JANAINA MARIA LAGE DE SOUZA

ENQUADRAMENTO DE NÚMEROS RACIONAIS EM INTERVALOS DE RACIONAIS: UMA INVESTIGAÇÃO COM PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
PUC-SP
SÃO PAULO
2006

JANAINA MARIA LAGE DE SOUZA

ENQUADRAMENTO DE NÚMEROS RACIONAIS EM INTERVALOS DE RACIONAIS: UMA INVESTIGAÇÃO COM PROFESSORES DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão.

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC-SP

SÃO PAULO

2006

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Maria Cristina S.de A.Maranhão (Orientadora)

Prof.ª Dr.ª Sônia Pitta Coelho

Prof. Dr. Luiz Carlos Pais

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura: Local e data:

Aos que amo,

pela compreensão e incentivo.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, que me guiou em minha trajetória, dando-me coragem para superar meus obstáculos, fazendo da derrota uma vitória, da fraqueza uma força, mostrando-me que não cheguei ao fim e sim ao início de uma longa caminhada.

A Maria Cristina S. de A. Maranhão, por ser um exemplo de dedicação e doação pessoal e por, além de inegavelmente transmitir seus conhecimentos e sua experiência, apoiar-me em minhas dificuldades, orientando-me prontamente durante todas as fases deste trabalho.

A Luiz Carlos Pais e Sônia Pitta, pela atenção e colaboração com essa pesquisa por meio de seus conhecimentos e experiências docentes.

À Professora Anna Franchi, por sua orientação no exame de qualificação.

À escola e às professoras participantes desta pesquisa, pela colaboração e participação fundamentais e pela responsabilidade, comprometimento e presteza durante todo o processo de investigação.

A minha irmã Luciana, por haver-me guarnecido de coragem, estímulos e compreensão, por fazer-se amiga e companheira durante toda essa jornada, por dividir forças tomando como suas as minhas certezas e incertezas, êxitos e frustrações, por comigo completar mais uma etapa.

A meu filho, Junior, dono de meu amor e de minha vida, por me presentear com seu sorriso em momentos difíceis, por manter-se sempre ao meu lado, mesmo que não pudesse proporcionar a ele a dedicação de que é merecedor, por consolar-me com seu amor e compreensão, perdoando minhas ausências.

A meu marido Robert, que acompanhou meus passos mesmo quando foi preciso correr para andarmos juntos, que por muitas vezes compartilhou de meu cansaço e de minhas preocupações, fazendo-se companheiro e essencialmente presente em minha vida, respeitando minhas ausências, amparando-me com sua compreensão, carinho e proteção, dando-me colo e ouvidos, oferecendo-me refúgio e atenções, sendo por muitas vezes o sustento de minha alma.

A minha mãe, por tomar meus sonhos como se fossem seus, por me dedicar palavras carinhosas e amigas, por ceder seu ombro, por ser meu refúgio, por me amparar com seu olhar, por estar presente incondicionalmente em todos os momentos de minha vida.

A meu pai, que com seu estímulo me fez prosseguir, alicerçando-me com sua compreensão, sensatez, dignidade e amor, e por seu apoio irrestrito, tornando possível essa etapa de minha vida.

A meu irmão Renan, por mostrar-me o verdadeiro sentido da palavra 'dedicação', por ser, com sua juventude, um exemplo admirável de empreendimento e determinação, por oferecer sua lucidez, seu sorriso e abraço amigo mesmo que não houvesse tempo para isso.

A meu irmão Bruno, por simplesmente mostrar-me seu amor e sua leveza com um sorriso terno e palavras doces.

A meu amigo Roni, por fazer-se sempre presente e cuidadoso, zelando por minha tranqüilidade, doando seu mais sincero afeto e dedicação.

A João Sampaio, minha mais profunda admiração por seus preciosos ensinamentos, por me ensinar o gosto por pesquisas.

A todos os docentes do programa de pós-graduação em Educação Matemática, por transmitirem, diante do muito que me foi oferecido, seus conhecimentos e experiências profissionais com capacitação, dedicação e empenho.

Aos meus colegas de mestrado, pelos momentos de estudo e companheirismo.

A Gerson Ferracini, por contribuir com sua habilidade com as letras, por revisar este trabalho com competência e por fazer-se, mais que um revisor, um conselheiro.

Amor sem conhecimento é cego,

conhecimento sem amor é inútil.

(Autor desconhecido)

RESUMO

A partir de atividades de Régine Douady (1986) envolvendo enquadramento de números racionais em intervalos, voltadas a alunos franceses do segmento de ensino correspondente ao ensino fundamental do Brasil, realizou-se na presente pesquisa uma atualização dessas atividades, estabelecendo diálogo com pesquisas brasileiras recentes sobre significados atribuídos por estudantes brasileiros do ensino fundamental a relações e relações de ordem e com os Parâmetros Curriculares Nacionais de 1997 e 1998.

Recorrendo-se à metodologia de estudo de caso, e à luz da noção de dialética ferramenta–objeto de Régine Douady (1984), as atividades atualizadas foram apresentadas em oito sessões a duas docentes do ensino fundamental, de sétima e oitava séries, de uma escola privada da cidade de São Paulo, experientes no trabalho com esse quadro teórico, com o objetivo de investigar o que essas professoras levam em consideração ao discutirem e elaborarem planejamentos de aulas referentes a essas atividades.

Foi dada particular atenção às alterações e adaptações feitas por elas a essas atividades, de modo a favorecer sua proposição em sala de aula, tendo em vista sua prática docente, a realidade escolar em que se realizou este estudo, o programa dessa escola, pesquisas recentes realizadas com alunos brasileiros, os Parâmetros Curriculares Nacionais de 1997 e 1998 e o quadro teórico de Douady. Esse processo foi por nós denominado de *reatualização*.

Palavras-chave: enquadramento, números racionais em intervalos de racionais, números inteiros em intervalos de inteiros, planejamentos de ensino, 7.ª série do ensino fundamental, 8.ª série do ensino fundamental.

ABSTRACT

The basis for the present study were the activities developed by Régine Douady (1986) involving the framing of rational numbers on intervals, addressed to French students of the educational segment that corresponds to 1st-8th grades in Brazil. In the present study, those activities were updated taking into account elements from recent Brazilian investigations on the meanings assigned by Brazilian students of 1st-8th grades to relations and to order relations, and elements of the Brazilian Curricular Guidelines of 1997 and 1998.

By applying the methodology of case study, and in the light of the notion of tool–object dialectic of Régine Douady (1984), the updated activities were presented in eight sessions to two mathematics teachers of the 7th and 8th grades in a private school in the city of São Paulo, both of whom were experienced in working with this theoretical framework, with the purpose of investigating what aspects these teachers take into consideration when discussing and developing their lesson plans regarding those activities.

Particular attention was given to the changes and adaptations they made to the activities in order to facilitate their use in the classroom, based on their teaching practice, the actual features of the school and educational system in which this study was conducted, the school's program, recent investigations conducted with Brazilian students, the Brazilian Curricular Guidelines of 1997 and 1998, and the theoretical framework developed by Douady. In the present study, this process has been termed *reupdating*.

Keywords: number framing, rational numbers on rational intervals, integers on integer intervals, teaching planning, 7th grade, 8th grade.

Sumário

INTRODUÇÃO

Esta dissertação é o resultado de uma pesquisa que teve por objetivo apresentar a duas professoras experientes no trabalho com o quadro teórico de Douady (1984), que lecionam em sétima e oitava séries do ensino fundamental, atividades (denominadas por nós de *atividades atualizadas*) envolvendo o enquadramento de números racionais em intervalos de racionais, desenvolvidas com base em atividades originalmente propostas por Régine Douady (1986), em pesquisas brasileiras e nos PCNs (BRASIL, 1997, 1998). Buscou-se, assim, observar as alterações e adaptações que seriam propostas por essas professoras para essas atividades atualizadas, visando sua proposição em sala de aula (processo esse que denominamos de *reatualização* dessas atividades). O trabalho foi conduzido em uma escola da rede privada na cidade de São Paulo.

O Capítulo 1 apresenta a problemática, considerada sob o enfoque dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 1998), do quadro de pesquisas relacionadas com o tema e de nossas intenções de pesquisa.

O Capítulo 2 focaliza o quadro teórico que embasa a problemática, discorrendo sobre as referências que o compuseram — quais sejam, as relativas aos elementos da noção de dialética ferramenta–objeto, de Douady (1984).

O Capítulo 3 trata das escolhas teórico-metodológicas.

O Capítulo 4 apresenta a realização da pesquisa na escola escolhida.

Por fim, o Capítulo 5 expõe as conclusões, bem como uma súmula das observações obtidas durante todo o processo de investigação.

CAPÍTULO 1 — PROBLEMÁTICA

Investigações realizadas em um amplo projeto desenvolvido pelo grupo de pesquisa G5 – Educação Algébrica, do Programa de Estudos de Pós-graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, do qual esta pesquisadora faz parte, abarcam a teoria dos números (aritmética) e a álgebra, enfatizando estudos sobre suas dimensões, visões e tendências no ensino, assim como seus reflexos na aprendizagem. Enfatizam também as relações entre as noções e as concepções matemáticas apresentadas por alunos e por professores, em diversos segmentos de ensino, quanto a números, equações e inequações, e também apontadas em documentos curriculares.

Estudos realizados por esse grupo fornecem indícios sobre a relevância da abordagem dos números racionais no ensino fundamental (primeira a oitava séries), bem como do trabalho que focaliza relações e relações de ordem. Em pesquisa recente, Maranhão *et al*. (2002) investigaram os significados atribuídos por alunos de quinta a oitava séries do ensino fundamental a relações de ordem tais como ‘chegar antes ou ao mesmo tempo que’ e para relações como ‘chegar antes de’, ao resolverem problemas de ordenação.

A importância de que alunos do primeiro ciclo (primeira e segunda séries) do ensino fundamental lidem com relações numéricas como ‘maior que’, ‘menor que’ e ‘estar entre’, no conjunto dos números naturais, é apontada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de primeira a quarta séries do ensino fundamental (BRASIL, 1997), assim como a necessidade de que desenvolvam, até o final desse ciclo, a capacidade de ordenar quantidades e localizar números naturais em intervalos numa seqüência numérica.

Para o segundo ciclo (terceira e quarta séries), os PCNs de 1997 (BRASIL, 1997) propõem ampliar conceitos abordados no ciclo anterior, como por exemplo o de número natural, bem como desenvolver a capacidade de ordenar e comparar esses números e de estabelecer relações, viabilizando a introdução de outros novos conceitos, como o de número racional.

Como outros conteúdos a serem desenvolvidos, apontam também a comparação, a ordenação e a localização de números racionais na forma decimal em intervalos e na reta numérica. Observa-se, assim, que esses PCNs preconizam a necessidade de abordar a localização de números racionais em reta numérica em situações em que os intervalos já estão dados. No entanto, não se referem a atividades em que o aluno seja responsável pelo fornecimento de intervalos (cada vez menores) que enquadrem um determinado número.

Ainda segundo a mesma fonte, a introdução da abordagem dos números racionais no segundo ciclo possibilita a percepção de que os números naturais são insuficientes para a resolução de determinados problemas, fazendo com que a ampliação dos conjuntos numéricos se revele necessária para a obtenção de respostas. Ainda de acordo com os mesmos PCNs, os números racionais são identificados como quocientes de números naturais. O trabalho com números inteiros negativos não é sugerido para esse ciclo, mas é indicado somente o trabalho com números naturais.

A mesma fonte relata algumas das dificuldades enfrentadas pelos alunos ao tentarem abordar os números racionais como se fossem números naturais:

> – um deles está ligado ao fato de que cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias; por exemplo, 1/3, 2/6, 3/9 e 4/12 são diferentes representações de um mesmo número;
>
> – outro diz respeito à comparação entre racionais: acostumados com a relação 3 > 2, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, 1/3 < 1/2;
>
> – se o “tamanho” da escrita numérica era um bom indicador da ordem de grandeza no caso dos números naturais (8 345 > 41), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece o mesmo critério; [...]
>
> – se a seqüência dos números naturais permite falar em sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87. (BRASIL, 1997, p. 67)

Os PCNs de quinta a oitava séries do ensino fundamental (BRASIL, 1998), seguindo as orientações mencionadas na edição anterior (BRASIL, 1997), salientam, em decorrência das dificuldades acima mencionadas, que:

> Embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial, os que envolvem os racionais na forma decimal. (BRASIL, 1998, p. 100)

Os PCNs de 1998 aconselham para o terceiro ciclo (quinta e sexta séries) o trabalho de localização de números racionais na reta numérica e o desenvolvimento da compreensão de que esses números podem ser escritos sob forma fracionária e sob forma decimal, possibilitando que relações entre números nessas representações sejam estabelecidas. O aluno deverá ser capaz, nesse ciclo, ainda de acordo com os mesmos PCNs, de comparar e ordenar não somente números naturais, mas também números inteiros e racionais.

Para o quarto ciclo (sétima e oitava séries), a mesma fonte (BRASIL, 1998) ressalta a relevância de ampliar e consolidar os conteúdos anteriormente trabalhados relativos a números racionais, e de elaborar, compreender e resolver novas situações-problema envolvendo os conjuntos dos números naturais, inteiros e racionais.

Outro aspecto a ser mencionado refere-se à ênfase atribuída pelos PCNs de 1998 (BRASIL, 1998) ao desenvolvimento da capacidade de investigação com o uso de estratégias de obtenção, verificação e controle de resultados, assim como à relevância da atividade coletiva, visando a promoção dessa atividade, por meio da criação de estratégias de resolução. Isso é condizente com as idéias de Régine Douady[1] (1986).

A proeminência atribuída pelos PCNs ao estudo dos números racionais é elucidada nesta passagem:

> Embora o contato com representações fracionárias seja bem menos freqüente nas situações do cotidiano seu estudo também se justifica, entre outras razões, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico) [...]. (BRASIL, 1998, p. 103)

Entretanto, nenhuma das versões dos PCNs mencionadas (BRASIL, 1997, 1998) faz menção ao trabalho com relações de ordem para alunos do ensino fundamental.

Soares (2002) ressalta que:

> A relação de ordem, no ambiente escolar, apresenta características peculiares. Em seu aspecto numérico, é explorada desde os primeiros

[1] Régine Douady é citada como fonte nos PCNs (BRASIL, 1998, p. 144): “Douady, R. De la didactique des mathémathiques a l’heure actuelle. *Cahier de didactique des mathématiques.* IREM, Université Paris VII, n. 6, s/d”.

> estágios de aprendizado, (como na ordenação dos números naturais). Relações de ordem não-numéricas, no entanto, são abordadas de maneira descontínua ao longo dos anos do ensino básico. (SOARES, 2002, p. 2)

Em pesquisa realizada sobre as diversas concepções de alunos de 9 a 12 anos sobre ordenação no tempo, Maranhão (1996) observou que estes mostram dificuldades no uso das relações ‘chegar antes de’ e ‘não chegar depois de’ quando estas são utilizadas em seu sentido restrito, verificando-se também confusão entre as expressões ‘chegar adiantado’ e ‘chegar atrasado’. Observou ainda a autora que essas deficiências podem levar a um comprometimento das representações em reta numérica, por requerem dos alunos a compreensão de propriedades de ordenação, acarretando a necessidade do empreendimento de novas investigações. Supusemos, portanto, a partir dessa pesquisa, que entre alunos brasileiros de sétima série do ensino fundamental pudesse haver deficiências nos conceitos e/ou propriedades de relações de ordem, além de dificuldades em representações em reta numérica.

Utilizando problemas sem referência numérica, Igliori *et al*. (2000) investigaram significados atribuídos às relações de ordem por alunos de 10 e 11 anos de idade, de quinta série do ensino fundamental. Procuraram, assim, observar se:

> [...] há ou não impregnação do uso cotidiano nas concepções dos estudantes, com o propósito de saber se eles podem atribuir significado amplo a termos como “*chegar antes de*”, ou se, ao contrário, só atribuem significado restrito, usando o termo “*chegar antes de*” como “*chegar imediatamente antes de*” na solução de um problema envolvendo relações de ordem e sem referências numéricas; se é ou não plausível aos alunos chegarem à conclusão de que “*chegar junto de*” é estabelecer comparação na relação de ordem “*chegar antes ou junto de*”; se os alunos atribuem ou não significado amplo às negações desses termos (“*não chegar depois de*”

> significa “*chegar antes de ou chegar junto de*”). (IGLIORI *et al.*, 2000, p. 3.71-3.77)

Desse modo investigaram:

a) se os alunos podem atribuir significado amplo a designações como ‘chegar antes de’ ou se, ao contrário, só lhes atribuem significado restrito, empregando a designação ‘chegar antes de’ como ‘chegar imediatamente antes de’, em situações de resolução de problemas envolvendo relações de ordem sem referência numérica;

b) se os alunos atribuem ou não significado amplo às negações dessas relações (‘não chegar depois de’ significando ‘chegar antes de’ ou ‘ao mesmo tempo que’).

Os problemas propostos por essa pesquisa não apresentavam referências numéricas, por considerarem as autoras que os números poderiam constituir fonte de erros ou limitar os significados atribuídos aos termos relativos ao tempo. Concluiu-se, com essa pesquisa, que esses alunos de quinta série não admitiam ‘chegar ao mesmo tempo que’ como uma ordenação, atribuindo significado restrito aos termos relativos a tempo.

Como citado anteriormente, Maranhão *et al.* (2002) investigaram se alunos de quinta a oitava séries apresentavam dificuldade para atribuir significado amplo a relações de ordem tais como ‘chegar antes de’ ou ‘ao mesmo tempo que’ e a relações como ‘chegar antes de’ ao resolverem problemas de ordenação. Observaram também se a progressão do conhecimento desses alunos ocorria similarmente nas diferentes séries; para tanto foi utilizado o mesmo processo de intervenção didática.

As autoras constataram os seguintes aspectos:

a) Não houve, no pré-teste, diferença no padrão de respostas entre os alunos das diversas séries.

b) Após a intervenção didática, os resultados apresentados pelos alunos de sexta a oitava séries foram diferentes e melhores que os de quinta série.

c) Mesmo depois da intervenção didática, faziam-se notar dificuldades nas relações de ordem ‘chegar antes de’ ou ‘ao mesmo tempo que’ ou ‘não chegar depois de’.

Tendo em vista as investigações mencionadas e a carência[2] de pesquisas brasileiras sobre o tema, evidenciam-se a necessidade e a pertinência de novas pesquisas que abordem relações de ordem por meio da vivência de atividades sobre o enquadramento de números racionais utilizando referências numéricas.

Para alcançar nossos objetivos de pesquisa, apoiamo-nos fundamentalmente no quadro teórico de Douady (1984) e em suas atividades (DOUADY, 1986) direcionadas a alunos franceses do segmento de ensino correspondente ao ensino fundamental do Brasil, atividades essas voltadas ao enquadramento[3] de números racionais usando referências numéricas. Para isso, consultamos pesquisas brasileiras recentes sobre os significados atribuídos por estudantes brasileiros do ensino fundamental a relações e relações de ordem. Consultamos também os PCNs do primeiro e segundo ciclos (BRASIL, 1997) e do terceiro e quatro ciclos (BRASIL, 1998) do ensino fundamental a respeito de

---

[2] Buscas realizadas em bancos de dissertações e teses com palavras-chave sobre os temas ‘enquadramento de números racionais em intervalos’ e ‘relações de ordem’ revelaram a carência de pesquisas brasileiras sobre esses temas.

