisão ( $C_5$ ), segue-se que

$$d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega \setminus K, b) = d(\Phi, \Omega \setminus (\bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i \in \Gamma_0} \Omega_i), b)$$

e com isso,  $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Phi, \bigcup_{i \in \Gamma_0} \Omega_i, b)$ . Pela propriedade aditiva ( $\mathbf{P}_4$ ) temos

$$d(\Phi, \Omega, b) = \sum_{i \in \Gamma_0} d(\Phi, \Omega_i, b).$$

Portanto,

$$d(\Phi, \Omega, b) = \sum_{i \in \Gamma} d(\Phi, \Omega_i, b).$$

■

( $\mathbf{C}_7$ ) Seja  $\Psi = I - \Phi$ , onde  $S \in Q(\Omega, E)$  tal que  $\Psi(x) = \Phi(x), \forall x \in \partial\Omega$ . Se  $b \notin \Phi(\partial\Omega) = \Psi(\partial\Omega)$ , então,  $d(\Phi, \Omega, b) = d(\Psi, \Omega, b)$ .

**Demonstração:** Considere a seguinte homotopia

$$H(x, t) = t\Phi(x) + (1 - t)\Psi(x), \forall x \in \bar{\Omega} \text{ e } \forall t \in [0, 1].$$

Para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $H(\cdot, t)$  é uma perturbação compacta da identidade, onde  $H(x, t) = x - G(x, t)$  com  $G(x, t) = tT(x) + (1 - t)S(x)$ . Desde que,  $\Phi|_{\partial\Omega} = \Psi|_{\partial\Omega}$  temos que  $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ . De fato, caso contrário existiria  $x_0 \in \partial\Omega$  e  $t_0 \in [0, 1]$  tal que  $b = H(x_0, t_0)$  implicando que  $H(x_0, t_0) = \Phi(x_0) = \Psi(x_0) = b$  o que é um absurdo, pois  $b \notin \Phi(\partial\Omega) = \Psi(\partial\Omega)$ . Mostrando que  $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$ .

Sendo o grau constante por homotopia compacta temos

$$d(H(\cdot, 0), \Omega, b) = d(H(\cdot, 1), \Omega, b),$$

com  $H(\cdot, 0) = \Psi$  e  $H(\cdot, 1) = \Phi$  e assim concluímos que  $d(\Psi, \Omega, b) = d(\Phi, \Omega, b)$ . ■

( $\mathbf{C}_8$ ) Não existe operador  $\Phi \in C(\bar{B}_1(0), \partial B_1(0))$  da forma  $\Phi = I - T$ , onde  $T \in Q(\bar{B}_1(0), E)$ , verificando  $\Phi|_{\partial B_1(0)} \equiv I|_{\partial B_1(0)}$ .

**Demonstração:** Se tal aplicação existisse, então

$$d(\Phi, B_1(0), 0) = d(I, B_1(0), 0) = 1$$

e pela propriedade  $(\mathbf{C}_3)$  existiria  $x_0 \in B_1(0)$  tal que  $\Phi(x_0) = 0$  o que é uma contradição, pelo fato de que  $\forall x \in \overline{B_1(0)}$  tem-se que  $\|\Phi(x)\| = 1$ . ■

## Capítulo 2

# Existência de Solução para uma Classe de Equações Semilineares Elípticas de 2ª Ordem

Pretendemos neste capítulo fazer uma aplicação da Teoria do Grau Topológico desenvolvida por Leray & Schauder, demonstrando o **Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer** e mostrando um método de obtenção de solução para uma classe de Problemas Semilineares de 2ª Ordem.

### 2.1 Preliminares Sobre Espaços de Schauder

Nesta seção iremos apresentar os principais resultados envolvendo os espaços de Schauder, que podem ser encontrados no livro do Adams [2]. No que segue  $\Omega$  denota um domínio (um aberto e conexo) limitado do  $\mathbb{R}^N$ .

**Definição 2.1** Espaço  $C(\overline{\Omega})$ .

O espaço  $C(\overline{\Omega})$  é o espaço das funções contínuas  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , munido da norma

$$\|u\|_0 = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|.$$

**Definição 2.2** Espaço  $C^k(\overline{\Omega})$ .

O espaço  $C^k(\overline{\Omega})$ , para  $k \in \mathbb{N}$ , é o espaço das funções  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  que juntamente com todas as derivadas de ordem inferior ou igual a  $k$  são uniformemente contínuas sobre  $\overline{\Omega}$ .

**Observação 2.1** O espaço  $C^k(\overline{\Omega})$  munido da norma

$$\|u\|_k = \sum_{0 \leq |\sigma| \leq k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\sigma u(x)|$$

torna-se um espaço de Banach, onde:

$$(\sigma) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_N), \text{ com } \sigma_i \in \mathbb{N}, \quad |\sigma| = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \dots + \sigma_N$$

e

$$D^\sigma u(x) = \frac{\partial^{|\sigma|} u(x)}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \partial x_3^{\sigma_3} \dots \partial x_N^{\sigma_N}}.$$

**Definição 2.3** Espaço  $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ .

O espaço  $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ , com  $\alpha \in (0, 1)$ , é o subespaço de  $C^k(\bar{\Omega})$  constituído pelas funções com  $k$ -ésimas derivadas sendo Holderianas com expoente  $\alpha$ , isto é, que verificam

$$H_{k,\alpha}(u) = \max_{|\sigma|=k} \sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \frac{|D^\sigma u(x) - D^\sigma u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty, \text{ com } x \neq y.$$

De forma abreviada temos

$$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^k(\bar{\Omega}); H_{k,\alpha}(u) < \infty\}.$$

Em todo nosso trabalho vamos considerar a seguinte norma no espaço  $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$

$$\|u\|_{k,\alpha} = \|u\|_k + H_{k,\alpha}(u),$$

a qual torna  $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$  um espaço de Banach.

No que segue-se usaremos as seguinte notações:

$$C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) = C^\alpha(\bar{\Omega}) \text{ com } \alpha \in (0, 1) \text{ e } \|\cdot\|_{0,\alpha} = \|\cdot\|_\alpha.$$

## 2.2 Alguns Resultados Clássicos

Nesta seção iremos apresentar alguns resultados clássicos para o problema de Dirichlet no caso linear demonstrado por Schauder e também demonstrar um resultado de unicidade para tal classe de problema.

Em todo este capítulo vamos sempre considerar um operador diferencial  $L$  da seguinte forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x)u_{x_i} + c(x)u, \text{ com } x \in \bar{\Omega} \text{ e } u \in C^2(\bar{\Omega}).$$

**Definição 2.4 ( Operador Uniformemente Elíptico)**

O operador  $L$  é dito uniformemente elíptico em  $\bar{\Omega}$ , quando existe  $\nu > 0$  tal que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (2.1)$$

onde  $|\cdot|$  é a norma usual em  $\mathbb{R}^N$ .

Ao longo desta seção iremos sempre supor que  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\Omega$  é um domínio limitado com fronteira suave e  $L$  é uniformemente elíptico com  $a_{ij}, b_i, c \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ .

**Teorema 2.5 (ESTIMATIVA DE SCHAUDER)** (Ver [9])

Seja  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  e  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  uma solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_1)$$

Então,

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq k(\|f\|_\alpha + \|u\|_0),$$

onde  $k$  é uma constante que depende de  $\alpha, \Omega, \nu, N$  e das normas dos coeficientes de  $L$  em  $C^\alpha(\bar{\Omega})$ .

O próximo resultado conhecido como **Princípio do Máximo Clássico** é um resultado de fundamental importância para estudar o sinal de funções de classe  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  e estabelecer um importante resultado de unicidade para o problema  $(P_1)$ .

### 2.2.1 Princípio do Máximo Clássico

Considere o operador linear diferenciável da forma

$$Lu = a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_iu + c(x)u, \quad \text{com } a_{ij} = a_{ji}, \quad (2.2)$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \Omega$  um domínio de  $\mathbb{R}^N$ , com  $N \geq 2$ . Assumiremos que  $u \in C^2(\Omega)$ .

**Teorema 2.6 (Princípio do Máximo Fraco)**

Seja  $L$  uniformemente elíptico num domínio limitado  $\Omega$ . Suponha que

$$Lu \geq 0 \ (\leq 0) \text{ em } \Omega, \quad c = 0 \text{ em } \Omega,$$

com  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ . Então, o máximo (mínimo) de  $u$  em  $\bar{\Omega}$  é obtido sobre  $\partial\Omega$ , isto é,

$$\sup_{\bar{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u \quad \left( \inf_{\bar{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u \right). \quad (2.3)$$

**Demonstração:** É claro que, se  $Lu > 0$  em  $\Omega$ , então o princípio do máximo forte é conservado, isto é, o máximo de  $u$  não é obtido em  $\Omega$ . Pois se em  $x_0 \in \Omega$  a função  $u$

atinge o valor máximo em  $\bar{\Omega}$ , devemos ter  $Du(x_0) = 0$  e a matriz  $D^2u(x_0) = [D_{ij}u(x_0)]$  é não positiva. Mas, a matriz  $[a_{ij}]$  é positiva, desde que  $L$  seja uniformemente elíptico. Consequentemente,

$$Lu(x_0) = a_{ij}u(x_0)D_{ij}u(x_0) \leq 0, \quad (\text{ver [10] página 328})$$

contrariando o fato que  $Lu > 0$ . Note que, neste argumento é necessário apenas as propriedades da matriz  $[a_{ij}]$ . Para o operador  $L$  temos uma importante limitação com respeito aos termos  $b_i$  que é  $\frac{|b_i|}{\nu} \leq b_0 = \text{constante}$ . De fato, desde que  $a_{11} \geq \nu$ , existe uma constante suficientemente grande  $\gamma$  para a qual

$$Le^{\gamma x_1} = (\gamma^2 a_{11} + \gamma b_1)e^{\gamma x_1} \geq \nu(\gamma^2 - \gamma b_0)e^{\gamma x_1} > 0.$$

Assim, para qualquer  $\epsilon > 0$ , temos que  $L(u + \epsilon e^{\gamma x_1}) > 0$  em  $\Omega$  e também temos que

$$\sup_{\Omega} (u + \epsilon e^{\gamma x_1}) = \sup_{\partial\Omega} (u + \epsilon e^{\gamma x_1}).$$

Veja que para  $\epsilon \rightarrow 0$  temos  $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$ , demonstrando o Teorema. ■

Supondo de um modo mais geral  $c \leq 0$  em  $\Omega$  e considerando o subconjunto  $\Omega^+ \subset \Omega$ , definido por  $\Omega^+ = \{x \in \Omega; u(x) > 0\}$  como  $Lu \geq 0$  em  $\Omega$  temos que

$$L_0u = a_{ij}D_{ij}u + b_iD_iu \geq -cu \text{ em } \Omega^+$$

e como o máximo de  $u$  em  $\bar{\Omega}^+$  deve ser atingido em  $\partial\bar{\Omega}^+$ , consequentemente também será atingido sobre  $\partial\Omega$ . Então, escrevendo  $u^+ = \max(u, 0)$ ,  $u^- = \min(u, 0)$  obtemos o seguinte corolário:

**Corolário 2.7** *Seja  $L$  uniformemente elíptico num domínio limitado  $\Omega$ . Suponhamos que em  $\Omega$*

$$Lu \geq 0 (\leq 0) \text{ com } c \leq 0 \tag{2.4}$$

e  $u \in C^0(\bar{\Omega})$ . Então,

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ \left( \inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^- \right).$$

Se  $Lu = 0$  em  $\Omega$ , então

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Um fato importante que segue do princípio do máximo é uma melhora na estimativa de  $\|u\|_{2,\alpha}$ , mencionada na Estimativa de Schauder. Neste caso temos

$$\|u\|_0 \leq k' \|f\|_0 \quad (\text{ver [7]}), \quad (2.5)$$

onde  $k'$  é uma constante que depende de  $\alpha, \Omega, \nu, N$  e das normas dos coeficientes de  $L$  em  $C^\alpha(\bar{\Omega})$ .

**Teorema 2.8 (Unicidade de Solução)**

*O problema de Dirichlet  $(P_1)$  tem uma única solução.*

**Demonstração:** Se  $u, v \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  são soluções de  $(P_1)$ , temos

$$\begin{cases} Lu = Lv, & \Omega \\ u = v, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Considere  $w = u - v$ . Assim

$$\begin{cases} Lw = Lu - Lv = 0, & \Omega \\ w = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Segue do princípio de máximo que  $w$  atinge máximo e mínimo na fronteira, implicando que  $w \equiv 0$ , ou seja,  $u = v$ . ■

**Teorema 2.9 (Teorema de Schauder) (Ver [9])**

*Se  $c(x) \leq 0, \forall x \in \bar{\Omega}$ , com as hipóteses anteriores sobre  $\Omega$  e  $L$ , e assumindo que para cada  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ , existe uma, e somente uma solução  $u$  do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \quad (P_1)$$

*então, existe uma constante  $k_1$  independente de  $f$  tal que*

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq k_1 \|f\|_\alpha. \quad (2.6)$$

## 2.3 Um Princípio de Resolução para uma Classe de Problemas Semilineares.

Nesta seção estamos interessados em obter uma solução para uma classe de problemas do tipo

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = F(x, u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_2)$$

No que segue, iremos assumir que  $\Omega$  é um domínio limitado com fronteira suave. Os coeficientes  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$  e  $F$  são de classe  $C^1$  sobre  $\bar{\Omega}$  e  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ , respectivamente,  $c(x) \leq 0, \forall x \in \bar{\Omega}$  e o operador  $L$  dado por

$$Lu = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x)u_{x_i} + c(x)u$$

sendo uniformemente elíptico.

O método utilizado para obter soluções para o problema  $(P_2)$  consiste em reduzir o mesmo a uma aplicação do **Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer**.

O método consiste em linearizar o problema  $(P_2)$ . Para isto, fixamos uma função  $u$  no problema  $(P_2)$ , na parte não linear  $F(\cdot, u(\cdot))$ , obtendo assim uma equação linear elíptica de segunda ordem, onde os resultados clássicos apresentados na última seção podem ser usados. Mais precisamente, o **Teorema de Schauder**.

Os resultados da teoria linear do problema de Dirichlet, enunciados na Seção 2.2 permitem construir um operador  $T$  que a cada função  $u$  faz corresponder uma solução  $v = Tu$ , ou seja,

$$\begin{aligned} T : C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) &\rightarrow C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}) \\ u &\mapsto Tu = v \end{aligned}$$

do problema linear associado. Desta forma uma função  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  é uma solução do problema  $(P_2)$  se, e somente se,  $u$  é um ponto fixo de  $T$ .

No que segue,  $E = C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$  e para cada  $u \in E$  consideramos a equação elíptica linear de segunda ordem em  $v$ .

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x)v_{x_i} + c(x)v = F(x, u(x)), & \forall x \in \Omega \\ v = 0, & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_2)_u$$

Os próximos resultados tem por objetivo mostrar algumas propriedades do operador  $T$ .

