



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL

MODALIDADE ESTRUTURAS

**ANÁLISE COMPARATIVA DE MÉTODOS DE CÁLCULO PARA
FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS**

Rebecca Rolim Milet

Orientador: Prof. Romilde Almeida de Oliveira, D.Sc.

RECIFE, PE - BRASIL

JULHO DE 2006

REBECCA ROLIM MILET

**ANÁLISE COMPARATIVA DE MÉTODOS DE CÁLCULO PARA
FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS**

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Curso de Pós-graduação da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Grau de Mestre em Ciências em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Romilde Almeida de Oliveira, D.Sc

RECIFE, PE - BRASIL

JULHO DE 2006

M643e Milet, Rebecca Rolim.

Análise comparativa de métodos de cálculo para fundações de máquinas. – Recife: O Autor, 2006.
xx, 119 folhas. : il. ; fig., tabs.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Engenharia Civil, 2006.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia civil. 2. Estruturas – Fundações de máquinas. 3. Fundações de máquinas – Análise comparativa. I. Título.

624 CDD (22.ed.)

UFPE
BCTG/2006-77

ANÁLISE COMPARATIVA DE MÉTODOS DE CÁLCULO PARA FUNDAÇÕES
DE MÁQUINAS

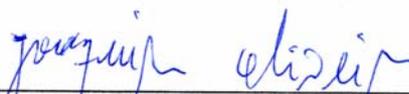
Rebecca Rolim Milet

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS.

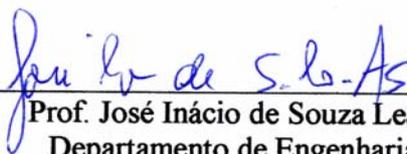
Aprovada por:



Prof. Romilde Almeida de Oliveira, D.Sc.
Departamento de Engenharia Civil/UFPE
Orientador



Prof. Joaquim Teodoro Romão de Oliveira, D.Sc.
Departamento de Engenharia Civil/UNICAP



Prof. José Inácio de Souza Leão Ávila, Ph. D.
Departamento de Engenharia Civil/UFPE

RECIFE, PE - BRASIL

JULHO DE 2006

*Dedico este trabalho aos meus pais, a meu
irmão, e ao meu esposo.*

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Kleber e Heloisa, pelo apoio e incentivo em todos os momentos da minha vida.

Ao meu esposo, George, pelo carinho, incentivo e compreensão durante o mestrado.

Ao professor e orientador Romilde Almeida de Oliveira, pela paciência, orientação e conceitos transmitidos, além da amizade oferecida.

Ao professor Ézio Araújo, por todo o apoio, incentivo, amizade e conhecimentos transmitidos.

Ao Corpo Docente do Mestrado em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, pelos conhecimentos ensinados ao longo de todo o curso de mestrado.

Aos amigos do mestrado e do laboratório – Juliana, Gustavo, Michele e, em especial, Fabiana –, pela amizade, apoio e troca de experiências.

A Renata, pela valiosa colaboração em algumas ilustrações contidas neste trabalho.

Ao amigo e engenheiro José Wanderley, por suas contribuições a este trabalho.

A todos aqueles que colaboraram para a realização deste trabalho.

RESUMO

MILET, R. R. (2006). **Análise Comparativa de Métodos de Cálculo para Fundações de Máquinas**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. Recife – PE.

Os avanços tecnológicos industriais, nas últimas décadas, geraram o desenvolvimento de máquinas de alta *performance* e precisão que, por sua vez, têm demandado projetos otimizados de suas fundações. Cada vez mais, diversas tentativas têm que ser consideradas para se obter projetos de fundações que conciliem a máxima eficiência com custos aceitáveis. A modelagem via método dos elementos finitos se constitui uma poderosa ferramenta que pode ser utilizada para prever, de maneira mais precisa, o comportamento desses elementos estruturais quando comparada com os métodos analíticos simplificados, disponíveis na literatura, que levam em conta, na sua formulação, várias hipóteses a fim de que possam ser utilizados. A presente pesquisa aborda os conceitos básicos da análise dinâmica de fundações de máquinas, discute sobre alguns métodos analíticos e numéricos disponíveis de projeto e apresenta algumas recomendações de projeto e prescrições normativas. Blocos de fundações de concreto armado para máquinas alternativas e de impacto, bem como fundações aporticadas de concreto armado para turbomáquinas foram analisadas. As frequências naturais e amplitudes da análise de elementos finitos foram comparadas com os resultados decorrentes da utilização dos métodos analíticos. Além disso, foram considerados os esforços seccionais e as tensões necessárias para o detalhamento das armações. Os resultados das análises de elementos finitos mostraram boa concordância com aqueles obtidos com a utilização dos métodos analíticos.

Palavras-chaves: fundações de máquinas, fundação em bloco, fundação aporticada, mola linear, semi-espaco elástico

ABSTRACT

MILET, R.R. (2006). **Comparative analysis of machine foundation design methods.** Masters Thesis – Universidade Federal de Pernambuco. Recife – PE.

Industrial technological advances, in the last decades, generated the development of high performance and precision machines which, by your turn, have demanded optimized foundation designs. Each time, several trials have to be considered to get a foundation design that conciliates the maximum efficiency with acceptable costs. Finite element modeling is a powerful tool that can be used to better predict the behavior of such structural elements when one compares to the simplified analytical methods, available in the literature, which take into account in their formulation several assumptions, in order to make possible their use. The present research approaches the basic concepts on machine foundation dynamic analysis, argues on some available analytical and numerical design methods and presents some design recommendations and code requirements. Reinforced concrete block foundations for reciprocating and impact machines were analyzed as well as reinforced concrete framed foundations to turbomachines. Natural frequencies and amplitudes from finite element analysis were compared with those obtained through analytical solutions. Additionally, stress resultants and stresses required to detail the reinforcement. Results from finite element analysis showed good agreement with those obtained from analytical methods.

Key-words: machine foundation, block foundations, framed foundation, linear spring, elastic half-space

ÍNDICE

RESUMO	vi
ABSTRACT	vii
LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE TABELAS	xiv
LISTA DE SÍMBOLOS	xv
CAPÍTULO – 1 INTRODUÇÃO	1
1.1 – O PROJETO DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS	2
1.2 – MOTIVAÇÃO DO TRABALHO	4
1.3 – OBJETIVOS	4
1.3.1 – OBJETIVO GERAL	4
1.3.2 – OBJETIVOS ESPECÍFICOS	4
1.4 – HISTÓRICO	5
1.5 – CONTEÚDO	10
CAPÍTULO – 2 CONCEITOS GERAIS RELACIONADOS COM FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS	11
2.1 – CONCEITOS BÁSICOS DE DINÂMICA	11
2.1.1 – SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE	11
2.1.1.1 – Vibração livre	11
2.1.1.2 – Vibração forçada com um grau de liberdade	16
2.1.2 – SISTEMA COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE	22
2.1.2.1 – Vibração livre não amortecida	24
2.1.2.2 – Vibração forçada amortecida	27
2.2 – PROPRIEDADES DO SOLO SOLICITADO POR CARGA DINÂMICA	28
2.2.1 – CONSTANTES ELÁSTICAS DO SOLO	28
2.2.2 – MÓDULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL DINÂMICO	31
2.2.2.1 – Ondas	32
2.2.2.2 – Fatores que afetam o módulo de Elasticidade Transversal Dinâmico	34
2.2.3 – CONSTANTES DE MOLA EQUIVALENTE AO SOLO	39
2.2.4 – AMORTECEDORES DO SOLO	41

2.3 – CONCEITOS GERAIS SOBRE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS	42
2.3.1 – ISOLADOR DE VIBRAÇÕES	43
2.3.2 – EFEITOS DAS AMPLITUDES NAS PESSOAS	47
2.3.3 – VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS	48
CAPÍTULO – 3 FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS	49
3.1 – FUNDAÇÃO PARA MÁQUINAS ALTERNATIVAS	50
3.1.1 – MÉTODO DO SEMI-ESPAÇO ELÁSTICO	53
3.1.2 – MÉTODO DA MOLA ELÁSTICA LINEAR SEM PESO	59
3.2 – FUNDAÇÃO PARA MÁQUINAS DE IMPACTO	65
3.2.1 – MÉTODO DE ANÁLISE	69
3.3 – FUNDAÇÃO PARA MÁQUINAS DE ALTA VELOCIDADE	73
3.3.1 – MÉTODO DE ANÁLISE	77
3.3.1.1 – Sistema com um grau de liberdade	77
3.3.1.2 – Sistema com dois graus de liberdade	78
CAPÍTULO – 4 ANÁLISES E RESULTADOS	87
4.1 – ANÁLISE DE FUNDAÇÃO PARA UMA MÁQUINA ALTERNATIVA	87
4.1.1 – MÉTODOS ANÁLITICOS	88
4.1.1.1 – Resultados pelo método do semi-espaço elástico	88
4.1.1.2 – Resultados pelo método da mola elástica linear	89
4.1.2 – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	89
4.1.3 – ANÁLISE DOS RESULTADOS	91
4.1.3.1 – Frequências e amplitudes	91
4.1.3.2 – Tensões	92
4.2 – ANÁLISE DE FUNDAÇÃO PARA UMA MÁQUINA TIPO MARTELO	96
4.2.1 – MÉTODO ANÁLITICO	98
4.2.2 – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	99
4.2.3 – ANÁLISE DOS RESULTADOS	102
4.2.3.1 – Frequências e amplitudes	102
4.2.3.2 – Tensões	103
4.3 – ANÁLISE DE FUNDAÇÃO PARA UMA MÁQUINA DE ALTA VELOCIDADE	105
4.3.1 – MÉTODO ANÁLITICO	107

