JOÃO PEREIRA DA SILVA NETO

# UM ESTUDO SOBRE O ENSINO DE LIMITE:

## UM TRATAMENTO COMPUTACIONAL COM APLICAÇÕES

MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PUC/SP

SÃO PAULO

2006

**JOÃO PEREIRA DA SILVA NETO**

# UM ESTUDO SOBRE O ENSINO DE LIMITE:

## UM TRATAMENTO COMPUTACIONAL COM APLICAÇÕES

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo como exigência parcial para obtenção do título de Mestre Profissional em Ensino de Matemática, sob a orientação da **Professora Doutora Célia Maria Carolino Pires**.

**PUC/SP**

**SÃO PAULO**

**2006**

**Banca Examinadora**

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

**Assinatura:** ________________________________________ **Local e Data:** ______________

# AGRADECIMENTOS

Agradeço a *Jeová Deus*, pelas bênçãos concedidas.

À minha família, esposa *Beatriz* e filhos *Adriano* e *Rodrigo*, pelo apoio e colaboração para a realização deste trabalho.

Aos *Colegas do Mestrado*, em especial *Irineu* e *Elpídio*, pelo companheirismo e contribuições para o engrandecimento do curso.

À *Coordenação do Programa*, *Professores* e *Funcionários*, pela dedicação e esforço para implantação e consolidação deste mestrado.

Aos Professores *Dra. Janete Bolite Frant* e *Dr. Jairo Araújo*, membros da banca, pelas sugestões e comentários edificantes apresentados na qualificação.

À Professora *Dra. Célia Maria Carolino Pires*, pelo carinho com que me acolheu como orientando, pelo acompanhamento e dedicação na condução do trabalho, polindo as informações apresentadas e sugerindo pontos primordiais para a realização deste trabalho.

*O Autor*

# RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar uma proposta de exploração do conceito de limite para alunos de cursos de licenciatura em matemática. Busca-se um tratamento que evidencie a importância desse conceito dentro da matemática e que mostre sua aplicação em outras áreas do conhecimento. Utilizando a tecnologia, criaremos ambientes que possam favorecer o ensino e a aprendizagem em sala de aula. Utilizamos os softwares Graphmatica, Cabri Géomètre e Excel como ferramentas auxiliares na preparação do material didático. O material preparado foi oferecido a alguns professores que lecionam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, para que o utilizem e o avaliem. Fundamentamos nossas escolhas nas idéias de Vygotsky e Ausubel. Esperamos contribuir com o processo de ensino-aprendizagem de limites, estimulando a reflexão sobre a utilização de recursos didáticos tecnológicos adequados.

**Palavras-chave**: conceito de limite, ensino e aprendizagem, uso de tecnologias.

# ABSTRACT

The objective of the present work is to analyse a proposal of exploration about the limit, concept for students in courses of licentiateship in Mathematics, searching for a way that points up the importance of this concept into the Mathematics and showing its application in other areas of knowledge. Using the technology, we could create ambients capable of helping teaching-learning in classroom. We will use the softwares Graphmatica, Cabri Géomètre and Excel as auxiliaries instruments in preparation of the didactic material. The preparation of the material was offered to some teachers that teach the discipline Differential and Integral I Calculation, to be used and tested. Our choices are based on of Vygotsky end Ausubel ideas. We hope to contribute to teaching-learning process of limits, stimulating the reflection about the correct utilization of technology and didactics researches.

**Key-words**: concept of limits, education and learning, use of technologies.

# LISTA DE FIGURAS

**Figura 1.** Paradoxo de Aquiles e a tartaruga ............................................................ 24

**Figura 2.** Dicotomia de um segmento ........................................................................ 25

**Figura 3.** Método da exaustão (círculo inscrito e circunscrito por quadrados) .......... 26

**Figura 4.** Método da exaustão (círculo inscrito e circunscrito por vários polígonos) .. 27

**Figura 5.** Divisão do cone em n partes ...................................................................... 29

**Figura 6.** Cálculo do volume do cone ........................................................................ 29

**Figura 7.** Utilização do ambiente inteligente ............................................................. 47

**Figura 8.** Arquitetura do ambiente inteligente ........................................................... 48

**Figura 9.** Esquema do ambiente colaborativo .......................................................... 49

# LISTA DE QUADROS

**Quadro 1.** Áreas de polígonos inscritos e circunscritos ao círculo ............................ 28
**Quadro 2.** Dificuldades mais freqüentes no ensino de limite indicadas pelos professores ........................................................................................ 52
**Quadro 3.** Livros utilizados pelos professores para o ensino de limite ...................... 53
**Quadro 4.** Recursos didáticos utilizados pelos professores para o ensino de limite .. 54
**Quadro 5.** Respostas dos alunos referentes a consulta de colegas ou professor na resolução das atividades ..................................................................... 59
**Quadro 6.** Valores atribuídos pelos alunos às dificuldades encontradas para resolverem as atividades propostas .......................................................... 59
**Quadro 7.** Valores atribuídos pelos alunos às dificuldades encontradas para o entendimento dos assuntos abordados .................................................... 60
**Quadro 8.** Valores atribuídos pelos alunos para cada um dos recursos utilizados no desenvolvimento das atividades .......................................................... 61
**Quadro 9.** Valores atribuídos pelos alunos ao material didático utilizado no Minicurso ......................................................................................... 61

# SUMÁRIO

**1 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA** ............................................................. 11
1.1 Introdução ............................................................................................ 11
1.2 Uma breve revisão sobre pesquisas referentes ao ensino de limite ...... 12
1.3 Questão de pesquisa ............................................................................ 18
1.4 Procedimentos metodológicos .............................................................. 19

**2 ESTUDOS HISTÓRICOS, TEÓRICOS E METODOLÓGICOS E PRIMEIRAS EXPLORAÇÕES DE CAMPO** ................................................ 22
2.1 Alguns aspectos históricos da noção de limite ..................................... 22
2.2 Alguns estudos no campo da aprendizagem: Vygotsky e Ausubel ........ 35
2.3 Investigações no campo do uso de recursos tecnológicos no ensino .... 43

**3 EXPLORAÇÃO DA PESQUISA DE CAMPO** ............................................. 50
3.1 Impressões dos primeiros contatos com professores ............................ 50
3.1.1 Sobre as dificuldades mais freqüentes ......................................... 52
3.1.2 Sobre os livros utilizados para o ensino de limite .......................... 53
3.1.3 Sobre recursos didáticos utilizados para o ensino de limite .......... 53
3.1.4 Sobre o uso de algum software para o ensino de limite ................ 54
3.2 Formulando propostas de Atividades .................................. 55
3.2.1 Apresentação da Aula 1 ................................................................ 56
3.2.2 Apresentação da Aula 2 ................................................................ 57
3.2.3 Apresentação da Aula 3 ................................................................ 57

**4 OPINIÕES DE ALUNOS E PROFESSORES SOBRE AS PROPOSTAS DE ATIVIDADES FORMULADAS** ............................................................. 58
4.1 Opiniões dos 12 alunos que participaram do mini-curso ........................ 58
4.2 Opiniões de três professores que analisaram o material ........................ 62

**5 CONSIDERAÇÕES FINAIS** .......................................................................... 65

**6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS** ............................................................ 68

**7 ANEXOS** ............................................................................................... 74
ANEXO A: Atividades elaboradas ................................................................. 74
ANEXO B: Questionários utilizados na pesquisa de campo ........................ 121

# 1 APRESENTAÇÃO

## 1.1 Introdução

Em nossa atuação como docente da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, vivenciamos dificuldades, tanto para ensinar como para aprender conceitos e procedimentos relativos a essa disciplina. Essas dificuldades são reiteradas por muitos depoimentos de alunos e professores.

Muitos desses depoimentos eram específicos sobre as dificuldades relativas ao ensino e à aprendizagem do conceito e do significado de limite, reforçando a idéia freqüente de que o estudo de limites serve apenas como pré-requisito para as definições de derivada e integral. As formas de trabalho também sempre nos trouxeram insatisfação, seguindo o mesmo tratamento adotado por livros didáticos, ou seja, centrado na definição de conceitos, dificultando ao aluno conferir-lhes significados e aplicações. As listas de exercícios e as atividades de aprendizagem propostas para as aulas de Cálculo Diferencial e Integral são bastante desalentadoras.

Durante o curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, tive contato com vários estudos e pesquisas sobre a Educação Matemática ligados ao uso de novas tecnologias, resolução de problemas, aspectos cognitivos da aprendizagem, entre outros. Chamou-nos atenção especial o grande avanço tecnológico e a necessidade de repensar nossas práticas em sala de aula, buscando estimular recursos tecnológicos como forma de estimular processos em que alunos sejam vistos como principais protagonistas de sua aprendizagem.

## 1.2 Uma breve revisão sobre pesquisas referentes ao ensino de limite

O ponto de partida do desenvolvimento de nosso trabalho foi a busca de teses, dissertações e artigos que pudessem servir de referência às nossas reflexões e ao desenvolvimento das atividades para a sala de aula.

Barufi (1999), em sua tese de doutorado "A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral", discute o papel do professor na sala de aula, tendo como potencial aliado o computador como instrumento facilitador, que abre novos horizontes, possibilitando o estabelecimento de múltiplas relações e a negociação de significados.

A leitura do artigo "Ensino Aprendizagem do Conceito de Limite", de J. C. David Vieira (1999), do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, foi muito importante para nosso trabalho. Esse autor salienta que as dificuldades relativas ao ensino e à aprendizagem do conceito de limite são há muito conhecidas. Pondera que as tentativas de simplificações, por vezes abusivas, de conceitos tão delicados, arriscam-se a gerar polêmica.

Vieira comenta que, após a leitura de Williams, S., Models of Limit Held by College Calculus Students, J. for Research Math-Ed (1999), iniciou um trabalho, ainda inacabado, para detectar as primeiras dificuldades dos alunos na compreensão do conceito de limite. O estudo abrangeu algumas centenas de alunos de Análise Matemática II (2º semestre do 1º ano) das licenciaturas de Ciências e Tecnologia da Universidade de Aveiro. Foram igualmente inquiridos alunos dos 3º e 5º anos das licenciaturas em Matemática. O questionário – base do trabalho – continha várias respostas de definição de limite de uma função real num ponto, respostas estas que seguiam de perto o percurso histórico da evolução do conceito de limite.

As respostas foram referentes à seguinte pergunta:

"Diga em poucas palavras o que entende por limite, ou seja, explique o que significa para si a expressão ”o limite de uma função f, quando $x \to t$ é um número L".

Vieira registra algumas das respostas que permitem ver confusões conceituais, dificuldades de expressão escrita e grande confusão na manipulação de expressões simbólicas.

- *Para mim a expressão referida diz-me o número para o qual a função se dirige (tende) sem o atingir; fiquei confuso!!! se atinge ou não.*
- *Nunca ninguém me perguntou isto e nunca me tinha apercebido das dúvidas que poderia ter sobre limites. Realmente senti-me confuso (...). Quando o limite dá $\infty$, existe ou não o limite? o limite tem de ser um valor?*
- *Os $\varepsilon\varepsilon$ e $\delta\delta$ é que é uma complicação; só sei isto com as sucessões.*

- *Limite de uma função num ponto é o valor que essa função admite numa vizinhança desse ponto. [Muitas respostas deste tipo]*

- *Limite de uma função é um ponto extremo do seu contradomínio quando o x tende para um extremo do seu domínio.*

- *Limite é o valor de y mais alto ou mais baixo (sic) quando se vai tomando valores de t.*

- *Limite é o número máximo que uma função pode ter quando* $x \to t$.

- *Quando uma determinada função tende para um determinado domínio, essa função terá significado até ao número determinado. Atingindo aí o seu máximo. Por vezes uma determinada função nunca chega a ter limite, o caso quando* $L = \infty$ .

- *Uma função tem por limite um número L, quando é limitada arbitrariamente por valores de x.*

- *Limite é o valor que uma função não pode ultrapassar.*

- $\lim\limits_{x \to t} (f(x)) = L$ significa que a derivada da função f(x) no ponto t tem o valor de L.

- Limite é algo que é atingido no fim, algo propriamente definido pela função de $x \to t$.

- *O limite é o número mais próximo de t que está definido pela função f.*

- *O limite é uma vizinhança de um ponto.*

Vieira mostra também algumas definições simbólicas apresentadas:

- $\forall n > 0 \exists p \in N : n > p : | U_n - L | < \delta$
- $\exists p \in N \quad \forall a \geq 0 : p \geq n \Rightarrow | a - U_n | < L$
- $\forall \delta > 0 \ \exists p \in N : | U_n - p | < \delta$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists p > 0 \ \forall n > p : | \lim U_n - p | < \varepsilon$
- $\forall \delta > 0 \ \exists n \in N : n > p \Rightarrow | U_n - \delta | < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists p > 0 : n > p \Rightarrow | f(x) - \varepsilon | < L$
- $\forall h \in \Re^+ \ \exists p \in N \ \ h > p \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon$
- $\forall \delta > 0 \ \ \exists x \in N : n > p \Rightarrow | \lim - \delta | < L$
- $\exists p \ \forall x \in \delta p - \delta < L < p + \delta$

Em seu artigo, o autor faz uma análise da literatura usual do ensino secundário e do 1º ano universitário e destaca:

- Os inúmeros conceitos, - limite inferior, limite superior, ínfimo, supremo, mínimo, máximo, limite segundo Heine, limite segundo Cauchy, limites de sucessões, limites de funções, limites infinitos e limites de funções num ponto de acumulação ou num ponto aderente. O pouco tempo para assimilação e o fato de praticamente só serem avaliadas capacidades de cálculo podem servir para uma primeira explicação do fenômeno.

- Quanto à literatura: Sebastião e Silva, Dias Agudo, N. Bourbaki, L. Schwarz, E. Lages de Lima, G. Choquet, S. Guerreiro, R. Bartle e A. Machado, entre outros, penso não serem de grande ajuda para alunos e mesmo para muitos professores, devido à apresentação aparentemente díspar. Só em R. Bartle e A. Machado se fala direta e explicitamente em duas definições não equivalentes: uma que "ignora" o que se passa no ponto em que se pretende definir limite e outra que considera o que se passa em tal ponto; basicamente, situações em que se considera o limite num ponto de acumulação ou num ponto aderente.

Saraiva (2000), em sua dissertação de mestrado “Novas tecnologias no ensino do conceito de limite de função”, avalia os ganhos pedagógicos que se podem obter no ensino de limites utilizando instrumentos tecnológicos. Conclui que a utilização de ferramentas informatizadas aliadas a procedimentos históricos relacionados com os conceitos de integral e derivada e, conseqüentemente com o de limite, possibilitou a organização de uma seqüência didática de modo a explorar idéias relacionadas às noções que auxiliam na conceituação de limite.

A partir do momento em que o aluno detiver o conceito, a introdução da definição de limite, as técnicas para o cálculo e os demais conceitos dos cálculos a ele relacionados poderiam ser trabalhados de forma mais eficaz.

Sua proposta final foi a de que é preciso elaborar novas formas para a introdução e/ou para o desenvolvimento inicial do conceito de limite de função.

Melo (2002), em sua dissertação de mestrado “Conceitos de integral: uma proposta computacional para o ensino e aprendizagem”, mostra que o professor de cálculo pode ter uma reflexão sobre a possibilidade de desenvolver um ensino mais significativo e contextualizado. Desta forma, espera que seu trabalho possa contribuir para uma mudança expressiva e permanente do processo ensino-aprendizagem do cálculo utilizando o computador como ferramenta, transformando o aluno em um agente ativo de sua aprendizagem e o professor assumindo uma postura de facilitador da aprendizagem.

Barto (2004), em sua dissertação de Mestrado, “Um olhar sobre as idéias matemáticas em um curso de cálculo: a produção de significados para a continuidade”, pesquisa a dinâmica da produção de significados para a continuidade de função de uma variável real, mostrando que o papel da tecnologia neste cenário deve ser mais investigado.

Sua pesquisa incentiva os professores de Matemática a direcionarem seu olhar aos conhecimentos dos alunos e que possam provocar modificações nas suas produções de significados para os conteúdos de matemática. Sugere que a aula seja feita numa linguagem mais acessível, tornando mais participativa a presença do aluno, melhorando, desta forma, o aproveitamento da aprendizagem.

Zuchi (2005) destaca que as dificuldades relativas ao ensino e aprendizagem do cálculo são, freqüentemente, objetos de pesquisa em nível nacional e internacional e que essas pesquisas abordam o problema sob diversas perspectivas e em vários contextos, oferecendo elementos que permitam a análise das dificuldades detectadas.

Essa pesquisadora realizou um estudo sobre as dificuldades de ensino-aprendizagem do conceito de limite e propôs alternativas para minimizá-las. Ela apoiou-se na “Teoria de Situação”, proposta por Brousseau, e utilizou os recursos da Inteligência Artificial (Tutoriais). Um dos objetivos desses tutoriais é criar condições favoráveis à construção, pelo aluno, de conhecimentos aceitáveis referentes a um objeto de ensino, assegurando-lhe feedback permanentes. Para Zuchi, desenvolver uma seqüência didática em um sistema tutorial inteligente pode constituir uma ferramenta em potencial para o ensino-aprendizagem do conceito de limite.

## 1.3 Questão de pesquisa

Freqüentemente nos perguntamos ou ouvimos colegas perguntarem:

- Por que o assunto de limite é citado como o fundamental do cálculo, mas não é dado um tratamento com aplicações da mesma forma como é dado ao estudo de derivadas e integrais, que apresentam nos livros uma infinidade de aplicações? fato que podemos constatar na bibliografia sugerida pelos professores.

- O licenciado em matemática será um futuro professor de matemática nos cursos de Administração, Economia, Engenharia, etc. Será que ele estará bem preparado para expor a idéia de limite a estes alunos? Lembrando que os próprios alunos de licenciatura já criam uma barreira para a compreensão do assunto.

Nosso trabalho pretende acrescentar mais dados aos estudos sobre o uso de recursos tecnológicos como ferramenta auxiliar para o ensino de Cálculo, particularmente ao conceito de limite.

Estudando alternativas para o ensino de limite, o presente trabalho pretende desenvolver um cenário de ensino de limites para o curso de Licenciatura em Matemática, explorando possibilidades oferecidas pelos softwares Graphmatica, Cabri Géomètre e Excel como ferramentas auxiliares, dando significado a conceitos teóricos, por meio de exemplos aplicativos em diversas áreas do conhecimento. Construindo e aplicando ferramentas adequadas e metodologias que favoreçam a construção do conceito de limite, nossa intenção é a de responder à seguinte questão:

- *Buscando elaborar atividades que possam dar significado à aprendizagem da idéia de limite e fazendo uso de softwares como ferramenta auxiliar, é possível melhorar o envolvimento dos alunos na aprendizagem desse conceito?*

## 1.4 Procedimentos metodológicos

No desenvolvimento de nosso trabalho, utilizamos inicialmente a pesquisa bibliográfica para levantamento de dados históricos do conceito de limites e para o repertório de pesquisas sobre o ensino desse conceito, apresentado anteriormente.

Na seqüência, por meio de questionários, levantamos as opiniões de dez professores de Cálculo Diferencial e Integral, que lecionam em cinco instituições, sendo duas públicas (4 professores) e três particulares (6 professores). O objetivo desse procedimento metodológico foi o de identificar bibliografias e recursos que são utilizados por eles em suas aulas, em particular para o ensino de limite.

Concluída essa etapa, passamos a elaborar uma seqüência de atividades (Anexo A) que pudesse facilitar a compreensão do conceito de limite e ajudar professores na preparação de suas aulas utilizando softwares e sua exposição em ambientes informatizados ou em locais que oferecem poucos recursos didáticos (muitas vezes limitados ao quadro, giz e retroprojetor). Utilizamos os softwares Graphmatica, Cabri e Excel, onde podem ser conseguidas informações de utilização, respectivamente, via internet pelos sites: www.somatematica.com.br, www.cabri.com.br e http://mars.fis.uc.pt/~helmut/aulas/ea/apontamentos/manual excel.pdf.

No segundo semestre de 2005, testamos as atividades elaboradas num minicurso em que trabalhamos com uma turma de 12 alunos de uma instituição particular de ensino superior e que estavam cursando o 2° semestre de Licenciatura em Matemática. Por meio de um diagnóstico preliminar, constatamos que não possuíam conhecimento sobre o assunto de limites, sabiam usar computadores, mas apenas dois deles sabiam utilizar o software Graphmatica.

O minicurso foi realizado em cinco encontros em um laboratório de informática, sendo que cada aluno fez uso individual do computador, não havendo restrição de iteração entre os mesmos. No primeiro encontro foi feita uma apresentação do software Graphmatica para familiarização de suas funções básicas de operações. Os demais encontros foram destinados efetivamente à aplicação das atividades.

Ao término do minicurso, os alunos responderam a um questionário que tinha como finalidade identificar suas opiniões a respeito da proposta desenvolvida.

Três professores de Cálculo, que participaram das aulas do minicurso como monitores e observadores, foram convidados a apresentar suas críticas e sugestões.