[3] *Enquadramento*: Ato ou efeito de enquadrar(-se). *Enquadrar*: 1. Meter em quadro, encaixilhar, emoldurar. 2. Tornar quadrado. 3. Guarnecer em volta [...]. 11. Ajustar-se, quadrar-se. (FERREIRA, A.B.H. *Novo Aurélio século XXI*: o dicionário da língua portuguesa. 3. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999. p. 763.)
Encadrement: de encadrer – 1) Action d’entourer, d’orner d’un cadre (un tableau, une photo, etc.) [...] 5) MATH. Encadrement d’um nombre réel: intervalle donnant les limites inférieure et supérieure entre lesquelles est compris le réel. “Les encadrement du résultat d’un calcul par deux valeurs approchées. REY-DEBOVE, Josette; REY, Alain. (Eds.). *Le nouveau petit Robert*: dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française. 2. ed. Nouvelle édition remaniée et amplifiée. Paris: Dictionnaires le Robert, 1993. p. 751.)

conceitos e procedimentos requeridos em atividades de enquadramento de números racionais entre números racionais com as quais esses estudantes pudessem ter tido contato.

Com base em sua noção de dialética ferramenta–objeto (DOUADY, 1984), as atividades propostas por Douady (1986) sobre enquadramento de números racionais em intervalos visam situar um dado número fracionário num eixo graduado. A pesquisadora inicia abordando o enquadramento de números racionais sob forma fracionária entre dois números inteiros, supondo a utilização de equivalência de frações que deverão ser comparadas a números inteiros para a resolução das atividades propostas. Para tanto, requer-se o estabelecimento de relações tais como ‘ser menor que’ e ‘ser maior que’ e de relações de ordem tais como ‘ser maior ou igual a’ e ‘ser menor ou igual a’ entre números racionais. As atividades também podem requerer representações em reta e conversões de representação decimal e fracionária de números racionais.

Posteriormente, busca-se alcançar maior complexidade das atividades, abordando o enquadramento de números racionais sob forma fracionária entre racionais também sob forma fracionária, com o propósito de obter intervalos cada vez menores. A representação decimal é abordada somente após o desenvolvimento do trabalho com representações fracionárias.

A dinâmica das atividades de Douady (1986) é prevista de modo que os participantes sejam divididos em duas equipes — equipe contra equipe ou equipe de dois alunos contra toda a classe —, sendo a fração a trabalhar escolhida pelos próprios alunos. Isso é mantido durante todas as etapas.

Na primeira etapa das atividades, supõe-se que os alunos percebam as facilidades advindas da escolha de uma fração com denominador potência de 10 (representação fracionária). Visa-se, assim, familiarizar os alunos com as atividades, buscando-se, durante todo o desenvolvimento, situar e não adivinhar a fração escolhida. Na etapa seguinte, o objetivo é a obtenção de intervalos cada vez menores.

É interessante observar que nessa pesquisa, desenvolvida na França, Douady não se restringe apenas ao enquadramento de números racionais compreendidos entre dois números inteiros, mas apresenta também uma análise *a priori* de atividades sobre enquadramento de números racionais compreendidos por dois números racionais.

Em nosso trabalho, realizamos, em um primeiro momento, uma atualização[4] das atividades criadas por Douady (1986), já citadas, frente a pesquisas recentes, a propostas curriculares nacionais e institucionais e à prática relatada por professores brasileiros.

Posteriormente, em encontros realizados com duas professoras de matemática — uma das quais, no ano em que participaram da presente pesquisa, lecionava para sétima série e a outra para oitava —, promoveram-se discussões que favorecessem a elaboração de alterações e adaptações das atividades anteriormente atualizadas, de modo a reatualizá-las para favorecer sua proposição aos alunos. Teve-se em conta que o quadro teórico adotado na instituição era coerente com o utilizado nesta pesquisa.

Os propósitos de nossa pesquisa foram os de investigar o que dizem duas professoras brasileiras de sétima e oitava séries do ensino fundamental ao

[4] Atualização: subjetivação que diz respeito às subjetividades sensoriais. Segundo Stéphane Lupasco, “o sujeito é o lugar das atualizações, assim como tudo o que se atualiza é o lugar do sujeito, é a obra do sujeito, agente atualizador [...] somos inconscientes do que é atualizado automaticamente. Toda atualização é inconsciente, mas traz com ela uma consciência de algo, a criação mental de um objeto exterior, objeto das sensações em estado de potencialidade” (LUPASCO, S. *L’homme et sés trois éthiques*. Paris: Rocher, 1986. p. 24).

discutirem e elaborarem planejamentos de aulas referentes a atividades que envolvem o enquadramento de números racionais em intervalos de racionais.

Em nosso trabalho, contamos com a participação de duas professoras que lecionavam em uma mesma escola particular da cidade de São Paulo. Para essa escolha, consideramos a ampla experiência profissional de ambas e a utilização do quadro teórico de Douady (1986) por elas. Levamos em conta também as diretrizes dos PCNs (BRASIL, 1997) acerca da abordagem dos números racionais no início do segundo ciclo, estendendo-se aos demais. Esse aspecto é assim exposto:

> O segundo ciclo tem como característica geral o trabalho com atividades que permitem ao aluno progredir na construção de conceitos e procedimentos matemáticos. No entanto, esse ciclo não constitui um marco de terminalidade da aprendizagem desses conteúdos, o que significa que o trabalho com números naturais e racionais [...] deverá ter continuidade, para que o aluno alcance novos patamares de conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 58)

Considerando a singularidade do trabalho dessas docentes, o objetivo principal de nossa pesquisa desdobra-se nas seguintes questões intrínsecas ao quadro teórico:

a) Essas docentes de matemática de sétima e oitava séries do ensino fundamental estão habituados a trabalhar com enquadramento de números racionais em intervalos? Qual a importância atribuída por elas a esse trabalho?

b) Consideram elas que essas diversas atividades podem contribuir para o avanço dos conhecimentos de alunos? Em quais domínios?

c) Consideram elas que essa é uma proposta viável para sala de aula?

d) Quais são as possíveis alterações propostas por essas docentes para essas atividades sobre enquadramento de números racionais em intervalos, na elaboração e planejamento de aulas para as séries nas quais vêm lecionando?

e) Quais são os argumentos que utilizam para as alterações que propõem? Em que são embasados esses argumentos? Em sua própria experiência? Em pesquisas? Em documentos?

f) Essas alterações são coerentes com o quadro teórico de Douady? E com as pesquisas recentes? E com os PCNs? E com o programa escolar? E com sua prática docente?

CAPÍTULO 2 — QUADRO TEÓRICO

2.1. ELEMENTOS DA DIALÉTICA FERRAMENTA–OBJETO E DA INTERAÇÃO ENTRE DOMÍNIOS

A dialética ferramenta–objeto desenvolvida por Douady (1984) embasou-se em pesquisas sobre o desenvolvimento de noções matemáticas utilizadas por alunos a partir da resolução de seqüências de atividades, considerando o pressuposto de que as noções e teoremas matemáticos que eles utilizam são ferramentas. Através da caracterização desses teoremas e noções como parte integrante de um corpo reconhecido social e cientificamente, e da conseqüente constituição de definições, enunciações e demonstrações de teoremas desse corpo, têm-se os objetos.

A dialética ferramenta–objeto de Douady consiste numa organização esquemática que, para a solução de um dado problema em uma situação de aprendizagem, se desenvolve em diversas fases, assim denominadas: *antigo, pesquisa, explicitação, novo implícito, institucionalização, reinvestimento* e *novo problema*.[1]

A primeira fase, denominada *antigo*, caracteriza-se pela utilização de conhecimentos antigos (objetos de saber matemático com estatuto de ferramentas) na resolução de problemas, com o propósito de resolvê-los ao menos parcialmente.

A segunda fase, denominada *pesquisa*, compreende a tendência a utilizar novos conhecimentos implicitamente, diante da possível dificuldade apresentada

---

[1] Entretanto, discorreremos apenas sobre algumas delas, levando em conta o que as professoras participantes expressaram como ocorrências a serem esperadas, em sala de aula, ao proporem aos alunos as atividades por nós apresentadas nesta pesquisa.

pelos alunos em resolver a atividade por completo. Entretanto, o professor tem, durante essa fase, condições de apontar e caracterizar os novos conhecimentos que possivelmente estejam sendo criados. Os alunos, mesmo não sabendo enunciar tais conhecimentos, têm consciência de que são novos. Torna-se então possível o surgimento de novos questionamentos feitos pelos alunos, os quais são quais levados a buscar novos meios de resolução. Há também a possibilidade de promover discussões, a partir das quais os novos conhecimentos podem se mostrar conflitantes ou não com os antigos.

Nessa fase, segundo Maranhão (1996), pode haver dificuldades para resolver completamente o problema proposto, seja porque a estratégia disponível é muito custosa (em número de operações, risco de erros, incertezas do resultado), seja porque ela não funciona. Nesse caso, os alunos são conduzidos a pesquisar outros meios que se adaptem à situação. Reconhece-se, com isso, o início de uma fase de ação.

Durante essa fase, os alunos poderão usar, por exemplo, representações numéricas ou gráficas criadas por eles mesmos, como meios para resolver o problema. Podem também ser instigados a isso. O professor deverá sempre respeitar a liberdade dos alunos, promovendo tais situações quando as julgar pertinentes.

Na terceira fase, denominada *explicitação*, ocorre a descrição dos resultados obtidos durante as atividades, das dificuldades encontradas e dos procedimentos utilizados no desenrolar destas, através de discussões promovidas pelo professor. Este pode ressaltar os conhecimentos antigos e novos (ainda que implicitamente empregados) e as possíveis contradições ou erros, segundo sua análise da situação da classe. Propiciam-se, nesse momento, condições para que os alunos formulem idéias, validando-as e aceitando-as ou refutando-as.

Durante a realização das fases citadas acima, podem ocorrer situações de bloqueio ou sua iminência, cabendo ao professor intervir quando necessário, elucidando questões ou introduzindo noções, a partir de visões errôneas dos alunos, e até mesmo propondo novos problemas que considere mais simples e com potencial de promover a evolução de conhecimentos dos alunos, sempre priorizando a liberdade destes e respeitando os objetivos da atividade proposta.

Sobre a quarta fase, denominada *novo implícito,* Maranhão (1999) aponta a possibilidade de que certos elementos venham a ser formulados pelos alunos como objetos de conhecimento matemático (conceitos, propriedades ou procedimentos), com sua condição de emprego no momento.

Os novos elementos referidos anteriormente podem ser validados ou não pelos alunos por meio de ação, valendo-se das condições propiciadas pelo professor. Observa-se, contudo, que tais elementos nem sempre são suficientes ou possíveis para uma determinada situação.

Segundo Maranhão (1999):

> De acordo com Douady, é necessário que os problemas fornecidos envolvam, pelo menos dois domínios, de modo que um sirva de referência ao outro e possibilitem meios de validação pela ação.
>
> Os *domínios*, referidos no parágrafo anterior, por vezes, são ramos de conhecimento matemático (numérico, geométrico, algébrico, das grandezas...) e, por vezes, parte deles. As representações em retas graduadas ou em gráficos cartesianos são freqüentemente utilizadas, nas obras de Douady (1987, 1989) e de Perrin-Glorian (1986, 1987), para colocar em jogo conhecimentos desses domínios.

> [...] Das obras da pesquisadora, depreende-se que, conforme a problemática da pesquisa e os conhecimentos que se quer criar, engendram-se as seqüências de situações a serem propostas aos alunos e, de seus aspectos relevantes, são eleitos os *domínios.*
>
> É precisamente pelo fato de os *conhecimentos* de um certo *domínio* não serem suficientes para avançar, numa situação, que o aluno lança mão de conhecimentos de outros domínios.
>
> Esses *conhecimentos* são *conceitos*, *propriedades* e *procedimentos matemáticos*, com sua condição de emprego no momento. E são essas idas e vindas entre domínios diferentes as responsáveis pelo avanço de seus conhecimentos. (MARANHÃO, 1999, p. 118, 119)

A autora esclarece ainda:

> Em situações para o ensino infantil ou fundamental, Douady (1984), por vezes, considera como *domínio*, o das representações (incluindo diversos códigos, registros ou desenhos que esses alunos lancem mão para conduzir um procedimento de solução de um problema) ou, até mesmo, o que denomina domínio material, contemplando aí o que esses alunos obtêm das ações físicas sobre objetos. (MARANHÃO, 1999, p. 119)

Maranhão (1996) enfatiza, além disso, que se pode considerar a existência de um estado não-homogêneo de conhecimentos entre os diversos domínios, que varia não só para um mesmo aluno, mas também de um aluno a outro. Disso conclui-se que há uma diferença entre o que o professor gostaria que os alunos soubessem, o que ele toma como pré-requisito para o ensino de determinado assunto e o que cada aluno conhece realmente, para utilização em novas aprendizagens. Por isso, para introduzir e suscitar o funcionamento da interação entre domínios é conveniente escolher alguns problemas nos quais ao menos dois domínios possam intervir.

Focalizamos em nossa pesquisa atividades que não introduzem nem um método nem sua solução, de modo que a contribuição do grupo propicie a elaboração de conjecturas e o conseqüente desenvolvimento da solução.

O quadro teórico em questão abrange também as noções de *ferramenta implícita* e *ferramenta explícita*, que são, respectivamente, noções matemáticas implícitas e explícitas utilizadas na resolução de problemas matemáticos pelos alunos.

Esse quadro teórico inclui também as noções de dialética ferramenta–objeto e de interação entre domínios, isto é, dos diferentes domínios empregados na realização de atividades por alunos. Dos recursos previstos de serem por eles utilizados, talvez as representações em reta tenham um papel central, ou talvez a representação de intervalos no domínio numérico se mostre suficiente. Há a possibilidade, ainda, de prever a utilização de outros domínios, como o algébrico e o físico — dramatização corporal —, assim como outros domínios inesperados que possam emergir durante a realização integral das atividades. Portanto, as atividades em questão podem vir a comportar domínios diversos.

As fases da dialética ferramenta–objeto também foram usadas para proporcionar elementos de análise das ações e falas das professoras sobre previsões de procedimentos e de uso de ferramentas por seus alunos.

Na interação entre as participantes desta pesquisa, as idéias expressas por elas puderam chegar a mostrar-se conflitantes. Durante as sessões de apresentação das atividades, bem como nas sessões em que se elaboram alterações e adaptações, a pesquisadora pôde propor debates e também intervir, quando necessário, com questões ou sugestões, incentivando as demais participantes a continuar em atividade de pesquisa e debate.

Considerando o quadro teórico de Douady (1984), podemos ressaltar, segundo Maranhão (1996), que uma situação de aprendizagem é caracterizada por um problema e por uma certa organização de trabalho, adaptada aos objetivos visados. Desse fato, depreende-se que os conhecimentos advêm da interação dos alunos ao vivenciarem as atividades propostas, proporcionando-lhes a mobilização dos conhecimentos adquiridos anteriormente, assim como suas possíveis modificações, ampliações e rejeições.

Optamos, para responder a nossas indagações, pela utilização da metodologia apresentada no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 3 — ESCOLHAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS

Ao escolhermos a escola em que nossa pesquisa foi desenvolvida, nos preocupamos essencialmente em encontrar um estabelecimento de ensino que estivesse de acordo com nossa proposta de investigação, bem como com o quadro teórico por nós utilizado.

Foi escolhida uma escola particular da cidade de São Paulo, que demonstrou interesse e disponibilidade de participar de nossa investigação. Estabeleceu-se um contato inicial com a direção e coordenação/assessoria de matemática da instituição, as quais se mostraram favoráveis e dispostas a participar da pesquisa, visto que a prática do desenvolvimento de estudos é habitual nessa escola.

Participaram da pesquisa duas experientes professoras de matemática, já habituadas a trabalhar no quadro teórico de Douady. Essas professoras lecionam tanto para a sétima quanto para a oitava séries do ensino fundamental, sendo que nesse ano uma tinha classes de sétima e a outra de oitava série.

Nos contatos, a coordenadora/assessora de matemática da escola nos relatou que ambas as professoras contavam com ampla experiência docente, e nos mostrou os planos de aulas, de anos anteriores, dessas docentes. Nessa ocasião, pudemos observar que o trabalho com enquadramento de números racionais em intervalos havia sido contemplado nos planos de aulas da professora de oitava série quando ministrou aulas na sétima, embora não nos da professora que ministrava aulas de sétima nesse ano.

Convém ressaltar também que, para a escolha dessas docentes, mantivemos com elas conversas informais, em que se mostraram receptivas e interessadas em nossa investigação.

Durante o desenvolvimento da pesquisa no ambiente escolar, foram realizadas oito sessões, as quais foram gravadas e anotadas por uma observadora. As sessões ocorreram de acordo com a disponibilidade das professoras e tiveram duração de aproximadamente 1 h 30 min cada uma. Em cinco das sessões, contamos com a participação simultânea das duas professoras de matemática; nas demais, a presença foi individual.

Em alguns desses encontros, contamos também com a presença da coordenadora/assessora de matemática, o que ocorreu sempre que dispôs de horários.

Para o desenvolvimento desta investigação, realizamos uma pesquisa qualitativa, na forma de estudo de caso. A noção de dialética ferramenta–objeto, do quadro teórico utilizado, foi escolhida devido à importância atribuída a ela pelas participantes desta investigação e devido à oportunidade de pesquisa e de explicitação na resolução de problemas, assim como à importância de se promoverem debates, proporcionando aos envolvidos integração e possibilidade de reflexão sobre as estratégias empregadas durante todo o processo de investigação.

Segundo Lüdke e André (1986) e André (2003), o estudo de caso caracteriza-se como um estudo aprofundado, dada a complexidade e o dinamismo próprio da situação abordada, fornecendo informações relevantes para a tomada de decisões. Essa metodologia proporciona ao pesquisador condições de fazer descobertas e observações referentes tanto a novos fatores quanto a outros aspectos relevantes que podem emergir durante a realização da pesquisa.

Segundo Lüdke e André (1986):

> Mesmo que o investigador parta de alguns pressupostos teóricos iniciais, ele procurará se manter constantemente atento a novos elementos que podem emergir como importantes durante o estudo [...] novos aspectos poderão ser detectados, novos elementos ou dimensões poderão ser acrescentados, na medida em que o estudo avance. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 18)

Ressaltam ainda que:

> Um princípio básico desse tipo de estudo é que, para uma apreensão mais completa do objeto, é preciso levar em conta o contexto em que ele se situa. Assim, para compreender melhor a manifestação geral de um problema, as ações, as percepções, os comportamentos e as interações das pessoas devem ser relacionadas à situação específica onde ocorrem ou à problemática determinada a que estão ligadas. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 18)

Considerando-se que no estudo de caso se pressupõe que o conhecimento está em constante construção, fazendo-se e refazendo-se ao longo de todo o processo, torna-se pertinente ao pesquisador buscar novas respostas e questionamentos, visando o desenvolvimento da pesquisa. Portanto, destaca-se a importância atribuída ao processo como um todo, e não somente ao resultado final, considerando a perspectiva e a interação dos sujeitos envolvidos e a possibilidade do contato direto entre eles e o pesquisador.