**Definição 2.10** *Um domínio  $\Omega$  satisfaz a propriedade da poligonal, quando existe  $\gamma > 0$  tal que dois pontos quaisquer  $x$  e  $y$  de  $\bar{\Omega}$  podem ser ligados por uma poligonal em  $\Omega$  de comprimento  $l$  verificando  $l \leq \gamma|x - y|$ .*

**Observação 2.2** *Um domínio com fronteira suave verifica a propriedade da poligonal (ver [11]).*

**Lema 2.11** *Seja  $\Omega$  um domínio que satisfaz a propriedade da poligonal. Se  $A \in C^1(\overline{\Omega})$ , então  $A$  é Lipschitziana em  $\overline{\Omega}$ . Além disso, existe uma constante  $K(\overline{\Omega})$ , que depende do domínio, tal que*

$$H_{0,1}(A) \leq K(\overline{\Omega})\|A\|_1. \quad (2.7)$$

**Demonstração:** Vamos mostrar primeiramente que  $A$  é Lipschitziana em  $\overline{\Omega}$ .

Considere  $x_1, x_N \in \Omega$  de tal forma que  $[x_1, x_N] \subseteq \Omega$ . Como  $\Omega$  é um aberto e conexo limitado do  $\mathbb{R}^N$ , que satisfaz a propriedade da poligonal, existe  $\gamma > 0$  tal que quaisquer dois pontos  $x_1, x_N \in \Omega$  podem ser ligados por uma poligonal em  $\Omega$  de comprimento  $l$  verificando  $l \leq \gamma|x_N - x_1|$ .

Sendo  $A \in C^1(\overline{\Omega})$  podemos aplicar o Teorema do Valor Médio, e desde que  $\Omega$  satisfaz a propriedade da poligonal, quaisquer dois pontos distintos de  $\Omega$  podem ser ligados por uma poligonal em  $\Omega$ , onde  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N \in \overline{\Omega}$  são os seus vértices e a poligonal é dada por

$$\bigcup_{k=2}^N [x_{k-1}, x_k] \subset \overline{\Omega}. \quad (2.8)$$

Assim,

$$|A(x_N) - A(x_1)| = \left| \sum_{k=2}^N \nabla A(x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})\theta_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \right|$$

e desde que, o somatório possui uma quantidade finita de termos, segue da desigualdade triangular

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq \sum_{k=2}^N |\nabla A(x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})\theta_{k-1})(x_k - x_{k-1})|.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz encontramos

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq \sum_{k=2}^N |\nabla A(x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})\theta_{k-1})| |x_k - x_{k-1}|. \quad (2.9)$$

Uma vez que

$$|\nabla A(x + (y - x)\theta)| \leq \|A\|_1, \forall x \in \overline{\Omega}, \quad (2.10)$$

temos

$$|\nabla A(x_{k-1} + (x_k - x_{k-1})\theta_k)| \leq \|A\|_1, \quad \forall k = 2, 3, 4, \dots, N, \quad \theta_k \in (0, 1)$$

e portanto por (2.9)

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq \|A\|_1 \sum_{k=2}^N |x_k - x_{k-1}|.$$

Sendo

$$\sum_{k=2}^N |x_k - x_{k-1}| = l$$

temos

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq \|A\|_1 l,$$

e portanto,

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq \|A\|_1 \gamma |x_N - x_1|.$$

Considerando  $\|A\|_1 \gamma = M > 0$ , deduzimos que

$$|A(x_N) - A(x_1)| \leq M |x_N - x_1|,$$

mostrando que  $A$  é Lipschitziana em  $\bar{\Omega}$ .

Vamos mostrar agora que

$$H_{0,1}(A) \leq K(\bar{\Omega}) \|A\|_1.$$

Pela primeira parte da demonstração temos

$$|A(x) - A(y)| \leq \|A\|_1 \gamma |x - y|, \quad \forall x, y \in \bar{\Omega}. \quad (2.11)$$

Fazendo  $\gamma = K(\bar{\Omega}) > 0$  e substituindo em (2.11) encontramos

$$\frac{|A(x) - A(y)|}{|x - y|} \leq K(\bar{\Omega}) \|A\|_1,$$

e com isso onde podemos concluir que  $K(\bar{\Omega}) \|A\|_1$  é uma cota superior para o conjunto

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{|A(x) - A(y)|}{|x - y|}; x, y \in \bar{\Omega} \right\}.$$

Logo,  $\mathcal{C}$  é limitado superiormente e pelo postulado de Dedekind possui supremo, a saber,

$$\sup_{x, y \in \bar{\Omega}} \frac{|A(x) - A(y)|}{|x - y|} \leq K(\bar{\Omega}) \|A\|_1, \quad \text{com } x \neq y.$$

Segue da última desigualdade e da definição de  $H_{0,1}(A)$  a desigualdade,

$$H_{0,1}(A) \leq K(\bar{\Omega}) \|A\|_1.$$

■

Recordando que estamos supondo  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$ ,  $F$  funções de classe  $C^1$ , segue do Lema 2.11 que  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$ ,  $F \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ . Logo pelo Teorema de Schauder, existe para cada  $u \in E$  uma e somente uma solução do problema  $(P_2)_u$  que denotaremos por  $v = Tu$  com  $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ , onde:

$$(P_2)_u \begin{cases} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)(Tu)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x)(Tu)_{x_i} + c(x)(Tu) = F(x, u(x)), & \forall x \in \Omega \\ Tu = 0, & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Com o objetivo de usar um teorema de ponto fixo para o operador  $T$ , iremos mostrar que o mesmo é **compacto**. Para tanto, enunciaremos sem demonstrar o seguinte resultado que pode ser encontrado no livro do Adams [2].

**Lema 2.12** *A imersão de  $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  em  $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$  é compacta.*

O próximo Lema é fundamental para a aplicação do método utilizado neste trabalho.

**Lema 2.13** *O operador  $T : E \rightarrow E$  é compacto.*

**Demonstração:** O Lema 2.13 fica demonstrado se  $T$  verifica:

(i)  $T(B)$  é relativamente compacto em  $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ , ou seja,  $\overline{T(B)}$  é compacto em  $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ .

(ii)  $T$  é contínuo em  $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ .

Se  $B$  um conjunto limitado de  $E = C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ . Então, existe  $M > 0$  tal que

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq M, \quad \forall u \in B.$$

Usando a Estimativa de Schauder, quando  $c \leq 0$ , obtemos a seguinte desigualdade

$$\|Tu\|_{2,\alpha} \leq k_1 \|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha.$$

Sendo a aplicação  $F$  de classe  $C^1$  sobre  $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ , segue do Lema 2.11 que a mesma é Lipschitziana sobre  $\overline{\Omega} \times [-M, M]$ , uma vez que o domínio  $\overline{\Omega} \times [-M, M]$  tem a propriedade da poligonal.

**Afirmção:** Existe  $M_5 > 0$  tal que

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha \leq M_5, \quad \forall u \in B.$$

Para mostrar a afirmação, observamos que para cada  $u \in B$  temos  $\|u\|_{1,\alpha} \leq M$ , o que implica

$$\|u\|_\alpha \leq M.$$

Por outro lado, pelo Lema 2.11 temos

$$H_{0,1}(u) \leq K(\bar{\Omega})\|u\|_1, \quad (2.12)$$

e assim, obtemos

$$\sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} \leq K(\bar{\Omega})\|u\|_1, \text{ com } x \neq y.$$

Conseqüentemente,

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} \leq K(\bar{\Omega})\|u\|_1,$$

ou seja,

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u\|_1 K(\bar{\Omega})|x - y|, \quad \forall x, y \in \bar{\Omega}.$$

Assim,

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \|u\|_1 K(\bar{\Omega})|x - y|^{1-\alpha}, \quad \forall x, y \in \bar{\Omega} \text{ com } x \neq y.$$

Usando o fato que,

$$|x - y| \leq \text{diam}(\bar{\Omega})$$

tem-se

$$|x - y|^{1-\alpha} \leq (\text{diam}(\bar{\Omega}))^{1-\alpha}, \quad \forall x, y \in \bar{\Omega}$$

o que implica

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq MK(\bar{\Omega})\text{diam}(\bar{\Omega})^{1-\alpha}, \quad \forall u \in B.$$

Daí,

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq M_1, \quad \forall u \in B,$$

e com isso concluímos,

$$\sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq M_1, \quad \forall u \in B, \text{ com } x \neq y.$$

Portanto,

$$H_{0,\alpha}(u) \leq M_1, \quad \forall u \in B. \quad (2.13)$$

Sendo  $F$  Lipschitziana sobre  $\bar{\Omega} \times [-M, M]$ , existe uma constante  $C > 0$  e observando que

$$(x, u(x)) \in \bar{\Omega} \times [-M, M], \quad \forall x \in \bar{\Omega}$$

temos

$$|F(x, u(x)) - F(y, u(y))| \leq C(|x - y| + |u(x) - u(y)|), \quad \forall u \in B,$$

para alguma constante  $C > 0$ . Usando (2.13)

$$|F(x, u(x)) - F(y, u(y))| \leq C(|x - y| + M|x - y|^\alpha), \quad \forall u \in B$$

e assim

$$\frac{|F(x, u(x)) - F(y, u(y))|}{|x - y|^\alpha} \leq C(|x - y|^{1-\alpha} + M),$$

ou equivalentemente,

$$\frac{|F(x, u(x)) - F(y, u(y))|}{|x - y|^\alpha} \leq C(\text{diam}(\bar{\Omega})^{1-\alpha} + M), \quad \forall u \in B.$$

Mostrando assim, que existe  $M_3 > 0$  satisfazendo

$$\frac{|F(x, u(x)) - F(y, u(y))|}{|x - y|^\alpha} \leq M_3, \quad \forall u \in B.$$

Desta última desigualdade

$$\sup_{x, y \in \bar{\Omega}} \frac{|F(x, u(x)) - F(y, u(y))|}{|x - y|^\alpha} \leq M_3, \quad \forall u \in B, \text{ com } x \neq y,$$

isto é,

$$H_{0,\alpha}(F(\cdot, u(\cdot))) \leq M_3, \quad \forall u \in B.$$

Agora, observe que existe  $M_4 > 0$  tal que

$$|F(\cdot, u(\cdot))|_0 = \sup_{x \in \bar{\Omega}} |F(x, u(x))| \leq M_4, \quad \forall u \in B$$

como  $\bar{\Omega} \times [-M, M]$  é um compacto temos que  $|F(x, \xi)| \leq K, \forall x \in \bar{\Omega}$

e  $\forall \xi \in [-M, M]$ . Usando o fato que  $u(x) \in [-M, M]$  podemos afirmar que

$$|F(x, u(x))| \leq M_4, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall u \in B,$$

o que implica

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |F(x, u(x))| \leq M_4, \quad \forall u \in B,$$

ou seja,

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_0 \leq M_4, \quad \forall u \in B.$$

Assim,

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha \leq M_4 + M_3, \quad \forall u \in B.$$

Consequentemente,

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha \leq M_5, \quad \forall u \in B,$$

mostrando a afirmação.

Desde que,

$$\|Tu\|_{2,\alpha} \leq K_1 \|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha$$

chegamos a seguinte desigualdade

$$\|Tu\|_{2,\alpha} \leq K_1 M_5$$

e, fazendo  $K_1 M_5 = K$  encontramos

$$\|Tu\|_{2,\alpha} \leq K, \quad \forall u \in B.$$

Portanto, de acordo com o Lema 2.11,  $T(B)$  é relativamente compacto em  $E = C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$  mostrando o item (i).

Nosso trabalho agora é mostrar o item (ii), isto é, que o operador  $T$  é contínuo. Mais precisamente, devemos mostrar que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } E \implies v_n = Tu_n \longrightarrow Tu = v \text{ em } E.$$

Para todo  $n$ , existe  $v_n \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  solução do problema

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)(v_n)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x)(v_n)_{x_i} + c(x)(v_n) = F(x, u_n(x)), & \Omega \\ v_n = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Sendo  $\{u_n\}$  limitada,  $\{v_n\}$  é limitada e usando o fato que a imersão

$$C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^2(\bar{\Omega})$$

é compacta, podemos extrair uma subsequência  $\{v_{n_k}\}$  convergente na norma  $C^2(\bar{\Omega})$  para uma função  $v \in C^2(\bar{\Omega})$ .

Por definição a norma  $C^2(\bar{\Omega})$  é dada por

$$\|v_{n_k} - v\|_{C^2} = \|v_{n_k} - v\|_0 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v_{n_k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_0 + \sum_{i,j=1}^N \left\| \frac{\partial^2 v_{n_k}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_0 \quad (2.14)$$

e segue-se da convergência, no sentido  $C^2(\overline{\Omega})$ , que

$$\|v_{n_k} - v\|_0 \rightarrow 0,$$

$$\sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial v_{n_k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_0 \rightarrow 0$$

e

$$\sum_{i,j=1}^N \left\| \frac{\partial^2 v_{n_k}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_0 \rightarrow 0.$$

Sendo assim, podemos concluir que a função  $v$  verifica o seguinte problema

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)v_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^N b_i(x)v_{x_i}(x) + c(x)v(x) = F(x, u(x)), & \Omega \\ v = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto, podemos deduzir que  $v = Tu$ , pois a solução do problema de Dirichlet é única, e desta forma

$$Tu_{n_k} \rightarrow Tu \text{ em } C^2(\overline{\Omega}).$$

Para concluir a demonstração, devemos mostrar que

$$v_n = Tu_n \rightarrow v = Tu \text{ em } C^2(\overline{\Omega}).$$

Suponhamos por contradição que o limite acima não ocorra. Então, existe  $\epsilon_0 > 0$  e  $\{v_{n_j}\} \subset \{v_n\}$  tal que

$$\|v_{n_j} - v\|_2 \geq \epsilon_0, \quad \forall n_j. \quad (2.15)$$

Usando  $\{v_{n_j}\}$  no lugar  $\{v_n\}$  na primeira parte desta demonstração, existe  $\{v_{n_{j_k}}\} \subset \{v_{n_j}\}$  tal que

$$v_{n_{j_k}} \rightarrow v = Tu \text{ em } C^2(\overline{\Omega}).$$

Assim, existe  $n_{j_0} \in \mathbb{N}$  tal que

$$\|v_{n_{j_k}} - v\|_2 < \frac{\epsilon_0}{2}, \quad \forall n_{j_k} \geq n_{j_0}, \quad (2.16)$$

o que contradiz (2.15). Portanto, devemos ter

$$v_n \rightarrow v = Tu \text{ em } C^2(\overline{\Omega}),$$

mostrando a continuidade do operador  $T$ . ■

Agora, vamos introduzir um parâmetro  $\sigma \in [0, 1]$  no problema  $(P_2)$  obtendo o seguinte problema:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)u_{x_i x_j}(x) + \sum_{i=1}^N b_i(x)u_{x_i}(x) + c(x)u(x) = \sigma F(x, u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \quad (P_3)_\sigma$$

ou seja,

$$\begin{cases} Lu = \sigma F(x, u), & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_3)_\sigma$$

Observe que o problema  $(P_2)$  é obtido fazendo  $\sigma = 1$  no problema  $(P_3)_\sigma$ . No que segue, definimos

$$\begin{aligned} T &: [0, 1] \times E \rightarrow E \\ (\sigma, u) &\mapsto T(\sigma, u) \end{aligned}$$

o operador que associa a cada par  $(\sigma, u) \in [0, 1] \times E$  a função  $v = T(\sigma, u)$ , que é a única solução do problema linear

$$\begin{cases} Lv = \sigma F(x, u), & \Omega \\ v = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_3)_{u,\sigma}$$

Usando o mesmo tipo de argumento utilizado na demonstração do Lema 2.13, podemos concluir que  $T : [0, 1] \times E \rightarrow E$  é um operador compacto. Além disso, da definição do operador  $T$ , temos que  $u_\sigma$  é uma solução do problema  $(P_3)_{u,\sigma}$  se, e somente se,  $u_\sigma$  é um ponto fixo do operador  $T(\sigma, u)$ . Note também que o operador  $T$  verifica a propriedade  $T(0, u) = 0, \forall u \in E$ , pois considerando  $\sigma = 0$  no problema  $(P_3)_{u,\sigma}$  obtemos

$$\begin{cases} Lv = 0, & \Omega \\ v = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \quad (P_v)$$

como a solução do problema  $(P_v)$  é única e  $v = 0$  é uma solução do problema acima devemos ter  $T(0, u) = 0, \forall u \in E$ .