4.3.2 – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	108
4.3.3 – ANÁLISE DOS RESULTADOS	110
4.3.3.1 – Frequências e amplitudes	110
4.3.3.2 – Esforços	110
CAPÍTULO – 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES	114
5.1 – CONCLUSÕES	114
5.2 – SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS	115
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	116

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Construção de fundação de máquina	3
Figura 1.2 – Máquina (laminador) apoiada na fundação da Figura 1.1	3
Figura 1.3 – Gráfico frequência natural reduzida versus área da fundação em função do solo	6
Figura 1.4 – Problemas considerados por Lamb: (a) carregamento vertical na superfície; (b) carregamento horizontal na superfície; (c) carregamento vertical atuando dentro do corpo; (d) carregamento horizontal atuando dentro do corpo	7
Figura 1.5 – Parâmetros nas equações de Hsieh	8
Figura 2.1 – (a) Oscilador com amortecimento viscoso; (b) Diagrama de Corpo livre	12
Figura 2.2 – Sistema amortecido com vibração harmônica	16
Figura 2.3 – Fator de Amplificação dinâmica em relação ao r e a ξ	20
Figura 2.4 – Ângulo Fase dinâmica em relação ao r e a ξ	21
Figura 2.5 – Transmissibilidade dinâmica em relação ao r e a ξ	21
Figura 2.6 – (a) Módulo de Young e (b) Módulo de elasticidade transversal	30
Figura 2.7 – Relação entre o coeficiente de Poisson e as velocidades de propagação das ondas	31
Figura 2.8 – Ondas P	32
Figura 2.9 – Ondas S	33
Figura 2.10 – Ondas Rayleigh	33
Figura 2.11 – Detalhe da forma de deslocamento elíptico da onda Rayleigh	33
Figura 2.12 – Variação de G_{\max} em relação ao tempo, determinada em ensaio de coluna ressonante	37
Figura 2.13 – Esquema de fundação de máquina tipo martelo com isoladores	44
Figura 2.14 – Esquema de trincheira circular para isolar a vibração	45
Figura 2.15 – Limites de amplitudes em relação à frequência para seres humanos	47
Figura 2.16 – Limites de vibrações	48
Figura 3.1 – Modos de vibração de um bloco de fundação	49
Figura 3.2 – Mecanismo manivela simples	50
Figura 3.3 – Compressor a gás alternativo	51
Figura 3.4 – Parte do compressor	51
Figura 3.5 – Modelo de vibração horizontal	55

Figura 3.6 – Modelo de vibração de rotação	55
Figura 3.7 – Máquina tipo martelo	65
Figura 3.8 – (a) bigorna apoiada no bloco e (b) bigorna apoiada no coxim	66
Figura 3.9 – Diferentes formas de pulso de carga – (a) retangular, (b) semi-seno e (c) triangular	67
Figura 3.10 – Modelo simplificado com dois graus de liberdade	69
Figura 3.11 – Turbogenerador	73
Figura 3.12 – Vibração vertical (a) pórtico deformado (b) modelo com dois graus de liberdade	79
Figura 3.13 – Identificação dos parâmetros	80
Figura 3.14 – Gráfico para a determinação do coeficiente α	81
Figura 3.15 – Vibrações da laje superior devido à combinação da translação ao longo do eixo x e à torção em z	83
Figura 3.16 – Modelo massa-mola para a combinação das vibrações horizontal e de torção	84
Figura 4.1 – Geometria da fundação da máquina com motor alternativo	87
Figura 4.2 – Malha utilizada na análise da fundação da máquina alternada	90
Figura 4.3 – Área em que é aplicada a carga dinâmica e estática no bloco	91
Figura 4.4 – Tensões na direção do eixo z, corte no plano yz, para o método semi-espaço elástico	93
Figura 4.5 – Tensões na direção do eixo x, corte no plano xz, método semi-espaço elástico	93
Figura 4.6 – Tensões na direção do eixo y, corte no plano yz, método semi-espaço elástico	94
Figura 4.7 – Tensões na direção do eixo z, no plano yz, para o método mola elástica linear	94
Figura 4.8 – Tensões na direção do eixo x, corte no plano a xz, método mola elástica linear	95
Figura 4.9 – Tensões na direção do eixo y, corte no plano yz, método mola elástica linear	95
Figura 4.10 – Geometria da fundação da máquina de impacto	97
Figura 4.11 – Malha utilizada na análise da fundação da máquina martelo	100
Figura 4.12 – Materiais utilizados na modelagem da fundação	101
Figura 4.13 – Carga dinâmica aplicada na superfície da bigorna	101

Figura 4.14 – Carga da máquina distribuída nos nós da bigorna	102
Figura 4.15 – Tensões na direção do eixo z, corte no plano yz	103
Figura 4.16 – Tensões na direção do eixo x, corte no plano a xz	104
Figura 4.17 – Tensões na direção do eixo y, corte no plano a yz	104
Figura 4.18 – (a) Corte longitudinal e (b) Corte transversal. Geometria da fundação da máquina	106
Figura 4.19 – Planta baixa – Geometria da fundação da máquina	107
Figura 4.20 – Carga dinâmica aplicada nos nós da laje	109
Figura 4.21 – Carga da máquina distribuída nos nós da laje	109
Figura 4.22 – Momento na laje em torno do eixo y	111
Figura 4.23 – Momento na laje em torno do eixo x	111
Figura 4.24 – Força axial nos pilares	112
Figura 4.25 – Momento no pilar em torno do eixo x	113
Figura 4.25 – Momento no pilar em torno do eixo y	113

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Valores de α de acordo com o tipo de solo	6
Tabela 1.2 – Parâmetros equivalentes para a análise de uma fundação circular sobre um semi-espaço elástico	9
Tabela 2.1 – Valores limites para o módulo de elasticidade	29
Tabela 2.2 – Valores para o coef. de Poisson em relação ao tipo do material do terreno	29
Tabela 2.3 – Valores de K para diferentes índices de plasticidade	35
Tabela 2.4 – Valores de NG de acordo com o solo	37
Tabela 2.5 – Alguns valores típicos de amortecimento interno no solo	42
Tabela 3.1 – Espessuras do bloco de acordo com o peso do martinete	66
Tabela 3.2 – Espessuras de coxim em madeira para alguns tipos de martelos	68
Tabela 3.3 – Amplitude admissível para a bigorna e para o bloco de fundação	68
Tabela 3.4 – Amplitude admissível para a vibração da máquina	74
Tabela 3.5 – Dimensões da viga em relação à espessura	76
Tabela 3.6 – Espessura da laje de base em função da potência da máquina	77
Tabela 4.1 – Parâmetros equivalentes para a análise de uma fundação circular sobre um semi-espaço elástico	88
Tabela 4.2 – Rigidezes para as translações e as rotações	90
Tabela 4.3 – Resultados obtidos pelo método do semi-espaço elástico	91
Tabela 4.4 – Resultados obtidos pelo método da mola elástica linear	92
Tabela 4.5 – Rigidezes para as translações e as rotações	100
Tabela 4.6 – Resultados obtidos para máquina martelo	102
Tabela 4.7 – Resultados obtidos com pilares engastados	110

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas

a	comprimento da fundação dimensão da base da fundação perpendicular ao eixo de rotação comprimento metade da altura da viga
A_b	área da viga transversal
A_c	área da seção transversal do pilar
A_f	área da fundação
A_p	área do pistão
A_x, A_y, A_z	amplitude de vibração na direção x, y e z
A_{z1}	amplitude da fundação na direção z amplitudes verticais no pilar
A_{z2}	amplitude do coxim na direção z amplitudes verticais no meio do vão da viga
A_ψ	amplitude de vibração de torção
A_ϕ	amplitude de vibração de balanço
b	largura da fundação metade da largura do pilar
[B]	matriz que relaciona deslocamentos nodais
B_x, B_y, B_z	razão de massa nas direções x, y e z
c	coeficiente de amortecimento
c_c	coeficiente de amortecimento crítico
c_z	coeficiente de amortecimento na direção z
C	centro de rigidez
[C]	matriz de amortecimento
C_u	coeficiente de compressão elástica uniforme
C_τ	coeficiente de cisalhamento elástico uniforme
C_ϕ	coeficiente de compressão elástica não uniforme
C_ψ	coeficiente de cisalhamento elástico não uniforme.
D	fator de amplificação dinâmico

	centro de massa
e	base neperiana
	índice de vazios
	coeficiente de restituição elástica
	distância entre o centro de massa e o centro de rigidez
[E]	matriz de elasticidade
E	módulo de elasticidade
	módulo de Young
f	freqüência
f_n	freqüência natural
f_{nr}	freqüência natural reduzida
f_{din1}	força dinâmica transmitida pela fundação
f_{din2}	força dinâmica transmitida pela bigorna
f_t	pé; 0,3048 m
F	força aplicada
F_0	força máxima da força aplicada
F_A	fator idade
F_T	força transmitida
F_{T0}	força máxima transmitida à fundação
F_x	componente horizontal da força excitante
F_z	componente vertical da força excitante
F_0	amplitude de uma força harmônica
{F}	vetor de forças
G	módulo de elasticidade transversal
$G_{máx}$	módulo de elasticidade transversal dinâmico máximo
G	aceleração da gravidade
H, H_1 , H_2	constantes
H	altura do bloco de fundação
h	altura
	altura efetiva do pilar
h_0	altura do pilar até o centro da laje
i	número imaginário $\sqrt{-1}$
I_b	momento de inércia da viga