Procuramos estar atentos ao maior número possível de elementos presentes na situação estudada, sabendo que aspectos triviais e aparentemente sem importância, podem estar carregados de significados. Focalizamos opiniões de professores e alunos em função de suas experiências em sala de aula. Realizando esse estudo, fomos construindo conhecimentos que nos permitiram observar vários aspectos da questão que queremos investigar. Embora tenha partido de um quadro de referências teóricas sobre o ensino e a aprendizagem de limites, aspectos novos e importantes emergiram durante nossas investigações com os alunos e os professores.

# 2 ESTUDOS HISTÓRICOS, TEÓRICOS E METODOLÓGICOS E PRIMEIRAS EXPLORAÇÕES DE CAMPO

Neste capítulo apresentamos uma síntese dos estudos que realizamos na primeira etapa do nosso trabalho. Esses estudos tiveram como objetivo analisar aspectos históricos que envolvem a construção do conceito de limite e também as teorias no campo da aprendizagem, que poderiam sustentar a construção de propostas mais significativas para o ensino de matemática e, em particular, do conceito de limite. Referimo-nos aos autores Vygotsky e Ausubel. Apresentamos também uma síntese de estudos realizados no campo do uso de recursos tecnológicos no ensino, especificamente o uso de ambientes inteligentes para aprendizagens colaborativas.

## 2.1 Alguns aspectos históricos da noção de limite

Esta síntese foi elaborada a partir de textos clássicos de História da Matemática[1]. Apresentaremos alguns episódios da história do cálculo, que inicia

[1] BOYER, C. B. História da matemática. BARON, M. E.; BOS, H. J. M. Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo. OLIVEIRA, M. A.; SILVA, A. Biblioteca da matemática moderna. STRUIK, Dirk. História concisa da matemática. COURANT, R.; ROBBINS, H. O que é Matemática?. EVES, H. Introdução à história da matemática.

na Grécia, sendo posteriormente disseminado na Europa, preservando as idéias iniciais de sua origem e que nos ajudarão a compreender melhor a definição de limite; também mostraremos algumas pesquisas referentes ao estudo de limites que servirão para nortear o nosso trabalho.

Segundo a Enciclopédia Ciência Ilustrada (1969, p.1516), a idéia de limite surgiu na Grécia antiga no Século V a.C. Zenão de Eléia desafia os filósofos gregos com uma série de paradoxos, entre eles o de Aquiles e a tartaruga: o veloz Aquiles corre para alcançar uma tartaruga que se afasta dele; mas quando chega ao lugar de onde partiu a tartaruga, esta já não está aí; a distância que os separa é agora menor, mas enquanto Aquiles a percorre, também a tartaruga se desloca. E assim sucessivamente. Aquiles, embora caminhando depressa, nunca atingiria a tartaruga.

Para Oliveira e Silva (1971, p.1276), o paradoxo de Aquiles e a tartaruga é explicado da seguinte forma: supondo que Aquiles corresse 10 vezes mais rápido que a tartaruga, para compensar essa vantagem de Aquiles, a tartaruga é colocada em uma posição muito à frente deste, digamos 1000 metros. Quando Aquiles percorre os 1000 metros e chega onde se encontrava inicialmente a tartaruga, esta, por sua vez, percorre um décimo do que percorreu Aquiles, isto é, 1/10 de 1000, que é igual a 100 metros. A tartaruga fica, portanto, ainda 100 metros na frente. Aquiles, então, percorre esses 100 metros. Porém a tartaruga, nesse tempo, se desloca 1/10 de 100 metros, ou seja, 10 metros na frente dele. Aquiles não se dá por vencido, percorre 10 metros, mas, pacientemente, a tartaruga percorre um décimo de 10 metros, ou seja, fica um metro à frente de

Aquiles, e assim por diante. De maneira que Aquiles sempre se aproximará da tartaruga, porém, sem jamais alcançá-la.

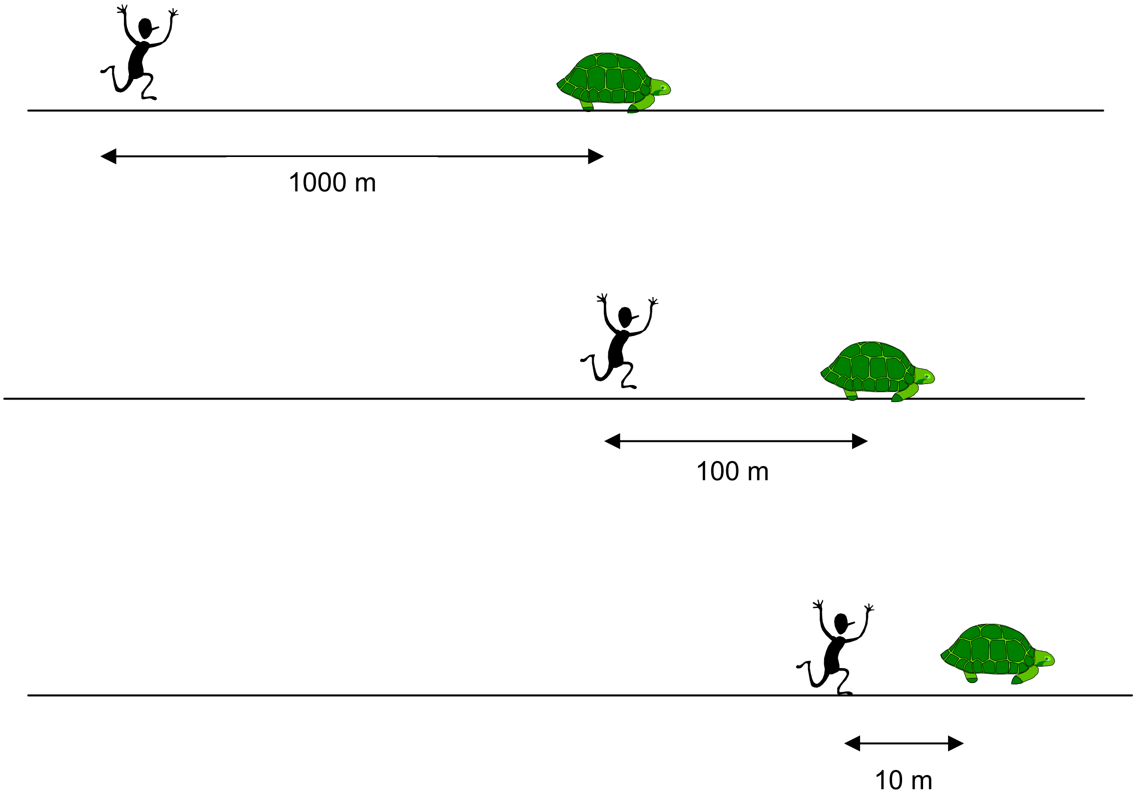



**Figura 1.** Paradoxo de Aquiles e a tartaruga.

O argumento de Zenão foi um passo significativo para a idéia da definição de limite e, 24 séculos depois, essa idéia se consolidaria, evidenciando que as duas sucessões infinitas – as posições de Aquiles e as da tartaruga – convergem, isto é, aproximam-se ou têm como limite o mesmo número.

Para Oliveira e Silva (id., pp.1276-1277), o argumento de Zenão é exposto de forma equivalente ao da dicotomia de um segmento, conforme explicitado a seguir:

Supondo que a velocidade da tartaruga seja a metade da de Aquiles, e a distância que separa Aquiles da tartaruga seja de 2 metros, os pontos A, S0, S1, S2, S3, S4, S5 ,... da representação indicariam as sucessivas posições de Aquiles e da tartaruga, sendo S0 e A, respectivamente, os pontos de partida de Aquiles e da tartaruga.

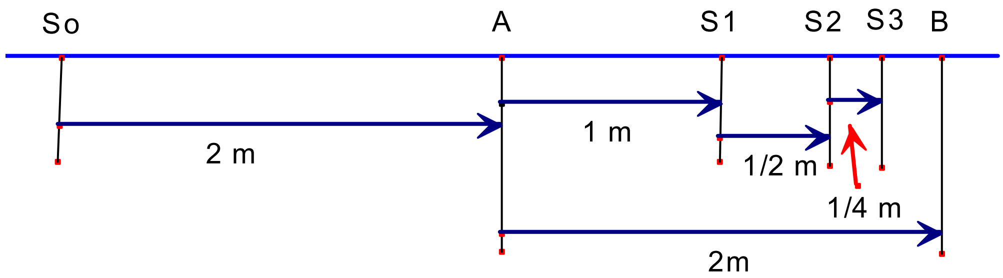



**Figura 2**. Dicotomia de um segmento.

As distâncias serão respectivamente:

A S1 = 1 m

S1 S2 = 1/2 m

S2 S3 = 1/4 m

S3 S4 = 1/8 m

S4 S5 = 1/16 m

e assim por diante. Observemos que tal problema realmente é equivalente à dicotomia sucessiva do segmento AB, nunca ultrapassando o ponto B e, portanto, a soma das distâncias $\overline{AS_1} + \overline{S_1S_2} + \overline{S_2S_3} + \overline{S_3S_4} + \overline{S_4S_5}..........$, com infinitos termos deve ser igual a 2, ou seja: $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ......... = 2$. Embora o número de termos desta soma seja infinito, ela é um número finito igual a 2.

Mas a contribuição dos gregos para a evolução do conceito de limite não se resume na argumentação paradoxal de Zenão. Eudoxo (408-355 a.C.) calcula comprimentos, áreas e volumes usando o método de exaustão – aproximação de figuras delimitadas por linhas curvas a outras com limites retos. É, porém, com Arquimedes (287-212 a.C.) que esse processo se consolida, definindo a área do círculo como limite dos polígonos inscritos e circunscritos, determinando como conseqüência o valor de $\pi$ .

Segundo Oliveira e Silva (id., pp.1276-1277), para explicarmos o método utilizado por Arquimedes no cálculo da área de figuras, é explicado da seguinte forma, considerando o cálculo da área de um círculo cujo raio é igual a R.

Seja S a área do círculo que queremos calcular. Se inscrevermos um quadrado nesse círculo, sua área será menor que a do círculo; se, ao mesmo círculo, circunscrevemos outro quadrado, a área deste será maior que a do círculo.

Sendo $A_1$ a área do quadrado maior e $a_1$ a área do quadrado menor, evidentemente.

$$A_1 > S > a_1$$

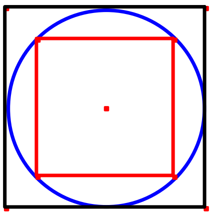


**Figura 3**. Método da exaustão (círculo inscrito e circunscrito por quadrados)

Em seguida, duplicando os lados dos polígonos inscritos e circunscritos, as áreas internas e externas ao círculo vão sendo exauridas.

Se $A_2$ é a área do octógono circunscrito e $a_2$ a área do octógono inscrito, teremos:

$A_1 > A_2 > S > a_2 > a_1$

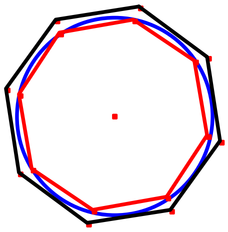


**Figura 4**. Método da exaustão (círculo inscrito e circunscrito por vários polígonos)

Duplicando sucessivamente os lados dos polígonos inscritos e circunscritos, obtemos: $A_1 > A_2 > A_3 > ..... > S > ..... > a_3 > a_2 > a_1$. Assim, podemos observar que o conjunto $A = \{A_1, A_2, A_3, ......\}$ tem um ínfimo e o conjunto $a = \{a_1, a_2, a_3 ......\}$ tem um supremo. Desta forma, temos que o ínfimo de $A = S =$ supremo de $a$, ou seja, à medida que os número de lados dos polígonos cresce, a diferença entre suas áreas são reduzidas. Conseqüentemente, a área das figuras inscritas aproximar-se-á da área do círculo por um valor inferior, e a das circunscritas, por um valor superior. Portanto há um valor comum para o qual tendem as áreas dos polígonos, ou seja, a área do círculo é expressa por $\pi R^2$, conforme mostrado no quadro abaixo:

**Quadro 1.** Áreas de polígonos inscritos e circunscritos ao círculo.

| Lados | Polígonos Inscritos | Polígonos Circunscritos |
|---|---|---|
| N | Área ( ai ) | Área ( Ai ) |
| 4 | 2,0000 $R^2$ | 4,0000 $R^2$ |
| 8 | 2,8284 $R^2$ | 3,3137 $R^2$ |
| 16 | 3,0612 $R^2$ | 3,1825 $R^2$ |
| 32 | 3,1214 $R^2$ | 3,1517 $R^2$ |
| 64 | 3,1363 $R^2$ | 3,1441 $R^2$ |
| 128 | 3,1405 $R^2$ | 3,1422 $R^2$ |
| 256 | 3,1411 $R^2$ | 3,1417 $R^2$ |
| 512 | 3,1415 $R^2$ | 3,1416 $R^2$ |
| 1024 | 3,1415 $R^2$ | 3,1516 $R^2$ |
| ... | ... | ... |
| $\infty$ | $\pi R^2$ | $\pi R^2$ |

Séculos depois, Bonaventura Cavaliere (1598-1647), usa princípios do método de exaustão de Arquimedes com o nome de método dos indivisíveis. O método de Cavaliere em pouco se difere do método de exaustão de Arquimedes.

Segundo Oliveira e Silva (id., pp.1512-1514), Cavaliere considera no seu método as linhas como uma justaposição de pontos, as superfícies construídas de linhas, os volumes construídos de superfícies, etc.

Para facilitar a compreensão do método de Cavaliere, considere-se o cálculo do volume de um cone de altura H e raio R.

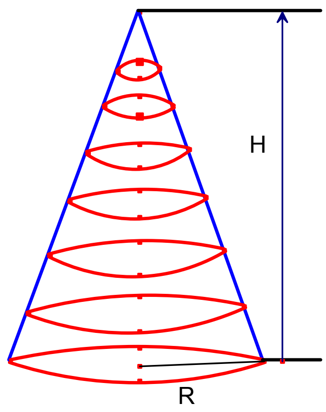


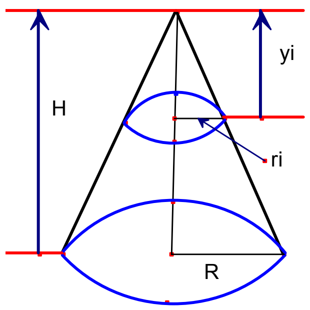

**Figura 5**. Divisão do cone em n partes.

Dividindo o cone em n discos, a altura de cada cone será:

$$h = H/n$$

O raio de cada disco será uma função linear da distância do disco ao vértice.

Considerando o i-ésimo disco de raio ri e altura (yi) dado por:




$$y_i = \frac{i}{n} H$$

**Figura 6**. Cálculo do volume do cone.

Da semelhança de triângulo, temos:

$$\frac{r_i}{y_i} = \frac{R}{H}$$

$$r_i = \frac{R}{H} y_i = \frac{R}{H} \cdot \frac{i}{n} H = R\,\frac{i}{n}$$

O volume $v_i$ de cada disco é determinado por:

$$v_i = \pi r_i^2 h = \pi R^2 \frac{i^2}{n^2} h = \pi R^2 H \frac{i^2}{n^3}$$

Como $\pi R^2 H$ é uma constante, façamos: $\pi R^2 H = k$, teremos, então:

$$v_i = k\frac{i^2}{n^3} = \frac{k}{n^3} i^2$$

Assim, resulta que o volume V do cone será aproximadamente:

$$V \cong v_1 + v_2 + v_3 + ....... + v_n$$

ou seja,

$$V \cong \frac{k}{n^3}\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + .... + n^2)$$

Como

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + .... + n^2 = \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)$$

teremos

$$V \cong \frac{k}{n^3}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) \cong k\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

Se os discos forem suficientemente delgados, isto é, se n for muito grande, essa aproximação melhorará e será tão mais exata quanto maior for n ($n \to \infty$) no limite e então teremos:

$$V = k\left(\frac{1}{3} + 0 + 0\right)$$

[Observe que os termos $\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$ são desprezados, pois quando n é muito grande, esses termos se aproximam de zero]

Portanto:

$$V=\frac{k}{3}=\frac{\pi R^2 H}{3}$$

Aparecem em seguida os trabalhos de Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1650), Wallis (1616-1703), Pascal (1623-1677), terminando todos eles com os trabalhos geniais de Leibniz (1646-1716), Newton (1642-1727) e Lagrange (1736-1813).

Como podemos perceber, os princípios do cálculo são estimulados pelo desafio de determinar áreas e volumes, explicitado por Eudoxo e Arquimedes. Embora aspectos da idéia de limites estejam implícitos em seus métodos, eles nunca formularam explicitamente o conceito de limite. Da mesma forma, matemáticos como Cavaliere, Fermat e Barrow, precursores de Newton no desenvolvimento do cálculo, realmente não usaram limites. Foi Isaac Newton o primeiro a falar explicitamente sobre limites. Ele explicou que a idéia principal por trás dos limites é que quantidades "ficam mais próximas do que qualquer diferença dada". A primeira exposição do cálculo que Newton imprimiu apareceu em 1687, em *Philosophiae naturalis principia mathematica*, o mais admirado tratado cientifico de todos os tempos. No Lema I, do livro I, intitulado "O método da primeira e última razões de quantidades", ele cita:

"Quantidades e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente à igualdade, e antes do fim desse tempo se aproximam mais uma da outra que por qualquer diferença dada, se tornam finalmente iguais”. (BOYER, 1974, p.292).

Fica evidenciada acima uma tentativa da definição de limite de uma função. Para explicitar melhor, consideremos duas quantidades, $Q_1$ e $Q_2$, que variam com o tempo; se a diferença entre elas diminuir continuamente, dentro de um intervalo de tempo finito, uma se aproxima cada vez mais da outra, podendo então, considerar que $Q_1$ seja igual a $Q_2$, isto é:

$$\lim_{t \to \infty} Q_1(t) = \lim_{t \to \infty} Q_2(t)$$

Na mesma época, Gottfried W. Leibniz trabalhou com as quantidades infinitamente pequenas. Segundo Baron (1985, p.71), a noção das quantidades variáveis de Leibniz enfatizava a diferencial como a diferença de dois valores sucessivos na seqüência. Como as variáveis adquirem novos valores continuamente, não por saltos, as diferenciais não podiam ser finitas e tinham de ser infinitamente pequenas.

Tanto no cálculo de Newton (a fluxão, definidas por razões últimas) quanto no cálculo de Leibniz (a diferencial, como sendo diferenças infinitamente pequenas) existiam problemas graves sobre a consistência lógica dos conceitos fundamentais. somente com os trabalhos de D’Alembert e Cauchy essas dificuldades foram superadas pelo uso de um conceito bem definido de limite.

D’Alembert salientou o fato de que o cálculo opera com os limites das razões de diferenças finitas de quantidades variáveis inter-relacionadas. Ele explicou o conceito de limite da seguinte forma:

> Limite substantivo (matemática). Diz-se que a grandeza é o limite de outra grandeza quando a segunda grandeza pode aproximar-se da primeira tanto quanto se queira, embora a primeira grandeza nunca possa exceder a grandeza da qual ela se aproxima; de modo que a diferença entre tal grandeza e o seu limite é absolutamente indeterminável. (BARON, id., p.28).

Para Cauchy, as variáveis e seus limites são apresentadas da seguinte maneira:

> Chamamos quantidade variável aquela que consideramos capaz de assumir diversos valores diferentes sucessivamente. Por outro lado, chamamos quantidade constante aquela que assume um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de modo que eles finalmente difiram deste valor tão pouco quanto quisermos, esse último valor é chamado o limite de todos os outros. (BARON, id., p.46).

Nota-se que o conceito de variável para Cauchy ainda sugere aumento ou decréscimo contínuos, embora não exclua a possibilidade da variável alcançar seu limite. Cauchy evitou as desvantagens desse conceito, combinado-o com o conceito de função, através de uma importante interpretação do termo “infinitamente pequeno”, o que o capacitou também a formular uma definição precisa de continuidade:

> Quando os valores numéricos sucessivos de uma variável diminuem indefinidamente de modo a tornarem-se menores que qualquer número dado, dizemos que a variável se torna “infinitamente pequena” ou uma quantidade infinitamente pequena. O limite de tal variável é zero. (BARON, id., p.47).

O conceito de limite, apesar de sua idéia ter surgido na Grécia antiga há mais de vinte séculos, é de instituição recente. A formulação aritmética dessa idéia foi apresentada por John Wallis (1616-1703) em seu trabalho *Arithmetica Infinitorum*, 1655. Em Augustin Louis Cauchy (1789-1857) se pode situar o inicio da conceituação formal de limite. Le Rond d’Alembert (1717-1783), nos artigos

“Differential” (1754) e “Limit” (1765), cita os princípios metafísicos do cálculo infinitesimal. O símbolo lim foi, pela primeira vez, empregado por Simon L’Huilier (1750-1789) na sua obra *Exposition élémentaire de calculus supérieurs*, 1786. (DACORSO NETO, 1971).