André (2003) aponta, no estudo da prática escolar cotidiana, a relevância de:

> [...] um contato direto com a direção da escola, com o pessoal técnico-administrativo e com os docentes, por meio de entrevistas individuais ou coletivas ou mesmo de conversas informais, um estudo das representações dos atores escolares, além de um acompanhamento das reuniões e atividades escolares. (ANDRÉ, 2003, p. 43)

Segundo Lüdke e André (1986), a observação também pode ser considerada como um meio que possibilita amplo e direto contato entre o pesquisador e os sujeitos da pesquisa. Por ser um meio privilegiado de coleta de dados nas novas abordagens de pesquisa educacional, a observação pode ser usada como importante instrumento de investigação, opcionalmente vinculada a outros meios de coleta de dados.

Ressalta-se assim a pertinência da observação cuidadosa, pelo pesquisador, dos participantes da pesquisa durante todas as etapas, de modo a promover o desenvolvimento natural e espontâneo dos relatos e produções destes, podendo também propiciar-lhes liberdade para que expressem seus próprios argumentos e informações, quando julgarem conveniente e relevante essa expressão.

Ainda segundo Lüdke e André (1986):

> Com essa variedade de informações, oriundas de fontes variadas, ele [o pesquisador] poderá cruzar informações, confirmar ou rejeitar hipóteses, descobrir novos dados, afastar suposições ou levantar hipóteses alternativas. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 19)

Com o desenvolvimento do estudo de caso, também segundo as mesmas autoras, algumas questões vão se delineando, enquanto outras podem ser reformuladas ou desconsideradas, dependendo de sua relevância no contexto. Isso permite ao pesquisador rever e refinar o problema inicial da pesquisa.

O pesquisador é o principal instrumento durante a coleta de dados. Segundo André (2003):

> Os dados são mediados pelo instrumento humano, o pesquisador. O fato de ser uma pessoa o põe numa posição bem diferente de outros tipos de

> instrumentos, porque permite que ele responda ativamente às circunstâncias que o cercam. (ANDRÉ, 2003, p. 28)

Câmeras de vídeo podem ser utilizadas como recurso de coleta de dados, enquadrando o corpo e a face dos sujeitos da pesquisa e possibilitando registrar as interações entre estes. Aspectos comportamentais particulares dos sujeitos, assim como diversos dados descritivos, tais como situações, depoimentos, diálogos e conversas informais, podem ser também observados.

Segundo André (2003):

> A abordagem do estudo de caso vem sendo usada há muitos anos em diferentes áreas do conhecimento como medicina, psicologia, serviço social, enfermagem, em que se faz o estudo exaustivo de um caso, geralmente um indivíduo bastante problemático, para fins de diagnose, tratamento ou acompanhamento. Já na área de administração, o estudo de caso tem servido para estudar o funcionamento de uma instituição e determinar focos de mudança ou de intervenção. Em direito ele também tem uma larga tradição, destinando-se geralmente à ilustração dos procedimentos legais utilizados na resolução de um problema jurídico. (ANDRÉ, 2003, p. 30)

Em publicação destinada a psicólogos, Belas (1998) relata que o estudo de caso caracteriza-se por uma convergência de informações de naturezas distintas, informações estas relacionadas com vivências e compartilhamento de experiências dos participantes da pesquisa, objetivando-se a compreensão de um determinado fenômeno, que é foco da observação. Essa metodologia propicia maior compreensão de uma determinada situação vivenciada pelos participantes.

Essas situações, referidas por Belas (1998) como momentos, são eventos contemporâneos, os quais Yin[1], citado por Bressan (2000), afirma que podem ser observados diretamente através de entrevistas.

Ainda segundo Bressan (2000), Yin ressalta que o estudo de caso caracteriza-se pela capacidade de lidar com uma completa variedade de evidências — documentos, artefatos, entrevistas e observações.

Segundo Lüdke e André (1986):

> Tratando-se de pesquisas sobre o ensino, [...] a formação de professores, o planejamento do ensino, [...], enfim, toda essa vasta rede de assuntos que entram no dia-a-dia do sistema escolar, podemos estar seguros de que, ao entrevistarmos professores, [...] não lhes estaremos certamente impondo uma problemática estranha, mas, ao contrário, tratando com eles de assuntos que lhes são muito familiares sobre os quais discorrerão com facilidade. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p.35-36)

Com o intuito de tornar a pesquisa válida e fidedigna, a investigadora planejou previamente a situação, de modo cauteloso e sistemático. Segundo Lüdke e André (1986):

> Planejar a observação significa determinar com antecedência “o que” e “o como” observar. A primeira tarefa, pois, no preparo das observações é a delimitação do objeto de estudo. Definindo-se claramente o foco da investigação e sua configuração espaço-temporal, ficam mais ou menos evidentes quais aspectos do problema serão cobertos pela observação e qual a melhor forma de captá-los. Cabem ainda nessa etapa, as decisões mais específicas sobre o grau de participação do observador, a duração das observações etc. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 25)

As autoras apontam ainda:

---

[1] YIN, Robert K. *Case study research*: design and methods. Newbury Park, CA (USA): Sage, 1989.

> A pesquisa qualitativa [...], segundo Bogdan e Biklen (1982), envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, enfatiza mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes. (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 13)

A observação de eventos particulares também é favorecida pelo estudo de caso, o qual proporciona condições para a realização de investigações através de observações, entrevistas, gravações, documentos, anotações de campo e interações entre os participantes do estudo. Segundo Lüdke e André (1986), o estudo de caso pressupõe que os dados possam ser apresentados numa diversidade de formas, sendo que os relatos escritos apresentam, de forma geral, um estilo informal, narrativo, incluindo citações, exemplos e descrições.

Consideramos, portanto, que o método que escolhemos para o desenvolvimento dessa pesquisa é pertinente, visto que, de acordo com André (2003), referindo-se a Stake:

> [...] os estudos de caso [...] respondem muito bem às questões sobre a relevância dos resultados da pesquisa, pois os estudos de caso são exatamente úteis para conhecer os problemas e ajudar a entender a dinâmica da prática educativa. E ele [Stake] mesmo acrescenta: “Um estudo de caso que retrate um problema educacional em toda a sua complexidade individual e social é uma descoberta preciosa”. (ANDRÉ, 2003, p. 50)

CAPÍTULO 4 — REALIZAÇÃO DA PESQUISA

Neste capítulo, primeiramente apresentaremos cada uma das *tarefas e atividades atualizadas*[1] por nós a partir das atividades propostas originalmente por Douady (1986) sobre enquadramento de números racionais em intervalos.

Em seguida, para cada uma dessas tarefas e atividades atualizadas, relataremos as *alterações e adaptações* que foram sugeridas pelas profissionais da escola em que realizamos a pesquisa, assim como considerações feitas durante os encontros que tivemos com elas. A esse processo demos o nome de *processo de reatualização e considerações.* Consideramos, para tanto, nossas questões de pesquisa e o quadro teórico adotado.

Posteriormente, apresentaremos as *tarefas* e *atividades reatualizadas*, assim denominadas por serem as tarefas e atividades que receberam alterações e adaptações de acordo com as sugestões feitas pelas participantes.

Outros aspectos referentes às diversas tarefas e atividades (e não apenas a cada uma delas individualmente) são apresentados no final deste capítulo (item 4.4).

Como relatado nos procedimentos de pesquisa, para a reatualização das tarefas e atividades que elaboramos foram realizados encontros em que estiveram presentes as duas professoras de matemática, a pesquisadora e a observadora. Em

---

[1] Atualização é subjetivação que diz respeito às subjetividades sensoriais. Segundo Hélène Trocmé-Fabre, todo dinamismo implica um dinamismo antagônico, de modo que a atualização de um potencializa o outro (TROCMÉ-FABRE, H. *A árvore do saber-aprender*: rumo a um referencial cognitivo. Tradução de Marli Segreto. São Paulo: Triom, 2004. p. 18). (Ver também nota de rodapé 1 do Capítulo 1.)

alguns deles, contamos também com a participação da coordenadora/assessora de matemática da escola.

As observações das participantes que apresentaremos neste capítulo são transcrições de trechos de nossas conversas ocorridas em tais encontros.

Nas transcrições figuram entre colchetes esclarecimentos destinados a facilitar a leitura dos diálogos; entre chaves, constam observações referentes às ações físicas e ao gestual das participantes.

Por questões éticas, não revelaremos os nomes das professoras e da coordenadora/assessora de matemática. Identificaremos a professora da sétima série por P1, a de oitava série por P2 e a coordenadora/assessora de matemática por C.

4.1. TAREFA ATUALIZADA 1 – AMBIENTAÇÃO COM AS ATIVIDADES

Essa tarefa não consta como atividade de ambientação na proposta de Douady (1986). Foi empreendida por nós com a finalidade de que os alunos percebessem a importância de proceder a registros, de modo a evitarem perguntas supérfluas. Essa finalidade persiste no conjunto das tarefas e atividades seguintes. Além disso, buscou-se proporcionar familiarização dos alunos com as regras. Contudo, ativemo-nos às considerações feitas pelas professoras sobre a pertinência dessa etapa, ou seja, sobre os alunos terem oportunidade de ambientar-se com suas regras, já que a maior parte destas se mantém nas tarefas e atividades que se seguirão.

Essa tarefa visa a determinação de um número inteiro num intervalo compreendido por dois números inteiros.

4.1.1. DESCRIÇÃO DA TAREFA ATUALIZADA 1

O professor de matemática deverá inicialmente anotar em um papel o número inteiro previamente determinado, sem que este seja visto pelos alunos. O número só será revelado depois que os alunos o houverem determinado.

Será fornecido aos alunos um intervalo de números inteiros, também previamente determinado, em que o número pensado esteja compreendido.

Para o desenvolvimento dessa tarefa, os alunos serão divididos em duas equipes, sob coordenação do professor. Estas, alternadamente, deverão elaborar questões e formulá-las ao professor, que, por sua vez, será responsável pelo fornecimento das respostas.

Para isso, os alunos poderão utilizar somente relações dos tipos '*é* maior que' ou 'é menor que', sendo as questões respondidas somente com 'sim' ou 'não'. As questões deverão ser enunciadas ao professor em voz alta, de modo que ambas as equipes as compartilhem, assim como as respostas dadas por ele.

O professor deverá comunicar às equipes que haverá um dado número máximo de questões que cada uma poderá formular. Essa quantidade está determinada no enunciado de cada atividade.

O objetivo dessa tarefa consiste na descoberta, pelas equipes, do número inteiro pensado. Vencerá a equipe que primeiro fornecer o número pensado.

A tarefa subdivide-se em duas atividades, denominadas *atividade atualizada 1* e *atividade atualizada 2*.

4.1.1.1. ATIVIDADE ATUALIZADA 1

Número pensado: 1

Essa atividade utiliza as regras da tarefa atualizada 1, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [0, 10] e lhes informará que pensou em um número inteiro compreendido por 0 e 10;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe é duas.

4.1.1.2. ATIVIDADE ATUALIZADA 2

Número pensado: –2

Essa atividade também segue as regras da tarefa atualizada 1, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–4, 2] e lhes informará que pensou em um número inteiro compreendido por –4 e 2;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe é duas.

4.1.2. PROCESSO DE REATUALIZAÇÃO DA TAREFA 1 E CONSIDERAÇÕES

Relatamos aqui as adaptações e alterações referentes à tarefa atualizada 1 sugeridas pelas docentes durante as discussões, assim como outros aspectos emergidos durante todo o processo, relativos a essa tarefa de ambientação.

Durante os encontros, abordou-se a pertinência de se alterar a dinâmica a ser proposta em sala de aula na etapa de ambientação. Diferentemente do que é proposto pela tarefa atualizada 1, em que os alunos devem constituir duas grandes equipes que serão desafiadas pelo professor, foi apontada pela professora P1 a possibilidade de os alunos constituírem apenas uma única equipe, a ser também desafiada. Sugeriu-se que os alunos continuariam responsáveis pela elaboração das questões e o professor, pelas respostas. O trecho transcrito a seguir caracteriza tal sugestão:

> C: Na proposta feita pela pesquisadora, os alunos deveriam ser divididos em duas grandes equipes supervisionadas pelo professor, não é isso? Acho que a sugestão que a professora P1 deu, de mudar a dinâmica, ficando a sala toda sendo uma equipe desafiada pelo professor é boa, porque caracteriza bem uma etapa de ambientação.
>
> P2: É. Porque assim os alunos podem focalizar bem o objetivo da tarefa, não precisando se preocupar em ganhar.
>
> P1: Isso, porque se eles fizerem tudo certo, eles vão chegar no mesmo número, porque estaremos trabalhando com o mesmo número pensado para as duas equipes. E não vai haver vencedor. Nessa etapa de ambientação, é melhor estarmos trabalhando mais com o espírito de cooperação.
>
> C: Está decidido que a tarefa fica interessante assim e que, ao invés de duas equipes de alunos, teremos uma só, a ser desafiada pelo professor.

Vemos como pertinente essa alteração da dinâmica a ser proposta na tarefa de ambientação, por condizer com seus reais objetivos e por supormos que possibilite a familiarização dos alunos com as atividades e suas regras, sem levá-los à preocupação de vencer, o que poderia drenar parte de sua atenção, desviando-os do foco da tarefa e das atividades.

Debateu-se então a pertinência de limitar a quantidade de questões permitidas aos alunos durante a realização da tarefa 1. A professora P1 sugeriu que, nessa etapa, os alunos tivessem liberdade para formular quantas questões julgassem necessárias para a determinação do número inteiro pensado. Sugeriu também que em um momento posterior o número de questões poderia ser restringido, com o intuito de se aumentar gradativamente a dificuldade da tarefa. Isso pode ser observado nos trechos transcritos a seguir:

> P1: Eu faria um procedimento assim: primeiro "abertão", depois tentaria reduzir e depois, por último, deixar o desafio de tentar achar com tantas perguntas. Penso que esse seria o último estágio, porque eles vão estar selecionando bem as perguntas, para que não fiquem com a preocupação de estarem atentos à quantidade, porque o foco da tarefa seria acertar o número. Agora, se colocarmos "você tem no máximo tantas perguntas para fazer", o grau de elaboração é muito maior, porque eles teriam que pensar bem nas perguntas, porque estariam eliminando uma chance. É a fase que eles gostam mais. No momento seguinte [referindo-se à etapa, proposta pela própria professora P1, em que o número de questões permitido aos alunos seria previamente estipulado], pela regrinha do jogo, eles podem fazer tantas perguntas. Se eles perguntarem sem ter certeza, eles vão estourar. Então, aqui, eles fazem tantas questões e depois eles podem arriscar, perguntando: "O número é tal?". Assim, podem chegar na resposta. Mas eles têm um número de possibilidades pra irem cercando, dentro do procedimento que seria mais econômico. Por exemplo, uma das orientações seria que não pode perguntar de cara: "É tal número?". Seria uma das regras.

Essa professora ressalta a importância de levar em conta as características de cada classe para a qual a tarefa será proposta:

> P1: A gente tem que analisar se é um desafio que vai mobilizar a sala. Se for um desafio muito grande, que eles têm muita dificuldade, não mobiliza a sala e perde-se a tarefa. Porque acaba acontecendo de um ou outro só estar participando e as outras pessoas não estarem pensando em cima do problema. Agora, para uma sala boa, sim. Eu começaria assim: "Olha, vamos tentar primeiro com um número ilimitado de questões, tentando reduzir ao máximo as perguntas". Lançaria depois: "Agora com tantas perguntas", porque eu percebo que as turmas boas gostam muito de desafio, e quanto maior o desafio, maior é a participação. É um estímulo, pois quanto maior o desafio, maior o estímulo. Agora, para sala com dificuldade é um desestímulo, um entrave, porque eles falam: "É muito difícil. Não vou conseguir". Já vem uma apatia, um desânimo. Eles jogam para o outro, para o outro estar fazendo. Não é que eles não querem; eles sentem as dificuldades e a sensação é de que eles não vão conseguir. Por isso, se você primeiro mostrar que eles conseguem, eles ficam animados. Você diz: "Olha, gente, trouxe um desafio. O desafio é esse". É um desafio que você sabe que eles vão dar conta. Isso os motiva. Eu diria: "Olha, agora é um outro desafio". Assim, eles ficam mais atentos e pensam: "Se já conseguimos o primeiro desafio, vamos conseguir o outro". Temos que dosar um pouco esses desafios, pensando na auto-estima dos alunos. Às vezes, temos resultados surpreendentes com salas com alunos com dificuldades, porque os que não têm tanta dificuldade pensam: "A gente já consegue isso" e tem uma coisa de menosprezo. E os que têm dificuldade, não. Você vai mostrando que eles conseguem, incentivando-os a continuar as atividades.

A preocupação apresentada pela professora P1 — de tornar a tarefa mais "aberta", sem delimitar o número de questões, facilitando-a às turmas — difere de nossa atualização no tocante ao objetivo da tarefa. No entanto, essa proposta de facilitação não conflita com o quadro teórico de Douady, visto que esta recomenda ao professor que adapte as tarefas e atividades propostas segundo sua análise da situação (considerando as condições dos alunos e as atividades).

Embora a proposta de P1 não tenha sido adotada, por discordância das demais participantes, sua formuladora nos proporcionou uma oportunidade de refletir sobre a pertinência dessas atividades em salas que tenham alunos “com dificuldades”. Ponderamos que ela propôs alterações interessantes, com objetivos diversos dos que elaboramos, centradas na possibilidade de participação desses alunos, revelando que em sua atuação em classe essa professora leva em consideração diversos aspectos importantes para esse envolvimento.

Contudo, a professora P2 e a coordenadora/assessora de matemática apresentaram argumentos favoráveis a delimitar a quantidade de questões permitidas aos alunos. A transcrição a seguir elucida tal aspecto:

> P2: Eu acho que, nessa tarefa, temos que estipular um número máximo de questões.
>
> C: Eu também. Senão fica sem graça, porque os alunos podem fazer quantas questões quiserem, até achar o número. Não tem desafio. O ideal é que eles percebam que, com tantas perguntas, eles podem descobrir o número. O professor precisa ressaltar quais perguntas foram supérfluas, mostrando a eles a importância de não fazê-las. Um aluno pode gastar uma pergunta que o outro já fez, fazendo uma pergunta supérflua. Isso pode acontecer provavelmente por não ouvir a anterior, revelando assim a necessidade de realizarem anotações, para se fazer a próxima pergunta. E isso só tem sentido se limitarmos o número de questões.
>
> P1: Porque senão eles não vão se preocupar com a qualidade de perguntas. {Nesse momento, a professora P1 concorda com os argumentos apresentados pela professora P2 e pela coordenadora/assessora de matemática.}

C: Isso. Perfeito.

P1: Eles vão ficar perguntando qualquer coisa.

C: Senão não tem a menor necessidade de anotarem e acabou o desafio, do ponto de vista matemático. Aqui está a idéia de limitação. Então, eu acho que se deve limitar o número de questões, e não deixar livre. Temos assim uma justificativa forte. O objetivo é que, com poucas questões, eles acertem o número.

P2: Porque senão estamos tirando o objetivo das atividades. Eles gostam muito de desafio. Alguns ficam irritados porque surgem muitas perguntas desnecessárias.