I_c	momento de inércia do pilar
I_G	coeficiente de acréscimo do módulo transversal com o tempo
IS	Indian Standards
J_z	momento polar de inércia da área da base da fundação
k	rigidez de mola
k_h	soma da rigidez lateral de todos os pórticos
k_x, k_y, k_z	coeficiente de rigidez nas direções x, y e z
k_ψ	coeficiente de rigidez de torção coeficiente de rigidez de torção equivalente aos pilares
k_ϕ	coeficiente de rigidez de rotação
k_1	rigidez equivalente ao solo rigidez dos pilares
k_2	rigidez equivalente ao coxim rigidez da viga
K	constante fator rigidez relativa
K_i	matriz de rigidez generalizada
$[K]$	matriz de rigidez
L	distância entre o centro de gravidade do sistema e a base. distância entre o centro de gravidade do sistema e o eixo horizontal média de dois vãos livres adjacentes vão efetivo
L_R	comprimento da onda de Rayleigh
L_0	distância de centro a centro de pilares adjacentes
m	massa
m_0	massa do rotor
m_1	massa da fundação e do pórtico da máquina se este tiver apoiado na fundação
m_2	massa da bigorna e do pórtico da máquina se este tiver apoiado na bigorna
$[M]$	matriz de massa
M_i	matriz de massa generalizada
M_m	momento de inércia do sistema em relação a um eixo passando pelo centro de gravidade do sistema matriz de massa generalizada

M_{mx}, M_{my}, M_{mz}	momento de inércia de massa em torno ao eixo x, y, z
M_{m0}	momento de inércia de massa do sistema em relação ao eixo passa através do centróide da base e perpendicular ao plano de vibração
M_x, M_y, M_z	momento no eixo x, y e z
[N]	matriz que define o campo deslocamento
N_G	coeficiente de acréscimo normalizado do módulo transversal com o tempo
p	pressão
p_a	pressão atmosférica
P	força dinâmica onda primária
P_x	força horizontal no eixo x
P_z	força vertical
{P}	vetor de forças
{q}	vetor das coordenadas generalizadas
Q	força na interface vertical oscilante
r	distância horizontal raio de giração
r_0	raio equivalente excentricidade do rotor da máquina
S	onda secundária
S_e	recalque elástico
t	tempo
T	período energia cinética
{u}	vetor deslocamento
U	energia potencial
V_a	velocidade da bigorna após o impacto
V_R	velocidade da onda de Rayleigh
V_S	velocidade da onda de cisalhamento
V_{Ti}	velocidade do martinete no instante do impacto
W	trabalho peso da fundação
W_0	peso do martinete

	peso da máquina sobre a viga transversal
W_L	carga das vigas longitudinais
W_m	peso da máquina
W_p	pesos dos pilares do pórtico
W_v	peso da viga transversal
x	deslocamento na direção x
x_{st}	amplitude estática da mola devido a força F_0
\dot{x}	velocidade
\ddot{x}	aceleração
X	amplitude para a resposta permanente
z_1	deslocamento da fundação
z_2	deslocamento da bigorna
$\{z\}$	vetor de amplitudes do movimento no sistema desacoplado

Letras Gregas

α, β	constantes
γ	distorção
γ_{zx}	distorção de cisalhamento
γ_c	peso unitário do concreto
δ	decremento logarítmico
ΔZ	deflexão da mola
λ	autovalores
ε	deformação
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	deformação na direção x, y e z
$\{\varepsilon\}$	vetor de deformações
η	eficiência de queda
ν	coeficiente de Poisson
ξ	fração de amortecimento
	fator fadiga
ξ_x, ξ_y, ξ_z	fração de amortecimento para vibrações na direção x, y e z

ξ_ϕ	fração de amortecimento para vibrações de balanço
ξ_ψ	fração de amortecimento para vibrações de torção
ρ	densidade
σ_a	tensão no coxim
	tensão principal na direção da velocidade de propagação de onda
σ_b	tensão principal na direção da vibração das partículas
σ_c	terceira tensão principal
σ_f	tensão na fundação transmitida ao solo
σ_z	tensão na direção z
σ_{AV}	tensão média de cisalhamento no solo no plano de contato com a fundação
σ_0	tensão normal efetiva octaédrica
$\{\sigma\}$	vetor das tensões
τ_{zx}	tensão de cisalhamento
$\{\phi\}$	autovetores, modos normais de vibração
$[\Phi]$	matriz modal
$[\tilde{\Phi}]$	matriz modal ponderada
ω	freqüência angular forçada
ω_n	freqüência angular natural
$\omega_{nx}, \omega_{ny}, \omega_{nz}$	freqüência angular natural na direção x, y e z
$\omega_{n\psi}$	freqüência angular natural para a vibração de torção
$\omega_{n\phi}$	freqüência angular natural para a vibração de balanço
ω_{nd}	freqüência angular natural amortecida
ω_{n1}, ω_{n2}	primeira e segunda freqüência angular
ω_{nL1}	freqüência angular natural do conjunto fundação–bigorna
ω_{nL2}	freqüência angular natural da bigorna
ψ	ângulo de rotação
	deslocamento horizontal devido à torção

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A produção de objetos, até o século dezessete, era efetuada por artesãos em sua própria casa, com o auxílio de seus aprendizes. O artesão produzia era apenas para suprir as necessidades da sua família e da população residente nos vilarejos próximos. Nessas fábricas, as principais fontes de energia utilizadas eram a eólica, através de moinhos, e a hidráulica com roda d'água.

A Revolução Industrial que aconteceu na segunda metade do século 18 com a indústria têxtil e a invenção da máquina a vapor foi marcada por transformações tecnológicas, sociais e econômicas. Com a máquina a vapor nas indústrias, a energia hidráulica não era mais tão essencial; dessa forma, não havia mais necessidade de as fábricas estarem localizadas próximas das quedas d'águas.

A Revolução Industrial teve início na Inglaterra. O pioneirismo inglês se deveu a diversos fatores: a) a Inglaterra possuía grandes reservas de carvão mineral – principal fonte de energia das máquinas – e minério de ferro – matéria-prima utilizada na época; b) a burguesia inglesa tinha capital suficiente para financiar as fábricas; c) havia um vasto império colonial inglês que consumia os produtos manufaturados pela metrópole e fornecia a ela matéria-prima; d) dispunha-se de abundante mão-de-obra nas cidades devido ao êxodo rural decorrente da mudança na organização fundiária (lei dos Cercamentos de Terras).

O avanço tecnológico no maquinário das indústrias gerou uma maior produtividade e um aumento do número de trabalhadores. Foi necessário, então, aumentar a geometria do edifício industrial para adaptá-lo as novas exigências do sistema de produção. Assim, em 1845, o concreto armado foi usado na construção de uma edificação com oito pisos para a alojar uma fábrica (CAMAROTTO, 1988).

Para as indústrias de confecção e tecelagem, construíram-se edifícios de vários pavimentos. Já para indústrias pesadas da construção e reparos de máquinas – devido ao peso e às vibrações das máquinas a vapor – ergueram-se edifícios planos.

O surgimento do automóvel foi muito importante para o desenvolvimento da indústria americana e européia. As plantas da indústria automobilística revolucionaram

as construções das fábricas americanas, e Detroit ficou conhecida como o berço da fábrica moderna.

1.1. O PROJETO DE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS

As vibrações e choques, provocadas pelas máquinas, nas fundações calculadas levando-se em consideração apenas às cargas estáticas, prejudicam essas fundações, causando fissuras e podendo levá-las ao colapso. Por isso, necessita-se da análise dinâmica. As forças e momentos que as máquinas exercem na fundação causam movimentos oscilatórios de translação na vertical e na horizontal, e movimentos oscilatórios de rotação ou torção.

No projeto de uma fundação de máquina, deve ser avaliada a capacidade de suporte para as cargas estáticas e dinâmicas, as frequências e as amplitudes admissíveis dos deslocamentos da máquina. Também devem ser verificados os seus efeitos sobre pessoas, estruturas e equipamentos situados na vizinhança, já que uma fundação sujeita a cargas dinâmicas torna-se uma fonte de ondas para propagação através do solo (CAMAROTTO, 1988).

