LUCIANA LAGE

ENQUADRAMENTO DE NÚMEROS RACIONAIS EM INTERVALOS DE RACIONAIS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC-SP

SÃO PAULO

2006

LUCIANA LAGE

ENQUADRAMENTO DE NÚMEROS RACIONAIS EM INTERVALOS DE RACIONAIS: UMA INVESTIGAÇÃO COM ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão.

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC-SP

SÃO PAULO

2006

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Maria Cristina S.de A.Maranhão (Orientadora)

Prof.ª Dr.ª Sônia Pitta Coelho

Prof. Dr. Luiz Carlos Pais

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: Local e data:

AGRADECIMENTOS

A **DEUS**, que, incomparável e inconfundível em sua infinita bondade, compreendeu meus anseios e me deu a necessária força para atingir meu objetivo.

A **Maria Cristina S. de A. Maranhão,** por todo o seu empenho e dedicação, por todo o seu conhecimento que comigo compartilhou e por me guiar para além das teorias, expresso o meu maior agradecimento e profundo respeito.

A **minha irmã Janaina**. Sinto-me orgulhosa de ti, de teu exemplo e esforço. Por isso talvez não saiba e nem consiga expressar em palavras o especial carinho, amor e gratidão que te dedico. Tive a ti como apoio, como incentivo de onde muitas vezes tirei força para prosseguir. Divide, pois comigo todo o mérito desta conquista, porque ela te pertence. Ela é tanto tua quanto nossa.

A **minha mãe**, que compartilhou comigo meus ideais e os alimentou, incentivando-me a prosseguir na jornada, quaisquer que fossem os obstáculos; que se manteve sempre ao meu lado, lutando comigo. Dedico-lhe minha conquista com a mais profunda admiração, respeito e amor.

A **meu pai**, por confiar em meu trabalho. Sem tal confiança, nada seria possível. Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito, por você.

A **Pedro Luiz Aparecido Malagutti**, que, quando deveria ser simplesmente professor, foi meu mestre; que quando deveria ser simplesmente mestre, foi meu amigo e, em sua amizade, compreendeu-me e incentivou-me a seguir meu caminho.

A **meu irmão Renan**, por ter-me dado força e determinação, por ensinar-me sempre que sou capaz e que devo lutar por todos os meus sonhos, por dar-me serenidade e amor para suportar as coisas que não pude mudar, coragem para mudar as coisas que pude e sabedoria para estabelecer a diferença que há entre elas.

A **meu sobrinho Junior**, por compreender e ceder o convívio de Janaina. Sua colaboração e amor foram indispensáveis. Foi essencial senti-lo ao meu lado, iluminando esta etapa de minha vida com a mais pura e verdadeira luz que nele há.

A **meu irmão Bruno**, por contribuir com seu olhar e sorriso, fazendo-se presente em minha vida, tornando-me mais forte simplesmente por sua existência.

A **meu amigo Roni**, pelo companheirismo, pela amizade, pela paciência e por todo o carinho e apoio que me dedicou, estando sempre presente com um sorriso amigo.

A **meus amigos** que me incentivaram e compreenderam minhas ausências quando os estudos roubaram suas companhias, e em cujos ombros muitas vezes derramei meus lamentos e angústias.

A todos os **professores do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática,** por seus ensinamentos, pela amizade, carinho e respeito, ou pelo simples convívio ao longo desta jornada.

À **Escola participante dessa pesquisa**, **seus educadores e alunos**, pela atenção e por viabilizarem esta investigação, pondo-se sempre à disposição.

À professora **Sônia Pitta Coelho** e ao professor **Luiz Carlos Pais**, por transmitirem-me com generosidade seus conhecimentos e experiências profissionais.

A **Gerson Ferracini**, pela competência com que fez a revisão de minha dissertação. Trabalhar a quatro mãos com ele, com sua incrível capacidade de organização e síntese, foi para mim um grande privilégio.

A posse do saber não é nada
se antes não vier compreensão, humildade
e vontade de se dar carinhosamente.
(Autor desconhecido)

RESUMO

A presente pesquisa teve o intuito de investigar quais conceitos, propriedades e procedimentos matemáticos, bem como quais domínios (em termos de representação numérica, gráfica e outras) são utilizados por estudantes de uma classe de sétima série do ensino fundamental de uma escola privada da cidade de São Paulo na resolução de atividades. Essas atividades abrangem enquadramento de números racionais em intervalos de racionais, tendo sido planejadas pelas professoras da escola investigada, a partir de proposta feita por uma integrante do mesmo grupo de pesquisa Educação Algébrica, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, do qual a autora faz parte, sobre as atividades originalmente criadas por Régine Douady (1986). Com base na metodologia de estudo de caso e na noção de dialética ferramenta–objeto de Douady (1984), foram observadas quatro aulas nessa classe. As análises priorizaram as produções escritas e orais dos alunos, resultantes do processo de vivência das atividades. Diante dessas produções, observou-se que os alunos recorreram à *interação* entre dois a quatro dentre os seguintes domínios: numérico, de língua materna, algébrico e geométrico. Criaram diversas estratégias de resolução, nas quais empregaram como ferramentas matemáticas principalmente as noções de número positivo, número par (com possível falha no significado), número racional (com possível falha no significado), multiplicação, média aritmética, segmento e intervalos numéricos, com significados diferentes entre os alunos da classe. Empregaram também as relações ‘ser maior que’, ‘ser menor que’ e ‘ser múltiplo de’, além das relações de ordem ‘ser maior ou igual a’ e ‘ser menor ou igual a’.

Palavras-chave: enquadramento, números racionais em intervalos de racionais, números inteiros em intervalos de inteiros, estratégias de enquadramento numérico, conhecimentos mobilizados no enquadramento numérico, 7.ª série do ensino fundamental.

ABSTRACT

The purpose of the present study was to investigate which mathematical concepts, properties, and procedures, as well as settings (in terms of numerical, graphic, or other types of representation), are used by students of a 7th-grade class, in a private school in the city of São Paulo, when challenged to find solutions for mathematical activities. The activities involved framing rational numbers on rational intervals and were designed by teachers of that school, based on a proposal—by a member of the same group of Algebra Education, at Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, to which the author is affiliated—that was developed from activities originally devised by Régine Douady (1986). Observation in the classroom covered four sessions and was conducted in the light of the case-study methodology and on the notion of tool–object dialectic of Douady (1984). The analyses prioritized students' written and oral productions that took form while they experienced the process of solving the activities proposed. The productions revealed that the students made use of *interplay* of two, three, or four of the following settings: numerical, native language, algebraic, and geometric. Several strategies for solution were devised, in which the students utilized as mathematical tools chiefly the notions of positive number, even number (with possible flaws in meaning), rational number (with possible flaws in meaning), multiplication, arithmetical average, segment, and numerical intervals (though with different meanings among the students). Other relations used were 'to be greater than,' 'to be less than,' and 'to be a multiple of,' as were the order relations 'to be greater than of equal to' and 'to be less than or equal to.'

Keywords: framing, rational numbers on rational intervals, integers on integer intervals, strategies for number framing, knowledge mobilized for number framing, 7th grade.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa teve por objetivo investigar os conceitos, propriedades e procedimentos matemáticos empregados por alunos de sétima série do ensino fundamental de uma escola particular da cidade de São Paulo ao vivenciarem atividades envolvendo o enquadramento de números racionais em intervalos de racionais.

O Capítulo 1 apresenta a problemática enfocada, em termos de nossos objetivos de pesquisa, do quadro de pesquisas relacionadas ao tema e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998).

O Capítulo 2 discorre sobre o quadro teórico de Régine Douady (1984) e sobre os elementos de sua noção de dialética ferramenta–objeto.

O Capítulo 3 descreve nossas escolhas teórico-metodológicas.

O Capítulo 4 descreve o processo de realização de nossa pesquisa, incluindo as atividades que foram propostas aos alunos e as análises dessa vivência.

Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as conclusões decorrentes de todo o processo de investigação.

CAPÍTULO I — PROBLEMÁTICA

Investigações desenvolvidas pelo grupo de pesquisa G5 – Educação Algébrica, do Programa de Estudos de Pós-graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, do qual esta pesquisadora faz parte, abarcam a teoria dos números (aritmética) e a álgebra, enfatizando estudos sobre suas dimensões, visões e tendências no ensino, assim como seus reflexos na aprendizagem. Enfatizam também as relações entre as noções e as concepções matemáticas apresentadas por alunos e por professores, em diversos segmentos de ensino, relativos a números, equações e inequações, e também apontadas em documentos curriculares.

Pesquisas realizadas por esse grupo fornecem indícios sobre a relevância da abordagem dos números racionais no ensino fundamental (primeira a oitava séries), bem como do trabalho que focaliza relações e relações de ordem. Em pesquisa recente, Maranhão *et al*. (2002) investigaram os significados atribuídos por alunos de quinta a oitava séries do ensino fundamental a relações de ordem tais como ‘chegar antes de’ ou ‘ao mesmo tempo que’ e para as relações como ‘chegar antes de’, ao resolverem problemas de ordenação.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de primeira a quarta séries do ensino fundamental (BRASIL, 1997), é necessário que os alunos do primeiro ciclo (primeira e segunda séries) tornem-se capazes de observar relações numéricas como ‘maior que’, ‘menor que’ e ‘estar entre’ no conjunto dos números naturais, e que desenvolvam a capacidade de ordenar quantidades e localizar números naturais em intervalos numa seqüência numérica, até o final desse ciclo.

Para o segundo ciclo (terceira e quarta séries), os PCNs de 1997 (BRASIL, 1997) ressaltam a importância da ampliação dos conceitos abordados no ciclo anterior, como, por exemplo, o de número natural, bem como a ordenação e comparação desses números e o estabelecimento de relações, viabilizando a introdução de outros novos conceitos, como o de número racional.

Como outros conteúdos a serem desenvolvidos, apontam também a comparação, a ordenação e a localização de números racionais na forma decimal em intervalos e na reta numérica. Observa-se, assim, que esses PCNs preconizam a necessidade de abordar a localização de números racionais em reta numérica em situações em que os intervalos já estão dados. No entanto, não se referem a atividades em que o aluno seja responsável pelo fornecimento de intervalos (cada vez menores) que enquadrem um determinado número.

Ainda segundo a mesma fonte, a introdução da abordagem dos números racionais no segundo ciclo possibilita a percepção de que os números naturais são insuficientes para a resolução de certos problemas, fazendo com que a ampliação dos conjuntos numéricos se revele necessária para a obtenção de respostas. Ainda segundo os mesmos PCNs, os números racionais são identificados como quocientes de números naturais. O trabalho com números inteiros negativos não é sugerido para esse ciclo, não atingindo a divisão de inteiros negativos.

A mesma fonte relata algumas das dificuldades enfrentadas pelos alunos ao tentarem abordar os números racionais como se fossem números naturais:

> – um deles está ligado ao fato de que cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias; por exemplo, 1/3, 2/6, 3/9 e 4/12 são diferentes representações de um mesmo número;
>
> – outro diz respeito à comparação entre racionais: acostumados com a relação 3 > 2, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, 1/3 < 1/2;
>
> – se o “tamanho” da escrita numérica era um bom indicador da ordem de grandeza no caso dos números naturais (8 345 > 41), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece o mesmo critério; [...]
>
> – se a seqüência dos números naturais permite falar em sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87. (BRASIL, 1997, p. 67)

Os PCNs de quinta a oitava séries do ensino fundamental (BRASIL, 1998), seguindo as orientações mencionadas na edição anterior (BRASIL, 1997), salientam, em decorrência das dificuldades acima mencionadas, que:

> Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial, os que envolvem os racionais na forma decimal. (BRASIL, 1998, p. 100)

Para o terceiro ciclo (quinta e sexta séries), os PCNs (BRASIL, 1998) aconselham o trabalho de localização de números racionais na reta numérica e o desenvolvimento da compreensão de que esses números podem ser escritos nas formas fracionária e decimal, possibilitando que relações entre números nessas representações sejam estabelecidas. Nesse ciclo, o aluno deverá ser capaz, ainda de acordo com os mesmos PCNs, de comparar e ordenar não somente números naturais, mas também números inteiros e racionais.

Para o quarto ciclo (sétima e oitava séries), a mesma fonte salienta a importância de ampliar e consolidar os conteúdos anteriormente trabalhados relativos a números racionais, e de elaborar, compreender e resolver novas situações-problema envolvendo os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais.

Outro aspecto a ser mencionado refere-se à ênfase atribuída pelos PCNs (BRASIL, 1998) ao desenvolvimento da capacidade de investigação, utilizando-se estratégias de obtenção, verificação e controle de resultados, assim como à importância da atividade coletiva, visando a interpretação dessa atividade, por meio da criação de estratégias de resolução. Isso condiz com as idéias de Régine Douady[1] (1986).

A relevância atribuída pelos PCNs ao estudo dos números racionais é ilustrada nesta argumentação:

> Embora o contato com representações fracionárias seja bem menos freqüente nas situações do cotidiano, seu estudo também se justifica, entre outras razões, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico) [...]. (BRASIL, 1998, p. 103)

No entanto, nenhuma das versões dos PCNs mencionadas (BRASIL, 1997, 1998) contempla o trabalho com relações de ordem para alunos do ensino fundamental.

Segundo Soares (2002):

> A relação de ordem, no ambiente escolar, apresenta características peculiares. Em seu aspecto numérico, é explorada desde os primeiros

---

[1] Régine Douady é citada como fonte nos PCNs (BRASIL, 1998, p. 144): “Douady, R. De la didactique des mathémathiques a l’heure actuelle. *Cahier de didactique des mathématiques.* IREM, Université Paris VII, n. 6, s/d”.

> estágios de aprendizado (como na ordenação dos números naturais). Relações de ordem não-numéricas, no entanto, são abordadas de maneira descontínua ao longo dos anos do ensino básico. (SOARES, 2002, p. 2)

Maranhão (1996), em pesquisa enfocando as diversas concepções de alunos de 9 a 12 anos sobre ordenação no tempo, observou que estes apresentam dificuldades no uso das relações ‘chegar antes de’ e ‘não chegar depois de’ quando estas são utilizadas em seu sentido restrito, verificando-se também a ocorrência de confusão entre as expressões ‘chegar adiantado’ e ‘chegar atrasado’. A autora ainda observou que essas deficiências podem levar a um comprometimento das representações em reta numérica, por requererem dos alunos a compreensão de propriedades de ordenação, acarretando a necessidade do empreendimento de novas investigações. Essa pesquisa nos permitiu supor que entre alunos brasileiros de sétima série do ensino fundamental pudesse haver deficiências nos conceitos e/ou propriedades de relações de ordem, além de dificuldades em representações em reta numérica.

Igliori *et al*. (2000), utilizando problemas sem referência numérica, investigaram significados atribuídos às relações de ordem por alunos de 10 e 11 anos de idade, de quinta série do ensino fundamental. Buscaram, assim, elucidar se:

> [...] há ou não impregnação do uso cotidiano nas concepções dos estudantes, com o propósito de saber se eles podem atribuir significado amplo a termos como “*chegar antes de*”, ou se, ao contrário, só atribuem significado restrito, usando o termo “*chegar antes de*” como “*chegar imediatamente antes de*” na solução de um problema envolvendo relações de ordem e sem referências numéricas; se é ou não plausível aos alunos chegarem a conclusão de que “*chegar junto de*” é estabelecer comparação na relação de ordem “*chegar antes ou junto de*”; se os alunos atribuem ou não significado amplo às negações desses termos (“*não chegar depois de*” significa “*chegar antes de ou chegar junto de*”). (IGLIORI *et al*., 2000, p. 3.71-3.77)

Procuraram, desse modo, investigar:

a) se os alunos podem atribuir significado amplo a designações como ‘chegar antes de’ ou se, ao contrário, só lhes atribuem significado restrito, empregando a designação ‘chegar antes de’ como ‘chegar imediatamente antes de’, em situações de resolução de problemas envolvendo relações de ordem sem referência numérica;
b) se os alunos atribuem ou não significado amplo às negações dessas relações (‘não chegar depois de’ significando ‘chegar antes de’ ou ‘ao mesmo tempo que’).

Os problemas propostos nessa pesquisa não apresentavam referências numéricas, por considerarem as autoras que os números poderiam constituir fonte de erros ou limitar os significados atribuídos aos termos relativos a tempo.

Constatou-se, com tal pesquisa, que os alunos de quinta série não admitiam ‘chegar ao mesmo tempo que’ como uma ordenação, ou seja, atribuíam significado restrito aos termos relativos a tempo.

Como citado anteriormente, Maranhão *et al*. (2002) investigaram se alunos de quinta a oitava séries apresentavam dificuldades em atribuir significado amplo a relações de ordem tais como ‘chegar antes de’ ou ‘ao mesmo tempo que’ e a relações como ‘chegar antes de’ ao resolverem problemas de ordenação. Investigaram também se a evolução do conhecimento desses alunos era similar nas diferentes séries. Para tanto, foi utilizado o mesmo processo de intervenção didática.

As autoras ressaltam três pontos importantes:

a) Não houve, no pré-teste, diferença no padrão de respostas entre os alunos das diversas séries.

b) Após a intervenção didática, os resultados apresentados pelos alunos de sexta a oitava séries foram diferentes e melhores que os de quinta série.

c) Mesmo depois da intervenção didática, faziam-se notar dificuldades nas relações de ordem ‘chegar antes de’ ou ‘ao mesmo tempo que’ ou ‘não chegar depois de’.

Considerando os trabalhos citados anteriormente e tendo em vista a carência[2] de pesquisas brasileiras sobre o tema, depreende-se a necessidade e a pertinência de novas investigações que abordem relações de ordem por meio da vivência de atividades sobre o enquadramento de números racionais, utilizando referências numéricas.

Para alcançar os propósitos de nossa pesquisa, norteamo-nos essencialmente pelo quadro teórico de Douady (1984) e por suas atividades (DOUADY, 1986) direcionadas a alunos franceses do segmento de ensino correspondente ao ensino fundamental do Brasil, voltadas ao enquadramento[3] de números racionais em intervalos de racionais utilizando referências numéricas. Para isso, consultamos pesquisas brasileiras recentes sobre os significados atribuídos por estudantes brasileiros do ensino fundamental a relações e relações de ordem. Consultamos também os PCNs do primeiro e segundo ciclos (BRASIL, 1997) e do terceiro e quatro ciclos (BRASIL, 1998) do ensino fundamental a respeito de conceitos e procedimentos requeridos em atividades de enquadramento de números

[2] Buscas realizadas em bancos de dissertações e teses com palavras-chave sobre os temas ‘enquadramento de números racionais em intervalos’ e ‘relações de ordem’ revelaram a carência de pesquisas brasileiras sobre esses temas.

[3] *Enquadramento*: Ato ou efeito de enquadrar(-se). *Enquadrar*: 1. Meter em quadro, encaixilhar, emoldurar. 2. Tornar quadrado. 3. Guarnecer em volta [...]. 11. Ajustar-se, quadrar-se. (FERREIRA, A.B.H. *Novo Aurélio século XXI*: o dicionário da língua portuguesa. 3. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999. p. 763.)
Encadrement: de encadrer – 1) Action d’entourer, d’orner d’un cadre (un tableau, une photo, etc.) [...] 5) MATH. Encadrement d’um nombre réel: intervalle donnant les limites inférieure et supérieure entre lesquelles est compris le réel. “Les encadrement du résultat d’un calcul par deux valeurs approchées. REY-DEBOVE, Josette; REY, Alain. (Eds.). *Le nouveau petit Robert*: dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française. 2. ed. Nouvelle édition remaniée et amplifiée. Paris: Dictionnaires le Robert, 1993. p. 751.)

racionais entre números racionais com as quais esses estudantes pudessem ter tido contato.

Com base em sua noção de dialética ferramenta–objeto (DOUADY, 1984), as atividades propostas por Douady (1986) sobre enquadramento de números racionais em intervalos de racionais visam situar um dado número fracionário num eixo graduado. Essa pesquisadora inicia abordando o enquadramento de números racionais sob forma fracionária entre dois números inteiros, supondo a utilização de equivalência de frações, que deverão ser comparadas a números inteiros para resolução das atividades propostas. Para tanto, requer-se estabelecimento de relações tais como ‘estar entre’, ‘ser menor que’ e ‘ser maior que’ e de relações de ordem tais como ‘ser maior ou igual a’ e ‘ser menor ou igual a’ entre números racionais. As atividades também podem requerer representações em reta e conversões de representação decimal e fracionária de números racionais.

Posteriormente, busca-se alcançar maior complexidade das atividades, abordando enquadramento de números racionais sob forma fracionária entre racionais também fracionários, com o propósito de obter intervalos cada vez menores. A representação decimal é abordada somente após o desenvolvimento do trabalho com representações fracionárias.

A dinâmica das atividades de Douady (1986) é prevista de modo que os participantes sejam divididos em duas equipes — equipe contra equipe ou equipe de dois alunos contra toda a classe —, sendo a fração a trabalhar escolhida pelos próprios alunos. Isso é mantido durante todas as etapas.

Na primeira etapa das atividades, supõe-se que os alunos percebam as facilidades advindas da escolha de uma fração com denominador potência de 10 (representação fracionária). Visa-se, assim, ambientar e familiarizar os alunos com as atividades, buscando-se, durante todo o seu desenvolvimento, situar e não adivinhar a fração escolhida. Na etapa seguinte, o objetivo é a obtenção de intervalos cada vez menores.

É interessante observar que, nessa pesquisa desenvolvida na França, Douady não se restringe apenas ao enquadramento de números racionais compreendidos por dois números inteiros, mas apresenta também uma análise *a priori* de atividades sobre enquadramento de números racionais compreendidos por dois números racionais.

Em nosso trabalho, buscamos investigar quais são os conceitos, propriedades e procedimentos matemáticos utilizados por alunos brasileiros do ensino fundamental na resolução de atividades sobre enquadramento de números racionais em intervalos. Em particular, tivemos o intuito de verificar quais são os conceitos, propriedades matemáticas e domínios de que os alunos lançam mão durante a vivência dessas atividades — formuladas com base nas originalmente criadas por Douady —, observando suas representações (numéricas e gráficas). Com isso, procuramos contribuir para o entendimento do processo de formação de conhecimentos matemáticos dos alunos, e de como os professores podem favorecê-lo.

Decidimos trabalhar com alunos de sétima série, visto que os PCNs (BRASIL, 1997) apontam a abordagem dos números racionais no início do segundo ciclo, estendendo-se aos demais:

> O segundo ciclo tem como característica geral o trabalho com atividades que permitem ao aluno progredir na construção de conceitos e procedimentos matemáticos. No entanto, esse ciclo não constitui um marco de terminalidade da aprendizagem desses conteúdos, o que significa que o trabalho com números naturais e racionais, [...] deverá ter continuidade,

> para que o aluno alcance novos patamares de conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 58)

O exame dos PCNs (BRASIL, 1997, 1998) nos levou a supor que alunos brasileiros de sétima série provavelmente não dispõem de experiência com enquadramento de números racionais em intervalos. Dessa maneira, supusemos que a vivência de atividades sobre enquadramento de números racionais em intervalos correspondesse a um novo conteúdo com que esses alunos poderiam ter condições de entrar em contato. Supusemos, também, por outro lado, que tivessem tido contato anterior com números racionais nas representações decimais e fracionárias (realizando conversões entre elas), com as relações ‘ser menor que’, ‘ser maior que’ e ‘estar entre’, com as relações de ordem ‘menor ou igual a’ e ‘maior ou igual a’, com a comparação e ordenação de números racionais e com operações envolvendo esses números, inclusive com algumas propriedades dessas relações e operações, envolvendo representações em retas.

Portanto, o objetivo principal de nossa pesquisa desdobra-se nas seguintes questões intrínsecas ao quadro teórico:

a) Quais ferramentas e procedimentos os alunos utilizam no decorrer das atividades propostas sobre enquadramento numérico em intervalos?

b) Quais domínios (em termos de representações numéricas, gráficas ou outras) os alunos utilizam para resolver as atividades propostas?

CAPÍTULO 2 — QUADRO TEÓRICO

2.1. ELEMENTOS DA DIALÉTICA FERRAMENTA–OBJETO E DA INTERAÇÃO ENTRE DOMÍNIOS

A dialética ferramenta–objeto desenvolvida por Douady (1984) embasou-se em pesquisas sobre o desenvolvimento de noções matemáticas utilizadas por alunos a partir da resolução de seqüências de atividades, considerando o pressuposto de que as noções e teoremas matemáticos que eles utilizam são ferramentas. Através da caracterização desses teoremas e noções como parte integrante de um corpo reconhecido social e cientificamente, e da conseqüente constituição de definições, enunciações e demonstrações de teoremas desse corpo, têm-se os objetos.

A dialética ferramenta–objeto de Douady consiste numa organização esquemática que, para a solução de um dado problema em uma situação de aprendizagem, se desenvolve em diversas fases, assim denominadas: *antigo, pesquisa, explicitação, novo implícito, institucionalização, reinvestimento* e *novo problema*. Entretanto discorreremos apenas sobre as fases utilizadas na presente pesquisa.

A primeira fase, denominada *antigo*, caracteriza-se pela utilização de conhecimentos antigos (objetos de saber matemático com estatuto de ferramentas) na resolução de problemas, com o propósito de resolvê-los ao menos parcialmente.

A segunda fase, denominada *pesquisa*, compreende a tendência a utilizar novos conhecimentos implicitamente, diante da possível dificuldade apresentada pelos alunos em resolver a atividade por completo. Entretanto, o pesquisador tem, durante essa fase, condições de apontar e caracterizar os novos conhecimentos que possivelmente estão sendo criados. Os alunos, mesmo não sabendo enunciar tais conhecimentos, têm consciência de que são novos. Torna-se então possível o surgimento de novos questionamentos feitos pelos alunos, os quais são levados à busca de novos meios de resolução. Há também a possibilidade de promover discussões entre os alunos, a partir das quais os novos conhecimentos poderão se mostrar conflitantes ou não com os antigos.

Nessa fase, segundo Maranhão (1996), pode haver dificuldades para resolver completamente o problema proposto, seja porque a estratégia disponível é muito custosa (em número de operações, risco de erros, incertezas do resultado), seja porque ela não funciona. Nesse caso, os alunos são conduzidos a pesquisar outros meios que se adaptem à situação. Reconhece-se, com isso, o início de uma fase de ação.

Durante essa fase, os alunos poderão usar, por exemplo, representações numéricas ou gráficas criadas por eles mesmos, como meios para resolver o problema. Podem também ser instigados a isso. Deve-se sempre respeitar a liberdade dos alunos, promovendo tais situações quando se as julgar pertinentes.

Na terceira fase, denominada *explicitação*, ocorre a descrição dos resultados obtidos durante as atividades, das dificuldades encontradas e dos procedimentos utilizados no desenrolar destas, através de discussões promovidas pelo pesquisador. Este pode ressaltar os conhecimentos antigos e novos (ainda que implicitamente empregados) e as possíveis contradições ou erros, segundo sua análise da situação de classe. Propiciam-se, nesse momento, condições para que os alunos formulem idéias, validando-as e aceitando-as ou refutando-as.

Durante a realização das fases citadas acima, podem ocorrer situações de bloqueio ou sua iminência, cabendo ao pesquisador ou ao professor intervirem quando necessário, elucidando questões ou introduzindo noções, a partir de visões errôneas dos alunos, e até mesmo propondo novos problemas que considerem mais simples e com potencial de promover evolução de conhecimentos dos alunos, sempre priorizando a liberdade destes e respeitando os objetivos da atividade proposta.

Sobre a quarta fase, denominada *novo implícito,* Maranhão (1999) aponta a possibilidade de que certos elementos venham a ser formulados pelos alunos como objetos de conhecimento matemático (conceitos, propriedades ou procedimentos), com sua condição de emprego no momento.

Os novos elementos referidos anteriormente podem ser validados ou não pelos alunos por meio de ação, valendo-se das condições propiciadas a eles. Observa-se, contudo, que tais elementos nem sempre são suficientes ou possíveis para uma determinada situação.

Segundo Maranhão (1999):

> De acordo com Douady, é necessário que os problemas fornecidos envolvam, pelo menos dois domínios, de modo que um sirva de referência ao outro e possibilitem meios de validação pela ação.
>
> Os *domínios*, referidos no parágrafo anterior, por vezes, são ramos de conhecimento matemático (numérico, geométrico, algébrico, das grandezas...) e, por vezes, parte deles. As representações em retas graduadas ou em gráficos cartesianos são freqüentemente utilizadas, nas obras de Douady (1987, 1989) e de Perrin-Glorian (1986, 1987), para colocar em jogo conhecimentos desses domínios.
>
> [...] Das obras da pesquisadora, depreende-se que, conforme a problemática da pesquisa e os conhecimentos que se quer criar,

> engendram-se as seqüências de situações a serem propostas aos alunos e, de seus aspectos relevantes, são eleitos os *domínios.*
>
> É precisamente pelo fato de os *conhecimentos* de um certo *domínio* não serem suficientes para avançar, numa situação, que o aluno lança mão de conhecimentos de outros domínios.
>
> Esses *conhecimentos* são *conceitos*, *propriedades* e *procedimentos matemáticos*, com sua condição de emprego no momento. E são essas idas e vindas entre domínios diferentes as responsáveis pelo avanço de seus conhecimentos. (MARANHÃO, 1999, p. 118, 119)

A autora esclarece ainda:

> Em situações para o ensino infantil ou fundamental, Douady (1984), por vezes, considera como *domínio*, o das representações (incluindo diversos códigos, registros ou desenhos que esses alunos lancem mão para conduzir um procedimento de solução de um problema) ou, até mesmo, o que denomina domínio material, contemplando aí o que esses alunos obtêm das ações físicas sobre objetos. (MARANHÃO, 1999, p. 119)

Maranhão (1996) enfatiza, além disso, que se pode considerar a existência de um estado não-homogêneo de conhecimentos entre os diversos domínios, que varia não só para um mesmo aluno, mas também de um aluno a outro. Disso conclui-se que há uma diferença entre o que o professor gostaria que os alunos soubessem, o que ele toma como pré-requisito para o ensino de determinado assunto e o que cada aluno realmente conhece, para utilização em novas aprendizagens. Por isso, para introduzir e suscitar o funcionamento da interação entre domínios é conveniente escolher alguns problemas nos quais ao menos dois domínios possam intervir.

Focalizamos em nossa pesquisa atividades que não introduzem nem um método nem sua solução, de modo que a contribuição do grupo favoreça a elaboração de conjecturas e o conseqüente desenvolvimento da solução.

O quadro teórico em questão abrange também as noções de *ferramenta implícita* e *ferramenta explícita*, que são, respectivamente, noções matemáticas implícitas e explícitas utilizadas na resolução de problemas matemáticos pelos alunos. Em nossa pesquisa, previmos tanto o uso implícito como explícito de noções e propriedades, não só na resolução de atividades de enquadramento numérico, mas também nas representações usadas por eles.

Esse quadro teórico inclui também as noções de dialética ferramenta–objeto e de interação entre domínios, isto é, dos diferentes domínios empregados na realização das atividades por alunos. Dos recursos previstos de serem por eles utilizados, talvez as representações em reta tenham um papel central, ou talvez a representação de intervalos no domínio numérico se mostre suficiente. Há a possibilidade, ainda, de utilizarem outros domínios, como o algébrico e o físico — dramatização corporal —, assim como outros domínios inesperados criados por eles para a realização integral da tarefa. Portanto, as atividades em questão podem comportar domínios diversos.

Além disso, o quadro teórico comporta a análise de resoluções completas e incompletas. Existe inclusive a hipótese de se analisarem questões abruptas (feitas pelos alunos sem dados suficientes no desenrolar da atividade), assim como questões supérfluas. A obtenção de dados (perguntas e respostas) escritos pelos alunos é pertinente à situação.

Na interação entre os alunos, os conhecimentos e idéias criados por eles podem se mostrar conflitantes. Durante o desenvolvimento das atividades, podem-se propor debates e, ainda, atentar-se às situações de bloqueio, quer estas sejam percebidas de imediato ou tardiamente, intervindo com questões ou sugestões que não forneçam a resposta aos alunos, mas que os incentivem a continuar em atividade de pesquisa e debate.