C: Eles poderão refletir sobre o objetivo ao se fazer certa pergunta, porque se eles não tiverem anotações, não saberão qual questão foi feita, fazendo uma pergunta supérflua. Tá certo? {As professoras concordam.}

Dessa forma, observou-se que a finalidade de os alunos perceberem a importância de fazer anotações para evitar perguntas supérfluas foi explicitada pela professora P2 e pela coordenadora/assessora de matemática. A professora P1, apesar de se colocar contra a determinação de um número fixo de perguntas numa primeira apresentação da tarefa aos alunos, concordou com os argumentos de suas colegas em favor dessa finalidade.

Como já mencionamos, a tarefa atualizada 1 não consta como atividade de ambientação na proposta de Douady (1986). Durante o processo de atualização dessa tarefa, nossa intenção foi propiciar condições para que os alunos pudessem perceber a importância de efetuar anotações, evitando possivelmente a realização de questões supérfluas. A tarefa foi apresentada às professoras para que analisassem a pertinência de sua proposição em sala de aula. Essa intenção persiste no conjunto das tarefas e atividades seguintes. Além disso, as professoras teceram considerações sobre os alunos terem oportunidade de ambientar-se com as regras, já que as tarefas e atividades seguintes mantêm a maior parte destas.

O objetivo da etapa de ambientação, ou seja, a familiarização dos alunos com as regras da tarefa 1, foi abordado durante os encontros com as participantes da pesquisa. Isso pode ser observado nas falas transcritas a seguir:

> C: Na ambientação, o objetivo é esclarecer as regras e recombiná-las, ver a linguagem que vai ser usada, os significados atribuídos a cada uma delas. Essa primeira aula de ambientação tem essa tônica. Deu para entender?
>
> P1: Porque quando o aluno faz uma pergunta, não vai ter simplesmente sim ou não. Por trás desse sim e desse não, vêm outras perguntas que mostram o caminho que eles estão fazendo.

A importância de atribuir liberdade aos alunos foi salientada durante a discussão sobre os objetivos da etapa de ambientação. Os argumentos apresentados pelas participantes mostraram-se coerentes com o quadro teórico adotado pela presente pesquisa e pela instituição de ensino em que lecionam:

> C: Talvez a classe queira isso [referindo-se à vontade dos alunos de que o professor utilize linguagens e relações sugeridas por eles].
>
> Pesquisadora: Então devemos seguir o consenso deles?
>
> C: Isso. O deles.
>
> P1: Por isso deve haver a institucionalização.

C: Isso mesmo. A gente vai ampliar conhecimento ou vai restringir? Qual é o nosso propósito aqui na nossa escola?

P1: Ampliar.

C: Isso. Ampliar. Temos um trato mais amplo, no sentido de atribuição de significados às relações, de estabelecimento de relações. Então, a gente não tem que restringir nada. Podemos buscar um consenso. O que eu não concordo é que a gente fique só no deles [significado], porque não é essa a nossa postura. A gente apresenta o contexto cultural amplo em matemática e continua trabalhando com ele e também com o dos alunos. Não é essa a nossa proposta? Não é negar o que eles estão falando. O foco do trabalho são as relações e o enquadramento. Porque, no final, depois que você institucionalizou o que é comum à classe e ao corpo de conhecimentos matemáticos reconhecidos socialmente, pode aparecer um monte de sugestões e vocês podem combinar aquela que a classe achar que é mais tranqüila para a continuidade.

Desse modo, debateu-se ainda a continuidade ou não dessa tarefa a ser proposta aos alunos, com o intuito de preservar a liberdade destes, considerando as ocorrências que venham a ser observadas na etapa de ambientação. As participantes questionaram se a atividade seguinte à atividade 1 deveria permanecer nessa etapa de ambientação — a etapa em que se busca determinar o número inteiro pensado — ou se deveriam alterar a proposta, desconsiderando a atividade atualizada 2 da tarefa 1 e apresentando aos alunos a tarefa 2 — em que se busca determinar o intervalo de dois números inteiros consecutivos em que o número racional pensado está compreendido. É o que evidenciam os seguintes trechos:

P1: Pode ocorrer dos alunos pedirem para a professora já ir para a próxima etapa. [A professora P1 sugere que os alunos poderão preferir que seja proposta a tarefa 2, em vez de permanecerem na tarefa 1 (de ambientação).]

C: Isso. Eles poderão pedir a próxima etapa ou pedir que seja fornecido outro intervalo [mantendo-se, nesse caso, a tarefa 1]. Isso deve ser perguntado aos alunos. Pode ser que a aula tenha terminado ou pode ocorrer de ter espaço para se promover outra atividade. Eles é que deverão falar e o professor deverá amarrar o consenso. Pode ser que não tenha aparecido exatamente uma questão supérflua, então, assim, você precisa de outra atividade. Então, pode ocorrer de você dar um novo intervalo permanecendo na mesma tarefa.

P1: Acho que devem ser consideradas as ocorrências em sala de aula. Eu acho que se correr tudo bem, então é válido partirmos para a próxima tarefa [referindo-se à tarefa 2]. Acho que depende muito de como ocorreu essa ambientação.

P2: Se aparecerem muitas questões desnecessárias, é interessante voltar a trabalhar essa tarefa.

P1: Podemos ter duas opções. Depende do que acontecer. Porque se tudo ocorrer muito rápido, se tudo estiver muito perfeito, não se deve repetir a mesma coisa. Acho que quebra o interesse, apesar de achar que isso dificilmente vai acontecer, porque sempre tem aqueles alunos que têm mais dificuldades e que querem questionar. Deve-se dar oportunidade a todos.

C: *OK*. Vou fazer duas perguntas ao mesmo tempo para vocês. Elas são inter-relacionadas. Aumentar a dificuldade seria, necessariamente, colocar racionais entre inteiros ou poderia ser aumentar o intervalo de inteiros, modificando o intervalo? Essa é a primeira pergunta. A segunda pergunta é se deveriam pedir uma dinâmica nova, ainda para essa etapa de ambientação, ou se deveriam seguir para a etapa de racionais entre racionais.

P2: Agora que você está falando, eu acho que a gente pode aumentar a dificuldade nessa tarefa de ambientação. Fica interessante. Eu colocaria um intervalo maior.

C: Assim aumenta o interesse.

P2: Acredito que sim.

C: Então pode-se fazer mais uma investida, perguntando para eles se querem. Deve-se perguntar o que eles preferem. Se não quiserem mais atividade dessa tarefa de ambientação, pode-se propor: "Vamos para a tarefa seguinte, de racional entre inteiros?". Acho que isso os desafia. Essa ordem de dificuldade, pré-suposta por nós, nem sempre é o que ocorre em sala de aula. Não importa se vem primeiro o mais fácil e depois o mais difícil. Importa manter os desafios, mobilizando os conhecimentos, e produzir novos.

P1: Então, se for sugerida mais uma atividade para essa tarefa, caso tenha ficado muita dúvida, propõe-se mais uma atividade, não passando direto para a tarefa de racionais entre inteiros [tarefa 2]. E assim, continua-se com a determinação do número inteiro.

C: Mas é importante perguntar para os alunos.

P1: Para vermos o que eles preferem.

C: Aqui é um ponto opcional. É uma zona de indecisão prévia, porque depende de como as coisas vão acontecer na hora. Deve-se perguntar se eles querem mais isso, se eles precisam de mais um exemplo disso ou não. Como a gente detecta se eles querem? Perguntando: "Vocês têm alguma dúvida?", "Vocês gostariam de fazer mais uma atividade, parecida com essa ou com números parecidos, ou vocês querem modificar?". A gente tem a chance de perguntar para eles, de continuar nessa ou de ir para outra tarefa, perguntando para eles o que preferem, vendo suas opiniões, deixando-os debater. Deixar fluir. Negociar. Vão existir uns alunos muito "fortinhos" que querem ir para frente rapidinho, e os outros que a gente tem que dar espaço para falar. Nesse caso, precisam puxar os que não querem continuar, dando força e negociando, perguntando: "Vocês concordam com o que eles querem?". É a negociação que tem que existir .

Consideramos, portanto, que as participantes da pesquisa seguiam o quadro teórico de Douady, visto que todas se preocuparam em propiciar aos alunos liberdade de pesquisar, de acionar seus conhecimentos antigos, utilizando-os na criação de estratégias de resolução das atividades. No entanto, não mencionaram o quadro teórico dessa autora, nem esse argumento.

Durante os encontros salientou-se que, embora as atividades propostas pela tarefa reatualizada 1 se denominem *atividade reatualizada 1*, *atividade reatualizada 2* e *atividade complementar 1 da tarefa reatualizada 1*, elas não precisam necessariamente ser propostas nessa ordem, devendo-se levar em conta as ocorrências em sala de aula.

Note-se que a utilização da atividade reatualizada 2 e da atividade complementar 1 da tarefa reatualizada 1, caso requerida — seja pelo professor, seja pelos alunos —, foi suscitada durante os encontros com as professoras e com a coordenadora/assessora de matemática. A tarefa por nós atualizada previa apenas duas atividades (atividades atualizadas 1 e 2); a elaboração da atividade complementar 1 da tarefa reatualizada 1 foi sugerida durante as discussões, numa tentativa de assegurar a continuidade da tarefa reatualizada 1. Isso é coerente com o quadro teórico adotado em nossa pesquisa.

Outro aspecto abordado pela professora P1 refere-se aos intervalos numéricos a serem fornecidos aos alunos nas atividades da tarefa 1. Essa professora sugere a proposição de três atividades para essa tarefa. Sugere, para a primeira, um intervalo compreendido por números naturais; para a segunda, um intervalo compreendido por números inteiros (tanto positivos quanto negativos); para a terceira, um intervalo compreendido por números inteiros negativos. É o que revelam estes trechos:

> P1: Acho que podemos pensar, para a primeira atividade, em um intervalo só com positivos; depois, para a segunda, um intervalo com positivos e negativos; e, para a terceira, só com negativos.
>
> Pesquisadora: Você acha interessante trabalharmos então com um intervalo só com números negativos?
>
> P1: Seria mais desafiante, porque quando é só positivo, tudo bem.
>
> Pesquisadora: E nesse caso em que contemplamos intervalos de números negativos e positivos?
>
> P1: Também é um desafio, porque ele está pensando tanto em números positivos quanto em negativos.
>
> Pesquisadora: Mas você acha que, quando pegamos só negativos, aumenta ainda mais o grau de dificuldade, mais do que se pegarmos positivos e negativos juntos?
>
> P1: Na hora em que você propõe um intervalo só de números negativos, os alunos vão ter que redobrar a atenção mais ainda. O engraçado é que — não que eles não saibam; eles

sabem quem é o maior, quem é o menor. É uma coisa que eles falam sem muita reflexão, ao dar a resposta. Por exemplo, quando você pergunta: "Qual é o número inteiro maior que –199?". Eles respondem: "É o –200". Eu tinha isso numa ficha de trabalho dos alunos, desse ano. É uma coisa impressionante. Quando você chama para reflexão, dizendo: "Pensa", aí tudo bem. Mas precisa chamar para reflexão.

Pesquisadora: Isso é o que ocorre com os alunos?

P1: Não com todos, mas chama nossa atenção porque também não ocorre com um só. Não é um caso isolado. Pode-se dizer que ocorre com grande parte. Depois que chama pra reflexão, por exemplo, se é um bom trabalho em grupo, às vezes eles ficam com duas respostas. Cria-se assim um debate entre eles: "Não, esse não é o maior", e para o aluno que está pensando corretamente, tentar justificar para os outros não é fácil. Geralmente eles pedem ajuda, nosso apoio, dizendo assim: "Fala para ele que o maior é -198 e não -200". Depois que o aluno pensa e reflete, chega na resposta do –198, mas não há esse consenso. Eu não acredito que seja uma dispersão. Parece ser uma coisa mais profunda. Por exemplo, da direita e esquerda, maior ou menor, sabe?

Pesquisadora: Quando você está trabalhando com os negativos, você recorre aos positivos?

P1: Num primeiro momento sim. Para eles pensarem. Depois vou lá para os negativos. Assim eles dizem: "É menor", e eu peço para eles justificarem. Então eles percebem que, quando falam que é o –200, estão acrescentando um negativo e não o retirando. Acabam refletindo sobre o equívoco, sobre o que não pararam para pensar. Seria um estudo interessante porque eu acho que isso ocorre com alunos com dificuldade. Esses alunos geralmente precisam de um apoio mais concreto, e não só da fala. Ele precisa desenhar a reta ou que você invente uma situação.

Pesquisadora: Um contexto?

P1: Isso. Inventar um contexto. Geralmente, a coisa não sai assim só de uma conversa. Precisa de algum recurso, de algum apoio, por exemplo, de uma representação geométrica ou de alguma situação em que você o remete como sujeito. Às vezes utilizo em sala de aula uma situação do tipo: "Faz de conta que você está devendo tanto, pagou tanto, pegou emprestado tanto. Com quanto você ficou no final?". Você põe o aluno como sujeito da situação.

No entanto, durante os encontros, a professora P2 e a coordenadora/assessora de matemática apresentaram argumentos favoráveis à proposição de uma primeira atividade (atividade reatualizada 1) em que o intervalo fornecido aos alunos estivesse compreendido por números inteiros, mas contemplando simultaneamente positivos e negativos:

C: Os alunos de sétima série já viram um pouquinho na sexta e no primeiro semestre da sétima [referindo-se ao trabalho com números negativos]. Do ponto de vista da escola, acho que não há necessidade de restringirmos, nessa primeira atividade, a um intervalo somente de números naturais.

P2: Também acho que eles já estão acostumados. E quando a gente fala que está trabalhando com números inteiros, eles já entram com positivos e negativos.

C: Então, talvez já seja uma adaptação importante. E também não tem muita justificativa do por que ficar só com naturais, desde que eles já tenham um certo contato com esses números [referindo-se aos números negativos]. Então vamos, nessa primeira atividade, de ambientação, já ficar com inteiros entre inteiros. A primeira atividade está decidida. Nada de separação de positivos e negativos.

No entanto, considerando que a atividade anterior (atividade reatualizada 1) contempla a proposta de um intervalo compreendido por números inteiros (positivos e negativos), debateu-se, para a atividade reatualizada 2, a possibilidade de propor um intervalo compreendido apenas por números naturais. Discorreu-se, assim, sobre a viabilidade de propor um intervalo bem maior do que o estabelecido para a atividade anterior (atividade reatualizada 1), com o intuito de preservar o desafio proposto pela tarefa.

Para isso, foi sugerido que a pesquisadora deveria elaborar a atividade reatualizada 2, apresentando às participantes o número pensado, o intervalo de números naturais a ser fornecido aos alunos e a quantidade máxima de questões permitidas. Tal atividade foi debatida pelo grupo, havendo consenso favorável a sua proposição.

O trecho a seguir caracteriza a discussão sobre a atividade 2:

C: Para a segunda atividade da fase de ambientação, vamos determinar um intervalo ainda de inteiros, que contemple só os naturais. Mas temos que aumentar muito o intervalo, porque o intervalo entre inteiros é muito fácil de achar. Como já pensamos, para a primeira atividade, em um intervalo de inteiros que contempla tanto positivos quanto negativos, podemos pensar agora em um intervalo só de naturais, para mudarmos um pouco. O que vocês acham? {Professoras e pesquisadora concordam.}

P1: Assim fica mais interessante.

C: Fica mais rica, no sentido de estratégias, de questões que poderiam ser feitas.

Durante os encontros, debateu-se também sobre o intervalo a ser proposto numa terceira atividade, que recebeu o nome de *atividade complementar 1 da tarefa* *reatualizada 1*. A coordenadora/assessora de matemática sugeriu prosseguir utilizando um intervalo de números inteiros (positivos e negativos), similarmente ao proposto na atividade reatualizada 1, porém agora com um intervalo maior. Houve consenso entre todas as participantes.

Note-se que a tarefa atualizada 1 previa somente duas atividades — ou seja, essa terceira atividade (atividade complementar 1 da tarefa reatualizada 1) não constava naquela tarefa. Sugeriu-se elaborar essa terceira atividade de ambientação com o intuito de possibilitar a continuidade da tarefa reatualizada 1 caso isso se mostre conveniente em sala de aula. Sua elaboração também ficou sob responsabilidade da pesquisadora, que a apresentou às demais participantes, obtendo-se consenso quanto a sua proposição em sala de aula:

> C: Para a terceira atividade, devemos manter um intervalo grande, buscando novamente trabalhar um intervalo de números positivos e negativos, como na atividade 1. Só que agora maior. {As professoras e a pesquisadora concordam.}

Sobre as fases da dialética ferramenta–objeto, houve consenso tácito sobre as fases em que os alunos pesquisam (busca constante de situações desafiantes que os levem a refletir), explicitam e validam suas estratégias de resolução e, também, sobre institucionalização, visto que as fases foram aceitas sem qualquer restrição e até mencionadas pela coordenadora/assessora de matemática, com concordância das professoras.

4.1.2.1. PROCESSO DE REATUALIZAÇÃO DA ATIVIDADE 1

Após a discussão referida no tópico anterior, chegou-se a um consenso sobre o número a ser previamente pensado e sobre o intervalo a ser fornecido aos alunos, contemplando simultaneamente números positivos e negativos. O consenso foi alcançado conjuntamente, como mostra este diálogo:

> C: Dêem algumas sugestões para a atividade 1 [solicitando às professoras P1 e P2]. O intervalo proposto inicialmente pela pesquisadora para a atividade 1 foi o intervalo compreendido pelos números 0 e 10?
>
> Pesquisadora: Isso. Entre 0 e 10.
>
> P1: Poderia ser entre –5 e 5 ou entre –10 e 10.
>
> C: Sugiro para essa primeira atividade o intervalo compreendido pelos números –10 e 10, e o número pensado, -5. O que vocês acham? {As professoras e a pesquisadora concordam.}

Os argumentos apresentados pelas professoras e pela coordenadora/assessora de matemática para a alteração dos intervalos numéricos, de modo a contemplar também números inteiros negativos, são coerentes com o quadro teórico de Douady, visto que elas consideram que os alunos têm condições de trabalhar com esses números na atividade, por terem tido contato anterior com tais números. Isso difere da atualização que havíamos proposto. Consideramos interessante essa proposta de alteração, por ampliar o campo numérico, sem segmentar os números inteiros, não restringindo a atividade apenas a intervalos de inteiros não-negativos.

4.1.2.2. PROCESSO DE REATUALIZAÇÃO DA ATIVIDADE 2

Durante os encontros, promoveram-se debates sobre os possíveis novos números e intervalos a serem propostos na atividade reatualizada 2 (descrita no item 4.1.4.2). No entanto, chegou-se ao consenso de que a pesquisadora ficaria encarregada de sugerir o número inteiro e o intervalo a ser fornecido aos alunos nessa atividade. Para isso, a pesquisadora considerou a sugestão feita pela coordenadora/assessora de matemática de contemplar somente números naturais, mas aumentar o intervalo fornecido aos alunos, com o intuito de tornar a atividade mais desafiante.