Fundações de máquinas que podem ser apoiadas no solo, enterradas ou apoiadas em estacas, têm sido objeto de estudos há vários anos. Isso resultou num grande acervo de fórmulas, gráficos e parâmetros largamente utilizados.

O comportamento do solo é normalmente considerado elástico. Os dados do solo e a interação solo-fundação são importantes para o projeto.

O acompanhamento do comportamento da fundação em serviço, com medições, e a comparação com os valores calculados é de grande importância para novos estudos e projetos.

As simplificações consideram a máquina e a fundação como sistemas independentes. No estudo da máquina a fundação é admitida como indeslocável; e, na análise da fundação, não são levados em conta a rigidez e o amortecimento da máquina – apenas a sua massa e seus esforços.

Normalmente as fundações de máquina são grandes. A Figura 1.1 apresenta um exemplo de parte da construção de uma fundação de máquina; e a Figura 1.2, a máquina que é colocada sobre a fundação.



Figura 1.1 – Construção de fundação de máquina



Figura 1.2 – Máquina (laminador) apoiada na fundação da Figura 1.1

1.2. MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

O bom desempenho de uma máquina é também resultado de uma fundação adequada.

O custo da construção de uma fundação de máquina é pequeno em relação ao custo total da máquina, dos acessórios e da instalação. Mas algum problema na fundação, em decorrência do projeto ou da construção inadequados, pode interromper a operação da máquina por muito tempo e causar grandes prejuízos. Assim, deve-se ter atenção em todas as etapas para a obtenção de uma fundação de máquina: investigação do solo, projeto e construção (PRAKASH e PURI, 1988).

1.3. OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral desta pesquisa é a compreensão e o estudo de alguns métodos existentes para cálculo de fundações de máquinas.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

O objetivo deste trabalho é comparar métodos clássicos de projeto de fundação de máquinas com resultados obtidos, utilizando-se o método dos elementos finitos.

Este trabalho contempla o estudo de fundações para três tipos de máquinas: as máquinas com motores alternativos, as que geram esforços de impacto e as que têm frequências médias ou altas. Para as fundações que sofrem cargas alternadas, serão considerados dois métodos analíticos: o do semi-espaço elástico e o da mola linear. Assim, para estabelecer-se a comparação, necessita-se de duas análises numéricas. Já para as fundações que sofrem esforços de impacto e as de frequências médias ou altas, haverá duas análises para cada tipo: uma analítica e uma numérica.

1.4. HISTÓRICO

No passado, quando não havia estudos para prever a frequência natural, sistema solo-fundação, nem as amplitudes de vibração, tomava-se como regra que o peso do bloco de fundação seria de 3 a 5 vezes o peso da máquina que ele iria suportar (GAZETAS, 1983).

Os primeiros estudos experimentais foram realizados no início da década de 30 e resultaram em procedimentos de análise empírica cujo interesse era a determinação da frequência natural.

O método de frequência natural reduzida consiste em descobrir a frequência natural a partir de uma variável, encontrada num gráfico (TSCHEBOTARIOFF, 1953, apud SRINIVASULU e VAIDYANATHAN, 1976).

$$f_n = \frac{f_{nr}}{\sqrt{\frac{W}{A_f}}} \quad (1.1)$$

onde f_n é a frequência natural, f_{nr} a reduzida, W o peso da fundação em tf e A_f a área de contato da fundação em ft².

O gráfico, exposto na Figura 1.3, é limitado a apenas quatro tipos de solos em que a fundação deve ser apoiada. Para outro tipo de solo, este método não é aplicável.

Posteriormente, através da frequência natural reduzida, foi desenvolvida a seguinte expressão:

$$f_n = \frac{\alpha}{\sqrt{W}} \sqrt[4]{A_f} \quad (1.2)$$

O α é uma constante obtida na Tabela 1.1 que varia com a \sqrt{m} , em que m é a massa do conjunto máquina e fundação em kg. Os valores apresentados na tabela 1.1 são válidos quando na Equação (1.2) são utilizados o W , peso do conjunto fundação e máquina, em kgf e A_f , área da fundação, em m² (ALPAN, 1961, apud SRINIVASULU e VAIDYANATHAN, 1976).

Tabela 1.1 – Valores de α de acordo com o tipo de solo

Tipo de Solo	α
Turfa	3900
Argila plástica	69000
Areia	82000
Arenito	111000

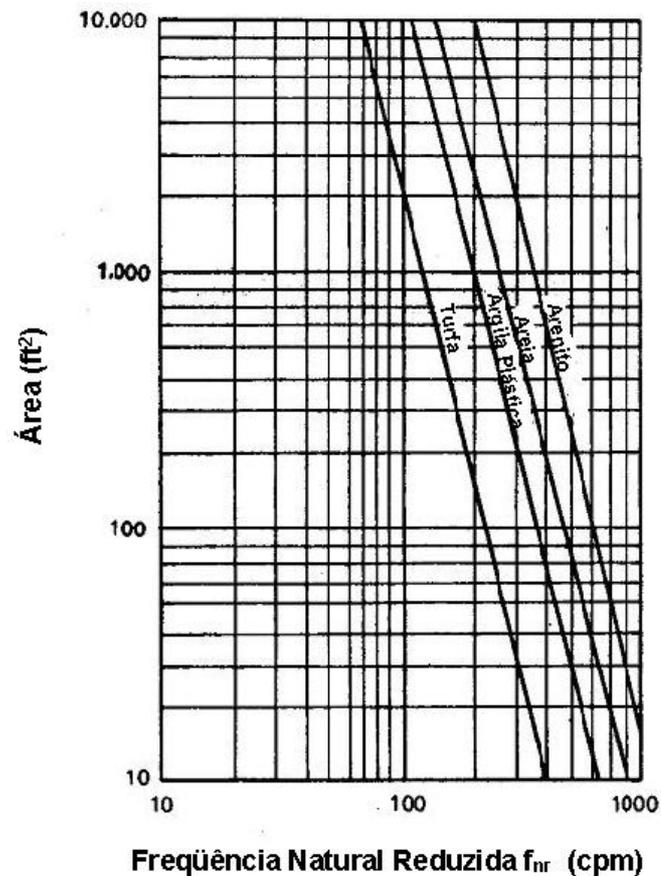


Figura 1.3 – Gráfico frequência natural reduzida *versus* área da fundação em função do solo (Adaptada de SRINIVASULU e VAIDYANATHAN, 1976)

As amplitudes são parâmetros condicionantes de projetos para que se respeitem limites admissíveis pelo equipamento, pessoas e estruturas situadas na vizinhança. Por isso, os métodos em que não há a análise das amplitudes de vibração são considerados ultrapassados, podendo servir para um projeto preliminar.

LAMB (1904) foi o pioneiro no estudo na teoria do semi-espaço elástico. Esse pesquisador estudou a vibração do semi-espaço elástico causado por uma força vertical periódica que atua ao longo do eixo vertical. Esse problema foi chamado de “Problema

Dinâmico de Boussinesq”, que se estende para outras condições de vibrações ocasionadas por força horizontal na superfície, forças vertical ou horizontal atuantes dentro do meio considerado elástico Figura 1.4. Esse problema forneceu fundamentos para o estudo de oscilação de bases que repousam numa superfície de semi-espaco. No método do semi-espaco elástico, o solo é considerado como um sólido elástico, isotrópico e semi-infinito.

Reissner foi quem desenvolveu a primeira solução analítica para uma base circular, carregada verticalmente num semi-espaco elástico. Para representar o meio elástico, os parâmetros necessários foram o módulo de elasticidade transversal, G , o coeficiente de Poisson, ν , e a massa específica, ρ . Com essa hipótese, foi esclarecida a distribuição do amortecimento (amortecimento geométrico) que ainda não tinha sido percebido (REISSNER, 1936, apud ASIK e VALLABHAN, 2001).

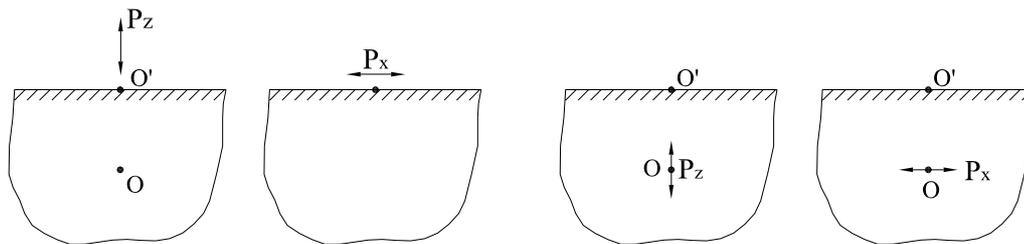


Figura 1.4 – Problemas considerados por Lamb. (a) carregamento vertical na superfície; (b) carregamento horizontal na superfície; (c) carregamento vertical atuando dentro do corpo; (d) carregamento horizontal atuando dentro do corpo.

A partir da solução de Reissner, foram estabelecidas equações para pressões oscilantes de contato que variam com o diâmetro da área de contato numa distribuição uniforme, numa distribuição parabólica e com a distribuição correspondente a uma base rígida (ALMEIDA e SIMÕES, 1996). Posteriormente, foi estudado o carregamento na horizontal e o momento numa fundação circular sobre uma superfície de semi-infinito elástico.