As fases da dialética ferramenta–objeto também foram usadas para proporcionar elementos para a análise das ações e falas dos alunos.

Considerando o quadro teórico de Douady (1984), podemos ressaltar, segundo Maranhão (1996), que uma situação de aprendizagem é caracterizada por um problema e por uma certa organização de trabalho, adaptada aos objetivos visados. Desse fato depreende-se que os conhecimentos advêm da interação dos participantes da pesquisa com as atividades propostas, resolvidas por eles, e da interação entre eles. Esse processo lhes proporciona a mobilização dos conhecimentos adquiridos anteriormente, assim como possíveis modificações, ampliações e rejeições desses conhecimentos.

Optamos, para responder a nossas indagações, pela utilização da metodologia apresentada no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 3 — ESCOLHAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS

Realizamos uma pesquisa qualitativa, na forma de estudo de caso, embasando-nos na noção de dialética ferramenta–objeto, do quadro teórico adotado. Esse tipo de pesquisa foi escolhido por atender às características de nossa investigação, que inclui situações de explicitação e a promoção de debates, que proporcionam aos participantes integração e possibilidade de reflexão sobre as estratégias empregadas durante todo o processo de investigação.

O estudo de caso exploratório (LÜDKE; ANDRÉ, 1986; ANDRÉ, 2003) caracteriza-se como um estudo aprofundado, adequado a situações complexas e dinâmicas, permitindo obter informações relevantes para a tomada de decisões. Essa metodologia propicia ao pesquisador condições de fazer descobertas e observações referentes tanto a novos fatores quanto a outros aspectos relevantes que podem emergir durante a realização da investigação.

Segundo Lüdke e André (1986):

> O estudo de caso começa com um plano muito incipiente, que vai se delineando mais claramente à medida que o estudo se desenvolve. Podem existir inicialmente algumas questões ou pontos críticos [...] que vão sendo explicitados, reformulados ou abandonados, na medida em que se mostrem mais ou menos relevantes na situação estudada (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 21)

Acrescentam que:

> Dentro da própria concepção de estudo de caso que pretende não partir de uma visão pré-determinada da realidade, mas apreender os aspectos ricos e imprevistos que envolvem uma determinada situação, a fase exploratória

> se coloca como fundamental para uma definição mais precisa do objeto de estudo. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 22)

O pesquisador, mesmo partindo de determinados pressupostos teóricos iniciais, deve manter-se atento a novos elementos importantes que possam emergir durante a pesquisa, ponderando a necessidade de incorporá-los ou não a ela.

As autoras ressaltam que:

> Um princípio básico desse tipo de estudo é que, para uma apreensão mais completa do objeto, é preciso levar em conta o contexto em que ele se situa. Assim, para compreender melhor a manifestação geral de um problema, as ações, as percepções, os comportamentos e as interações das pessoas devem ser relacionadas à situação específica onde ocorrem ou à problemática determinada a que estão ligadas. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 18)

Considerando-se que no estudo de caso pressupõe-se que o conhecimento está em constante construção, fazendo-se e refazendo-se ao longo de todo o processo, torna-se pertinente ao pesquisador buscar novas respostas e questionamentos, visando o desenvolvimento da pesquisa. Portanto, destaca-se a importância atribuída ao processo como um todo, e não somente ao resultado final, considerando a perspectiva e a interação dos sujeitos envolvidos e a possibilidade do contato direto entre eles e o pesquisador.

Segundo André (2003):

> A abordagem do estudo de caso vem sendo usada há muitos anos em diferentes áreas do conhecimento como medicina, psicologia, serviço social, enfermagem, em que se faz o estudo exaustivo de um caso, geralmente um indivíduo bastante problemático, para fins de diagnose, tratamento ou acompanhamento. Já na área de administração, o estudo de caso tem servido para estudar o funcionamento de uma instituição e determinar focos de mudança ou de intervenção. Em direito ele também tem uma larga

> tradição, destinando-se geralmente a ilustração dos procedimentos legais utilizados na resolução de um problema jurídico. (ANDRÉ, 2003, p. 30)

Em publicação destinada a psicólogos, Belas (1998) relata que o estudo de caso caracteriza-se por uma convergência de informações de naturezas distintas, informações estas relacionadas com vivências e compartilhamento de experiências dos participantes da pesquisa, objetivando-se a compreensão de um determinado fenômeno, que constitui o foco da observação. Assim, pode-se salientar que Belas descreve como objetivo principal dessa metodologia a possibilidade e a intenção de se promover maior compreensão de uma determinada situação vivenciada pelos participantes.

Essas situações, referidas por Belas (1998) como momentos, são eventos contemporâneos, os quais Yin[4], citado por Bressan (2000), afirma que podem ser observados diretamente através de entrevistas.

Ainda segundo Bressan (2000), Yin ressalta que o estudo de caso caracteriza-se pela capacidade de lidar com uma completa variedade de evidências — documentos, artefatos, entrevistas e observações.

A observação é considerada por Lüdke e André (1986) um meio privilegiado de coleta de dados nas novas abordagens de pesquisas educacionais, possibilitando amplo e direto contato entre pesquisador e sujeitos da pesquisa e podendo ser vinculada a outros meios de coleta.

André (2003) aponta, no estudo da prática escolar cotidiana, a relevância de se estabelecer:

---

[4] YIN, Robert K. *Case study research*: design and methods. Newbury Park, CA (USA): Sage, 1989.

> [...] um contato direto com a direção da escola, com o pessoal técnico-administrativo e com os docentes, por meio de entrevistas individuais ou coletivas ou mesmo de conversas informais, um estudo das representações dos atores escolares, além de um acompanhamento das reuniões e atividades escolares. (ANDRÉ, 2003, p. 43)

Ressalta-se, assim, a pertinência da observação cuidadosa, pelo pesquisador, dos participantes da pesquisa durante todas as etapas, de modo a promover o desenvolvimento natural e espontâneo dos relatos e produções destes, podendo também propiciar-lhes liberdade para que expressem seus próprios argumentos e informações, quando julgarem conveniente e relevante tal expressão.

Lüdke e André (1986) destacam que:

> [...] o pesquisador deve, assim, atentar-se para o maior número possível de elementos presentes na situação estudada, pois um aspecto supostamente trivial pode ser essencial para a melhor compreensão do problema que está sendo estudado. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 12)

Câmeras de vídeo podem ser utilizadas como recurso de coletas de dados, permitindo enquadrar o corpo e a face dos sujeitos da pesquisa e registrar as interações entre estes. Aspectos comportamentais particulares dos sujeitos, assim como diversos dados descritivos, tais como situações, depoimentos, diálogos e conversas informais, podem também ser observados.

Segundo Lüdke e André (1986):

> Com essa variedade de informações, oriundas de fontes variadas, ele [o pesquisador] poderá cruzar informações, confirmar ou rejeitar hipóteses, descobrir novos dados, afastar suposições ou levantar hipóteses alternativas. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 19)

Dessa forma, algumas alterações podem ser realizadas durante a pesquisa. Lüdke e André (1986) ressaltam que Wolcott[5] afirma que, segundo Firestone e Dawson:

> O problema é redescoberto no campo [...] ele procura mergulhar na situação e a partir daí vai rever e aprimorar o problema inicial da pesquisa. Com isso Wolcott não estaria sugerindo a inexistência de planejamento ou de teoria, mas apenas a inconveniência de uma atitude inflexível em relação ao problema investigado. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 14)

André (2003) explica que durante a coleta de dados:

> Os dados são mediados pelo instrumento humano [...]. O fato de ser uma pessoa o põe numa posição bem diferente de outros tipos de instrumentos, porque permite que ele responda ativamente às circunstâncias que o cercam. (ANDRÉ, 2003, p. 28)

Com o intuito de tornar a pesquisa válida e fidedigna, deve-se planejar previamente a situação, de modo cauteloso e sistemático:

> Planejar a observação significa determinar com antecedência “o que” e “o como” observar. A primeira tarefa, pois, no preparo das observações é a delimitação do objeto de estudo. Definindo-se claramente o foco da investigação e sua configuração espaço-temporal, ficam mais ou menos evidentes quais aspectos do problema serão cobertos pela observação e qual a melhor forma de captá-los. Cabem ainda nessa etapa, as decisões mais específicas sobre o grau de participação do observador, a duração das observações etc. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 25)

E ainda:

> A pesquisa qualitativa [...], segundo Bogdan e Biklen (1982), envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se

---

[5] WOLCOTT, H.W. Criteria for an ethnographic approach to research in education. *Human Organization*, v. 34, p. 111-128, 1975.

> preocupa em retratar a perspectiva dos participantes. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 13)

Consideramos que a metodologia escolhida para o desenvolvimento desta pesquisa é pertinente, visto que, de acordo com André (2003), referindo-se a Stake[6]:

> [...] os estudos de caso [...] respondem muito bem às questões sobre a relevância dos resultados da pesquisa, pois os estudos de caso são exatamente úteis para conhecer os problemas e ajudar a entender a dinâmica da prática educativa. E ele [Stake] mesmo acrescenta: "Um estudo de caso que retrate um problema educacional em toda a sua complexidade individual e social é uma descoberta preciosa". (ANDRÉ, 2003, p. 50)

Desse modo, consideramos que o estudo de caso proporciona meios para uma investigação que enfatiza a observação de eventos particulares.

Nossa pesquisa foi desenvolvida a partir de trabalho realizado por Janaina M. L. de Souza, integrante de nosso grupo de pesquisa G5 – Educação Algébrica, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Nesse trabalho, a autora realizou uma atualização[7] de atividades[8] criadas por Douady (1986) abrangendo o enquadramento de números racionais em intervalos.

No trabalho realizado por Janaina M. L. de Souza[9], essas atividades atualizadas foram vivenciadas por duas professoras de matemática, sendo uma de sétima e outra de oitava série do ensino fundamental, de uma escola particular da

---

[6] STAKE, R.E. Case study methods in educational research: seeking sweet water. In: JAEGER, R.M. (Ed.). *Complementary methods for research in education*. Washington, D.C.: Aera, 1988. p. 253-265.

[7] *Atualização*: subjetivação que diz respeito às subjetividades sensoriais. Segundo Stéphane Lupasco, "o sujeito é o lugar das atualizações, assim como tudo o que se atualiza é o lugar do sujeito, é a obra do sujeito, agente atualizador [...] somos inconscientes do que é atualizado automaticamente. Toda atualização é inconsciente, mas traz com ela uma consciência de algo, a criação mental de um objeto exterior, objeto das sensações em estado de potencialidade" (LUPASCO, S. *L'homme et sés trois éthiques*. Paris: Rocher, 1986. p. 24). Segundo Hélène Trocmé-Fabre, todo dinamismo implica um dinamismo antagônico, de modo que a atualização de um potencializa o outro (TROCMÉ-FABRE, H. *A árvore do saber-aprender*: rumo a um referencial cognitivo. Tradução de Marli Segreto. São Paulo: Triom, 2004. p. 18).

[8] Essas atividades de Douady (1986) são as citadas no Capítulo 1 do presente trabalho.

[9] Dissertação em curso

cidade de São Paulo. A partir dessa vivência, foi proposta uma reatualização dessas atividades, visando-se sua proposição em sala de aula. Essas atividades reatualizadas foram apresentadas em três etapas distintas, denominadas *tarefa reatualizada 1*, *tarefa reatualizada 2* e *tarefa reatualizada 3*.

Para esta pesquisa, foram realizadas reuniões entre a pesquisadora e as professoras de matemática. A autora da presente dissertação participou como observadora desses encontros, por se tratar de uma investigação realizada por um membro do mesmo grupo de pesquisa. Desse modo, foi possível proceder à coleta de informações sobre as adaptações e alterações sugeridas pelas professoras para essas atividades, bem como sobre a relevância e pertinência da proposição dessas atividades em sala de aula naquela instituição de ensino.

Em nossa pesquisa, propusemo-nos a observar como essas atividades reatualizadas seriam vivenciadas em sala de aula por todos os alunos de uma classe de sétima série selecionada pela professora de matemática na mesma escola em que se deu a pesquisa de Janaina M. L. de Souza, sendo coletados dados sobre todos eles.

Para isso, foram realizadas quatro sessões com duração aproximada de 1 h 30 min cada uma. Nelas estiveram presentes todos os alunos dessa classe, a professora de matemática e duas observadoras.

Essas sessões, em que foram propostas as atividades reatualizadas, são relatadas no capítulo seguinte. Saliente-se que algumas outras alterações e adaptações nas tarefas reatualizadas e atividades reatualizadas foram ainda propostas e realizadas durante as vivências com alunos em sala de aula.

CAPÍTULO 4 — REALIZAÇÃO DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentaremos as tarefas e atividades reatualizadas, descrevendo também a dinâmica, as regras e o objetivo de cada uma. No decorrer deste capítulo, nos referiremos a elas simplesmente como *tarefas* e *atividades*.

Descreveremos a vivência dessas tarefas e atividades pelos alunos, entremeando nossas observações e análises referentes a nossas intenções de pesquisa, no que concerne aos procedimentos de resolução, às ferramentas e aos domínios (em termos de representações numéricas, gráficas ou outras) empregados por eles.

Para isso, as produções orais dos alunos em sala de aula são apresentadas em quadros. Elas se referem às questões e às respostas formuladas durante a vivência de cada atividade.

No decorrer de nossas análises, as produções escritas serão divididas em três categorias, dispostas em quadros contendo exemplos das produções dos alunos, os domínios por eles utilizados e a quantidade de ocorrências de cada categoria de anotação.

Aspectos extras, aflorados durante a vivência dessas tarefas e atividades pelos alunos, também serão apresentados.

Nossas observações e análises versam sobre as produções de todos os alunos da classe. Por questões éticas, os identificaremos por nomes fictícios.

Conforme consta em nossos procedimentos de pesquisa, a proposição das tarefas e atividades aos alunos foi feita em quatro encontros, aqui denominados *aulas*. Em cada uma delas, contamos a presença da professora de matemática da classe, da pesquisadora, de duas observadoras e de todos os alunos da classe de sétima série participante da pesquisa.

Precedendo essas quatro aulas, promoveu-se um encontro em que a pesquisadora e as observadoras foram apresentadas aos alunos. Nesse encontro, ocorrido em horário escolar, salientou-se a importância do desenvolvimento de pesquisas e da possibilidade da participação dos alunos em nossa investigação. Questionou-se, assim, sobre a disponibilidade e a concordância de todos eles quanto à participação, bem como sobre a possibilidade de realizarmos gravações durante as aulas.

Os alunos mostraram-se receptivos e dispostos a participar da investigação. O desenvolvimento de pesquisas é uma prática usual nessa instituição de ensino.

4.1. TAREFA 1

4.1.1. DESCRIÇÃO DA TAREFA 1

Para a realização da tarefa 1, propõe-se que o professor de matemática anote inicialmente em um papel o número inteiro previamente pensado, sem revelá-lo aos alunos.O número lhes será mostrado somente no encerramento da atividade.

Será fornecido aos alunos um intervalo de números inteiros, também previamente determinado, em que o número pensado está compreendido.

Essa tarefa deverá ser desenvolvida com a participação de duas equipes, sendo uma delas constituída por todos os alunos da classe e a outra somente pelo professor.

Os alunos deverão elaborar questões e dirigi-las ao professor, que, por sua vez, será responsável pelo fornecimento das respostas. Para isso, deverão formular questões utilizando relações do tipo ‘é maior que’ e ‘é menor que’. As respostas possíveis serão apenas ‘sim’ e ‘não’.

O professor deverá comunicar aos alunos que haverá uma dada quantidade máxima de questões que poderão ser feitas. Essa quantidade está determinada no enunciado de cada atividade.

O objetivo dessa tarefa consiste na descoberta, pelos alunos, do número inteiro pensado. Ela se subdivide em três atividades, denominadas *atividade 1*, *atividade 2* e *atividade 3*, descritas a seguir.

4.1.1.1. ATIVIDADE 1

Número pensado: –5.

Essa atividade segue as regras da tarefa 1, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–10, 10] e lhes informará que pensou em um número inteiro compreendido por –10 e 10;

b) a quantidade máxima de questões permitidas aos alunos é cinco.

4.1.1.2. ATIVIDADE 2

Número pensado: 13.

Essa atividade segue as regras da tarefa 1, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [0, 45] e lhes informará que pensou em um número inteiro compreendido por 0 e 45;

b) a quantidade máxima de questões permitidas aos alunos é cinco.

4.1.1.3. ATIVIDADE 3

Número pensado: 6.

Essa atividade segue as regras da tarefa 1, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–30, 38] e lhes informará que pensou em um número inteiro compreendido por -30 e 38;

b) a quantidade máxima de questões permitidas aos alunos é seis.

4.1.2. DESCRIÇÃO DA PROPOSIÇÃO DA TAREFA 1 (ATIVIDADES 1, 2 E 3) EM SALA DE AULA E ANÁLISE

A tarefa 1 foi proposta aos alunos na primeira aula. Estavam presentes 30 dos 34 alunos da classe. Contamos também com a presença da professora de matemática da classe, da pesquisadora e de duas observadoras.

Inicialmente a professora salientou que seriam observadas as produções e discussões promovidas por todos os alunos presentes.

Após esse esclarecimento, solicitou-lhes que guardassem todos os seus pertences, exceto lápis, deixando as carteiras totalmente desocupadas, pois iriam receber os materiais para a tarefa. Entregou então a cada aluno uma folha de papel sulfite sem linhas, contendo identificação da atividade 1 e um espaço em que o aluno deveria escrever seu nome. Entregou também uma caneta esferográfica azul a cada um deles.

A professora explicou que a folha serviria para que os alunos anotassem individualmente suas produções, caso o quisessem ou julgassem importante. Pediu que essas anotações fossem feitas a lápis, salientando ser importante que não utilizassem borracha e pedindo-lhes que apenas riscassem com um traço as anotações que considerassem desnecessárias. Ressaltou que o interesse da pesquisa era o de observar como e o que os alunos pensam, e explicou que todas as anotações realizadas por eles seriam relevantes para essa pesquisa, para a Educação Matemática em geral e também para a escola.

Pediu que, caso os alunos realizassem anotações após a realização das atividades, ou seja, durante os possíveis debates, que as fizessem com caneta, para que se diferenciassem das anteriores. (Em nossas análises posteriores, porém, acabamos optando por não diferenciar os dois tipos de anotações.)

A professora lhes informou que, caso tivessem dúvidas durante a realização das atividades, poderiam pedir esclarecimentos em voz alta, de modo que toda a classe pudesse compartilhá-los.

Ela então instruiu a classe a formar uma única grande equipe que seria desafiada por ela, e apresentou as regras da tarefa 1. Disse-lhes que a primeira atividade que fariam seria chamada de *atividade 1* e teria as mesmas regras da tarefa 1.

Escreveu em um papel o número previamente pensado para a atividade 1 (o número –5), sem que fosse visto pelos alunos, e o colocou sobre sua mesa. Forneceu a eles o intervalo compreendido por –10 e 10, informando também que a equipe de alunos poderia dirigir-lhe no máximo cinco questões para a determinação do número pensado, as quais seriam respondidas somente com ‘sim’ ou ‘não’.

Ressaltou novamente que o objetivo da atividade 1, por ser uma atividade da tarefa 1, seria a determinação do número inteiro que estava escrito no papel guardado sobre a mesa e que, para isso, seria permitida a formulação de no máximo cinco questões.

Em seguida, pediu que os alunos levantassem a mão quando desejassem propor alguma questão. Os alunos então se organizaram e começaram a dirigir suas questões à professora, levantando a mão, como solicitado. Não houve, portanto, desorganização durante a proposição das perguntas.

O Quadro 1a traz as questões e respostas suscitadas durante a realização da atividade 1:

Quadro 1a. Questões e respostas apresentadas durante a realização da atividade 1

QUESTÃO 1 Jonas: É par ou ímpar?	Professora: Vamos prestar atenção. As perguntas só podem ser respondidas com ‘sim’ ou ‘não’. Aqui você está fazendo duas perguntas ao mesmo tempo. Acabaram de desperdiçar uma pergunta.
QUESTÃO 2 Júlia: É positivo?	P: Não.
QUESTÃO 3 Eduardo: É maior que –5?	P: Não.
QUESTÃO 4 Leonardo: É maior que –7?	P: Sim.
QUESTÃO 5 Débora: É um número inteiro?	P: Sim.

É interessante ressaltar que após a elaboração da quantidade máxima de questões permitida aos alunos, o aluno Eduardo perguntou: “É o número –5?”. A professora respondeu que sim e imediatamente mostrou aos alunos o papel em que esse número estava escrito, para que todos pudessem vê-lo. Finalizou-se assim a atividade.

Quanto a essa atividade, têm-se por destacar os seguintes pontos:

a) A professora informou à classe que o aluno Jonas, ao elaborar a questão 1 (“É par ou ímpar?”), havia desperdiçado uma questão, visto que essa não poderia ser respondida com ‘sim’ ou ‘não’, e salientou novamente essa regra da tarefa 1. Disso parece ter decorrido que as demais questões formuladas pelos alunos puderam ser respondidas com ‘sim’ ou ‘não’.

b) A professora não limitou as questões dos alunos a relações do tipo ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’, mas permitiu a elaboração de quaisquer perguntas, desde que pudessem ser respondidas de acordo com as regras: com ‘sim’ ou ‘não’. De fato, as questões não se limitaram às relações mencionadas.

c) Embora a professora não tenha salientado que os alunos haviam utilizado a quantidade máxima de questões permitidas, os alunos atentaram para essa quantidade máxima.

d) Os alunos determinaram com êxito o número –5, previamente pensado para a atividade, utilizando a quantidade máxima de questões permitidas (cinco).

Como esclarecimento sobre nossas análises sobre as estratégias dos alunos reveladas por suas questões, apresentamos a seguir um *exemplo hipotético de resolução* dessa atividade, utilizando a quantidade máxima de cinco questões e relações do tipo ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’. Para isso, utilizamos a estratégia de ‘cortes pelo meio do intervalo’, ou seja, as médias aritméticas de seus extremos, que nos parece ter sido usada em três das cinco questões formuladas pelos alunos.

Como eles se mantiveram usando números inteiros nessas questões, fizemos isso também e, para tanto, realizamos algumas aproximações numéricas.

- POSSÍVEL QUESTÃO 1: O número é maior que 0?

  RESPOSTA: Não.

  Eliminam-se assim os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.

  Restam os números inteiros compreendidos por –10 e 0, isto é, do intervalo **[-10, 0]**.

Utilizamos o número 0, nessa questão, por ele ser a média aritmética dos extremos do intervalo [–10, 10].

- POSSÍVEL QUESTÃO 2: O número é maior que –5?

  RESPOSTA: Não.

  Eliminam-se assim os números –4, –3, –2, –1, 0.

  Restam os números inteiros compreendidos por –10 e –5, isto é, do intervalo **[-10, -5]**.

Note-se que, para essa questão, buscamos o número –5, por ser a média aritmética dos extremos do intervalo [–10, 0].

- POSSÍVEL QUESTÃO 3: O número é maior que –7?

  RESPOSTA: Sim.

  Eliminam-se assim os números –10, –9, –8 e –7.

  Restam os números **–6** e **–5**.

Observamos que, nesse caso, poderíamos empregar a média aritmética dos extremos do intervalo, questionando se o número é maior que –7,5. Entretanto, seguindo as questões dos alunos que mencionavam apenas números inteiros, fizemos a seguinte aproximação: entre os dois números inteiros consecutivos mais próximos de –7,5, que são –8 e –7, escolhemos –7. Selecionamos portanto um dos extremos do menor intervalo de inteiros que contém o número –7,5.

- POSSÍVEL QUESTÃO 4: O número é maior que –6?

  RESPOSTA: Sim.

  Elimina-se assim o número –6.

  Resta apenas o número **–5**.

Observamos também que, nesse caso, se poderia buscar exatamente o meio do intervalo, questionando se o número é maior que –5,5. Contudo, como restavam apenas dois números inteiros (–6 e –5), essa estratégia é desnecessária, podendo-se optar pela utilização de perguntas envolvendo qualquer dos dois números (–6 ou –5).

Assim, o número determinado é –5.

Note-se que com essa estratégia de resolução pudemos determinar o número pensado utilizando apenas quatro das cinco questões permitidas para a atividade.

Com base nesse exemplo hipotético e questões fictícias, analisamos as questões realmente formuladas pelos alunos, em termos das possíveis estratégias por eles empregadas:

- ✓ QUESTÃO 1: É par ou ímpar?

Sem resposta.

Apesar de formulada sem seguir uma das regras, a questão nos revela uma estratégia, inesperada por nós, doravante designada como ‘redução de aproximadamente metade dos números inteiros do intervalo’.

- ✓ QUESTÃO 2: É positivo?

RESPOSTA: Não.

A questão nos revela estratégia similar a uma das utilizadas no exemplo hipotético: emprego da média aritmética dos extremos do intervalo. Designaremos doravante essa estratégia como ‘corte pelo meio do intervalo’.

- ✓ QUESTÃO 3: É maior que –5?

RESPOSTA: Não.

Supomos que para a elaboração dessa questão tenha sido considerado o intervalo [–10, –1], obtido a partir da resposta à questão anterior, admitindo-se o sentido usual dos termos ‘positivo’ e ‘negativo’ como, respectivamente, ‘maior que zero’ e ‘menor que zero’, o que é consonante com o significado usual do termo em matemática, segundo Milies e Coelho (2003). Essa questão revela emprego da estratégia de resolução doravante designada como ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, envolvendo aproximação numérica da média aritmética dos extremos do intervalo, similarmente a uma das estratégias usadas em nosso exemplo hipotético.

- ✓ QUESTÃO 4: É maior que –7?

RESPOSTA: Sim.

Supomos que os alunos tenham obtido o intervalo [–10, –5], atribuindo sentido amplo, matemático, à relação ‘não ser maior que’ (equivalente a ser menor ou igual a). Assim, essa questão revela emprego da mesma estratégia utilizada na questão 3, designada como ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’.

✓ QUESTÃO 5: É um número inteiro?

Sem resposta.

Por presumirmos que os alunos tivessem obtido o intervalo [–6, –5] de números inteiros, consideramos essa questão supérflua, por desconsiderar as regras da tarefa 1, que são as mesmas para a atividade 1. Essa estratégia será doravante designada como ‘desconsideração das regras da tarefa’.

Assim, a respeito de nossas suposições sobre as estratégias empregadas pelos alunos e reveladas por suas questões, tem-se que:

a) Três dos alunos, dentre os cinco que formularam questões para essa atividade, possivelmente recorreram ao corte pelo meio do intervalo. Isso pode ser evidenciado pela questão 2, da aluna Júlia, pela questão 3, do aluno Eduardo, e pela questão 4, do aluno Leonardo. Ressalte-se, no entanto, que Leonardo e Eduardo nos parecem haver utilizado a estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’ e a aluna Júlia a estratégia de ‘corte pelo meio do intervalo’.

b) O aluno Jonas formulou uma questão inesperada: a questão 1. Reiteramos que, apesar de não seguir a regra, visto que os alunos só podiam se ater à formulação de questões passíveis de serem respondidas com ‘sim’ ou ‘não’, essa questão revela emprego da estratégia que designamos por ‘redução de aproximadamente metade dos números inteiros do intervalo’.

c) A aluna Débora formulou uma questão supérflua: a questão 5. Pareceu-nos que a aluna não atentou às regras estabelecidas. Apesar de ponderarmos que ela possa ter admitido que o número pensado poderia não ser inteiro, dadas tantas questões dos colegas envolvendo apenas inteiros, decidimos considerar que a questão dessa aluna envolve o uso da estratégia designada como 'desconsideração das regras da tarefa'. Por essa razão, consideramos a questão como não-pertinente.

Detectamos, assim, quatro categorias de estratégias para determinação de números inteiros num intervalo compreendido por dois números inteiros, as quais designamos por 'corte pelo meio do intervalo', 'aproximação do corte pelo meio do intervalo', 'redução de aproximadamente metade dos números inteiros do intervalo' e 'desconsideração das regras da tarefa'.

Convém ressaltar que para a realização de toda a tarefa 1, incluindo a atividade 1, os alunos constituíram um único grande grupo que foi desafiado pela professora. Tal procedimento de formação de grupos é coerente com a conduta institucional. Entretanto, analisando a vivência dessa atividade com base nas falas, observamos que todas as cinco questões foram formuladas individualmente pelos alunos, sem promoção de discussões e sem busca de consensos.

Conjecturamos que os alunos tenham recorrido, durante suas produções relativas à atividade 1, à utilização das noções de média aritmética, de números pares e números ímpares, de números positivos e números negativos e das relações matemáticas 'ser maior que' e 'ser menor que' como ferramentas matemáticas.

A seguir, discorreremos sobre as produções escritas dos alunos. Para isso, dividimos suas anotações em três diferentes categorias:

- Anotações completas: Serão assim consideradas as anotações completas dos alunos, ou seja, as que contemplam todas as informações relativas à atividade ocorridas durante o processo de vivência.
- Anotações incompletas: Estas são as anotações que contêm apenas algumas informações (informações parciais), sejam informações fornecidas pela professora, sejam algumas das perguntas e/ou respostas obtidas durante a realização da atividade.
- Ausência de anotações: Esta categoria abrange os casos em que os alunos não realizaram nenhum tipo de anotação, entregando as folhas de atividade em branco.

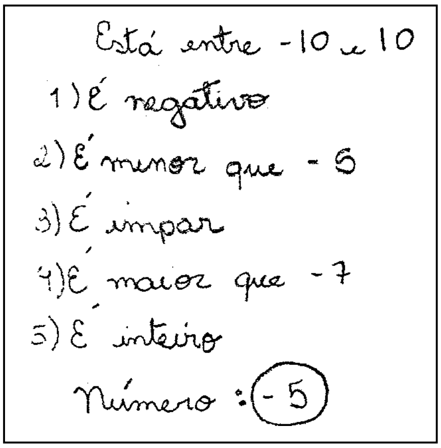
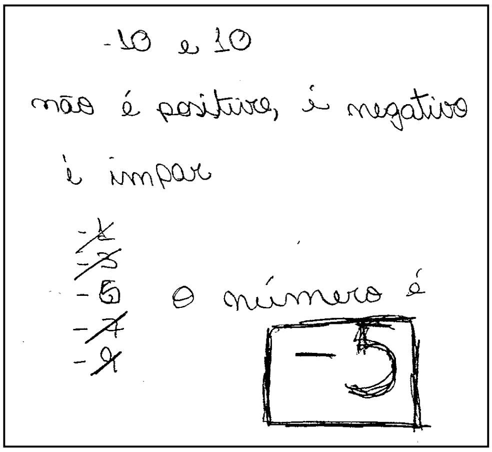
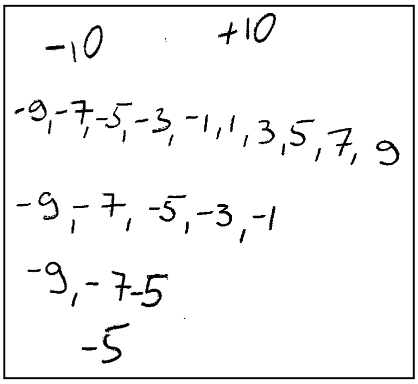
As categorias serão apresentadas em quadros separados (Quadros 1b, 1c e 1d), com exemplos de anotações (completas e incompletas, como definidas acima), identificação dos domínios a que os alunos recorreram para a resolução da atividade 1 e a quantidade dos alunos que fizeram uso de cada tipo de anotação, em cada uma das categorias.

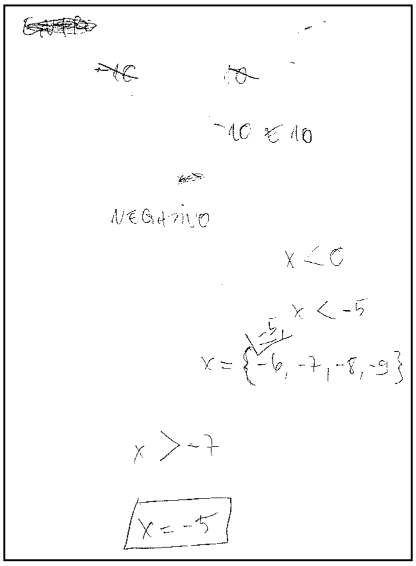
Todos os 30 alunos presentes nessa aula entregaram a folha de sulfite referente à atividade.