Segundo Courant & Robbins (2000, p.371), na definição $(\varepsilon, \delta)$, a variável independente não se movimenta; ela não “tende para” ou “aproxima-se de” um limite $x_1$ em qualquer sentido físico. Estas frases e o símbolo $\rightarrow$ ainda permanecem, e nenhum matemático precisa ou deve perder o sentimento intuitivo e sugestivo que eles expressam. Porém, quando se quer verificar a existência de um limite em procedimentos científicos efetivos, é a definição ($\varepsilon$, δ) que deve ser aplicada. Se esta definição corresponde satisfatoriamente à noção “dinâmica” intuitiva de aproximação, esta é uma questão análoga à de saber se os axiomas da Geometria fornecem uma descrição satisfatória do conceito intuitivo de espaço. Ambas as formulações omitem algo que é real para a intuição, mas elas fornecem uma estrutura matemática adequada para expressar nosso conhecimento destes conceitos.

A exemplo do caso do limite de seqüências, a base para a definição de Cauchy está na inversão da ordem “natural” na qual as variáveis são consideradas. Primeiro fixamos nossa atenção em um intervalo $\varepsilon$ para a variável dependente, e em seguida procuramos determinar um intervalo δ adequado para a variável independente. A proposição “$f(x) \rightarrow a$” quando “$x \rightarrow x_1$” é apenas uma forma abreviada de dizer que isto pode ser feito para todo número positivo $\varepsilon$. Em particular, nenhuma *parte* desta proposição, por exemplo, “$x \rightarrow x_1$”, tem um significado por si mesma.

Do exposto, acima podemos observar que a idéia de próximo é muito relativa. Por exemplo, para um corredor de 100 m rasos, um metro é estar muito próximo do final da corrida; já para um piloto de nave espacial que se dirige para a lua, 1000 km é estar próximo de chegar. Assim, para evitar ambigüidade como nestes exemplos, é necessário formular uma definição de limites mais ampla e que não contenha a palavra próximo; dessa forma, torna-se necessário a definição ($\varepsilon$, $\delta$), que é aplicável a qualquer situação; sendo assim, o professor deve criar estratégias apropriadas para minimizar as dificuldades na compreensão desta definição, enfatizando a sua importância na matemática e em outras ciências afins.

## 2.2 Alguns estudos no campo da aprendizagem: Vygotsky e Ausubel

Dentre os vários autores que tive oportunidade de ler e reler ao longo do curso, provavelmente dois deles estiveram presentes em minhas reflexões: Vygotsky e Ausubel.

Lev Semenovich Vygotsky (1896-1934), professor e pesquisador, foi contemporâneo de Piaget, e nasceu em Orsha, pequena cidade da Bielarus, em 17 de novembro de 1896. Viveu na Rússia, onde morreu, de tuberculose, aos 38 anos. Construiu sua teoria tendo por base o desenvolvimento do indivíduo como resultado de um processo sócio-histórico, enfatizando o papel da linguagem e da aprendizagem nesse desenvolvimento, sendo essa teoria considerada histórico-social. Sua questão central é a aquisição de conhecimentos pela interação do sujeito com o meio, mediado por sistemas simbólicos. (OLIVEIRA, 2003).

O comportamento mais característico dos seres humanos é o fato de, ao cooperarem uns com os outros, produzem as ferramentas, entendidas como artefatos mentais e físicos que lhes permitem agir sobre o meio, ou seja, a relação do homem com o mundo não é uma relação direta, mas fundamentalmente uma relação mediada.

> Um conceito central para a compreensão das concepções vygoskianas sobre o funcionamento psicológico é o conceito de mediação. Mediação, em termos genéricos, é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação; a relação deixa de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento. (OLIVEIRA, 2003, p.26).

Desta forma, os professores podem adicionar estímulos auxiliares, como por exemplo a utilização de computadores e exemplos de aplicação, formando, assim, um elo entre o aluno e sua aprendizagem e que, com o desenvolvimento do processo, essas relações, antes mediadas, passam a ser diretamente utilizadas pelos alunos.

Vygotsky distinguiu dois tipos de elementos mediadores: os instrumentos e os signos.

> O instrumento é um elemento interposto entre o trabalhador e o objeto de seu trabalho, ampliando as possibilidades de transformação da natureza. (OLIVEIRA, 2OO3, p.29).

Fica evidenciada a importância dos instrumentos no desenvolvimento da humanidade, que se diferenciou das outras espécies pela criação do trabalho e da sociedade.

A invenção e o uso dos signos como meios auxiliares para solucionar um dado problema psicológico (lembrar, comparar coisas, escolher, etc.) é análoga à invenção e ao uso de instrumentos, só que agora no campo psicológico. O signo age como um instrumento da atividade psicológica de maneira análoga ao papel de um instrumento de trabalho. Os instrumentos, porém, são elementos externos ao individuo, voltados para fora dele; sua função é provocar mudanças nos objetos, controlar processos da natureza. Os signos, por sua vez, são orientados para o próprio sujeito, para dentro do individuo; dirigem-se ao controle de ações psicológicas, seja do próprio individuo, seja de outras pessoas. São ferramentas que auxiliam nos processos psicológicos e não nas ações concretas, como os instrumentos. (OLIVEIRA, 2OO3, p.30)

A utilização dos signos como meios auxiliares para resolver problemas psicológicos, como por exemplo lembrar, escolher, comparar, etc, vem sendo muito usada por profissionais da área da educação. Podemos verificar esta técnica principalmente em cursos de memorização, onde o professor sempre relaciona alguma figura (coisas externas) para desencadear a lembrança (estado psicológico). Assim, o professor de matemática pode fazer uso de gráficos, plotados por computadores e elaborar exercícios de aplicação para estimular os alunos no estudo de limites, fazendo com que os mesmos relacione estes signos para facilitar a resolução e a solução do exercício.

> Os signos podem ser definidos como elementos que representam ou expressam outros objetos, eventos ou situações; a palavra mesa, por exemplo, é um signo que representa o objeto mesa; o símbolo 3 é um signo para a quantidade três, o desenho de uma cartola na porta de um sanitário é um signo que indica "aqui é o sanitário masculino. (VYGOTSKY, 1984, pp.59-60).

Ao longo da evolução da espécie humana e do desenvolvimento de cada individuo, ocorrem duas mudanças fundamentais no uso dos signos. A primeira evidencia que a utilização de marcas externas vai se transformar em processos internos de mediação; em seguida, são desenvolvidos sistemas simbólicos, que organizam os signos em estruturas complexas e articuladas.

Para Oliveira (2003, p.35), essa capacidade de lidar com representações que substituem o próprio real é que possibilita ao homem libertar-se do espaço e do tempo presentes, fazer relações mentais na ausência das próprias coisas, imaginar, fazer planos e ter intenções.

Quando trabalhamos com processos mentais superiores (mecanismos psicológicos) que caracterizam o funcionamento psicológico tipicamente humano, as representações mentais da realidade exterior são, na verdade, os principais mediadores a serem considerados na relação do homem com o mundo. É justamente a origem dessas representações que Vygotsky está buscando quando nos remete à criação e ao uso de instrumentos e de signos externos como mediadores da atividade humana.

David Paul Ausubel nasceu nos Estados Unidos, na Cidade de Nova York, no ano de 1918, filho de uma família judia pobre de imigrantes da Europa Central. Sua formação acadêmica deu-se na Universidade de Nova York.

Ausubel é um dos teóricos que une a compreensão piagetiana do sujeito do conhecimento com a psicologia da aprendizagem de Rogers, alicerçando assim a sua idéia da "Aprendizagem Significativa", que vê o armazenamento de informação no cérebro humano como sendo altamente organizado, formando uma hierarquia conceitual, ou seja, o cerne da teoria proposta por Ausubel estará na organização do conhecimento em estruturas e nas reestruturações que se devem à interação entre as novas informações adquiridas pelo sujeito e as que ele havia previamente adquirido. Disponível em: <http://rdefendi.sites.uol.com.br/ausubel/ ausubel3.htm >. Acesso em: 25 out. 2005.

Os processos de aprendizagem estão voltados para situações de ensino expositivo em salas de aula, mas são extremamente úteis para o desenho de processos instrucionais que utilizem novas tecnologias em sua exposição.

> Segundo Ausubel a essência do processo de aprendizagem significativa é que idéias simbolicamente expressas sejam relacionadas de maneira substantiva (não literal) e não arbitrária ao que o aprendiz já sabe, ou seja, a algum aspecto de sua estrutura cognitiva especificamente relevante para a aprendizagem dessas idéias. Este aspecto especificamente relevante pode ser, por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito, uma proposição, já significativo. (MOREIRA e MASINI, 2001, pp. 13-14).

Para Ausubel, o conjunto dos resultados das experiências de aprendizagem de uma pessoa (sua estrutura cognitiva) está organizado em conglomerados hierarquizados de conhecimentos. A primeira coisa que acontece quando alguém recebe uma informação nova é uma tentativa de incluir ("subsumer") essa informação em um desses conglomerados já existentes (relacionar a informação nova com as informações já presentes na sua estrutura cognitiva). Se o receptor da informação consegue "ancorar" o conhecimento novo no conhecimento velho de forma interativa, ocorrerá uma "aprendizagem significativa". Por forma interativa entende-se, aqui, que novos e velhos conhecimentos influenciam-se mutuamente num processo no qual os conhecimentos antigos podem adquirir novos significados.

Se as novas informações não encontrarem conhecimentos prévios nos quais possam se ancorar, ocorrerá uma "aprendizagem por recepção". Importante enfatizar que a aprendizagem por recepção e a aprendizagem significativa formam um processo contínuo, já que o conhecimento adquirido na aprendizagem por recepção vai, gradualmente, permitindo a "ancoragem" de novos conhecimentos. (MOREIRA e MASINI, 2001).

A seguir, vamos expor os tipos de aprendizagem e os conceitos centrais para temos uma visão geral da importância da teoria significativa proposta por Ausubel. Disponível em: <http://www.dynamiclab.com/mod/forum/discuss.php?d=592>. Acesso em: 25 out. 2005.

**Os Tipos de Aprendizagem**

A partir do acima exposto, Ausubel identifica quatro tipos de aprendizagem:

I. significativa por recepção: o aprendiz recebe conhecimentos e consegue relacioná-los com os conhecimentos da estrutura cognitiva que já tem;

II. significativa por descoberta: o aprendiz chega ao conhecimento por si só e consegue relacioná-lo com os conhecimentos anteriormente adquiridos;

III. mecânica por recepção: o aprendiz recebe conhecimentos e não consegue relacioná-los com os conhecimentos da estrutura cognitiva que já tem;

IV. mecânica por descoberta: o aprendiz chega ao conhecimento por si só e não consegue relacioná-lo com os conhecimentos anteriormente adquiridos.

**Conceitos Centrais**

Três são os conceitos centrais da teoria da aprendizagem significativa:

- organizadores prévios;
- diferenciação progressiva;
- reconciliação integradora.

Organizadores Prévios - Para Ausubel, fica mais fácil relacionar uma nova informação com a estrutura cognitiva existente quando, antes de se apresentar a informação, apresenta-se, na forma de uma frase ou de um gráfico, por exemplo, um quadro conceitual mais abrangente no qual aquela idéia se encaixa. Esse quadro ele chama de "organizador prévio".

Um organizador prévio não é uma síntese daquilo que vai ser apresentado; ele deve estar num grau de abstração e / ou generalidade para facilitar a integração da nova idéia, atuando como ponte com a estrutura hierárquica de conhecimentos aquilo que já existe.

De outra parte, os organizadores prévios fornecem um quadro contextual no qual a pessoa vai incorporar detalhes progressivamente mais diferenciados. Embora Ausubel nunca os tenha mencionado, mapas conceituais são um bom exemplo de ferramenta para o preparo de organizadores prévios.

Diferenciação Progressiva: Segundo a idéia de diferenciação progressiva, se o objetivo é ensinar os itens X, Y e Z, deve-se, primeiro, ensinar os 3 itens num nível geral, depois os 3 itens num nível de maior detalhe e assim por diante; o oposto seria ensinar tudo sobre X, depois tudo sobre Y e depois tudo sobre Z. De início, serão apresentadas as idéias mais gerais que serão, progressivamente, explicitadas em termos de detalhe e especificidade. Importante, nesse processo é, a cada passo, destacar o que os itens têm em comum e o que os diferencia. A diferenciação progressiva vê a aprendizagem significativa como um processo contínuo, no qual adquirem significados mais abrangentes, à medida que são estabelecidas novas relações entre os conceitos.

Reconciliação Integradora - É o processo pelo qual a pessoa reconhece novas relações entre conceitos até então vistos de forma isolada.

Para facilitar esse processo, o material instrucional deve procurar integrar qualquer material novo com material anteriormente apresentado (referências, comparações etc.), inclusive com exercícios que exijam o uso do conhecimento de maneira nova (por exemplo, formulação de questões de maneira não familiar).

## 2.3 Investigações no campo do uso de recursos tecnológicos no ensino.

Para nosso trabalho, foi muito importante a leitura do texto de Azevedo e Tavares (2001), da Universidade Federal do Espírito Santo, no artigo denominado “Um Ambiente Inteligente para Aprendizagem Colaborativa”.

Esses autores destacam que, para auxiliar seu trabalho com os alunos, os professores utilizam diversos recursos para ajudá-los no processo de ensino-aprendizagem. Entre alguns destes recursos, podemos citar o livro didático, a televisão, o vídeo-cassete, etc. Porém, com os avanços tecnológicos que ocorrem dia após dia, é necessário que cada vez mais haja a utilização de novos recursos. Um dos mais recentes recursos que vem sendo utilizado com esta finalidade é o computador. Neste contexto, o computador é visto como um instrumento didático.

Ressaltam que uma das formas de utilização do computador na educação é através de software educacional, um software para auxiliar o estudante no aprendizado de um determinado conteúdo. Um software educacional também tem como o objetivo auxiliar o professor, fazendo com que o mesmo tenha a seu dispor um valioso recurso. Atualmente, existem diversos tipos de softwares educacionais clássicos (expositivos e tutoriais), embora ainda seja grande a falta de softwares educacionais mais elaborados, como os Sistemas Tutores Inteligentes. Estes sistemas representam uma importante ferramenta no processo de ensino-aprendizagem.

Escolhemos os softwares Cabri, Excel e Graphmatica, pela simplicidade de operação, facilidade de aquisição (Excel e Graphmatica  possuem versões free na

Internet e o Cabri possui versão demo, sendo que este foi disseminado nas escolas do Estado através de um projeto para incentivar os professores ao uso de computares na sala de aula e também tem boa aceitação nas universidades para o ensino de matemática) e pelo potencial que os mesmos possuem no processo de ensino-aprendizagem de matemática.

Os autores referem-se à existência de diversos tipos de software educacionais, sendo que um dos mais importantes é o Sistema Tutor Inteligente (STI). Um tutor inteligente é um software capaz de tutorar uma pessoa em um determinado domínio. Um STI sabe o que ensinar, como ensinar, e aprende informações relevantes sobre o aprendiz que está sendo tutorado, proporcionando um aprendizado individualizado. Os STI são excelentes, porém, alguns pesquisadores observaram a necessidade de introduzir o paradigma da colaboração: o sistema deveria atuar em conjunto com o estudante para facilitar o processo de aquisição de conhecimento.

Por meio da colaboração, os seres humanos interagem uns com os outros para alcançarem objetivos em comum. Porém, na sala de aula a colaboração não é muito observada. Geralmente, os alunos estão competindo por melhores notas, conceitos, etc. Desta forma, não há colaboração entre os estudantes.

Azevedo e Tavares observam que a característica essencial da aprendizagem colaborativa é que o sucesso de um estudante ajuda os outros estudantes a obterem sucesso. Na aprendizagem colaborativa, os estudantes trabalham juntos para alcançar um objetivo comum. Este objetivo é alcançado através da interação entre todos os membros de um grupo (LEHTINEN, 2003). A aprendizagem colaborativa é mais importante do que as metodologias de aprendizagem tradicionais porque traz mais benefícios ao estudante (SLAVIN, 1997). A aprendizagem colaborativa é um excelente caminho que pode ser trilhado pelos novos rumos da educação.

Na aprendizagem colaborativa, os aprendizes são estimulados a trabalharem juntos em tarefas de aprendizagem. Os aprendizes são reunidos em grupos, onde o papel e a participação de cada um é fundamental. A colaboração envolve o engajamento mútuo de todos os aprendizes em um esforço coordenado para resolver um problema.

Os princípios da aprendizagem colaborativa são baseados em um modelo centrado no aprendiz, que o trata como um participante ativo (LEHTINEN, 2003). O objetivo do ambiente proposto por Azevedo e Tavares é o de oferecer suporte à aprendizagem colaborativa. Esse ambiente irá proporcionar aos aprendizes e professores uma infra-estrutura completa para que os objetivos da aprendizagem sejam alcançados.

O ambiente proposto pode ser utilizado em uma rede local de computadores, ou através da Internet, possibilitando que aprendizes e professores possam estar localizados em diferentes lugares ao redor do mundo. O ambiente proposto também representa uma ferramenta útil para a educação à distância.

O ambiente poderá ser utilizado da seguinte forma:

- Os aprendizes, reunidos em pequenos grupos (DILLENBOURG, 1995), utilizarão um computador para acessar o ambiente.

- O professor utilizará um computador para acessar o ambiente.

O ambiente possuirá uma parte que estará sendo executada no computador dos usuários e outra, que estará sendo executada em um servidor, ou então sendo executada de forma distribuída através de uma rede de computadores. Azevedo e Tavares mostram, por meio de um esquema, a utilização do ambiente:

Utilização do Ambiente:

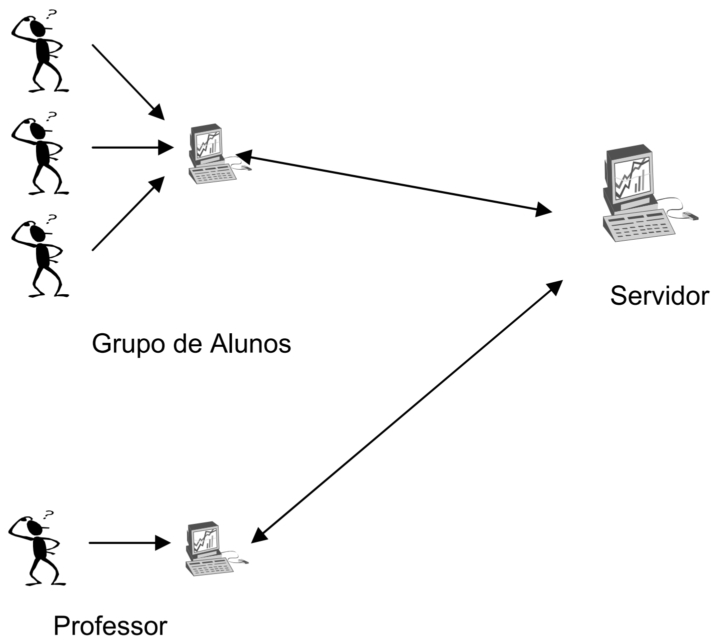



**Figura 7.** Utilização do ambiente inteligente.

Azevedo e Tavares comentam que o ambiente inteligente proposto é baseado em uma arquitetura multiagente (CHEIKES, 1995), isto é, há uma sociedade de agentes inteligentes, onde cada agente possui as suas tarefas e se comunica com os demais agentes.

A arquitetura do ambiente será composta de nove agentes inteligentes, que são:

- Apoio: agente que atua junto com o grupo de aprendizes ou com o professor, ajudando no processo da aprendizagem colaborativa, fornecendo ferramentas de apoio, tais como agenda, troca de mensagens, etc.

- Aprendiz Individual: agente que tem a função de determinar o perfil de cada aprendiz que está utilizando o ambiente.

- Aprendiz em Grupo: agente que tem a função de determinar o perfil de cada grupo de aprendizes que está utilizando o ambiente.

- Companheiro: agente que tem a função de cooperar e promover a colaboração efetiva entre os aprendizes de um grupo.

- Observador: agente que tem a função de fornecer ao professor todas as informações necessárias sobre o desempenho dos aprendizes que estão utilizando o ambiente.

- Especialista: agente que manipula as informações sobre o domínio para o qual foi construído o ambiente.

- Tutor: agente que determina qual conteúdo será abordado, como será esse processo e quando ele será realizado. Esse agente também é responsável pela avaliação do desempenho de cada aprendiz.

- Apresentador: agente responsável pela interface com o grupo de aprendizes.

- Mediador: agente que tem a função de gerenciar a troca de mensagens entre os agentes.