No que segue, provaremos o Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer.

**Teorema 2.14 (Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer.)** *Seja  $S$  um operador compacto de  $[0, 1] \times E$  sobre  $E$ , ou seja,*

$$\begin{aligned} S &: [0, 1] \times E \rightarrow E \\ (\sigma, u) &\mapsto S(\sigma, u) \end{aligned}$$

com  $S(0, u) = 0 \forall u \in E$ . Se existe  $r > 0$  tal que a igualdade  $u = S(\sigma, u)$  com  $u \in E$  e  $\sigma \in [0, 1]$  implica que  $\|u\| < r$ , então  $\forall \sigma \in [0, 1]$  o operador  $S(\sigma, \cdot)$  admite um ponto fixo em  $B_r(0)$ .

**Demonstração:**

Considere a seguinte homotopia

$$H(\sigma, u) = u - S(\sigma, u), \quad \forall \sigma \in [0, 1] \text{ e } \forall u \in \overline{B_r(0)}.$$

**Afirmação:**

$$0 \notin H([0, 1] \times \partial B_r(0)).$$

A afirmação é equivalente a mostrar

$$u - S(\sigma, u) \neq 0 \quad \forall u \in \partial B_r(0) \text{ e } \forall \sigma \in [0, 1].$$

Suponhamos por absurdo que

$$0 \in H([0, 1] \times \partial B_r(0)).$$

Logo, existe  $u_0 \in \partial B_r(0)$  e  $\sigma_0 \in [0, 1]$  tal que  $H(\sigma_0, u_0) = 0$ , ou equivalentemente,

$$0 = H(\sigma_0, u_0) = u_0 - S(\sigma_0, u_0)$$

implicando

$$u_0 = S(\sigma_0, u_0).$$

Desta forma, temos um absurdo, pois sendo  $u_0 = S(\sigma_0, u_0)$  com  $u_0 \in E$  e  $\sigma_0 \in [0, 1]$  temos que  $\|u_0\| < r$ , ou seja,  $u_0 \in B_r(0)$  e assim concluímos que

$$u_0 \notin \partial B_r(0).$$

Assim

$$0 \notin H([0, 1] \times \partial B_r(0)).$$

Sendo o grau de Leray & Schauder invariante por homotopia, devemos ter  $d(H(\sigma, \cdot), B_r(0), 0)$  constante. Logo

$$d(H(0, \cdot), B_r(0), 0) = d(H(\sigma, \cdot), B_r(0), 0), \quad \forall \sigma \in [0, 1].$$

Sendo

$$H(0, u) = u - S(0, u) \text{ temos } H(0, u) = u - 0 \text{ isto é } H(0, u) = u.$$

Assim,

$$H(0, \cdot) = I$$

e, sendo

$$H(\sigma, \cdot) = I - S(\sigma, \cdot)$$

temos

$$d(I, B_r(0), 0) = d(I - S(\sigma, \cdot), B_r(0), 0).$$

Recordando que

$$d(I, B_r(0), 0) = 1,$$

concluimos que

$$d(I - S(\sigma, \cdot), B_r(0), 0) = 1 \neq 0,$$

implicando que existe  $u_\sigma \in B_r(0)$  tal que  $(I - S(\sigma, \cdot))(u_\sigma) = 0$  e assim

$$I(u_\sigma) - S(\sigma, u_\sigma) = 0,$$

e conseqüentemente,

$$u_\sigma = S(\sigma, u_\sigma).$$

Portanto,  $u_\sigma \in B_r(0)$  é um ponto fixo do operador  $S(\sigma, \cdot)$ . ■

Usando as propriedades do operador  $T$  juntamente com o Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer, temos o seguinte resultado

**Teorema 2.15** *Se existe um número  $r > 0$  tal que  $\forall \sigma \in [0, 1]$  e para toda solução  $u$  do problema  $(P_3)_\sigma$  temos a majoração à priori*

$$\|u\|_{1,\alpha} < r,$$

então para todo  $\sigma \in [0, 1]$ , existe efetivamente uma solução  $u_\sigma \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  do problema  $(P_3)_\sigma$ .

**Demonstração:** Usando a definição do operador  $T$ , segue da hipótese que existe  $r > 0$  tal que  $u = T(\sigma, u)$  e devemos ter  $\|u\|_{1,\alpha} < r$ . Uma vez que,  $T(0, u) = 0, \forall u \in E$  segue-se do Teorema do Ponto Fixo de Schaeffer que, para cada  $\sigma \in [0, 1]$  existe  $u_\sigma \in E$  tal que

$$u_\sigma = T(\sigma, u_\sigma).$$

Sendo  $T(\sigma, u_\sigma)$  solução do problema  $(P_3)_{u,\sigma}$  temos

$$\begin{cases} L(T(\sigma, u_\sigma)) = \sigma F(x, u_\sigma(x)), & \forall x \in \Omega \\ T(\sigma, u_\sigma) = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} L(u_\sigma) = \sigma F(x, u_\sigma(x)), & \forall x \in \Omega \\ u_\sigma = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

■

**Observação 2.3** *Em particular, para  $\sigma = 1$  o problema semilinear  $(P_2)$ , ou seja,*

$$(P_2) \begin{cases} Lu = F(x, u(x)), & \forall x \in \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

*admite solução.*

No que segue vamos considerar  $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$  uma função limitada.

Considere a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} Lu = \sigma F(x, u(x)), & \forall x \in \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \quad (\Upsilon)_\sigma$$

onde  $\sigma \in [0, 1]$  e  $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$  é uma função limitada em  $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ .

Vamos mostrar que esta classe de problemas verifica as condições do Teorema 2.15.

**Teorema 2.16 ( Estimativa a Priori)** *Sendo  $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$  uma função limitada em  $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ , existe  $r > 0$  tal que qualquer solução  $u$  de  $(\Upsilon)_\sigma$  verifica*

$$\|u\|_{1,\alpha} < r.$$

**Demonstração:**

Suponhamos que  $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  seja uma solução de  $(\Upsilon)_\sigma$ . Uma primeira majoração é obtida usando o Princípio de Máximo ver (2.5)

$$\|u\|_0 \leq K \|\sigma F(\cdot, u(\cdot))\|_0, \quad (2.17)$$

e a segunda estimativa segue da Estimativa de Schauder

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq K_1 \|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha. \quad (2.18)$$

Uma vez que

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha = \|F(\cdot, u(\cdot))\|_0 + H_{0,\alpha}(F(\cdot, u(\cdot))) \quad (2.19)$$

segue da limitação da  $F$  que, existe  $M_1 > 0$  tal que

$$|F(x, t)| \leq M_1, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$|F(x, u(x))| \leq M_1, \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

e assim obtemos

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_0 \leq M_1.$$

Usando a estimativa (2.17) e a última desigualdade encontramos

$$\|u\|_0 \leq K|\sigma|M_1$$

e fazendo  $K|\sigma|M_1 = M$ , concluímos que

$$\|u\|_0 \leq M, \quad \forall u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}). \quad (2.20)$$

De acordo com a desigualdade (2.19) temos que

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha \leq M_1 + H_{0,\alpha}[F(\cdot, u(\cdot))]. \quad (2.21)$$

Como a aplicação  $F$  é de classe  $C^1$  sobre  $\bar{\Omega} \times [-M, M]$ , segue do Lema 2.11 que  $F$  é Lipschitziana em  $\bar{\Omega} \times [-M, M]$  e segue-se que existe  $C > 0$  tal que

$$|F(x, \eta) - F(y, \xi)| \leq C(|x - y| + |\eta - \xi|).$$

Visto que  $u(x) \in [-M, M] \quad \forall x \in \bar{\Omega}$ , pois  $\|u\|_0 \leq M$ , obtemos

$$|F(x, u(x)) - F(y, u(y))| \leq C(|x - y| + |u(x) - u(y)|). \quad (2.22)$$

Agora, usando a definição de  $H_{0,\alpha}(u)$  temos

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq H_{0,\alpha}(u) \quad \text{com } x \neq y.$$

Fixando

$$\delta = \text{diam}(\bar{\Omega}) = \sup\{|x - y|; x, y \in \bar{\Omega}\} < \infty,$$

segue-se que

$$\frac{|F(x, u(x)) - F(y, u(y))|}{|x - y|^\alpha} \leq C(|x - y|^{1-\alpha} + H_{0,\alpha}(u)),$$

portanto,

$$\frac{|F(x, u(x)) - F(y, u(y))|}{|x - y|^\alpha} \leq C(\delta^{1-\alpha} + H_{0,\alpha}(u))$$

e assim obtemos

$$\sup_{x, y \in \bar{\Omega}} \frac{|F(x, u(x)) - F(y, u(y))|}{|x - y|^\alpha} \leq C(\delta^{1-\alpha} + H_{0,\alpha}(u)), \text{ com } x \neq y,$$

mostrando que

$$H_{0,\alpha}(F(\cdot, u(\cdot))) \leq C(\delta^{1-\alpha} + H_{0,\alpha}(u)). \quad (2.23)$$

Substituindo (2.23) em (2.21) encontramos

$$\|F(\cdot, u(\cdot))\|_\alpha \leq M_1 + C(\delta^{1-\alpha} + H_{0,\alpha}(u)). \quad (2.24)$$

Agora usando (2.24) em (2.18) obtemos

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq K_1(M_1 + C(\delta^{1-\alpha} + H_{0,\alpha}(u)))$$

implicando

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq K_1 \cdot M_1 + K_1 C \delta^{1-\alpha} + K_1 C H_{0,\alpha}(u).$$

Se  $M_2 = K_1 M_1 + K_1 C \delta^{1-\alpha}$  e  $M_3 = K_1 C$ , ficamos com

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq M_2 + M_3 H_{0,\alpha}(u). \quad (2.25)$$

**Afirmação:** Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\Psi(\epsilon) \in \mathbb{R}$  tal que,

$$H_{0,\alpha}(u) \leq \epsilon \|u\|_1 + \Psi(\epsilon) \|u\|_0, \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (2.26)$$

Assumindo por um momento a afirmação acima, segue de (2.25) que

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq M_2 + M_3(\epsilon \|u\|_1 + \Psi(\epsilon) \|u\|_0),$$

que implica

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq M_2 + M_3 \epsilon \cdot \|u\|_1 + M_3 \Psi(\epsilon) \cdot \|u\|_0. \quad (2.27)$$

Desde que,  $\|u\|_0 \leq M$  fazendo  $\epsilon = \frac{1}{2M_3}$ , obtemos

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq M_2 + \frac{1}{2} \|u\|_1 + M_3 \Psi(\epsilon) M.$$

Assim,

$$2 \cdot \|u\|_{2,\alpha} \leq 2M_2 + \|u\|_1 + 2M_3\Psi(\epsilon)M. \quad (2.28)$$

Usando a definição da norma  $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ , segue-se que

$$2\|u\|_{2,\alpha} \geq \|u\|_2 + \|u\|_1 + H_{2,\alpha}(u),$$

implicando

$$2\|u\|_{2,\alpha} \geq \|u\|_{2,\alpha} + \|u\|_1.$$

Substituindo a última desigualdade em (2.28) encontramos

$$\|u\|_{2,\alpha} + \|u\|_1 \leq 2M_2 + \|u\|_1 + 2M_3\Psi(\epsilon)M,$$

e com isso concluímos que

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq 2(M_2 + M_3\Psi(\epsilon)M).$$

Considerando  $c = 2(M_2 + M_3\Psi(\epsilon)M)$  temos que

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq c,$$

para toda  $u$  solução do problema  $(\Upsilon)_\sigma$ . Agora, usando o fato que a imersão

$$C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$$

é contínua existe  $k > 0$  tal que

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq k\|u\|_{2,\alpha},$$

implicando que

$$\|u\|_{1,\alpha} \leq kc.$$

Considerando  $r = ck + 1$  temos,

$$\|u\|_{1,\alpha} < r, \quad \forall u \in E.$$

### Demonstração de (2.26)

Por um cálculo direto temos que

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq (H_{0,1}(u))^\alpha (2\|u\|_0)^{1-\alpha},$$

que implica

$$\sup_{x,y \in \bar{\Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq (H_{0,1}(u))^\alpha (2 \cdot \|u\|_0)^{1-\alpha} \text{ com } x \neq y.$$

Portanto,

$$H_{0,\alpha}(u) \leq (H_{0,1}(u))^\alpha (2\|u\|_0)^{1-\alpha}.$$

De acordo com o Lema 2.11

$$H_{0,1}(u) \leq K(\bar{\Omega})\|u\|_1$$

e com isso,

$$H_{0,\alpha}(u) \leq (K(\bar{\Omega})\|u\|_1)^\alpha (2\|u\|_0)^{1-\alpha}.$$

Assim,

$$H_{0,\alpha}(u) \leq 2^{1-\alpha} (K(\bar{\Omega}))^\alpha \|u\|_1^\alpha \|u\|_0^{1-\alpha}. \quad (2.29)$$

Considerando  $a = (\epsilon_1 \|u\|_1)^\alpha$ ,  $b = (\epsilon_1)^{-\alpha} \|u\|_0^{1-\alpha}$  (com  $\epsilon_1 > 0$ ),  $p = \frac{1}{\alpha}$  temos que  $q = \frac{1}{1-\alpha}$ , pois  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e segue-se da desigualdade de Young (Ver [2]) que