A atividade reatualizada 2 foi apresentada pela pesquisadora às participantes e aceita consensualmente. Isso é evidenciado nestes trechos:

> C: Para essa segunda atividade, precisamos aumentar o intervalo. Nós achamos que esse, proposto inicialmente pela pesquisadora, fica pouco desafiante para eles. Os nossos alunos não vão se sentir desafiados. Então, acho que você pode sugerir outro número e intervalo, preparando uma atividade de inteiros entre inteiros, além daquela primeira já discutida [referindo-se à atividade reatualizada 1], caso os alunos peçam uma segunda investida. Vamos ver a nova atividade 2 proposta pela pesquisadora. Ela pensou no número 13 e o intervalo compreendido por 0 e 45, com no máximo cinco questões. O que vocês acham? Fica mais desafiante?
>
> P2: Acho que está ótimo.
>
> P1: Aumentando o intervalo, aumenta o desafio.
>
> C: Então, decidida a atividade reatualizada 2.

Embora a sugestão do intervalo a ser fornecido aos alunos difira marcadamente da que havíamos proposto para a atividade atualizada 2, consideramos que os argumentos apresentados pela coordenadora/assessora de matemática são coerentes com o quadro teórico de Douady, por darem margem ao surgimento de outras estratégias de resolução. A maior facilidade advinda da mudança do conjunto numérico, de inteiros para naturais, foi compensada com o aumento do intervalo ([0, 45], em vez de [-4, 2]), de modo a preservar o desafio oferecido pela atividade.

4.1.2.3. PROCESSO DE ELABORAÇÃO DA ATIVIDADE COMPLEMENTAR 1 DA TAREFA REATUALIZADA 1

Esta atividade complementar 1 da tarefa reatualizada 1 não constava em nossa tarefa atualizada 1. Sua criação foi sugerida pelas professoras e pela coordenadora/assessora de matemática durante os debates, com o propósito de assegurar, se necessário, sua utilização em sala de aula. A pesquisadora foi responsável por elaborá-la. A atividade foi aprovada por todas as participantes, após debate.

Os argumentos apresentados para a proposição de um intervalo que contemple tanto números inteiros positivos quanto negativos, similarmente ao que fora proposto na atividade reatualizada 1, porém com intervalo maior, condizem com o quadro teórico de Douady, já que o contato anterior dos alunos com números negativos possivelmente lhes propicia condições para trabalhar com essa atividade. O aumento do intervalo proposto nessa atividade também é justificado por se buscar assegurar o desafio proposto pela tarefa.

Consideramos que a utilização dessa terceira atividade como parte da tarefa de ambientação também é condizente com o quadro teórico de Douady, por possibilitar a continuidade dessa tarefa, caso requerida pelo professor ou pelos alunos.

4.1.3. PRINCIPAIS ASPECTOS REATUALIZADOS NA TAREFA 1

A partir dos consensos alcançados durante as discussões, foi possível reatualizar a tarefa 1, visando propô-la em sala de aula.

Neste item descreveremos os principais aspectos reatualizados dessa tarefa, destacando em negrito as alterações. Eles são seguidos da descrição da tarefa e das atividades reatualizadas.

Chegou-se ao consenso de que a dinâmica da tarefa deverá ser parcialmente preservada, exceto no que se refere à **formação das equipes participantes**. Ficou estabelecido que, para a tarefa reatualizada 1, os alunos deveriam formar uma **única equipe**, a ser desafiada pelo professor.

Optou-se pela **alteração dos números** previamente pensados, bem como os **intervalos de números inteiros** a serem fornecidos aos alunos e o **número máximo de questões permitidas**, para as atividades 1 e 2. Foi sugerida ainda a **elaboração de uma terceira atividade** (atividade complementar 1 da tarefa reatualizada 1).

4.1.4. Descrição da tarefa reatualizada 1

O professor de matemática deverá inicialmente anotar em um papel o número inteiro previamente pensado, sem que este seja visto pelos alunos. Tal número deverá ser revelado somente depois que os alunos o determinarem.

Será fornecido aos alunos um intervalo de números inteiros, também previamente determinado, em que o número pensado esteja compreendido.

Para essa tarefa, todos os alunos constituirão uma única equipe, que interagirá com o professor. Os alunos deverão elaborar questões utilizando relações do tipo ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’ e propô-las ao professor, que por sua vez será responsável pelo fornecimento das respostas. As respostas possíveis serão apenas ‘sim’ e ‘não’.

O professor deverá comunicar aos alunos que haverá um número máximo de questões que poderão ser formuladas. Essa quantidade estará indicada no enunciado de cada atividade.

O objetivo dessa tarefa consiste na descoberta, pelos alunos, do número inteiro pensado. Ela se subdivide em três atividades, denominadas *atividade reatualizada 1*, *atividade reatualizada 2* e *atividade complementar 1 da tarefa reatualizada 1*.

4.1.4.1. Atividade reatualizada 1

Número pensado: –5.

Essa atividade segue as regras da tarefa reatualizada 1, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–10, 10] e lhes informará que pensou em um número inteiro compreendido por –10 e 10.

b) a quantidade máxima de questões permitidas aos alunos é cinco.

4.1.4.2. ATIVIDADE REATUALIZADA 2

Número pensado: 13.

Essa atividade segue as regras da tarefa reatualizada 1, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [0, 45] e lhes informará que pensou em um número inteiro compreendido por 0 e 45.

b) a quantidade máxima de questões permitidas aos alunos é cinco.

4.1.4.3. ATIVIDADE COMPLEMENTAR 1 DA TAREFA REATUALIZADA 1

Número pensado: 6.

Essa atividade segue as regras da tarefa reatualizada 1, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–30, 38] e lhes informará que pensou em um número inteiro compreendido por -30 e 38.

b) a quantidade máxima de questões permitidas aos alunos é seis.

4.2. TAREFA ATUALIZADA 2 — ENQUADRAMENTO DE UM NÚMERO RACIONAL SOB FORMA FRACIONÁRIA NUM INTERVALO COMPREENDIDO POR DOIS NÚMEROS INTEIROS CONSECUTIVOS

Essa tarefa consta como atividade na proposta de Douady (1986). O principal objetivo dessa tarefa, tanto na proposta original de Douady quanto na atualizada por nós, é o enquadramento de um número racional sob forma fracionária num intervalo compreendido por dois números inteiros consecutivos. Douady focaliza o trabalho com números racionais somente sob forma fracionária. Em nossa atualização, mantivemos essa proposta, sem no entanto restringir o trabalho a essa representação, permitindo que os alunos manipulem também o número racional em sua forma decimal.

4.2.1. DESCRIÇÃO DA TAREFA ATUALIZADA 2

O professor de matemática deverá inicialmente anotar em um papel o número racional sob forma fracionária previamente determinado, sem que este seja visto pelos alunos. A anotação será revelada somente depois que os alunos tiverem determinado o intervalo de dois números inteiros consecutivos.

O professor fornecerá aos alunos um intervalo de números inteiros, também previamente determinado, em que o número pensado esteja compreendido.

Para o desenvolvimento dessa tarefa, a classe será dividida em duas equipes, sob coordenação do professor. As equipes, alternadamente, deverão elaborar questões e formulá-las ao professor, que, por sua vez, será responsável pelo fornecimento das respostas.

Para isso, os alunos poderão utilizar somente relações dos tipos ‘é maior que’ ou ‘é menor que’, sendo as questões respondidas somente com ‘sim’ ou ‘não’. As questões deverão ser formuladas ao professor em voz alta, de modo que ambas as equipes possam ouvi-las, bem como às respectivas respostas.

O professor deverá comunicar às equipes que haverá um dado número máximo de questões que cada equipe poderá formular. Essa quantidade está determinada no enunciado de cada atividade e será a mesma para ambas as equipes.

O objetivo dessa tarefa é determinar o intervalo de números inteiros consecutivos em que o número pensado está compreendido. Vencerá a equipe que primeiro fornecer esse intervalo.

A tarefa subdivide-se em duas atividades, denominadas *atividade atualizada 3* e *atividade atualizada 4*.

4.2.1.1. ATIVIDADE ATUALIZADA 3

Número pensado: $\frac{3}{2}$

Essa atividade utiliza as regras da tarefa atualizada 2, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [0, 10] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por 0 e 10;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe é duas.

4.2.1.2. ATIVIDADE ATUALIZADA 4

Número pensado: $-\frac{8}{3}$

Essa atividade também segue as regras da tarefa atualizada 2, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–5, 3] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –5 e 3;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe é duas.

4.2.2. PROCESSO DE REATUALIZAÇÃO DA TAREFA 2 E CONSIDERAÇÕES

Discorreremos aqui sobre os tópicos relativos à tarefa 2 apontados pelas professoras e pela coordenadora/assessora de matemática no decorrer das discussões sobre as possíveis adaptações e alterações a essa tarefa, assim como sobre outras considerações referentes a ela.

Um aspecto ressaltado pelas participantes refere-se à possibilidade de não se propor essa etapa (tarefa 2) aos alunos, tendo em vista os argumentos apresentados a seguir. No entanto, foi salientada a importância de levar em conta a opinião dos alunos e suas necessidades, analisando todo o processo de vivência das atividades:

> C: Eu estava raciocinando que o aluno pode querer vivenciar, após a tarefa de ambientação, a tarefa de racionais entre racionais [tarefa 3], sem vivenciar a de racionais entre inteiros [tarefa 2]. Pode ser que essa tarefa de determinação de intervalo compreendido por números inteiros fique desinteressante para eles. Depende da turma. Pode ser desnecessário passar por ela.

P1: Vocês acham então que já devemos passar para racionais entre racionais?

C: Eu acho complicado, em sétima série como a nossa, por exemplo, a gente segurar.

P1: Porque assim pode ficar até mais interessante.

C: Pode ficar mais difícil.

P2: Mas, como estamos falando em determinação de intervalo e não mais em determinação do número previamente pensado, não seria uma nova fase de ambientação para essa terceira tarefa, de racionais entre racionais?

C: Não sei. Aqui nessa escola nem sempre é assim. Na hora, se eles estão interessados, envolvidos no jogo, ou então ao contrário, como a P2 disse, se a gente percebeu que eles já se desinteressaram, a gente já passa para os mais difíceis. Não tem uma ordem específica de como as coisas devem acontecer. Não é assim tão linear, tudo arrumadinho. Tudo vai depender da hora. Essa etapa de inteiros poderá vir numa outra aula. Pode-se pôr em pauta "agora é outra coisa que eu quero observar" e isso pode vir em outra aula. Não tem essa ordem absoluta. Vai depender da resposta da classe, na hora, e da observação do professor. Por isso devemos fazer segundo a classe. Não adianta a gente tentar prever tudo.

P1: Isso. Nós só temos uma idéia prévia.

C: Assim fica bem flexível e interessante.

P2: Cada situação deve ser analisada.

C: O que vocês acham? {As professoras e a pesquisadora concordam com os argumentos apresentados pela coordenadora/assessora de matemática.} Isso mesmo. Deve-se sempre pedir a opinião dos alunos para que seja resolvido com eles o que será feito. Pode ser que eles não se sintam desafiados com racionais entre inteiros e, assim, deve-se ir para a tarefa 3. Nesse caso, vocês propõem racionais entre racionais. Caso contrário, propõe-se essa etapa de racionais entre inteiros.

A possibilidade de não se propor essa tarefa 2 em sala de aula é coerente ao quadro teórico adotado nesta pesquisa, por se buscar assegurar constantemente a liberdade aos alunos, considerando tanto suas necessidades quanto as do professor. Para isso, deve-se analisar o processo de vivência da tarefa e das atividades em sala de aula como um todo, tendo em conta suas opiniões e anseios.

Outro aspecto abordado durante os debates foi a conveniência de se alterar a dinâmica da tarefa atualizada 2. As professoras e a coordenadora/assessora de matemática sugeriram não dividir os alunos em duas grandes equipes, similarmente ao que haviam proposto para a dinâmica da tarefa reatualizada 1. Preferiram que os alunos constituíssem uma só equipe a ser desafiada pelo professor. Isso é evidenciado pelo seguinte trecho:

Pesquisadora: Nessa tarefa 2, qual dinâmica vocês acham que devemos propor: com duas grandes equipes de alunos desafiadas pelo professor ou apenas uma?

C: Parece que a gente ficou mais tendendo a ter uma só, como ocorreu na tarefa 1. Não é isso?

Pesquisadora: Isso. A única alteração que teríamos que ressaltar é que o objetivo não seria mais a determinação do número e sim a determinação do intervalo de dois inteiros consecutivos em que o número pensado esteja compreendido, mantendo-se as mesmas regras.

C: O que vocês acham? {perguntando às professoras P1 e P2.}

P2: Eu acho que assim a proposta fica bem interessante, porque mantém-se a mesma dinâmica apresentada na tarefa anterior. Os alunos já estarão familiarizados com ela.

P1: Eu também acho. Parece ficar interessante.

C: Então, ótimo. Está definida a dinâmica da tarefa reatualizada 2.

Deve-se salientar que foram sugeridas outras possíveis dinâmicas, sem porém alterar o consenso anterior obtido pelo grupo. É o que mostram estas falas:

Pesquisadora: A professora P1 sugeriu para essa tarefa 2 outra possibilidade de dinâmica. Ela sugeriu a introdução da etapa racionais entre inteiros ainda no final da primeira aula, aula em que será proposta aos alunos a etapa de ambientação. Sugeriu que na próxima aula fosse proposta outra dinâmica, em que teríamos três equipes formadas por alunos, com os papéis de emissores e receptores.

C: Seria a mesma dinâmica proposta por você para a tarefa 3 [tarefa atualizada 3]? {questionando a pesquisadora.}

Pesquisadora: Isso. Mas havia proposto essa dinâmica para a tarefa 3. Vocês acham interessante estarmos introduzindo essa dinâmica antes, para a tarefa 2? Seria outra possibilidade?

P1: Pensando melhor, acho que ficaria mais interessante pensarmos em duas grandes equipes fazendo perguntas ao professor. As duas equipes fariam perguntas alternadamente ao professor, compartilhando das perguntas e respostas uma da outra. Venceria a equipe que fornecesse primeiro o intervalo de inteiros consecutivos que contivesse o número previamente pensado.

P2: Mas a equipe que ficar com a última pergunta vai ser favorecida. Por isso, estou achando que é melhor trabalharmos com apenas uma grande equipe de alunos sendo desafiada pelo professor.

C: Exatamente. Estaríamos beneficiando sempre a segunda equipe, porque ela já recebeu a informação da primeira.

P1: Porque se der tudo certo e eles não errarem, se estiverem observando todas as perguntas e respostas, as duas equipes chegarão ao mesmo intervalo.

C: Mas provavelmente quem vai enunciar a resposta será a segunda equipe.

P2: Pode acabar sendo injusto com a primeira equipe.

C: Esse é o ponto.

P2: Seria ótimo mantermos para essa tarefa 2 a mesma dinâmica da tarefa 1, somente com uma grande equipe de alunos.

C: Também acho. Todas estão de acordo? {Professoras e pesquisadora concordam.}

Esse aspecto referente à alteração da dinâmica da tarefa 2, de que os alunos constituam uma única equipe desafiada pelo professor, e não mais duas desafiadas por ele, é coerente com nossas intenções de pesquisa, por possibilitar que os alunos se familiarizem com os novos objetivos da tarefa e das atividades. Embora seja uma nova “etapa”, com novos objetivos, procurou-se com essa proposta de alteração possibilitar a familiarização dos alunos com o novo objetivo, sem alterar, contudo, a dinâmica.

Finalmente, discutiu-se sobre as atividades a serem propostas nessa tarefa. Durante esses debates, chegou-se ao consenso de que a pesquisadora ficaria responsável pela elaboração das possíveis atividades reatualizadas. Estas foram posteriormente apresentadas às professoras e à coordenadora/assessora de matemática, obtendo-se aprovação das participantes. No entanto, algumas sugestões foram feitas, como por exemplo a importância de se aumentar o intervalo a ser fornecido aos alunos em cada uma das atividades da tarefa 2, como elucida a transcrição a seguir:

> C: Acho que seria conveniente se a pesquisadora sugerisse algumas outras atividades para essa tarefa [tarefa 2], de acordo com as nossas considerações. Sugerindo assim: o número previamente determinado, o intervalo e o número máximo de questões, sempre pensando no foco e no objetivo. É interessante pensar qual é o número necessário de questões e aumentar um pouquinho para os alunos, analisando algumas possíveis resoluções; sempre se perguntando quantas questões são necessárias. Acho que seria interessante fazer esse raciocínio.
>
> P1: Acho que devemos aumentar um pouco mais os intervalos fornecidos aos alunos, nessas atividades.
>
> C: Concordo. Deve-se pensar em um intervalo muito maior, porque o intervalo de dois inteiros consecutivos é fácil de achar. Então, ficaria mais desafiante se aumentarmos o intervalo. O que vocês acham? {As professoras concordam}
>
> P1: Também acho que, se aumentarmos o intervalo, aumenta o desafio.

A tarefa atualizada 2 previa apenas a proposição de duas atividades (atividades atualizadas 3 e 4). Contudo, foi sugerido que se elaborassem algumas atividades complementares a essa tarefa, caso a continuidade da tarefa, ou seja, dessas atividades, seja requerida em sala de aula. Isso é observado neste trecho:

> Pesquisadora: Quantas atividades vocês acham necessárias para essa tarefa?

C: Acho que podemos estar preparando umas cinco atividades.

P2: Acho bom, porque assim têm-se algumas como garantia.

P1: A sala de aula é imprevisível. Pode ser que as atividades aconteçam muito rápido. Então, é melhor prepararmos mais atividades, porque assim teremos sobra caso seja necessário.

P2: Cinco atividades é um número bom. Tudo vai depender do tempo e da disponibilidade dos alunos.

É oportuno ressaltar que a tarefa por nós atualizada previa apenas duas atividades. A proposição de três novas atividades para essa tarefa, denominadas *atividade complementar 1 da tarefa reatualizada 2*, *atividade complementar 2 da tarefa reatualizada 2* e *atividade complementar 3 da tarefa reatualizada 2*, é coerente com nossos objetivos de pesquisa e com o quadro teórico de Douady, por visar oferecer liberdade aos alunos e ao professor, levando em conta as necessidades e os propósitos de todos os envolvidos.

No entanto, apesar das denominações dadas às atividades previstas para essa tarefa reatualizada 2 (*atividade reatualizada 1*, *atividade reatualizada 2*, *atividade complementar 1 da tarefa reatualizada 2*, *atividade complementar 2 da tarefa reatualizada 2* e *atividade complementar 3 da tarefa reatualizada 2*), não decorre que devam ser obrigatoriamente propostas nessa ordem. Podem ser propostas aos alunos em outra seqüência, dependendo das ocorrências em sala de aula.

Tanto as professoras quanto a coordenadora/assessora de matemática concordaram com o estabelecimento de uma quantidade máxima de questões permitidas aos alunos, para cada uma das atividades da tarefa reatualizada 2. Para isso, embasaram-se nas mesmas justificativas que haviam apresentado para a delimitação do número de questões nas atividades da tarefa reatualizada 1. Tal consenso foi alcançado sem necessidade de novas discussões.

Assim, observamos que as propostas e os argumentos apresentados pelas participantes para a tarefa 2 foram coerentes com o quadro teórico de Douady, por visarem preservar a liberdade dos alunos. Embora o quadro teórico de Douady não tenha sido citado pelas participantes, estas se preocuparam em possibilitar situações que mobilizem conhecimentos antigos, favorecendo o surgimento e desenvolvimento de novos conhecimentos matemáticos que possam ser empregados na resolução das atividades.