A analogia de Hsieh foi elaborada a partir das soluções de Reissner. Nela se obteve uma equação para oscilação vertical similar às equações para vibrações amortecidas com um grau de liberdade. Primeiro, Hsieh considerou um disco circular rígido, Figura 1.5, sem massa, apoiado numa superfície de um semi-espaco elástico, sujeito a uma força vertical oscilante. Posteriormente, ele considerou o peso total do cilindro e mostrou que vibrações verticais de uma base num semi-espaco elástico podem

ser representadas por um sistema massa-mola-amortecedor com a desvantagem das constantes de rigidez e amortecimento dependerem da frequência de excitação (HSIEH, 1962, apud GAZETAS,1983).

A analogia de Lysmer propõe coeficientes de rigidez e amortecimento independentes da frequência, para limites de frequências baixa e média para vibração vertical. A solução para vibração vertical foi obtida através da divisão da superfície de contato em anéis concêntricos, sendo a distribuição de tensão uniforme dependente da frequência. Assim é possível desenvolver uma deflexão constante abaixo da base e avaliar a resposta dinâmica a uma excitação periódica. A constante de rigidez foi igual ao valor estático

$$k_z = \frac{4Gr_0}{1-\nu} \quad (1.3)$$

onde k_z é a constante de rigidez na direção z , G é o módulo de elasticidade transversal, r_0 raio equivalente da superfície em contato com o solo e ν é o coeficiente de Poisson, (LYSMER, 1965, apud GAZETAS,1983).

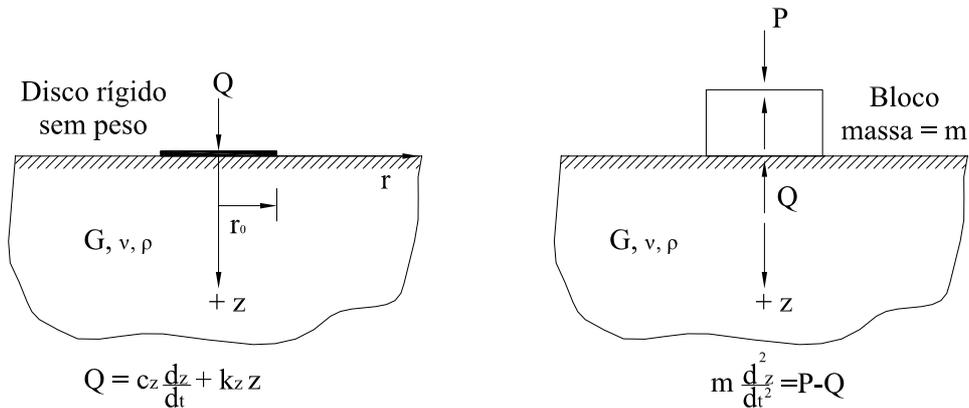


Figura 1.5 – Parâmetros nas equações de Hsieh.

O coeficiente de amortecimento é:

$$c_z = \frac{3,4r_0^2}{1-\nu} \sqrt{G\rho} \quad (1.4)$$

onde ρ é a densidade do solo.

A analogia de Lysmer foi desenvolvida e puderam-se estudar todos os modos de vibração como um sistema massa-mola-amortecedor (Figura 2.1), mas com os parâmetros independentes das frequências naturais. Nos casos em que há oscilação vertical e rotação em torno do eixo vertical (torção), essas são consideradas independentes e podem ser representadas por sistemas com um grau de liberdade.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) \quad (1.5)$$

Assim m é a massa, \ddot{x} a aceleração, c o amortecimento, \dot{x} a velocidade, k a rigidez, x o deslocamento e $P(t)$ é a força dinâmica externa provocada pela máquina. Nos casos de torção, a massa é substituída pelo I_z momento de inércia de massa polar e o x é o ângulo de rotação em torno do eixo vertical.

Nos casos em que há oscilação na horizontal e balanço, essas oscilações são consideradas acopladas e podem ser representadas por sistemas com dois graus de liberdade que terá a massa e o momento de inércia, os dois amortecimentos e as duas rigidezes. A oscilação de balanço é aquela em que o movimento se desenvolve em torno de um eixo horizontal.

Assim foram apresentadas expressões para esses parâmetros nos quatro modos de vibração, Tabela 1.2.

Tabela 1.2 – Parâmetros equivalentes para a análise de uma fundação circular sobre um semi-espaço elástico (RICHART et al., 1970).

Modo	Vertical	Horizontal	Balanço	Torção
Raio equivalente (r_0)	$\sqrt{\frac{ab}{\pi}}$	$\sqrt{\frac{ab}{\pi}}$	$\sqrt[4]{\frac{ba^3}{3\pi}}$	$\sqrt[4]{\frac{ba(a^2 + b^2)}{6\pi}}$
Rigidez (k_i)	$\frac{4Gr_0}{1-\nu}$	$\frac{32(1-\nu)}{7-8\nu}Gr_0$	$\frac{8Gr_0^3}{3(1-\nu)}$	$\frac{16}{3}Gr_0^3$
Razão de massa (B_i)	$\frac{(1-\nu)m}{4\rho r_0^3}$	$\frac{(7-8\nu)}{32(1-\nu)}\frac{m}{\rho r_0^3}$	$\frac{3(1-\nu)M_{m0}}{8\rho r_0^5}$	$\frac{M_{mz}}{\rho r_0^5}$
Fração de amortecimento (ξ_i)	$\frac{0,425}{\sqrt{B_z}}$	$\frac{0,2875}{\sqrt{B_x}}$	$\frac{0,15}{(1+B_\phi)\sqrt{B_\phi}}$	$\frac{0,5}{1+2B_\psi}$

Consideram-se:

a e b – dimensões da fundação

M_{m0} – momento de inércia de massa do sistema em relação ao eixo passa através do centróide da base e perpendicular ao plano de vibração;

M_{mz} – momento de inércia de massa em torno ao eixo x , y, z.

A razão de massa expressa na tabela 1.2 é a relação entre a massa da fundação e uma certa massa do semi-espaço elástico.

1.5 – CONTEÚDO

No primeiro capítulo, tratou-se de um breve histórico sobre o surgimento das indústrias e a necessidade do projeto de fundação de máquinas com a Revolução Industrial. Apresentou-se, ainda, a justificativa, o objetivo e uma breve descrição sobre os antecedentes históricos dos primeiros métodos utilizados para o projeto de fundações sujeita às vibrações e os estudos sobre o comportamento do solo quando sujeito a essas solicitações.

O segundo capítulo trata dos conceitos básicos de dinâmica necessários para a compreensão do que posteriormente será exposto, das propriedades do solo quando sujeito às vibrações e também dos principais conceitos para a realização dos projetos de fundações de máquinas.

No terceiro capítulo, são expostos os métodos analíticos clássicos utilizados neste estudo.

O quarto capítulo apresenta os modelos utilizados na análise, como também as condições de contorno impostas nessa análise pelo método dos elementos finitos. São, também, analisados os resultados obtidos.

No quinto capítulo estão contidas, além das principais conclusões, as sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

CONCEITOS GERAIS RELACIONADOS COM FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS

Alguns conceitos são essenciais para a compreensão do projeto de uma fundação de máquina, tais como: conceito de dinâmica e parâmetros dinâmicos dos solos. Há algumas regras básicas necessárias para qualquer tipo de fundação de máquina que se deseja projetar.

2.1. CONCEITOS BÁSICOS DE DINÂMICA

Todo sistema que possui massa e elasticidade é capaz de vibração. Para efetuar uma análise dinâmica, adota-se um modelo matemático que representa satisfatoriamente o sistema estrutural em movimento. A formulação do modelo matemático depende da quantidade de graus de liberdade, ou seja, do número de coordenadas independentes necessárias para descrever o movimento do sistema. O sistema com um grau de liberdade pode representar, com boa aproximação, certos problemas dinâmicos.

2.1.1 – SISTEMA COM UM GRAU DE LIBERDADE

Considera-se que um sistema tem um grau de liberdade quando só há movimento em uma direção. São apresentadas a seguir considerações sobre vibrações livres e forçadas com carregamento harmônico. A compreensão desses sistemas é importante para o entendimento e resolução de sistemas mais complexos.

2.1.1.1 – Vibração livre

Uma vibração é considerada livre quando ocorrida uma certa perturbação inicial, o corpo entra em movimento sem ação de forças externas aplicadas. Um sistema nessas condições pode ser representado por uma massa, uma mola e um amortecedor (Figura 2.1).

A dissipação de energia do sistema vibratório é representada pelo amortecimento. Têm-se três tipos de amortecimento: de Coulomb, viscoso e por histerese. O amortecimento de Coulomb resulta do atrito seco entre duas superfícies sólidas. A força relativa ao amortecimento viscoso é proporcional à velocidade do movimento. O amortecimento por histerese resulta do atrito entre as moléculas de um corpo quando esse é submetido a deformações. Pode-se dizer que um sistema sem amortecimento não existe, mas o seu estudo teórico auxilia na compreensão de um sistema mais complexo.