Ao observarmos as produções dos alunos, considerando as três categorias, percebemos que vários deles recorreram ao uso da língua materna, anotando tanto informações relatadas pela professora quanto perguntas e respostas formuladas durante a realização da atividade. Assim, constatamos o emprego pelos alunos, nessa atividade, de um domínio que aqui designamos como ‘de língua materna’. A interação entre o domínios numérico e o de língua materna pôde ser observada em boa parte das anotações.

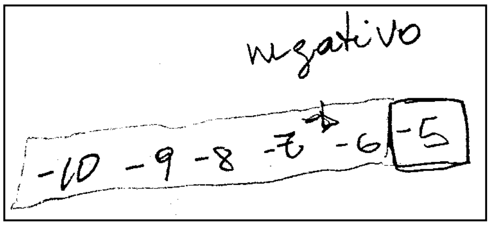
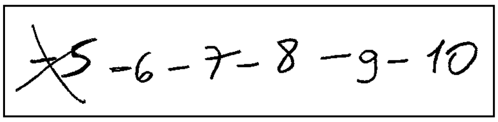
Observamos também que apenas um aluno envolveu três domínios em suas anotações — o algébrico, o numérico e o de língua materna —, realizando, portanto, interação entre eles.

Quadro 1b. Categoria ‘anotações completas’ (atividade 1)

Exemplos de anotações completas	Domínios utilizados	Quantidade de anotações
 Está entre -10 e 10 1) É negativo 2) É menor que -5 3) É impar 4) É maior que -7 5) É inteiro Número: -5  -10 e 10 não é positivo, é negativo é impar ~~-1~~ ~~-3~~ -5 o número é ~~-7~~ ~~-9~~ $\boxed{-5}$	Numérico e língua materna	20
 -10 +10 -9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9 -9,-7,-5,-3,-1 -9,-7-5 -5	Numérico	2

	Numérico, algébrico e língua materna	1
Quantidade total de anotações completas		**23**

Quadro 1c. Categoria ‘anotações incompletas’ (atividade 1)

Exemplos de anotações incompletas	**Domínios utilizados**	**Quantidade de anotações**
	Numérico e língua materna	3
	Numérico	2
Quantidade total de anotações incompletas		**5**

Quadro 1d. Categoria ‘ausência de anotações’ (atividade 1)

Quantidade de alunos que não realizaram anotações	**2**

É importante salientar que, em nossa investigação, ativemo-nos às produções escritas dos alunos e a suas falas, ambas referentes às questões que formularam para determinar o número pensado, e às respostas dadas pela professora a esses questionamentos durante a realização da atividade.

A professora promoveu em sala de aula um debate sobre as questões formuladas pelos alunos quanto à atividade 1, debate esse que ocorreu juntamente com a discussão das questões relativas à atividade 2, depois que esta última havia sido realizada. No entanto, como o presente texto está organizado por atividades, transcrevemos a seguir alguns trechos selecionados desse debate, relativos à atividade 1. Esses trechos não foram analisados nesta pesquisa, mas são aqui apresentados apenas para darmos continuidade ao relato da realização dessa atividade 1. Entre colchetes figuram alguns aspectos que consideramos esclarecedores.

P: Na atividade 1, um aluno perguntou logo de início se o número era par ou ímpar. O que vocês acham dessa pergunta?

Eduardo: Ah, eu acho boa, porque tira um monte de números.

Lucas: Mas não pode ser feita, porque a resposta só pode ser 'sim' ou 'não'. Então, não é boa, porque estamos queimando uma pergunta.

P: Isso mesmo. Precisamos prestar atenção nas regras, para não desperdiçarmos questões. E sobre a pergunta "É positivo?"? O que vocês acham?

Alunos: É boa.

P: Por que você a considera boa?

Anita: É boa porque elimina metade dos números.

P: Quais são os números eliminados?

Jonas: Eliminamos todos os positivos.

Helena: Se a resposta for positiva, então eliminamos todos os números negativos. Se for negativa, eliminamos todos os positivos.

P: Vocês concordam? É uma boa pergunta?

Alunos: É.

Isso nos faz cogitar que se buscou, ao explorar as questões dos alunos, ressaltar a importância de estarem atentos às regras estabelecidas, bem como à pertinência de suas questões. Desse modo, a professora comentou duas das cinco questões feitas pelos alunos nessa atividade, a partir das quais eles expuseram espontaneamente seus argumentos. Assim, considerando-se as fases da dialética ferramenta–objeto, tem-se aí a fase de *explicitação*.

Após os alunos haverem realizado a atividade 1, a professora optou por lhes propor a segunda atividade (**atividade 2**). Para isso, lhes entregou outra folha de sulfite em branco, também sem linhas, contendo identificação dessa atividade e um espaço para preenchimento com o nome do aluno. Ressaltou que mesmo se algum aluno não tivesse feito anotações na folha destinada à atividade 1, deveria utilizar para a realização dessa segunda atividade a nova folha, e que todas as folhas seriam recolhidas no final da aula.

Informou-lhes que as regras da atividade 2 continuariam sendo as mesmas da tarefa 1.

Similarmente ao que ocorrera na atividade 1, a professora escreveu o número previamente pensado (número 13) em um papel, sem revelá-lo aos alunos e colocando-o sobre a mesa. Disse-lhes que esse número pensado estava situado no intervalo compreendido pelos números 0 e 45, informando também que poderiam elaborar no máximo cinco questões.

Novamente salientou que suas respostas seriam somente ‘sim’ ou ‘não’, e pediu que os alunos levantassem a mão para que as perguntas fossem feitas organizadamente.

As questões e respostas suscitadas durante a realização da atividade 2 são apresentadas no Quadro 2a:

Quadro 2a. Questões e respostas apresentadas durante a realização da atividade 2

QUESTÃO 1 Eduardo: É ímpar?	Professora: Sim.
QUESTÃO 2 Jonas: É maior que 22?	P: Não.
QUESTÃO 3 Laura: É maior que 10?	P: Sim.
QUESTÃO 4 Leonardo: 45 é o triplo desse número?	P: Não.
QUESTÃO 5 Alan: É menor que 16?	P: Sim.

Uma vez enunciadas as cinco questões permitidas, debateu-se sobre qual seria o número inteiro pensado para essa atividade. Um aluno disse que o número pensado poderia ser o 15, mas foi imediatamente advertido pelos colegas que comentaram a impossibilidade de ser esse o número, já que havia sido eliminado em decorrência da resposta à questão 4, feita pelo aluno Leonardo. Assim, a possibilidade de que o número pensado fosse 11 ou 13 foi aventada por outro aluno.

Diante disso, os alunos não haviam, até o final da atividade, determinado o número inteiro previamente pensado, sendo-lhes então mostrado o papel em que esse número havia sido anotado pela professora. Finalizou-se assim a atividade 2.

Têm-se por destacar nessa atividade os seguintes aspectos:

a) Analogamente à vivência da atividade 1, a professora não restringiu o tipo de questões permitidas aos alunos às relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’, dando-lhes liberdade para que elaborassem quaisquer perguntas que pudessem ser respondidas somente com ‘sim’ ou ‘não’.

b) Durante a realização da atividade, a professora salientou, a cada questão apresentada, a quantidade de questões que já havia sido utilizada. Os alunos usaram todas as questões que lhes eram permitidas.

c) Os alunos não determinaram o número previamente pensado, apesar de haverem esgotado a quantidade máxima de questões permitidas (cinco).

Para analisar as possíveis estratégias dos alunos a partir de suas questões, baseamo-nos no exemplo hipotético de resolução da atividade 1 (item 4.1.2), por nos parecer que a estratégia de resolução dos alunos usada na realização da atividade 2 tenha sido a mesma que utilizaram na atividade 1.

Consideramos, portanto, que os alunos recorreram ao corte pelo meio do intervalo, valendo-se da média aritmética de seus extremos, que nos parece ter sido empregado em três das cinco questões por eles formuladas. Em duas dessas três questões, supusemos o uso de aproximações numéricas. O fato de que os alunos utilizaram, similarmente ao ocorrido na resolução da atividade 1, somente o conjunto dos números inteiros ao elaborar as questões da atividade 2 também foi levado em conta para essa suposição.

As questões realmente formuladas pelos alunos estão analisadas a seguir, em termos das possíveis estratégias por eles empregadas:

✓ QUESTÃO 1: É ímpar?

RESPOSTA: Sim.

Considerando-se que as regras da atividade 2 não restringem as questões a relações do tipo ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’, os alunos poderiam recorrer a qualquer tipo de pergunta. No entanto, a utilização dessa questão logo no início da atividade nos indica que o aluno Eduardo possivelmente a tenha considerado satisfatória por propiciar a redução de aproximadamente metade dos números inteiros do intervalo [0, 45]. Isso nos parece ser decorrente da questão 1 formulada na atividade 1, com que o aluno Jonas questionou se o número era par ou ímpar. Essa é a estratégia que designamos por ‘redução de aproximadamente metade dos números inteiros do intervalo’.

✓ QUESTÃO 2: É maior que 22?

RESPOSTA: Não.

A questão nos faz supor a utilização da estratégia ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’. Isso condiz com uma das questões utilizadas em nosso exemplo hipotético.

Para a elaboração dessa questão, cremos que tenham sido considerados os números ímpares compreendidos pelos números 1 e 45, ou seja, os números 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43 e 45. O centro desse intervalo é o número 23, o que nos leva a supor que a aluna tenha perguntado

“É maior que 22?”, em vez de “É maior que 23?”, possivelmente por recorrer à estratégia ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’.

✓ QUESTÃO 3: É maior que 10?

RESPOSTA: Sim.

Dada a obtenção, a partir das questões 1 e 2 anteriores, dos números ímpares compreendidos por 1 e 21, ou seja, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 e 21, como possíveis números pensados, consideramos que a aluna Laura tenha possivelmente recorrido à estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’.

✓ QUESTÃO 4: 45 é o triplo desse número?

RESPOSTA: Não.

Com essa questão, o aluno Leonardo e seus colegas puderam eliminar apenas um possível número. Parece que esse aluno quis verificar se esse número (15) era o previamente pensado, atendo-se a apenas um número dentre todos os possíveis. Essa questão foi apresentada de modo abrupto no desenrolar da atividade, pois questões como essa são interessantes no final da atividade, quando há maior necessidade de dados para a determinação do número pensado.

Essa estratégia inesperada, que não havia sido utilizada pelos alunos até então, será doravante designada como ‘verificação de um número dentre os possíveis’.

✓ QUESTÃO 5: É menor que 16?

RESPOSTA: Sim.

Parece-nos que o aluno Alan utilizou a estratégia de ‘corte pelo meio do intervalo’. Ponderamos que, para isso, ele tenha considerado os números ímpares compreendidos por 11 e 21.

Sobre as possíveis estratégias empregadas pelos alunos, denotadas por suas questões, temos a apontar os seguintes aspectos:

a) Três dos cinco alunos que elaboraram questões durante a vivência dessa atividade possivelmente recorreram ao ‘corte pelo meio do intervalo’. Isso é caracterizado pela questão 2, do aluno Jonas, pela questão 3, de Laura, e pela questão 5, de Alan. É pertinente relembrar que as questões 2 e 3 denotam o possível uso da ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’ como estratégia de resolução, enquanto a questão 5 caracteriza-se pelo possível uso da estratégia de ‘corte pelo meio do intervalo’.

b) A questão 4, formulada pelo aluno Leonardo, é inesperada e gerou uma nova categoria de estratégias, que designaremos por ‘verificação de um número dentre os possíveis’.

c) A questão 1, feita pelo aluno Eduardo, nos revela a utilização da estratégia de ‘redução de aproximadamente metade dos números inteiros do intervalo’, de que já falamos.

Partindo do pressuposto da utilização dessas estratégias de resolução para a determinação do número inteiro pensado, situado num intervalo compreendido por dois números inteiros, têm-se então quatro categorias em uso na atividade 2: ‘corte pelo meio do intervalo’, ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, ‘redução de aproximadamente metade dos números inteiros do intervalo’ e ‘verificação de um número dentre os possíveis’.

Não deve ser descartado o fato de que, para a realização dessa atividade, os alunos mais uma vez constituíram uma única grande equipe desafiada pela professora. Similarmente ao ocorrido na realização da atividade 1, as cinco questões da atividade 2 também foram elaboradas individualmente pelos alunos, que as apresentaram à professora sem buscar o consenso dos demais.

Inclinamo-nos a crer que os alunos recorreram, durante a realização da atividade 2, às noções de média aritmética, de números pares e números ímpares, de números positivos e números negativos, das relações matemáticas 'ser maior que' e 'ser menor que' e da noção de multiplicação de números naturais, como ferramentas matemáticas.

Abordaremos a seguir as produções escritas dos alunos. Para isso, dividiremos suas anotações em três diferentes categorias, tal como fizemos para a atividade 1:

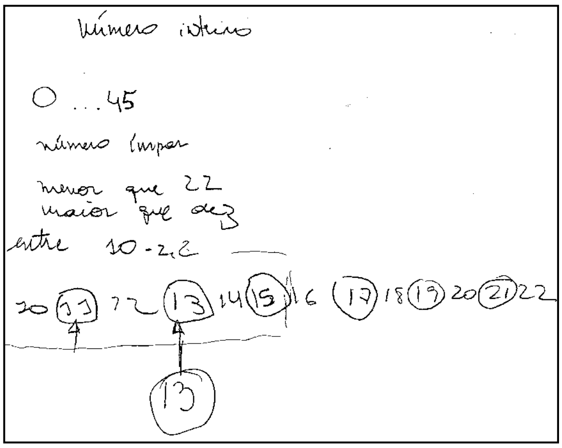
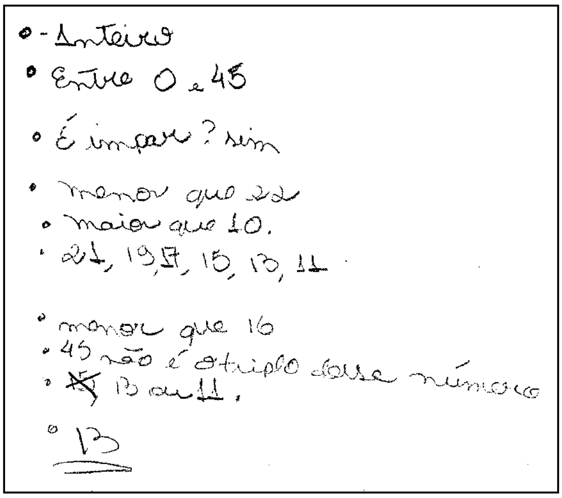
- Anotações completas
- Anotações incompletas
- Ausência de anotações

As categorias 'anotações completas' e 'anotações incompletas' são apresentadas nos Quadros 2b e 2c, respectivamente, com exemplos de anotações, identificação dos domínios a que os alunos recorreram para a resolução da atividade 2 e a quantidade dos alunos que fizeram uso de cada tipo de anotação.

A categoria 'ausência de anotações' não esteve representada. Nenhum aluno deixou de fazer anotações na resolução dessa atividade. Todos os 30 alunos presentes devolveram à professora a folha com algum tipo de anotação.

Na atividade 2, notamos que alguns alunos, ao realizarem suas anotações, recorreram à utilização do domínio de língua materna. Observamos também que recorreram à interação entre domínios, mais especificamente entre o domínio de língua materna e o numérico ou entre o numérico, o algébrico e o de língua materna. Analisando as produções dos alunos para a atividade 2, constatamos que houve maior emprego da interação entre esses três últimos domínios do que em suas produções relativas à atividade 1.

Quadro 2b. Categoria ‘anotações completas’ (atividade 2)

Exemplos de anotações completas	Domínios utilizados	Quantidade de anotações
	Numérico e língua materna	20

0 e 45 $0<x<45$ É impar $x<22$ $x>10$ $10<x$ $x<16$ $y=13$ 0 e 45 Impar É menor que 22 É > 10 É 13	Numérico, algébrico e língua materna	8
Quantidade total de anotações completas		**28**

Quadro 2c. Categoria: anotações incompletas (atividade 2)

Exemplos de anotações incompletas	**Domínios utilizados**	**Quantidade de anotações**
Impar 21 É impar 11, 13 ou 15	Numérico e língua materna	2
Quantidade total de anotações incompletas		**2**

Como já relatado, ao final da realização da atividade 2 a professora promoveu uma discussão a fim de retomar com os alunos as questões e as respostas formuladas durante a vivência das atividades 1 e 2.

A fim de darmos continuidade ao relato das ocorrências em sala de aula relativas à atividade 2, transcreveremos trechos de falas referentes às questões feitas pelos alunos e às respostas dadas pela professora. Figuram entre colchetes comentários que visam esclarecer o leitor e, entre chaves, observações referentes a gestos e falas comuns de mais de um aluno.

P: Antes de prosseguirmos nossas atividades, vamos retomar o que ocorreu durante a proposta da atividade 2. Mesmo realizando todas as cinco questões, vocês não determinaram o número inteiro pensado. Vocês acham que alguma das questões feitas por vocês impediu a determinação?

Jonas: A questão 4.

P: Todos concordam?

Ricardo: Depende. Se a resposta fosse sim, falaríamos que essa questão foi útil.

{A maioria dos alunos discorda de Ricardo, argumentando que essa questão era um "chute".}

Eduardo: Não seria uma questão útil. Seria um "chute". Deveria ter perguntado se era um número primo.

Anita: Seria um "chute" muito grande.

{Discussão confusa entre os alunos.}

P: Calma. Escutem o que a Júlia está falando.

Júlia: Perguntar se 45 é o triplo do número pensado é igual a perguntar se é o número 15.

Júlio: Não concordo. Tem uma complexidade maior.

Mariel: Lógico que não.

P: Júlio, justifique o que disse.

Júlio: Acho que foi um chute, mas o Leonardo construiu uma pergunta diferente. Foi uma tentativa diferente de achar o número, ao invés de só perguntar se era o número 15.

Pedro: Não. Ele perguntou se era o número 15, só que de outra maneira.

Eduardo: Com essas duas perguntas, a gente só eliminaria um número ou o descobriria. Então acho que não é uma boa questão.

Pressupomos, com base nesses trechos, que houve intenção de apontar a ocorrência de questões que possivelmente não contribuíram para o avanço da atividade, e conseqüentemente para o cumprimento de seu objetivo: a determinação do número inteiro previamente pensado. Assim, com esse debate promovido pela professora, os alunos puderam relatar suas idéias, por meio de argumentos, validá-las, refutando-as ou aceitando-as. Isso caracteriza duas fases da dialética ferramenta–objeto: a de *explicitação* e a de *novo implícito*.

Abordou-se em seguida a importância da realização de anotações durante a vivência das atividades, com o intuito de se evitarem questões desnecessárias. A aluna Fernanda relatou tal importância, tendo em vista a ajuda das anotações na organização das idéias, possibilitando que as questões e respostas anteriormente formuladas fossem retomadas, de modo a facilitar a elaboração de novas questões.

Buscando-se resguardar a liberdade dos alunos, coerentemente com a conduta institucional e com o quadro teórico adotado na presente pesquisa, questionou-se se os alunos desejavam prosseguir a tarefa 1, com proposição de uma terceira atividade (atividade 3), ou se preferiam iniciar a etapa seguinte (tarefa

2), em que o número pensado não seria mais inteiro e sim racional sob forma fracionária. Nessa nova tarefa, o objetivo passaria a ser a determinação do intervalo compreendido por dois números inteiros consecutivos em que o número racional pensado estivesse compreendido.

Os alunos optaram pela continuidade da tarefa 1, com o argumento de que poderiam se familiarizar melhor com essa tarefa antes de vivenciarem a seguinte. Assim, a professora deu continuidade à aula propondo-lhes a **atividade 3**. De maneira análoga ao ocorrido durante a proposição das atividades anteriores (1 e 2), escreveu em um papel o número pensado (número 6) e o colocou sobre a mesa, sem que os alunos vissem a anotação. Divulgou à classe que o intervalo a ser considerado para a atividade 3 era o compreendido pelos números –30 e 38 e que seriam permitidas no máximo seis questões. Disse-lhes novamente que as respostas poderiam ser apenas ‘sim’ ou ‘não’, não limitando, entretanto, o tipo de questões que poderiam ser feitas.

As folhas de sulfite destinadas à atividade 3 foram então entregues aos alunos.

As perguntas feitas pelos alunos e as respostas fornecidas pela professora durante a realização dessa atividade constam no Quadro 3a:

Quadro 3a. Questões e respostas apresentadas durante a realização da atividade 3

QUESTÃO 1: Helena: É positivo?	Professora: Sim.
QUESTÃO 2: Júlia: É par?	P: Sim.
QUESTÃO 3: Jonas: É menor que 19?	P: Sim.
QUESTÃO 4: Mariel: É menor que 11?	P: Sim.
QUESTÃO 5: Mariel: É resultado de dois elevado a alguma coisa?	P: Não.

Após a formulação das cinco questões apresentadas no Quadro 3a, o aluno Eduardo questionou se o número 6 era o número pensado, obtendo 'sim' como resposta. Desse modo, não recorreram à sexta questão, que ainda lhes era permitida. Note-se, porém, que Eduardo salientou, após a determinação do número pensado, que poderiam ter considerado outra possibilidade: o número 10.

Nessa atividade, têm-se por destacar os seguintes aspectos:

a) Tal como na vivência das atividades 1 e 2, não se limitou a formulação de questões às relações 'ser maior que' e 'ser menor que'. As questões, entretanto, deveriam ser respondidas somente com 'sim' ou 'não'.

b) Os alunos utilizaram apenas cinco das seis questões que lhes eram permitidas nessa atividade.

c) Os alunos cumpriram com êxito o propósito de determinar o número 6, previamente pensado para a atividade.

Pareceu-nos providencial analisar as questões dos alunos a fim de identificar as possíveis estratégias de resolução empregadas por eles durante a realização da atividade 3, com base no exemplo hipotético de resolução da atividade 1 (item 4.1.2).

Isso decorre de nossas observações de que parte dos alunos provavelmente recorreu à estratégia do ‘corte pelo meio do intervalo’, valendo-se da média aritmética de seus extremos, realizando por vezes aproximações numéricas, assim como da utilização apenas do conjunto dos números inteiros, similarmente ao que ocorrera na realização das atividades 1 e 2.

Desse modo, julgamos desnecessária a apresentação de um exemplo hipotético para a atividade 3, mas discorreremos sobre as questões formuladas pelos alunos e as respectivas respostas:

✓ QUESTÃO 1: É positivo?

RESPOSTA: Sim.

Levando-se em conta que não se restringiram os tipos de questões às relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’, os alunos elaboraram um novo tipo de questão, até então não formulado nas atividades anteriores. Às categorias de estratégias para determinação do número inteiro pensado, utilizadas nas produções dos alunos, soma-se essa nova estratégia, doravante designada como ‘separação dos números positivos do intervalo’.

✓ QUESTÃO 2: É par?

RESPOSTA: Sim.

Similarmente ao ocorrido na questão 1 da atividade 2, supomos que a presente questão tenha sido considerada satisfatória pela aluna Júlia por propiciar a eliminação de aproximadamente metade dos números inteiros do intervalo. Presumimos, assim, o recurso à estratégia de 'redução de aproximadamente metade dos números inteiros do intervalo'.

- ✓ QUESTÃO 3: É menor que 19?

  RESPOSTA: Sim.

Partindo de pressupostos similares, baseados nas questões 2 e 3 da atividade 2, supomos que o aluno Jonas, ao elaborar a questão 3 da atividade 3, também tenha recorrido à estratégia de 'aproximação do corte pelo meio do intervalo'.

- ✓ QUESTÃO 4: É menor que 11?

  RESPOSTA: Sim.

Essa questão nos faz conjecturar sobre a utilização da estratégia 'aproximação do corte pelo meio do intervalo'.

- ✓ QUESTÃO 5: É resultado de 2 elevado a alguma coisa?

  RESPOSTA: Não.

Consideramos essa questão inesperada. Entretanto, supondo-se que os alunos obtiveram, com as questões e respostas anteriores a ela, para essa atividade, os números pares compreendidos por 2 e 10, ou seja, 2, 4, 6, 8 e 10, como possíveis números pensados, cogita-se na possível utilização da estratégia de 'redução de aproximadamente metade dos números inteiros do intervalo'.

Após a elaboração da questão 5, restavam como possíveis números duas possibilidades: os números 6 e 10. Com a formulação da questão “É o número 6?”, que levou à resposta ‘sim’, os alunos determinaram com êxito o número inteiro previamente pensado.

Dadas nossas conjecturas sobre as possíveis estratégias apresentadas pelos alunos, têm-se os seguintes aspectos:

a) Dois dos cinco alunos que formularam questões à professora possivelmente recorreram à estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’. É o que ocorreu na questão 3, do aluno Jonas, e na questão 4, da aluna Mariel.

b) Embora as questões 2 e 5, formuladas respectivamente pelas alunas Júlia e Mariel, não sejam do mesmo tipo, caracterizam-se por possivelmente recorrerem à mesma estratégia de resolução: ‘redução de aproximadamente metade dos números inteiros do intervalo’.

c) A estratégia de resolução supostamente utilizada na questão 1, da aluna Helena, não havia sido empregada anteriormente: a estratégia de ‘separação dos números positivos do intervalo’.

Consideramos que houve portanto três categorias de estratégias de resolução: ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, ‘redução de aproximadamente metade dos números inteiros do intervalo’ e ‘separação dos números positivos do intervalo’.

Nessa atividade, manteve-se a formação de uma grande equipe constituída por todos os alunos da classe, o que é coerente com a conduta institucional. Um dos aspectos que nos chamou atenção nessa atividade foi a interação entre os alunos na elaboração da questão 5. As demais foram elaboradas individualmente, sem busca de consenso. É o que mostram as seguintes transcrições:

> Mariel: Eduardo! Leonardo! E se perguntarmos se o número é resultado de 2 elevado a alguma coisa?
>
> Eduardo: Pode ser. É uma boa pergunta. Se a resposta for 'sim', pode ser o 2, o 4 e o 8. São potência de 2.
>
> P: Vocês querem perguntar? {Alunos sinalizam que sim.} Vamos ver qual é a pergunta.
>
> Mariel: Nossa pergunta é assim: é resultado de 2 elevado a alguma coisa?
>
> P: Não.

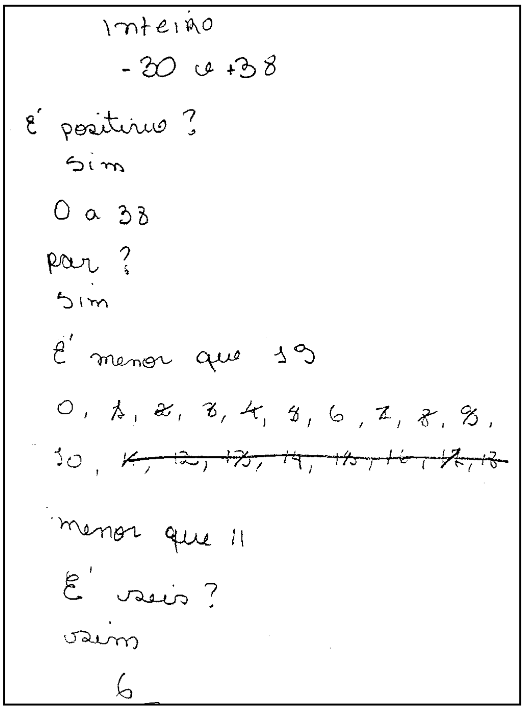
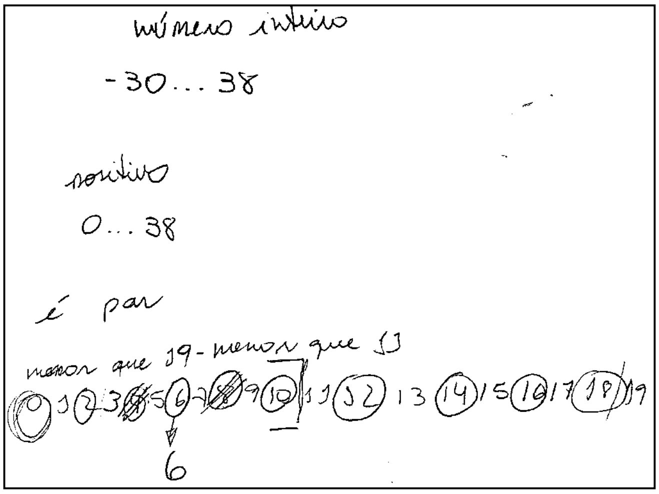
As produções dos alunos no desenvolvimento da atividade 3 nos sugerem que as noções de média aritmética, de números pares e números ímpares, de números positivos e números negativos, das relações matemáticas 'ser maior que' e 'ser menor que' e da potenciação do número 2 foram empregadas por eles como ferramentas matemáticas.

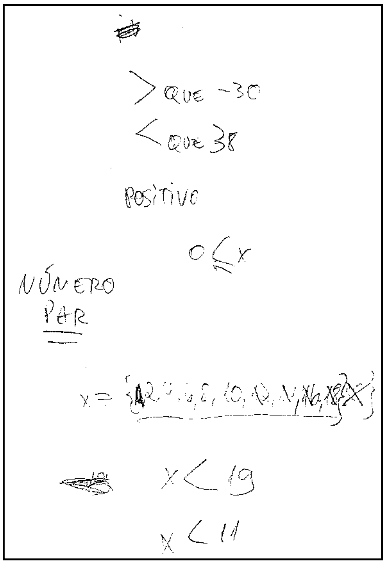
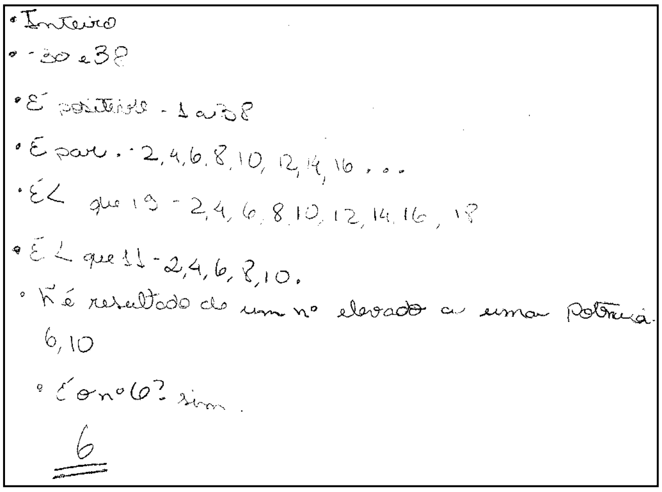
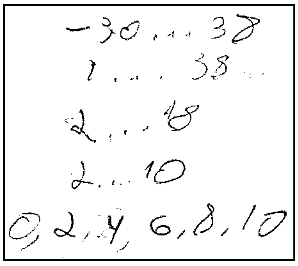
Tal como fizemos para as atividades anteriores, subdividimos as produções escritas dos alunos em três categorias:

- Anotações completas
- Anotações incompletas
- Ausência de anotações

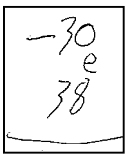
Os Quadros 3b e 3c trazem, respectivamente, exemplos de 'anotações completas' e 'anotações incompletas', as quantidades de suas ocorrências e os domínios empregados. A categoria 'ausência de anotações' não esteve representada. Nenhum aluno deixou de fazer anotações na resolução dessa atividade. Todos os 30 alunos presentes devolveram à professora a folha com algum tipo de anotação.