Houve consenso quanto às fases da dialética ferramenta–objeto. As professoras e a coordenadora/assessora de matemática defenderam a necessidade da abertura de debates entre os alunos, tanto no que concerne ao momento em que tais debates devam ser promovidos, quanto a sua importância. Concordaram inclusive sobre a validação das estratégias de resolução dos alunos.

4.2.2.1. Processo de reatualização das atividades 3 e 4 e de elaboração das atividades complementares 1, 2 e 3 da tarefa reatualizada 2

Considerando-se que os argumentos expostos pelas professoras aplicam-se a todas as atividades reatualizadas, bem como às atividades complementares da tarefa 2, apresentaremos o processo de reatualização e de elaboração delas em um único tópico.

Após discussão, chegou-se ao consenso de que o intervalo previamente determinado a ser fornecido aos alunos deveria ser ampliado nas atividades reatualizadas 3 e 4, devendo-se propor intervalos grandes também para as atividades complementares 1, 2 e 3 da tarefa reatualizada 2.

Objetivou-se com isso aumentar o desafio das atividades, visto que elas prevêem enquadramento do número pensado num intervalo compreendido por dois números inteiros consecutivos, o que condiz com nossas intenções de pesquisa. A elaboração das atividades foi feita pela pesquisadora, conforme sugestão das demais participantes, e obteve-se consenso.

Presumimos que ampliar os intervalos a serem propostos nas atividades reatualizadas da tarefa 2 as tornaria mais desafiantes, possivelmente permitindo aos alunos um maior envolvimento investigativo, dadas as possíveis novas dificuldades potencialmente encontradas durante a resolução das atividades por completo.

Desse modo, pressupusemos que essas atividades reatualizadas, por apresentarem maior grau de complexidade, possibilitariam maior envolvimento dos alunos em sua resolução, podendo acarretar maior necessidade de anotações. Supusemos que essa necessidade se tornaria cada vez maior, à medida que os alunos precisassem exercer maior reflexão. As anotações lhes permitiriam recorrer às perguntas e respostas já suscitadas durante a vivência das atividades, evitando-lhes a elaboração de perguntas supérfluas.

É oportuno salientar que a tarefa atualizada por nós propunha apenas duas atividades (atividades atualizadas 3 e 4). Entretanto, pensamos em elaborar as atividades complementares com o intuito de garantir, caso seja requerido pelos alunos ou julgado necessário pelo professor, a continuidade da tarefa, visto que seu objetivo consistia na determinação do intervalo de dois números inteiros consecutivos, e não mais do número inteiro pensado.

4.2.3. PRINCIPAIS ASPECTOS REATUALIZADOS NA TAREFA 2

Tendo em conta a proposta dessa tarefa reatualizada 2 em sala de aula, foram sugeridas durante os debates algumas alterações e adaptações a serem feitas a ela, as quais serão enunciadas neste tópico. Salientaremos em negrito os principais aspectos reatualizados dessa tarefa. A descrição da tarefa e das atividades reatualizadas será realizada no tópico seguinte.

Após os argumentos apresentados pelas participantes, decidiu-se que a dinâmica da tarefa reatualizada 2 deveria ser alterada no que se refere à **formação das equipes participantes**. Estabeleceu-se que os alunos deveriam constituir **uma só equipe**, a ser desafiada pelo professor.

Outro aspecto reatualizado foi a **alteração dos números** previamente pensados, bem como dos **intervalos de números inteiros** previamente determinados a serem fornecidos aos alunos e do **número máximo de questões permitidas** para cada uma das atividades (atividades reatualizadas 3 e 4). Contudo, convém ressaltar que para essa tarefa foram **elaboradas outras três atividades** (atividades complementares 1, 2 e 3 da tarefa reatualizada 2).

4.2.4. DESCRIÇÃO DA TAREFA REATUALIZADA 2

O professor de matemática deverá inicialmente anotar em um papel o número racional sob forma fracionária previamente determinado, sem que este seja visto pelos alunos. A anotação será revelada somente depois que os alunos tiverem determinado o intervalo de dois números inteiros consecutivos.

Será fornecido aos alunos um intervalo de números inteiros, também previamente determinado, em que o número pensado esteja compreendido.

Para o desenvolvimento dessa tarefa, os alunos deverão constituir uma única grande equipe, a ser desafiada pelo professor. Deverão elaborar questões e formulá-las ao professor, que, por sua vez, será responsável pelo fornecimento das respostas.

Para isso, os alunos poderão utilizar somente relações do tipo: ‘é maior que’ ou ‘é menor que’, sendo as questões respondidas somente com ‘sim’ ou ‘não’.

O professor deverá comunicar aos alunos que haverá um dado número máximo de questões que poderão ser formuladas. Essa quantidade está determinada no enunciado de cada atividade.

O objetivo dessa tarefa é determinar o intervalo de números inteiros consecutivos em que o número pensado está compreendido.

A tarefa subdivide-se em cinco atividades, denominadas *atividade reatualizada 3*, *atividade reatualizada 4*, *atividade complementar 1 da tarefa reatualizada 2*, *atividade complementar 2 da tarefa reatualizada 2* e *atividade complementar 3 da tarefa reatualizada 2*.

4.2.4.1. ATIVIDADE REATUALIZADA 3

Número pensado: $\frac{1}{5}$.

Essa atividade utiliza as regras da tarefa reatualizada 2, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–15, 15] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –15 e 15.

b) a quantidade máxima de questões permitidas aos alunos é cinco.

4.2.4.2. ATIVIDADE REATUALIZADA 4

Número pensado: $\frac{67}{5}$.

Essa atividade também segue as regras da tarefa reatualizada 2, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [3, 41] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por 3 e 41.

b) a quantidade máxima de questões permitidas aos alunos é sete.

4.2.4.3. ATIVIDADE COMPLEMENTAR 1 DA TAREFA REATUALIZADA 2

Número pensado: $-\frac{15}{2}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa reatualizada 2, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–52, –1] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –52 e -1.

b) a quantidade máxima de questões permitidas aos alunos é sete.

4.2.4.4. ATIVIDADE COMPLEMENTAR 2 DA TAREFA REATUALIZADA 2

Número pensado: $-\frac{1}{8}$.

Essa atividade utiliza as regras da tarefa reatualizada 2, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–27, 5] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –27 e 5.

b) a quantidade máxima de questões permitidas aos alunos é sete.

4.2.4.5. ATIVIDADE COMPLEMENTAR 3 DA TAREFA REATUALIZADA 2

Número pensado: $\frac{83}{2}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa reatualizada 2, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–31, 50] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –31 e 50.

b) a quantidade máxima de questões permitidas aos alunos é oito.

4.3. TAREFA ATUALIZADA 3 — ENQUADRAMENTO DE UM NÚMERO RACIONAL SOB FORMA FRACIONÁRIA NUM INTERVALO COMPREENDIDO POR DOIS NÚMEROS RACIONAIS

Essa tarefa consta como atividade na proposta de Douady (1986). Nossa tarefa atualizada conserva como objetivo central o enquadramento de um número racional sob forma fracionária num intervalo compreendido por dois números racionais. Ambas as propostas contemplam a abordagem de números racionais sob forma fracionária, embora nossa atualização, diferentemente do que é proposto por Douady, não restrinja o trabalho apenas a essa representação, mas possibilite também a manipulação de números racionais sob forma decimal.

4.3.1. DESCRIÇÃO DA TAREFA ATUALIZADA 3

A tarefa atualizada 3 caracteriza-se por uma dinâmica diferenciada das tarefas atualizadas 1 e 2, apresentadas anteriormente.

A dinâmica elaborada para sua realização prevê a divisão dos alunos em três grandes equipes — duas *equipes receptoras* e uma *equipe emissora* —, todas coordenadas pelo professor.

As equipes receptoras serão responsáveis pela formulação de questões à equipe emissora. Esta última será responsável pela elaboração das respostas aos questionamentos feitos.

Esses questionamentos deverão ser formulados alternadamente pelas equipes receptoras. Para isso, elas poderão utilizar somente relações dos tipos 'é maior que' ou 'é menor que', sendo as questões respondidas somente com 'sim' ou 'não'.

As questões deverão ser formuladas em voz alta, de modo que todos os participantes possam ouvi-las, bem como às respectivas respostas.

O professor deverá comunicar que haverá um dado número máximo de questões que cada uma das equipes receptoras poderá fazer a fim de buscar intervalos cada vez menores que contenham o número racional escolhido. Essa quantidade está determinada no enunciado de cada atividade e será a mesma para ambas as equipes receptoras.

O professor deverá, no início de cada atividade dessa tarefa, anotar em um papel o número racional sob forma fracionária previamente pensado. Comunicará esse número somente à equipe emissora, sem revelá-lo às equipes receptoras. O número será mostrado às equipes receptoras somente no final de cada atividade, após a determinação do menor intervalo compreendido por dois números racionais, dentre os fornecidos por elas.

Também será fornecido a todas as equipes um intervalo de números inteiros, também previamente determinado, no qual o número pensado está compreendido.

O objetivo dessa tarefa consiste em determinar um intervalo de números racionais em que o número racional previamente pensado esteja compreendido. Vencerá a equipe receptora que houver enunciado o menor intervalo de números racionais, dentre os intervalos determinados pelas equipes, que contenha o número racional pensado.

Para essa tarefa atualizada 3, são propostas três atividades, nas quais as três equipes participantes revezarão suas funções. Isso é descrito pelo Quadro 1:

Quadro 1. Revezamento das equipes na tarefa atualizada 3.

Atividade	Equipe A	Equipe B	Equipe C
Atividade reatualizada 5	Emissora	Receptora	Receptora
Atividade reatualizada 6	Receptora	Emissora	Receptora
Atividade reatualizada 7	Receptora	Receptora	Emissora

Essa dinâmica foi escolhida com o intuito de proporcionar a todos os participantes da tarefa a oportunidade de atuarem ao menos uma vez como membros da equipe emissora, função que, acreditamos, coloca maiores demandas sobre seus integrantes, pois a elaboração de respostas requer maior empenho do grupo, dada a necessidade de realizarem enquadramento de números racionais ao serem questionados pelas equipes receptoras.

Durante a vivência, pelos alunos, das atividades atualizadas dessa tarefa, é possível que a intervenção do professor não se mostre suficiente para o esclarecimento de possíveis situações de bloqueio ou até mesmo de visões errôneas. Nesse caso, o professor poderá, quando considerar necessário, propor outras atividades, denominadas *atividades de intervenção*, as quais vemos como mais simples. Para cada uma das atividades atualizadas (5, 6 e 7) há duas atividades de intervenção. A proposta original de Douady não prevê a utilização de atividades de intervenção.

Sugere-se, assim, que o professor utilize primeiro a atividade de intervenção 1, recorrendo à segunda somente se julgar que isso é necessário e pertinente.

Para a escolha dos números racionais sob forma fracionária para todas as atividades atualizadas dessa tarefa, bem como para suas atividades de intervenção, optamos pela utilização de um mesmo critério:

Para cada uma das três atividades atualizadas (5, 6 e 7), optamos pela escolha de uma fração imprópria e irredutível. Para a primeira atividade de intervenção de cada uma das atividades atualizadas, optamos por escolher uma fração decimal com denominador que não é escrito na forma de potência de 10, mas que pode ser escrito sob essa forma (fração decimal).

Já para a segunda atividade de intervenção de cada uma das atividades atualizadas, escolhemos uma fração decimal com denominador escrito na forma de potência de 10.

A seguir apresentamos as atividades atualizadas e suas respectivas atividades de intervenção.

4.3.1.1. Atividade atualizada 5

Número pensado: $\frac{15}{11}$

Essa atividade segue as regras da tarefa atualizada 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–5, 3] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –5 e 3;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe é três.

4.3.1.1.1. Atividade de intervenção 5.1

Número pensado: $\frac{15}{4}$

Essa atividade segue as regras da tarefa atualizada 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–1, 4] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –1 e 4;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe é três.

4.3.1.1.2. ATIVIDADE DE INTERVENÇÃO 5.2

Número pensado: $\frac{1}{100}$

Essa atividade utiliza as regras da tarefa atualizada 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–1, 1] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –1 e 1;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe é três.

4.3.1.2. ATIVIDADE ATUALIZADA 6

Número pensado: $\frac{25}{7}$

Essa atividade segue as regras da tarefa atualizada 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–3, 7] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –3 e 7;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe é três.

4.3.1.2.1. ATIVIDADE DE INTERVENÇÃO 6.1

Número pensado: $\frac{25}{8}$

Essa atividade segue as regras da tarefa atualizada 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–1, 6] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –1 e 6;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe é três.

4.3.1.2.2. ATIVIDADE DE INTERVENÇÃO 6.2

Número pensado: $\frac{3}{1000}$

Essa atividade segue as regras da tarefa atualizada 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [0, 1] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por 0 e 1;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe é três.

4.3.1.3. ATIVIDADE ATUALIZADA 7

Número pensado: $\frac{17}{4}$

Essa atividade segue as regras da tarefa atualizada 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–1, 5] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –1 e 5;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe é três.

4.3.1.3.1. ATIVIDADE DE INTERVENÇÃO 7.1

Número pensado: $\frac{27}{3}$

Essa atividade segue as regras da tarefa atualizada 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [7, 12] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por 7 e 12;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe é três.

4.3.1.3.2. ATIVIDADE DE INTERVENÇÃO 7.2

Número pensado: $\frac{81}{100}$

Essa atividade segue as regras da tarefa atualizada 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [0, 2] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por 0 e 2;

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe é três.

4.3.2. PROCESSO DE REATUALIZAÇÃO DA TAREFA 3 E CONSIDERAÇÕES

Essa tarefa 3 consta na atividade original de Douady (1986). Tanto nossa tarefa reatualizada 3 quanto a proposta por Douady focalizam o enquadramento de um número racional compreendido num intervalo de dois números racionais. Durante os debates, a tarefa atualizada 3 foi mostrada às professoras para que sua pertinência fosse posta à prova, assim como para que fossem sugeridas possíveis alterações e adaptações.

Apresentaremos neste tópico essas sugestões e outras considerações referentes à tarefa 3.

Um aspecto abordado pelas participantes refere-se à pertinência de alterarmos a dinâmica que havíamos proposto para a tarefa atualizada 3.

Foi sugerido que, em vez de dividir os alunos da classe em três grandes equipes (duas receptoras e uma emissora, como proposto na tarefa atualizada 3), os alunos fossem divididos em quartetos, os quais seriam subdivididos em duas equipes: uma emissora e outra receptora.

A dinâmica da tarefa atualizada 3 previa que as três equipes participariam conjuntamente de uma mesma atividade. No entanto, para a realização da tarefa reatualizada 3, os quartetos deverão participar isoladamente das atividades, havendo, ao final de cada uma delas, interação entre todos eles, por compartilharem o objetivo de uma mesma tarefa: a determinação do menor intervalo de dois números racionais, dentre os fornecidos por eles, em que o número pensado esteja compreendido.

A dinâmica foi alterada não apenas com base na proposta original de Douady (1986), mas também em uma ressalva feita pela coordenadora/assessora de matemática. Esta salientou que, com a proposta prevista pela tarefa atualizada 3, caso as equipes receptoras utilizassem corretamente as perguntas e respostas, ambas obteriam o mesmo intervalo de números racionais em que o número racional pensado estivesse compreendido, não havendo vencedor. Isso pode ser acompanhado nesta transcrição:

> C: O problema da dinâmica da tarefa atualizada 3 está na possibilidade de não haver vencedor. É interessante olharmos o que é proposto por Douady. Vamos ler um trecho do seu trabalho, para confrontar com nossa discussão sobre a dinâmica da tarefa 3. Para essa etapa, Douady propõe um afinamento. Ela propõe que os alunos da classe sejam divididos em pares, sendo que cada dois pares formam um grupo. O professor deverá propor atividades para os dois pares de cada grupo, ou seja, todos os alunos trabalharão.

Um dos pares da equipe fará perguntas ao outro par de sua equipe, que deverá responder a esses questionamentos. O professor dá o mesmo número pensado e o mesmo número de questões para todos os pares responsáveis pelas respostas. No final, o professor questiona o intervalo obtido por cada dupla. Entenderam a dinâmica?

P1: É como se atribuíssemos o papel do professor para algumas equipes.

C: Isso mesmo. Estaríamos fornecendo as mesmas informações para todos os quartetos para podermos comparar os intervalos. Seria a mesma atividade para todos eles. Depois trocaríamos os papéis entre os pares dos quartetos.

P2: Assim, pode-se comparar os intervalos.

C: O que vocês acham de propormos essa mesma dinâmica para a tarefa 3?

P1: Eu acho que seria ótimo, porque todos trabalhariam simultaneamente com a mesma atividade, com o mesmo objetivo.

P2: Também acho, fica mais coerente, principalmente se pensarmos em nossa proposta escolar.

C: Então, decidido.

Durante esse debate, a coordenadora/assessora de matemática recorreu à obra original de Douady (1986), em que este tipo de atividade está descrito. Note-se que a coordenadora/assessora de matemática não só citou essa obra, como também leu para as professoras de matemática e para a pesquisadora alguns de seus trechos e argumentações. Desse modo, salientou a utilização desse quadro teórico por essa instituição de ensino e a disponibilidade de consulta desses materiais a seus profissionais, assim como de outros autores, tanto brasileiros quanto estrangeiros, seguidores dessa mesma linha de pesquisa francesa em Educação Matemática.

A pesquisadora e as professoras concordaram com a sugestão feita pela coordenadora/assessora de matemática, e optou-se pelo estabelecimento dessa dinâmica para a tarefa reatualizada 3.

Consideramos que a proposta de alterar a dinâmica implementando a divisão dos grupos continua sendo coerente com as intenções dessa pesquisa, por abrir a possibilidade de que todos os alunos participem igualmente das atividades ao desenvolverem alternadamente suas funções (de emissores e receptores).

Ponderamos que, dessa forma, os alunos são levados a participar das atividades de modo que o desempenho de seu quarteto dependa igualmente da equipe emissora e da receptora, sendo necessário que ambas as equipes desenvolvam seus conhecimentos matemáticos ao se envolverem nas situações que lhes são propostas pela tarefa.

No entanto, convém ressaltar que a proposta de determinar uma equipe “vencedora” ao final de cada atividade, por visar tornar a tarefa mais desafiante, está de acordo com os objetivos apresentados pela instituição de ensino em que se deu nossa investigação. A utilização dessas atividades em sala de aula deverá ser ponderada pelo professor e pelos alunos, de acordo com seus propósitos e necessidades.

Antes de se alcançar esse consenso foram formuladas outras sugestões de possíveis dinâmicas para a essa tarefa, relatadas a seguir. Tais sugestões, porém, não foram consensuais entre as participantes.

P1: Eu acho que nessa tarefa 3 poderíamos propor que o professor represente uma das equipes, sendo as outras duas formadas por alunos, ao invés de termos três equipes de alunos. O professor substituiria uma das três equipes, invertendo suas funções. Ora o professor é a equipe emissora e os alunos as equipes receptoras, ora trocamos esses papéis.