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}.$$

Logo,

$$ab = (\epsilon_1)^\alpha \|u\|_1^\alpha (\epsilon_1)^{-\alpha} \|u\|_0^{1-\alpha} = \|u\|_1^\alpha \|u\|_0^{1-\alpha}$$

e portanto

$$\|u\|_1^\alpha \|u\|_0^{1-\alpha} \leq \frac{((\epsilon_1 \|u\|_1)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{\frac{1}{\alpha}} + \frac{((\epsilon_1)^{-\alpha} \|u\|_0^{1-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}}{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Daí,

$$\|u\|_1^\alpha \|u\|_0^{1-\alpha} \leq \alpha \epsilon_1 \|u\|_1 + (1-\alpha) \epsilon_1^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \|u\|_0$$

e obtemos

$$H_{0,\alpha}(u) \leq 2^{1-\alpha} (K(\bar{\Omega}))^\alpha (\alpha \epsilon_1 \|u\|_1 + (1-\alpha) \epsilon_1^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \|u\|_0). \quad (2.30)$$

Fixando

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2^{1-\alpha} (K(\bar{\Omega}))^\alpha \alpha},$$

temos que

$$H_{0,\alpha}(u) \leq \epsilon \|u\|_1 + \Psi(\epsilon) \|u\|_0, \quad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}) \text{ e } \forall \epsilon > 0, \quad (2.31)$$

onde

$$\Psi(\epsilon) = (1 - \alpha)2^{1-\alpha}(K(\bar{\Omega}))^\alpha \left( \frac{\epsilon}{2^{1-\alpha}(K(\bar{\Omega}))^\alpha \alpha} \right)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}.$$

mostrando a desigualdade (2.26). ■

Usando o Teorema 2.15, para cada  $\sigma \in [0, 1]$  existe  $u_\sigma$  solução do problema  $(\Upsilon)_\sigma$ , ou seja,

$$\begin{cases} L(u_\sigma) = \sigma F(x, u_\sigma(x)), & \forall x \in \Omega \\ u_\sigma = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

e desta forma podemos afirmar que vale o seguinte teorema:

**Teorema 2.17** *Seja  $F \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$  uma função limitada sobre  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ , então a equação*

$$\begin{cases} Lu = F(x, u(x)), & \forall x \in \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

*admite uma solução  $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ .*

**Observação 2.4** *A hipótese que  $F$  é limitada sobre  $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  é essencial, pois no caso unidimensional, considerando  $\Omega = (0, 2\pi)$ , e  $F(x, u) = -u + x$  o problema*

$$\begin{cases} u'' = -u + x \\ u(0) = u(2\pi) = 0, \end{cases} \quad (P_4)$$

*não admite solução.*

*De fato, temos que a solução geral para a equação  $u'' = -u + x$  é dada por*

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x.$$

*Impondo a condição  $y(0) = y(2\pi) = 0$  chegamos a uma contradição. Logo o problema  $(P_4)$  não tem solução.*

# Capítulo 3

## O Método de Galerkin e Aplicações

Neste capítulo pretendemos mostrar a existência de solução para a seguinte classe de problemas singulares

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{u^\gamma}, & \Omega \\ u > 0, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \quad (P)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  é um domínio limitado,  $N \geq 2$  e  $0 < \gamma < 1$ . O método que utilizaremos é conhecido como o **Método de Galerkin**.

### 3.1 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em.

Nesta seção demonstraremos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

**Teorema 3.1** *Seja  $f : \bar{B}_r(x) \rightarrow \bar{B}_r(x)$  com  $\bar{B}_r(x) \subset \mathbb{R}^N$  uma função contínua. Então, existe  $z \in \bar{B}_r(x)$  tal que  $f(z) = z$ , isto é,  $f$  tem um ponto fixo  $z$  em  $\bar{B}_r(x)$ .*

**Demonstração:** Vamos mostrar primeiro, o caso em que o centro  $x$  da bola é a origem. Neste caso temos  $f : \bar{B}_r(0) \rightarrow \bar{B}_r(0)$ . Defina a aplicação  $\varphi : \bar{B}_r(0) \rightarrow \mathbb{R}^N$ , dada por  $\varphi(y) = y - f(y)$  que é contínua, pois é uma diferença de funções contínuas.

Vamos supor que

$$y - f(y) \neq 0, \quad \forall y \in \partial B_r(0),$$

ou equivalentemente,

$$\varphi(y) \neq 0, \quad \forall y \in \partial B_r(0),$$

pois, caso contrário o teorema já estaria demonstrado.

Agora, defina a seguinte homotopia

$$\begin{aligned} H : \bar{B}_r(0) \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ (y, t) &\mapsto H(y, t) = y - tf(y). \end{aligned}$$

Vamos mostrar que

$$0 \notin H(\partial B_r(0) \times [0, 1]),$$

isto é,

$$H(y_0, t_0) \neq 0, \quad \forall y_0 \in \partial B_r(0) \text{ e } \forall t_0 \in [0, 1].$$

Se  $t = 1$  temos

$$H(y, 1) = y - f(y) = \varphi(y) \neq 0, \quad \forall y \in \partial B_r(0)$$

mostrando que

$$0 \notin H(\partial B_r(0) \times \{1\}).$$

Agora, vamos analisar o caso em que  $t \in [0, 1)$  e  $y \in \partial B_r(0)$ . Assim,

$$|tf(y)| = t|f(y)| \leq t.r < r = |y|$$

e com isso,

$$|tf(y)| < |y|.$$

Consequentemente,

$$tf(y) \neq y$$

donde segue-se que

$$y - tf(y) \neq 0, \quad \forall y \in \partial B_r(0) \text{ e } \forall t \in [0, 1),$$

isto é,

$$H(y, t) \neq 0, \quad \forall y \in \partial B_r(0) \text{ e } \forall t \in [0, 1),$$

ou seja,

$$0 \notin H(\partial B_r(0) \times [0, 1)).$$

Portanto,

$$0 \notin H(\partial B_r(0) \times [0, 1]).$$

Usando a propriedade que o grau topológico de Brouwer é invariante por homotopia temos

$$d(H(\cdot, t), B_r(0), 0) = \text{constante}, \quad \forall t \in [0, 1]$$

e portanto,

$$d(H(\cdot, 0), B_r(0), 0) = d(H(\cdot, 1), B_r(0), 0).$$

Daí, segue-se que

$$d(I, B_r(0), 0) = d(\varphi, B_r(0), 0).$$

Uma vez que

$$d(I, B_r(0), 0) = 1$$

temos que

$$d(\varphi, B_r(0), 0) = 1 \neq 0.$$

Agora, usando a propriedade  $(P_2)$  do grau topológico de Brouwer, existe  $y_0 \in B_r(0)$  tal que  $\varphi(y_0) = 0$ , que implica

$$y_0 - f(y_0) = 0 \text{ e com isso } y_0 = f(y_0).$$

Portanto, a aplicação  $f$  tem um ponto fixo  $y_0$  em  $\bar{B}_r(0)$ .

Vamos agora provar o caso geral, onde o centro da bola  $\bar{B}_r$  é um ponto qualquer  $x \in \mathbb{R}^N$ .

Considere a aplicação  $\varphi : \bar{B}_r(0) \rightarrow \bar{B}_r(0)$ , dada por  $\varphi(y) = f(x + y) - x$ .

A aplicação  $\varphi$  é contínua e  $\varphi(\bar{B}_r(0)) \subset \bar{B}_r(0)$ , pois

$$|\varphi(y)| = |f(x + y) - x| \leq r, \text{ isto é, } \varphi(y) \in \bar{B}_r(0).$$

Assim,  $\varphi$  tem um ponto fixo  $z \in \bar{B}_r(0)$ , ou seja,

$$\varphi(z) = z \Leftrightarrow f(x + z) - x = z \Leftrightarrow f(x + z) = x + z.$$

Denotando,

$$w = x + z \in \bar{B}_r(x)$$

concluimos que  $f(w) = w$ . Mostrando que  $f$  tem um ponto fixo em  $\bar{B}_r(x)$ . ■

## 3.2 Lema Fundamental

**Lema 3.2** *Seja  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  uma função contínua com  $\langle f(x), x \rangle \geq 0$ , para todo  $x$  verificando  $|x| = R > 0$ . Então, existe  $z_0 \in \bar{B}_r(0)$  tal que  $f(z_0) = 0$ .*

**Demonstração:** A demonstração do Lema Fundamental será feita por contradição. Considere  $f(x) \neq 0, \forall x \in \bar{B}_R(0)$ , e defina a função  $g : \bar{B}_R(0) \rightarrow \bar{B}_R(0)$  dada por

$$g(x) = \frac{-R}{|f(x)|}f(x).$$

Observe que  $g$  verifica  $g(\bar{B}_R(0)) \subset \bar{B}_R(0)$ , pois

$$|g(x)| = \left| \frac{-R}{|f(x)|}f(x) \right| = \frac{R}{|f(x)|}|f(x)| = R \text{ e com isso } g(x) \in \bar{B}_R(0).$$

Além disso,  $g$  é contínua, pois  $f$  é contínua por hipótese. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, a função  $g$  tem um ponto fixo em  $\bar{B}_R(0)$ . Seja  $x_0$  tal ponto fixo de  $g$ , isto é,  $x_0 = g(x_0)$ . Desta forma,

$$|x_0| = |g(x_0)| = R > 0.$$

Por outro lado,

$$R^2 = |x_0|^2 = \langle x_0, x_0 \rangle = \langle x_0, g(x_0) \rangle = \langle x_0, \frac{-R}{|f(x_0)|}f(x_0) \rangle = \frac{-R}{|f(x_0)|} \langle x_0, f(x_0) \rangle.$$

Desde que, por hipótese,

$$\langle x_0, f(x_0) \rangle \geq 0,$$

temos que

$$0 < R^2 = \frac{-R}{|f(x_0)|} \langle x_0, f(x_0) \rangle \leq 0,$$

que é um absurdo. Portanto, existe  $z_0 \in \bar{B}_R(0)$  tal que  $f(z_0) = 0$ . ■

### 3.3 Teorema Envolvendo Sub-Solução e Super-Solução.

Nesta seção definiremos sub-solução e super-solução para (3.1) e demonstraremos um **Teorema envolvendo Sub-Solução e Super-Solução**. Devido a Ambrosetti, Brézis & Cerami (ver [5]), o qual é crucial para mostrar a existência e unicidade do Problema Singular apresentado neste capítulo.

**Definição 3.3** Considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta v &= f(v), & \Omega \\ v &> 0, & \Omega \\ v &= 0, & \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Dizemos que uma solução  $v_1 \in C^2(\overline{\Omega})$  é uma sub-solução para o problema (3.1), se  $v_1$  satisfaz:

$$\begin{cases} -\Delta v_1 \leq f(v_1), & x \in \Omega \\ v_1 > 0, & x \in \Omega \\ v_1 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

Da mesma forma dizemos que uma solução  $v_2 \in C^2(\overline{\Omega})$  é uma super-solução para o problema (3.1), se  $v_2$  satisfaz:

$$\begin{cases} -\Delta v_2 \geq f(v_2), & x \in \Omega \\ v_2 > 0, & x \in \Omega \\ v_2 = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3)$$

**Teorema 3.4** Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e assuma que  $f(t)$  é uma função tal que  $t^{-1}f(t)$  é decrescente para  $t > 0$ . Sejam  $v_1$  e  $v_2$  satisfazendo (3.2) e (3.3). Então,  $v_2 \geq v_1$  em  $\Omega$ .

**Demonstração:**

Multiplicando (3.2) por  $-v_2$  e (3.3) por  $v_1$ , obtemos

$$v_2 \Delta v_1 \geq -v_2 f(v_1) \quad (3.4)$$

e

$$-v_1 \Delta v_2 \geq v_1 f(v_2). \quad (3.5)$$

Somando-se as desigualdades (3.4) e (3.5) encontramos

$$-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1 \geq v_1 f(v_2) - v_2 f(v_1), \quad (3.6)$$

donde segue-se que

$$-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1 \geq \left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right]. \quad (3.7)$$

Seja  $\theta(t)$  uma função suave não decrescente tal que

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 1 \\ 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Definindo para cada  $\epsilon > 0$ , a função

$$\theta_\epsilon(t) = \theta\left(\frac{t}{\epsilon}\right),$$

temos que

$$\theta_\epsilon(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De fato:

$$\theta_\epsilon(t) = \theta\left(\frac{t}{\epsilon}\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } \frac{t}{\epsilon} \geq 1 \\ 0, & \text{se } \frac{t}{\epsilon} \leq 0, \end{cases}$$

ou seja,

$$\theta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq \epsilon \\ 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Sendo  $\theta(t)$  uma função suave não decrescente segue-se que  $\theta_\epsilon(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .

Multiplicando a desigualdade (3.7) por  $\theta_\epsilon(v_1 - v_2)$  e integrando em  $\Omega$ , encontramos

$$\int_{\Omega} [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1] \theta_\epsilon(v_1 - v_2) dx \geq \int_{\Omega} \left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] \theta_\epsilon(v_1 - v_2) dx. \quad (3.8)$$

Trabalhando com o lado esquerdo da desigualdade (3.8), ou seja, com o termo

$$\int_{\Omega} [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1] \theta_\epsilon(v_1 - v_2) dx, \quad (3.9)$$

deduzimos que,

$$\int_{\Omega} [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1] \theta_\epsilon(v_1 - v_2) dx = - \int_{\Omega} [\theta_\epsilon(v_1 - v_2) v_1] \Delta v_2 dx + \int_{\Omega} [\theta_\epsilon(v_1 - v_2) v_2] \Delta v_1 dx. \quad (3.10)$$

Usando a primeira identidade de Green na primeira parcela do segundo membro da igualdade (3.10) obtemos

$$- \int_{\Omega} [\theta_\epsilon(v_1 - v_2) v_1] \Delta v_2 dx = - \left[ - \int_{\Omega} \nabla v_2 \nabla [\theta_\epsilon(v_1 - v_2) v_1] dx + \int_{\partial\Omega} [\theta_\epsilon(v_1 - v_2) v_1] \frac{\partial v_2}{\partial \eta} ds \right] \quad (3.11)$$

e sendo  $v_1 = 0$  em  $\partial\Omega$  temos que

$$-\int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_1] \Delta v_2 dx = \int_{\Omega} \nabla[\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_1] \nabla v_2 dx. \quad (3.12)$$

Calculando  $\nabla[\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_1]$  e substituindo em (3.12) encontramos

$$-\int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_1] \Delta v_2 dx = \int_{\Omega} [\nabla[\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)]v_1 + \theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)\nabla v_1] \nabla v_2 dx. \quad (3.13)$$

Pela linearidade da integral

$$-\int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_1] \Delta v_2 dx = \int_{\Omega} [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)\nabla(v_1 - v_2)]v_1 \nabla v_2 dx + \int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)]\nabla v_1 \nabla v_2 dx$$

e conseqüentemente

$$-\int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_1] \Delta v_2 dx = \int_{\Omega} [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)]v_1 \nabla v_2 dx + \int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)]\nabla v_1 \nabla v_2 dx. \quad (3.14)$$

Agora, usando a primeira identidade de Green na segunda parcela do segundo membro de (3.10) obtemos

$$\int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_2] \Delta v_1 dx = -\int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla[\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_2] dx + \int_{\partial\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_2] \frac{\partial v_1}{\partial \eta} ds.$$

Sendo  $v_2 = 0$  em  $\partial\Omega$ , temos que

$$\int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_2] \Delta v_1 dx = -\int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla[\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_2] dx. \quad (3.15)$$