Quadro 3b. Categoria ‘anotações completas’ (atividade 3)

Exemplos de anotações completas	Domínios utilizados	Quantidade de anotações
 	Numérico e língua materna	16

 	Numérico, algébrico e língua materna	10
	Numérico	2
Quantidade total de anotações completas		**28**

Quadro 3c. Categoria 'anotações incompletas' (atividade 3)

Exemplo de anotação incompleta	Domínio	Quantidade de anotações
	Numérico	2
Quantidade total de anotações incompletas		**2**

Foi perceptível a utilização do domínio de língua materna nas produções escritas dos alunos. Durante as produções, notamos que os alunos colocaram em jogo a interação entre diferentes domínios, tais como entre o numérico e o de língua materna ou entre o numérico, o algébrico e o de língua materna.

É oportuno salientar que imediatamente após a determinação, pelo aluno Eduardo, do número 6, previamente pensado para a atividade 3, foi pedido que os alunos tecessem considerações sobre as questões que haviam formulado. É o que mostram estas transcrições:

P: Alguém pode me explicar como vocês obtiveram o número 6?

Eduardo: Se não fosse o 6, seria o 10.

P: Mas como vocês pensaram desde o início dessa atividade, para chegar no número 6?

Eduardo: Com a primeira questão, eliminamos os números negativos. Com a segunda, eliminamos os números ímpares. Com a terceira, ficamos com os pares menores que 19. Com a quarta, eliminou os pares maiores que 11. Ficamos com os números 10, 8, 6, 4, 2 e 0. O zero eu não sei, acho que é par...

Eugênia: A gente não sabe se o zero é um número par ou ímpar.

Júlio: O número zero não é nada.

{A professora permite que a discussão prossiga, sem sua interferência.}

Eduardo: Depois, a Mariel perguntou se o número era 2 elevado a alguma potência. Como 2 é 2 elevado a 1, 4 é 2 elevado a 2 e 8 é 2 elevado a 3, então sobraram os números 10 e 6.

P: Vocês chutaram que era o 6?

Eduardo: Ah, não foi bem um chute, porque se não fosse o 6, seria o 10.

Eduardo: Zero é par?

{Não há consenso entre os alunos.}

Deixou-se que os alunos buscassem por si mesmos as respostas a suas indagações que surgiram durante esse debate, sem que fosse institucionalizado o consenso matemático sobre a paridade do número zero. Antes disso, a professora sugeriu que os alunos estudassem as noções matemáticas abordadas nesse debate, para que fossem retomadas na próxima aula. Esses aspectos reapareceram em discussões promovidas na aula seguinte, não estando a pesquisadora presente, por não se tratar de seu objeto de pesquisa. A liberdade atribuída aos alunos foi coerente com a conduta institucional.

Frente a possíveis dificuldades encontradas por eles durante a realização dessa atividade, propiciaram-se condições para que colocassem em jogo novos conhecimentos, o que caracteriza a fase de *pesquisa* da dialética ferramenta–objeto. No entanto, ao serem incentivados a relatar suas produções e suas explanações, caracterizou-se outra fase: a de *explicitação*.

A professora finalizou a aula dizendo aos alunos que outras atividades seriam propostas em uma aula seguinte, e recolheu as folhas de sulfite utilizadas por eles durante essa aula. O sinal de saída para o intervalo soou e todos os alunos se retiraram da sala.

4.2. TAREFA 2

4.2.1. DESCRIÇÃO DA TAREFA 2

Para a realização da tarefa 2, o professor de matemática deverá inicialmente anotar em um papel o número racional sob forma fracionária previamente pensado, sem revelá-lo aos alunos. O número lhes será mostrado somente com o encerramento da atividade correspondente.

Será fornecido aos alunos um intervalo de números inteiros, também previamente determinado, em que o número pensado está compreendido.

Essa tarefa deverá ser desenvolvida com a participação de duas equipes, sendo uma delas constituída por todos os alunos da classe e a outra somente pelo professor.

Os alunos deverão elaborar questões e dirigi-las ao professor, que, por sua vez, será responsável pelo fornecimento das respostas. Para isso, deverão formular questões utilizando relações do tipo ‘é maior que’ e ‘é menor que’. As respostas possíveis serão apenas ‘sim’ e ‘não’.

O professor deverá informar aos alunos a quantidade máxima de questões que eles poderão formular. Essa quantidade está determinada no enunciado de cada uma das atividades.

O objetivo dessa tarefa consiste na determinação, pelos alunos, do intervalo de números inteiros consecutivos em que o número pensado está compreendido.

A tarefa subdivide-se em cinco atividades, denominadas *atividades 4*, *5*, *6*, *7* e *8*, descritas a seguir.

4.2.1.1. ATIVIDADE 4

Número pensado: $\frac{1}{5}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa 4, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–15, 15] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –15 e 15;

b) o número máximo de questões permitidas é cinco.

4.2.1.2. ATIVIDADE 5

Número pensado: $\frac{67}{5}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa 5, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [3, 41] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por 3 e 41;

b) o número máximo de questões permitidas é sete.

4.2.1.3. ATIVIDADE 6

Número pensado: $-\frac{15}{2}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa 6, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–52, –1] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –52 e –1;

b) o número máximo de questões permitidas é sete.

4.2.1.4. ATIVIDADE 7

Número pensado: $-\frac{1}{8}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa 7, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–27, 5] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –27 e 5;

b) o número máximo de questões permitidas é sete.

4.2.1.5. ATIVIDADE 8

Número pensado: $\frac{83}{2}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa 8, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–31, 50] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –31 e 50;

b) o número máximo de questões permitidas é oito.

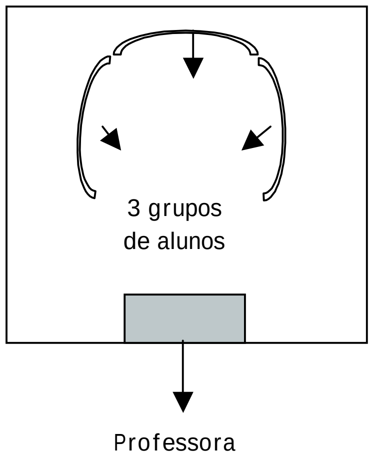
4.2.2. Descrição da proposição da tarefa 2 (atividades 4, 5, 6, 7 e 8) em sala de aula e análise

A professora propôs a tarefa 2 aos alunos em sala na segunda e terceira aulas. Na segunda aula, propôs as atividades 4, 5 e 6. As atividades 7 e 8 foram propostas na terceira aula. Participaram dessas duas aulas 32 dos 34 alunos da turma. Contamos com a presença da professora de matemática da classe, da pesquisadora e de duas observadoras.

Para a segunda e terceira aulas, a professora optou por alterar a distribuição espacial dos alunos na sala, dividindo-os em três subgrupos, levando em conta algumas ocorrências referentes à participação desses integrantes nas atividades da primeira aula. Contudo, a classe toda continuou a formar uma única grande equipe a ser desafiada pela professora. Com isso, e em coerência com a conduta institucional, buscou-se possibilitar maior interação entre os alunos, supondo-se que assim ficariam mais envolvidos na participação e em debates, o que possivelmente enriqueceria a proposição dessa tarefa 2.

A professora propôs dispor os alunos como mostra a Figura 1.

Figura 1. Disposição dos alunos na segunda e terceira aulas (Tarefa 2).



A professora iniciou a segunda aula pedindo que os alunos se organizassem em três subgrupos, de acordo com os nomes que enunciaria a seguir.

Resguardando-se a liberdade oferecida aos alunos e mantendo-se a coerência com a conduta institucional e com o quadro teórico adotado, a professora questionou se tinham alguma dúvida em relação à tarefa 1, vivenciada na aula anterior, e se optavam pela continuidade dessa tarefa ou se preferiam vivenciar a tarefa 2. Assim, expôs a dinâmica e o objetivo da nova tarefa, salientando que as regras adotadas seriam as mesmas da tarefa 1, embora o objetivo diferisse.

Explicou que o objetivo da tarefa 2 consistia na determinação do intervalo de dois números inteiros consecutivos em que o número racional sob forma fracionária previamente pensado estaria compreendido, e não mais na determinação do número inteiro pensado.

Os alunos optaram pela tarefa 2.

A professora pediu, como na sessão anterior, que os alunos guardassem todos os seus pertences, deixando sobre suas carteiras apenas o lápis. Distribuiu a cada aluno uma caneta esferográfica azul e uma folha de papel sulfite sem linhas, contendo identificação da atividade 4, e pediu que cada aluno escrevesse seu nome em sua folha.

Comunicou que cada aluno deveria, caso desejasse, realizar anotações em sua folha. Pediu que fossem feitas a lápis e que eles não utilizassem borracha, riscando apenas com um traço as anotações que considerassem desnecessárias. Informou-lhes que a caneta deveria ser usada, tal como na aula anterior, apenas para as anotações feitas após a realização das atividades, ou seja, durante os debates. (Embora isso tenha sido obedecido pelos alunos, não diferenciamos em nossas análises as anotações feitas a lápis e a tinta.)

Solicitou que os alunos se organizassem ao exporem as questões que formulassem e que colaborassem para que todos pudessem ouvir e compartilhar as perguntas e respostas.

A professora ressaltou que as regras da atividade 4 seriam as mesmas da tarefa 2, e enfatizou o objetivo.

Inicialmente, anotou em um papel o número previamente pensado (número $\frac{1}{5}$), sem revelá-lo aos alunos, e o colocou sobre sua mesa. Disse-lhes que esse número racional sob forma fracionária estava situado no intervalo compreendido pelos números –15 e 15 e que a quantidade máxima de questões que poderiam ser apresentadas era cinco. Relembrou-os que as perguntas só poderiam ser respondidas com ‘sim’ ou ‘não’. No entanto, não limitou as questões a serem feitas por eles às relações do tipo ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’, permitindo assim a elaboração de perguntas de quaisquer tipos.

Teve então início a realização da atividade 4. As questões formuladas pelos alunos e as respostas fornecidas pela professora durante a vivência dessa atividade são mostradas no Quadro 4a.

Quadro 4a. Questões e respostas apresentadas durante a realização da atividade 4

QUESTÃO 1: Mariel: É maior ou igual a zero?	Professora: Sim.
QUESTÃO 2: Leonardo: É maior ou igual a 8?	P: Não.
QUESTÃO 3: Helena: Dos dois números inteiros consecutivos do intervalo, o primeiro deles é par?	P: Sim.
QUESTÃO 4: Jonas: É maior que 4?	P: Não.
QUESTÃO 5: Eduardo: O número está no intervalo de 2 a 3?	P: Não.

Após a formulação das cinco questões permitidas, os alunos informaram à professora que o intervalo determinado era [0, 1]. Depois disso, foi-lhes mostrado o papel em que o número racional havia sido anotado, para confirmação da resposta, encerrando-se assim a atividade.

A realização dessa atividade nos permitiu notar os seguintes aspectos:

a) Tal como ocorrera na realização da tarefa 1, não se procurou restringir as questões formuladas pelos alunos para essa atividade 4 da tarefa 2 às relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’, embora elas devessem apenas ser respondidas com ‘sim’ ou ‘não’.

b) Os alunos utilizaram todas as cinco questões que lhes foram permitidas.

c) Os alunos alcançaram satisfatoriamente o objetivo dessa atividade, determinando o intervalo [0, 1].

Para analisar as possíveis estratégias de resolução dos alunos a partir de suas questões, embasamo-nos no exemplo hipotético apresentado anteriormente para a atividade 1 (item 4.1.2), por supormos que parte dos alunos tenha continuado a utilizar a estratégia de ‘corte pelo meio do intervalo’, valendo-se da média aritmética de seus extremos, possivelmente recorrendo, quando necessário, a aproximações numéricas. Essa suposição se aplica também por nos parecer que os alunos continuaram utilizando o conjunto dos números inteiros em suas estratégias de resolução. Assim, cremos que a apresentação de um novo exemplo hipotético é desnecessária.

Seguem-se as análises relativas às questões formuladas pelos alunos e as respectivas respostas:

✓ QUESTÃO 1: É maior ou igual a 0?

RESPOSTA: Sim.

A liberdade atribuída aos alunos para que formulassem quaisquer tipos de questões permitiu o uso, nessa questão, da relação de ordem ‘ser maior ou igual a’, que ainda não havia sido empregada. Pressupomos que, nesse caso, a estratégia utilizada foi a de ‘corte pelo meio do intervalo’.

✓ QUESTÃO 2: É maior ou igual a 8?

RESPOSTA: Não.

Constatamos a reutilização da relação de ordem ‘ser maior ou igual a’ nessa questão formulada pelo aluno Leonardo. A questão se diferencia, no entanto, pela suposta utilização da estratégia ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’.

✓ QUESTÃO 3: Dos dois números inteiros consecutivos do *intervalo*, o primeiro deles é par?

RESPOSTA: Sim.

Consideramos essa questão inesperada. Ela revela significado restrito[10] atribuído ao conceito de intervalo numérico. Por considerarmos ser esta uma nova estratégia de resolução, que possibilita a redução de aproximadamente metade dos possíveis intervalos, acrescenta-se uma nova categoria às já identificadas, a qual denominaremos ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis intervalos’.

Supomos que a aluna Helena considerou, para a formulação dessa questão, os possíveis intervalos: [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5], [5, 6], [6, 7] e [7, 8[. Com a resposta afirmativa a essa questão, a aluna pôde reduzir metade dos possíveis intervalos, restando-lhe [0, 1], [2, 3], [4, 5] e [6, 7].

- ✓ QUESTÃO 4: É maior que 4?

RESPOSTA: Não.

Partindo do pressuposto que os alunos estão restritos ao intervalo [0, 7], ponderamos que a questão pode ter sido formulada empregando a estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, em que os alunos possivelmente consideraram o intervalo [0, 7], ou então a estratégia de ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis *intervalos*’, em que nos parece que consideraram os intervalos [0, 1], [2, 3], [4, 5] e [6, 7].

- ✓ QUESTÃO 5: O número está no intervalo de 2 a 3?

RESPOSTA: Não.

[10] Restrito: que desconsidera que um intervalo numérico é um conjunto de números, prescindindo, portanto, de ordem.

Essa questão possivelmente emprega a mesma estratégia utilizada na questão 3, da aluna Helena: a estratégia de ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis *intervalos*’.

Com base nessas questões e suas respectivas respostas, restavam aos alunos apenas dois possíveis intervalos: [0, 1] e [2, 3]. Ao obterem resposta negativa para a questão 5, restou-lhes apenas o intervalo [0, 1].

Uma vez formuladas as cinco questões que lhes eram permitidas, alguns alunos perguntaram simultaneamente se o número racional estava compreendido no intervalo [0, 1], e com isso realizaram com êxito a atividade 4.

Considerando as possíveis estratégias empregadas pelos alunos no decorrer dessa atividade, pudemos notar os seguintes aspectos:

a) Dentre os cinco alunos que apresentaram suas questões à professora, dois recorreram ao ‘corte pelo meio do intervalo’. No entanto, a questão 1, formulada pela aluna Mariel, caracteriza-se pela possível utilização da estratégia de ‘corte pelo meio do intervalo’, enquanto a questão 2, formulada pelo aluno Leonardo, utiliza a estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’.

b) Embora as questões 3 e 5, formuladas respectivamente pelos alunos Helena e Eduardo, sejam de diferentes tipos, presumimos que se caracterizam pelo recurso à mesma estratégia de resolução: ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis *intervalos*’.

c) Na questão 4, do aluno Jonas, há recurso à estratégia de ‘corte pelo meio do intervalo’ ou à estratégia de ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis *intervalos*’. Diante dessas duas possibilidades, optamos por apresentar a categorização das possíveis estratégias empregadas nessa questão 4 separadamente das demais.

Conjecturamos, portanto, com base nessas estratégias de resolução, que houve recurso a três categorias: ‘corte pelo meio do intervalo’, ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’ e ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis intervalos’.

Olhando retrospectivamente a vivência dessa atividade 4, observamos que cada uma as cinco questões foi elaborada individualmente por um aluno diferente, sem obtenção de consenso, embora todos os alunos da classe constituíssem uma grande equipe. Isso não se mostrou coerente com a conduta institucional.

Suspeitamos que os alunos empregaram como ferramentas matemáticas, durante a resolução da atividade 4, as noções de média aritmética, de números pares e números ímpares, de números positivos e números negativos, das relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’, das relações de ordem ‘ser maior ou igual a’ e ‘ser menor ou igual a’ e de segmento, bem como da noção de intervalos numéricos, com significados diferentes entre os alunos da classe.

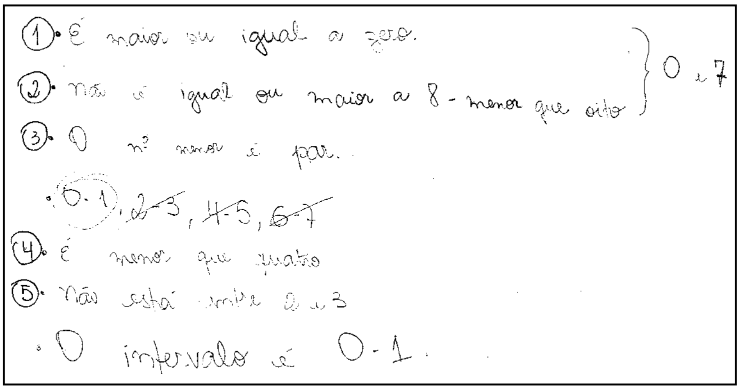
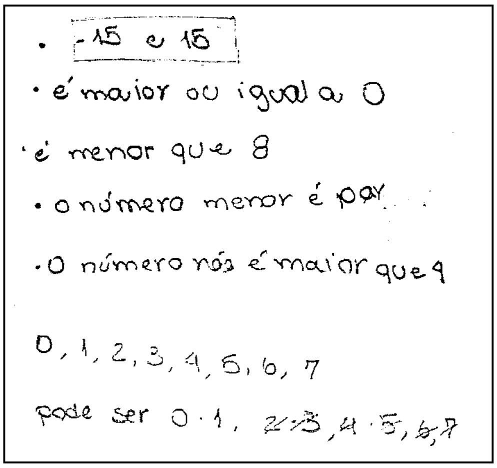
Analisando as produções escritas dos alunos, subdividiremos suas anotações em três categorias, segundo os mesmos critérios adotados para as atividades 1, 2 e 3 da tarefa 1:

- Anotações completas
- Anotações incompletas
- Ausência de anotações

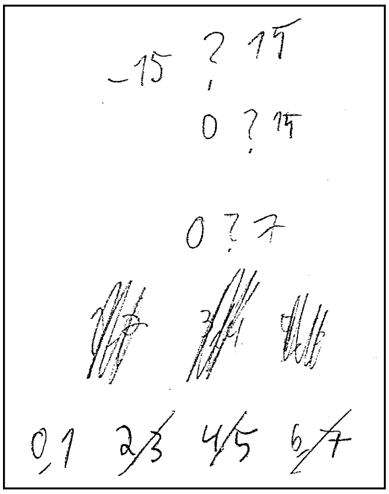
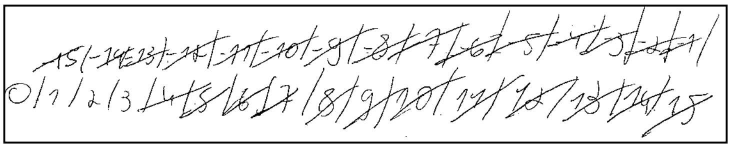
As categorias ‘anotações completas’ e ‘ausência de anotações’ são apresentadas respectivamente nos Quadros 4b e 4c, nos quais estão indicadas as quantidades de cada tipo de ocorrência. O Quadro 4b também apresenta os domínios empregados pelos alunos e exemplos de suas anotações.

A categoria ‘anotações incompletas’ não esteve representada. Todos os alunos que realizaram anotações as fizeram anotando todas as informações referentes à atividade, bem como todas as questões e respostas. Todos os 32 alunos presentes nessa aula devolveram a folha de sulfite à professora.

Quadro 4b. Categoria ‘anotações completas’ (atividade 4)

Exemplos de anotações completas	**Domínios utilizados**	**Quantidade de anotações**
 ① É maior ou igual a zero. ② não é igual ou maior a 8 - menor que oito } 0 e 7 ③ O nº menor é par. • 0-1, ~~2-3~~, ~~4-5~~, ~~6-7~~ ④ é menor que quatro ⑤ não está entre 2 e 3 • O intervalo é 0-1.  • -15 e 15 • é maior ou igual a 0 • é menor que 8 • o número menor é par • O número não é maior que 4 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 pode ser 0-1, ~~2-3~~, 4-5, ~~6,7~~	Numérico e língua materna	14

-15 e 15 Números inteiros Consecutivos É ≥ 0 Não é ~~8~~ ≤ 8 O 1º nº é par X < 4 Não Tá entre 2 e 3 X = 0 e 1 • Entre 2 números consecutivos (nº inteiros consecutivos). • -15 e 15 • É > ou igual a 0. • ñ é > ou = a 8. • O menor é par. 0, ~~1~~, 2, ~~3~~, 4, ~~5~~, 6, ~~7~~, 8, 9, ~~10~~, ~~11~~, ~~12~~, ~~13~~, ~~14~~, 15 • É menor que 4 • ñ é 2 e 3 0 e 1 ~~2 e 3~~ ~~4 e 5~~ ~~6 e 7~~ • É o intervalo de 0 e 1.	Numérico, algébrico e língua materna	13
-15 , 15 ≥ 0 ≤ 8 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ≤ 4 0, 1	Numérico e algébrico	1

 	Numérico	3
Quantidade total de anotações completas		**31**

Quadro 4c. Categoria ‘ausência de anotações’ (atividade 4)

Quantidade de alunos que não realizaram anotações	**1**

Ao realizarem suas anotações, os alunos recorreram ao uso da língua materna corrente, utilizando assim o domínio de língua materna. Constatamos que realizaram, em suas produções, interação entre diferentes domínios, ocorrendo, por vezes, interação entre o domínio numérico e o de língua materna ou entre o numérico, o algébrico e o de língua materna ou ainda entre o algébrico e o numérico.

Uma vez finalizada a atividade 4, a professora perguntou aos alunos se tinham alguma dúvida ou se gostariam de retomar alguma das questões, ao que responderam negativamente. Assim, a professora optou pela continuidade da tarefa 2, dando início à atividade seguinte (**atividade 5**).

Para isso, foram distribuídas aos alunos as folhas de sulfite em branco destinadas às anotações referentes a essa atividade. A professora pediu, novamente, que cada um deles escrevesse seu nome em sua folha e que suas anotações fossem feitas a lápis, sendo a caneta utilizada somente para a realização de anotações durante os debates. Pediu-lhes ainda que não utilizassem borracha, passando apenas um traço sobre as anotações que julgassem desnecessárias. (Embora as solicitações tenham sido atendidas pelos alunos, em nossas análises não diferenciamos as anotações feitas a lápis das feitas a tinta)

A professora salientou que a dinâmica e as regras dessa atividade seriam as mesmas da atividade vivenciada anteriormente, frisando que objetivo dessa nova atividade continuaria sendo a determinação do intervalo de dois números inteiros consecutivos em que o número racional sob forma fracionária previamente pensado estaria compreendido.

Escreveu então em um papel o número previamente pensado (número $\frac{67}{5}$), sem revelá-lo aos alunos, guardando-o sobre sua mesa. Informou que o número racional pensado estava no intervalo compreendido pelos números 3 e 41 e disse-lhe que eram permitidas no máximo sete questões.

Informou que as respostas dadas às questões dos alunos continuariam a ser respondidas apenas com ‘sim’ ou ‘não’, e não limitou as perguntas às relações do tipo ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’, permitindo que fossem de quaisquer tipos.

Deu-se então início à formulação das questões e respostas dessa atividade, as quais estão descritas no Quadro 5a.

Quadro 5a. Questões e respostas apresentadas durante a realização da atividade 5

QUESTÃO 1: Eduardo: O primeiro número do intervalo é par?	Professora: Não.
QUESTÃO 2: Eduardo: É maior que 20?	P: Não.
QUESTÃO 3: Eduardo: É maior que 10?	P: Sim.
QUESTÃO 4: Eduardo: É maior que 15?	P: Não.

Ao final dessas quatro questões, o aluno Eduardo indagou se o número pensado estava no intervalo compreendido pelos números 13 e 14, obtendo resposta afirmativa. Assim, os alunos atingiram o objetivo dessa atividade utilizando apenas quatro das sete questões que lhes eram permitidas.

O papel em que o número racional pensado havia sido anotado foi mostrado à classe, finalizando-se assim a atividade.

De modo geral, podemos destacar as principais observações:

a) Manteve-se a liberdade atribuída aos alunos de formularem questões de quaisquer tipos, não devendo eles necessariamente ater-se às relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’. No entanto, as questões deveriam ser respondidas somente com ‘sim’ ou ‘não’;

b) Os alunos utilizaram apenas quatro das sete questões permitidas.

c) Chegou-se com êxito ao objetivo dessa atividade, determinando-se o intervalo [13, 14].

Similarmente ao que fizemos ao analisar a vivência da atividade 4, embasamo-nos no exemplo hipotético apresentado anteriormente para a atividade 1 (item 4.1.2). Desse modo, a apresentação de um novo exemplo hipotético torna-se desnecessária.

Com base na observação das produções da atividade 5, consideramos que os alunos possivelmente recorreram à estratégia de 'redução de aproximadamente metade dos possíveis intervalos', valendo-se da média aritmética dos extremos do intervalo, visando determinar o centro deste.

A seguir, apresentamos os resultados de nossas análise das questões e respostas dadas durante a realização da atividade 5:

✓ QUESTÃO 1: O primeiro número do intervalo é par?

RESPOSTA: Não.

Dada a ocorrência de uma questão desse mesmo tipo na vivência da atividade anterior (questão 3 da atividade 4: "Dos dois números inteiros consecutivos do *intervalo*, o primeiro deles é par?"), presumimos que o aluno Eduardo tenha considerado sua questão como satisfatória por reduzir metade dos possíveis intervalos. Essa estratégia de resolução, de 'redução de aproximadamente metade dos possíveis *intervalos*', revela atribuição de significado restrito à noção de intervalo numérico.

✓ QUESTÃO 2: É maior que 20?

RESPOSTA: Não.

A formulação dessa questão nos faz pensar que o aluno recorreu à estratégia de 'aproximação do corte pelo meio do intervalo', embora o aluno também possa ter recorrido à estratégia empregada na questão 1, de 'redução de aproximadamente metade dos possíveis intervalos'.

- ✓ QUESTÃO 3: É maior que 10?

  RESPOSTA: Sim.

Assim como na questão 2, o aluno Eduardo pode ter agora recorrido à estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’. Pode, por outro lado, ter empregado a estratégia de ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis *intervalos*’, que possivelmente utilizara antes.

- ✓ QUESTÃO 4: É maior que 15?

  RESPOSTA: Não.

Com essa quarta questão, o aluno Eduardo pode ter empregado novamente a estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’. Pode também ter recorrido à estratégia de ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis *intervalos*’, possivelmente usada anteriormente por ele.

Embora tenham ocorrido debates sobre as questões e respostas dadas, envolvendo muitos alunos, o que é coerente com o quadro teórico adotado por esta pesquisa e com a conduta institucional, todas as quatro questões formuladas nessa atividade foram formuladas e enunciadas por um único aluno (Eduardo). Por outro lado, o fato de os outros alunos não terem sido ouvidos por Eduardo para a formulação de questões consensuais contraria a conduta institucional e o quadro teórico desta pesquisa.

A respeito das possíveis estratégias empregadas pelos alunos na vivência dessa atividade, parece-nos que houve recurso, em todas as quatro questões enunciadas pelo aluno Eduardo, à estratégia de ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis intervalos’. Saliente-se que nas questões 2, 3 e 4 pode ter sido empregada a estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, em vez da estratégia de ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis *intervalos*’.

Observando as produções dos alunos para essa atividade, cogitamos que utilizaram as noções de média aritmética, números pares e números ímpares, relações (‘ser maior que’ e ‘ser menor que’) e segmento como ferramentas matemáticas, além da noção de intervalos numéricos, com significados diferentes entre os alunos.

Analisando as produções escritas dos alunos, subdividiremos suas anotações em três categorias, segundo os mesmos critérios adotados para as atividades anteriores:

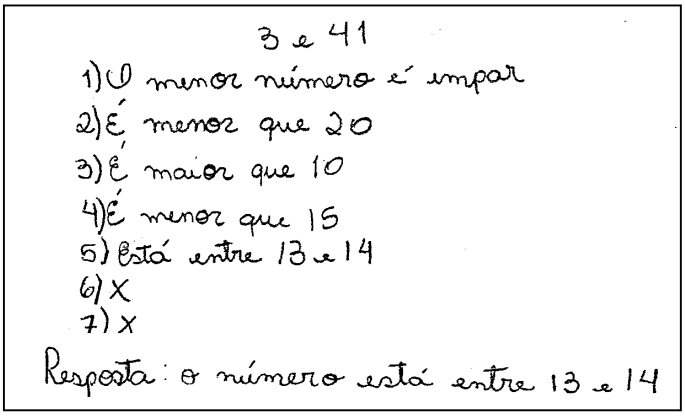
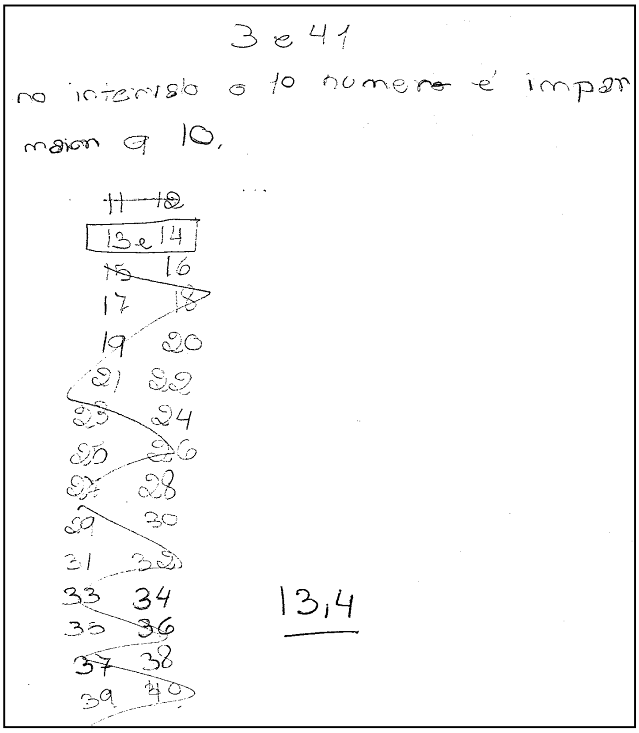
- Anotações completas
- Anotações incompletas
- Ausência de anotações

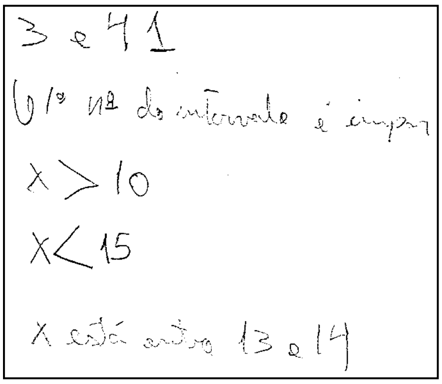
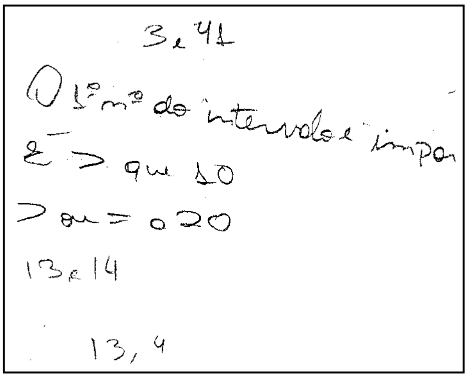
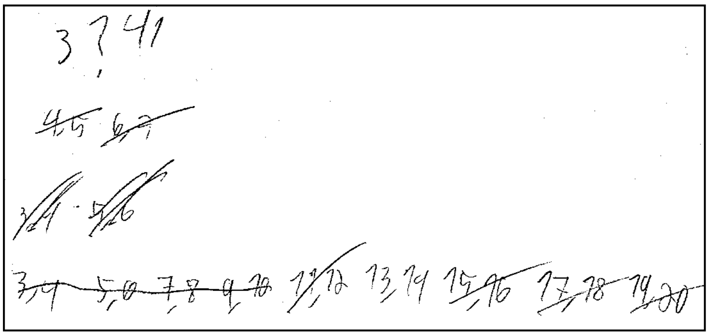
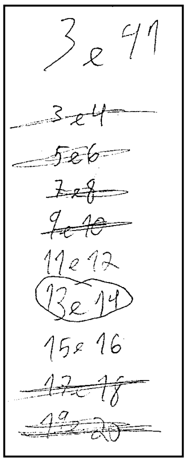
As categorias ‘anotações completas’ e ‘anotações incompletas’ são apresentadas respectivamente nos Quadros 5b e 5c, nos quais constam exemplos de anotações dos alunos, a quantidade de ocorrências em cada uma dessas categorias e os domínios empregados durante as estratégias de resolução.