C: Não estou entendendo.

Pesquisadora: A princípio, o que a P1 sugeriu foi: como nós propomos três equipes de alunos na tarefa atualizada 3, ela nos disse que poderíamos pensar em duas equipes de alunos, sendo a terceira equipe formada pelo próprio professor, alternando suas funções. Sugeriu também outra proposta. Que, ao invés de termos três equipes, que tenhamos apenas duas, uma formada por todos os alunos e a outra pelo professor, alternando os papéis de emissores e receptores.

P1: Eu pensei no professor estar fazendo parte dessa dinâmica, dessa construção.

C: O que você acha, P2, dessa proposta?

P2: Eu sugeri que, para a tarefa 3, se começasse com o professor pensando o número e a classe trabalhando toda junta. Assim teriam a noção do que estamos querendo, antes de dividi-los em grupos. Pensei nisso por acreditar que assim os alunos poderão se familiarizar como o objetivo proposto por essa tarefa, que é a determinação de um intervalo de números racionais. Acho que devemos ter pelo menos um trabalho com essa proposta. Deixaria, no momento seguinte, a proposta em que os alunos seriam divididos em três grupos: um emissor e dois receptores.

C: Acho que a proposta da P1 não é viável, pois o fato do professor formar uma equipe rompe com o princípio institucional. Então essa dinâmica sugerida fica incoerente, porque o professor estaria como o aprendiz [falsamente colocado no mesmo nível do aprendiz]. Eu acho que, do ponto de vista institucional, devemos tomar essa referência, e como não estamos fechadas para novas possibilidades, podemos repensar outra dinâmica. Vocês concordam?

P1 e P2: Concordamos.

Cogitou-se também, durante os encontros, sobre a pertinência de atribuir as funções de equipe receptora e emissora aos alunos, ou seja, sobre a atribuição de responsabilidade a eles, de modo que o bom desenvolvimento da tarefa dependa de todos. É o que revela a transcrição que se segue:

Pesquisadora: Vocês acham que é válido para os alunos o fato de atribuirmos responsabilidade para eles também?

P1: Sim. Eu acho que aqui está o grande desafio. O sucesso da atividade depende deles, tanto dos emissores quanto dos receptores, porque nas tarefas 1 e 2 o professor está junto, incluído no sucesso das atividades. A partir do momento em que os alunos assumem essas funções, serão responsáveis pelo sucesso ou não delas. Dependerá se as assumirão com responsabilidade ou não.

Outro aspecto que nos chamou atenção foi a sugestão de não utilizar as atividades de intervenção que seriam fornecidas em caso de bloqueio ou de visões errôneas dos alunos. Os argumentos apresentados pelas participantes são coerentes com o quadro teórico adotado nessa pesquisa e pela escola, bem como com os princípios da instituição e com suas práticas escolares, como mostra o seguinte diálogo:

Pesquisadora: Foi pensado por nós que as atividades de intervenção deveriam ser utilizadas em situações de bloqueios dos alunos no desenvolvimento das atividades dessa tarefa. Manteríamos a mesma dinâmica, só que com números que acreditamos serem mais fáceis para o trabalho dos alunos. O que vocês acham sobre essa proposta?

P1: Como os alunos já vivenciaram as tarefas 1 e 2, acho que conseguirão trabalhar bem com essa tarefa 3. Acho que podemos assim propor essa tarefa 3.

P2: Acredito que a evolução das tarefas 1, 2 e 3 é gradativa e que os alunos chegarão nessa tarefa 3 bem familiarizados, não havendo necessidade dessas atividades de intervenção. Isso poderia desestimulá-los.

P1: Isso não é coerente com a nossa prática escolar.

P2: Melhor pensarmos na tarefa 3 sem as atividades de intervenção.

Assim, optou-se por desconsiderar a proposição das atividades de intervenção.

A necessidade da reelaboração das atividades da tarefa reatualizada 3 decorreu do consenso obtido sobre a alteração da dinâmica prevista para ela, assim como sobre a supressão das atividades de intervenção.

A tarefa atualizada 3 previa a divisão dos alunos em três grandes equipes que revezariam as funções de receptoras e emissora, em três rodadas. Disso se depreendia a necessidade de três atividades para essa tarefa.

No entanto, conforme apresentado anteriormente na tarefa reatualizada 3, os alunos serão divididos em quartetos subdivididos em duplas que se revezarão nas funções de equipe emissora e receptora, disso decorrendo a necessidade da elaboração de duas atividades para cada rodada, a fim de permitir que ambas as equipes vivenciem cada uma dessas funções ao menos uma vez.

As professoras de matemática julgaram satisfatória a elaboração de três rodadas que contemplem duas atividades cada uma, totalizando assim seis atividades para essa tarefa reatualizada 3.

Optou-se por deixar a elaboração dessas atividades a cargo da pesquisadora, de modo que ambas as atividades de cada rodada apresentassem o mesmo grau de dificuldade, visando não favorecer nenhuma das duplas dos quartetos. As atividades propostas pela pesquisadora foram apresentadas e consensualmente aprovadas pelas professoras e pela coordenadora/assessora de matemática.

O seguinte diálogo mostra a decisão sobre a quantidade de atividades a serem propostas na tarefa reatualizada 3:

Pesquisadora: Quantas atividades vocês julgam necessárias para a tarefa reatualizada 3?

P2: Para essa dinâmica precisamos ter, no mínimo, duas atividades, pois eles vão querer desempenhar as funções pelo menos uma vez. Se propusermos para uma dupla, a outra também vai querer. É interessante que essa troca aconteça pelo menos uma vez.

Pesquisadora: Vocês acham interessante elaborarmos mais uma rodada com duas atividades, para que possa ser usada caso seja necessário?

P1: Acho que sim.

P2: Acho interessante prepararmos seis atividades para essa tarefa. Assim pode-se propor três rodadas. {A professora P1 concorda.}

A tarefa atualizada 3 previa três atividades, com duas atividades de intervenção cada uma. Totalizava, dessa forma, a proposição de nove atividades. Já a tarefa reatualizada 3 passou a prever seis atividades, subdivididas em três rodadas.

É interessante o fato de que as professoras, tendo em conta suas práticas docentes, tenham se preocupado constantemente em assegurar liberdade aos alunos, sem desconsiderar, no entanto, as possíveis ocorrências em sala de aula, bem como as necessidades e responsabilidades dos alunos. Isso é coerente com o quadro teórico adotado e com as intenções dessa pesquisa.

4.3.2.1. PROCESSO DE REATUALIZAÇÃO DAS ATIVIDADES 5, 6 E 7

Devido à alteração da dinâmica prevista para as atividades 5, 6 e 7, seu processo de reatualização é aqui apresentado conjuntamente. Graças à nova dinâmica que se percebeu ser conveniente para a tarefa reatualizada 3, tornou-se essencial propor duas atividades para cada rodada, com o mesmo nível de dificuldade para ambas. Com isso, buscou-se preservar o caráter de desafio das atividades para ambas as equipes, preservando também o aumento gradativo da dificuldade para a resolução dessa tarefa.

Houve consenso entre as participantes de que a pesquisadora ficaria encarregada de elaborar todas as atividades dessa tarefa, as quais lhes seriam posteriormente apresentadas para aprovação.

Consideramos que esses aspectos emergidos durante o processo de reatualização das atividades da tarefa 3 são coerentes com nossas intenções de pesquisa e com o quadro teórico adotado, por presumirmos que propiciem condições similares para que ambos os pares de cada quarteto desenvolvam as atividades sem que nenhum seja favorecido.

4.3.3. PRINCIPAIS ASPECTOS REATUALIZADOS NA TAREFA 3

Apresentamos aqui as principais alterações e adaptações à tarefa 3 sugeridas pelas professoras e pela coordenadora/assessora de matemática. Os aspectos mais relevantes estão destacados em negrito.

Uma das decisões foi a de mudar a dinâmica da tarefa 3. Decidiu-se que a **formação das equipes participantes** deveria ser modificada, acolhendo-se assim a proposta de divisão dos alunos em quartetos subdivididos em duplas.

Outra decisão foi a **alteração das atividades a serem propostas nessa tarefa,** no que se refere aos números racionais previamente pensados e aos intervalos de números inteiros previamente determinados a serem fornecidos aos alunos, e também ao número máximo de questões permitidas para cada uma das atividades.

Deve-se frisar que se alterou também a **quantidade de atividades previstas** para essa tarefa. Foram **elaboradas seis atividades**, subdivididas em três rodadas (rodada I: atividades reatualizadas 5a e 5b; rodada II: atividades reatualizadas 6a e 6b; rodada III: atividades reatualizadas 7a e 7b). No entanto, optou-se pela **não-utilização das atividades de intervenção** previstas na tarefa atualizada 3.

4.3.4. DESCRIÇÃO DA TAREFA REATUALIZADA 3

Para a realização da tarefa 3 reatualizada, os alunos deverão, sob coordenação do professor, ser divididos em quartetos. Cada um desses quartetos deverá ser subdividido em duplas. Uma das duplas constituirá a equipe emissora; a outra, a equipe receptora.

A equipe receptora deverá elaborar questões e apresentá-las à equipe emissora de seu quarteto, a qual, por sua vez, será responsável pelo fornecimento das respostas. Para isso, a equipe receptora poderá utilizar somente relações dos tipos 'é maior que' ou 'é menor que', sendo as questões respondidas somente com 'sim' ou 'não'.

O professor deverá inicialmente anotar em um papel o número racional sob forma fracionária previamente pensado. Comunicará esse número somente às equipes emissoras de todos os quartetos, sem revelá-lo às equipes receptoras. O número será mostrado às equipes receptoras somente no final de cada atividade.

Será fornecido a todas as equipes um intervalo de números inteiros, também previamente determinado, em que o número racional pensado esteja compreendido.

O professor deverá comunicar aos quartetos que haverá um dado número máximo de questões que cada uma das equipes receptoras poderá fazer à equipe emissora de seu quarteto a fim de buscarem intervalos cada vez menores que contenham o número racional pensado. Essa quantidade está determinada no enunciado de cada atividade e será a mesma para todos os quartetos.

As informações transmitidas às equipes (número racional sob forma fracionária, intervalo de dois números inteiros em que o número racional esteja compreendido e número máximo de questões permitidas às equipes receptoras) serão as mesmas para todos os quartetos.

A dinâmica prevê que, embora cada quarteto deva vivenciar as atividades isoladamente, de forma que a equipe emissora e a equipe receptora de cada quarteto interajam unicamente uma com a outra, a tarefa deverá ser proposta simultaneamente a todos os quartetos. Todas as equipes receptoras deverão, ao final de cada atividade, relatar o intervalo de dois números racionais que obtiverem. O objetivo dessa tarefa é determinar o menor intervalo de números racionais em que o número racional previamente pensado esteja compreendido, dentre os intervalos fornecidos pelas equipes receptoras. Ou seja, vencerá o quarteto que obtiver o menor intervalo dentre esses fornecidos.

Para isso, o professor poderá anotar na lousa todos os intervalos determinados pelas equipes receptoras e promover uma discussão com os alunos, a fim de determinar o menor intervalo dentre os fornecidos pelos quartetos.

Para essa tarefa, em cada rodada, serão propostas duas atividades, nas quais as duas equipes de cada quarteto deverão revezar suas funções (de emissores e receptores).

Essa dinâmica foi elaborada com o intuito de proporcionar aos participantes a oportunidade de atuarem tanto como membros da equipe emissora quanto da receptora.

Para essa tarefa são propostas três rodadas (I, II e III) subdivididas em duas atividades cada uma, totalizando assim seis atividades. As atividades da rodada I foram denominamos *atividades reatualizadas 5a e 5b*; as da rodada II, *atividades reatualizadas 6a e 6b*; e as da rodada III, *atividades reatualizadas 7a e 7b*.

4.3.4.1. Rodada I – Atividades reatualizadas 5a e 5b

4.3.4.1.1. Atividade reatualizada 5a

Número pensado: $\frac{57}{5}$.

Essa atividade obedece às regras da tarefa reatualizada 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [3, 21] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por 3 e 21.

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe receptora é oito.

4.3.4.1.2. Atividade reatualizada 5b

Número pensado: $\frac{78}{4}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa reatualizada 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [17, 39] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por 17 e 39.

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe receptora é oito.

4.3.4.2. Rodada II – Atividades reatualizadas 6a e 6b

4.3.4.2.1. Atividade reatualizada 6a

Número pensado: $-\frac{31}{5}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa reatualizada 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–7, 2] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –7 e 2.

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe receptora é oito.

4.3.4.2.2. ATIVIDADE REATUALIZADA 6B

Número pensado: $-\frac{19}{2}$.

Essa atividade obedece às regras da tarefa reatualizada 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [–10, 1] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por –10 e 1.

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe receptora é oito.

4.3.4.3. RODADA III – ATIVIDADES REATUALIZADAS 7A E 7B

4.3.4.3.1. ATIVIDADE REATUALIZADA 7A

Número pensado: $\frac{77}{8}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa reatualizada 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [4, 15] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por 4 e 15.

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe receptora é oito.

4.3.4.3.2. ATIVIDADE REATUALIZADA 7B

Número pensado: $\frac{49}{125}$.

Essa atividade segue as regras da tarefa reatualizada 3, sendo que:

a) o professor fornecerá aos alunos o intervalo [0, 11] e lhes informará que pensou em um número racional sob forma fracionária compreendido por 0 e 11.

b) a quantidade máxima de questões permitidas para cada equipe receptora é oito.

4.4. CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O PROCESSO DE REATUALIZAÇÃO DAS TAREFAS 1, 2 E 3

Neste tópico discorreremos sobre outros aspectos suscitados durante os encontros promovidos entre as professoras, a pesquisadora e a coordenadora/assessora de matemática referentes às propostas de alterações e adaptações das tarefas 1, 2 e 3, bem como algumas explanações feitas por elas e consideradas relevantes por nós. Os aspectos aqui relatados não se referem exclusivamente a uma única tarefa.

Um aspecto abordado pelas professoras foram as possíveis estratégias de resolução que os alunos possivelmente utilizarão ao realizar as tarefas. O Quadro 2 contém trechos de falas que contemplam algumas das considerações das professoras:

Quadro 2. Trechos de falas das professoras de matemática e da pesquisadora sobre possíveis estratégias de resolução a serem utilizadas por alunos durante a realização das tarefas reatualizadas 1, 2 e 3. Aspectos gerais.

1. Pesquisadora: Na tarefa 1, de ambientação, quais estratégias vocês supõem que os alunos usariam?
2. P1: Caso estejam trabalhando com um intervalo que contemple tanto números positivos quanto negativos, acho que alguns alunos irão selecionar primeiro se é maior ou menor que zero, podendo depois adotar a estratégia de corte pelo meio do intervalo.
3. P2: Estamos fazendo, aqui na escola, um trabalho com os números reais de localização na reta. Isso é habitual. Observamos que a maioria dos alunos procura o meio do intervalo.
4. Pesquisadora: E os outros? Que tipo de procedimento você acham que usariam?
5. P2: Percebo que os outros não têm um critério definido. Tem alguns alunos que até se perdem por isso e saem da proposta. Mas a maioria dos alunos vai questionando “é maior que” ou “é menor que”, procurando o meio do intervalo.

6. Pesquisadora: Se pensarmos na tarefa 3, em que se objetiva o enquadramento de números racionais em intervalo compreendido por dois números racionais, qual pode ser o procedimento usado pelos alunos quando trabalham com um intervalo compreendido por dois números inteiros?
7. P2: Suponhamos que eles tenham o intervalo compreendido pelos números 3 e 4. Acho que a maioria deles buscaria a metade do intervalo e perguntaria "é maior que sete meios?" ou "é menor que sete meios?".

Foram abordados também os possíveis domínios (em termos de representações numéricas, gráficas ou outras) a serem usados pelos alunos ao vivenciarem as tarefas, como consta no Quadro 3.

Quadro 3. Trechos de falas das professoras de matemática e da pesquisadora sobre possíveis estratégias de resolução, domínios (em termos de representações numéricas, gráficas ou outras) a serem utilizados por alunos durante a realização das tarefas reatualizadas 1, 2 e 3.

1. Pesquisadora: Considerando as tarefas propostas por nós, vocês acham que os alunos recorrerão a qual domínio?
2. P1: Acho que eles recorreriam ao geométrico.
3. Pesquisadora: Que tipo de representação eles podem usar pra auxiliá-los?
4. P1: Acho que eles podem recorrer à reta numérica. Só que eles poderão ter dificuldade de localizar, principalmente quando o intervalo ficar menor. Eles poderão se atrapalhar um pouco. Percebo que os alunos têm mais facilidade em trabalhar com a representação decimal, mas, mesmo assim, também tem aluno que tem dificuldade de representar. Localizar o número fracionário na reta numérica, quando não estão trabalhando com frações mais elementares, como por exemplo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ..., é mais difícil para eles. Não é um trabalho tão simples.
5. P2: Não tenho certeza, mas eu acho que as duas formas não são tão difíceis assim para eles. Fica difícil quando o intervalo é pequeno e eles querem representar dentro desse intervalo. Eles tentam fazer a divisão de centímetro em centímetro entre uma unidade e outra. Depois tentam repartir em dez partes, vinte partes, buscando um intervalo menor. Mas isso pode ser direcionado. Podemos dizer: "Olha, façam o número 3 e o número 4 bem distantes, porque assim vocês poderão dividir melhor esse espaço". Eu acho que assim eles podem conseguir.

Acho que no começo de sétima série talvez eles façam ainda algum tipo de confusão entre quem é maior, quem é menor, ao trabalharem a idéia de antecessor e sucessor com números negativos. Talvez ocorra isso em um primeiro momento. Eu acho que a representação pode ajudá-los. No mental, acho que eles poderão se confundir.

6. Pesquisadora: Vocês acham que, como nossas tarefas prevêem um dado número máximo de questões que os alunos poderão fazer em cada atividade, eles buscarão procedimentos mais econômicos?
7. P1: Eu acho que sim. Procurarão procedimentos mais econômicos. Alguns alunos são supereconômicos em suas anotações. Quanto menos anotarem, melhor. Eles não consideram importante anotar. Outros alunos, para não fazerem a mesma pergunta, para não as repetir, as anotam, podendo recorrer também ao apoio visual, em reta. Alguns escrevem por extenso as perguntas que foram feitas, enquanto outros apenas utilizam símbolos matemáticos.
8. Pesquisadora: O que é mais freqüente?
9. P1: Isso é uma característica muito pessoal. Tem aluno que é bastante prático e objetivo, mas tem outros que anotam tudo detalhadamente, fazendo inclusive por extenso. Anotam usando mais a língua materna do que o simbólico. Os alunos que não apresentam muita dificuldade usam com certa freqüência e facilidade os símbolos. Já para os alunos com um pouco de dificuldade, a utilização de simbologia matemática não é tranqüila.
10. Pesquisadora: Em que série recorre mais à utilização da simbologia matemática?
11. P1: A partir da sétima. O nosso material didático já os leva para uma escrita mais simbólica. Isso se intensifica mais na oitava série, mas, mesmo assim, percebemos que nem todos os alunos utilizam essa linguagem. Boa parte a utiliza com espontaneidade, enquanto que para os outros temos que chamar atenção: "Tem uma outra forma de escrever isso matematicamente, usando símbolos?".
12. Pesquisadora: Essa é a postura adotada por essa escola?
13. P1: Depende da situação e do enfoque. Se o seu enfoque também é a linguagem formal, a escrita, então podemos sugerir, chamando atenção para isso.