Calculando  $\nabla[\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_2]$  e substituindo em (3.15) encontramos

$$\int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_2] \Delta v_1 dx = -\int_{\Omega} [\nabla[\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)]v_2 + [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)]\nabla v_2] \nabla v_1 dx.$$

Conseqüentemente,

$$\int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_2] \Delta v_1 dx = -\int_{\Omega} [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)]\nabla(v_1 - v_2)v_2 \nabla v_1 dx - \int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)]\nabla v_1 \nabla v_2 dx.$$

Usando a linearidade do gradiente obtemos

$$\int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_2] \Delta v_1 dx = -\int_{\Omega} [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2)v_2 \nabla v_1 dx - \int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)]\nabla v_1 \nabla v_2 dx. \quad (3.16)$$

Somando as igualdades (3.14) e (3.16) ficamos com

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_1] \Delta v_2 dx + \int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2) \cdot v_2] \Delta v_1 dx \\ & = \int_{\Omega} [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)] v_1 \nabla v_2 dx + \int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)] \nabla v_1 \nabla v_2 dx \\ & \quad - \int_{\Omega} [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)] (\nabla v_1 - \nabla v_2) v_2 \nabla v_1 dx - \int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)] \nabla v_1 \nabla v_2 dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_1] \Delta v_2 dx + \int_{\Omega} [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)v_2] \Delta v_1 dx \\ & = \int_{\Omega} [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)] v_1 \nabla v_2 dx - \int_{\Omega} [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)] (\nabla v_1 - \nabla v_2) v_2 \nabla v_1 dx. \quad (3.17) \end{aligned}$$

Usando novamente a linearidade da integral no lado esquerdo da igualdade (3.17) e somando e subtraindo

$$\int_{\Omega} [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)] v_1 \nabla v_1 dx$$

no lado direito da mesma encontramos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1] [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)] dx = \\ & = \int_{\Omega} [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)] v_1 \nabla v_2 dx - \int_{\Omega} [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)] v_1 \nabla v_1 dx \quad (3.18) \\ & \quad + \int_{\Omega} [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)(\nabla v_1 - \nabla v_2)] v_1 \nabla v_1 dx - \int_{\Omega} [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)] (\nabla v_1 - \nabla v_2) v_2 \nabla v_1 dx. \end{aligned}$$

Daí, segue-se que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1] [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)] dx \\ & = \int_{\Omega} v_1 [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)] (\nabla v_1 - \nabla v_2) (\nabla v_2 - \nabla v_1) dx + \int_{\Omega} (v_1 - v_2) [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)] \nabla v_1 (\nabla v_1 - \nabla v_2) dx. \quad (3.19) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1] [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)] dx \\ & = - \int_{\Omega} v_1 [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)] \|\nabla v_1 - \nabla v_2\|^2 dx + \int_{\Omega} (v_1 - v_2) [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)] \nabla v_1 (\nabla v_1 - \nabla v_2) dx. \quad (3.20) \end{aligned}$$

Observe que

$$- \int_{\Omega} v_1 [\theta'_{\epsilon}(v_1 - v_2)] \|\nabla v_1 - \nabla v_2\|^2 dx \leq 0.$$

Assim, somando a ambos os membros da desigualdade acima a expressão

$$\int_{\Omega} (v_1 - v_2)[\theta'_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx$$

obtemos

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} v_1[\theta'_\epsilon(v_1 - v_2)]|\nabla v_1 - \nabla v_2|^2 dx + \int_{\Omega} (v_1 - v_2)[\theta'_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx \\ & \leq \int_{\Omega} (v_1 - v_2)[\theta'_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade acima em (3.20) concluimos que

$$\int_{\Omega} [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \int_{\Omega} (v_1 - v_2)[\theta'_\epsilon(v_1 - v_2)]\nabla v_1(\nabla v_1 - \nabla v_2)dx.$$

Uma vez que

$$(v_1 - v_2)[\theta'_\epsilon(v_1 - v_2)](\nabla v_1 - \nabla v_2) = \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)], \quad \text{onde } \gamma_\epsilon(t) = \int_0^t s\theta'_\epsilon(s)ds \quad (3.21)$$

encontramos

$$\int_{\Omega} [-v_1\Delta v_2 + v_2\Delta v_1][\theta_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]dx. \quad (3.22)$$

Usando novamente a primeira identidade de Green no lado direito da desigualdade (3.22) obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]dx = - \int_{\Omega} \gamma_\epsilon(v_1 - v_2)\Delta v_1 dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_\epsilon(v_1 - v_2) \cdot \frac{\partial v_1}{\partial \eta} ds$$

e sendo  $v_1 - v_2 = 0$  em  $\partial\Omega$ , segue-se que  $\gamma_\epsilon(v_1 - v_2) = \gamma_\epsilon(0) = 0$ . Logo,

$$\int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]dx = \int_{\Omega} \gamma_\epsilon(v_1 - v_2)(-\Delta v_1)dx.$$

Desde que,

$$-\Delta v_1 \leq f(v_1), \forall x \in \Omega$$

pela desigualdade (3.2) concluimos que

$$\int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \int_{\Omega} \gamma_\epsilon(v_1 - v_2)f(v_1)dx. \quad (3.23)$$

Usando o fato que,  $0 \leq \gamma_\epsilon \leq \epsilon$ , segue-se de (3.23)

$$\int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla[\gamma_\epsilon(v_1 - v_2)]dx \leq \int_{\Omega} \epsilon f(v_1)dx.$$

Pela desigualdade (3.22) obtemos

$$\int_{\Omega} [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1] [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)] dx \leq \int_{\Omega} \epsilon f(v_1) dx$$

e conseqüentemente

$$\int_{\Omega} [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1] [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)] dx \leq \epsilon \int_{\Omega} f(v_1) dx.$$

Fixando  $\int_{\Omega} f(v_1) dx = M$  temos que

$$\int_{\Omega} [-v_1 \Delta v_2 + v_2 \Delta v_1] [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)] dx \leq \epsilon M.$$

Pela desigualdade (3.8) encontramos

$$\int_{\Omega} \left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)] dx \leq \epsilon M, \quad (3.24)$$

ou equivalentemente,

$$\int_{[v_1 \leq v_2]} \left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)] dx + \int_{[v_1 > v_2]} \left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)] dx \leq \epsilon M. \quad (3.25)$$

Observe que, em  $[v_1 \leq v_2]$  temos que  $\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2) \equiv 0$ . Desta forma,

$$\int_{[v_1 \leq v_2]} \left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)] dx \equiv 0.$$

Então,

$$\int_{[v_1 > v_2]} \left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)] dx \leq \epsilon M.$$

No conjunto  $[v_1 > v_2]$  temos

$$\left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)] \geq 0$$

e quando  $\epsilon \rightarrow 0$  obtemos o limite

$$\left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)] \rightarrow \left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right].$$

Definindo

$$f_{\epsilon}(x) = \left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] [\theta_{\epsilon}(v_1 - v_2)](x) \geq 0 \text{ com } \Omega = [v_1 > v_2]$$

e

$$f(x) = \left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right](x),$$

concluimos pelo **Lema de Fatou** (ver Teorema B.2) em (3.25) que

$$0 \geq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{[v_1 > v_2]} f_\epsilon(x) dx \geq \int_{[v_1 > v_2]} f(x) dx,$$

ou seja,

$$\int_{[v_1 > v_2]} \left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] dx \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{[v_1 > v_2]} \left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] [\theta_\epsilon(v_1 - v_2)] dx \leq 0.$$

Assim

$$\int_{[v_1 > v_2]} \left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] dx = 0.$$

Desde que,

$$\left[ v_1 v_2 \left( \frac{f(v_2)}{v_2} - \frac{f(v_1)}{v_1} \right) \right] > 0 \text{ em } [v_1 > v_2]$$

concluimos que

$$\text{med.}[v_1 > v_2] = 0$$

(ver o Teorema B.21). Portanto,

$$v_1 \leq v_2 \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Sendo  $v_1$  e  $v_2$  funções contínuas em  $\bar{\Omega}$ , temos que  $v_1(x) \leq v_2(x)$ ,  $\forall x \in \bar{\Omega}$ .

### 3.4 Um Problema Auxiliar

Para cada  $\epsilon > 0$  fixado, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{(\epsilon + |u|)^\gamma}, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega. \end{cases} \quad (P)_\epsilon$$

Um importante fato que temos a destacar é que cada solução clássica  $u_\epsilon$  do problema  $(P)_\epsilon$  é estritamente positiva em  $\Omega$ , isto é,

$$u_\epsilon(x) > 0, \forall x \in \Omega.$$

De fato, sendo  $u_\epsilon$  solução do problema  $(P)_\epsilon$ , temos

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon &= \frac{1}{(\epsilon + |u_\epsilon|)^\gamma}, & \Omega \\ u_\epsilon &= 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim,

$$\Delta u_\epsilon(x) < 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Conseqüentemente, a função  $u_\epsilon$  é super-harmônica e pelo Princípio do Máximo temos

$$u_\epsilon(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

pois,

$$u_\epsilon(x) \geq \min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u = 0$$

e portanto,

$$u_\epsilon(x) \geq 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

**Afirmação:**

$$u_\epsilon(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

De fato, pois caso contrário, existiria

$$x_0 \in \Omega \quad \text{tal que} \quad u_\epsilon(x_0) = 0.$$

Por outro lado,

$$u_\epsilon(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Portanto, pelo Teorema 2.6 o mínimo é atingido em  $\partial\Omega$  e com isso

$$u_\epsilon(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega .$$

Recordamos que  $u_\epsilon$  é uma solução fraca de  $(P)_\epsilon$  se  $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$  e satisfaz a seguinte igualdade

$$\int_{\Omega} \nabla u_\epsilon \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{\varphi}{(\epsilon + u_\epsilon)^\gamma} dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Vamos agora fixar algumas notações:

No que segue-se, vamos denotar por  $\beta = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots\}$  uma base Hilbertiana para  $H_0^1(\Omega)$  e fixar a notação  $\|\cdot\| : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  para a norma usual de  $H_0^1(\Omega)$ , isto é,

$$\|u\| = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para cada  $m \in \mathbb{N}$  vamos fixar

$$V_m = [e_1, e_2, e_3, \dots, e_m],$$

o subespaço de  $H_0^1(\Omega)$  gerado pelos vetores  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_m$ . Veja que, se  $v \in V_m$  temos que

$$v = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \text{ com } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Note que  $V_m$  é isomorfo ao  $\mathbb{R}^m$ , pois basta considerar a transformação linear  $F : V_m \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por  $F(v) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m)$ , onde  $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$ .

Observe que

$$\|v\| = |\alpha| \text{ com } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m).$$

Considere agora a função  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  definida por  $f(\alpha) = (f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), \dots, f_m(\alpha))$ , onde

$$f_j(\alpha) = \int_{\Omega} \nabla v \nabla e_j dx - \int_{\Omega} \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx.$$

Aqui estamos identificando o vetor  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m)$  com a função  $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i$ .

**Afirmação:**

(I)  $f$  é contínua,

(II) existe  $R > 0$  tal que  $\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq 0$ , para  $|\alpha| = R > 0$ .

**Análise de (I):**

Devemos mostrar que

$$\alpha_n \rightarrow \alpha_0 \text{ em } \mathbb{R}^m \text{ implica que } f(\alpha_n) \rightarrow f(\alpha_0) \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Para  $\alpha_n$  e  $\alpha_0$  vamos usar as funções  $v_n = \sum_{i=1}^m \alpha_{n_i} e_i$  e  $v_0 = \sum_{i=1}^m \alpha_{0_i} e_i$ , onde  $\alpha_n = (\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \alpha_{n_3}, \dots, \alpha_{n_m})$  e  $\alpha_0 = (\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2}, \alpha_{0_3}, \dots, \alpha_{0_m})$ .

Observe que  $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$  implica que  $\alpha_{n_k} \rightarrow \alpha_{0_k}$  para cada  $k$  fixado e  $v_n \rightarrow v_0$  em  $H_0^1(\Omega)$ .

De acordo com a definição de  $f_j$  temos que

$$f_j(\alpha_n) = \int_{\Omega} \nabla v_n \nabla e_j dx - \int_{\Omega} \frac{e_j}{(\epsilon + |v_n|)^\gamma} dx$$

e

$$f_j(\alpha_0) = \int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla e_j dx - \int_{\Omega} \frac{e_j}{(\epsilon + |v_0|)^\gamma} dx.$$

Desde que,

$$v_n \rightarrow v_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \quad (3.26)$$

por propriedade de produto interno

$$\langle v_n, e_j \rangle \rightarrow \langle v_0, e_j \rangle.$$

Logo

$$\int_{\Omega} \nabla v_n \nabla e_j dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla e_j dx \text{ em } \mathbb{R}. \quad (3.27)$$

Agora, vamos mostrar que

$$\int_{\Omega} \frac{e_j}{(\epsilon + |v_n|)^{\gamma}} dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{e_j}{(\epsilon + |v_0|)^{\gamma}} dx.$$

Segue de (3.26) e do fato da imersão  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  ser contínua que

$$v_n \rightarrow v_0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Assim, pelo Teorema B.7, existe uma subsequência  $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$  tal que  $\{v_{n_k}\} \subset L^2(\Omega)$  que satisfaz

$$I) v_{n_k}(x) \rightarrow v_0(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

$$II) |v_{n_k}(x)| \leq h(x), \forall k \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ com } h \in L^2(\Omega).$$

Sendo  $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$  temos que  $h \in L^1(\Omega)$ .