A categoria ‘ausência de anotações’ não esteve representada. Todos os 32 alunos presentes nessa aula devolveram a folha de sulfite à professora com algum tipo de anotação.

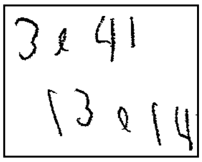
Ao realizarem suas anotações, os alunos recorreram ao uso da língua materna corrente, utilizando assim o domínio de língua materna, bem como à interação entre diferentes domínios: entre o numérico e o de língua materna ou entre o numérico, o algébrico e o de língua materna.

Quadro 5b. Categoria ‘anotações completas’ (atividade 5)

Exemplos de anotações completas	**Domínios utilizados**	**Quantidade de anotações**
 3 e 41 1) O menor número é impar 2) É menor que 20 3) É maior que 10 4) É menor que 15 5) Está entre 13 e 14 6) X 7) X Resposta: o número está entre 13 e 14  3 e 41 no intervalo o 1º numero é impar maior q 10. ~~11~~ ~~12~~ 13 e 14 ~~15~~ 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 13,4	Numérico e língua materna	18

	Numérico, algébrico e língua materna	8
	Numérico	5
Quantidade total de anotações completas		**31**

Quadro 5c. Categoria ‘anotações incompletas’ (atividade 5)

Exemplos de anotações	**Domínios utilizados**	**Quantidade de anotações**
 3 e 41 13 e 14	Numérico	1
Quantidade total de anotações incompletas		**1**

Uma vez finalizada a atividade 5, a professora perguntou aos alunos se tinham alguma dúvida em relação a essa atividade. Os alunos responderam que não. No entanto, foi pedido que o aluno Eduardo retomasse algumas de suas questões em voz alta, para que todos os demais compartilhassem sua explicitação, promovendo-se assim um possível debate entre eles.

Um trecho desse debate é transcrito a seguir. Entre chaves figuram observações referentes às falas comuns dos alunos.

P: Eduardo, você gostaria de retomar as questões dessa atividade?

Eduardo: Fui perguntando se é maior que isso, se é menor que aquilo, até que sobrou esse intervalo.

P: Explique melhor, desde a primeira questão. Na primeira questão, como você pensou?

Eduardo: Na primeira, perguntei se o primeiro número do intervalo era ímpar e você disse que sim. Depois, na segunda, perguntei se era maior que 20 e você disse que não.

P: Você acha interessante perguntar se o primeiro número do intervalo é ímpar?

Eduardo: Acho, porque elimina metade dos possíveis intervalos. Nesse caso, como o primeiro número é impar, então o número não pode estar, por exemplo, entre 16 e 17. Só poderia estar entre 15 e 16, entre 13 e 14. Tem que sempre estar entre um ímpar e um par, nessa ordem.

Débora: Você vai eliminando intervalos, sabendo que o primeiro número é ímpar.

P: Por que vocês perguntaram se o número estava no intervalo compreendido pelos números 13 e 14? Poderia estar em outro intervalo?

Eduardo: Só tinha o 11 e 12 e o 13 e 14. E como ainda tínhamos algumas outras questões, se não fosse um, seria o outro.

P: Alguém tem alguma dúvida em relação a essa atividade? Podemos retomar algum aspecto se vocês quiserem. Vamos fazer mais uma atividade dessa tarefa?

{Os alunos concordam com essa sugestão.}

Assim, após concordância dos alunos, deu-se continuidade à aula com a proposição da **atividade 6**.

Foi entregue a cada um dos alunos uma folha de sulfite para que pudessem realizar anotações, caso o desejassem, durante a vivência dessa atividade.

Em continuação, a professora disse à classe que a atividade 6 tinha as mesmas regras da atividade anterior, e anotou em um papel o número previamente pensado (número $-\frac{15}{2}$), sem mostrá-lo aos alunos. Colocou o papel sobre sua mesa e informou que o número previamente pensado estava compreendido pelos números –52 e –1, e que poderiam ser feitas no máximo sete questões. Novamente, não restringiu o tipo dessas questões às relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’.

Depois dessas informações, teve início a formulação de questões e de respostas, as quais estão apresentadas no Quadro 6a:

Quadro 6a. Questões e respostas apresentadas durante a realização da atividade 6

QUESTÃO 1: Eduardo: O menor dos dois números consecutivos do intervalo é ímpar?	Professora: Não.
QUESTÃO 2: Eduardo: É maior que –25?	P: Sim.
QUESTÃO 3: Eduardo: É maior que –12?	P: Sim.
QUESTÃO 4: Anita: O maior dos dois números consecutivos do intervalo é um múltiplo de –3?	P: Não.
QUESTÃO 5: Eduardo: Está entre –6 e –5?	P: Não.
QUESTÃO 6: Eduardo: Está entre –2 e –1?	P: Não.

Feita a sexta questão e obtida sua resposta, o aluno Eduardo perguntou à professora se o número pensado estava no intervalo compreendido pelos números -8 e -7, obtendo resposta afirmativa. Atingiu-se assim o objetivo dessa atividade, com a utilização de seis das sete questões permitidas aos alunos.

A professora finalizou a atividade mostrando o papel em que o número pensado estava escrito, para que os alunos constatassem que o intervalo obtido por eles estava correto.

Têm-se por destacar nessa atividade os seguintes aspectos:

a) Não se restringiu o tipo das questões às relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’, desde que fossem respondidas apenas com ‘sim’ ou ‘não’.

b) Os alunos utilizaram apenas seis das sete questões que lhes eram permitidas.

c) Os alunos cumpriram o propósito da atividade 6 com êxito, determinando o intervalo compreendido por dois números inteiros consecutivos.

Tal como ao analisarmos as vivências das atividades anteriores, embasamo-nos no exemplo hipotético apresentado para a atividade 1 (item 4.1.2). Desse modo, julgamos desnecessária a elaboração de um novo exemplo hipotético.

Para isso, baseamo-nos na observação das produções da atividade 6, em que consideramos que os alunos possivelmente recorreram à estratégia de 'redução de aproximadamente metade dos possíveis *intervalos*'. Supomos que, para isso, os alunos tenham utilizado a média aritmética dos extremos do intervalo, buscando o centro deste.

Exporemos, a seguir, aspectos percebidos em nossa análise das questões e respostas formuladas nessa atividade:

✓ QUESTÃO 1: O menor número, dos dois números consecutivos do intervalo, é ímpar?

RESPOSTA: Não.

O recurso a esse tipo de questão, similarmente ao ocorrido na questão 3 da atividade 4 e na questão 1 da atividade 5, reforça nossa suposição de que aluno Eduardo tenha considerado como satisfatório propor questões sobre intervalos. Supomos, assim, que sua intenção tenha sido a de reduzir aproximadamente metade dos possíveis intervalos, ou seja, que tenha recorrido à estratégia de 'redução de aproximadamente metade dos possíveis *intervalos*'. Note-se que nessa questão não há referência ao "primeiro número do intervalo" como nas atividades anteriores, que denotava significado restrito para a noção de intervalo.

- ✓ QUESTÃO 2: É maior que –25?

  RESPOSTA: Sim.

Por ter sido formulada pelo mesmo aluno, pensamos que a elaboração dessa questão, embora seja de tipo diferente da anterior, configura possivelmente o emprego da mesma estratégia de resolução, de ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis *intervalos*’. No entanto, considerando que essa questão não explicita a utilização de intervalos, somos levados a cogitar também na possibilidade do emprego da estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’.

- ✓ QUESTÃO 3: É maior que –12?

  RESPOSTA: Sim.

Novamente, partimos do pressuposto de que o aluno Eduardo tenha empregado nessa questão a mesma estratégia usada na elaboração da questão 2: ou a estratégia de resolução ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis *intervalos*’ ou a de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’.

- ✓ QUESTÃO 4: O maior dos dois números consecutivos do intervalo é múltiplo de -3?

  RESPOSTA: Não.

Ponderamos que a aluna Anita tenha recorrido a uma questão similar à questão 1, embora tenha empregado uma relação matemática (‘ser múltiplo de’) ainda não utilizada nas atividades anteriores, para a determinação dos possíveis extremos do intervalo. Possivelmente visou a redução de aproximadamente metade dos possíveis intervalos, o que caracteriza o possível uso da estratégia de ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis intervalos’. Note-se que nessa questão não se referencia o ‘segundo número do intervalo’, diferentemente das atividades anteriores, em que se atribuía significado restrito à noção de intervalo.

- ✓ QUESTÃO 5: O número está entre –6 e –5?

  RESPOSTA: Não.

Consideramos a questão inesperada, embora outra desse tipo já tivesse sido formulada na realização da atividade 4.

Supomos que o aluno Eduardo (que possivelmente vem utilizando a estratégia de ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis *intervalos*’) tenha utilizado a estratégia de verificação de uma possibilidade, ou seja, de um único intervalo dentre os possíveis. Essa estratégia, que se soma agora às demais, será designada como ‘verificação de um intervalo dentre os possíveis’.

- ✓ QUESTÃO 6: O número está entre –2 e –1?

  RESPOSTA: Não.

Similarmente à observação anterior, supomos que a questão 6 também é um exemplo da estratégia de ‘verificação de um intervalo dentre os possíveis’, mais uma vez utilizada pelo aluno Eduardo.

Após a formulação dessas seis questões, questionou-se se o número racional pensado encontrava-se no intervalo compreendido pelos números –8 e –7. Como a resposta foi positiva, atingiu-se o objetivo dessa atividade 6, sem que fosse necessário utilizar todas as sete questões permitidas.

Uma sétima questão teria sido necessária caso a resposta à sexta fosse negativa. Pressupomos que tenham recorrido à estratégia de ‘verificação de um intervalo dentre os possíveis’ com base na resposta à quinta questão, visto que lhes restavam ainda quatro possíveis intervalos e a possibilidade da formulação de três questões. As questões 5 e 6 decorreram da possibilidade de eliminar um a um dos possíveis intervalos, até que o objetivo fosse atingido com êxito.

Chamou-nos a atenção, semelhantemente ao ocorrido na atividade 5, o fato de que o aluno Eduardo tenha elaborado individualmente cinco das seis questões. Consideramos esse fato inesperado, dado que os alunos constituíam, coerentemente com a conduta institucional, uma única grande equipe desafiada pela professora para elaboração consensual de questões e determinação do número pensado.

Considerando as possíveis estratégias de resolução adotadas pelos alunos durante a realização da atividade 6, podemos ressaltar os seguintes aspectos:

a) A estratégia de ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis intervalos’ foi possivelmente empregada em quatro das seis questões formuladas por eles (questões 1, 2, 3 e 4). Supomos também a possibilidade de ter sido empregada nas questões 2 e 3 a estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’.

b) A estratégia de ‘verificação de um intervalo dentre os possíveis’ foi supostamente adotada nas outras duas questões (5 e 6).

Logo, pressupomos o emprego das seguintes estratégias de resolução: ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis intervalos’, ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’ e ‘verificação de um intervalo dentre os possíveis’.

Observando as produções dos alunos para essa atividade, cogitamos que utilizaram como ferramentas matemáticas as noções matemáticas de média aritmética, números negativos, números pares e números ímpares, relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’, segmento, relação ‘ser múltiplo de’ e a noção de intervalos numéricos, com significados distintos entre os alunos.

Analisando as produções escritas dos alunos, subdividiremos suas anotações em três categorias, segundo os mesmos critérios adotados para as atividades anteriores:

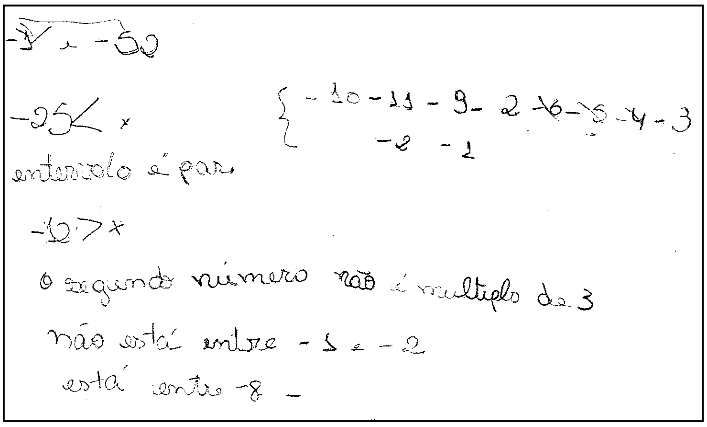
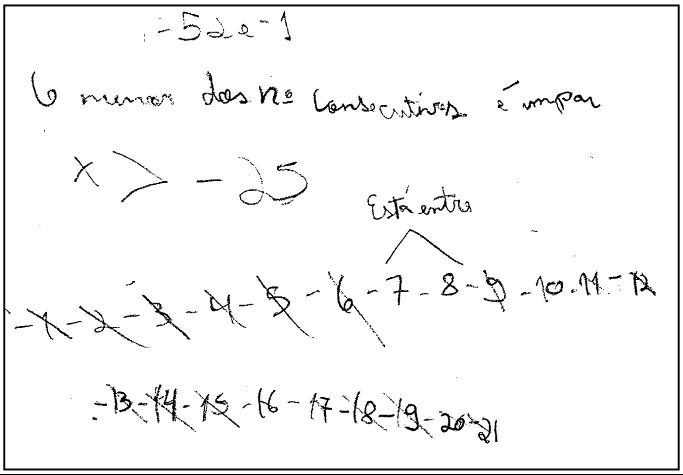
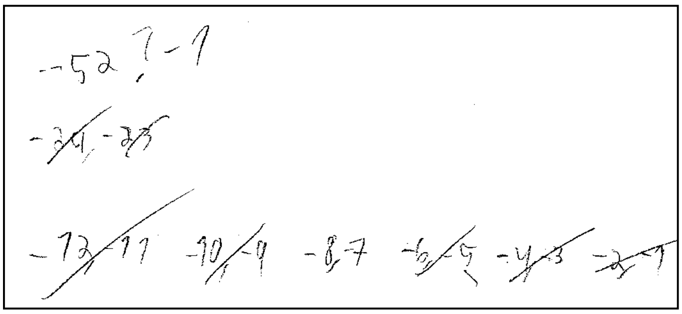
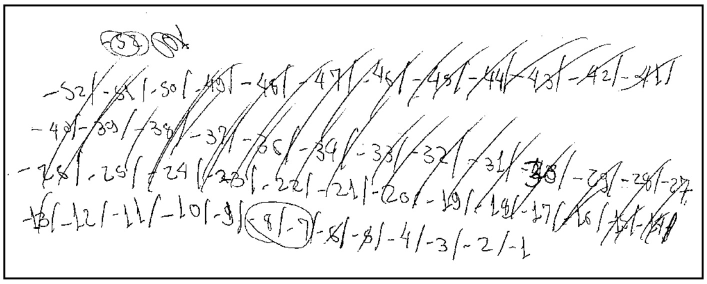
- Anotações completas
- Anotações incompletas
- Ausência de anotações

Constaram nessa atividade apenas as categorias ‘anotações completas’ e ‘anotações incompletas’, que estão apresentadas respectivamente nos Quadros 6b e 6c, com exemplos de anotações dos alunos, quantidade de ocorrências em cada das categorias e os domínios empregados durante a resolução. A categoria ‘ausência de anotações’ não foi representada. Todos os alunos participantes dessa atividade devolveram a folha de sulfite com algum tipo de anotação.

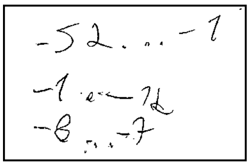
As anotações permitiram observar que os alunos recorreram à interação entre domínios, mais especificamente entre o numérico e o de língua materna e entre o numérico, o algébrico e o de língua materna. Em alguns casos, recorreram somente ao domínio numérico.

Quadro 6b. Categoria 'anotações completas' (atividade 6)

Exemplos de anotações	**Domínios utilizados**	**Quantidade de anotações**
dois números inteiros consecutivos -52 e -1 1) O menor número é par 2) É maior que -25 3) É maior que -12 4) O maior número não é multiplo de -3 5) Não está entre -5 e -6 6) Não esta entre -2 e -1 7) Está entre -7 e -8 Resposta: O número está entre -7 -8 -52 e -1 (2 nºs consecutivos) 1) O menor nº do intervalo é par. 2) É maior do que -25 (entre -24 e -1) 3) É maior do que -12 (entre -11 e -1) ~~-10/-9, -8/-7, -6/-5, -4/-3, -2/-1~~ 4) O maior nº do intervalo não é multiplo de -3 5) O nº não está entre -6 e -5 6) Não está entre -2 e -1 7) Está entre -8 e -7	Numérico e língua materna	26

	Numérico, algébrico e língua materna	2
	Numérico	3
Quantidade total de anotações completas		**31**

Quadro 6c. Categoria ‘anotações incompletas’ (atividade 6)

Exemplos de anotações	**Domínios utilizados**	**Quantidade de anotações**
	Numérico	1
Quantidade total de anotações incompletas		**1**

Uma vez formuladas e respondidas as seis questões, a aluna Débora disse à professora que tinha uma dúvida referente à noção de número antecessor e de número sucessor em números negativos. A professora pediu-lhe então que expusesse sua dúvida em voz alta, para que todos pudessem dela compartilhar.

Também emergiram durante esse debate algumas das questões e respostas suscitadas durante a realização da atividade 6, como mostram estas transcrições:

Débora: Com a resposta ‘não’ à questão 4, em que a Anita perguntou se o segundo dos dois números consecutivos do intervalo era múltiplo de 3, eliminei os intervalos –5 e –6 e –11 e –12. O Eduardo eliminou os intervalos –9 e –10 e –6 e –4. Não sei quem está certo.

P: A Marina quer falar agora. Vamos ouvi-la.

Marina: Eu estava pensando que, para números positivos, o número consecutivo é o que vem à direita. Acho que a Débora está pensando a mesma coisa para os números negativos.

{Nesse momento, discute-se sobre as noções de número sucessor e de número antecessor de números negativos. No entanto, durante essa discussão retomou-se outra questão dessa atividade.}

> Eduardo: A primeira questão feita foi se o menor número dos dois números inteiros consecutivos do intervalo era ímpar e a resposta foi que não. Então ele era par. Então poderia ser –2 e –3, –4 e –5, mas isso não está certo. Poderia ser, então, –2 e –1 e –4 e –3, porque –4 é menor que –3, e –2 é menor que –1, e –2 não é menor que –3.

Nesse momento, o aluno Eduardo pediu para ir à lousa para mostrar aos colegas o que estava pensando. A professora o autorizou, solicitando a atenção dos demais.

Eduardo expôs suas idéias e argumentos, sendo questionado pela professora e por seus colegas. A professora interviu quando julgou necessário, explicitando algumas noções, buscando assim o esclarecimento de possíveis visões distorcidas dos alunos. Finalizou a aula pedindo que os alunos buscassem informações sobre os assuntos abordados nesse debate, para que fossem retomados na aula seguinte. Entretanto, a pesquisadora não esteve presente nessa aula, que não corresponderia ao objeto de pesquisa da presente investigação.

Acreditamos que, com a dificuldade apresentada pela aluna Débora para resolver por completo a atividade 6 e com a promoção de debates pela professora, deu-se início às fases de *pesquisa* e de *explicitação* da dialética ferramenta–objeto.

Supomos que assim tornou-se possível a formulação de idéias que puderam ser validadas ou refutadas, possibilitando a eliminação de certas noções contraditórias, por ter sido propiciada liberdade aos alunos para que expusessem suas idéias.

Em seguida, a professora solicitou que os alunos devolvessem as folhas com suas produções. O sinal de saída soou e os alunos saíram para o intervalo.

A tarefa 2 teve continuidade na aula seguinte (terceira aula), da qual participaram a professora de matemática, a pesquisadora e duas observadoras. Estiveram presentes 32 dos 34 alunos da turma.

Manteve-se a formação de uma única grande equipe de alunos, divididos (apenas espacialmente) em três subgrupos.

Pediu-se que os alunos guardassem todos os seus materiais, deixando as carteiras totalmente desocupadas, e foi entregue a cada um deles uma folha de sulfite em branco, com identificação da atividade 7, e uma caneta esferográfica azul. Os alunos foram orientados a escrever o nome nessa folha e a utilizar apenas lápis para as anotações durante a vivência da atividade, reservando a caneta para anotações a serem feitas no decorrer das discussões. Foram instruídos também a não usar borracha, mas a passar um traço sobre as anotações que desejassem desconsiderar. (Em nossas análises, porém, não fizemos distinção entre anotações a lápis e a tinta).

A professora lhes explicou que nessa terceira aula ainda seriam propostas atividades da tarefa 2, preservando-se a dinâmica, as regras e o objetivo da aula anterior. Informou que o número pensado (número $-\frac{1}{8}$) era racional sob forma fracionária e que estava situado no intervalo compreendido pelos números –27 e 5. Salientou que, para essa nova atividade (**atividade 7**), poderiam formular no máximo sete questões.

Tanto na realização dessa atividade quanto da seguinte (atividades 7 e 8 da tarefa 2), optou-se por restringir os tipos de questões. Os alunos foram informados de que só poderiam formular questões dos tipos ‘é maior que’, ‘é menor que’, ‘é maior ou igual a' e 'é menor ou igual a', e que as respostas continuariam sendo dadas somente com 'sim' ou 'não'. Isso foi enfatizado aos alunos.

Essa alteração baseou-se na observação, decorrente da segunda aula, de que os alunos encontravam-se familiarizados com a tarefa. Sendo assim, julgou-se conveniente promover alteração da regra nas novas atividades, com o intuito de tornar sua proposição em sala de aula mais fiel à tarefa originalmente proposta por esta pesquisa.

Teve então início a formulação de questões para a **atividade 7**. As questões e respostas são apresentadas no Quadro 7a:

Quadro 7a. Questões e respostas apresentadas durante a realização da atividade 7

QUESTÃO 1: Júlio: É maior ou igual a –10?	Professora: Sim.
QUESTÃO 2: Alan: É maior ou igual a zero?	P: Não.
QUESTÃO 3: Anita: É maior ou igual a –5?	P: Sim.
QUESTÃO 4: André: É par?	P: Não tenho como responder. Desperdiçaram a quarta questão.
QUESTÃO 5: Mariel: É maior ou igual a –2?	P: Sim.
QUESTÃO 6: Mariana: É menor ou igual a –1?	P: Não.

O aluno Eduardo, imediatamente após a resposta dada à sexta questão, perguntou: "É o intervalo aberto –1 e 0?". A professora respondeu que sim, e que o número pensado era o número $-\frac{1}{8}$, mostrando-lhes em seguida o papel em que havia sido anotado. Determinaram assim o intervalo]-1, 0[utilizando seis das sete questões permitidas.

Alcançou-se assim com sucesso o objetivo da atividade 7.

Têm-se por destacar nessa atividade os seguintes aspectos:

a) Diferentemente ao proposto na vivência das demais atividades (4, 5 e 6) da tarefa 2, optou-se pela restrição das questões às relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’, bem como às relações de ordem ‘ser maior ou igual a’ e ‘ser menor ou igual a’.

b) Para atingirem o propósito dessa atividade, os alunos formularam seis questões, não utilizando, portanto, todas as sete que lhes eram permitidas.

c) O objetivo dessa atividade foi alcançado com êxito, obtendo-se o intervalo]-1, 0[.

Tal como ao analisarmos as vivências das atividades anteriores, embasamo-nos no exemplo hipotético apresentado para a atividade 1 (item 4.1.2). Desse modo, julgamos desnecessária a elaboração de um novo exemplo hipotético.

À vista de nossas análises, admitem-se as seguintes suposições:

✓ QUESTÃO 1: É maior ou igual a –10?

RESPOSTA: Sim.

Essa questão nos sugere a possível utilização da estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’.

O recurso a essa estratégia nesta questão nos chamou a atenção particularmente.

Relembre-se o ocorrido na questão 1 da atividade 3, em que os alunos utilizaram a estratégia de ‘separação dos números positivos do intervalo’, dado o intervalo [–30, 38].

Entretanto, na questão 1 da atividade 7, em que foi dado o intervalo [–27, 5], que contempla tanto números positivos quanto negativos, não sendo o número zero o centro do intervalo, o aluno possivelmente recorreu à estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, buscando o centro deste. Isso nos faz supor que os alunos consideraram a estratégia como mais satisfatória, possivelmente por vislumbrá-la como “mais econômica”, ou seja, por possibilitar a eliminação de um intervalo maior.

✓ QUESTÃO 2: É maior ou igual a 0?

RESPOSTA: Não.

A questão 2 nos fornece indícios da intenção do aluno Alan de utilizar a estratégia de ‘separação dos números positivos do intervalo’.

✓ QUESTÃO 3: É maior ou igual a –5?

RESPOSTA: Sim.

Nessa questão da aluna Anita, pressupomos o uso da estratégia de ‘corte pelo meio do intervalo’.

✓ QUESTÃO 4: É par?

Sem resposta.

Supomos que o aluno André, ao elaborar essa questão, possa ter se equivocado ao questionar a paridade ou não de um número racional, ou que possa ter esquecido que o número era racional e não inteiro. Há também a possibilidade de que o aluno tenha suposto haver sentido em empregar a relação ‘ser divisível por dois’ para números racionais (como ocorre para números inteiros), mostrando, nesse caso, falha na noção de número racional.

Entretanto, notamos também que essa questão foge às regras estabelecidas para essa atividade, por ter sido esclarecido no início da proposição da atividade 7 que as questões deveriam limitar-se às relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’ e às relações de ordem ‘ser maior ou igual a’ e ‘ser menor ou igual a’. Consideramos que a questão utilizou a estratégia de ‘desconsideração das regras da tarefa’.

- ✓ QUESTÃO 5: É maior ou igual a –2?

  RESPOSTA: Sim.

A elaboração dessa questão nos faz supor, novamente, a utilização da estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’.

- ✓ QUESTÃO 6: É menor ou igual a –1?

  RESPOSTA: Não.

Similarmente à questão 3 dessa atividade, a questão 6 leva-nos a supor o uso da estratégia de ‘corte pelo meio do intervalo’.

Assim, na realização dessa atividade pelos alunos, pôde-se observar a possível utilização de quatro estratégias de resolução: ‘corte pelo meio do intervalo’, ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, ‘separação dos números positivos do intervalo’ e ‘desconsideração das regras da tarefa’.

Novamente, embora se tenha mantido a formação de uma única grande equipe, em atendimento às orientações institucionais, observou-se que ao vivenciarem a atividade 7 os alunos formularam individualmente suas questões, apresentando-as à professora, sem compartilhá-las com os demais durante sua formulação (embora compartilhando-as depois dessa fase), o que contraria a conduta institucional e o quadro teórico desta pesquisa.

Pôde-se observar também que, possivelmente, os alunos empregaram como ferramentas matemáticas as noções de média aritmética, números positivos, números negativos, segmento, relações (‘ser maior que’ e ‘ser menor que’), relações de ordem (‘ser maior ou igual a’ e ‘ser menor ou igual a’), número par (com possível falha no significado) e número racional (com possível falha no significado).

Analisando as produções escritas dos alunos, subdividiremos suas anotações em três categorias, segundo os mesmos critérios adotados para as atividades anteriores:

- Anotações completas
- Anotações incompletas
- Ausência de anotações

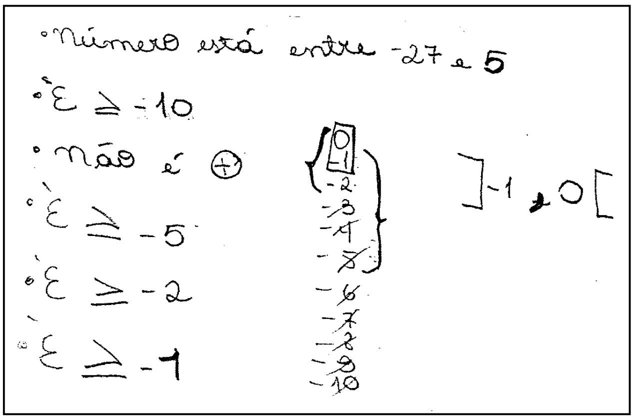
Constaram nessa atividade apenas as categorias ‘anotações completas’ e ‘ausência de anotações’, que estão apresentadas respectivamente nos quadros 7b e 7c.

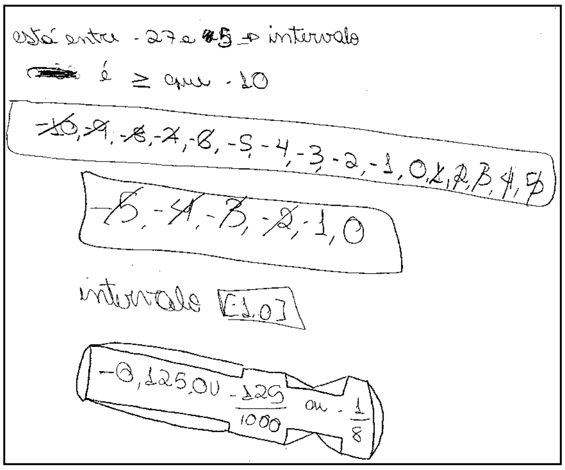
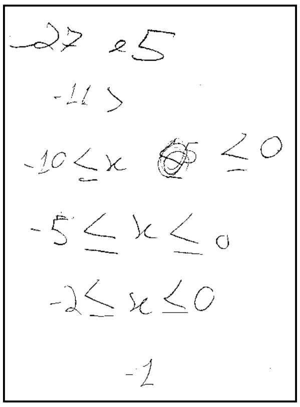
Dos 32 alunos presentes nessa aula, 31 devolveram à professora, no final da aula, a folha de sulfite correspondente à atividade.

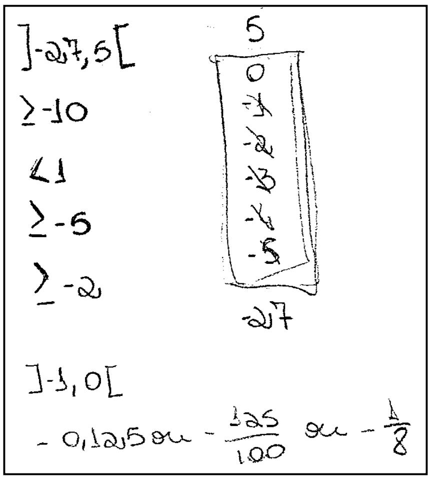
Analisando as anotações dos alunos, identificamos ter havido recurso, em seus procedimentos de resolução, aos domínios de língua materna, numérico e algébrico. Identificamos também o uso de interação entre domínios, mais precisamente entre o numérico e o de língua materna, entre o numérico, o algébrico e o língua materna e entre o numérico e o algébrico.