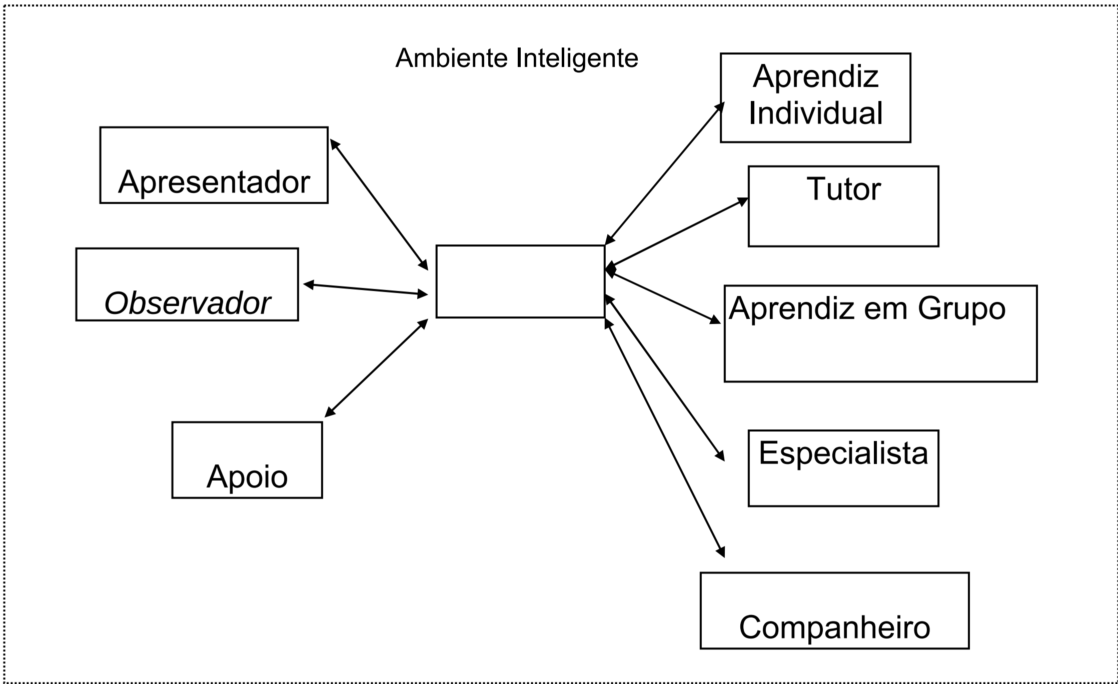



**Figura 8**. Arquitetura do ambiente inteligente.

Este ambiente tem como objetivo oferecer as seguintes características: conduzir os aprendizes durante o processo de ensino-aprendizagem, ser flexível para se adaptar a diversos tipos de aprendizes, oferecer interfaces que motivem o uso da aplicação, fornecer avaliação do desempenho dos aprendizes e oferecer todo o apoio necessário ao processo de aprendizagem colaborativa.

A leitura desse artigo nos ajudou na elaboração, não de um ambiente colaborativo propriamente dito, mas na transformação de uma sala de aula mais participativa e flexível, potencializando-a, onde o professor interage com o computador na preparação e exposição da aula, e os alunos, apesar de utilizarem o computador individualmente, podem se comunicar com os colegas, trocando informações, favorecendo, assim, um processo de ensino-aprendizagem estimulante e descontraído.

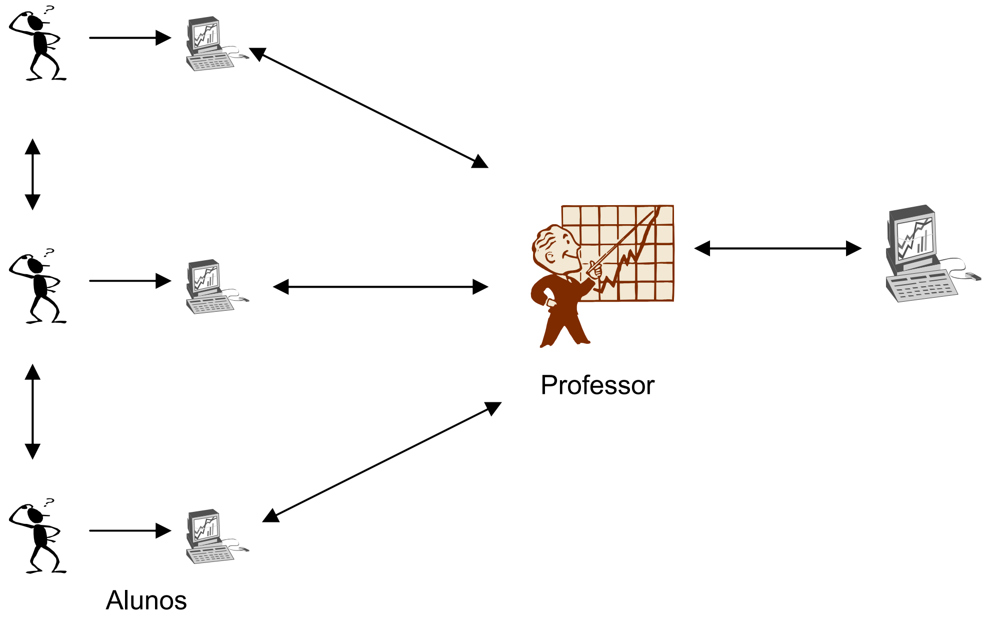



**Figura 9.** Esquema do ambiente colaborativo.

# 3 EXPLORAÇÃO DA PESQUISA DE CAMPO

Neste capítulo apresentamos os resultados da pesquisa de campo. Como mencionamos no primeiro capítulo, a primeira ação de nossa pesquisa de campo foi o levantamento de algumas informações coletadas por meio de um questionário, do qual participaram 10 professores de Cálculo Diferencial e Integral.

Na seqüência, descrevemos o processo de elaboração das três atividades-aula que elaboramos com o objetivo de colaborar com os professores de cálculo em sua prática docente. Para elaborar essas propostas, levamos em conta a seqüência utilizada nos livros indicados pelos professores, feita no questionário inicial da pesquisa.

## 3.1 Impressões dos primeiros contatos com professores

Por meio de um questionário inicial, traçamos o perfil dos 10 professores de cálculo.

Dos quatro professores das universidades públicas entrevistados, três são licenciados em matemática e um graduado em engenharia mecânica, sendo que dois possuem o titulo de doutor e dois de livre docência. Um atua como professor de matemática há mais de 20 anos, dois de 10 a 15 anos e um há dois anos. Na metodologia de aula adotada por eles, predomina a exposição com utilização de quadro e giz, sendo que todos se mostraram interessados em utilizar novas tecnologias na exposição de aula. Dois deles utilizam softwares como auxilio fora da sala de aula.

Dos seis professores das universidades particulares entrevistados, todos são licenciados em matemática, um possui o titulo de doutor, três de mestre e dois são especialistas. Dois atuam como professores de matemática há mais de 20 anos, um há 17 anos, um há 12 anos e dois há menos de 5 anos. Na metodologia de aula adotada por eles, também predomina a exposição com utilização de quadro, giz e retroprojetor; utilizam também apostilas, livros e laboratório de matemática. Nenhum deles utiliza novas tecnologias dentro da sala de aula, e fora da sala de aula fazem uso apenas para preparar o material didático; uns, pelo fato da instituição não dispor destas tecnologias e outros por acharem muito complicado trabalhar com elas, alegando falta de investimento em treinamento dos docentes e falta de preparo dos alunos.

Os professores entrevistados responderam individualmente a quatro questões abertas, a saber:

- Caso existam, quais as dificuldades mais freqüentes para o ensino de limite?
- Quais os livros utilizados para o ensino de limite?
- Quais os recursos didáticos mais utilizados para o ensino de limite?
- Você utiliza algum software para o ensino de limite?

Na seqüência, apresentamos uma síntese das respostas dadas por esses professores.

### 3.1.1 Sobre as dificuldades mais freqüentes

Dos 10 professores, apenas sete responderam a essa questão.

Quatro apontaram que a maior dificuldade está exatamente na definição de limite.

Três professores consideraram que a maior dificuldade está ligada à compreensão das propriedades.

Um professor referiu-se à dificuldade de achar exemplos adequados e outro indicou a demonstração de teoremas como sendo o aspecto mais difícil.

**Quadro 2.** Dificuldades mais freqüentes no ensino de limite indicadas pelos professores.

| | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Definição de limite | X | | X | X | | | X | | | |
| Propriedades | | | X | | | | | X | | X |
| Exemplos adequados | | X | | | | | | | | |
| Demonstração de teoremas | | | | | | | | | | X |
| Não responderam | | | | | X | X | | | X | |

### 3.1.2 Sobre os livros utilizados para o ensino de limite

A esse respeito, os professores responderam que fazem uso de diferentes livros-textos e cada um indicou de 2 a 4 títulos que costumam utilizar. Entre 10 professores, os dois mais apontados são: “Um curso de cálculo” (L1), de Hamilton Guidorizzi, e Cálculo A: funções, limite, derivação e integração (L2), de Diva Flemming.

**Quadro 3.** Livros utilizados pelos professores para o ensino de limite.

| | | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L1 | GUIDORIZZI, H. L. | X | X | X | | X | X | X | X | X | X |
| L2 | FLEMMING,D.M. | X | | X | X | X | | X | X | X | X |
| L3 | LEITHOLD, L. | | X | | X | | X | | | X | |
| L3 | STEWART, J. | X | | X | X | | | | | | |
| L5 | SWOKOWSKI, E.W. | | | X | | | | | X | | X |
| - | Outros [2] | | X | | | X | | X | | | |

Os títulos mais citados por eles (L1 e L2), são livros que apresentam poucos exemplos de aplicações de limite em outras áreas, fator este que poderia proporcionar aos alunos significados para que estes pudessem entender com mais facilidade este conteúdo.

### 3.1.3 Sobre recursos didáticos utilizados para o ensino de limite

Os recursos utilizados com mais freqüência são mesmo o quadro e o giz. Livros, apostilas e retroprojetor tiveram algumas citações, como registramos na tabela abaixo.

[2] PISKUNOV, N. Cálculo diferencial e integral, tomo I. Moscou: Ed. Mir, 1978; MOISE, E. E. Cálculo: um curso universitário, v.1 São Paulo: Ed. Edgard Blüncher, 1972; BOULOS,P. ; ABUD, Z. I.Cálculo Diferencial e Integral, v1. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2002

**Quadro 4.** Recursos didáticos utilizados pelos professores para o ensino de limite.

| | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 | P7 | P8 | P9 | P10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quadro e Giz | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |
| Livros | | X | X | | X | | | X | | |
| Apostilas | | | | | | X | | | | X |
| Retroprojetor | | X | | X | | | | | | |

Não foi feita nenhuma referência a uso de computador e/ou software. A justificativa é a de que as instituições não disponibilizam esses recursos. Perguntados sobre os softwares que conhecem, todos indicam o Excel. Metade afirma conhecer o Cabri Géomètre e apenas três conheciam o Graphmatica.

### 3.1.4 Sobre o uso de algum software para o ensino de limite

Nenhum dos professores utiliza software para o ensino de limite na sala de aula. Dois professores de uma das faculdades públicas responderam que seria muito complicado trabalhar com computadores na sala de aula, devido ao conteúdo ser muito extenso e que, para esse tipo de abordagem, precisaria de carga horária maior.

Para eles, no momento, é mais viável indicar alguns softwares como o Graphmatica, o Winplot e o Maple para que os alunos utilizem em atividades extra-sala de aula.

Quatro professores das faculdades particulares justificaram que não utilizam porque a instituição não oferece infra-estrutura para esse tipo de abordagem.

## 3.2 Formulando propostas de atividades

Nosso objetivo foi o de utilizar softwares adequados, que venham beneficiar a construção do conceito de limite e que possam ser desenvolvidos com ou sem o uso de sala informatizada, permitindo que o aluno utilize o computador, mesmo fora da sala de aula, como uma ferramenta auxiliar para sua aprendizagem.

Tivemos ainda a intenção de diferenciar a proposta daquelas apresentadas nos livros citados pelos professores, pela preocupação de dar significado, por meio de exemplos práticos, em diferentes momentos do processo de aprendizagem.

Como vimos anteriormente, segundo Ausubel, para o processo de ensino-aprendizagem ser significativo, o material a ser aprendido precisa fazer algum sentido para o aluno. Desta forma, inserimos na nota de aula exemplos práticos, antes de expor qualquer definição, assim o aluno amplia sua visão da informação, refletindo naquela situação, de forma a se conscientizar da importância do conteúdo, facilitando a compreensão do assunto.

Segundo a idéia Vygotskiana de mediação, visto também no capítulo anterior, a interação do homem com o meio pode ser mediada pelo uso de ferramentas e signos. Assim, utilizamos softwares que produzissem gráficos dos exemplos práticos, promovendo uma ampliação da matéria para facilitar e estimular a compreensão e o estudo do conteúdo de limite. Nas atividades foram propostos exercícios que permitissem o uso do computador para que o aluno percebesse que o mesmo pode ser um grande aliado de sua aprendizagem. Estão presentes nas atividades exercícios de aplicações em várias áreas, porém concentramos mais exemplos na área econômica, por ser uma área mais evidenciada pelos meios de comunicação, fator este que pode incentivar a aprendizagem, pois acreditamos que assim o aluno vai dando significado ao conteúdo aprendido.

Ressaltamos ainda que estamos considerando exercícios de aplicação todo aquele que utiliza a idéia de limite para solucionar outra situação qualquer, como por exemplo o cálculo do número $\pi$, áreas, volumes de sólidos, etc. e problemas de áreas especifica como por exemplo índices econômicos, lucros, produção, estoque, velocidade, etc. Aparecem também exercícios de fixação, que têm por finalidade fazer com que o aluno se familiarize com as propriedades e operações de limite.

Na seqüência, apresentamos alguns comentários sobre as aulas elaboradas e que constam do Anexo A, na íntegra.

### 3.2.1 Apresentação da Aula 1

A Aula 1 – Definição intuitiva de Limite – teve como objetivo "conceituar limite de forma intuitiva  e revisar os processos de fatoração".

A aula foi iniciada com um breve resumo histórico. Em seguida foram apresentados alguns exemplos de aplicação em várias áreas, para que o aluno pudesse compreender a importância deste estudo. Um dos exemplos foi mostrado com mais detalhes, explicitado na forma de tabela e gráfico, para que o aluno tivesse uma visão da situação e fosse capaz de entender a definição de limite de forma intuitiva. No final da aula foram apresentados alguns tipos de fatoração, mostrando a importância desta para o estudo de limites, e os alunos foram incentivados a pesquisar mais um pouco sobre o assunto. Por fim, foi elaborada uma atividade prática para que os alunos entendessem mais a definição de limite.

### 3.2.2 Apresentação da Aula 2

A Aula 2 – Limite de uma função – foi elaborada com o objetivo de explorar o conceito formal de limite e funções contínuas, mostrando algumas aplicações.

Nesta aula aproveitou-se a idéia intuitiva de limite para definirmos formalmente o conceito de limite de uma função e suas propriedades, que é um passo fundamental para o estudo e compreensão do cálculo. Realizamos um breve estudo das funções contínuas, mostrando a importância dos limites laterais para o estudo do cálculo. Por fim mostramos algumas aplicações em várias áreas e aplicamos atividades com resolução de problemas.

### 3.2.3 Apresentação da Aula 3

A Aula 3 – Limites infinitos e limites fundamentais – teve como objetivo interpretar os limites infinitos, apresentando aplicações e estudar os limites fundamentais: trigonométrico e exponencial.

Nesta aula estudamos os limites envolvendo os símbolos $+\infty$ (mais infinito) e $-\infty$ (menos infinito) e interpretamos os limites infinitos, apresentando aplicações focando principalmente a área de Economia e também os limites fundamentais (trigonométrico e exponencial), que facilitam soluções de problemas, favorecendo o desenvolvimento da capacidade de interpretar e resolver problemas.

# 4 OPINIÕES DE ALUNOS E PROFESSORES SOBRE AS PROPOSTAS DE ATIVIDADES FORMULADAS

Neste capítulo, apresentamos as opiniões de 12 alunos (A1, A2, ... , A12) e de três professores de Cálculo Diferencial e Integral, identificados como P1, P2 e P3, sobre as atividades propostas.

## 4.1 Opiniões dos 12 alunos que participaram do minicurso

Conforme mencionamos anteriormente, testamos as atividades elaboradas num minicurso realizado junto a uma turma de 12 alunos de uma instituição particular de ensino superior e que estão cursando o 2° semestre de Licenciatura em Matemática. Ao término do minicurso, os 12 alunos que participaram deste evento responderam a um questionário, sem identificação, para evitar que os mesmos se sentissem intimidados em suas respostas. Os resultados estão sintetizados na seqüência:

a) Durante a resolução das atividades, você consultou algum colega ou professor?

**Quadro 5.** Respostas dos alunos referentes a consulta de colegas ou professor na resolução das atividades.

| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sim | X | X | | X | | X | X | X | X | X | | X |
| Não | | | X | | X | | | | | | X | |

A princípio, podemos pensar que surgiram muitas dúvidas. Entretanto, pelo quadro seguinte, podemos constatar que, em média, os alunos tiveram poucas dificuldades na resolução das atividades propostas, podendo-se conjecturar que as consultas foram feitas como troca de idéias ou para verificar o acerto da atividade, tornando a aula mais participativa.

b) Atribua valores de 0 a 10 para cada uma das atividades propostas, em função das dificuldades que você encontrou para resolvê-las (zero para menor dificuldade e dez para maior dificuldade).

**Quadro 6.** Valores atribuídos pelos alunos às dificuldades encontradas para resolverem as atividades propostas.

| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Atividade 1 | 3 | 3,5 | 2 | 3 | 2,5 | 3 | 3 | 3 | 3,5 | 3,5 | 3 | 3,5 |
| Atividade 2 | 4,5 | 5 | 4 | 4 | 3,5 | 4,5 | 5 | 5 | 4,5 | 4,5 | 4 | 4,5 |
| Atividade 3 | 4 | 4 | 3 | 4 | 2 | 3.5 | 4 | 3,5 | 4 | 4 | 3,5 | 4 |

De acordo com as pontuações apresentadas pelos alunos, as atividades não apresentaram alto nível de dificuldade e todos os índices estão abaixo de ou são iguais a 5. Entretanto, na atividade 2, que focaliza a aplicação formal da definição de limite, o índice de dificuldade é bastante expressivo.

c) Atribua valores de 0 a 10 para cada um dos assuntos abordados, em função das dificuldades encontradas para o entendimento de cada assunto (zero para menor dificuldade e dez para maior dificuldade).

**Quadro 7.** Valores atribuídos pelos alunos às dificuldades encontradas para o entendimento dos assuntos abordados.

| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Def. intuitiva | 4,5 | 4 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4,5 | 3,5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3,7 |
| Def. formal e Propriedades | 4,5 | 4,5 | 4 | 4,5 | 3,5 | 4,5 | 5 | 5 | 4,5 | 4,5 | 4 | 5 | 4,4 |
| Limites laterais | 3,5 | 3 | 2 | 2,5 | 3 | 3 | 3,5 | 3,5 | 3 | 3,5 | 3 | 3,5 | 3,0 |
| Continuidade | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2,5 | 2 | 3 | 2,5 |
| Limites no infinito | 3,5 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3,5 | 3,5 | 2,5 | 3 | 3 | 3 | 3,5 | 2,8 |
| Limites fundamentais | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2,5 | 2 | 3 | 2,5 |

De acordo com as pontuações apresentadas pelos alunos, as dificuldades encontradas em função dos assuntos abordados também se concentram na faixa inferior ou igual a 5. A maior dificuldade apontada refere-se à definição formal e propriedades, seguida da definição “intuitiva”.

d) Atribua valores de 0 a 10 para cada um dos recursos utilizados no desenvolvimento das atividades (zero para menor contribuição e dez para maior contribuição).

**Quadro 8.** Valores atribuídos pelos alunos para cada um dos recursos utilizados no desenvolvimento das atividades.

| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ilustrações gráficas | 8 | 8,5 | 8 | 8 | 7,5 | 7,5 | 8 | 8 | 8 | 9 | 7 | 8,5 | 8,0 |
| Exercícios de aplicação | 9 | 10 | 8 | 9,5 | 9 | 8 | 9 | 9 | 9 | 10 | 8,5 | 9 | 9,0 |
| Uso do computador nas atividades | 6 | 6,5 | 6 | 7 | 7 | 5 | 6 | 6 | 6 | 7 | 6,5 | 7 | 6,3 |
| Uso do datashow | 7 | 7,5 | 8 | 8 | 6 | 7 | 8 | 8 | 7 | 6 | 5 | 6 | 6,9 |

De acordo com as pontuações apresentadas pelos alunos, os exercícios de aplicação foram identificados como o recurso de maior contribuição para sua aprendizagem, seguidos das ilustrações gráficas. O uso do computador foi o item menos indicado.

e) Atribua valores de 0 a 10 para o material didático utilizado no minicurso (zero para ruim e dez para excelente).