Definindo as funções

$$f_{n_k}(x) = \frac{e_j(x)}{(\epsilon + |v_{n_k}(x)|)^{\gamma}} \text{ e } f(x) = \frac{e_j(x)}{(\epsilon + |v_0(x)|)^{\gamma}}$$

e usando o fato que  $v_{n_k}(x) \rightarrow v_0(x)$  q.t.p. em  $\Omega$  obtemos

$$\frac{e_j(x)}{(\epsilon + |v_{n_k}(x)|)^{\gamma}} \rightarrow \frac{e_j(x)}{(\epsilon + |v_0(x)|)^{\gamma}} \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

ou seja,

$$f_{n_k}(x) \rightarrow f(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Veja que, sendo

$$\frac{|e_j(x)|}{(\epsilon + |v_{n_k}(x)|)^{\gamma}} \leq \frac{|e_j(x)|}{\epsilon^{\gamma}}.$$

Por outro lado,

$$\left| \frac{e_j(x)}{(\epsilon + |v_{n_k}(x)|)^\gamma} \right| = \frac{|e_j(x)|}{(\epsilon + |v_{n_k}(x)|)^\gamma} \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma} |e_j(x)| = h(x), \quad \forall k.$$

Assim,

$$|f_{n_k}(x)| \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma} |e_j(x)| = h(x), \quad \forall k.$$

Logo,

$$\frac{1}{\epsilon^\gamma} |e_j| = h \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluímos que

$$\int_{\Omega} \frac{e_j}{(\epsilon + |v_{n_k}|)^\gamma} dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{e_j}{(\epsilon + |v_0|)^\gamma} dx. \quad (3.28)$$

Desde que a convergência em (3.27) é válida para toda sequência  $\{v_n\}$ , a mesma também se verifica para a subsequência  $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$ . Logo, de (3.27) e (3.28) obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla v_{n_k} \nabla e_j dx - \int_{\Omega} \frac{e_j}{(\epsilon + |v_{n_k}|)^\gamma} dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla v_0 \nabla e_j dx - \int_{\Omega} \frac{e_j}{(\epsilon + |v_0|)^\gamma} dx,$$

isto é,

$$f_j(\alpha_{n_k}) \rightarrow f_j(\alpha_0), \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots, m$$

e desta forma

$$f(\alpha_{n_k}) \rightarrow f(\alpha_0) \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Para concluirmos a demonstração do item (I), devemos mostrar que

$$f(\alpha_n) \rightarrow f(\alpha_0) \text{ em } \mathbb{R}^m. \quad (3.29)$$

Suponhamos por contradição que o limite em (3.29) não ocorre, então existe  $\epsilon_0 > 0$  e  $\{f(\alpha_{n_j})\} \subset \{f(\alpha_n)\}$  tal que

$$|f(\alpha_{n_j}) - f(\alpha_n)|_{\mathbb{R}^m} \geq \epsilon_0, \quad \forall n_j. \quad (3.30)$$

Usando  $\{f(\alpha_{n_j})\}$  no lugar de  $\{f(\alpha_n)\}$ , na primeira parte da demonstração, existe  $\{f(\alpha_{n_{j_p}})\} \subset \{f(\alpha_{n_j})\}$  tal que

$$f(\alpha_{n_{j_p}}) \rightarrow f(\alpha_0) \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Assim, existe  $n_{j_0} \in \mathbb{N}$  tal que

$$|f(\alpha_{n_{j_p}}) - f(\alpha_0)| < \frac{\epsilon_0}{2}, \quad \forall n_{j_p} \geq n_{j_0},$$

que é um absurdo com (3.30). Portanto, devemos ter

$$f(\alpha_n) \rightarrow f(\alpha_0) \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Mostrando assim, a continuidade da função  $f$  em  $\mathbb{R}^m$ .

**Análise de (II):**

Observe que

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle = f_1(\alpha)\alpha_1 + f_2(\alpha)\alpha_2 + f_3(\alpha)\alpha_3 + \dots + f_m(\alpha)\alpha_m,$$

ou seja,

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle = \sum_{i=1}^m f_i(\alpha)\alpha_i.$$

Portanto

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle = \sum_{j=1}^m \alpha_j \left[ \int_{\Omega} \nabla v \nabla e_j dx - \int_{\Omega} \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx \right]$$

implicando

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle = \sum_{j=1}^m \left[ \alpha_j \int_{\Omega} \nabla v \nabla e_j dx - \alpha_j \int_{\Omega} \frac{e_j}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx \right]$$

com isso,

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle = \|v\|^2 - \int_{\Omega} \frac{v}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx.$$

Sendo

$$- \int_{\Omega} \frac{|v|}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx \geq -\frac{1}{\epsilon^\gamma} \int_{\Omega} |v| dx,$$

temos

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq \|v\|^2 - \frac{1}{\epsilon^\gamma} \int_{\Omega} |v| dx$$

mostrando que

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq \|v\|^2 - \frac{1}{\epsilon^\gamma} \|v\|_{L^1(\Omega)}. \quad (3.31)$$

Usando o fato que a imersão de Sobolev  $H_0^1(\Omega)$  em  $L^1(\Omega)$  é contínua, temos que

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} \leq c_1 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \quad (3.32)$$

Fazendo a substituição de (3.32) em (3.31), temos que

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq \|v\|^2 - \frac{c_1}{\epsilon^\gamma} \|v\|. \quad (3.33)$$

Temos por (3.33) que  $\|v\| = |\alpha|$ , logo

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq |\alpha|^2 - c_\epsilon |\alpha|, \text{ onde } c_\epsilon = \frac{c_1}{\epsilon^\gamma}.$$

Fixando  $R > 0$  tal que

$$R^2 - c_\epsilon R > 0$$

concluimos que

$$\langle f(\alpha), \alpha \rangle \geq 0, \quad \text{para } |\alpha| = R.$$

Provando desta forma o item (II).

Portanto, pelo Lema Fundamental, existe  $z_m \in \mathbb{R}^m$  tal que  $f(z_m) = 0$  e  $|z_m| \leq R$ .

Logo,

$$f_j(z_m) = 0, \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots, m,$$

isto é,

$$\int_{\Omega} \nabla v_m \nabla e_j dx - \int_{\Omega} \frac{e_j}{(\epsilon + |v_m|)^\gamma} dx = 0, \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots, m, \quad \forall e_j \in V_m, \quad (3.34)$$

$$\text{com } z_m = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_m), \quad v_m = \sum_{i=1}^m \eta_i e_i \quad \text{e } \|v_m\| = |z_m| \leq R.$$

É imediato observar que de (3.34) temos a igualdade

$$\int_{\Omega} \nabla v_m \nabla \psi dx - \int_{\Omega} \frac{\psi}{(\epsilon + |v_m|)^\gamma} dx = 0, \quad \forall \psi \in V_m, \quad \|v_m\| \leq R.$$

Fixando

$$\Phi \in H_0^1(\Omega) \quad \text{temos que } \Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i,$$

com

$$\|\Phi\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty.$$

Desde que

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$$

temos que

$$\Phi = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i.$$

Considerando

$$\Psi_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \in V_m,$$

concluimos que

$$\Phi = \lim_{m \rightarrow \infty} \Psi_m \quad \text{em } H_0^1(\Omega).$$

Observe que  $V_m \subseteq V_k$ , para  $m \leq k$ . No que segue, vamos fixar  $m$  e considerar  $k > m$ .

Assim,

$$\int_{\Omega} \nabla v_k \nabla \Psi_m dx - \int_{\Omega} \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_k|)^\gamma} dx = 0, \quad \forall k > m, \quad \text{pois } \Psi_m \in V_k. \quad (3.35)$$

Passando ao limite quando  $k \rightarrow \infty$  na igualdade (3.35) e usando os limites

$$\int_{\Omega} \nabla v_k \nabla \Psi_m dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla v \nabla \Psi_m dx \quad (3.36)$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_k|)^\gamma} dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx, \quad (3.37)$$

obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \Psi_m dx - \int_{\Omega} \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (3.38)$$

**Vamos provar a convergência (3.36).**

Temos que  $H_0^1(\Omega)$  é um espaço reflexivo, pois é um espaço de Hilbert, toda sequência limitada  $\{v_k\} \subseteq H_0^1(\Omega)$  admite uma subsequência  $\{v_{k_j}\} \subseteq \{v_k\}$  que converge fraco  $v$  em  $H_0^1(\Omega)$ . Em símbolos,

$$v_{k_j} \rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Considerando a aplicação

$$\begin{aligned} F &: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto F(w) = \int_{\Omega} \nabla w \nabla \Psi_m dx \end{aligned}$$

temos que,  $F \in (H_0^1(\Omega))'$ . De acordo com a definição de convergência fraca temos

$$F(v_{k_j}) \rightarrow F(v) \text{ em } \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \nabla v_{k_j} \nabla \Psi_m dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla v \nabla \Psi_m dx \text{ em } \mathbb{R}. \quad (3.39)$$

**Vamos provar a convergência (3.37).**

Defina as seguintes aplicações

$$f_{k_j}(x) = \frac{\Psi_m(x)}{(\epsilon + |v_{k_j}(x)|)^\gamma} \text{ e } f(x) = \frac{\Psi_m(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma}.$$

Sendo  $H_0^1(\Omega)$  reflexivo e  $\{v_k\}$  limitada em  $H_0^1(\Omega)$ , existem uma subsequência  $\{v_{k_j}\} \subset \{v_k\}$  e  $v \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$v_{k_j} \rightharpoonup v \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Desde que, a imersão  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$  é compacta temos que

$$v_{k_j} \rightarrow v \text{ em } L^2(\Omega).$$

Assim, existe uma subsequência  $\{v_{k_{j_p}}\} \subset L^2(\Omega)$  tal que  $\{v_{k_{j_p}}\} \subset \{v_{k_j}\}$  e satisfaz:

$$I) v_{k_{j_p}}(x) \rightarrow v(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

$$II) |v_{k_{j_p}}(x)| \leq h(x), \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ com } h \in L^2(\Omega).$$

Sendo  $\Omega$  um domínio limitado tem-se  $h \in L^1(\Omega)$ .

Logo,

$$\frac{\Psi_m(x)}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}(x)|)^\gamma} \rightarrow \frac{\Psi_m(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma} \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

ou seja,

$$f_{k_{j_p}}(x) \rightarrow f(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Veja que

$$|f_{k_{j_p}}(x)| = \left| \frac{\Psi_m(x)}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}(x)|)^\gamma} \right| = \frac{|\Psi_m(x)|}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}(x)|)^\gamma}.$$

Sendo

$$\frac{|\Psi_m(x)|}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}(x)|)^\gamma} \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma} |\Psi_m(x)|,$$

encontramos

$$|f_{k_{j_p}}(x)| \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma} |\Psi_m(x)| = g(x).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Ver Teorema B.1) concluímos que

$$\int_{\Omega} \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}|)^\gamma} dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx. \quad (3.40)$$

Desde que, a igualdade (3.37) é válida para toda sequência  $\{v_k\}$ , em particular vale para a subsequência  $\{v_{k_{j_p}}\} \subset \{v_{k_j}\}$ , ou seja,

$$\int_{\Omega} \nabla v_{k_{j_p}} \nabla \Psi_m dx - \int_{\Omega} \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v_{k_{j_p}}|)^\gamma} dx = 0. \quad (3.41)$$

Portanto, passando ao limite quando  $k_{j_p} \rightarrow \infty$  na igualdade (3.41) e, usando os limites (3.39) e (3.40) obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \Psi_m dx - \int_{\Omega} \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (3.42)$$

Isto mostra, a igualdade (3.38).

Agora, passando ao limite quando  $m \rightarrow \infty$  na igualdade (3.42) e usando os limites

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \Psi_m dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla v \nabla \Phi dx \quad (3.43)$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{\Psi_m}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\Phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx, \quad (3.44)$$

obtemos a igualdade

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \Phi dx - \int_{\Omega} \frac{\Phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx = 0, \forall \Phi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.45)$$

**Prova da convergência (3.43).**

Temos que  $\Psi_m \rightarrow \Phi$  em  $H_0^1(\Omega)$ , que implica

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \Psi_m dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla v \nabla \Phi dx.$$

**Prova da convergência (3.44).**

Desde que

$$\Psi_m \rightarrow \Phi \text{ em } H_0^1(\Omega),$$

então

$$\Psi_m \rightarrow \Phi \text{ em } L^2(\Omega).$$

Em consequência disso, existe uma subsequência  $\{\Psi_{m_j}\} \subset L^2(\Omega)$  tal que  $\{\Psi_{m_j}\} \subset \{\Psi_m\}$  e verifica:

$$(I) \Psi_{m_j}(x) \rightarrow \Phi(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

$$(II) |\Psi_{m_j}(x)| \leq h(x), \forall j \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ com } h \in L^2(\Omega).$$

Sendo  $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ , então  $h \in L^1(\Omega)$ . Definindo

$$f_{m_j}(x) = \frac{\Psi_{m_j}(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma} \text{ e } f(x) = \frac{\Phi(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma}$$

e tendo em vista que

$$\Psi_{m_j}(x) \rightarrow \Phi(x) \text{ q.t.p. em } \Omega$$

temos que

$$\frac{\Psi_{m_j}(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma} \rightarrow \frac{\Phi(x)}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma} \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

isto é,

$$f_{m_j}(x) \rightarrow f(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Desde que

$$|\Psi_{m_j}(x)| \leq h(x) \text{ q.t.p. em } \Omega \quad \forall m_j \in \mathbb{N},$$

temos que

$$\frac{|\Psi_{m_j}(x)|}{(\epsilon + |v(x)|)^\gamma} \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma} |\Psi_{m_j}(x)| \leq \frac{1}{\epsilon^\gamma} h(x), \quad \forall m_j.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluímos que

$$\lim_{m_j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_{m_j}(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \frac{\Psi_{m_j}}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\Phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx. \quad (3.46)$$

Visto que a igualdade (3.43) é válida para toda sequência  $\{\Psi_m\}$ , também é verdadeira para uma subsequência  $\{\Psi_{m_j}\} \subset \{\Psi_m\}$ , ou seja,

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \Psi_{m_j} dx - \int_{\Omega} \frac{\Psi_{m_j}}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx = 0, \quad \forall m_j \in \mathbb{N}. \quad (3.47)$$

Passando ao limite quando  $m_j \rightarrow \infty$  em (3.47) e usando os limites (3.43) e (3.46) obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \Phi dx - \int_{\Omega} \frac{\Phi}{(\epsilon + |v|)^\gamma} dx = 0, \quad \forall \Phi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.48)$$

Portanto, a função  $v$  é uma solução fraca do problema  $(P)_\epsilon$ , isto é,

$$(P)_\epsilon \begin{cases} -\Delta v &= \frac{1}{(\epsilon + |v|)^\gamma}, & \Omega \\ v &> 0, & \Omega \\ v &= 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Mostramos assim, que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$(P)_\epsilon \begin{cases} -\Delta u_\epsilon &= \frac{1}{(\epsilon + u_\epsilon)^\gamma}, & \Omega \\ u_\epsilon &> 0, & \Omega \\ u_\epsilon &= 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

No que segue-se, vamos considerar  $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ ,  $u_{\epsilon_n} = u_n$  e trabalhar com o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u_n = \frac{1}{(\frac{1}{n} + u_n)^\gamma}, & \Omega \\ u_n > 0, & \Omega \\ u_n = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Pela teoria da regularidade ver ([1]) é possível mostrar que

$$u_n \in C^2(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega).$$

Segue da definição de solução fraca que

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \Phi dx = \int_{\Omega} \frac{\Phi}{(\frac{1}{n} + u_n)^\gamma} dx, \quad \forall \Phi \in H_0^1(\Omega).$$

Escolhendo  $\Phi = u_n$  deduzimos que

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla u_n dx = \int_{\Omega} \frac{u_n}{(\frac{1}{n} + u_n)^\gamma} dx,$$

e portanto,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx = \int_{\Omega} \frac{u_n}{(\frac{1}{n} + u_n)^\gamma} dx.$$

Consequentemente,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 \leq \int_{\Omega} u_n^{1-\gamma} dx \quad (3.49)$$

e assim,

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq |\Omega|^\gamma \|u_n\|_{L^1(\Omega)}^{1-\gamma}. \quad (3.50)$$

Usando o fato que a imersão de Sobolev  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$  é contínua, existe  $c > 0$  tal que

$$\|u_n\|^2 \leq c \|u_n\|^{1-\gamma}.$$

Disso concluímos que existe um  $k > 0$  satisfazendo  $\|u_n\| \leq k$ , mostrando que  $u_n$  é limitada.