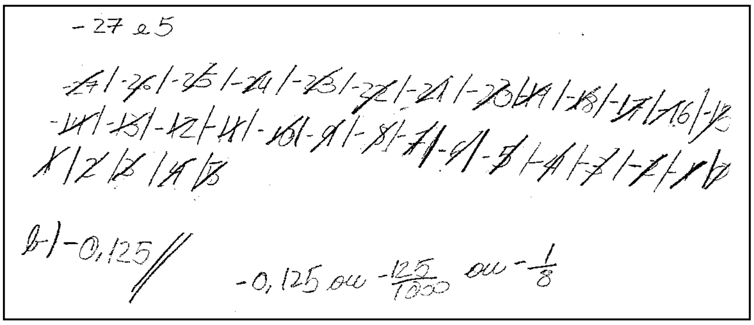
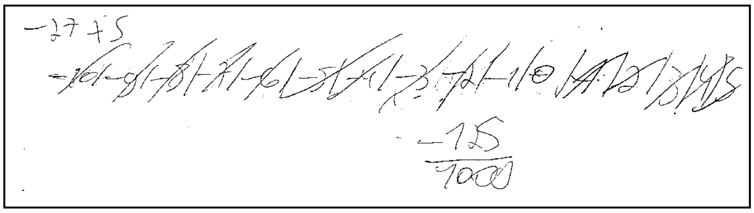
Quadro 7b. Categoria ‘anotações completas’ (atividade 7)

Exemplos de anotações completas	Domínios utilizados	Quantidade de anotações
-27 e 5 1- É maior ou igual a -10. 2- É negativo. 3- É maior ou igual a -5 $(-5,-4,-3,-2,-1)$ 4- — 5- É maior ou igual a -2 $(-2,-1,0)$ 6- É maior que -1. É um intervalo entre -1 e 0 - $-0{,}125$ ou $-\frac{125}{1000}$ ou $-\frac{1}{8}$ -27 e 5 • achar o menor intervalo • maior ou igual a -10 • entre 0 e -11/negativo • É maior ou igual a -5? sim: $-5,-4,-3,-2,-1$ • É maior ou igual a -2: $-2,-1,0$ • É maior que -1 • Intervalo entre -1 e 0 • É $-0{,}125$ ou $-\frac{125}{1000}$ ou $-\frac{1}{8}$	Numérico e língua materna	10

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>Numérico, algébrico e língua materna</td>
<td>13</td>
</tr>
<tr>
<td>


</td>
<td>Numérico e algébrico</td>
<td>3</td>
</tr>
</table>

 	Numérico	4
Quantidade total de anotações completas		**30**

Quadro 7c. Categoria ‘ausência de anotações’ (atividade 7)

Quantidade de alunos que não realizaram anotações	**2**

Imediatamente após a realização dessa atividade, a professora propôs a retomada das questões e respostas dadas, para que os alunos pudessem expor suas idéias. Promoveu-se assim um debate, coerentemente com o quadro teórico de Douady. Nas transcrições a seguir, figuram entre colchetes comentários que julgamos esclarecedores e, entre chaves, observações referentes às ações (gestos e falas) envolvendo mais de um aluno.

P: Então, vamos retomar as questões. A primeira pergunta foi “É maior ou igual a –10?” e a resposta foi sim. O que vocês concluíram disso? Vocês acham que foi uma boa pergunta?

Pedro: Tenho minhas dúvidas, porque, se fosse menor, eliminaríamos quinze números, não é? Do número –10 até o 5. Como foi maior, eliminamos dezessete números.

Eduardo: Não está certo.

P: Quem gostaria de ajudar? Acho que o Pedro está se atrapalhando um pouquinho.

Eduardo: Não podemos esquecer que tem mais números. Não estamos pensando só nos números inteiros.

P: Então, quando o Júlio perguntou se era maior ou igual que –10 e eu falei que sim, o que vocês pensaram?

Pedro: Eliminamos todos os números do –27 ao –10, só que o –10 continuou. Podia ser o -10.

P: Vocês concordam com o que o Pedro está falando?

Leonardo: Concordo com ele, porque se o número tem que ser maior ou igual, ele pode ser do –10 ao 5.

Pedro: Ele pode ser maior ou igual a –10.

P: Alguém mais quer falar alguma coisa sobre essa primeira questão? {Os alunos não se manifestam.} E quanto à segunda questão, em que vocês me perguntaram se era maior ou igual a zero e eu falei que não. O que vocês pensaram?

Jonas: Eliminamos todos os positivos.

P: E quem são todos os positivos?

Jonas: Os maiores que zero.

Débora: Essa pergunta pode ser boa e não.

P: O que vocês consideram como sendo uma questão boa?

Pedro: Uma questão é boa quando elimina boa quantidade de números.

P: E sobre a quarta questão: “É par?”? O que vocês podem me falar?

Eduardo: Como não é mais um número inteiro, não tem sentido falar par ou ímpar.

André: É verdade. Eu me confundi.

P: Não tem problema. Vamos retomar só mais uma pergunta. Depois partimos para a outra atividade. E sobre a sexta questão: "É menor ou igual a –1?"?

Mariana: Antes da questão da Mariel [referindo-se à questão 5, "É maior ou igual a -2?"], tinha sobrado o –5, –4, –3, –2, –1 e 0. [Isso nos faz supor que a aluna Mariana estava pensando em números inteiros, dada a proposta da atividade, que consistia na determinação de um intervalo compreendido por dois números inteiros em que o número pensado estava compreendido.] Depois, com a sexta questão, que era "menor ou igual a –1?", como a resposta foi 'não', pensei: como –2 é menor que –1, então sobrou o –1 e 0.

Júlia: Você [referindo-se a Mariana] perguntou se era menor ou menor ou igual que -1?

P: Menor ou igual.

Júlia: Precisava colocar o igual, nessa pergunta?

P: A Júlia está perguntando se é necessário nesse caso usarmos o igual. Vamos pensar sobre isso?

Mariana: Não sei. Estou em dúvida.

P: Por quê?

Mariana: Porque se eu perguntasse, por exemplo, se é menor que –1 e a resposta fosse 'não', então...

Eduardo: Quando a Mariana perguntou se era menor ou igual a –1 e com a resposta 'não', então considerei que não podia ser o número –1. Então, só poderia estar entre –1 e 0, não incluindo os extremos.

Mariana: Eu não entendi. Precisa colocar o igual ou não?

Júlia: Era melhor colocar com ou sem o igual?

Mariana: A gente não estava pensando em um número como você [referindo-se à professora] pensou. A gente estava pensando nos inteiros.

P: Vamos pensar então. Se vocês me perguntassem se era menor que –1 e eu falasse que não, o que vocês pensariam?

Júlia: Incluiria o –1 no intervalo final.

P: E se vocês me perguntassem se era menor ou igual a –1 e falasse que não, o que vocês teriam?

Júlia: Não incluiria o –1.

Mariana: Dependendo da questão, o igual pode te ajudar a eliminar mais números.

Júlia: Mas nessa questão que era pra determinar o intervalo, não.

P: Então depende da situação. Não podemos tirar como uma regra geral.

Prosseguindo a terceira aula, a professora expôs à classe que gostaria de repetir a proposição da tarefa 2, com mais uma atividade (**atividade 8**), em que as regras e o objetivo permaneceriam sendo os mesmos da atividade vivenciada anteriormente. Ressaltou, principalmente, que as questões a serem formuladas deveriam contemplar somente aquelas mesmas relações e mesmas relações de ordem. Perguntou aos alunos se havia necessidade de repassarem tais regras e objetivos, ao que responderam negativamente.

Foi-lhes entregue em seguida uma folha de sulfite em branco, com identificação da atividade 8. Cada aluno escreveu seu nome em sua folha.

O número racional (número $\frac{83}{2}$) previamente pensado foi anotado em um papel, sem ser revelado aos alunos, e guardado sobre a mesa da professora. Foi-lhes informado que esse número encontrava-se no intervalo compreendido pelos números –31 e 50 e que lhes seria permitido elaborar no máximo oito questões.

Teve então início a formulação de questões e respostas, que são mostradas no Quadro 8a:

Quadro 8a. Questões e respostas apresentadas durante a realização da atividade 8

QUESTÃO 1: Eduardo: É menor ou igual a 9?	Professora: Não.
QUESTÃO 2: Jonas: É maior que 30?	P: Sim.
QUESTÃO 3: Alan: É maior ou igual a 40?	P: Sim.
QUESTÃO 4: Eduardo: É maior ou igual a 45?	P: Não.
QUESTÃO 5: Anita: É menor ou igual a 43?	P: Sim.
QUESTÃO 6: Mariel: É maior ou igual a 42?	P: Não.

Em seqüência à resposta dada à questão 6, o aluno Leonardo perguntou se o número pensado estava no intervalo compreendido pelos números 41 e 42. A professora confirmou o intervalo e informou que o número racional pensado era $\frac{83}{2}$. O papel em que o número estava escrito foi mostrado à turma, finalizando-se a atividade.

Para a determinação do intervalo compreendido por dois inteiros consecutivos, os alunos recorreram a apenas seis das oito questões permitidas.

Têm-se por destacar nessa atividade os seguintes aspectos:

a) Manteve-se a regra de que as questões poderiam ser dos tipos ‘é maior que’, ‘é menor que’, ‘é maior ou igual a’ e ‘é menor ou igual a’.

b) Das oito questões permitidas, os alunos utilizaram apenas seis.

c) Os alunos determinaram corretamente o intervalo compreendido pelos números inteiros 41 e 42.

Tal como ao analisarmos as vivências das atividades anteriores, embasamo-nos no exemplo hipotético apresentado para a atividade 1 (item 4.1.2). Desse modo, julgamos desnecessária a elaboração de um novo exemplo hipotético.

À vista de nossas análises, admitem-se as seguintes suposições:

✓ QUESTÃO 1: É menor ou igual a 9?

RESPOSTA: Não.

Ponderamos que a questão 1 traz indícios de que o aluno Eduardo pode ter empregado a estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’.

✓ QUESTÃO 2: É maior que 30?

RESPOSTA: Sim.

Parece-nos que o aluno Jonas tenha recorrido à mesma estratégia supostamente adotada pelo aluno Eduardo: a de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’.

✓ QUESTÃO 3: É maior ou igual a 40?

RESPOSTA: Sim.

Essa questão denota a possibilidade de que o aluno Alan tenha usado a estratégia de ‘corte pelo meio do intervalo’.

- ✓ QUESTÃO 4: É maior ou igual a 45?

  RESPOSTA: Não.

Essa questão também nos faz supor que tenha sido utilizada a estratégia de ‘corte pelo meio do intervalo’.

- ✓ QUESTÃO 5: É menor ou igual a 43?

  RESPOSTA: Sim.

Parece-nos que a aluna Anita empregou nessa questão a estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’.

- ✓ QUESTÃO 6): É maior ou igual a 42?

  RESPOSTA: Não.

A mesma estratégia, de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, parece ter sido aqui usada pela aluna Mariel.

Acreditamos que a suposta coincidência de utilização dessas estratégias deve-se ao fato de que, provavelmente, os alunos as consideraram satisfatórias, possivelmente por corresponderem a um procedimento “mais econômico”, ao permitirem eliminar ao menos metade do possível intervalo. Assim, podem-se apontar apenas duas estratégias de resolução na atividade 8:

a) A estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’ foi usada em quatro (1, 2, 5 e 6) das seis questões.

b) A estratégia de ‘corte pelo meio do intervalo’ foi usada em duas questões (3 e 4).

Notamos que, embora todos os alunos constituíssem uma grande equipe, as questões foram elaboradas individualmente pelos alunos que as expuseram, sem que houvesse discussão sobre sua elaboração. Presumimos que isso tenha ocorrido pelo fato de os alunos supostamente recorrerem a procedimentos de resolução similares em todas as questões.

Pôde-se observar que os alunos utilizaram como possíveis ferramentas matemáticas as noções de média aritmética, de números positivos, de números negativos, de segmento, de relações (‘ser maior que’ e ‘ser menor que’) e de relações de ordem (‘ser menor ou igual a’ e ‘ser maior ou igual a’).

Analisando as produções escritas dos alunos, subdividiremos suas anotações em três categorias, segundo os mesmos critérios adotados para as atividades anteriores:

- Anotações completas
- Anotações incompletas
- Ausência de anotações

Os Quadros 8b, 8c e 8d indicam a quantidade de ocorrências de cada uma das categorias. Os Quadros 8b e 8c trazem também exemplos de anotações dos alunos e indicam os domínios empregados.

Todos os 32 alunos presentes nessa aula devolveram à professora, no final da aula, a folha de sulfite correspondente à atividade. Apenas uma das folhas devolvidas estava em branco.

Ressalte-se que um dos alunos recorreu à representação em reta numérica (domínio geométrico). Olhando retrospectivamente as produções das atividades anteriores, nota-se que esse domínio não havia ainda sido utilizado.

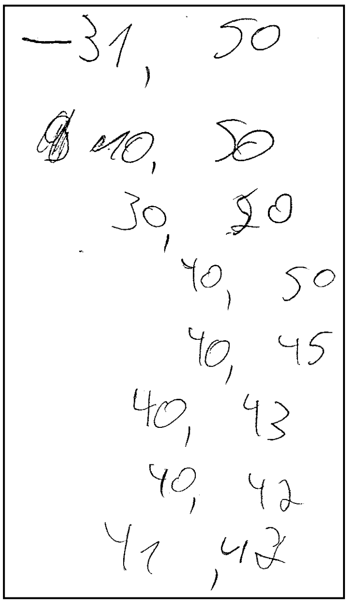
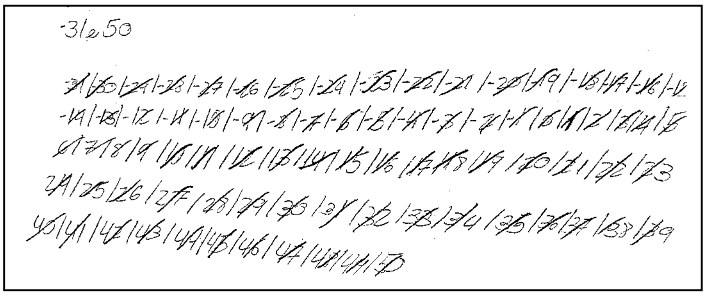
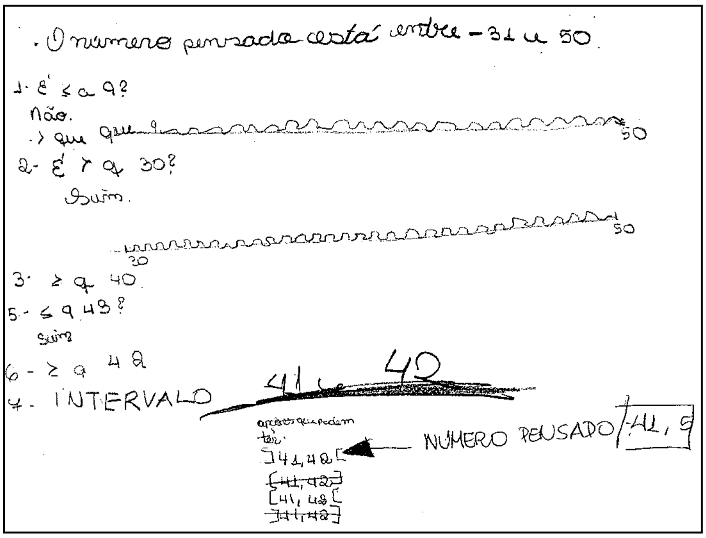
Além desse domínio, foram também empregados os seguintes: numérico, de língua materna e algébrico. Constatou-se ter havido interação entre o domínio numérico e o de língua materna, entre o numérico, o algébrico e o de língua materna, entre o numérico e o algébrico e, finalmente, entre o geométrico, o numérico, o algébrico e o de língua materna.

Quadro 8b. Categoria ‘anotações completas’ (atividade 8)

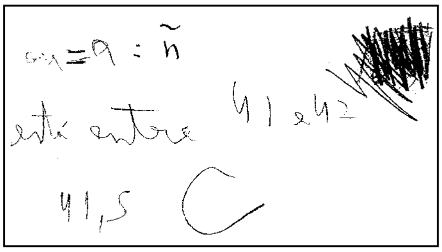
<table>
<tr><th>Exemplos de anotações completas</th><th>Domínios utilizados</th><th>Quantidade de anotações</th></tr>
<tr><td>-31 e 50 - intervalo entre 2 números consecutivos
* maior que nove
* É maior que 30
* É maior ou igual a quarenta.
* Éntre 40 e 45
* menor ou igual a 43 (43, 42, 41, 40)
* menor que 42 (entre 40 e 42)
* Entre 41 e 42 (41, 42)
* 41,5</td><td rowspan="2">Numérico e língua materna</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>O nº está entre -31 e 50
1- É maior que 9.
2- É maior que 30
3- É maior ou igual a 40
4- É menor que 45 (entre 40 e 45)
5- É menor ou igual a 43 (40, 41, 42, 43)
6. Não é maior nem igual a 42
7 Está entre 41 e 42.</td></tr>
</table>

-31 e 50 não é < ou = a 9 entre 10 e 50 é > 30 > ou = 43 43 44 45 46 47 48 49 50 não é > ou = 42 entre 41 e 42 41,5 entre 41 e 42 -31 e 50 1) é ≥ a 9 2) é > que 30 3) é ≥ a 40 4) é < que 45 5) é ≤ a 43 6) é ≤ a 42 7) Esta entre 41 e 42 8) 41,5 ~~31~~, ~~32~~, ~~33~~, ~~34~~, ~~35~~, ~~36~~, ~~37~~, ~~38~~, ~~39~~, 40, 41, 42, ~~43~~, ~~44~~, ~~45~~, ~~46~~, ~~47~~, ~~48~~, ~~49~~, ~~50~~]41, 42[	Numérico, algébrico e língua materna	6

$-31 \quad 50$ >9 $9 \quad 50$ $30 \quad 50$ $40 \quad 50$ $40 \quad 45$ ≤ 43 $40, 41, 42, 43$ $40, 41$ $41, 42$ $-31 < 30$ $9 < x \leq 50$ $30 < x \leq 50$ $40 \leq x \leq 50$ $40 \leq x < 45$ $40 \leq x \leq 43$ $40 \leq x < 42$	Numérico e algébrico	8

 	Numérico	5
	Geométrico, numérico, algébrico e língua materna	1
Quantidade total de anotações completas		**30**

Quadro 8c. Categoria ‘anotações incompletas’ (atividade 8)

Exemplos de anotações incompletas	**Domínios utilizados**	**Quantidade de anotações**
	Numérico e língua materna	1
Quantidade total de anotações incompletas		**1**

Quadro 8d. Categoria ‘ausência de anotações’ (atividade 8)

Quantidade de alunos que não realizaram anotações	**1**

O aluno Eduardo expressou dúvida quanto aos extremos do intervalo estarem ou não incluídos, dando início a um debate:

Eduardo: O 41 e o 42 estão incluídos?

P: Vamos retomar. O Leonardo perguntou se o número estava entre 41 e 42. Temos a possibilidade de ter os dois extremos incluídos e os dois não incluídos ou ainda de ter apenas um deles incluído.

Eduardo: Acho que o 41 e o 42 não estão incluídos.

Mariel: Eu perguntei se era maior ou igual a 42 e a resposta foi ‘não’, então não pode ser igual a 42. Mas sobre o 41, não sabemos. Não perguntamos nada sobre ele.

Eduardo: Pra falar sobre o 41, seria melhor ter perguntado se era maior que 41 ou se era menor que 41, porque assim saberíamos se está no intervalo ou não. [O aluno não se refere à questão “ser maior ou igual a 41”, que também lhe possibilitaria saber se o número 41 estava ou não no intervalo.]

P: Alguém mais tem alguma dúvida ou quer falar sobre alguma questão dessa atividade 8?

Como nenhuma outra dúvida foi apresentada pelos alunos, encerrou-se essa tarefa. As folhas correspondentes às atividades 7 e 8 foram recolhidas. O sinal de saída dos alunos tocou, fazendo com que todos se dispersassem, encerrando-se assim a aula.

4.3. TAREFA 3

4.3.1. DESCRIÇÃO DA TAREFA 3

Para a realização da tarefa 3, os alunos deverão ser divididos em quartetos. Cada um desses quartetos será subdividido em pares, sob coordenação do professor. Designaremos um desses pares como *equipe emissora* e o outro como *equipe receptora*. A tarefa deverá ser coordenada pelo professor. (Se necessário, devido ao número de alunos, serão formados um ou mais quintetos.)

A equipe receptora deverá elaborar questões à equipe emissora de seu quarteto, que por sua vez será responsável pelo fornecimento das respostas. Para isso, a equipe receptora poderá utilizar somente relações dos tipos 'é maior que' e 'é menor que', sendo as questões respondidas somente com 'sim' ou 'não'.

O professor deverá inicialmente anotar em um papel o número racional sob forma fracionária que foi previamente pensado. Comunicará esse número somente às equipes emissoras de todos os quartetos, sem revelá-lo às equipes receptoras. Mostrará esse número às equipes receptoras somente no final de cada atividade.

Fornecerá a todas as equipes um intervalo de números inteiros, também previamente determinado, em que o número racional pensado esteja compreendido.

O professor deverá comunicar aos grupos que haverá um dado número máximo de questões que cada uma das equipes receptoras poderá fazer à equipe emissora de seu grupo a fim de se buscarem intervalos cada vez menores que contenham o número racional pensado. Essa quantidade estará determinada no enunciado de cada atividade e será a mesma para todos os grupos.

As informações relatadas aos grupos (número racional sob forma fracionária, intervalo de dois números inteiros em que o número racional esteja compreendido e número máximo de questões permitidas às equipes receptoras) serão as mesmas para todos.

Embora cada grupo deva vivenciar as atividades isoladamente, de forma que a equipe emissora e a equipe receptora de cada grupo interajam somente entre si, a tarefa será proposta simultaneamente a todos. Todas as equipes receptoras deverão, ao final de cada atividade, relatar o intervalo de dois números racionais que houverem obtido. O objetivo dessa tarefa consiste na determinação do menor intervalo de números racionais em que o número racional previamente pensado esteja compreendido, dentre os intervalos fornecidos pelas equipes receptoras. Vencerá o quarteto ou quinteto que tiver obtido o menor desses intervalos.

Para isso, o professor poderá anotar na lousa todos os intervalos determinados pelas equipes receptoras e promover uma discussão com os alunos, a fim de que se determine o menor intervalo dentre os fornecidos pelos grupos.

Para essa tarefa serão propostas, em cada rodada, duas atividades, nas quais as duas equipes de cada grupo deverão revezar suas funções (de emissores e receptores).

Essa dinâmica foi escolhida com o intuito de proporcionar aos participantes a oportunidade de atuarem tanto como membros da equipe emissora quanto da equipe receptora.

Para essa tarefa, são propostas três rodadas (rodadas I, II e III), compostas de duas atividades cada uma, totalizando assim seis atividades. Iremos nos referir às atividades da rodada I como *atividades 9a e 9b*, às da rodada II como *atividades 10a e 10b*, e às da rodada III como *atividades 11a e 11b*.

4.3.1.1. RODADA I — ATIVIDADES 9A E 9B

4.3.1.1.1. ATIVIDADE 9A

Número pensado: $\frac{57}{5}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [3, 21] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por 3 e 21;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe receptora é oito.

4.3.1.1.2. ATIVIDADE 9B

Número pensado: $\frac{78}{4}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [17, 39] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por 17 e 39;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe receptora é oito.

4.3.1.2. RODADA II — ATIVIDADES 10A E 10B

4.3.1.2.1. ATIVIDADE 10A

Número pensado: $-\dfrac{31}{5}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–7, 2] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –7 e 2;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe receptora é oito.

4.3.1.2.2. ATIVIDADE 10B

Número pensado: $-\dfrac{19}{2}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–10, 1] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –10 e 1;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe receptora é oito.

4.3.1.3. RODADA III — ATIVIDADES 11A E 11B

4.3.1.3.1. ATIVIDADE 11A

Número pensado: $\dfrac{77}{8}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [4, 15] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por 4 e 15;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe receptora é oito.

4.3.1.3.2. ATIVIDADE 11B

Número pensado: $\frac{49}{125}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [0, 11] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por 0 e 11;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe receptora é oito.

4.3.2. DESCRIÇÃO DA PROPOSIÇÃO DA TAREFA 3 (ATIVIDADES 9A E 9B) EM SALA DE AULA E ANÁLISE

A realização da tarefa 3 deu-se na quarta aula com os alunos, sendo propostas a eles apenas a vivência de duas atividades: a 9a e a 9b. Todos os 34 alunos da turma compareceram a essa aula. Contou-se também com a participação da professora de matemática da classe, da pesquisadora e de uma observadora.

Essa aula iniciou-se com a professora retomando com a classe o objetivo da tarefa 2, anteriormente realizada, qual seja, a determinação de um intervalo compreendido por dois inteiros consecutivos no qual o número racional pensado estaria compreendido.

No entanto, a professora salientou que a proposição da tarefa 3 apresentaria algumas mudanças.

A primeira alteração referia-se ao objetivo da tarefa. Disse aos alunos que deveriam buscar, em cada atividade dessa tarefa, determinar um intervalo entre dois números racionais no qual o número racional pensado estivesse compreendido.

Em seguida, explicou que para a realização dessa nova tarefa os alunos deveriam ser divididos em quartetos (com possíveis quintetos), os quais por sua vez seriam subdivididos em pares (ou um par e um trio por grupo, se necessário), que seriam chamados de equipes emissoras e receptoras. Assim, cada quarteto teria duas equipes, sendo uma emissora e a outra receptora. Essa configuração é coerente com a conduta institucional.

Comunicou-lhes que cada equipe receptora deveria interagir somente com a equipe emissora de seu grupo e que a atividade deveria ser realizada isoladamente em cada grupo.

Informou que as equipes receptoras seriam responsáveis pela formulação das questões às equipes emissoras, que por sua vez seriam responsáveis pelas respostas a esses questionamentos. Salientou que as questões deveriam contemplar apenas as relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’, devendo ser respondidas somente com ‘sim’ ou ‘não’.

Disse-lhes que cada grupo por fim obteria um intervalo compreendido por dois números racionais no qual o número racional pensado estaria compreendido. Tais intervalos deveriam então ser relatados em voz alta no final de cada atividade, para que fossem compartilhados por todos os grupos. Seria então determinado o menor dentre os intervalos os fornecidos pelos grupos, e venceria o grupo que tivesse apresentado o menor deles. A professora informou-lhes que, nessa tarefa, apenas os coordenaria, passando-lhes as informações necessárias e organizando-os durante a vivência.

Explicou aos alunos que o número racional previamente pensado seria informado somente às equipes emissoras, sendo as demais informações (intervalo compreendido por dois números inteiros previamente pensado e quantidade máxima de questões permitidas) comunicadas a todas as equipes.

Em seguida, a professora pediu que os alunos se dividissem como consta no Quadro 9a.

Quadro 9a. Formação dos grupos para a realização da atividade 9a da tarefa 3

Grupos	Equipe emissora	Equipe receptora
Quarteto A	Bruno e Júlia	Mariel e João
Quarteto B	Bianca e Leonardo	Jonas e Marina
Quarteto C	Anita e Eduardo	Tomás e Ana Carolina
Quarteto D	Gabriela e Jorge	Clara e Pedro
Quarteto E	Mariah e Fernando	Juliana e Laura
Quinteto F	Alan, Júlio e Ricardo	Helena e Fernanda
Quinteto G	Lucas e Mariana	Aline, Paulo e Alexandre
Quarteto H	Fernão e Eugênia	Débora e Rafael

Para a distribuição dos alunos nesses grupos, foram consideradas observações feitas em sala de aula (participação, desempenho escolar e interação, entre outros aspectos), a fim de proporcionar condições para que todos os integrantes dos quartetos e quintetos tivessem interação mais satisfatória, favorecendo seu envolvimento nas atividades. (Note-se que desses oito grupos formados, dois se compuseram de cinco integrantes.) Para facilitar a identificação de cada um dos grupos, foram afixadas etiquetas nas carteiras.

Tal como ocorrido nas aulas anteriores, os alunos foram orientados a guardar seus materiais, deixando sobre as carteiras apenas o lápis. Foi então entregue a cada aluno uma folha de papel sulfite e uma caneta esferográfica azul. (No entanto, em nossas análises, não fazemos distinção entre as anotações feitas a lápis ou a tinta.)

A professora pediu-lhes que colocassem seus nomes em suas folhas e que identificassem com X, no espaço apropriado, se pertenciam à equipe emissora ou à receptora. As folhas já estavam previamente identificadas como “quarteto A”, “quarteto B” e assim sucessivamente.

A professora pediu que, para as anotações, obedecessem às orientações dadas para as demais atividades realizadas anteriormente.

Informou aos grupos que o intervalo em que o número racional pensado estava compreendido era o intervalo [3, 21] e que as equipes receptoras poderiam formular às equipes emissoras no máximo oito questões. Em seguida, distribuiu a cada equipe emissora um papel em que o número $\frac{57}{5}$ estava anotado, também guardando um desses papéis sobre sua mesa. As equipes receptoras não tiveram acesso a esse número. Assim, deu-se início à **atividade 9a.**

Faz-se aqui necessário apresentar as produções de todos os grupos, já que cada um deles vivenciou a atividade isoladamente. As questões e respostas formuladas em cada grupo são apresentadas nos Quadros 9b a 9i.

Quadro 9b. Questões e respostas formuladas pelo quarteto A durante a realização da atividade 9a

QUARTETO A	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Mariel e João**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Bruno e Júlia**
QUESTÃO 1: É maior que 12?	Não.
QUESTÃO 2: É maior que 8?	Sim.
QUESTÃO 3: É menor que 10?	Não.
QUESTÃO 4: É menor que 11?	Não.
QUESTÃO 5: É maior que 11,5?	Não.
QUESTÃO 6: É maior que 11,25?	Sim.
QUESTÃO 7: É maior que 11,35?	Sim.
QUESTÃO 8: É maior que 11,4?	Não.
QUESTÃO 9: É maior que 11,375?	Sim.
O quarteto A determinou um intervalo denotando-o assim:]11,375; 11,4]	

A análise da vivência dessa atividade pelo quarteto A (Quadro 9b) permite observar os seguintes aspectos:

a) Esses alunos descumpriram a regra que estabelecia a quantidade máxima de questões permitidas à equipe receptora, formulando nove questões, e não oito.

b) Os alunos determinaram um intervalo denotando-o assim:]11,375; 11,4].

c) Suas produções nos levam a supor que a equipe receptora, ao formular as questões 2, 7 e 8, recorreu à estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’ e que, para as demais questões (1, 3, 4, 5, 6 e 9), recorreram à estratégia de ‘corte pelo meio do intervalo’.

Os procedimentos de resolução da equipe receptora do quarteto A sugerem possível uso, como ferramentas matemáticas, das noções de média aritmética, de segmento e de relações (‘ser maior que’ e ‘ser menor que’).

Quadro 9c. Questões e respostas formuladas pelo quarteto B durante a realização da atividade 9a

QUARTETO B	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Bianca e Leonardo**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Jonas e Marina**
QUESTÃO 1: É maior que 11?	Sim.
QUESTÃO 2: É maior que 16?	Não.
QUESTÃO 3: É maior que 14?	Não.
QUESTÃO 4: É menor que 12?	Sim.
QUESTÃO 5: É maior que 11,5?	Não.
QUESTÃO 6: É maior que 11,25?	Sim.
QUESTÃO 7: É menor que 11,4?	Não.
O quarteto B determinou um intervalo denotando-o assim: [11,4; 11,5]	

A análise da vivência dessa atividade pelo quarteto B (Quadro 9c) permite observar os seguintes aspectos:

a) A equipe receptora não utilizou as oito questões que lhes eram permitidas, mas apenas sete.

b) Os alunos determinaram um intervalo denotando-o assim: [11,4; 11,5].

c) Para a elaboração das questões 1, 3, 4 e 7, os alunos possivelmente recorreram à estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’ e, nas questões 2, 5 e 6, possivelmente a estratégia de ‘corte pelo meio do intervalo’.

Como possíveis ferramentas matemáticas, foram utilizadas as noções de média aritmética, de segmento e de relações (‘ser maior que’ e ‘ser menor que’).