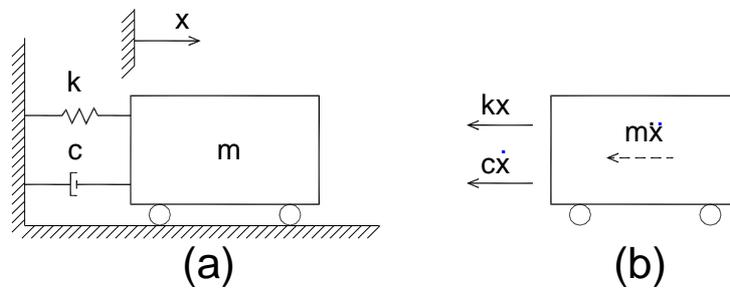


Figura 2.1 – (a) Oscilador com amortecimento viscoso; (b) Diagrama de corpo livre.

Nessa figura, m é a massa, k é a rigidez de mola e c é o coeficiente de amortecimento. A equação do movimento na direção x é dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.1)$$

onde \ddot{x} é a aceleração, \dot{x} a velocidade e x o deslocamento.

A substituição de x por He^{st} permite transformar a equação diferencial em uma equação algébrica de mesmo grau que a ordem da equação diferencial. Assim, com a aplicação da transformada de Laplace, obtém-se a solução da referida equação (PAZ, 1985):

$$He^{st}ms^2 + He^{st}cs + He^{st}k = 0 \quad (2.2)$$

Dividindo-se a Equação 2.2 por mAe^{st} e resolvendo-a, tem-se:

$$s_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.3)$$

A solução geral é, então, a seguinte:

$$x(t) = H_1 e^{s_1 t} + H_2 e^{s_2 t} \quad (2.4)$$

Nessa equação, H_1 e H_2 são constantes calculadas para as condições iniciais ($t = 0$) em que se tem o deslocamento $x(0)$ e a velocidade $\dot{x}(0)$. A Eq. 2.4 pode ser assim representada como

$$x(t) = e^{-(c/2m)t} \left(H_1 e^{\left(\sqrt{(c/2m)^2 - k/m}\right)t} + H_2 e^{\left(-\sqrt{(c/2m)^2 - k/m}\right)t} \right) \quad (2.5)$$

Quando $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \frac{k}{m}$, a Equação 2.3 resulta em valores de s reais. Não há assim, vibração, o que corresponde ao movimento superamortecido (THOMSON, 1978).

Quando $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \frac{k}{m}$, o expoente torna-se um número imaginário $\pm i\left(\sqrt{k/m - (c/2m)^2}\right)t$. Utilizando-se a fórmula de Euler, tem-se:

$$e^{\pm i\left(\sqrt{k/m - (c/2m)^2}\right)t} = \cos\sqrt{k/m - (c/2m)^2} t \pm i \operatorname{sen}\sqrt{k/m - (c/2m)^2} t \quad (2.6)$$

indicando que há movimento oscilatório, o que constitui o caso subamortecido.

Entende-se por amortecimento crítico o menor amortecimento capaz de impedir o movimento vibratório. Isso acontece quando

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m}$$

Assim, obtém-se o coeficiente de amortecimento crítico:

$$c_c = 2\sqrt{km} \quad (2.7)$$

Normalmente, o amortecimento é expresso de forma adimensional pela fração de amortecimento crítico da seguinte forma:

$$\xi = \frac{c}{c_c} \quad (2.8)$$

A Equação 2.3 pode ser reescrita na forma de número complexo. Assim tem-se:

$$s_{1,2} = \frac{-c}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (2.9)$$

onde $i = \sqrt{-1}$.

A frequência angular natural amortecida é fornecida por:

$$\omega_{nd} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \quad (2.10)$$

Quando no sistema não há amortecimento, $c = 0$, obtém-se a frequência angular natural em rad/s (CREDE, 1972). Tem-se, então,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.11)$$

A frequência natural em Hz e o período em segundos são dados por:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (2.12)$$

e

$$T = \frac{1}{f_n} \quad (2.13)$$

A partir das Equações 2.11 e 2.8, a Equação 2.10 pode ser assim reescrita:

$$\omega_{nd} = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.14)$$

Aplicando-se as condições iniciais para obter os resultados de H_1 e H_2 , e substituindo na Eq. 2.5, tem-se:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left(x(0) \cos \omega_{nd} t + \frac{\dot{x}(0) + x(0)\xi\omega_n}{\omega_{nd}} \sin \omega_{nd} t \right) \quad (2.15)$$

A Eq. 2.15 pode ser escrita da seguinte forma:

$$x(t) = C e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_{nd} t - \alpha) \quad (2.16)$$

onde

$$C = \sqrt{x(0)^2 + \left(\frac{\dot{x}(0) + x(0)\xi\omega_n}{\omega_{nd}} \right)^2} \quad (2.17)$$

$$\alpha = \arctg \left(\frac{\dot{x}(0) + x(0)\xi\omega_n}{\omega_{nd} x(0)} \right) \quad (2.18)$$

Para um sistema não amortecido, considera-se ξ igual a zero. Então, a expressão do deslocamento pode ser assim reescrita:

$$x(t) = x(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2.19)$$

A Eq. 2.19 pode ser escrita da seguinte forma:

$$x(t) = C \cos(\omega_n t - \alpha) \quad (2.20)$$

onde

$$C = \sqrt{x(0)^2 + \left(\frac{\dot{x}(0)}{\omega_n}\right)^2} \quad (2.21)$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{\dot{x}(0)/\omega_n}{x(0)}\right) \quad (2.22)$$

2.1.1.2 – Vibração forçada com um carregamento harmônico.

Uma vibração é considerada forçada quando resulta de um efeito externo que continua durante todo o movimento. A excitação harmônica em fundações de máquinas, normalmente, é causada por máquinas rotativas. A força exercida pela máquina na estrutura pode ser representada por funções seno ou co-seno. A Figura 2.2 representa um sistema com uma força aplicada $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$.

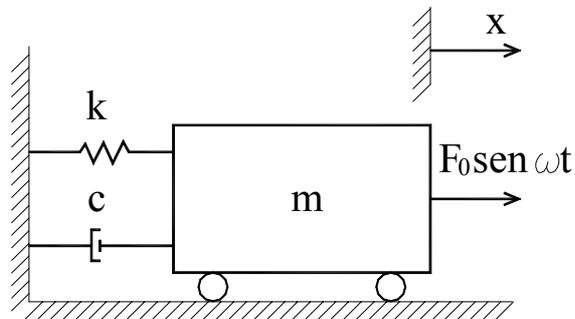


Figura 2.2 – Sistema amortecido com vibração harmônica

A equação de movimento é dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t) \quad (2.23)$$

i) Sistema não amortecido

A solução da Equação 2.23 pode ser expressa como a soma da solução da equação homogênea com a solução particular da equação geral. Assim, a equação particular é

$$x_p = X \operatorname{sen} \omega t \quad (2.24)$$

Substituindo-se a Equação 2.24 na 2.23, tem-se:

$$X = \frac{F_0/k}{1-r^2} \quad (2.25)$$

onde $r = \omega/\omega_n$

A soma da solução da equação homogênea e da solução da particular da equação será dada por:

$$x(t) = A \cos \omega_n t + B \operatorname{sen} \omega_n t + \frac{F_0/k}{1-r^2} \operatorname{sen} \omega t \quad (2.26)$$

Com as condições iniciais sendo o deslocamento e a velocidade iguais a zero encontra-se A e B:

$$x(t) = \frac{F_0/k}{1-r^2} (\operatorname{sen} \omega t - r \operatorname{sen} \omega_n t) \quad (2.27)$$

Quando a frequência harmônica coincide com a frequência aplicada, isto é, $r = 1$, a amplitude da estrutura tem um valor elevado e aumenta gradualmente. Essa situação é conhecida como ressonância.

ii) Sistema amortecido

De maneira semelhante, o sistema amortecido pode ser expresso como a soma da solução da equação homogênea com a solução particular da equação geral. As soluções da equação homogênea e particular da equação geral são, respectivamente:

$$x(t)_h = e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_{nd} t + B \sin \omega_{nd} t) \quad (2.28)$$

$$x(t)_p = H_1 \sin \omega t + H_2 \cos \omega t \quad (2.29)$$

A solução da equação homogênea é a parcela transiente e a solução particular da equação geral é a parcela permanente (steady-state):

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (A \cos \omega_{nd} t + B \sin \omega_{nd} t) + \frac{x_{st} \sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (2.30)$$

onde $x_{st} = F_0/k$ é a deflexão estática da mola resultando da força F_0 .

A primeira parcela da Equação 2.30 é denominada de transiente devido a $e^{-\xi\omega t}$ que, passado algum tempo, será desprezível, enquanto que a segunda parcela permanecerá.