**Quadro 9.** Valores atribuídos pelos alunos ao material didático utilizado no minicurso.

| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 | A10 | A11 | A12 | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Clareza | 8 | 9 | 9 | 8,5 | 8 | 8 | 8 | 8,5 | 8 | 9 | 8 | 8,5 | 8,7 |
| Objetividade | 8,5 | 10 | 9 | 9 | 9 | 8 | 9 | 8,5 | 9 | 10 | 10 | 10 | 9,1 |
| Praticidade | 8,5 | 9 | 8 | 9 | 8,5 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 9 | 9,5 | 8,7 |
| Organização | 9 | 10 | 9 | 10 | 10 | 9 | 9,5 | 10 | 9,5 | 10 | 10 | 10 | 9,6 |

No geral, os alunos consideraram o material didático de boa qualidade, principalmente nos itens organização e objetividade.

## 4.2 Opiniões de três professores que analisaram o material

Levantamos a opinião de três professores sobre o material elaborado, com a finalidade de buscar uma análise crítica a respeito que pudesse contribuir para sua reformulação.

**a) Professor P1**

Este professor considera que as atividades introdutórias são interessantes, mas deveriam ser mais enfatizadas/desenvolvidas situações contextualizadas, em que houvesse a necessidade do cálculo da taxa de variação média de uma função – considerou nossa atividade sobre velocidade média como insuficiente e indica outros contextos como o da Economia. Para ele, a utilização da noção de taxa de variação média, como uma ferramenta para caracterizar a “rapidez” com que cresce/decresce uma função em diferentes intervalos, poderia favorecer o desenvolvimento da noção de limite desde que a situação exigisse a medição dessa “velocidade” em intervalos cada vez menores. Posto assim, ele parece defender a introdução do estudo dos limites por meio do desenvolvimento da noção intuitiva de derivada, visto que ele sugere um trabalho intuitivo, com o limite: $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Entretanto, o professor faz elogios às atividades propostas com os limites que envolvem o infinito.

O professor P1 considera que as atividades se caracterizam pela facilidade de sua execução e elogia as aplicações. Entretanto, apesar de defender a inclusão dos softwares, argumenta que a gestão da aula nesses casos não é simples.

Para o trabalho com limites, sugere uma atenção muito especial do docente, quando este for organizar e sistematizar com seus alunos as noções trabalhadas. Afirma que essa transição – a da “experimentação” para o início de uma formalização – não é tarefa nada fácil, e corre-se o risco de o aluno não estabelecer as devidas relações do que foi “visto” por meio dos softwares com as definições e sistematizações e propriedades. Caberia ao professor mediar essa transição, criando estratégias viáveis, a fim de incentivar o aluno no estudo de limite.

**b) Professor P2**

Para este professor, o material exposto é muito interessante e realmente a sua aplicação prática pode colaborar para agilizar o trabalho dos professores de matemática. P2 afirma que é consenso, entre os docentes da mencionada disciplina, a dificuldade para elaboração de gráficos e tabelas relacionadas ao ensino de limite e ressaltou que o material apresentado é de fácil e rápida execução com o uso de recursos computacionais. Acrescentou que, de fato, certas características do computador, como capacidade de animação e facilidade de simular fenômenos, contribuem para que seja facilmente usado na condição de meio didático; e são inúmeros os recursos que oferecem como ferramenta de aprendizagem, além de motivar e despertar a curiosidade do aluno. Por fim, concluiu que é realmente necessário tornar o ensino de limite mais significativo dentro da matemática. O Professor P2 ainda mencionou, a respeito da exposição da aula utilizando o material didático, alguns pontos positivos, como por exemplo: a clareza, a objetividade, a exposição de situações na forma gráfica, fazendo a relação entre o gráfico real e o didático; para ele, o que chamou mais sua atenção foi o questionamento dos alunos durante a aula, tornando-a bastante dinâmica; porém, foram as atividades propostas com aplicações o que realmente diferenciou a aula; como ponto negativo, destacou o fato de o tempo ter sido muito curto para a apresentação de tantos recursos.

**c) Professor P3**

Para o Professor P3, na introdução sobre cálculo, deveriam ter sido mencionadas as teorias sobre limites a partir dos estudos desenvolvidos por D'Alembert e Cauchy; referente ao restante do material, deu um parecer favorável ao uso dos softwares, acreditando que o professor, para o preparo de suas aulas, terá seu trabalho facilitado e citou que seria interessante o uso do software Winplot. Destacou, também, a grande importância das atividades propostas em cada aula como instrumentos para facilitar a aprendizagem dos alunos. Para P3, o material apresentado pode agilizar o processo de preparação do material didático para aulas expositivas e também pode contribuir para um melhor entendimento da matéria por parte dos alunos.

# 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Num trabalho que realizaram em 1990, Cochran-Smith & Lytle, afirmam:

> na maioria dos estudos, os professores são objetos das investigações dos pesquisadores e espera-se que sejam consumidores e implementadores desses resultados. O que está faltando são as vozes dos próprios professores, as questões que eles colocam, os quadros referenciais interpretativos que eles usam para compreender e melhorar sua própria prática de sala de aula.

De certo modo, foi assim que nos sentimos ao longo deste trabalho. Como professor de Cálculo Diferencial e Integral, sempre nos vimos confrontados com vários problemas pedagógicos, tais como a diferença entre as nossas expectativas de aprendizagem pelos alunos e os resultados obtidos por eles.

No entanto, as características do trabalho docente, o número elevado de aulas, a falta de oportunidades para discutir com os outros colegas que trabalham com essa disciplina, não nos permitem elaborar de maneira melhor questões e hipóteses sobre o que ocorre em nossas aulas.

Cursar o Mestrado Profissional e realizar o presente trabalho de conclusão foram duas experiências muito importantes para nossa formação profissional, em que a todo momento se entrecruzaram as preocupações de quem está sendo introduzido no campo da pesquisa e de quem está atuando na prática e na busca por melhores resultados em seu trabalho.

Retomando a questão que orientou nosso trabalho: Buscando elaborar atividades que possam dar significado à aprendizagem da idéia de limite e fazendo uso de softwares como ferramenta auxiliar, é possível melhorar o envolvimento dos alunos na aprendizagem desse conceito?

Apesar de o material elaborado ter sido aplicado a uma turma reduzida de alunos, acreditamos que, numa sala de aula com um número mais expressivo de alunos, o resultado não seria tão discrepante do obtido. Desta forma, podemos fazer algumas observações, visando incentivar reflexões pelos professores de matemática que ministram aulas de cálculo.

Pelas análises feitas sobre o assunto de limite, podemos ressaltar que os professores preferem uma bibliografia voltada ao formalismo da matemática, sem se preocupar muito com sua aplicação, isto em concordância com as bibliografias adotadas por eles; por outro lado, podemos constatar que os alunos destacam as aplicações como um fator primordial para a compreensão e aprendizagem do assunto.

Procurando estabelecer uma visão mais abrangente do assunto e tendo a consciência de sua importância para a aprendizagem do cálculo como um todo, podemos promover algumas práticas que facilitem o ensino e a aprendizagem de limite, como inserir nas notas de aulas mais aplicações, fazer um uso adequado das novas tecnologias e indicar bibliografias complementares envolvendo outras áreas do conhecimento. Desta forma, estaremos formando um profissional com visão ampla do assunto, tanto da parte formal como da parte aplicativa, com capacidade de amenizar as dificuldades dos alunos de outras áreas na aprendizagem da matemática. Alem disso, temos que ter a plena consciência de que o aprendizado de boa parte do cálculo se faz por intermédio de resolução de exercícios com aplicação.

Concluímos que houve uma boa aceitação do presente trabalho pelos professores que avaliaram as apresentações dos recursos sugeridos e, pelos comentários feitos, acreditamos que a presente pesquisa será de grande proveito para os docentes.

Um ambiente propício para o ensino de matemática, mais especificadamente para o ensino de limite, utilizando novas tecnologias como ferramenta auxiliar, deve levar em conta o plano de aula do professor e um laboratório de informática devidamente adequado. Porém, nem todas as instituições de ensino superior possuem infra-estrutura adequada para este fim; esta realidade limita a atuação do professor até mesmo para o preparo do material didático. Mesmo com a carência de recursos tecnológicos nas universidades para uso dos alunos e insuficiente para uso do corpo docente, os professores poderão utilizar as informações presentes nesta pesquisa para a elaboração do material didático.

Finalmente, podemos reafirmar, em conformidade com outros trabalhos citados anteriormente, que o uso dos recursos da informática para o ensino e aprendizagem de cálculo, em especial de limite e a aplicabilidade deste conhecimento em outras áreas afins, é totalmente viável e de grande aceitação, tanto pelo corpo docente como discente, pois facilita o entendimento da matéria pelos alunos e agiliza o trabalho dos professores.

# 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6023/2002: Informação e documentação – referências – elaboração. Rio de Janeiro, 2002. 24p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 10520/2002: Informação e documentação – apresentação de citações em documentos. Rio de Janeiro, 2002. 4p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 14724/2002: Informação e documentação – trabalhos acadêmicos. Rio de Janeiro, 2002. 6p.

AZEVEDO, B. F. T. Tópicos em Construção de Software Educacional. Estudo Dirigido apresentado ao Mestrado em Informática, Universidade Federal do Espírito Santo. Espírito Santo: Vitória, 1997.

AZEVEDO, B. F. T.; TAVARES, O. L., Cury, D. MuTantIS – Um Sistema Tutor Inteligente Multiagente para o Ensino-Aprendizagem de Conceitos. Anais do X Simpósio Brasileiro de Informática na Educação. Paraná: Curitiba, 1999.

AZEVEDO, B. F. T., TAVARES, O. L. Um ambiente inteligente para aprendizagem colaborativa XII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação. Espírito Santo: Vitória, –2001.

AYALA, G.; YANO, Y. Evaluating the Performance of Agents that Support the Effective Collaboration of Learners in a CSCL Environment. IEICE Trans. Inf. & Sist. Vol E80-D, N.2, February, 1997.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo. Brasília: Universidade de Brasília, 1985. v.5, n.1-5.

BARTO, M. C. A. L. Um olhar sobre as idéias matemáticas em um curso de cálculo: A produção de significados para a continuidade. 2004. 105f. Dissertação (mestrado em matemática: Educação matemática) – PUC/SP, 2004

BARUFI, M. C. A. A construção/negociação de significados no curso inicial de cálculo diferencial e integral. 1999. 195f. Tese (Doutorado em matemática: Educação matemática) – Faculdade da educação, Universidade de São Paulo, 1999.

BOULOS, P.; ABUD, Z. I. Cálculo diferencial e integral. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2002. v.2, n.1.

BOYER, C. B. História da matemática. Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488p.

Cabri World 99 – Relatos de Experiência. Disponível em: <http://www.cabri.com.br/ pesquisas/c99_anais/re/re_jonaslopes.htm> Acesso em: 01 set. 2004.

CERVO, A. L. & BERVIAN, P. A. Metodologia cientifica, 5.ed. São Paulo: Prertice Hall, 2002. 242p.

CIVITA, V. Enciclopédia ciência ilustrada. São Paulo: Abril cultural, 1969. v.11, n.4-5.

CHEIKES, B. A. GIA: An Agent Based Architecture for Intelligent Tutoring Systems. Proceedings of the CIKM Workshop on Intelligent Information Agents,

1995. Disponível em: <http://www.cs.umbc.edu/~cikm/iia/proc.html>. Acesso em: 17 maio. 2005

COCHRAN-SMITH, M.; LYTLE, S. Research on teaching and teacher research: The issues that divide. Educational Researcher. v.19, p.2-11, 1990.

COURANT, R.; ROBBINS, H. O que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. São Paulo: Moderna, 2000. 624p.

DACORSO NETO, C. Elementos de cálculo infinitesimal. São Paulo: Nacional, 1971. 478p.

DILLENBOURG, P.; SCHNEIDER, D. Collaborative learning and the Internet. Paper presented at the ICCAI95, 1995. Disponível em: <http://tecfa.unige.ch/tecfa/research/CMC/colla/iccai95_1.html> Acesso em: 12 jan. 2005

EVES, H. Introdução à história da matemática. Tradução: Higino H. Dominguez. Campinas : UNICAMP, 2004. 843p.

FERREIRA, J. S., Labidi, S. Modelagem do Aprendiz baseado no Paradigma de Ensino Cooperativo. In: Simpósio Brasileiro em Informática na Educação, (SBIE–98), 1998. Fortaleza. Anais do IX Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 1998.

FININ, T.; FRITZSON, R.; MCKAY, D.; MCENTIRE, R. KQML as na Agent Communication Language. Proceedings of the Third International Conference on Information and Knowledge Management, 1994.

FLEMMING,D.M. Cálculo A: limite, derivação, integração – 5ª ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1992. 617p.

GOKHALE, A. A. Collaborative Learning Enhances Critical Thinking. Journal of Technology Education, v. 7, n. 1, 1995.

GOODMAN, B.; SOLLER, A.; LINTONI, F.; GAIMARI, R. Encouraging Student Reflection and Articulation using a Learning Companion. International Journal of Artificial Intelligence in Education, 9(3-4), 1998.

GUIDORIZZI, H. L. Um curso de cálculo. 3.ed. Rio de Janeiro: Livros e Técnico Científicos S.A., 1995. v. 5, n. 1, 585p.

LABIDI, S., et al. Agent-Based Architecture for a Cooperative Learning Environment. Maceió: Anais do XI Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 2000.

LEHTINEN, E., et al. Computer Supported Collaborative Learning: A Review. 2003, Rio de Janeiro. Disponível em: <http://www.kas.utu.fi/clnet/clnetreport.html> Acesso em: 01 set. 2005.

LEITHOLD, L. O cálculo com geometria analítica. 3ed. São Paulo: Ed. Harbra, 1994. v. 2, n. 1, 751p.

MANUAL de utilização do Cabri-géomètre: versão Windows. Desenvolvido por Texas Instruments Instructional Communications, 1997.

MANUAL de utilização do Cabri-géomètre: versão Windows. Disponível em: <http://www.cabri.com.br/download/manual.htm> Acesso em: 05 maio. 2005.

MELO, J. M. R. Conceitos de integral: Uma proposta computacional para o ensino e aprendizagem. 2002. 180f. Dissertação (Mestrado em matemática: Educação matemática) – PUC/SP, 2002

MOISE, E. E. Cálculo: um curso universitário. São Paulo: Ed. Edgard Blüncher, 1972. v. 2, n. 1.

MORAN, J. M., et al. Novas Tecnologias e mediação Pedagógicas, Campinas: Papirus, 2000.

MOREIRA, M. A. Uma Abordagem Cognitivista ao Ensino da Física. Porto Alegre, Ed. da Universidade, UFRGS, 1983. 189p.

MOREIRA M. A, MASINI, Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel, São Paulo, Moraes, 2001. 112p.

MOYSÉS, L. Aplicações de Vygotsky à educação matemática. Campinas: Papirus, 2001. 176p.

OLIVEIRA, M. A.; SILVA, A. Biblioteca da matemática moderna, tomo IV. São Paulo: lisa – livros irradiantes s. a.,1971.

OLIVEIRA, J. F. T.I.C. – Tecnologias da informação e da Comunicação, São Paulo: Érica, 2003.

OLIVEIRA, M. K. Vygotsky: Aprendizado e desenvolvimento/ um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipionee, 2003. 111p.

PISKUNOV, N. Cálculo diferencial e integral, tomo I. Moscou: Mir, 1978. 519p.

SARAIVA, R. P. Novas tecnologias no ensino do conceito de limite de função. 2000. 97p. Dissertação (Mestrado em matemática: Educação matemática) – PUC/SP, 2000.

SLAVIN, R. E. Research on cooperative learning and achievement: A quarter century of research. Paper presented at the Annual Meeting of Pedagogical Psychology, Frankfurt, September, 1997.

STEWART, J. Cálculo. 4.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. v. 2, n. 1, 678p.

STRUIK, Dirk. História concisa da matemática. Lisboa: Gradiva, 1987.

SWOKOWSKI, E. W. Cálculo com geometria analítica. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1994. v. 2, n. 1, 744p.

TAN, S. T. Matemática Aplicada à Administração e Economia. São Paulo: Thomson, 2001. 640p.

VIEIRA, D. J.C. Ensino Aprendizagem do Conceito de Limite. Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 1991.

VYGOTSKY, L. A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

VYGOTSKY, L. S. A formação social da mente. São Paulo, Martins Fontes, 1984

VYGOTSKY, L. S. Pensamento e linguagem. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

VYGOTSKY, L.S.; LURIA, A.R. e LEONTIEV, A.N. Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem. São Paulo: Ícone-USP, 1988.

ZUCHI, I. A abordagem do conceito de limite via seqüência didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional. 2005. Tese (Doutorado em engenharia de produção: Pós-graduação em engenharia de produção). Universidade Federal de Santa Catarina, 2005.

WILLIAMS, S. Models of Limit Held by College Calculus Students, J. for Research Math-Ed, 1991

# 7 ANEXOS

Anexo A: As atividades elaboradas

## Aula 1 - Definição intuitiva de Limite

Objetivo da aula: Conceituar limite de forma intuitiva  e revisar os processos de fatoração.

## Introdução ao Cálculo

O século XVII foi extremamente produtivo para o desenvolvimento da matemática, graças, em grande parte, aos trabalhos produzidos, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz que, motivados pela resolução de problemas físicos (encontrar a reta tangente a uma curva num dado ponto da curva) e geométricos (encontrar a área da região plana limitada por uma curva arbitrária), impulsionaram o desenvolvimento do cálculo, transformando-o numa ferramenta indispensável para a solução de problemas práticos de diversas áreas, tais como:

- ✓ Determinar a taxa de variação do lucro de uma empresa em relação ao tempo.
- ✓ Determinar o crescimento populacional  de uma cidade em relação ao tempo.

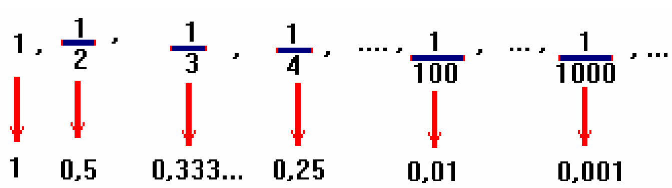
- ✓ Determinar a taxa de variação de vendas de um certo produto em relação à propaganda.
- ✓ Determinar o fluxo de renda futura acumulado por uma empresa em relação a um certo período de tempo.

O estudo do problema da reta tangente (encontrar a reta tangente a uma curva num ponto da curva) motivou o desenvolvimento do cálculo diferencial, que se baseia no conceito de derivada de uma função. O estudo do problema da área (encontrar a área da região plana limitada por uma curva arbitrária) levou à criação do cálculo integral, que se baseia no conceito de antiderivada de uma função. A formulação das definições de derivada e integral é baseada num conceito mais fundamental, o de limite de uma função, que será apresentado a seguir, explorando inicialmente uma idéia intuitiva.

## Limite na vida prática

Observemos algumas situações, nas quais estão presentes as idéias intuitivas de limite.

1. Se o câmbio do dólar americano tende a estabilizar em torno de R$ 3,00, então o valor pago por 100 dólares estabiliza em R$ 300,00. Logo, podemos falar que o limite (valor pago por 100 dólares) é igual a R$ 300,00, quando o valor pago por 1 dólar tende a R$ 3,00.
2. Consideremos agora a seqüência (**$a_n$**) de números com $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, explicitada por:



Observemos que, à medida que n cresce indefinidamente, o valor de $\mathbf{a_n}$ vai se aproximando, vai tendendo, vai convergindo para 0. Dizemos, então, que, quando n tende a infinito, o limite da seqüência é igual a zero.

3. Imagine uma placa metálica quadrada que se expande uniformemente por estar sendo aquecida. Se x é o comprimento do lado, a área da placa é dada por $A = x^2$. Evidentemente, quando x se avizinha de 3, a área da placa A tende a 9. Expressamos isto dizendo que quando x se aproxima de 3, $x^2$ se aproxima de 9 como um limite. Simbolicamente, escreveremos:

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

onde a notação "$x \to 3$" indica x tende a 3 e "lim" significa "o limite de".

4. Suponhamos agora, que você esteja dirigindo um automóvel; se o acelerador for calcado para baixo em torno de 2 cm, então a velocidade se manterá próximo aos 80 km/h. Logo, podemos dizer que o limite (velocidade instantânea do automóvel) é igual a 60 km/h, quando o acelerador tender a 2 cm para baixo. Matematicamente escrevemos esta situação através da seguinte expressão:

$$\lim_{x \to 2} v(x) = 60,$$

onde v(x) é a velocidade instantânea do automóvel e x é a medida em centímetros calcado no acelerador.

5. Para fecharmos a idéia, considere $v(t) = \dfrac{4(t^2 - 4)}{t - 2}$, a função que nos fornece a velocidade média de um carro. Suponhamos que temos que calcular o valor de v(t), quando t se aproxima de 2 (sem atingi-lo).