Quadro 9d. Questões e respostas formuladas pelo quarteto C durante a realização da atividade 9a

QUARTETO C	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Anita e Eduardo**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Tomás e Ana Carolina**
QUESTÃO 1: É menor que 12?	Sim.
QUESTÃO 2: É maior que 6?	Sim.
QUESTÃO 3: É maior que 8?	Sim.
QUESTÃO 4: Está entre 9 e 10?	Não.
QUESTÃO 5: É maior que 10?	Sim.
QUESTÃO 6: É menor que 11,5?	Sim.
QUESTÃO 7: É maior que 11,2?	Sim.
QUESTÃO 8: É maior que 11,3?	Sim.
O quarteto C determinou um intervalo denotando-o assim: [11,3; 11,4]	

A análise da vivência dessa atividade pelo quarteto C (Quadro 9d) permite observar os seguintes aspectos:

a) Os alunos utilizaram as oito questões que lhes eram permitidas.

b) Os alunos determinaram um intervalo denotando-o assim: [11,3; 11,4]. Saliente-se, porém, que, considerando-se as perguntas e respostas desse quarteto, o intervalo deveria ter sido]11,3;11,4].

c) Nas questões da equipe receptora figuram possivelmente três estratégias de resolução. Cogitamos que nas questões 1 e 5 foi utilizada a estratégia de ‘corte pelo meio do intervalo’; nas questões 2, 3, 6, 7 e 8, a de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’. Na questão 4, os alunos desconsideraram a regra de que as questões deveriam limitar-se às relações ‘é maior que’ e ‘é menor que’, caracterizando assim o uso da estratégia ‘desconsideração das regras da tarefa’.

A análise das produções desse quarteto nos permitiu pressupor o uso das seguintes noções como ferramentas matemáticas: média aritmética, segmento e relações (‘ser maior que’ e ‘ser menor que’).

Quadro 9e. Questões e respostas formuladas pelo quarteto D durante a realização da atividade 9a

QUARTETO D	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Gabriela e Jorge**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Clara e Pedro**
QUESTÃO 1: É maior que 10?	Sim.
QUESTÃO 2: É menor que 15?	Sim.
QUESTÃO 3: É maior que 12?	Não.
QUESTÃO 4: É maior que 11?	Sim.
QUESTÃO 5: É maior que 11,5?	Não.
QUESTÃO 6: É menor que 11,25?	Não.
QUESTÃO 7: É maior que 11,375?	Sim.
QUESTÃO 8: É menor que 11,4375?	Sim.
O quarteto D determinou um intervalo denotando-o assim:]11,375; 11,4375[	

A análise da vivência dessa atividade pelo quarteto D (Quadro 9e) permite observar os seguintes aspectos:

a) Os alunos da equipe receptora utilizaram todas as oito questões que lhes eram permitidas.

b) Os alunos determinaram um intervalo denotando-o assim:]11,375; 11,4375[.

c) Conjecturamos que foram utilizadas, durante tais produções, apenas duas estratégias de resolução: ‘corte pelo meio do intervalo’, nas questões 4, 5, 6, 7 e 8, e ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, nas questões 1, 2 e 3.

Nas produções desses alunos foram possivelmente utilizadas as noções de média aritmética, de segmento e de relações ('ser maior que' e 'ser menor que'), como ferramentas matemáticas.

Quadro 9f. Questões e respostas formuladas pelo quarteto E durante a realização da atividade 9.a

QUARTETO E	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Mariah e Jorge**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Juliana e Laura**
QUESTÃO 1: É maior que 11?	Sim.
QUESTÃO 2: É menor que 16?	Sim.
QUESTÃO 3: É menor que 14?	Sim.
QUESTÃO 4: É menor que 12?	Sim.
QUESTÃO 5: É menor que 11,5?	Sim.
QUESTÃO 6: É menor que 12,5?	Sim.
QUESTÃO 7: É menor que 11,3?	Não.
QUESTÃO 8: É maior que 11,4?	Não.
O quarteto E determinou um intervalo denotando-o assim: [11,3; 11,4]	

A análise da vivência dessa atividade pelo quarteto E (Quadro 9f) permite observar os seguintes aspectos:

a) Os alunos da equipe receptora formularam todas as oito questões que lhes eram permitidas.

b) Os alunos determinaram um intervalo denotando-o assim: [11,3; 11,4].

c) Possivelmente recorreram às seguintes estratégias de resolução: nas questões 1, 3, 4 e 7, à estratégia de 'aproximação do corte pelo meio do intervalo' e, nas questões 2, 5 e 8, à estratégia de 'corte pelo meio do intervalo'.

d) Consideramos a questão 6 desnecessária, já que propicia a redução de um intervalo anteriormente desconsiderado. Isso pode ser observado através da questão 4 e sua resposta, que permite concluir que o número pensado é menor que 12. Assim, a questão 6 faz uso de uma estratégia de resolução que designaremos por ‘questão desnecessária’.

Como ferramentas matemáticas possivelmente empregadas pelos alunos, têm-se as noções de média aritmética, de segmento e de relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’.

Quadro 9g. Questões e respostas formuladas pelo quinteto F durante a realização da atividade 9a

QUINTETO F	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Alan, Júlio e Ricardo**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Helena e Fernanda**
Os alunos desse quinteto confundiram-se quanto ao objetivo dessa atividade, não obtendo nenhum intervalo.	

Os alunos do quinteto F (Quadro 9g) confundiram-se quanto aos objetivos da atividade 9a. Entenderam que deveriam determinar o número racional previamente pensado. Por não atingirem o objetivo proposto pela atividade, optaram por não devolver suas folhas à professora, não sendo portanto possível observar suas produções.

Os dados de suas produções da atividade 9a não foram integralmente coletados. Embora tenhamos condições de apresentar algumas de suas questões e respostas, julgamos oportuno não relatá-las, tendo em vista a impossibilidade de fazê-lo por completo.

Quadro 9h. Questões e respostas formuladas pelo quinteto G durante a realização da atividade 9a

QUINTETO G	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Lucas e Mariana**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Aline, Paulo e Alexandre**
QUESTÃO 1: É maior que 15?	Não.
QUESTÃO 2: É menor que 9?	Não.
QUESTÃO 3: É menor que 12?	Sim.
QUESTÃO 4: É maior que 11?	Sim.
QUESTÃO 5: É menor que 11,5?	Sim.
O quinteto G determinou um intervalo denotando-o assim:]11; 11,5[	

A análise da vivência dessa atividade pelo quinteto G (Quadro 9h) permite observar os seguintes aspectos:

a) Das oito questões permitidas à equipe receptora, apenas cinco foram utilizadas.

b) Os alunos determinaram um intervalo denotando-o assim:]11; 11,5[.

c) Possivelmente recorreu-se a duas estratégias de resolução: ao ‘corte pelo meio do intervalo’, nas questões 2, 3 e 5, e à ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, nas questões 1 e 4.

Supomos que as noções de média aritmética, de segmento e de relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’ foram utilizadas por esses alunos como ferramentas matemáticas em seus procedimentos de resolução.

Quadro 9i. Questões e respostas formuladas pelo quarteto H durante a realização da atividade 9a

QUARTETO H	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Fernão e Eugênia**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Débora e Rafael**
QUESTÃO 1: É maior que 9?	Sim.
QUESTÃO 2: É menor que 15?	Sim.
QUESTÃO 3: É menor que 12?	Sim.
QUESTÃO 4: É maior que 10?	Sim.
QUESTÃO 5: É maior que 11?	Sim.
QUESTÃO 6: É menor que 11,5?	Sim.
QUESTÃO 7: É maior que 11,3?	Sim.
QUESTÃO 8: É o número 11,4?	Sim.
O quarteto H determinou um intervalo denotando-o assim:]11,3; 11,4]	

O quarteto H (Quadro 9i), tal como o quinteto F, confundiu-se quanto ao objetivo da atividade 9a, acreditando que deveria determinar o número racional, e não o intervalo de dois números racionais em que esse número estivesse compreendido. Questionados pela professora sobre o intervalo obtido ao final dessa atividade, esses alunos determinaram naquele momento o intervalo]11,3;11,4], com base nas questões e respostas que já haviam formulado.

A análise da vivência dessa atividade pelo quarteto H permite observar os seguintes aspectos:

a) Foram utilizadas todas as oito questões permitidas.

b) Os alunos determinaram um intervalo denotando-o assim:]11,3; 11,4].

c) Três estratégias de resolução foram possivelmente empregadas: ‘corte pelo meio do intervalo’, nas questões 1, 2, 3, 5 e 6; ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo', nas questões 4 e 7; e, na questão 8, a estratégia que designaremos por 'desconsideração das regras da tarefa'.

Foram provavelmente utilizadas as noções de média aritmética, de segmento e de relações 'ser maior que' e 'ser menor que' como ferramentas matemáticas nas produções desse quarteto/quintetos.

Os grupos, à medida que terminavam a atividade 9a, informavam o fato à professora. Depois de finalizada a atividade por todos eles, a professora dirigiu-se à lousa, pedindo que cada um deles relatasse o intervalo obtido. Assim, expuseram seus intervalos, que ela escreveu na lousa da seguinte maneira:

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
[11,4; 11,375[	[11,4; 11,5]	[11,3; 11,4]	]11,375; 11,4375[	[11,3; 11,4]	–	]11; 11,5[	]11,3; 11,4]

Promoveu-se, a partir desses resultados, uma discussão sobre qual seria a equipe vencedora. Para isso, debateu-se com os alunos qual seria o menor intervalo dentre esses apresentados pelos quartetos.

A princípio, alguns alunos apontaram como menor intervalo o fornecido pelo quarteto A; outros, o do quarteto D. Diante desse impasse, os alunos foram questionados sobre qual desses dois intervalos era o menor, sendo-lhes pedido que os comparassem. Os alunos debateram livremente. Após alguns minutos, obteve-se consenso, como transcrito a seguir. Entre chaves constam observações referentes às ações dos alunos e da professora.

P: Todos terminaram? Gostaria que cada quarteto e quinteto dissesse o intervalo que obteve. Equipe A, qual foi o intervalo obtido por vocês?

Mariel: Onze vírgula quatro e onze vírgula três sete cinco.

P: E como ficam as extremidades? Inclui ou não?

Mariel: Onze vírgula três sete cinco não inclui. A outra, sim.

P: Equipe B.

Jonas: Onze vírgula quatro e onze vírgula cinco.

P: E como ficaram essas extremidades?

Jonas: Incluídas.

P: Equipe C.

Tomás: Onze vírgula três e onze vírgula quatro.

P: E essas extremidades, como é que são?

Eduardo: Incluídas.

P: Equipe D.

Gabriela: Onze vírgula trezentos e setenta e cinco.

Pedro: Onze vírgula quatro três sete cinco.

P: E as extremidades?

Pedro: Não estão incluídas.

P: Equipe E?

Juliana: Onze vírgula três e onze vírgula quatro.

P: E os extremos?

Juliana: Incluídos.

P: Como a equipe F se confundiu, vamos para a equipe G.

Lucas: A gente chegou entre onze e onze vírgula cinco.

Mariana: Esses números não estão incluídos.

P: A última equipe, equipe H.

Rafael: Onze vírgula três e onze vírgula quatro, incluindo o onze vírgula quatro.

P: Vamos pensar quem mais se aproximou do número pensado. O número pensado era o número cinqüenta e sete quintos, na sua representação fracionária, ou onze vírgula quatro, na sua representação decimal. {Nesse momento, a professora escreveu essas duas representações do número pensado na lousa.} Vamos participar todos juntos agora. A gente pode trabalhar com qualquer uma dessas duas representações. Vamos ver qual foi a equipe que obteve o menor intervalo. Qual vocês acham que foi?

{Apenas alguns alunos se manifestam, dizendo à professora, em voz alta, que foi o quarteto A.}

P: Vamos participar, porque agora é uma pergunta para todos. Qual é a equipe que vocês acham que afinou mais esse intervalo?

{Alguns alunos continuam falando que foi o quarteto A. Nesse momento, a professora circula, na lousa, o intervalo dado por esse quarteto.}

P: Tem algum outro quarteto que vocês acham que também chegou próximo?

{Alguns outros alunos falam que foi o quarteto D. Assim, a professora circula também o intervalo fornecido por esse quarteto.}

P: O intervalo dado pela equipe D está parecido com o da equipe A. Qual vocês acham que é o menor?

{Alguns alunos respondem que o menor é o intervalo determinado pela equipe A.}

P: Por que vocês acham que é o do quarteto A?

Débora: Eu acho que esse é melhor porque no intervalo dado pelo quarteto A o número pensado é uma das extremidades. É um intervalo menor.

P: Vocês concordam com a Débora?

Débora: O intervalo dado pelo quarteto A cabe no intervalo dado pelo D; então é menor.

P: Todos concordam? Alguém mais quer fazer alguma pergunta? {Os alunos não respondem.} Então, o quarteto A é o vencedor dessa atividade.

Sendo assim, atribuiu-se vitória ao quarteto A na atividade 9a, finalizando-a.

A análise da vivência dessa atividade por todos os grupos permite observar os seguintes aspectos:

a) As regras, a dinâmica e o objetivo da tarefa 3 foram preservados integralmente durante a proposta dessa atividade.pela professora.

b) Dos oito grupos participantes (quartetos e quintetos), dois (F e H) se confundiram quanto aos objetivos propostos. Entretanto, um deles (H), ao ser questionado pela professora, conseguiu cumprir o propósito de determinar o intervalo compreendido por dois números racionais. O outro (quinteto F) não atingiu tal objetivo.

c) O quarteto A foi considerado vencedor. Entretanto, não foi observado pela professora, durante a vivência dessa atividade, que esse grupo desconsiderou a regra da quantidade máxima de questões permitidas. O grupo formulou nove questões, em vez de oito.

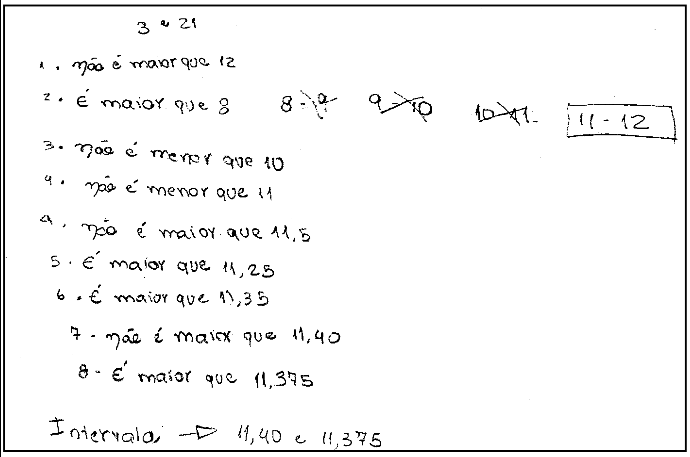
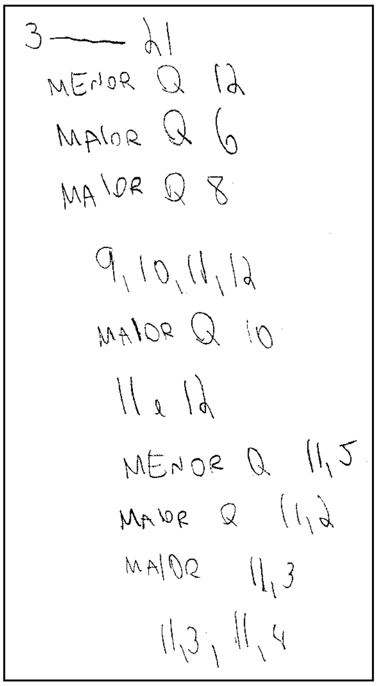
Tal como em outras atividades, dividimos as produções escritas dos alunos segundo as categorias ‘anotações completas’, ‘anotações incompletas’ e ‘ausência de anotações’. Isso está sumarizado no Quadro 9j:

Quadro 9j. Anotações dos alunos referentes à atividade 9a, por categoria e quantidade de ocorrências.

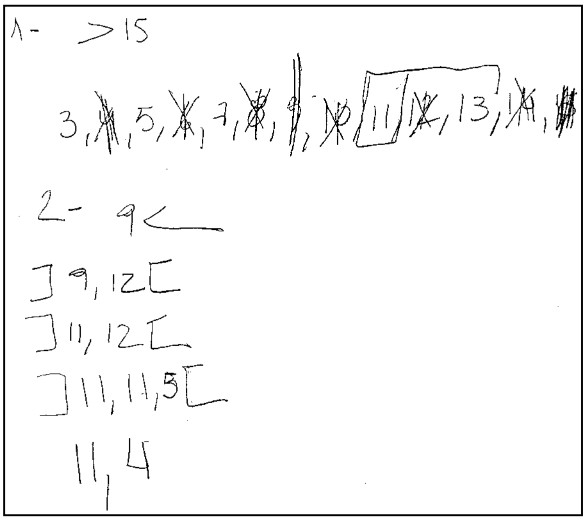
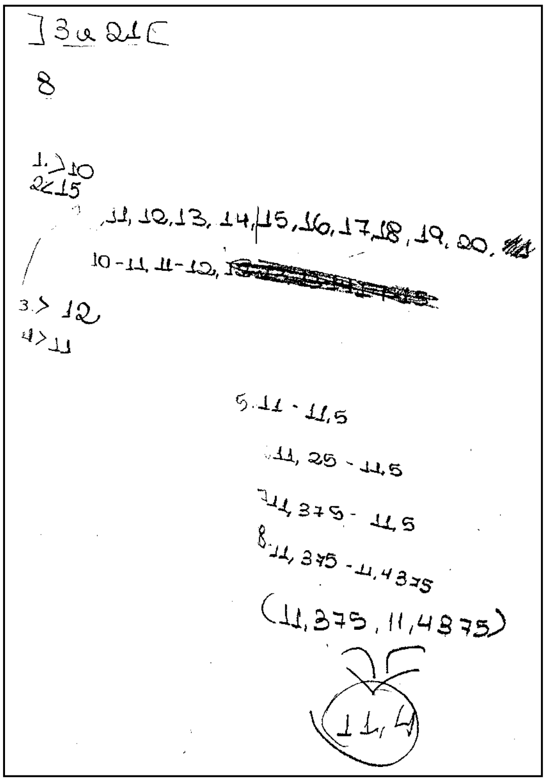
Quarteto/Quinteto	**Papel desempenhado**	**Quantidade de ocorrências**		
		Anotações Completas	**Anotações incompletas**	**Ausência de anotações**
A	Equipe emissora			2
	Equipe receptora	2		
B	Equipe emissora		2	
	Equipe receptora	2		
C	Equipe emissora		1	1
	Equipe receptora	2		
D	Equipe emissora		2	
	Equipe receptora	2		
E	Equipe emissora		1	1
	Equipe receptora	2		
F	Equipe emissora	Os cinco alunos deste grupo não devolveram suas folhas ao final dessa atividade.		
	Equipe receptora			
G	Equipe emissora	1		1
	Equipe receptora	3		
H	Equipe emissora	2		
	Equipe receptora	2		

Nos Quadros 9k, 9l e 9m são apresentadas as quantidades de ocorrências de cada categoria. Os dois primeiros quadros mostram exemplos de anotações dos alunos e indicam os domínios empregados nessas produções.

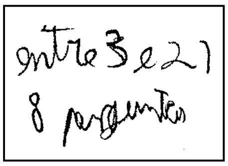
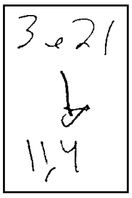
Quadro 9k. Categoria ‘anotações completas’ (atividade 9a)

Exemplos de anotações completas	Domínios utilizados	Quantidade de anotações
 3 e 21 1. não é maior que 12 2. é maior que 8 8→9 9→10 10→11. $\boxed{11 - 12}$ 3. não é menor que 10 4. não é menor que 11 4. não é maior que 11,5 5. é maior que 11,25 6. é maior que 11,35 7. não é maior que 11,40 8. é maior que 11,375 Intervalo → 11,40 e 11,375  3 —— 21 MENOR Q 12 MAIOR Q 6 MAIOR Q 8 9, 10, 11, 12 MAIOR Q 10 11 e 12 MENOR Q 11,5 MAIOR Q 11,2 MAIOR 11,3 11,3, 11,4	Numérico e língua materna	4

entre 3 e 21]3, 21[está entre 11 e 12]11,12[número > 11 X < 16 número < 14 11 12 13 14 x < 12 X < 11,5 X < 12,5 ~~11,1~~ ~~11,2~~ 11,3 11,4 está entre 11,3 e 11,4 [11,3, 11,4] Entre 3 - 21 [redacted] < 10 ~~10-11~~, 11-12, ~~12-13, 13-14, 14-15~~, ~~15-16~~, 16-17, ~~17-18, 18-19, 19-20, 20-21~~ > 15 > 12 > 11,5 < 11,25 500 − 375 = 125 125 | 2 = 62,5 < 11,375 11,3750 + 0,0625 > 11,4375 está entre 11,3750 e 11,4375	Numérico, algébrico e língua materna	10

 	Numérico e algébrico	4
Quantidade total de anotações completas		**18**

Quadro 9l. Categoria ‘anotações incompletas’ (atividade 9a)

Exemplos de anotações incompletas	**Domínios utilizados**	**Quantidade de anotações**
	Numérico e língua materna	4
	Numérico	2
Quantidade total de anotações incompletas		**6**

Quadro 9m. Categoria ‘ausência de anotações’ (atividade 9a)

Quantidade de alunos que não realizaram anotações	**10**

Dos 34 alunos presentes nessa aula, 29 devolveram a folha de sulfite à professora após o encerramento. Os cinco alunos do quinteto F não as devolveram por terem descumprido o objetivo da atividade.

Analisando as anotações dos alunos, identificamos o recurso, em seus procedimentos de resolução, aos domínios numérico, de língua materna e algébrico. Houve interação entre o domínio numérico e o de língua materna, entre o numérico, o algébrico e o de língua materna e entre o numérico e o algébrico.

Após a finalização da atividade, deu-se continuidade a essa quarta aula com a proposição da **atividade 9b**.

Os alunos foram informados que lhes seria proposta uma segunda atividade dessa tarefa e que a composição dos quartetos e quintetos deveria ser a mesma, mas que as equipes de cada um trocariam agora suas funções (de emissores a receptores e vice-versa), como mostra o Quadro 10a.

Quadro 10a. Formação dos grupos para a realização da atividade 9b da tarefa 3

Grupos	Equipe emissora	Equipe receptora
Quarteto A	Mariel e João	Bruno e Júlia
Quarteto B	Jonas e Marina	Bianca e Leonardo
Quarteto C	Tomás e Ana Carolina	Anita e Eduardo
Quarteto D	Clara e Pedro	Gabriela e Jorge
Quarteto E	Juliana e Laura	Mariah e Fernando
Quinteto F	Helena e Fernanda	Alan, Júlio e Ricardo
Quinteto G	Aline, Paulo e Alexandre	Lucas e Mariana
Quarteto H	Débora e Rafael	Fernão e Eugênia

A professora salientou novamente as regras, a dinâmica e o objetivo da tarefa 3, tendo em vista que alguns dos alunos haviam se confundido quanto ao objetivo na vivência da atividade 9a.

Em seguida, foram informados de que o número pensado era um número racional compreendido pelo intervalo [17, 39] e que as equipes receptoras poderiam utilizar no máximo oito questões, valendo-se apenas as relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’.

Em seguida, foram distribuídos às equipes emissoras os papéis com o número pensado: $\frac{78}{4}$. As equipes receptoras não tiveram acesso a tal informação. Foram também distribuídas folhas de sulfite em branco com identificação da atividade 9b. Pediu-se aos alunos que escrevessem seus nomes nas folhas e que identificassem se faziam parte da equipe emissora ou da receptora.

Deu-se início à realização da atividade 9b. As questões e respostas apresentadas por cada um dos grupos encontram-se nos Quadros 10b a 10i.

Quadro 10b. Questões e respostas formuladas pelo quarteto A durante a realização da atividade 9b

QUARTETO A	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Mariel e João**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Bruno e Júlia**
QUESTÃO 1: É menor que 28?	Sim.
QUESTÃO 2: É menor que 22,5?	Sim.
QUESTÃO 3: É menor que 19,75?	Sim.
QUESTÃO 4: É maior que 18?	Sim.
QUESTÃO 5: É maior que 18,5?	Sim.
QUESTÃO 6: É maior que 19?	Sim.
QUESTÃO 7: É maior que 19,35?	Sim.
QUESTÃO 8: É menor que 19,55?	Sim.
O quarteto A determinou um intervalo denotando-o assim:]19,35; 19,55]	

A análise da vivência dessa atividade pelo quarteto A permite observar os seguintes aspectos:

a) Foram utilizadas as oito questões permitidas à equipe receptora.

b) Os alunos determinaram um intervalo denotando-o assim:]19,35; 19,55].

c) Possivelmente foram utilizadas duas estratégias de resolução: ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, nas questões 4, 5, 6 e 7, e ‘corte pelo meio do intervalo’, nas questões 1, 2, 3 e 8.

Provavelmente foram empregadas como ferramentas matemáticas as noções de média aritmética, de segmento e de relações (‘ser maior que’ e ‘ser menor que’).

Quadro 10c. Questões e respostas formuladas pelo quarteto B durante a realização da atividade 9b

QUARTETO B	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Bianca e Leonardo**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Jonas e Marina**
QUESTÃO 1: É menor que 25?	Sim.
QUESTÃO 2: É menor que 21?	Sim.
QUESTÃO 3: É menor que 19?	Não.
QUESTÃO 4: É menor que 20?	Sim.
QUESTÃO 5: É menor que 19,5?	Não.
QUESTÃO 6: É menor que 19,7?	Sim.
QUESTÃO 7: É menor que 19,6?	Sim.
QUESTÃO 8: É menor que 19,57?	Sim.
O quarteto B determinou um intervalo denotando-o assim: [19,5;19,57[	

A análise da vivência dessa atividade pelo quarteto B (Quadro 10c) permite observar os seguintes aspectos:

a) Foi utilizada a quantidade máxima de questões permitidas à equipe receptora.

b) Os alunos determinaram um intervalo denotando-o assim: [19,5; 19,57[.

c) Foram possivelmente empregadas apenas duas estratégias de resolução: ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, nas questões 1, 6 e 8, e ‘corte pelo meio do intervalo’, nas questões 2, 3, 4, 5 e 7.

Provavelmente foram empregadas como ferramentas matemáticas as noções de média aritmética, de segmento e de relações (‘ser maior que’ e ‘ser menor que’).

Quadro 10d. Questões e respostas formuladas pelo quarteto C durante a realização da atividade 9b

QUARTETO C	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Anita e Eduardo**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Tomás e Ana Carolina**
QUESTÃO 1: É maior que 28?	Não.
QUESTÃO 2: É menor que 22?	Sim.
QUESTÃO 3: É menor que 20?	Sim.
QUESTÃO 4: É maior que 19?	Sim.
QUESTÃO 5: É maior que 19,5?	Não.
QUESTÃO 6: É maior que 19,3?	Sim.
QUESTÃO 7: É maior que 19,4?	Sim.
QUESTÃO 8: É maior que 19,45?	Sim.
QUESTÃO 9: É menor que 19,47?	Não.
O quarteto C determinou um intervalo denotando-o assim: [19,47; 19,5]	

A análise da vivência dessa atividade pelo quarteto C (Quadro 10d) permite observar os seguintes aspectos:

a) Os alunos descumpriram a regra que limitava a quantidade de questões permitidas, formulando nove questões, em vez de oito.

b) Os alunos determinaram um intervalo denotando-o assim: [19,47;19,5].

c) As questões 1, 5, 7 e 8 configuram possivelmente recurso à estratégia de ‘corte pelo meio do intervalo’: as questões 2, 3, 4, 6 e 9, à estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’.

Foram possivelmente empregadas como ferramentas matemáticas as noções de média aritmética, de segmento e de relações (‘ser maior que’ e ‘ser menor que’).

Quadro 10e. Questões e respostas formuladas pelo quarteto D durante a realização da atividade 9b

QUARTETO D	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Gabriela e Jorge**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Clara e Pedro**
QUESTÃO 1: É maior que 28?	Não.
QUESTÃO 2: É menor que 22?	Sim.
QUESTÃO 3: É maior que 19?	Sim.
QUESTÃO 4: É menor que 20?	Sim.
QUESTÃO 5: É maior que 19,5?	Não.
QUESTÃO 6: É maior que 19,20?	Sim.
QUESTÃO 7: É maior que 19,3?	Sim.
QUESTÃO 8: É maior que 19,4?	Sim.
O quarteto D determinou um intervalo denotando-o assim: [19,5;19,51[	

A análise da vivência dessa atividade pelo quarteto D (Quadro 10e) permite observar os seguintes aspectos:

a) A equipe receptora formulou a quantidade máxima de questões permitidas.

b) Os alunos determinaram um intervalo denotando-o assim: [19,5; 19,51[.

c) Supomos que tenham sido utilizadas as estratégias de ‘corte pelo meio do intervalo’ (questões 1, 5 e 8) e de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’ (questões 2, 3, 4, 6 e 7).

Como ferramentas matemáticas, cogitamos que foram utilizadas por esse quarteto as noções de média aritmética, de segmento e de relações (‘ser maior que’ e ‘ser menor que’).

Quadro 10f. Questões e respostas formuladas pelo quarteto E durante a realização da atividade 9b

QUARTETO E	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Mariah e Jorge**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Juliana e Laura**
QUESTÃO 1: É menor que 25?	Sim.
QUESTÃO 2: É menor que 20?	Sim.
QUESTÃO 3: É maior que 18?	Sim.
QUESTÃO 4: É maior que 19?	Sim.
QUESTÃO 5: É maior que 19,5?	Não.
QUESTÃO 6: É maior que 19,3?	Sim.
QUESTÃO 7: É maior que 19,4?	Sim.
O quarteto E determinou um intervalo denotando-o assim:]19,4;19,5]	

A análise da vivência dessa atividade pelo quarteto E (Quadro 10f) permite observar os seguintes aspectos:

a) Os alunos da equipe receptora não recorreram a todas as oito questões que lhes eram permitidas, utilizando apenas sete delas.

b) Os alunos determinaram um intervalo denotando-o assim:]19,4;19,5].

c) Possivelmente foram empregadas duas estratégias de resolução: ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, nas questões 1, 2, 3 e 6, e ‘corte pelo meio do intervalo’, nas questões 4, 5 e 7.

Como ferramentas matemáticas possivelmente foram utilizadas as noções de média aritmética, de segmento e de relações (‘ser maior que’ e ‘ser menor que’).

Quadro 10g. Questões e respostas formuladas pelo quinteto F durante a realização da atividade 9b

QUINTETO F	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Alan, Júlio e Ricardo**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Helena e Fernanda**
QUESTÃO 1: É menor que 25?	Sim.
QUESTÃO 2: É menor que 20?	Sim.
QUESTÃO 3: É maior que 18?	Sim.
QUESTÃO 4: É maior que 19,5?	Não.
QUESTÃO 5: É maior que 19,2?	Sim.
QUESTÃO 6: É maior que 19,3?	Sim.
QUESTÃO 7: É maior que 19,4?	Sim.
O quinteto F determinou um intervalo denotando-o assim:]19,4; 19,5]	

A análise da vivência dessa atividade pelo quinteto F (Quadro 10g) permite observar os seguintes aspectos:

a) Das oito questões permitidas, a equipe receptora utilizou apenas sete.

b) Os alunos determinaram um intervalo denotando-o assim:]19,4; 19,5].

c) Possivelmente foram utilizadas as estratégias de ‘corte pelo meio do intervalo’ (questão 7) e de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’ (questões 1, 2, 3, 4, 5 e 6).

Como ferramentas matemáticas foram possivelmente empregadas as noções de média aritmética, de segmento e de relações (‘ser maior que’ e ‘ser menor que’).