Sendo  $H_0^1(\Omega)$  reflexivo, existe uma subsequência  $\{u_{n_j}\} \subset \{u_n\}$  e  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

e

$$u_{n_j}(x) \rightarrow u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Denotando  $u_{n_j} = v_j$ , segue-se que

$$\begin{cases} -\Delta v_j = \frac{1}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma}, & \Omega \\ v_j > 0, & \Omega \\ v_j = 0, & \partial\Omega, \end{cases}$$

e portanto,

$$\begin{cases} -\Delta(v_j + \frac{1}{n_j}) = \frac{1}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma}, & \Omega \\ v_j > 0, & \Omega \\ v_j = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Definindo

$$\Psi_j = v_j + \frac{1}{n_j}$$

tem-se que

$$\begin{cases} -\Delta\Psi_j = \frac{1}{\Psi_j^\gamma}, & \Omega \\ \Psi_j > 0, & \Omega \\ \Psi_j > 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando o Teorema 3.4,

$$\Psi_j(x) \geq \varphi_1(x), \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (3.51)$$

onde  $\varphi_1$  é uma autofunção positiva de  $-\Delta$  em  $H_0^1(\Omega)$  associada ao primeiro autovalor  $\lambda_1$ .

De acordo com a desigualdade (3.51) temos que

$$v_j(x) + \frac{1}{n_j} \geq \varphi_1(x), \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (3.52)$$

Logo, passando ao limite quando  $j \rightarrow \infty$ , na desigualdade (3.52), obtemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left( v_j(x) + \frac{1}{n_j} \right) \geq \lim_{n_j \rightarrow \infty} \varphi_1(x)$$

ou seja,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} v_j(x) + \lim_{n_j \rightarrow \infty} \frac{1}{n_j} \geq \varphi_1(x).$$

Assim,

$$u(x) \geq \varphi_1(x) > 0 \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \quad (3.53)$$

Portanto,  $med(\{x \in \Omega; u(x) = 0\}) = 0$ .

Segue da definição de solução fraca que

$$\int_{\Omega} \nabla v_j \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{\varphi}{(\frac{1}{n} + v_j)^\gamma} dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.54)$$

Logo passando ao limite quando  $j \rightarrow \infty$ , na igualdade (3.54), e usando os limites

$$\int_{\Omega} \nabla v_j \nabla \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx \quad (3.55)$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{\varphi}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma} dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\varphi}{u^\gamma} dx \quad (3.56)$$

obtemos a igualdade,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{\varphi}{u^\gamma} dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.57)$$

**Prova da convergência (3.55).**

Desde que

$$v_j \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega)$$

pela análise feita anteriormente temos que

$$\int_{\Omega} \nabla v_j \nabla \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx \text{ em } \mathbb{R}.$$

**Prova da convergência (3.56).**

Sendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , um aberto limitado do  $\mathbb{R}^N$  com fronteira suave e sendo  $K \subset \Omega$  o suporte de  $\varphi$  temos a igualdade

$$\int_{\Omega} \frac{\varphi}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma} dx = \int_K \frac{\varphi}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma} dx.$$

Desde que,

$$\Psi_j(x) = v_j(x) + \frac{1}{n_j} \geq \varphi_1(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega$$

vale a desigualdade,

$$\left| \frac{\varphi}{(v_j + \frac{1}{n_j})^\gamma} \right| = \frac{|\varphi|}{(v_j + \frac{1}{n_j})^\gamma} \leq \frac{|\varphi|}{\varphi_1^\gamma}, \quad \forall j.$$

Sendo  $\varphi_1$  uma autofunção positiva associada a  $\lambda_1$  temos que  $\varphi_1 \in C(\overline{\Omega})$  (ver [8]).

Assim, existe  $z \in K$  tal que

$$m_0 = \varphi_1(z) = \min_{x \in K} \varphi_1(x).$$

Logo, por definição de mínimo temos que

$$\varphi_1(x) \geq m_0, \quad \forall x \in K.$$

Portanto,

$$\left| \frac{\varphi}{(v_j + \frac{1}{n_j})^\gamma} \right| \leq \frac{|\varphi|}{m_0^\gamma} = h \in L^1(K).$$

Além disso,

$$\frac{\varphi(x)}{(v_j(x) + \frac{1}{n_j})^\gamma} \rightarrow \frac{\varphi(x)}{u(x)^\gamma}, \quad q.t.p. \text{ em } K.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluímos que

$$\int_{\Omega} \frac{\varphi}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma} dx = \int_K \frac{\varphi}{(\frac{1}{n_j} + v_j)^\gamma} dx \rightarrow \int_K \frac{\varphi}{u^\gamma} dx = \int_{\Omega} \frac{\varphi}{u^\gamma} dx,$$

justificando assim a igualdade (3.57), ou seja,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{\varphi}{u^\gamma} dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (3.58)$$

Desde que,

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}},$$

dada  $\Psi \in H_0^1(\Omega)$ , existe uma sequência  $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$  tal que

$$\|\varphi_n - \Psi\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

**Afirmção:** Dada  $\Psi \in H_0^1(\Omega)$  temos que

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \Psi dx = \int_{\Omega} \frac{\Psi}{u^\gamma} dx, \quad (3.59)$$

isto é,  $u$  é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{u^\gamma}, & \Omega \\ u > 0, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega. \end{cases}$$

De fato, fixado  $\Psi \in H_0^1(\Omega)$  considere  $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$  com

$$\|\varphi_n - \Psi\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Segue da igualdade (3.58)

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi_n dx = \int_{\Omega} \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.60)$$

Passando ao limite quando  $n \rightarrow \infty$  na igualdade (3.60) e usando os limites

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi_n dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla \Psi dx \quad (3.61)$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\Psi}{u^\gamma} dx \quad (3.62)$$

encontramos

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \Psi dx = \int_{\Omega} \frac{\Psi}{u^\gamma} dx, \forall \Psi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.63)$$

Vamos provar (3.62).

Veja que,

$$\left| \int_{\Omega} \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx - \int_{\Omega} \frac{\Psi}{u^\gamma} dx \right| = \left| \int_{\Omega} \frac{\varphi_n - \Psi}{u^\gamma} dx \right| \leq \int_{\Omega} \frac{|\varphi_n - \Psi|}{u^\gamma} dx.$$

Sendo

$$u(x) \geq \varphi_1(x) > 0, \forall x \in \bar{\Omega},$$

conforme (3.53) encontramos

$$\left| \int_{\Omega} \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx - \int_{\Omega} \frac{\Psi}{u^\gamma} dx \right| \leq \int_{\Omega} \frac{|\varphi_n - \Psi|}{\varphi_1^\gamma} dx. \quad (3.64)$$

Tendo em vista que,  $|\varphi_n - \Psi| \in H_0^1(\Omega)$ , segue da desigualdade de **Hardy-Sobolev** (ver Teorema B.6) que existe um  $c > 0$  tal que

$$\left| \int_{\Omega} \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx - \int_{\Omega} \frac{\Psi}{u^\gamma} dx \right| \leq c \| |\varphi_n - \Psi| \| = c \| \varphi_n - \Psi \| \rightarrow 0 \quad (3.65)$$

e portanto,

$$\int_{\Omega} \frac{\varphi_n}{u^\gamma} dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{\Psi}{u^\gamma} dx. \quad (3.66)$$

Provando desta forma, a afirmação, ou seja,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \Psi dx = \int_{\Omega} \frac{\Psi}{u^\gamma} dx, \forall \Psi \in H_0^1(\Omega) \quad (3.67)$$

e mostrando a existência de solução fraca para o **problema singular (P)**.

### 3.4.1 Unicidade de Solução para o Problema Singular

Suponha que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{u^\gamma}, & \Omega \\ u > 0, & \Omega \\ u = 0, & \partial\Omega \end{cases} \quad (P)$$

tenha duas soluções  $u_1$  e  $u_2$ . Vamos mostrar que  $u_1 \equiv u_2$  em  $\Omega$ . Por hipótese temos que  $u_1$  e  $u_2$  são soluções do problema (P), assim  $u_1$  e  $u_2$  satisfazem

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \frac{\varphi}{u_1^\gamma} dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad (3.68)$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla u_2 \nabla \Psi dx = \int_{\Omega} \frac{\Psi}{u_2^\gamma} dx, \quad \forall \Psi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.69)$$

Fixando

$$\varphi = \Psi = u_1 - u_2$$

obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla (u_1 - u_2) dx = \int_{\Omega} \frac{(u_1 - u_2)}{u_1^\gamma} dx \quad (3.70)$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla u_2 \nabla (u_1 - u_2) dx = \int_{\Omega} \frac{(u_1 - u_2)}{u_2^\gamma} dx. \quad (3.71)$$

Portanto

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla (u_1 - u_2) dx - \int_{\Omega} \nabla u_2 \nabla (u_1 - u_2) dx = \int_{\Omega} \frac{(u_1 - u_2)}{u_1^\gamma} dx - \int_{\Omega} \frac{(u_1 - u_2)}{u_2^\gamma} dx, \quad (3.72)$$

e com isso,

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{u_1^\gamma} - \frac{1}{u_2^\gamma} \right] (u_1 - u_2) dx. \quad (3.73)$$

Desde que,

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx = \|u_1 - u_2\|^2$$

segue-se da igualdade (3.73)

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{u_1^\gamma} - \frac{1}{u_2^\gamma} \right] (u_1 - u_2) dx. \quad (3.74)$$

Observando agora que vale a desigualdade

$$\left[ \frac{1}{u_1^\gamma} - \frac{1}{u_2^\gamma} \right] (u_1 - u_2) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.75)$$

segue-se de (3.74) que

$$\|u_1 - u_2\|^2 = 0.$$

Portanto,

$$u_1 \equiv u_2.$$

### 3.4.2 Regularidade da Solução.

Considerando a função

$$\begin{aligned} f : (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t) = \frac{1}{t^\gamma}, \end{aligned}$$

observamos que, para cada  $K \subset \mathbb{R}^N$  compacto,

$$0 < f(u(x)) = \frac{1}{(u(x))^\gamma} \leq \frac{1}{(\varphi_1(x))^\gamma} \leq \frac{1}{(m_0)^\gamma} = c_k, \text{ q.t.p. em } K,$$

pois

$$u(x) \geq \varphi_1(x) \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } m_0 = \min_{x \in K} \varphi_1(x).$$

Usando o Teorema da Regularidade (ver Teorema B.20), temos que  $u \in C^2(\Omega)$  e

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{1}{u^\gamma}, & \Omega \\ u > 0, & \Omega. \end{cases}$$

# Apêndice A

## Resultados de Análise em $\mathbb{R}^N$ .

Neste apêndice vamos recordar algumas definições e enunciar os principais resultados de Análise no  $\mathbb{R}^N$  que foram utilizados nesta dissertação.

**Teorema A.1** (Teorema da Mudança de Variáveis)(Ver[19]) *Sejam  $h : U \rightarrow V$  um difeomorfismo de classe  $C^1$  entre os abertos  $U, V \in \mathbb{R}^m$ ,  $X \subset U$  um compacto  $J$ -mensurável e  $f : h(X) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Então,  $f \circ h : X \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável e*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x))|deth'(x)|dx.$$

**Teorema A.2** (Teorema da Aplicação Inversa)(Ver[19]) *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Se  $a \in U$  é tal que  $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é invertível, então existe uma bola aberta  $B = B(a, \delta) \subset U$  tal que a restrição  $f|_B$  é um difeomorfismo sobre um aberto  $V \ni f(a)$ .*

**Teorema A.3** (Teorema de Weirstrass)(Ver[19]) *Toda sequência limitada em  $\mathbb{R}^N$  possui uma subsequência convergente.*

**Teorema A.4** (Teorema de Borel-Lebesgue)(Ver[19]) *Seja  $K \subset \mathbb{R}^N$  um compacto (isto é, limitado e fechado). Toda cobertura aberta de  $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$  admite uma subcobertura finita  $K \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \dots \cup A_{\lambda_i}$ .*

**Teorema A.5** (Ver[19]) *Se  $K \subset \mathbb{R}^N$  é um conjunto compacto e  $F \subset \mathbb{R}^N$  é um conjunto fechado, então existem  $x_0 \in K$  e  $y_0 \in F$  tais que  $d(K, F) = |x_0 - y_0|$ . Em particular, se  $K \cap F = \emptyset$ , então  $d(K, F) > 0$ .*

**Teorema A.6** (Ver[17]) *Seja  $f : [a, a+h] \rightarrow \mathbb{R}^N$  um caminho com derivada integrável. Então,*

$$f(a+h) - f(a) = \int_a^{a+h} f'(t)dt = h \int_0^1 f'(a+th)dt.$$

**Teorema A.7** (Teorema do Valor Médio)(Ver[19]) *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  um caminho contínuo, diferenciável no intervalo aberto  $(a, b)$ . Se  $|f'(t)| \leq M$  para todo  $t \in (a, b)$ , então*

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

**Teorema A.8** (Desigualdade do Valor Médio)(Ver[19]) *Dado  $U \subset \mathbb{R}^m$  um aberto, seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$  diferenciável em cada ponto do segmento de reta aberto  $(a, a+v)$  e tal que sua restrição ao segmento fechado  $[a, a+v] \subset U$  seja contínua. Se  $|f'(x)| \leq M$  para todo  $x \in (a, a+v)$  então,  $|f(a+v) - f(a)| \leq M|v|$ .*

**Teorema A.9** (Ver[19]) *Toda aplicação contínua  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^N$ , definida num compacto  $K \subset \mathbb{R}^m$  é uniformemente contínua.*

**Teorema A.10** (Ver[19]) *Seja  $f : X \times K \rightarrow \mathbb{R}^N$  contínua, onde  $K$  é compacto. Fixemos  $x_0 \in X$ . Para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in X$ ,  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x, \alpha) - f(x_0, \alpha)| < \epsilon$ , seja qual for  $\alpha \in K$ .*

**Teorema A.11** (Teorema de Aproximação de Weierstrass)(Ver[18]) *Dada uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , existe uma sequência de polinômios  $p_n$  tais que  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = f$  uniformemente em  $[a, b]$ .*

**Teorema A.12** (Teorema de Extensão de Tietze)(Ver[18]) *Dada uma função real contínua  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , definida num subconjunto fechado de  $X \subset \mathbb{R}^m$ , existe uma função  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que  $F|_X = f$ .*

**Teorema A.13** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) (Ver[19]) *Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^N$  tem-se  $|\langle x, y \rangle| \leq |x||y|$ . Vale a igualdade se, e somente se, um dos vetores  $x, y$  é um múltiplo escalar do outro.*

**Lema A.14** (Teorema da Divergência.)(Ver[13]) *Sejam  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um domínio cuja fronteira  $(\partial\Omega)$  é uma união finita de curvas suaves. Seja  $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$  um campo vetorial de classe  $C^1$  em  $\bar{\Omega}$ . Então,*

$$\int_{\bar{\Omega}} \nabla \cdot F dx dy = \int_{\partial\Omega} F \cdot \eta dS,$$

onde  $\eta$  é a normal externa unitária à  $\partial\Omega$ .