Observaremos que, à medida que os valores de t se aproximam de 2 pela direita (valores maiores que 2) ou pela esquerda (valores menores que 2), os valores da velocidade média correspondentes também se aproximam cada vez mais de 16m/s. Para melhor compreensão, observe a tabela e os gráficos :

| tempo (t) | 1,9 | 1,99 | 1,999 | ... 2 ... | 2,001 | 2,01 | 2,1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Velocidade [v(t)] | 15,6 | 15,96 | 15,996 | ... 16 ... | 16,004 | 16,04 | 16,4 |

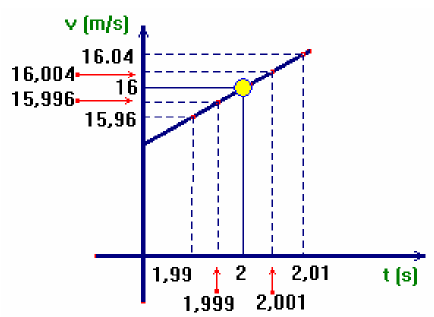



Gráfico Didático

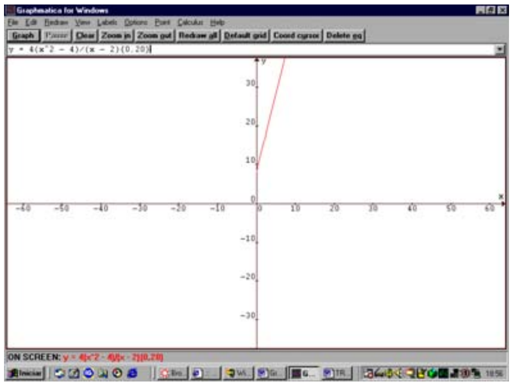


Gráfico real (Graphmatica)

**Observação:** O gráfico que chamamos de real, é plotado por um computador que é baseado na matemática discreta e não na matemática contínua, desta forma, o furo na reta não é visível. Assim, mostramos ao lado o gráfico didático em que aparece o “furo” na reta, representando que o número 2 não pertence àquela reta. Então podemos concluir que, quando t se aproxima de 2 segundos, tanto pela direita como pela esquerda, v(t) se aproxima de 16m/s, e escreveremos:

$$\lim_{t\to 2} v(t) = \lim_{t\to 2} \frac{4(t^2-4)}{t-2}$$

Observe que o ponto $t = 2$ não pertence ao domínio da função v [por esta razão, o ponto (2,16), indicado por um pequeno "furo", não está definido no gráfico de v, mostrado anteriormente]. Isto, no entanto, é de pouca importância porque o valor de v(t) em $t = 2$ não desempenha nenhum papel no cálculo de limite.

Pelos exemplos expostos anteriormente, chegamos à seguinte definição informal de limite:

> Uma função **f(x)** tem limite **L**, quando **x** se aproxima de **"a"**, denotado por $\lim_{x \to a} f(x) = L$**,** logo, podemos fazer o valor de **f(x)** tão próximos do número **L** quanto quisermos, tomando **x** suficientemente próximo (mas não igual) a **"a".** (TAN 2001, p. 96)

**Observação:** Já sabemos que para $t = 2$, a função $v(t) = \dfrac{4(t^2 - 4)}{t - 2}$ não está definida. Vejamos o que acontece se tentarmos calcular o limite de v(t), quando t tende a 2, denotado por:

$$\lim_{t \to 2} \frac{4(t^2 - 4)}{t - 2},$$

substituindo $t = 2$ nesta expressão, temos:

$$\lim_{t \to 2} \frac{4(t^2 - 2)}{t - 2} = \frac{4(2^2 - 4)}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

resulta numa indeterminação, ou seja, o resultado da divisão é duvidoso, pois zero dividido por zero permite escrever qualquer resultado. Essa indeterminação pode ser contornada simplificando a expressão $t^2 - 4$ da seguinte forma: $t^2 - 4 = t^2 - 2^2 = (t - 2)(t + 2)$ (diferença de dois quadrados). Substituindo a expressão fatorada na função limite, o termo $(t - 2)$ será cancelado, contornando assim a indeterminação:

$$\lim_{t\to 2}\frac{4(t^2-4)}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{4\cancel{(t-2)}(t+2)}{\cancel{t-2}}=\lim_{t\to 2}4(t+2)=\lim_{t\to 2}4t+8$$

$v(t)=4t+8$, é a forma fatorada da função mostrado no gráfico anteriormente. Como podemos perceber, para o estudo de limite é fundamental que o aluno tenha conhecimento de algumas fatorações, que poderá ser utilizado como artifício, a fim de contornar indeterminações, conforme mostrado no exemplo anterior. Vejamos agora alguns casos de fatoração:

a) Diferença de dois quadrados

$(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$ Exemplo: $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$

b) Trinômio quadrado perfeito

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ Exemplo: $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ Exemplo: $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

c) Soma de dois cubos

$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ Exemplo: $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 2^2)$

d) Diferença de dois cubos

$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ Exemplo: $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 3^2)$

e) Trinômio do 2° grau

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ e $a \neq 0$. Se $\Delta \geq 0$ e x' e x'' são as raízes da função f, então f(x) pode ser fatorada na seguinte forma: $f(x) = a(x - x')(x - x'')$. As raízes de $f(x) = ax^2 + bx + c$ podem ser determinadas pela fórmula de Bhaskara:

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

**Exemplo:** fatore o trinômio $x^2 - 7x + 12$.

Inicialmente, calcularemos as raízes da equação pela fórmula de Bhaskara:

**1º. passo:** determinar o valor de $\Delta$ (delta). Não esqueça que $\Delta$ tem que ser maior ou igual a zero ($\Delta \geq 0$), caso $\Delta < 0$ (negativo) a equação não possui raízes reais.

$a = 1,\ \ b = -7\ \ \text{e}\ \ c = 12$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$

**2º. passo:** Determinar as raízes pela fórmula de Bhaskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2x1} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$x' = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x'' = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

**3º. passo:** Com as raízes determinadas $x' = 4$ e $x'' = 3$, substituir na forma fatorada da equação: $a(x - x')(x - x'') = 1(x - 4)(x - 3) = (x - 4)(x - 3)$. Finalmente escreveremos a equação na forma fatorada, conforme abaixo:

$x^2 - 7x + 12 = (x - 4)(x - 3)$

## Atividade da aula 1

1. Considere a região do plano limitada pelo triângulo retângulo de base fixa e igual a 4 cm. Faça a altura ir se aproximando de 3, mas sem atingir 3, isto é, faça a altura tender a 3. Complete a tabela dada e verifique para que valor está tendendo a área dessa região. O cálculo da área do triângulo é dado pela expressão: $A = b \cdot h/2$, onde b é a base e h a altura.

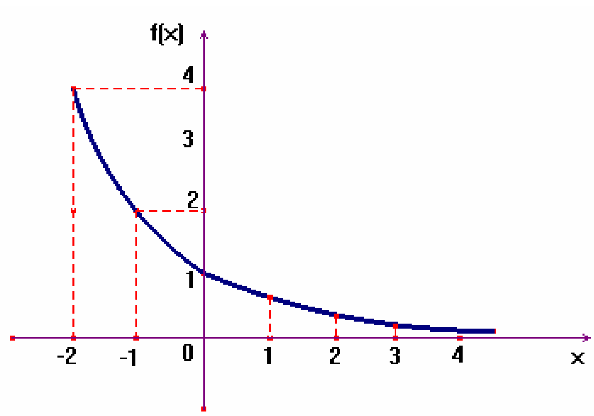
Obs: Utilize o excel para fazer a tabela.

| Base | Altura | Área |
|---|---|---|
| 4 | 1 | |
| 4 | 1,5 | |
| 4 | 2,0 | |
| 4 | 2,5 | |
| 4 | 2,9 | |
| 4 | 2,999 | |
| 4 | 2,999999 | |

2. Considere o gráfico da função exponencial $f(x) = (1/2)x$ e responda:

a) à medida que x tende a 0 (zero), f(x) tende a que valor ?

b) à medida que x tende para um valor cada vez maior, f(x) tende para quanto?



3. considere a seqüência $a_n = (1 + 1/n)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Complete a tabela abaixo com os valores de n e verifique para que valor está tendendo essa seqüência $a_n$ quando n tende ao infinito (cresce indefinidamente).

| n | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 10 | |
| 100 | |
| 1000 | |

# Aula 02: Limite de uma função

Objetivo da aula: Apresentar o conceito formal de limite e funções contínuas, mostrando algumas aplicações.

O conceito de limite de uma função é fundamental para o estudo e compreensão do cálculo. Aproveitaremos a idéia intuitiva de limite que estudamos na aula anterior de se aproximar o máximo possível de um ponto e, mesmo assim, nunca alcançá-lo.

Antes, porém, é conveniente observar que a existência do limite de uma função, quando x tende a "a", não depende necessariamente que a função esteja definida no ponto "a", pois quando calculamos um limite, consideramos os valores da função tão próximos quanto queiramos do ponto "a", porém não coincidente com "a", ou seja, consideramos os valores da função na vizinhança do ponto "a".

Consideremos a função definida por $f(x)\dfrac{4x^2-16}{2x-4}$ com $x \in \Re$ e $x \neq 2$. Vamos estudar o limite de f(x) quando x tende a 2, ou seja $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Observemos que para $x = 2$, a função não é definida, ou seja, não existe o f(2). Entretanto, lembrando que $4x^2 - 16 = (2x+4)(2x-4)$, substituindo e simplificando, a função fica igual a $f(x) = 2x + 4$, conforme mostraremos abaixo: $\dfrac{(2x+4)\cancel{(2x-4)}}{\cancel{2x-4}} = 2x + 4$, mesmo não existindo f(2), o limite de f(x) quando x tende a 2 existe, pode ser calculado da seguinte forma:

$$\lim_{x \to 2} \frac{4x^2-4}{2x-4} = \lim_{x \to 2}(2x+4) = 22 + 4 = 8$$

Estudaremos a função f quando x assume valores próximos de 2, porém diferente de 2.

Atribuindo a x valores próximos de 2, porém menores que 2, temos:

| X | 1,8 | 1,9 | 1,99 | 1,999 |
|---|---|---|---|---|
| F(x) = 2x + 4 | 7,6 | 7,8 | 7,98 | 7,998 |

Se atribuirmos a x valores próximos de 2, porém maiores que 2, temos:

| X | 2,2 | 2,1 | 2,01 | 2,001 |
|---|---|---|---|---|
| F(x) = 2x + 4 | 8,4 | 8,2 | 8,02 | 8,002 |

Observemos em ambas as tabelas que, quando x se aproxima cada vez mais de 2, f(x) aproxima-se cada vez mais de 8.

Notemos na primeira tabela que:

$x = 1{,}9 \Rightarrow f(x) = 7{,}8$, isto é, $x - 2 = 1{,}9 - 2 = -0{,}1 \Rightarrow f(x) - 8 = 7{,}8 - 8 = -0{,}2$

$x = 1{,}99 \Rightarrow f(x) = 7{,}98$, isto é, $x - 2 = 1{,}98 - 2 = -0{,}01 \Rightarrow f(x) - 8 = 7{,}98 - 8 = -0{,}02$

x = 1,999 $\Rightarrow$ f(x) =7,998, isto é,

$x - 2 = 1{,}998 - 2 = -0{,}001 \Rightarrow f(x) - 8 = 7{,}998 - 8 = -0{,}002$

e, a segunda tabela nos mostra que:

$x = 2{,}1 \Rightarrow f(x) = 8{,}2$, isto é, $x - 2 = 2{,}1 - 2 = 0{,}1 \Rightarrow f(x) - 8 = 8{,}2 - 8 = 0{,}2$

$x = 2{,}01 \Rightarrow f(x) = 8{,}02$, isto é, $x - 2 = 2{,}011 - 2 = 0{,}01 \Rightarrow f(x) - 8 = 8{,}02 - 8 = 0{,}02$

$x = 2{,}001 \Rightarrow f(x) = 8{,}002$, isto é,

$x - 2 = 2{,}001 - 2 = 0{,}001 \Rightarrow f(x) - 8 = 8{,}002 - 8 = 0{,}002$

Portanto, pelas duas tabelas vemos que:

$|x - 2| = 0{,}1 \quad \Rightarrow |f(x) - 8| = 0{,}2$

$|x - 2| = 0{,}1 \quad \Rightarrow |f(x) - 8| = 0{,}02$

$|x - 2| = 0{,}001 \quad \Rightarrow |f(x) - 8| = 0{,}002$

Observemos que podemos tornar f(x) tão próximos de 8 quanto desejarmos, bastando para isto tomarmos x suficientemente próximo de 2. Existe uma forma mais técnica para expressarmos a afirmação anterior: podemos tornar o módulo da diferença entre f(x) e $8\ (|\,f(x)-8\,|)$ tão pequenos quanto desejarmos, desde que tornemos o módulo da diferença entre x e $2\ (|\,x-2\,|)$ suficientemente pequeno. A matemática utiliza as letras gregas $\varepsilon$ (epsilon) e $\delta$ (delta) para indicar essas diferenças pequenas.

Assim, dado um número positivo $\varepsilon$, se desejarmos $\left|f(x)-8\right|$ menor que $\varepsilon$, devemos tomar $\left|x-2\right|$ suficientemente pequeno, isto é, devemos encontrar um número positivo $\delta$, suficientemente pequeno, de tal modo que:

$0<\left|x-2\right|<\delta \quad \Rightarrow \left|f(x)-8\right|<\varepsilon$ onde, calculando o módulo, resulta:

$$2-\delta<x<2+\delta \quad \Rightarrow 8-\varepsilon<f(x)<8+\varepsilon$$

É importante perceber que $\delta$ depende do $\varepsilon$ considerado. Nas duas tabelas vemos que:

$$|x-2|=,01 \ \Rightarrow |f(x)-8|=0,2\,;$$

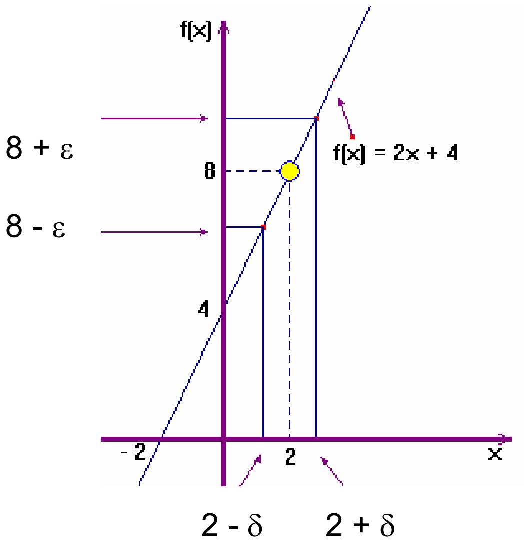
então; se for dado $\varepsilon=0,2$, tomamos $\delta=0,1$ e afirmamos que

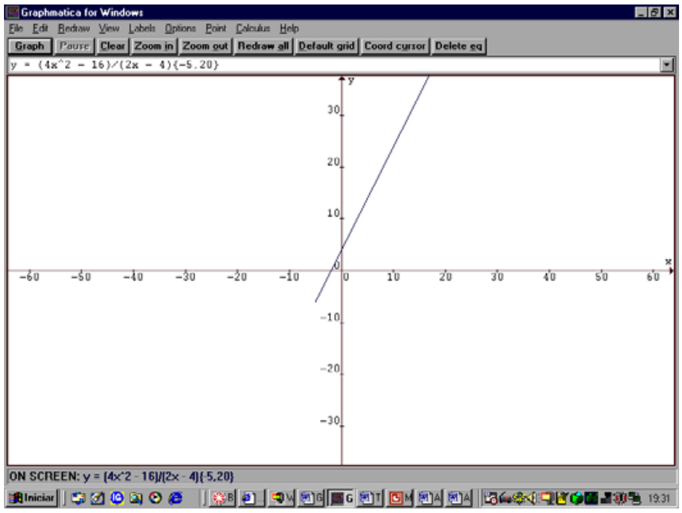
$0<\left|x-2\right|<0,1 \qquad \Rightarrow \qquad \left|f(x)-8\right|<0,2$ onde calculando o módulo, resulta:

$2-0,1<x<2+0,1 \qquad \Rightarrow \qquad 8-0,2<f(x)<8+0,2$

$1,9<x<2,1 \qquad \Rightarrow \qquad 7,8<f(x)<8,2$

Para melhor compreensão, observe os gráficos:




Desde que, para qualquer valor positivo de ε, podemos encontrar um valor apropriado para δ tal que:

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 8| < \varepsilon$$

dizemos que o limite de f(x), para x tendendo a 2, é 8, notado por:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 8$$

## *Definição formal de Limite*

1) Guidorizzi (1995, p. 77): Sejam *f* uma função e *p* um ponto do domínio de *f* ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de *f*. Dizemos que *f* tem limite L, em *p*, se, para todo ε > 0 dado, existir um δ > 0 tal que, para todo

$x \in D_f$

$$0 < | x - p | < \delta \Rightarrow | f(x) - L | < \varepsilon .$$

Tal número *L*, que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \to p} f(x)$.

Assim,

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$$

tal que, para todo $x \in D_f$

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon .$$

2) Flemming (1992, p. 78): Seja *f* (*x*) definida num intervalo aberto I, contendo *a*, exceto possivelmente no próprio *a*. Dizemos que o limite de f(x) quando *x* aproxima-se de *a* é *L*, escrevemos

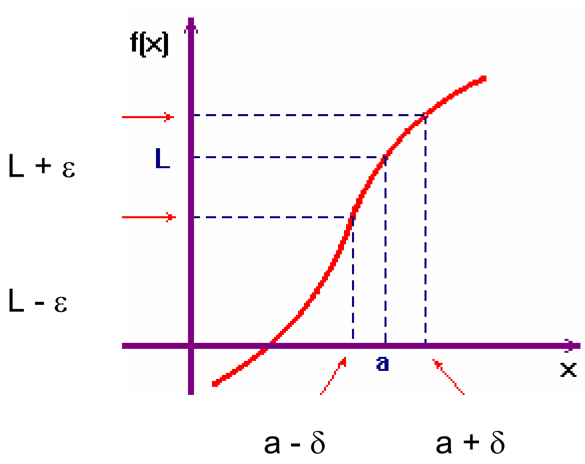
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon$ > 0, existe δ > 0, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

3) Leithold (1994, p. 58): Seja *f* uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo *a*, exceto possivelmente no próprio *a*. O limite de *f*(*x*) quando *x* tende *a* a será *L*, escrito como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se a seguinte afirmativa for verdadeira: dado $\varepsilon$ > 0 qualquer, existe um δ > 0, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.



4) Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Lê-se: O limite de f(x), quando x tende a a, é o número L, se e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existir, em correspondência, um número $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Símbolos:

$\forall$ (leia: qualquer que seja ou para todo)

$\exists$ (leia: existe)

$\Rightarrow$ (leia: implica ou então)

$\Leftrightarrow$ (leia: equivale ou se e somente se)

$\in$ (leia: pertence)

$\mid$ (leia: tal que)

**Exemplos:** Usando a definição, provar que:

a) $\lim_{x \to 1} (3x - 1) = 2$

De acordo com a definição, devemos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$|(3x - 1) - 2| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x - 1| < \delta$$

O exame da desigualdade envolvendo ε proporciona uma chave para a escolha de δ.

As seguintes desigualdades são equivalentes:

$|3x - 1 - 2| < \varepsilon$

$|3x - 3| < \varepsilon$

$|3(x - 1)| < \varepsilon$

$3|x - 1| < \varepsilon$

$|x - 1| < \varepsilon / 3$ .

A última desigualdade nos sugere a escolha do δ.

Fazendo $\delta = \varepsilon / 3$ , vem que

$(3x - 1) - 2| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta$ .

Portanto, $\lim_{x \to 1} (3x - 1) = 2$

b) $\lim_{x \to 4} x^2 = 16$

Vamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ , existe $\delta > 0$ , tal que

$|x^2 - 16| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 4| < \delta$

Da desigualdade que envolve ε, temos

$|x^2 - 16| < \varepsilon$

$|x - 4||x + 4| < \varepsilon$

Necessitamos agora substituir $|x + 4|$ por um valor constante. Neste caso, vamos supor

$0 < \delta \leq 1$,

E então, de $0 < |x - 4| < \delta$, seguem as seguintes desigualdades equivalentes:

$|x-4|<1$

$-1<x-4<1$

$3<x<5$

$7<x+4<9$

Portanto, $|x+4|<9$.

Escolhendo $\delta = \min(\varepsilon/9,1)$, temos que se $|x-4|<\delta$

Então

$$|x^2-16| = |x-4|\,|x+4| < \delta \cdot 9$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\cancel{9}} \cdot \cancel{9}$$

$$= \varepsilon.$$

Logo $\lim\limits_{x \to 4} x^2 = 16$

**Teorema da unicidade do limite**

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

**Prova.** Seja ε > 0 arbitrário. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x)-L_1| < \varepsilon/2 \text{ sempre que } 0<|x-a|<\delta_1.$$

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$|f(x)-L_2| < \varepsilon/2$ sempre que $0<|x-a|<\delta_2$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ e $|f(x) - L_2| < \varepsilon/2$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Seja *x* tal que $0 < |x - a| < \delta$. Então podemos escrever

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, temos $|L_1 - L_2| = 0$ e, portanto, $L_1 = L_2$. (FLEMMING 1992, p.80).