A solução particular pode ser assim escrita como:

$$x(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad (2.31)$$

onde X é a amplitude de oscilação para a resposta permanente e ϕ é o ângulo de fase

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (2.32)$$

ou

$$X = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2.33)$$

$$\phi = \arctg\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \quad (2.34)$$

A partir da Equação 2.33, obtém-se o fator de amplificação dinâmica, D . As Figuras 2.3 e 2.4 mostram gráficos para o fator de amplificação dinâmica e o ângulo de fase para algumas razões de amortecimento e razões de frequências. Observa-se na Figura 2.3 que para $r = 1$ e fração de amortecimento (ξ) baixa, o fator de amplificação dinâmico tem um grande aumento que corresponde à ressonância.

$$D = \frac{X}{x_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}} \quad (2.35)$$

iii) Força transmitida à fundação

Considerando um sistema amortecido, a força transmitida à fundação é dada por

$$F_T = kx + c\dot{x} \quad (2.36)$$

Utilizando apenas a resposta permanente, Eq. 2.31, a Eq. 2.36 pode ser assim representada

$$F_T = X[k\text{sen}(\omega t - \phi) + c\omega\text{cos}(\omega t - \phi)] \quad (2.37)$$

Tem-se F_{T0} como força máxima transmitida à fundação

$$F_{T0} = F_0 \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2.38)$$

A transmissibilidade é dada pela relação da força máxima transmitida pela força máxima aplicada, F_0 .

$$T = \frac{F_{T0}}{F_0} = \sqrt{\frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \quad (2.39)$$

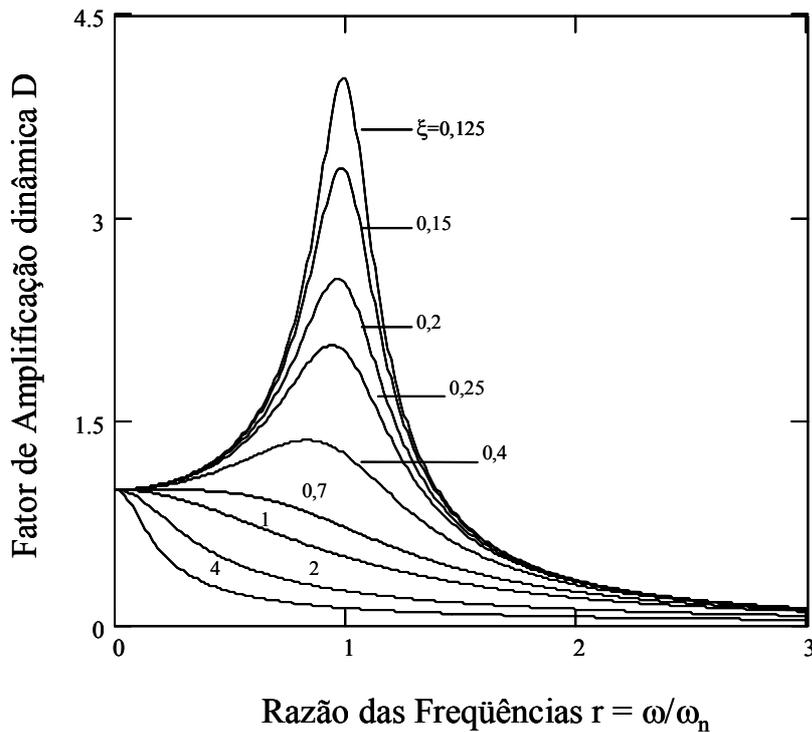


Figura 2.3 – Fator de Amplificação dinâmica em relação ao r e a ξ .

Para uso do conceito de transmissibilidade em fundações, a melhor condição é aquela cujo valor da transmissibilidade for o menor possível. Uma forma de diminuir a transmissibilidade é a utilização de isoladores.

A Figura 2.5 mostra o gráfico da transmissibilidade, que é dependente da razão entre frequências e da fração de amortecimento. Observa-se que, para $r > 2$, a relação se inverte. O resultado é que quanto menor for ξ , menor a transmissibilidade.

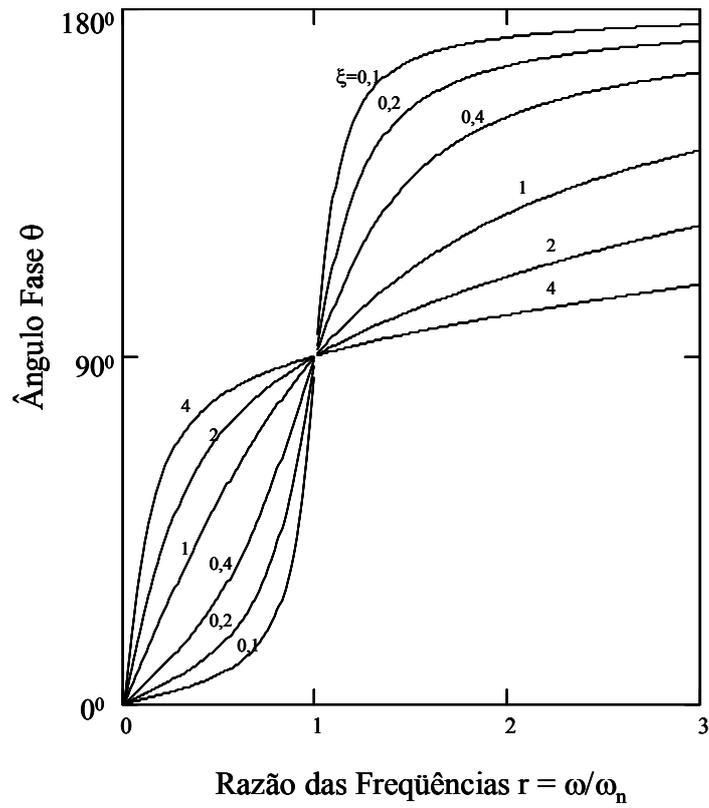


Figura 2.4 – Ângulo de fase dinâmica em relação ao r e a ξ .

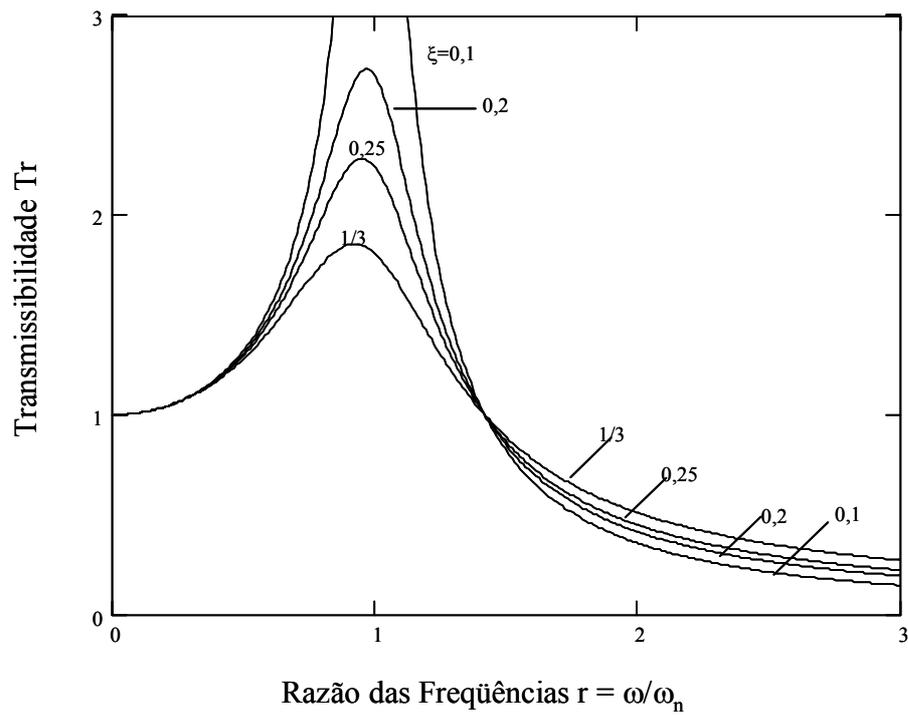


Figura 2.5 – Transmissibilidade dinâmica em relação ao r e a ξ .

2.1.2 – SISTEMA COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE

Na análise por elementos finitos dos casos estudados, blocos sólidos, a estrutura é discretizada em elementos sólidos de oito nós que estão interligados entre si. Os deslocamentos nos interiores dos elementos são expressos em termos dos deslocamentos nodais.

O vetor deslocamento $\{u\}$ pode ser representado por

$$\{u\} = [N]\{q\} \quad (2.40)$$

onde $[N]$ é a matriz que define o campo de deslocamentos e $\{q\}$ é o vetor das coordenadas generalizadas.