**Teorema A.15** (As Identidades de Green)(Ver[13]) *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  um domínio onde vale o teorema da divergência e sejam  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ . Então valem as seguintes identidades:*

$$\int_{\bar{\Omega}} (v\Delta u + \nabla v \nabla u) dx dy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \eta} ds, \quad (\text{A.1})$$

e

$$\int_{\bar{\Omega}} (v\Delta u - u\Delta v) dx dy = \int_{\partial\Omega} (v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta}) ds, \quad (\text{A.2})$$

onde  $\frac{\partial}{\partial \eta}$  é a derivada direcional na direção da normal unitária externa  $\hat{n}$ .

**Teorema A.16** (Ver[16]) *Seja  $X$  um espaço vetorial normado e  $(x_n) \subset X$ . Então,*

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \text{dada } (x_{n_j}) \subset (x_n), \exists (x_{n_{j_k}}) \subset (x_{n_j}) \text{ com } x_{n_{j_k}} \rightarrow x.$$

**Lema A.17** (Ver[5]) *Seja  $X$  um espaço de Banach e  $\Phi : B_2(0) \rightarrow X$ , dada por  $\Phi(x) = x + \Psi(x)$ , onde  $\Psi$  é  $\alpha$ - uma contração ( $0 \leq \alpha < 1$ ) e verifica  $\Psi(0) = 0$ . Então,*

(i)  $\Phi(B_r(0)) \supset B_{r(1-\alpha)}(0)$ .

(ii)  $\Phi$  é injetiva.

**Lema A.18** (Ver[5]) *Seja  $\Omega$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^N$  e  $v \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  com suporte compacto. Se  $\varphi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^N)$  e  $\text{supt}v \cap \varphi(\partial\Omega) = \emptyset$ , então existe  $u \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  tal que  $\text{supt}u \subset \Omega$  e  $\text{div}u(x) = J_\varphi(x)\text{div}(v(\varphi(x)))$ .*

**Lema A.19** (Ver[5]) *Seja  $f \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  com suporte  $K$  compacto e seja  $\gamma \in C([0, 1], \mathbb{R}^N)$ . Se  $\overline{\text{conv}K} - \gamma(t) \subset \Theta, \forall t \in [0, 1]$ , onde  $\Theta$  é um aberto limitado do  $\mathbb{R}^N$  fixado, tem-se que  $f(x + \gamma(0)) - f(x + \gamma(1)) = \text{div}v(x)$ , onde  $v \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  com  $\text{supt}v \subset \Theta$ .*

# Apêndice B

## Resultados sobre os Espaços de Sobolev e Teoria da Medida e Integração

Neste apêndice vamos apresentar alguns resultados dos Espaços de Sobolev e Teoria da Medida e Integração que foram utilizados nesta dissertação.

**Teorema B.1** (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)(Ver[6]) *Seja  $\{f_n\}$  uma sequência de funções integráveis, as quais convergem em quase toda parte para uma função mensurável  $f$  a valores reais. Se existe uma função integrável  $g$  tal que  $|f_n| \leq g \forall n$ , então  $f$  é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

**Teorema B.2** (Lema de Fatou)(Ver[6]) *Seja  $(f_n) \subset M^+(X, \chi)$ , então*

$$\int (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

**Definição B.3** (Ver[6]) *Se  $m^*$  é a medida exterior definida para todos os subconjuntos de  $\mathbb{R}^N$ , então a  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{L}$  de subconjuntos de  $\mathbb{R}^N$  que satisfaz a condição de Carathéodory, isto é,*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \forall A \subseteq \mathbb{R}^N$$

*é chamada a  $\sigma$ -álgebra de Lebesgue de  $\mathbb{R}^N$ . A restrição  $m$ , de  $m^*$  ao conjunto  $\mathfrak{L}$  é chamada medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^N$ .*

**Teorema B.4** (Desigualdade de Hölder)(Ver[6]) *Seja  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^q(\Omega)$ , onde  $p \geq 1$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então,  $fg \in L^1(\Omega)$  e  $\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$ .*

**Teorema B.5** (Desigualdade de Young)(Ver[6]) Considere  $p$  e  $q$  satisfazendo  $1 < p < \infty$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Se  $a, b$  são números reais não negativos, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (\text{B.1})$$

a igualdade só ocorre se, e somente se,  $a^p = b^q$ .

**Teorema B.6** (Desigualdade de Hardy-Sobolev)(Ver[10] pág 55) Se  $u \in H_0^1(\Omega)$ , então  $\frac{u}{\varphi_1^\tau} \in L^q(\Omega)$ , onde  $q^{-1} = 2^{-1} - (1 - \tau)N^{-1}$  com  $0 \leq \tau \leq 1$ , e existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$\left\| \frac{u}{\varphi_1^\tau} \right\|_{L^q(\Omega)} \leq c \cdot \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

onde  $\varphi_1$  é uma autofunção positiva de  $-\Delta$  em  $H_0^1(\Omega)$  associada ao primeiro autovalor  $\lambda_1$ .

**Teorema B.7** (Ver[8]) Seja  $\{f_n\}$  uma sequência em  $L^p(\Omega)$  e  $f \in L^p(\Omega)$ , tais que  $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ . Então, existe uma subsequência  $\{f_{n_k}\}$  tal que

(I)  $f_{n_k} \rightarrow f(x)$  q.t.p. em  $\Omega$

(II)  $|f_{n_k}| \leq h(x)$  q.t.p. em  $\Omega$ ,  $\forall k$ , com  $h \in L^p$ .

**Definição B.8** (Ver[8])(Convergência Forte) Seja  $X$  um espaço vetorial normado e  $\{x_n\} \subset X$ . Dizemos que  $x_n$  converge forte em  $X$  se existe  $x \in X$  com  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Neste caso,  $x$  é o limite de  $x_n$  em  $X$ .

**Definição B.9** (Ver[8])(Convergência Fraca) Seja  $X$  um espaço vetorial normado e  $x_n \in X$ . Dizemos que  $x_n$  converge fraco em  $X$ , se existe  $x \in X$  verificando:

$$\forall f \in X'; f(x_n) \rightarrow f(x) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Neste caso,  $x$  é chamado o limite fraco de  $x_n$  em  $X$ , e denotamos por  $x_n \rightharpoonup x$ .

**Teorema B.10** (Ver[8]) Seja  $\{x_n\}$  uma sequência fracamente convergente num espaço vetorial normado, isto é, existe  $x \in X$  tal que

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } X.$$

Então;

a) O limite fraco  $x$  de  $\{x_n\}$  é único,

b) Toda subsequência  $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$  converge para  $x$ ,

c) A sequência  $\{x_n\}$  é limitada.

**Teorema B.11** (Ver[8]) *Seja  $X$  um espaço de Banach reflexivo e seja  $\{x_n\}$  uma sequência limitada. Então, existe  $\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$  que converge fracamente em  $X$ , isto é, existe  $x \in X$  tal que*

$$x_{n_j} \rightharpoonup x \text{ em } X.$$

**Definição B.12** (Ver[8]) *(Convergência Fraca -  $\star$ ) Dizemos que  $\{f_n\} \subset X'$  converge fraco -  $\star$ , se existir  $f \in X'$  tal que*

$$\forall x \in X; f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Notação:  $f_n \xrightarrow{\star} f$  em  $X'$ .

**Teorema B.13** (Ver[8]) *Seja  $\{f_n\} \subset X'$ . Então;*

- i)  $f_n \rightarrow f$  em  $X'$   $\Rightarrow$   $f_n \rightharpoonup f$  em  $X'$
- ii)  $f_n \rightharpoonup f$  em  $X'$   $\Rightarrow$   $f_n \xrightarrow{\star} f$  em  $X'$ .
- iii)  $f_n \xrightarrow{\star} f$  em  $X'$ , então  $\|f_n\|$  limitada e  $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$ .
- iv) Se  $f_n \xrightarrow{\star} f$  e  $x_n \rightarrow x$ , então  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  em  $\mathbb{R}$ .

**Definição B.14** *(Imersão Contínua)(Ver[2]) Dizemos que o espaço normado  $(X, \|\cdot\|_X)$  está imerso continuamente no espaço  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  e escrevemos  $X \hookrightarrow Y$  se:*

- i)  $X$  for subespaço vetorial de  $Y$ ,
- ii) A aplicação identidade

$$\begin{aligned} i : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto i(x) = x \end{aligned}$$

é contínua, isto é, existe  $M > 0$  tal que  $\|i(x)\|_Y \leq M\|x\|_X, \forall x \in X$ .

**Teorema B.15** *(Imersões de Sobolev)(Ver[2]) As seguintes imersões são contínuas:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^s(\Omega) & ; \quad 1 \leq s \leq 2^* = \frac{2N}{N-2} \quad \text{para } N \geq 3 \\ L^s(\Omega) & ; \quad 1 \leq s < \infty \quad \text{para } N = 1 \text{ ou } N = 2. \end{cases}$$

**Definição B.16** *(Operador Linear Compacto)(Ver[16]) Um operador linear  $T : X \rightarrow Y$  é dito compacto, se toda sequência limitada  $\{x_n\} \subset X$  é levada em uma sequência  $(y_n = T(x_n))$  que admite uma subsequência convergente em  $Y$ .*

**Definição B.17** *(Imersão Compacta)(Ver[2]) Dizemos que o espaço normado  $(X, \|\cdot\|_X)$  está imerso compactamente no espaço  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  e escrevemos  $X \hookrightarrow Y$  se:*

$$\begin{aligned} i : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto i(x) = x \end{aligned}$$

é um operador linear compacto.

**Teorema B.18** (Teorema da Imersão Compacta de Rellich-Kondrachov)(Ver[2]) Sendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , as seguintes imersões são compactas:

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^s(\Omega) & ; \quad 1 \leq s < 2^* = \frac{2N}{N-2} \quad \text{para } N \geq 3 \\ L^s(\Omega) & ; \quad 1 \leq s < \infty \quad \text{para } N = 1 \quad \text{ou } N = 2. \end{cases}$$

**Teorema B.19** (Desigualdade de Poincaré)(Ver[2]) Seja  $\Omega$  um aberto limitado de  $\mathbb{R}^N$ . Então existe uma constante  $C = C(\Omega, p)$  tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \cdot \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ com } 1 \leq p < \infty.$$

**Teorema B.20** (Teorema de Regularidade (Ver[1])) Seja  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  uma função de classe  $C^\infty((0, \infty), (0, \infty))$ . Se  $u \in H_0^1(\Omega)$  é uma função positiva q.t.p. em  $\Omega$ , que verifica

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega} f(u) \cdot \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

e para cada  $K \subset\subset \Omega$ , existe  $c_k > 0$  tal que

$$|f(u(x))| \leq c_k \text{ q.t.p. em } K$$

então,

$$u \in C^2(\Omega).$$

**Teorema B.21** (Ver[6]) Se  $f \geq 0$  e  $\int_{\Omega} f d\mu = 0$  para  $f \neq 0$ , então  $\text{med}(\Omega) = 0$ .

**Definição B.22** (Ver[9]).(Domínio de Classe  $C^{m,\alpha}$ )

O conjunto  $\Omega$  é dito um domínio de classe  $C^{m,\alpha}$  quando existir uma cobertura aberta  $\{U_j\}_j^q$  de  $\partial\Omega$  e funções bijetivas  $\phi_j : \bar{U}_j \rightarrow \bar{B}$  onde  $B = \{y \in \mathbb{R}^N : |y| < 1\}$ , tais que:

(i) para cada  $j$ ,  $\phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B : y_n > 0\}$ ,

(ii)  $\|\phi_j\|_{m,\alpha}, \|\phi_j^{-1}\|_{m,\alpha} \leq M, \forall j$ .

**Teorema B.23** (Ver[9]) Suponha que  $\Omega$  satisfaça a propriedade da poligonal, isto é, existe  $\delta > 0$  tal que quaisquer dois pontos  $x$  e  $y$  de  $\Omega$  podem ser ligados por uma poligonal em  $\Omega$  de comprimento  $L \leq \delta \|x - y\|$ . Então, para  $0 \leq s < r$ , a imersão  $C^r(\bar{\Omega}) \hookrightarrow C^s(\bar{\Omega})$ . é compacta

**Teorema B.24** (Ver[9]) Todo domínio de classe  $C^{m,\alpha}$ ,  $m > 0$ , satisfaz a propriedade da poligonal.

# Bibliografia

- [1] Agmon S., *The  $L^p$  Approach to the Dirichlet Problem*, *Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa* 13, 405-408, (1959).
- [2] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [3] Alves C.O. and de Figueiredo D.G., *Nonvariational elliptic systems via Galerkin Methods, Function Spaces, Differential Operator and Nonlinear Analysis.*, The Hans Triebel Anniversary volume, Birkhouser (2003), 47-57.
- [4] Alves C.O. , Francisco J.S.A. Corrêa, José V.A. Gonçalves, *Existence of Solutions for some Classes of Singular Hamiltonian Systems.*, University of Texas at San Antonio, USA, Advanced Nonlinear Studies, volume 5, Number 2, May 2005.
- [5] A. Ambrosetti, H. Brézis e G. Cerami, *Combined Effects of Concave and Convex Nonlinear in Some Elliptic Problems*, *Journal of Functional Analysis*, 122, 519-543, (1994).
- [6] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1995.
- [7] Berestycki, *Methodes Topologiques et Problemes Aux limites non lineares (Tese de Doutorado de Berestycki)*, *Soutenue*, These de Docteur, França, 1975.
- [8] Brézis, Haïm, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983.
- [9] Bers, Jonh, Schechter, *Partial Differential Equations, Lectures on Applied Math*, vol.III(Intercience).
- [10] Evans, Laurence C., *Partial Differential Equations Vol. 19*, American Mathematical Society, U.S.A., 1949.
- [11] de Figueiredo, Djairo G., *Equações Elípticas Não Lineares, 11º Colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

- [12] de Figueiredo, Djairo G., *Positive Solution of Semilinear Elliptic Problems*, Programa Brasil-México, IME-Universidade de São Paulo, São Paulo, 29/06/81 à 17/07/81.
- [13] Gilbarg, David e Trudinger Neil S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, *Classics in Mathematics*, Springer, 3ª Edição, New York, 2001.
- [14] Holanda, Ângelo Roncalli Furtado, *Existência de Soluções Positivas Para uma Classe de Equações Elípticas*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2000.
- [15] Iório Jr., Rafael José Iório, Valéria Iório, *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, CNPq-IMPA, Rio de Janeiro, 1988.
- [16] Kreyszig, Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library Edition Published, New York, 1989.
- [17] Kesavan, S., *Nonlinear Functional Analysis: A First Course*, Narosa Publishing House, 1999.
- [18] Lima, Elon L., *Curso de Análise Vol. 1 (10ª Edição)*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.
- [19] Lima, Elon L., *Análise Real Vol. 2 Coleção Matemática Universitária*, IMPA, Rio de Janeiro, 2004 .
- [20] Lima, Elon L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, CNPq . Rio de Janeiro, 1977.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)