## Propriedades dos Limites

Swokowski (2001, pp.75-77). Suponha que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$, então:

1. O limite do produto de duas funções é o produto dos limites dessas funções.

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

Como conseqüência:

a) O limite da k-ésima potência de qualquer função é igual à k-ésima potência do limite dessa função.

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^k = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^k = (L_1)^k$$

Exemplo: $\lim\limits_{x \to 3} (x)^2 = \left(\lim\limits_{x \to 3} x\right)^2 = (3)^2 = 9$

b) O limite de uma constante é a própria constante $\lim\limits_{x \to a} k = k$, onde $k \in \Re$

Exemplo1: $\lim\limits_{x \to 4} 12 = 12$

Exemplo2: $\lim\limits_{x \to 2} 8x = \lim\limits_{x \to 2} 8 \cdot \lim\limits_{x \to 2} x = 8.2 = 16$

2. O limite da soma de duas funções é a soma dos limites dessas funções.

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=L_1+L_2$$

Como conseqüência:

O limite da diferença de duas funções é a diferença dos limites dessas funções.

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=L_1-L_2$$

Exemplo 1: $\lim_{x\to 5}(x-2)=\lim_{x\to 5}x-\lim_{x\to 3}2=5-2=3$

Exemplo 2: $\lim_{x\to 3}(x+8)=\lim_{x\to 3}x+\lim_{x\to 3}8=3+8=11$

3. O limite do quociente de duas funções é o quociente dos limites dessas funções.

$$\lim_{x\to a}=\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{L_1}{L_2}\text{, com } L_2\neq 0$$

**Exemplo:**

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+2}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 2}3x+2}{\lim_{x\to 2}x+1}=\frac{3.2+2}{2+1}=\frac{8}{3}$$

**Observação:**

Enfatizamos novamente que a propriedade 3 de limites é válida apenas quando o limite da função que aparece no denominador não é igual a zero no ponto em questão. Caso o denominador seja igual a zero, podemos simplificar a expressão, solucionando assim nosso problema, conforme exemplo seguinte:

Calcule o $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x - 3}$

resolvendo o $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x - 3} = \dfrac{3^2 - 3.3}{3 - 3} = \dfrac{0}{0}$, resulta numa indeterminação com o denominador igual a zero, logo não podemos aplicar imediatamente a propriedade 3, temos que primeiro contornar essa indeterminação, simplificando as expressões:

$$\frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \frac{x\cancel{(x - 3)}}{\cancel{(x - 3)}} = x$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} x = 3$$

**Teorema do confronto**

Flemming (1992, pp.83-84). Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo *x* em um intervalo aberto contendo *a*, exceto possivelmente em *x* = *a*, e se

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$$

então,

$$\lim_{x \to a} h(x) = L$$

**Prova.** Seja ε > 0 arbitrário. Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$. Como $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$.

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, se $0 < |x - a| < \delta$ temos $|f(x) - L| < \varepsilon$ e $|g(x) - L| < \varepsilon$, de forma equivalente, $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$ e $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

Assim, usando a hipótese, concluímos que se $0 < |x - a| < \delta$, então,

$$L - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < L + \varepsilon$$

Isto é,

$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon .$$

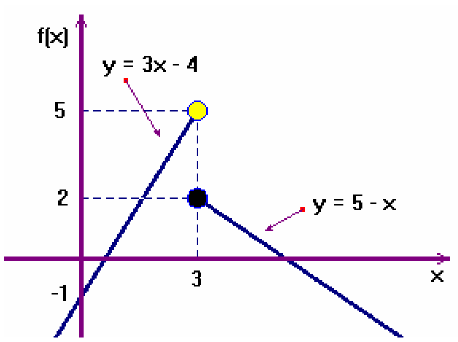
Logo, se $0 < |x - a| < \delta$, temos que $|h(x) - L| < \varepsilon$ e, portanto $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$.

## *Limites laterais*

Ao consideramos o cálculo do $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, estamos interessados no comportamento da função nos valores próximos de a, isto é, nos valores de x pertencentes a um intervalo aberto contendo a, porém diferentes de a, ou seja, nos valores desse intervalo que são maiores ou menores que a.

Mostraremos a seguir o comportamento de uma função quando x assume valores próximos de a, pela esquerda (valores menores que a), diferente de quando x se aproxima de a pela direita (valores maiores que a).

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x < 3 \\ 5 - x & \text{se } x \ge 3 \end{cases}$$



Observemos no gráfico que, quando x se aproxima de 3 pela esquerda $(x \to 3^-)$, $f(x)$ se aproxima de 5. Assim:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5 \text{ (limite lateral à esquerda).}$$

E, quando x se aproxima de 3 pela direita $(x \to 3^+)$, $f(x)$ se aproxima de 2. Assim:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2 \text{ (limite lateral à direita).}$$

Nesse caso, dizemos que o limite de f(x), quando x tende a 3, não existe, pois os limites à direita e à esquerda são diferentes. A justificação da não existência de um limite devido ao fato de o limite à direita ser diferente do limite à esquerda é dada pelo teorema:

"Para que exista o limite $\left(\lim_{x \to a} f(x)\right)$, devem existir e serem iguais os limites laterais à direita e à esquerda, isto é: $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$"

## *Definições formais dos limites laterais*

**limite lateral à direita**

Seja f uma função definida em um intervalo aberto ]a, b[. O limite de f(x) quando x se aproxima de a pela direita é L, notado por:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se $\left| f(x) - L \right|$ puder se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tornando $x - a$ tão pequeno quanto necessário, sendo que $x - a > 0$. (LEITHOLD, 1994).

## *Limite lateral à esquerda*

Seja f uma função definida em um intervalo aberto ]b, a[. O limite de f(x) quando x se aproxima de a pela esquerda é L, notado por:

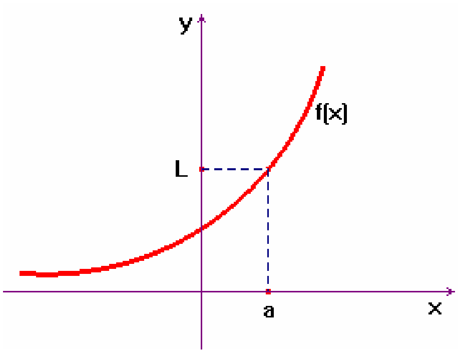
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se $\left| f(x) - L \right|$ puder se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tornando $x - a$ tão pequeno quanto necessário, sendo que $x - a > 0$. (LEITHOLD, 1994).

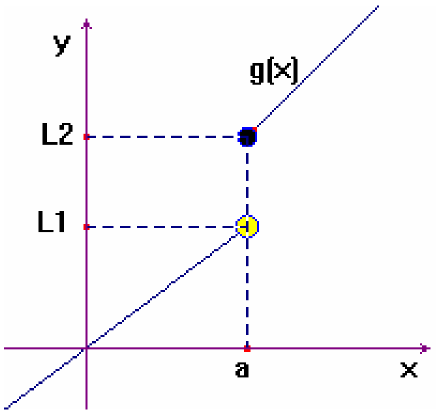
## Continuidade de uma função

Intuitivamente dizemos que uma função é contínua num ponto a do seu domínio se nesse ponto ela não dá "saltos" nem apresenta "furos". Vejamos alguns exemplos:

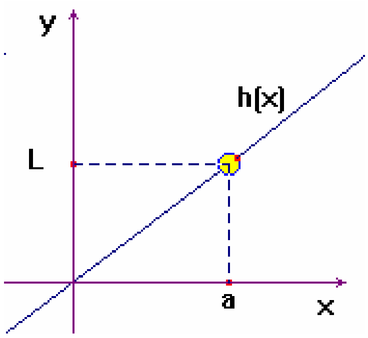
a) A função f é contínua em $x = a$




b) A função g é descontínua em $x = a$ (o gráfico dá um "salto" nesse ponto)




c) A função h é descontínua em $x = a$ (o gráfico apresenta um "furo" nesse ponto)




## *Definição de função contínua*

Uma função f é contínua no ponto $x = a$ se e somente se, as seguintes condições forem satisfeitas:

- (i) existe f(a);
- (ii) existe $\lim_{x \to a} f(x)$; (devem existir e ser iguais os limites laterais à direita e à esquerda)
- (iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Quando uma (ou mais) dessas condições não é satisfeita para $x = a$, dizemos que a função é descontínua em a. (SWOKOWSKI, 1994, p. 99)

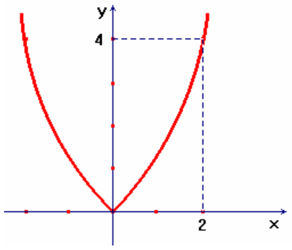
**Exemplos:**

a) A função $f(x) = x^2$ definida em $\Re$ é continua em $x = 2$, pois satisfaz as três condições de existência:

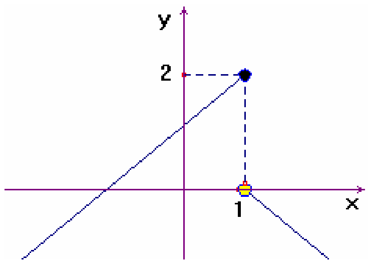
(i) $f(2) = 2^2 = 4$;

(ii) $\lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4$

(iii) $\lim_{x \to 2} x^2 = f(2)$




b) Consideremos a função $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \le 1 \\ -x+1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$




Calculando os limites laterais à esquerda e à direita de f(x) quando x tende a 1, temos:

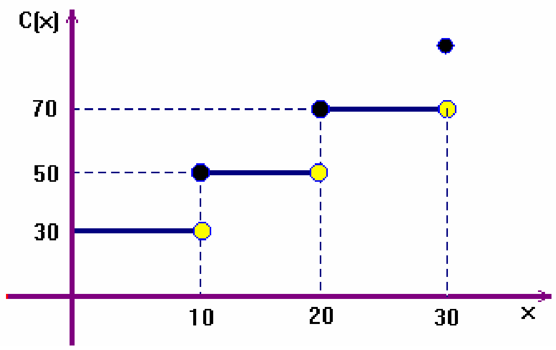
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x+1) = 2 \text{ (limite lateral à esquerda)}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x+1) = 0 \text{ (limite lateral à direita)}$$

Como o limite lateral à esquerda é diferente do limite lateral à direita no ponto $x = 1$, então o $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe, pois a segunda condição de continuidade de uma função não é satisfeita, e concluímos que f é descontínua no ponto $x = 1$

c) Seja $C(x) = \begin{cases} 10 & \text{se} \quad x < 10 \\ 20 & \text{se} \quad 10 \leq x < 20 \\ 30 & \text{se} \quad 20 \leq x < 30 \end{cases}$

onde x é o número de quilômetros rodados numa corrida de táxi e C(x) é o valor pago em Reais pela corrida.




Podemos observar a descontinuidade ("saltos") desta função no pontos em que x assume valores 10, 20 e 30, pois o limite lateral à esquerda é diferente do limite lateral à direita nestes pontos. Para melhor compreensão, estudaremos o limite de C(x) quando x está próximo de 10:

$$\lim_{x \to 10^-} C(x) = 30 \text{ (limite lateral à esquerda)}$$

$$\lim_{x \to 10^+} C(x) = 50 \text{ (limite lateral à direita)}$$

Como o $\lim\limits_{x \to 10^-} C(x) \neq \lim\limits_{x \to 10^+} (x)$, então não existe $\lim\limits_{x \to 10} C(x)$. Portanto, a segunda condição de continuidade de função não é satisfeita e concluímos que C(x) é descontínua no ponto $x = 10$.

## Atividade da aula 02

1) Determine os valores dos seguintes limites (Utilize o graphmatica como suporte na resolução).

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 5x - 4)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6}$

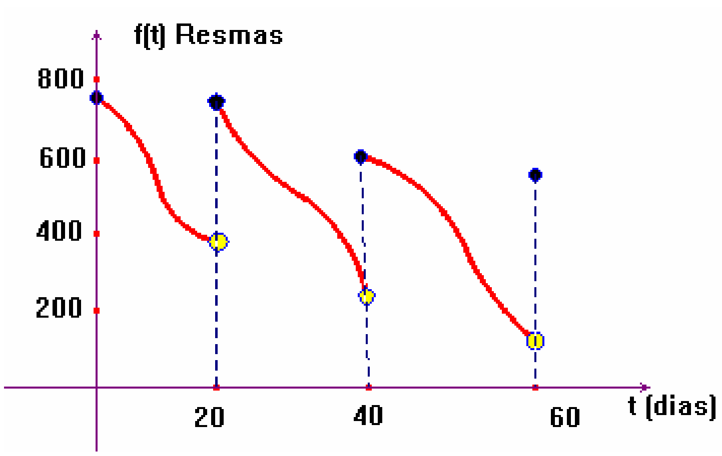
e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

2) Uma pessoa colocou R$ 1.000,00, à taxa de 5% ao mês, durante certo tempo. O montante do capital (M) em função do tempo t é dado pela expressão: $M = 1.000 + 50t$. Supondo que os juros não são calculados por fração de período, então, o montante permanece igual por um mês para depois saltar bruscamente

para um valor maior e novamente permanecer igual por um mês. a) Esboce o gráfico da função Montante do capital para os primeiros três meses; b) Determine o limite de M quando t tende a 2; c) O que acontece com os valores de M quando t tem valores próximos de 2?

3) A taxa cobrada por carro num estacionamento no centro da cidade é de R$ 3,00 pela primeira hora e de R$ 1,00 para cada hora adicional completa ou parcial, sujeita a um máximo de R$ 8,00. Obtenha uma função f que relacione a taxa cobrada pelo estacionamento ao tempo durante o qual o carro lá permanece, esboce seu gráfico e determine o limite de f quando t tende a 3 horas. (TAN 2001, p. 125)

4) Como parte de uma política de otimização de estoque, o gerente de uma companhia de materiais para escritório encomenda 500 resmas de papel para fotocópias a cada 20 dias. O gráfico a seguir mostra o nível de estoque real de papel numa loja de materiais para escritório durante os primeiros 60 dias úteis de 1996. Determine os valores de t para os quais a "função estoque" é descontínua e dê uma interpretação para o gráfico. (TAN id, p. 124)

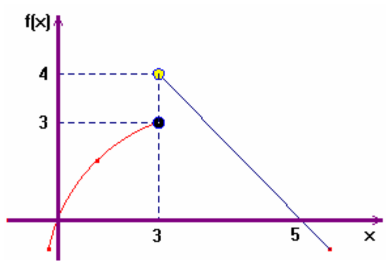


5) Observe os gráficos de cada uma das seguintes funções e determine o

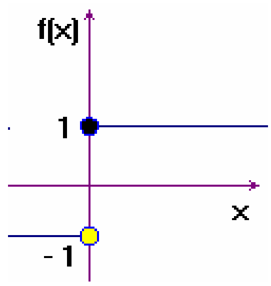
$$\lim_{x \to a^+} f(x), \ \lim_{x \to a^-} f(x) \text{ e } \lim_{x \to a} f(x)$$

no valor indicado de a, se tais limites existirem.

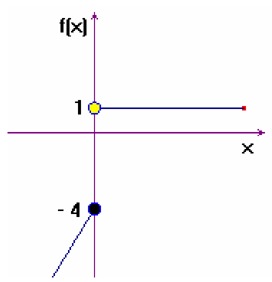
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{se } x \le 3 \\ -2x + 10, & \text{se } x > 3 \end{cases}$



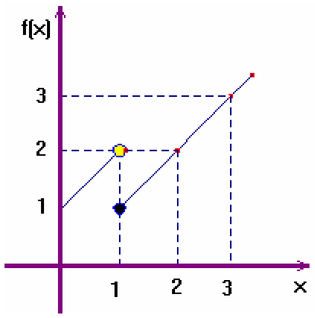

b) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$




c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{se } x \le 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$



d) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 1 \\ x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$




6) Dado $\lim_{x \to a} f(x) = L$, determine um número δ para todo $\varepsilon$

dado tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que se $0 < |x - a| < \delta$.

a) $\lim_{x \to 2} (2x - 4) = 8,\ \varepsilon = 0{,}01$.

b) $\lim_{x \to 1} (-3x + 7) = 10,\ \varepsilon = 0{,}5$.

c) $\lim_{x \to 2} (3x - 1) = -4,\ \varepsilon = 0{,}1$.

# Aula 3 - Limites infinitos e limites fundamentais

Objetivo específico da aula:

• Interpretar os limites infinitos, apresentando aplicações.

• Estudar os limites fundamentais: trigonométrico e exponencial.

## Limites infinitos

Estudaremos agora os limites infinitos de funções f(x) quando $x \to a$ ou quando $x \to \pm\infty$ (Lê-se: x tende a mais ou menos infinito).

1) Limites infinitos de f(x) quando $x \to a$, com $a \in \Re$

Vejamos alguns exemplos:

a) Seja $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$, com $x \neq 0$. Estudaremos os valores de f(x) quando x está próximo de 2.

Atribuindo a x valores próximos de 2, à esquerda de 2, temos:

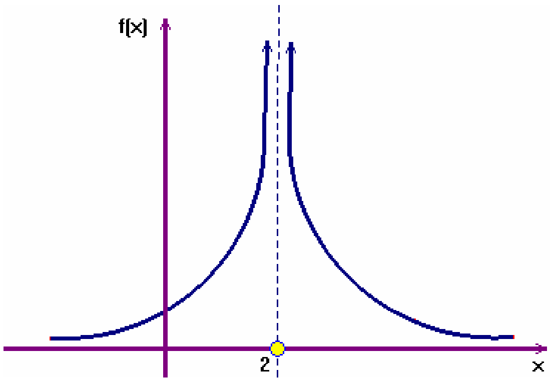
| X | 1,9 | 1,99 | 1,999 |
|---|---|---|---|
| f(x) | 100 | 10000 | 1000000 |

**Agora atribuímos a x valores próximos de 2, à direita**

| x | 2,1 | 2,01 | 2,001 |
|---|---|---|---|
| f(x) | 100 | 10000 | 1000000 |

Note que, quando x se aproxima de 2, quer pela esquerda $(x \to 2^-)$, quer pela direita $(x \to 2^+)$, f(x) assume valores cada vez maiores (aumenta ilimitadamente). Logo podemos escrever que o $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$.

Para melhor compreensão, observe o esboço do gráfico desta função.

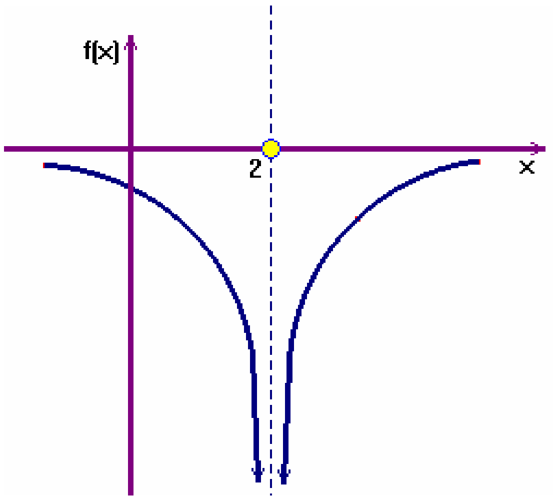



A partir desta idéia, podemos enunciar a seguinte definição:

> Seja f uma função que está definida em todo número de algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio a. À medida que x se aproxima de a, f(x) aumenta ilimitadamente, que é notado por $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, se f(x) puder ser tornado maior do que qualquer número positivo prefixado tomando-se $|x - a|$ suficientemente pequeno e $|x - a| > 0$. (LEITHOLD, 1994).

b) Consideremos agora $f(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$. De forma análoga, quando x se aproxima de 2, quer pela esquerda, quer pela direita, f(x) assume valores cada vez menores (decresce ilimitadamente). Logo podemos escrever $\lim_{x \to 2} \dfrac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$.

Para melhor compreensão, observe o comportamento de f(x) tendendo ao infinito negativo, quando x se aproxima de 2.




Em geral, definimos essa função da seguinte forma:

Seja f uma função definida em ambos os lados de a, exceto possivelmente em a. Então $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ significa que os valores de f(x) podem ser arbitrariamente grandes, porém negativos, escolhendo-se valores de x próximos de a, mas diferentes do próprio a. (STEWART, 2003, p. 98).

Observação: Usa-se a notação $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, contudo, o símbolo $\pm\infty$ não é um número real e, portanto, não existe o limite; (pela definição $\lim_{x \to a} f(x) = L$, onde L é um número real) entretanto, o símbolo indica o que ocorre com f(x) quando x se aproxima cada vez mais de a (cresce ou decresce ilimitadamente)

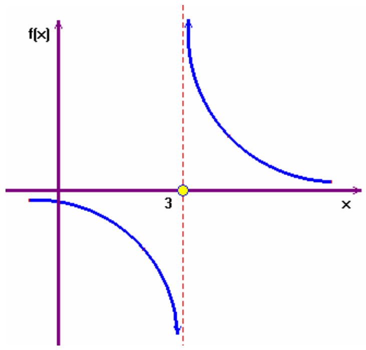
c) Seja $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, sendo $x \neq 3$.