Quadro 10h. Questões e respostas formuladas pelo quinteto G durante a realização da atividade 9b

QUINTETO G	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Lucas e Mariana**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Aline, Paulo e Alexandre**
QUESTÃO 1: É maior que 25?	Não.
QUESTÃO 2: É menor que 20?	Sim.
QUESTÃO 3: É maior que 19?	Sim.
QUESTÃO 4: É maior que 19,5?	Não.
QUESTÃO 5: É maior que 19,3?	Sim.
O quinteto G determinou um intervalo denotando-o assim:]19,3; 19,5]	

A análise da vivência dessa atividade pelo quinteto G (Quadro 10h) permite observar os seguintes aspectos:

a) Apenas cinco questões, dentre as oito permitidas, foram utilizadas.

b) Os alunos determinaram um intervalo denotando-o assim:]19,3; 19,5].

c) Em quatro das cinco questões (questões 1, 2, 3 e 5), parece-nos que os alunos recorreram à estratégia de ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’. Já na questão 4, a estratégia provavelmente utilizada foi a de ‘corte pelo meio do intervalo’.

Como ferramentas matemáticas, foram possivelmente empregadas as noções de média aritmética, de segmento e de relações (‘ser maior que’ e ‘ser menor que’).

Quadro 10i. Questões e respostas formuladas pelo quarteto H durante a realização da atividade 9b

QUARTETO H	
EQUIPE RECEPTORA **Alunos: Fernão e Eugênia**	**EQUIPE EMISSORA** **Alunos: Débora e Rafael**
QUESTÃO 1: É maior que 25?	Não.
QUESTÃO 2: É maior que 21?	Não.
QUESTÃO 3: É maior que 18?	Sim.
QUESTÃO 4: É maior que 19,5?	Não.
QUESTÃO 5: É maior que 19?	Sim.
QUESTÃO 6: É maior que 19,3?	Sim.
QUESTÃO 7: É maior que 19,4?	Sim.
QUESTÃO 8: É maior que 19,45?	Sim.
O quarteto H determinou um intervalo denotando-o assim:]19,45; 19,5]	

A análise da vivência dessa atividade pelo quarteto H (Quadro 10i) permite observar os seguintes aspectos:

a) Todas as oito questões permitidas foram utilizadas.

b) Os alunos determinaram um intervalo denotando-o assim:]19,45; 19,5].

c) Possivelmente, foram utilizadas apenas duas estratégias de resolução: ‘corte pelo meio do intervalo” (questões 2, 4, 7 e 8) e ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’ (questões 1, 3, 5 e 6).

Como ferramentas matemáticas, foram possivelmente utilizadas as noções de média aritmética, de segmento e de relações (‘ser maior que’ e ‘ser menor que’).

Durante a realização dessa atividade, a professora caminhou pela sala, observando o trabalho dos grupos. Após alguns minutos, todos já haviam realizado a atividade proposta e dispunham dos intervalos obtidos.

Diferentemente do ocorrido na atividade anterior, a professora solicitou que cada grupo enviasse um integrante para escrever na lousa o intervalo obtido. Conforme os resultados iam sendo anotados, os alunos iniciaram as comparações, fazendo comentários e debatendo sobre qual era o menor dentre os intervalos apresentados.

Ao final, a lousa apresentava-se assim:

A	B	C	D	E	F	G	H
]19,35;19,55]	[19,5;19,57[	[19,47; 19,5]	[19,5;19,51[	]19,4; 19,5]	]19,4;19,5]	[19,5;19,3[	]19,45;19,5]

Isso é elucidado pela transcrição a seguir:

P: Pessoal, vamos todos prestar atenção. Todas os quartetos e quintetos. O número pensado foi setenta e oito quartos, que é o mesmo que falarmos dezenove vírgula cinco. Temos aqui as duas representações: a fracionária e a decimal. {A professora escreve na lousa: $\frac{78}{4}$ = 19,5.} Qual dos intervalos fornecidos vocês acham que é o menor?

{Alguns alunos dizem que é o intervalo obtido pelo quarteto D. Assim, a professora circula na lousa esse intervalo}

Tomás: Eu acho que é o D.

Anita: Eu também, porque a diferença está menor.

P: Vamos ver. Todos os intervalos, com exceção do fornecido pelo quarteto A, têm como uma das extremidades o número pensado. Por que vocês acham então que é o intervalo do quarteto D?

Marina: Porque está incluindo o 19,5 e vai ter o 19,5 de qualquer jeito.

P: Pense bem se é esse o motivo. Todos esses intervalos daqui {apontando para todos os intervalos, com exceção do intervalo fornecido pela equipe A} têm o número que eu pensei.

Eduardo: Porque o D se aproxima mais, mas, mesmo assim, não é o menor possível.

Débora: Porque o D é o menor.

P: Vamos só retomar o que o Eduardo falou e o que a Débora está falando. Ela falou que o D é o melhor porque se aproxima mais e o Eduardo falou que, mesmo assim, não é menor possível. O que ele quis dizer com isso?

André: Porque os números são infinitos.

P: Então seria possível acharmos um intervalo ainda menor que o fornecido pelo quarteto D?

{Alguns alunos respondem que não.}

Débora: Mas entre esses intervalos, o D é o menor.

P: Dentre esses daqui, vocês estão elegendo o D, mas será que esse é o menor dentre os possíveis que vocês poderiam achar nessa atividade?

{Alunos respondem que não.}

Jonas: Não, porque os números são infinitos. Se pudéssemos fazer mais questões, acharíamos um intervalo menor ainda.

P: Poderíamos afinar mais ainda esse intervalo?

{Alunos respondem que sim.}

P: Como?

João: Poderíamos ter o número dezenove vírgula cinco zero zero zero um, no lugar do dezenove vírgula cinco.

P: Teríamos um intervalo mais afinadinho ainda?

Eduardo: Sempre vai ter. É infinito.

Tomás: Quanto mais zero colocar, mais afinadinho fica.

P: Assim, o que vai acontecer com o intervalo?

Alunos {falando juntos}: Vai diminuindo.

P: E cada vez...

Alunos: Diminuindo.

P: E cada vez...

Alunos: Diminuindo.

Eduardo: Até a lousa acabar.

P: E, a lousa acabando, acabou o intervalo?

{Alunos respondem que não, que sempre podem continuar.}

Uma vez escritos todos os intervalos na lousa e estabelecido o quarteto vencedor, a atividade se encerrou.

As folhas de sulfite foram recolhidas e agradecemos pela participação e colaboração de todos os alunos na pesquisa.

Ao analisarmos a vivência da atividade 9b, considerando todos os grupos participantes, constatamos que:

a) Preservaram-se todas as regras, a dinâmica e o objetivo da tarefa 3 durante a vivência da atividade 9b.

b) Todos os quartetos e quintetos participantes atingiram o objetivo proposto pela atividade, obtendo, ao final, um intervalo compreendido por dois números racionais.

c) O quarteto D, considerado o vencedor, utilizou as oito questões permitidas às equipes receptoras.

Tal como em outras atividades, dividimos as produções escritas dos alunos segundo as categorias ‘anotações completas’, ‘anotações incompletas’ e ‘ausência de anotações’. Isso está sumarizado no Quadro 10j.

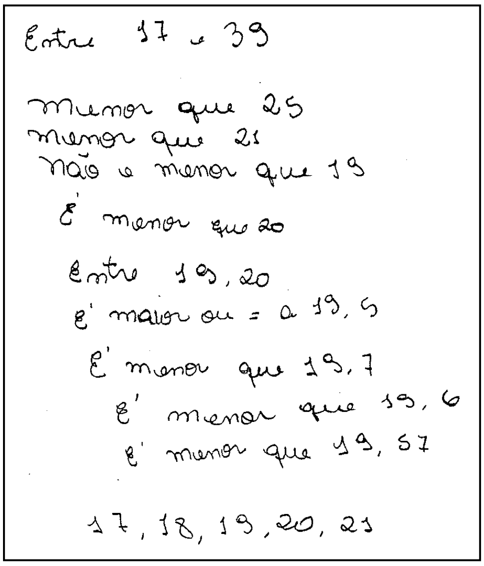
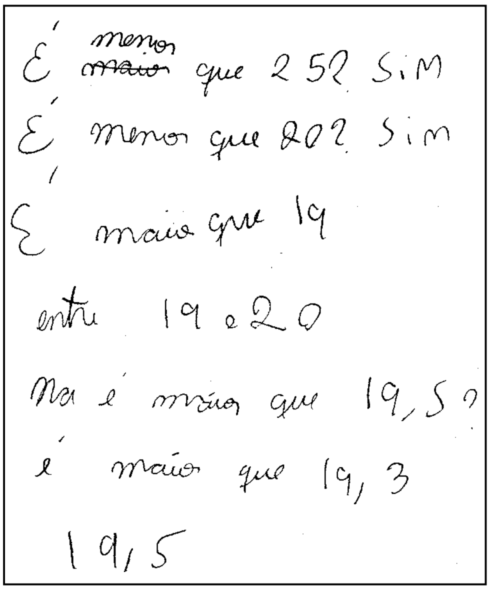
Quadro 10j. Anotações dos alunos referentes à atividade 9b, por categoria e quantidade de ocorrências.

Quarteto/Quinteto	Papel desempenhado	Quantidade de ocorrências		
		Anotações completas	**Anotações incompletas**	**Ausência de anotações**
A	Equipe emissora			**2**
	Equipe receptora	**2**		
B	Equipe emissora		**1**	**1**
	Equipe receptora	**2**		
C	Equipe emissora		**1**	**1**
	Equipe receptora	**2**		
D	Equipe emissora		**1**	**1**
	Equipe receptora	**2**		
E	Equipe emissora			**2**
	Equipe receptora	**2**		
F	Equipe emissora			**2**
	Equipe receptora	**3**		
G	Equipe emissora	**3**		
	Equipe receptora	**2**		
H	Equipe emissora	**2**		
	Equipe receptora	**2**		

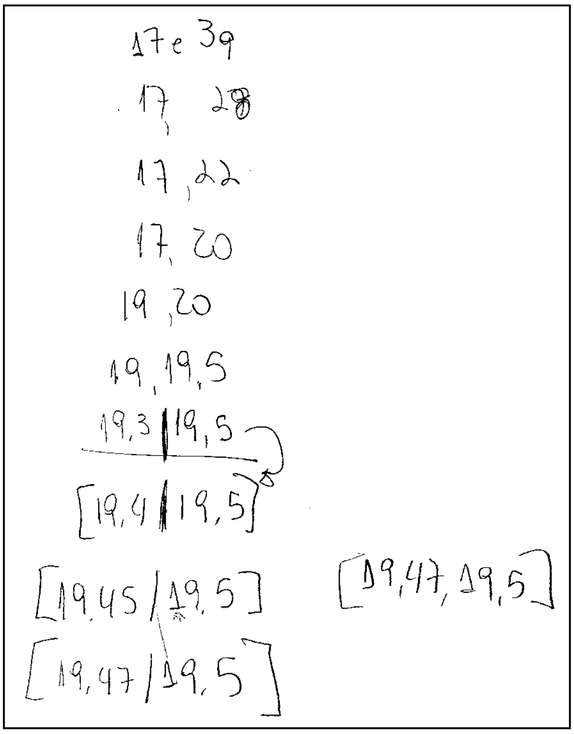
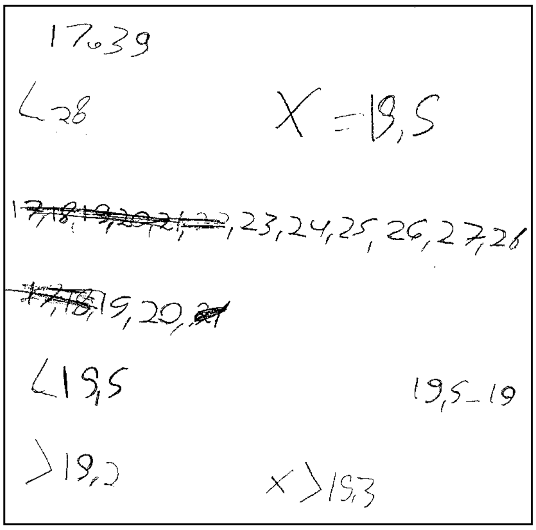
Os Quadros 10k, 10l e 10m indicam as quantidades de anotações de cada categoria. Os dois primeiros contêm exemplos de produções escritas dos alunos e indicam os domínios nelas empregados.

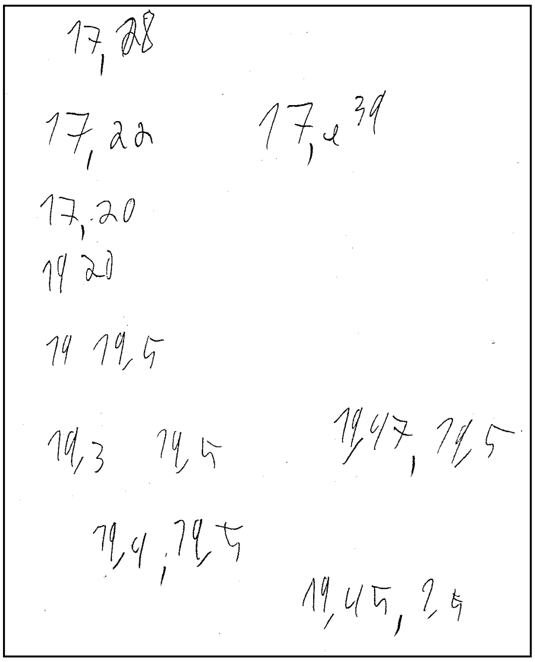
Todos os 34 alunos presentes nessa aula devolveram à professora a folha de sulfite referente à atividade ao final da aula.

Quadro 10k. Categoria 'anotações completas' (atividade 9b)

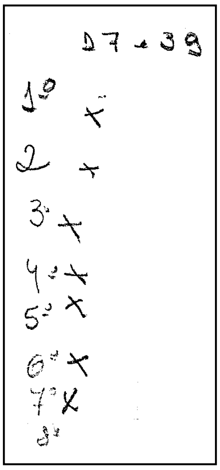
Exemplos de anotações completas	**Domínios utilizados**	**Quantidade de anotações**
 Entre 17 e 39 Menor que 25 Menor que 21 Não é menor que 19 É menor que 20 Entre 19, 20 É maior ou = a 19, 5 É menor que 19, 7 É menor que 19, 6 É menor que 19, 57 17, 18, 19, 20, 21  É ~~maior~~ menor que 25? Sim É menor que 20? Sim É maior que 19 entre 19 e 20 Não é maior que 19,5? é maior que 19, 3 19,5	Numérico e língua materna	4

Entre]17 e 39[X<25 ~~17~~, ~~18~~, 19, 20, 21, ~~22~~, ~~23~~, ~~24~~, ~~25~~ X<20 X≥19,5 X<19,7 É menor que 19,57 1- É > 25? Ñ 2- É > 21? Ñ 3- é > 18? Sim 4- é > 19,5? ñ 5- é > 19? sim 6- é > 19,3? sim 7- é maior que 19,4? sim 8- é maior que 19,45? sim	Numérico, algébrico e língua materna	12

 	Numérico e algébrico	5

	Numérico	1
Quantidade total de anotações completas		**22**

Quadro 10l. Categoria ‘anotações incompletas’ (atividade 9b)

Exemplos de anotações incompletas	**Domínios utilizados**	**Quantidade de anotações**
	Numérico	2
Quantidade total de anotações incompletas		**2**

Quadro 10m. Categoria ‘ausência de anotações’ (atividade 9b)

Quantidade de alunos que não realizaram anotações	**10**

Analisando as anotações dos alunos, identificamos o recurso, em seus procedimentos de resolução, aos domínios numérico, de língua materna e algébrico. Houve também interação entre o domínio numérico e o de língua materna, entre o numérico, o algébrico e o de língua materna e entre o numérico e o algébrico.

4.4. CONSIDERAÇÕES GERAIS REFERENTES À PROPOSIÇÃO DAS TAREFAS 1, 2 E 3 EM SALA DE AULA

Após havermos lançado nosso olhar sobre as produções dos alunos — tanto suas falas quanto suas anotações — realizadas em cada uma das quatro aulas, dedicamo-nos a analisá-las como um todo.

Nas produções escritas, evidenciaram-se três categorias de anotações, a que denominamos ‘anotações completas’, ‘anotações incompletas’ e ‘ausência de anotações’.

O Quadro 11 apresenta a quantidade de alunos que recorreram a cada uma dessas categorias em cada uma das atividades (atividades 1 a 8) das tarefas 1 e 2, bem como os domínios empregados nessas anotações. Optamos por apresentar nesse quadro somente as atividades das tarefas 1 e 2, uma vez que as dinâmicas utilizadas pelos alunos para realizá-las foram as mesmas, embora com objetivos distintos. Em ambas as tarefas, todos os alunos da classe formaram uma grande equipe que foi desafiada pela professora.

Quadro 11. Categorias de anotações e domínios empregados na resolução das tarefas 1 e 2

		Anotações completas					**Anotações incompletas**		**Ausência de anotações**
		Quantidade de alunos que recorreram ao domínio					**Quantidade de alunos que recorreram ao domínio**		**Quantidade de alunos que não fizeram anotações**
		N	**NM**	**NA**	**NMA**	**NMAG**	**N**	**NM**	
Tarefa 1	**Atividade 1**	2	20	–	1	–	2	3	2
	Atividade 2	–	20	–	8	–	–	2	–
	Atividade 3	2	16	–	10	–	2	–	–
Tarefa 2	**Atividade 4**	3	14	1	13	–	–	–	1
	Atividade 5	5	18	–	8	–	1	–	–
	Atividade 6	3	26	2	–	–	1	–	–
	Atividade 7	4	10	3	13	–	–	–	2
	Atividade 8	5	10	8	6	1	1	–	1

N: domínio numérico.
NM: interação entre o domínio numérico e o da língua materna.
NA: interação entre o domínio numérico e o algébrico.
NMA: interação entre o domínio numérico, o da língua materna e o algébrico.
NMAG: interação entre o domínio numérico, o da língua materna, o algébrico e o geométrico.

Com o quadro permite observar, os alunos recorreram, na realização dessas atividades, aos domínios numérico, de língua materna, algébrico e geométrico. O domínio geométrico, no entanto, foi utilizado por apenas um aluno, na atividade 8.

Observou-se, ainda, que empregaram em seus procedimentos de resolução a interação entre domínios, mais precisamente entre o numérico e o de língua materna, entre o numérico e o algébrico, entre o numérico, o de língua materna e o algébrico ou entre o numérico, o de língua materna, o algébrico e o geométrico.

Nessas interações, os domínios que mais freqüentemente compareceram foram o numérico e o de língua materna (quer apenas esses dois ou em combinação com mais um ou dois domínios).

Grande parte das produções escritas dos alunos foram categorizadas como ‘anotações completas’, o que nos leva a supor que os alunos consideraram importante fazer anotações durante a vivência das atividades. Essa suposição é reforçada pela quantidade ínfima de alunos que não recorreram a anotações (categoria ‘ausência de anotações’).

O Quadro 12, por sua vez, relativo à realização da tarefa 3 (atividades 9a e 9b), apresenta a quantidade de alunos que recorreram a cada uma dessas categorias, considerando-se as produções das equipes emissoras e das equipes receptoras, separadamente, em cada uma das atividades. Constam ainda os domínios empregados pelos alunos em suas anotações, bem como sua quantidade em cada uma das categorias.

A tarefa 3 foi apresentada separadamente nesse quadro pelo fato de que a dinâmica utilizada para sua realização (divisão dos alunos em quartetos ou quintetos, subdivididos em equipes emissoras e receptoras) diferiu da adotada nas tarefas anteriores.

Quadro 12. Categorias de anotações e domínios empregados na resolução da tarefa 3

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="3"></th><th colspan="5">Anotações completas</th><th colspan="2">Anotações incompletas</th><th>Ausência de anotações</th></tr>
<tr><th colspan="5">Quantidade de alunos que recorreram ao domínio</th><th colspan="2">Quantidade de alunos que recorreram ao domínio</th><th rowspan="2">Quantidade de alunos que não fizeram anotações</th></tr>
<tr><th>N</th><th>NM</th><th>NA</th><th>NMA</th><th>NMAG</th><th>N</th><th>NM</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Tarefa 3</td><td rowspan="3">Atividade 9a</td><td></td><td>–</td><td>4</td><td>4</td><td>10</td><td>–</td><td>2</td><td>4</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Total de alunos das equipes emissoras que recorreram à categoria</td><td colspan="5">3</td><td colspan="2">6</td><td>8
(Desses 8 alunos, 3 não entregaram sua folha à professora no final da atividade.)</td></tr>
<tr><td>Total de alunos das equipes receptoras que recorreram à categoria</td><td colspan="5">15</td><td colspan="2">–</td><td>2
(Esses 2 alunos não entregaram sua folha à professora no final da atividade.)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Atividade 9b</td><td></td><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>12</td><td>–</td><td>2</td><td>–</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Total de alunos das equipes emissoras que recorreram à categoria</td><td colspan="5">5</td><td colspan="2">2</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Total de alunos das equipes receptoras que recorreram à categoria</td><td colspan="5">17</td><td colspan="2">–</td><td>–</td></tr>
</table>

N: domínio numérico.
NM: interação entre o domínio numérico e o da língua materna.
NA: interação entre o domínio numérico e o algébrico.
NMA: interação entre o domínio numérico, o da língua materna e o algébrico.
NMAG: interação entre o domínio numérico, o da língua materna, o algébrico e o geométrico.

Com o quadro permite observar, os alunos das equipes receptoras, ao realizarem suas produções escritas, tanto na atividade 9a quanto na 9b, fizeram anotações categorizadas como ‘completas’, contemplando principalmente a interação entre os domínios numérico, de língua materna e algébrico.

Entretanto, a grande maioria dos alunos das equipes emissoras não realizou anotações durante a vivência dessas atividades (categoria ‘ausência de anotações’).

Na realização da tarefa 3 observou-se o emprego dos domínios numérico, de língua materna e algébrico, bem como a interação entre o domínio numérico e o de língua materna, entre o numérico e o algébrico ou entre o numérico, o de língua materna e o algébrico.

É oportuno lembrar, no entanto, que foram promovidas algumas alterações às regras das três tarefas:

a) Diferentemente do que fora inicialmente previsto para as atividades da tarefa 1, alterou-se a regra referente ao tipo de questão permitida aos alunos, não limitando as questões somente às relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’.

b) Na tarefa 2, nas atividades 4, 5 e 6, novamente não se limitaram as questões às relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’. Entretanto, nas atividades 7 e 8 dessa tarefa, as questões foram limitadas a essas relações e também às relações de ordem ‘ser maior ou igual a’ e ‘ser menor ou igual a’.

c) As regras da tarefa 3, por sua vez, foram integralmente preservadas, sendo portanto as questões permitidas aos alunos limitadas às relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’.

Supomos que, com isso, houve intenção de proporcionar maior familiarização dos alunos com as atividades e que, embora essas tarefas tenham sido propostas com tais alterações, ainda se mantiveram coerentes com o quadro teórico adotado por esta pesquisa e com a conduta institucional.

Ao longo de todo o processo de vivência dessas tarefas, observou-se que os alunos possivelmente mobilizaram diversas noções matemáticas, utilizando-as como ferramentas matemáticas, incluindo as noções de média aritmética, segmento, números pares e números ímpares, números positivos e números negativos, relações (‘ser maior que’ e ‘ser menos que’) e relações de ordem (‘ser maior ou igual a’ e ‘ser menor ou igual a’), bem como a noção de sucessor e antecessor e a de intervalos numéricos.

Como evidenciado por suas produções escritas e por suas falas durante a vivência das três tarefas, os alunos possivelmente empregaram em seus procedimentos as estratégias de resolução que foram por nós assim denominadas: ‘corte pelo meio do intervalo’, ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, ‘redução de aproximadamente metade dos números inteiros do intervalo’, ‘desconsideração das regras da atividade’, ‘separação dos números positivos do intervalo’, ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis intervalos’, ‘verificação de um número dentre os possíveis’, ‘verificação de um intervalo dentre os possíveis’ e ‘questão desnecessária’. Dentre estas, predominou o recurso a duas: ‘corte pelo meio do intervalo’ e ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’.

No capítulo seguinte apresentaremos nossas conclusões, tendo em vista nossas intenções de pesquisa.

CAPÍTULO 5 — CONCLUSÕES

Após lançarmos nosso olhar sobre as produções orais e escritas dos alunos durante o processo de vivência das atividades das tarefas 1, 2 e 3 em sala de aula, retomamos nesse capítulo aspectos referentes a nossas intenções de pesquisa.

Com este trabalho, buscamos observar quais foram as ferramentas, procedimentos e domínios (em termos de representação numérica, gráfica e outras) de que os alunos possivelmente lançaram mão no desenrolar de atividades sobre enquadramento de números racionais em intervalos de racionais.

Em concordância com nossas expectativas iniciais, acreditamos que a proposição dessas atividades em sala de aula possibilitou que os alunos fizessem uso de diversos domínios, bem como da interação entre domínios. Foi interessante observar que os alunos apresentaram flexibilidade no recurso a diferentes domínios e na interação entre estes, nas diferentes situações vivenciadas.

Durante a vivência das atividades 1, 2 e 3 (da tarefa 1) observamos que vários alunos recorreram, em suas produções escritas, ao domínio da língua materna, ao numérico e ao algébrico. Houve também interação entre o domínio numérico e o de língua materna e entre o numérico, o algébrico e o de língua materna.

Na proposição das atividades 4, 5, 6, 7 e 8 (da tarefa 2) notou-se o emprego dos domínios da língua materna, numérico, algébrico e geométrico, assim como da interação entre o domínio numérico e o de língua materna, entre o numérico e o algébrico, entre o numérico, o algébrico e o de língua materna e entre o numérico, o algébrico, o de língua materna e o geométrico.

Na realização das atividades 9a e 9b (da tarefa 3) revelou-se, nas produções escritas dos alunos, o emprego dos domínios numérico, de língua materna e algébrico. Houve também interações entre o domínio numérico e o de língua materna, entre o numérico e o algébrico e entre o numérico, o de língua materna e o algébrico.

Diversas noções matemáticas foram utilizadas pelos alunos como ferramentas matemáticas, ora explícita ora implicitamente, durante a vivência das atividades das três tarefas. Foram elas as noções de média aritmética, de números positivos e números negativos, das relações ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’, das relações de ordem ‘ser maior ou igual a’ e ‘ser menor ou igual a’, da relação ‘ser múltiplo de’, de multiplicação de números naturais, de potenciação do número 2, de número ímpar, de número par (com possível falha no significado), de número racional (com possível falha no significado), de segmento e de intervalos numéricos (com significados diferentes entre os alunos da classe).

Observamos que durante todo o desenvolvimento desta pesquisa em sala de aula, deu-se oportunidade para que os alunos explorassem as atividades de cada tarefa, questionando-as e discutindo-as. Foram promovidas explicitações com os alunos em diversos momentos das quatro aulas e também debates, que possibilitaram a difusão, de modo não-homogêneo entre a classe, das ferramentas e domínios que haviam sido por eles mobilizados, em concordância com nossas expectativas com base no quadro teórico empregado neste trabalho.

Outro aspecto que nos chamou a atenção refere-se à participação e espontaneidade dos alunos durante todo o desenvolvimento da pesquisa.

Mostraram-se dispostos e interessados, contribuindo para o bom andamento de nossa investigação, na maior parte do tempo.

Quanto a suas possíveis estratégias de resolução, explicitas ou implícitas, foram adotadas nas tarefas 1 e 2 as de ‘corte pelo meio do intervalo’, ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, ‘redução de aproximadamente metade dos possíveis intervalos’, ‘verificação de um intervalo dentre os possíveis’, ‘verificação de um número dentre os possíveis’ ‘separação dos números positivos do intervalo’ e ‘desconsideração das regras da atividade’. Na tarefa 3, essas estratégias foram reduzidas às seguintes: ‘aproximação do corte pelo meio do intervalo’, ‘corte pelo meio do intervalo’, ‘desconsideração das regras da atividade’ e ‘questão desnecessária’. Essa redução possivelmente se deveu à influência das explicitações e discussões já promovidas.

Acreditamos que o quadro teórico e a metodologia adotada por esta pesquisa nos forneceram importantes elementos para seu desenvolvimento, proporcionando-nos subsídios para respondermos a nossas intenções de pesquisa.

A partir de nossas observações e análises, durante todo o decorrer da investigação, consideramos que nossas expectativas foram correspondidas. Esperamos que com o presente trabalho possamos instigar novas investigações e que tenhamos contribuído para o avanço em Educação Matemática e com a instituição em que se deu nossa pesquisa, tendo em vista nosso compromisso de devolutiva a essa escola de todos os dados colhidos, bem como do presente trabalho.

Por fim, analisando retrospectivamente a presente pesquisa, cabe apontar a pertinência de ulteriores refinamentos de nossas análises, recorrendo ao cruzamento das produções orais e escritas dos alunos resultantes de todo o processo de vivência das tarefas 1, 2 e 3. Considera-se, assim, seu aprofundamento, depreendendo-se, portanto, a viabilidade de novas e futuras pesquisas a serem desenvolvidas a partir desta.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, Marli E.D.A. *Etnografia da prática escolar*. 9. ed. Campinas: Papirus, 2003.

BELAS, J.L. *Estudo de caso na prática educacional*. 1998. Disponível em: <http://www.jlbelas.psc.br/texto15.htm>. Acesso em: 8 fev. 2004.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*. Ensino de primeira a quarta série. Matemática. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Fundamental,1997. p.58-68.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*. Terceiro e quarto ciclos do ensino médio fundamental. Matemática. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Fundamental, 1998. p.100-112.

BRESSAN, Flávio. O método de estudo de caso. *Administração On Line*: prática, pesquisa, ensino, revista eletrônica da Fundação Escola de Comércio Álvares Penteado, São Paulo, v. 1, n. 1, jan./fev./mar. 2000. Disponível em: <http://www.fecap.br/adm_online/art11/flavio.htm>. Acesso em: 1 dez. 2005.

DOUADY, Régine. *Jeux des cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathematiques*. Thèse de Doctorat d'État (specialité: didactique des mathématiques). Université Paris VII, Paris, 1984.

DOUADY, Régine. *Situer une fraction sur un axe gradue diviser un entier A par un entier B*. Public Instituteurs-Professeurs de Mathématiques du Collège, Université Paris VII, févr. 1986. chapitre III, p. 63-76.

IGLIORI, Sonia; MARANHÃO, Cristina; SENTELHAS, Silvia. The meaning of terms concerning the time ordering for first grade students: the influence of cultural background. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION – PME, 2000, Caxambu. *Proceedings...* Hiroshima: Nishiki, 2000. v. 3, p. 3.71-3.77.

LÜDKE, Menga L.; ANDRÉ, Marli. *Pesquisas em educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica Universitária, 1986.

MARANHÃO, Maria Cristina S. de A. *Uma engenharia didática para aprendizagem das concepções de tempo*. 1996. 426 p. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1996. Orientador: Antônio Carlos Ronca.

MARANHÃO, Maria Cristina S. de A. Dialética ferramenta objeto. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Educação matemática*: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 115-134.

MARANHÃO, Maria Cristina S. de A.; IGLIORI, Sonia; SOARES, Elizabeth. A study about the development of knowledge in fifth to eighth graders subjected to the same didactical intervention involving ordering relations. In: INTERNATIONAL

CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICS, 2., 2002, Creta (Grécia). *Proceedings of ICTM2*. Creta: J. Wiley & Sons, 2002. p. 1-10.

MILIES, César Polcino; COELHO, Sônia Pitta. *Números*: uma introdução à matemática. 3. ed. São Paulo: Edusp, 2003. p. 18

SOARES, Elizabeth. *Uma intervenção didática para a aprendizagem do significado amplo da relação de ordem "chegar antes ou junto de" com alunos de 5ª a 8ª séries*. 2002. Tese (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002, p. 2-5. Orientadora: Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR 10520*: Informação e documentação - citações em documentos - apresentação. Rio de Janeiro: ABNT, ago. 2002.

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR 6023*: Informação e documentação - referências - elaboração. Rio de Janeiro: ABNT, ago. 2002.

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR 14724*: Informação e documentação - trabalhos acadêmicos - apresentação. Rio de Janeiro: ABNT, ago. 2002.

MARANHÃO, Maria Cristina S. de A. Projeto: O que se entende por álgebra. In: ENEM, 2004, Recife. *Anais do ENEM*. São Paulo: SBEM, 2004. v. 1, p. 1-16.