Os trechos transcritos nos Quadros 2 e 3 permitem observar os seguintes aspectos:

a) Como possível **procedimento de resolução**, os alunos dispõem da estratégia designada por nós como “corte pelo meio do intervalo”, em que empregam a média aritmética dos extremos do intervalo. Isso é apontado, por exemplo, na fala 2 do Quadro 2.

b) Como possíveis **domínios**, os alunos dispõem do geométrico, do numérico, do algébrico e da “língua materna” (que doravante designaremos por *uso da língua materna*). É o que mostram, por exemplo, as falas 2, 5 e 7 do Quadro 3.

c) Como possíveis **ferramentas**, os alunos dispõem das relações matemáticas ‘ser maior que’ e ‘ser menor que’, bem como das noções de média aritmética, números positivos, números negativos, número antecessor, número sucessor e números racionais (sob forma fracionária e decimal). É o que apontam, por exemplo, as falas 2, 5 e 7 do Quadro 2 e as falas 4 e 5 do Quadro 3.

Supomos que as professoras de matemática dessa escola preocupam-se em propiciar situações de debate com os alunos em sala de aula, havendo indícios da importância atribuída por elas à explicitação das produções dos alunos, com a qual se possibilita que eles validem ou não suas idéias.

> P1: Acho interessante que os alunos compartilhem suas produções, ao final das atividades. Pode-se perguntar para eles: “Como vocês pensaram?”. Com isso, mostraríamos para a classe, caminhos diferentes para se chegar no mesmo objetivo. Isso acontece muito em sala de aula. Uns pensam de um jeito e os outros, de outro. Às vezes, o caminho, o procedimento de um é mais longo, tem mais etapas, mas também chega-se ao objetivo. Normalmente, não lhes é pedido que seja resolvido por tal caminho. A gente socializa os procedimentos, sem exigir que o aluno faça do jeito que o outro mostrou. Isso é bom, porque para um aluno que está com dificuldade, isso pode

ajudar. Ele pode começar a usar o recurso que lhe foi mostrado numa próxima atividade. Acontece muito em sala de aula dos alunos falarem como pensaram, possibilitando que um aluno fale: "É mesmo! Desse jeito fica mais fácil", podendo até incorporar essa nova idéia, pegando para ele esse procedimento. Mas isso nem sempre acontece. Existem também situações em que o aluno precisa estar fazendo todas as etapas. Às vezes, é preciso que ele interiorize, entendendo o que está fazendo. Depende de cada um. Quando proponho trabalho em grupo, passo pelos grupos e observo suas produções. Se eles me chamam e perguntam algo, eu respondo, mas se achar necessário salientar algum aspecto não abordado durante suas exposições, eu lhes chamo atenção e apresento na discussão final. Falo o que observei porque, às vezes, eles não falam por vergonha, ou porque não têm certeza se está certo.

C: Mas, nessas tarefas apresentadas nessa pesquisa é importante não ficar interrompendo os alunos a cada pergunta ou erro.

P1: Também acho. Se ficarmos interrompendo durante a atividade, acabamos interferindo. Se falarmos muito, podemos influenciar o raciocínio, as idéias deles, e no final, quando perguntar: "Como vocês fizeram?", não teremos como resposta o que eles realmente pensaram, sem interferência.

C: Isso. Se não interrompermos, eles expressarão o significado que eles realmente atribuem. E também não corta a dinâmica da atividade.

Supomos também que as falas apresentadas a seguir constituem indícios da importância atribuídas pelas participantes à ação de ressaltar para os alunos os aspectos matemáticos relevantes em uma determinada situação:

P1: Acho importante lançarmos algumas discussões em determinadas situações sobre as anotações e procedimentos usados pelos alunos, socializando-se assim os resultados.

C: Deve-se ver a melhor hora para se promover essa discussão. Não precisa, necessariamente, ser logo depois de cada atividade. Pode-se propor uma outra atividade e fazer essa discussão no final. Precisamos tomar cuidado para não ficarmos interrompendo muito.

P1: Acho que esses comentários devem acontecer na hora em que estivermos recuperando o que aconteceu.

P2: Dependendo do que aconteça, eu acho que podemos salientar imediatamente aos alunos. Imediatamente, que eu digo, é, terminada a atividade, mostramos, discutimos, debatemos, para aquilo ficar em foco. Tudo dependerá do andamento em sala de aula.

Outro aspecto elucidado pelas participantes refere-se aos erros de cálculo que os alunos poderão cometer, tanto ao realizarem conversão de representação fracionária em representação decimal quanto ao determinarem frações equivalentes. Cabe também destacar a importância atribuída por elas à iniciativa de propiciar aos alunos liberdade e condições favoráveis para que desenvolvam suas produções de forma autônoma. Isso é exemplificado pelas seguintes falas:

Pesquisadora: O que vocês acham sobre a possibilidade de fornecermos resultados de cálculos para os alunos, caso seja solicitado?

P1: Acho que não há nenhum impedimento, acho que pode até ser um facilitador, porque se eles quiserem transformar a fração em um número decimal, para ver sua localização, acho que isso facilitaria. Considerando-se que a localização do número fracionário na reta numérica pode ser um complicador para os alunos, se for uma fração que eles não estão acostumados a trabalhar, então a obtenção da representação decimal pode ser um facilitador. O que vocês acham? Vocês acham que pode haver muitos erros de cálculos?

P2: Eu acho que não. Pelo menos aqui na escola, os alunos estão acostumados a trabalhar com isso. Eles têm facilidade de achar uma equivalência e depois uma aproximação daquele valor.

C: A própria conduta da escola contorna isso, porque, na fase de debates, eles terão permissão de confrontar uns com outros suas respostas e seus achados. Os próprios alunos já contornam isso.

As professoras, ao observarem as tarefas atualizadas apresentadas por nós, referiram-se à possibilidade de que os alunos atribuam significados restritos às relações 'ser maior que' e 'ser menor que', assim como às suas negações:

P1: Em situações, por exemplo, que seja perguntado pelo aluno se o número é menor que -2, com resposta negativa, eu acho os alunos poderão pensar duas coisas. Uma delas seria a exclusão do número –2 [referindo-se à possibilidade de os alunos considerarem 'não ser menor' como sendo 'estritamente maior']. A outra seria a possibilidades deles pensarem: "Se o número não é menor, também pode ser igual" [referindo-se à possível atribuição, pelo aluno, do significado amplo à negação da relação 'ser menor que'].

P2: Acho que para os alunos, as relações 'ser maior que' e 'ser menor que' são claras.

Pesquisadora: A partir de qual série?

P2: Da sétima série. É claro para eles que 'ser maior que' e 'ser menor que' não representa igualdade. Representaria igualdade se fosse 'maior ou igual' ou 'menor ou igual'.

Pesquisadora: E a negação da relação 'ser maior que'?

P2: Para os alunos, essa negação, no mental, fica mais difícil. As anotações facilitam. Trabalhar com números inteiros é mais tranqüilo. Saindo desse conjunto, acho que complica um pouco mais.

Com a apresentação das diferentes tarefas atualizadas e com as discussões promovidas sobre as propostas de alterações e adaptações feitas pelas participantes da pesquisa, as professoras julgaram pertinente a proposição das tarefas reatualizadas em sala de aula. A seguir, apresentamos relatos das professoras que justificam essa observação:

Pesquisadora: Vocês acham que a proposta dessas tarefas reatualizadas 1, 2 e 3 é viável para qual série?

P1: Acho viável a partir da sétima série, mesmo os alunos ainda não sabendo recorrer a todos os símbolos matemáticos na sétima. Eles poderão escrever assim: "O intervalo é logo após o -3, mas não é o -3, mas vai até o $-\frac{25}{10}$". Acho que isso não inviabiliza a proposta para a sétima série. Eles poderão escrever suas respostas do jeito deles. Isso não vai atrapalhar, porque esse não é o principal objetivo das tarefas. Isso pode ser feito sem formalismo.

Pesquisadora: Vocês acham que essas tarefas reatualizadas 1, 2 e 3, sugeridas por nós, propiciam condições para que os alunos se familiarizem gradativamente com elas?

P1: Acho que sim. Achei-as muito viáveis e a idéia da tarefa de ambientação também é muito boa. Depois, a dificuldade vai sendo aumentada aos poucos, ampliando a abordagem dos conjuntos numéricos. Dos inteiros partimos para os racionais. Isso é bom.

P2: Também acho. Acho que a proposta das tarefas é bem coerente, sendo boa tanto para a sétima quanto para a oitava série. Ficou bem desafiante. Os alunos gostam de desafio.

4.5. CONSIDERAÇÕES REFERENTES À PRÁTICA ESCOLAR E DOCENTE

Tendo em vista todo o desenvolvimento de nossa pesquisa na instituição de ensino, apresentamos a seguir observações e considerações tidas por nós como relevantes, relativas à conduta escolar e à experiência docente das participantes.

Nosso primeiro contato com a escola deu-se com a coordenadora/assessora de matemática, permitindo-nos antever não só a viabilidade, mas também a pertinência do desenvolvimento de nossa pesquisa nessa instituição de ensino.

Com o consentimento da diretora, foram-nos apresentadas as professoras de matemática P1 e P2, que nesse ano ministravam aulas de sétima e oitava séries respectivamente, e suas experiências docentes nos foram relatadas pela coordenadora/assessora da área.

Ao longo de nossa permanência na escola, também nos foram apresentados os planos de aulas de anos anteriores dessas docentes, assim como textos e documentos institucionais utilizados em suas aulas.

Faz-se importante salientar que dentre esses materiais, dos mais diversos autores, identificamos alguns textos teóricos sobre as obras de Régine Douady. Também fomos informados de que a escola oferece aos professores palestras sobre alguns desses autores. Pareceu-nos, por isso, que ambas as docentes dispunham de ampla experiência e contato com o quadro teórico de Douady.

Foi-nos relatado que são promovidas reuniões ao menos quinzenais entre professores e coordenadores de cada área. Entre os objetos de discussão e reflexão, nesses encontros, figuram os planos de aulas detalhados feitos pelos docentes, bem como o relato das ocorrências em sala de aula.

Também nos foi informado que a escola coloca à disposição dos professores um suporte pedagógico, com bibliografias e obras que contemplam os assuntos abordados nas aulas, bem como recursos de apoio para a distribuição de materiais aos alunos e para a correção de atividades feitas por eles, entre outros recursos.

Outras instituições de ensino utilizam a mesma proposta escolar dessa instituição, algumas das quais recebem assessoria das professoras P1 e P2, que também redigem artigos e outros materiais direcionados a profissionais da área de matemática, tanto para publicações internas da escola como para revistas educacionais. É significativo salientar ainda que ambas as docentes exerceram anteriormente a função de coordenadoras em outras escolas, participando inclusive da elaboração de seus materiais didáticos, e que a coordenadora/assessora de matemática é pesquisadora universitária.

Nosso acesso a esse conjunto de informações contribuiu para compreendermos o papel dessas docentes na instituição , bem como a importância de nossos debates e dos consensos alcançados entre elas durante esses debates, de seus argumentos e das posturas que adotaram durante toda a realização de nossa investigação.

Frente a todas as observações obtidas ao longo de nossa pesquisa, acreditamos que houve ampliação de nossa percepção de como os professores de matemática elaboram seus planos de aulas e de como se dá a análise dessas elaborações.

Nesse sentido, chamou-nos a atenção o empenho com que tanto as docentes quanto os demais funcionários da escola se dedicaram ao desenvolvimento de nossa pesquisa.

Considerando todas essas características observadas, acreditamos que exista campo favorável para o desenvolvimento de uma nova pesquisa, nessa mesma instituição de ensino, desta vez focalizando o processo com que os alunos de sétima série da professora P1 vivenciam nossas atividades reatualizadas.

Essa conclusão se embasa no fato de que os planos de aulas de anos anteriores da professora P1 não chegaram a contemplar atividades similares às propostas por nossas tarefas e atividades reatualizadas. Embora, a professora P1 tivesse bastante contato e familiaridade com o quadro teórico adotado em nossa pesquisa, não havia ainda desenvolvido atividades similares às originalmente propostas por Douady sobre enquadramento de números racionais em intervalos. Justifica-se, assim, sua participação em novas investigações que possam favorecer tanto sua prática docente quanto a prática escolar dessa instituição.

Os dados e constatações obtidos com a presente pesquisa serão integralmente apresentados como uma devolutiva à escola em que foi desenvolvida.

CAPÍTULO 5 — CONCLUSÕES

Neste capítulo, são apresentadas as conclusões finais a respeito de nossa investigação, com base no referencial teórico adotado por nós e em nossas intenções de pesquisa.

Analisando retrospectivamente a realização das sessões de apresentação das tarefas e atividades atualizadas e das sessões para a proposição de alterações e adaptações, observamos que tanto a instituição de ensino quanto as participantes mostraram-se receptivas e familiarizadas com o desenvolvimento de pesquisas e com sua participação nelas. Isso facilitou seu grande comprometimento e envolvimento com nosso trabalho, propiciando desse modo uma grande interação entre os sujeitos e favorecendo a troca de experiências.

A metodologia por nós adotada contribuiu para um produtivo transcurso de nossa pesquisa, facilitando todo o seu desenvolvimento.

Presumimos que a utilização, pela escola, do mesmo quadro teórico adotado em nossa pesquisa permitiu às professoras maior familiaridade com esta investigação, favorecendo adicionalmente a oportunidade de explorarem as tarefas e as atividades. Presumimos também que puderam, desse modo, questionar, discutir e explicitar, com coesão, seus pareceres durante todo o desenvolvimento da pesquisa, o que nos faz supor que esse fator favoreceu a obtenção de elementos importantes sobre nossas indagações.

Convém ressaltar que as docentes de matemática de sétima e oitava séries do ensino fundamental participantes desta pesquisa contam com apreciável experiência profissional, conforme relatado pela coordenadora/assessora de matemática da escola, e com isso contribuíram com suas sugestões de alterações e adaptações e com seus argumentos para que as tarefas e atividades que lhes foram apresentadas se tornassem mais adequadas à realidade da escola em que trabalham — que é uma escola brasileira —, em conformidade com nossas intenções de pesquisa.

Assim, as constatações e observações obtidas ao longo de todo o processo nos levam a crer que nossas expectativas foram correspondidas.

Os depoimentos das docentes participantes nos permitiram perceber a importância por elas atribuída à abordagem do tema ‘enquadramento de números racionais em intervalos de racionais’, particularmente no que concerne a nossas tarefas e atividades, por possivelmente proporcionarem aos alunos situações de desafio que favoreçam o avanço de seus conhecimentos.Tais aspectos levam essas docentes a considerar viáveis as tarefas e atividades a serem propostas em sala de aula.

Sendo assim, consideramos que as tarefas e atividades reatualizadas são coerentes com o quadro teórico de Douady, com pesquisas brasileiras, com o programa escolar e com a prática docente das professoras participantes da pesquisa, contribuindo para avanços na implementação dos PCNs (BRASIL, 1997, 1998), dado que a tarefa 3 propõe enquadramento de números racionais em intervalos compreendidos por números racionais, o que não é contemplado pelos PCNs.

Assim consideramos que, com nosso trabalho, contribuímos para o avanço dos estudos em Educação Matemática e também para com a instituição em que a pesquisa foi desenvolvida, assim como para a prática docente e para a implementação de propostas curriculares.

Faz-se necessário salientar que a análise do discurso dos trechos transcritos de falas das docentes participantes da pesquisa não era escopo de nossa investigação, tornando-se, assim, possível o depreendimento de novas pesquisas abarcando tais análises.

Finalizando, consideramos pertinente apontar que, ao analisarmos retrospectivamente nosso trabalho, vemos como pertinente e viável o desenvolvimento de novas investigações abarcando nossas suposições decorrentes das observações e análises realizadas durante todo o processo de investigação.

REFERÊNCIAS

ANDRÉ, Marli E.D.A. *Etnografia da prática escolar*. 9. ed. Campinas: Papirus, 2003.

BELAS, J.L. *Estudo de caso na prática educacional*. 1998. Disponível em: <http://www.jlbelas.psc.br/texto15.htm>. Acesso em: 8 fev. 2004.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*. Ensino de primeira a quarta série. Matemática. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Fundamental,1997. p.58-68.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*. Terceiro e quarto ciclos do ensino médio fundamental. Matemática. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Fundamental, 1998. p.100-112.

BRESSAN, Flávio. O método de estudo de caso. *Administração On Line*: prática, pesquisa, ensino, revista eletrônica da Fundação Escola de Comércio Álvares Penteado, São Paulo, v. 1, n. 1, jan./fev./mar. 2000. Disponível em: <http://www.fecap.br/adm_online/art11/flavio.htm>. Acesso em: 1 dez. 2005.

DOUADY, Régine. *Jeux des cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathematiques*. Thèse de Doctorat d'État (specialité: didactique des mathématiques). Université Paris VII, Paris, 1984.

DOUADY, Régine. *Situer une fraction sur un axe gradue diviser un entier A par un entier B*. Public Instituteurs-Professeurs de Mathématiques du Collège, Université Paris VII, févr. 1986. chapitre III, p. 63-76.

IGLIORI, Sonia; MARANHÃO, Cristina; SENTELHAS, Silvia. The meaning of terms concerning the time ordering for first grade students: the influence of cultural background. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION – PME, 2000, Caxambu. *Proceedings...* Hiroshima: Nishiki, 2000. v. 3, p. 3.71-3.77.

LÜDKE, Menga L.; ANDRÉ, Marli. *Pesquisas em educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica Universitária, 1986.

MARANHÃO, Maria Cristina S. de A. *Uma engenharia didática para aprendizagem das concepções de tempo*. 1996. 426 p. Tese (Doutorado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1996. Orientador: Antônio Carlos Ronca.

MARANHÃO, Maria Cristina S. de A. Dialética ferramenta objeto. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Educação matemática*: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p. 115-134.

MARANHÃO, Maria Cristina S. de A.; IGLIORI, Sonia; SOARES, Elizabeth. A study about the development of knowledge in fifth to eighth graders subjected to the same didactical intervention involving ordering relations. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICS, 2., 2002, Creta (Grécia). *Proceedings of ICTM2*. Creta: J. Wiley & Sons, 2002. p. 1-10.

SOARES, Elizabeth. *Uma intervenção didática para a aprendizagem do significado amplo da relação de ordem "chegar antes ou junto de" com alunos de 5ª a 8ª séries*. 2002. Tese (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002, p. 2-5. Orientadora: Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR 10520*: Informação e documentação - citações em documentos - apresentação. Rio de Janeiro: ABNT, ago. 2002.

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR 6023*: Informação e documentação - referências - elaboração. Rio de Janeiro: ABNT, ago. 2002.

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. *NBR 14724*: Informação e documentação - trabalhos acadêmicos - apresentação. Rio de Janeiro: ABNT, ago. 2002.

MARANHÃO, Maria Cristina S. de A. Projeto: O que se entende por álgebra. In: ENEM, 2004, Recife. *Anais do ENEM*. São Paulo: SBEM, 2004. v. 1, p. 1-16.