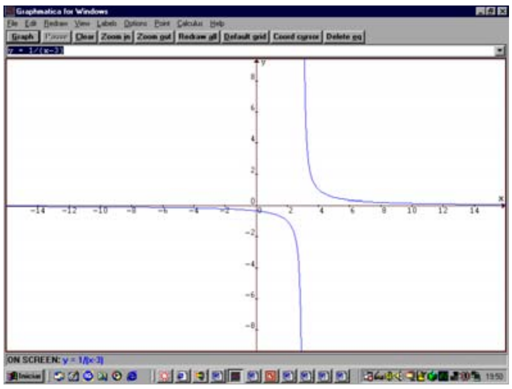
| x | 3,1 | 3,01 | 3,001 | $\to 3$ |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | 10 | 100 | 1000 | $\to$cresce ilimitadamente (tende ao infinito positivo) |

Observemos que, quando x tende a 3 pela direita, f(x) assume valores positivos arbitrariamente grandes (aumenta ilimitadamente). Assim, $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = -\infty$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 2,9 | 2,99 | 2,999 | $\to$3 |
| f(x) | -10 | -100 | -1000 | $\to$decresce ilimitadamente (tende ao infinito negativo) |

Por outro lado, quando x tende a 3 pela esquerda, f(x) assume valores cada vez menores (decresce ilimitadamente). Assim, $\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$



Dos gráficos, temos: $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$ e $\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$.

Observação: Considerando a função $f(x) = \frac{1}{x-3}$, exibida nos gráficos acima. A função aumenta sem limite quando x tende a 3 pela direita, mas decresce sem limite – torna-se menor do que qualquer número negativo prefixado – quando x tende a 3 pela esquerda. Assim, não há símbolo único para o limite bilateral neste caso. Dizemos, então que, $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$ não existe.

Note também que, $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$ (pela direita) e $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$ (pela esquerda). Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{x-3}$.

2) limite da função f(x) quando $x \to \pm\infty$

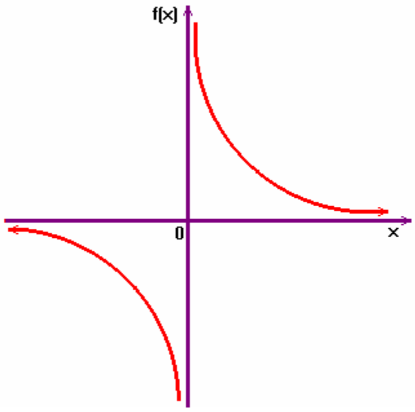
Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$. Atribuindo a x os valores 10, 100, 10000 e assim por diante, de tal forma que x cresça ilimitadamente, o valor da função f(x) se aproxima de zero; assim, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

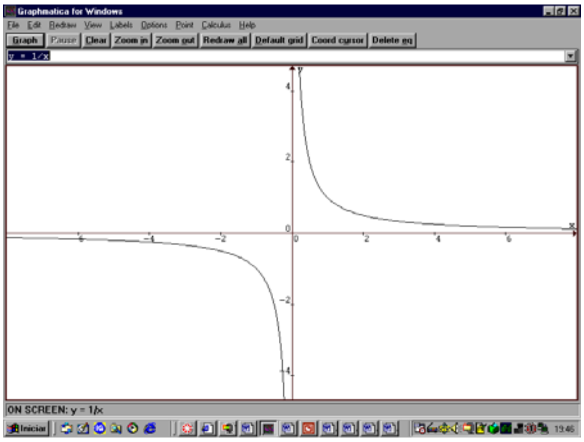
| x | 10 | 100 | 10000 | $x \to +\infty$ (cresce ilimitadamente) |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0,1 | 0,01 | 0,0001 | $f(x) \to 0$ |

De forma análoga, quando x decresce ilimitadamente (assume valores -10, -100, -10000, ...), o valor da função f(x) tende a zero; assim, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

| x | -10 | -100 | -10000 | $x \to -\infty$ (decresce ilimitadamente) |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | -0,1 | -0,01 | -0,0001 | $F(x) \to 0$ |

Para melhor compreensão, observe o gráfico didático e real da função f(x), respectivamente.




Em geral , podemos empregar a seguinte definição:

> A função f tem limite L quando x cresce além de qualquer limite (ou quando x tende a infinito), o que se denota por $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, se pudermos fazer com que f(x) se aproxime arbitrariamente de L tomando x suficientemente grande.
>
> Analogamente, a função f tem limite M quando x decresce além de qualquer limite (ou quando x tende a menos infinito), o que se denota por $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = M$, se pudermos fazer com que f(x) se aproxime arbitrariamente de M tomando x negativo e suficientemente grande em valor absoluto. (TAN, 2001, p 104)

Todas as propriedades de limites, citadas anteriormente nas paginas 85 e 86, são validas quando **a** é substituído por **+** $\propto$ ou **-** $\propto$**.**

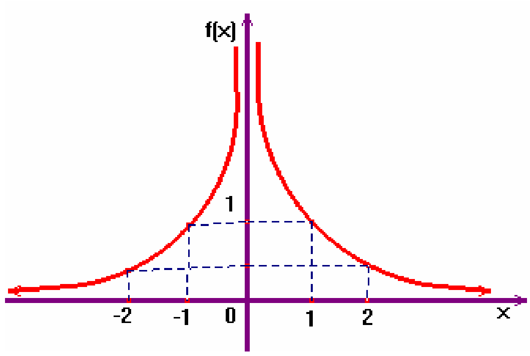
Além disso, temos a seguinte propriedade:

> Para todo $k > 0$, temos
>
> $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \text{ e } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$
>
> desde que $\dfrac{1}{x^k}$ esteja definido. (id., p 105)

Exemplo 1:

Seja $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, determine o $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Fazendo o esboço do gráfico de f(x), vemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}=0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}=0$




Exemplo 2:

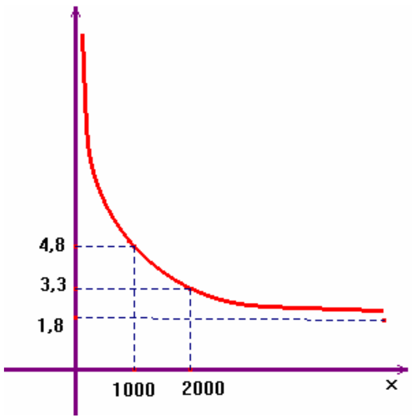
O custo médio por disco (em dólares) que a Companhia Herald Record tem ao fabricar x CDs de áudio é dado pela função custo médio $\overline{C}(x)=1{,}8+\dfrac{3000}{x}$

Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \overline{C}(x)$ e interprete o resultado obtido.

Solução:

$$\lim_{x\to+\infty} \overline{C}(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1{,}8+\frac{3000}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} 1{,}8+\lim_{x\to+\infty}\frac{3000}{x}=1{,}8$$

O cálculo revela que, à medida que a produção de CDs cresce "além de qualquer limite", o custo médio diminui e se aproxima de 1,8 dólar por disco. Para melhor compreensão, observe o esboço do gráfico.




Observação:

Na realidade, os símbolos + $\infty$ (mais infinito) e - $\infty$ (menos infinito) não representam números reais, não podendo ser aplicadas a eles, portanto, as técnicas usuais de cálculo algébrico. Vejamos a seguir algumas operações válidas com esses símbolos.

Seja a $\in \Re$, teremos as seguintes igualdades simbólicas:

$a + (+\infty) = +\infty$

$a + (-\infty) = -\infty$

$a^{+\infty} = +\infty$ para $|a| > 1$

$a^{+\infty} = 0$ para $|a| < 1$

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

$(+\infty) + (-\infty) =$ nada se pode afirmar inicialmente (indeterminação).

$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$

$(+\infty)\cdot 0 =$ nada se pode afirmar inicialmente (indeterminação).

$\infty / \infty =$ nada se pode afirmar inicialmente (indeterminação).

No cálculo de limites de funções, é muito comum chegarmos a expressões indeterminadas, o que significa que, para encontrarmos o valor do limite, teremos que contornar a indeterminação, usando as técnicas algébricas. Os principais símbolos de indeterminação são:

$\infty - \infty$

$\infty \cdot 0$

$\infty$
$\infty / \infty$

$\infty$. 0

$0/0$

$1^{+\infty}$

$1^{-\infty}$

Vamos agora calcular alguns limites imediatos, de forma a facilitar o entendimento de exercícios mais complexos.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x3 + 2x) = (+\infty)3 + 2(+\infty) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x + 3) = 2(-\infty) + 3 = -\infty + 3 = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = 2 + \infty = +\infty$

.

IMPORTANTE: O limite da função polinomial, quando $x \to \pm\infty$, é igual ao limite do seu termo de maior grau.

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + x - 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left[\left(1 + \cancel{\frac{1}{x}} - \cancel{\frac{1}{x^2}}\right)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = (+\infty)^2 = +\infty$

Colocando x² em evidência, podemos observar que, com exceção do 1° termo, todos os demais tendem a zero (para melhor compreensão tomemos x = 10000, então: 1/x = 1/10000 = 0,0001 $\to$0, 1/x² = 1/(10000)² = 0,000000001 $\to$ 0), portanto, o limite dessa função é igual ao limite do seu termo de maior grau.

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^3 + 2x^2 - 5x + 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^3 = 3(-\infty)^3 = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x^3 + x^2 - 2x + 4)}{x^2 + 3x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \lim\limits_{x +} x = +\infty$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{(3x^2 + 2x + 4)}{x^2 + x + 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(x^2 + x^2 - 2x + 4)}{x^3 + 3x^2 + 5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{x \cdot \cancel{x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Regra prática para cálculo do limite da função racional $\left(\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}\right)$, em relação ao termo de maior grau.

| lim f(x) = 0 |
|---|
| Numerador menor que<br>Denominador<br>Exemplo: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x + 4}{x^3 + 5x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ |

| $\lim f(x) = \pm\infty$ |
| --- |
| Numerador maior que<br>Denominador<br>Exemplo: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - 2x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ |

| lim f(x) = coeficientes de g(x) e f(x). |
| --- |
| Numerador igual ao<br>Denominador<br>Exemplo: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^3 + x^2 + 2x - 2}{4x^3 + 3x + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^3}{4x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{4} = \dfrac{-3}{4}$ |

## Limites fundamentais

A técnica de cálculo de limites consiste, na maioria das vezes, em conduzir a questão até que se possa aplicar os limites fundamentais, facilitando assim as soluções procuradas. Apresentaremos a seguir dois limites fundamentais e estratégicos, para a solução de problemas.

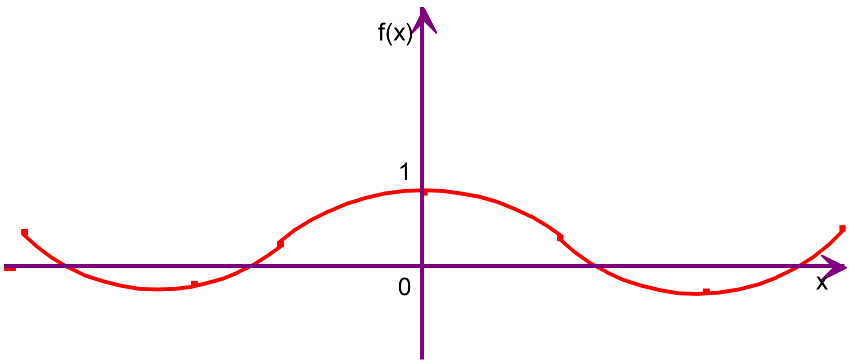
### 1. Limite fundamental trigonométrico

Considerando a função $f: \Re^* \to \Re$ definida por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, determinaremos o limite de f(x) quando x tende a zero.

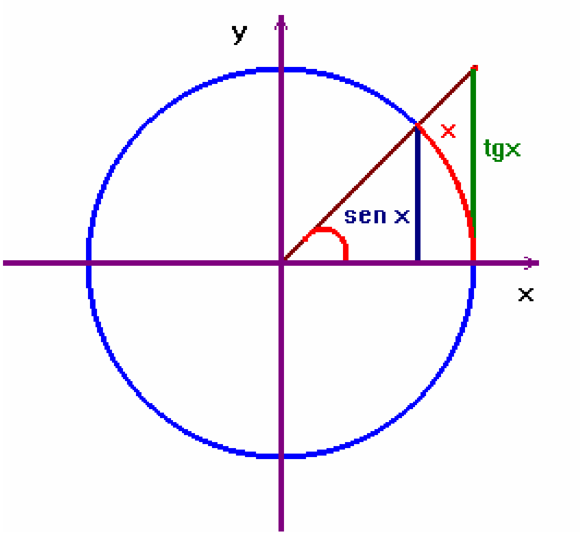
Atribuindo valores a x pela direita e pela esquerda de zero, conforme mostra na tabela, notamos que, para valores cada vez mais próximos de zero, obtemos valores de $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ cada vez mais próximos de 1.

| x | - 0,01 | -0,001 | $\rightarrow$ 0 $\leftarrow$ | 0,001 | 0,01 |
|---|---|---|---|---|---|
| sen x | -0,009999 | -0,000999 | | 0,0000999 | 0,009999 |
| f(x) | 0,999983 | 0,999999 | $\rightarrow$ 1 $\leftarrow$ | 0,999999 | 0,999983 |

Assim, temos: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$




Demonstração:




Para $x \to 0+$, temos $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$. (observe a figura)

Dividindo a dupla desigualdade por sen $x > 0$, vem:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{tgx}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\left( tgx = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \text{ por tanto, } \frac{tgx}{\operatorname{sen} x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \right)$$

Invertendo, temos:

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$$

Como o $\lim_{x \to 0}(1) = 1$ e $\lim_{x \to 0}(\cos x) = \cos 0 = 1$, então a função $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, que está entre $\cos x$ e 1, tem também limite igual a 1 quando x tende a 0 (zero), logo $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. (GUIDORIZZI, 1995, pp. 99-100)

**2. Limite fundamental exponencial**

Considerando a função definida por $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, de base positiva, ou seja, $1 + \frac{1}{x} > 0$.

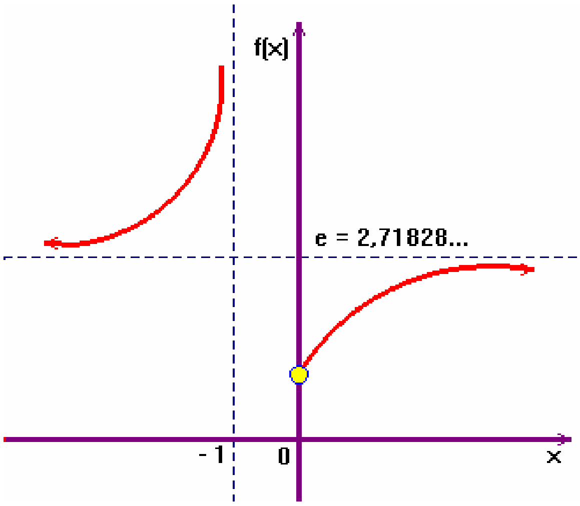
Nas tabelas a seguir atribuiremos valores de $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Mostraremos que, quando x tende a - ∝ (menos infinito), ou x tende a +∝ (mais infinito), f(x) tende ao número irracional e = 2,71828... (número de Euler) que é base dos logaritmos naturais.

| x | 100 | 1000 | 10000 | → + ∝ |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2,7048 | 2,7169 | 2,7181 | → e (2,71828…) |

| X | -100 | -1000 | -10000 | → - ∍ |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | 2,7320 | 2,7196 | 2,7184 | → e (2,71828…) |

Observemos que, à medida que x cresce ou decresce indefinidamente, f(x) vai se aproximando cada vez mais do número e . Assim:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad e \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$




Exemplos: (Teremos que criar estratégias que nos conduzam a um limite fundamental)

Determine os valores dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{4x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{4} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = \dfrac{1}{4} \cdot 1 = \dfrac{1}{4}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 6x}{2x} \cdot \dfrac{2}{2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4x} \cdot 2 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{4x} \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} 2 = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} u}{u} \cdot \lim\limits_{x \to +\infty} 3 = 1.2 = 2$

Observe que fizemos acima uma mudança de variável, colocando $4x = u$, de modo a cairmos num limite fundamental. Verifique também que, ao multiplicarmos numerador e denominador da função dada por 2, a expressão não se altera. Usamos também a propriedade do produto vista anteriormente.

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{sen\,x}{\cos x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left( \dfrac{sen\,x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\,x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$

d) $\lim\limits_{x \to =\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{6x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{6} = e^{6}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{4x}\right)^{x}$

Neste caso, faremos uma mudança de variável.

Fazendo $\dfrac{3}{4x} = \dfrac{1}{u} \Rightarrow 4x = 3u$, temos $x = \dfrac{3u}{4}$ e se $x \to +\infty$ implica $u \to +\infty$, assim:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{4x}\right)^{x} = \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{\frac{3u}{4}} = \lim_{u \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{\frac{3}{4}} = e^{\frac{3}{4}}$$

## *Atividade da aula 3*

1) Calcule os limites: (Utilize o graphmatica como suporte na resolução).

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+2}{2-x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^3}$

c) $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{1}{x-5}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x - 1}{3x - 4}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{4x}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x} + 2\right)$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^3 + 2x^2}{9x^3 - 1}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 8x}{4x}$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{3x}\right)^{x}$

2. O custo médio por disco em dólares que a companhia Herald Record tem ao fabricar x Videodiscos é dado pela função de custo médio $\overline{C}(x) = 2{,}2 = \dfrac{2500}{x}$.

Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} \overline{C}(x)$ e interprete o resultado obtido. (TAN, 2001, p. 108)

3. A arrecadação mundial total pela exibição de um filme de grande sucesso de bilheteria é aproximada pela função $T(x) = \dfrac{120x^2}{x^2 + 4}$ onde T(x) é medido em milhões de dólares e x é o numero de meses do filme em cartaz.

a) Qual a arrecadação de bilheteria após o primeiro mês de lançamento? E após o segundo mês? E após o terceiro mês ?

b) Qual será a arrecadação do filme a longo prazo? (id., p. 112)

4. Uma concentração de água salgada na base de 50 g de sal por litro de água corre para um tanque que contém 50 litros de água pura.

(a) Se o fluxo de água salgada para o tanque é de 5 l por minuto, determine o volume V(*t*) de água e a quantidade A(*t*) de sal no tanque após *t* minutos.

(b) Estabeleça uma fórmula para a concentração c(*t*) de sal (em k/l) após *t* minutos.

(c) O que ocorre a c(*t*) por um longo período de tempo? (SWOKOWSKI, 1994, p.98)

## ANEXO B - Questionários utilizados na pesquisa de campo

### $B_1$ - Questionário para os professores: Ensino de limites

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Aluno: João Pereira da Silva Neto

Profa. Orientadora: Doutora Célia Maria Carolino Pires.

Assunto: Questionário de levantamento de dados para dissertação de mestrado

Nome do Professor: ------------------------------------------------------------------------------

Titulação: ----------------------------------- Instituição da Titulação: ------------------------

Instituição em que trabalha atualmente: ------------------------------------------------------

Tempo de experiência: --------------------------------------------------------------------------

1. Quais os livros didáticos adotados para o ensino de limites?

2. Quais os recursos didáticos utilizados para o ensino de limites?

   ( ) Quadro e giz ( ) Livros

   ( ) Retroprojetor ( ) Computador e software

   ( ) Apostilas ( ) Outros: ----------------------------------

3. Você tem conhecimento de qual/ quais software(s)?

   ( ) Cabe ( ) Excel ( ) Graphmatica

4. Você utiliza algum software para o ensino de limite?

   ( ) Não ( ) Sim

5. Caso existam, quais as dificuldades mais freqüentes para o ensino de limite?

## B2 - Questionário para os alunos: Avaliação do minicurso

1) Durante a resolução das atividades, você consultou algum colega ou professor?

   ( ) Sim ( ) Não

2) Que valor você atribui às dificuldades que teve para resolução das atividades propostas? (0 a 10: zero para menor dificuldade e dez para maior dificuldade)

   ( ) Atividade 1 ( ) Atividade 2 ( ) Atividade 3

3) Classifique as dificuldades encontradas para o entendimento dos assuntos abordados.

   (0 a 10: zero para menor dificuldade e dez para maior dificuldade)

   ( ) Definição intuitiva de limite

   ( ) Definição de limite / Propriedades

   ( ) Limites laterais

   ( ) Continuidade

   ( ) Limites no infinito / limites infinitos

   ( ) Limites fundamentais

4) O que mais contribuiu para a aprendizagem de limite? (0 a 10: zero para menor contribuição e dez para maior contribuição)

   ( ) Ilustrações gráficas ( ) Uso do data show na exposição da aula

   ( ) Exercícios de aplicações ( ) Uso do computador nas atividades

5) Que valor você atribui ao material didático? (0 a 10: zero para ruim e dez para excelente)

   ( ) valor

6) Que valor você atribui ao minicurso de limite? (0 a 10)

   ( ) valor