A energia cinética de cada elemento será dada por (OLIVEIRA, 1974)

$$\delta T = \{\delta \dot{q}\}^T \int_v \rho [N]^T [N] dv \{\dot{q}\} \quad (2.41)$$

O trabalho é dado por

$$\delta W = \delta W_d + \delta W_v + \delta W_s + \delta W_a \quad (2.42)$$

onde W_d , W_v , W_s e W_a são os trabalhos decorrentes da deformação, das forças de volume, das forças aplicadas à superfície e das forças de amortecimento, respectivamente. Tem-se que

$$\delta W_d = -\delta U \quad (2.43)$$

onde a energia potencial U é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \{\sigma\}^T \{\epsilon\} \quad (2.44)$$

Num material elástico linear, tem-se o vetor das tensões $\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}$, onde $[E]$ é a matriz de elasticidade e $\{\varepsilon\} = [B]\{q\}$ é o vetor das deformações. É $[B]$ a matriz que relaciona os deslocamentos nodais com as deformações. Fazendo as substituições na Eq. 2.44 e Eq. 2.43, obtém-se:

$$\delta W_d = -\{\delta q\}^T \int_v [B]^T [E] [B] dv \{q\} \quad (2.45)$$

Para as forças de volume, superfície e amortecimento, tem-se:

$$\delta W_v = \{\delta q\}^T \int_v [N]^T \{F_v\} dv \quad (2.46)$$

$$\delta W_s = \{\delta q\}^T \int_s [N]^T \{F_s\} ds \quad (2.47)$$

$$\delta W_a = -\{\delta q\}^T [C] \{\dot{q}\} \quad (2.48)$$

Aplicando o princípio de Hamilton

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt = \int_{t_1}^{t_2} \{\delta q\}^T \left(-[M]^e \{\ddot{q}\} - [C]^e \{\dot{q}\} - [K]^e \{q\} + \{P\}^e \right) dt = 0 \quad (2.49)$$

onde

$$[M]^e = \int_v \rho [N]^T [N] dv \quad (2.50)$$

$$[K]^e = \int_v [B]^T [E] [B] dv \quad (2.51)$$

$$[C]^e = [C] \quad (2.52)$$

$$\{P\}^e = \int_v [N]^T \{F_v\} dv + \int_s [N]^T \{F_s\} ds \quad (2.53)$$

Sendo $\{\delta q\}$ arbitrário, a equação do movimento para um elemento é a seguinte

$$[M]^e \{\ddot{q}\} + [C]^e \{\dot{q}\} + [K]^e \{q\} = \{P\}^e \quad (2.54)$$

Considerando-se a Eq. 2.54 aplicada a toda estrutura, tem-se:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{P\} \quad (2.55)$$

2.1.2.1 – Vibração livre não amortecida

Para o sistema com vários graus de liberdade, a equação de movimento livre não amortecido é dada por:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = 0 \quad (2.56)$$

Sendo

$$q_i(t) = \phi_i f(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.57)$$

$$[M]\{\phi\}\ddot{f}(t) + [K]\{\phi\}f(t) = 0 \quad (2.58)$$

A Eq 2.58 pode ser assim representada:

$$\left([M]\ddot{f}(t) + [K]f(t) \right) \{\phi\} = 0 \quad (2.59)$$

Multiplicando-se a Eq. 2.59 por $[M]^{-1}$ e dividindo-se por $f(t)$, tem-se:

$$\left(I \frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} + [K][M]^{-1} \right) \{\phi\} = 0 \quad (2.60)$$

A fim de satisfazer a igualdade para qualquer $\{\phi\}$, o termo entre parênteses deve ser igual a zero. Tendo em vista que $\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)}$ são independentes de t , tem-se:

$$\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \lambda \quad (2.61)$$

$$\ddot{f}(t) + \lambda f(t) = 0 \quad (2.62)$$

A solução da Eq. 2.62 para $\lambda > 0$ é a seguinte:

$$f(t) = \text{sen}(\sqrt{\lambda}t + \theta) \quad (2.63)$$

A igualdade acima mostra que há o movimento harmônico. Substituindo-se a Eq.2.63 na Eq. 2.58, tem-se:

$$([K] - \lambda[M])\{\phi\} = 0 \quad (2.64)$$

Resolvendo-se o determinante do primeiro fator do produto, obtêm-se os valores de λ que são denominados de autovalores. A partir desses, encontram-se as freqüências angulares do sistema:

$$\lambda_i = \omega_i^2 \quad (2.65)$$

De posse dos valores de λ_i , substituindo-os na Eq. 2.64, encontram-se os valores de $\{\phi\}_i$ que são denominados autovetores, ou modos normais. Os modos normais podem ser reunidos em uma matriz quadrada chamada matriz modal.

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \ \{\phi\}_2 \ \{\phi\}_3 \ \dots \ \{\phi\}_n] \quad (2.66)$$

Prova-se, assim, que os autovetores são ortogonais em relação às matrizes de massa e rigidez, isto é,

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = 0, \text{ se } i \neq j \quad (2.67a)$$

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = M_i, \text{ se } i = j \quad (2.67b)$$

$$\{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j = 0, \text{ se } i \neq j \quad (2.68a)$$

$$\{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j = K_i, \text{ se } i = j \quad (2.68b)$$

Essa condição, em que $i = j$, resulta nas matrizes de massa e rigidez generalizadas, que são matrizes diagonais.

De posse dessas propriedades, a equação de movimento pode ser desacoplada.

Supondo-se que o vetor deslocamento seja dado por:

$$\{q\} = [\Phi] \{z\} \quad (2.69)$$

$\{z\}$ é o vetor de amplitudes do movimento no sistema desacoplado.

E multiplicando-se a Eq. 2.56 por $[\Phi]^T$, tem-se:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{z}\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{z\} = 0 \quad (2.70)$$

As equações do movimento expressas em termos da variável z resultam em matrizes desacopladas.

$$M_i \{\ddot{z}\} + K_i \{z\} = 0$$

Tem-se, então, um conjunto de equações independentes de segunda ordem semelhantes ao sistema com um grau de liberdade.

2.1.2.2 – Vibração forçada amortecida

A equação do movimento é a seguinte:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (2.71)$$

Sendo a matriz de amortecimento proporcional às matrizes de massa e de rigidez

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (2.72)$$

α e β são constantes.

Para desacoplar-se a equação de movimento, pode-se utilizar tanto a matriz modal quanto a matriz modal ponderada, sendo a ponderada definida por:

$$[\tilde{\Phi}] = \frac{[\Phi]}{\sqrt{[\Phi]^T [M] [\Phi]}} \quad (2.73)$$

Supondo-se que o vetor deslocamento é dado por:

$$\{q\} = [\tilde{\Phi}]\{z\} \quad (2.74)$$

e multiplicando-se a Eq. 2.71 por $[\tilde{\Phi}]^T$, tem-se:

$$[\tilde{\Phi}]^T [M] [\tilde{\Phi}]\{\ddot{z}\} + [\tilde{\Phi}]^T [C] [\tilde{\Phi}]\{\dot{z}\} + [\tilde{\Phi}]^T [K] [\tilde{\Phi}]\{z\} = [\tilde{\Phi}]^T \{F(t)\} \quad (2.75)$$

Devido às propriedades de ortogonalidade, o lado esquerdo da Eq. 2.75 resulta em matrizes diagonais.

$$\ddot{z}_i + (\alpha + \beta\omega_i^2)\dot{z}_i + \omega_i^2 z_i = [\tilde{\Phi}]^T \{F(t)\} \quad (2.76)$$

A equação de movimento desacoplada pela matriz modal, $[\Phi]$, será dada por:

$$\ddot{z}_i + 2\xi_i\omega_{ni}\dot{z}_i + \omega_{ni}^2 z_i = \frac{[\Phi]^T \{F(t)\}}{M_i} \quad (2.77)$$

onde ξ_i é a taxa de amortecimento e M_i é a massa generalizada.

Supondo-se que

$$\frac{[\Phi]^T \{F(t)\}}{M_i} = \{P\} \quad (2.78)$$

O deslocamento pode ser descrito como:

$$\begin{aligned} z_i(t) = & \frac{1}{\omega_{nd}} \int_0^t P_i(\tau) e^{-\xi_i\omega_n(t-\tau)} \text{sen}\omega_{nd}(t-\tau) d\tau + e^{-\xi_i\omega_{ni}t} (\cos\omega_{nd}t) z_i(0) \\ & + \frac{1}{\omega_{nd}} e^{-\xi_i\omega_{ni}t} \text{sen}(\cos\omega_{nd}t) (\dot{z}_i(0) + \xi_i\omega_{ni}z(0)) \end{aligned} \quad (2.79)$$

A integral que aparece na equação dos deslocamentos é conhecida como integral de Duhamel. Se a taxa de amortecimento, ξ , for igual a zero e a freqüência amortecida for trocada pela não amortecida, obtém-se o deslocamento para o caso de um sistema não amortecido.

2.2 – PROPRIEDADES DO SOLO SOB A AÇÃO DE CARGA DINÂMICA

2.2.1 – CONSTANTES ELÁSTICAS DO SOLO

As principais constantes da teoria da elasticidade são: módulo de Young, E , coeficiente de Poisson, ν , e módulo de elasticidade transversal, G , também denominado como módulo de cisalhamento. O módulo de Young e o coeficiente de Poisson podem ser definidos considerando-se uma tensão uniaxial σ_z aplicada num cilindro elástico, como mostra a Figura 2.6, sendo conhecida a deformação vertical e a lateral provocada, então:

$$E = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z} \quad (2.80)$$

$$\nu = \frac{-\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = \frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_z} \quad (2.81)$$

onde $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ e ε_z são deformações na direção x, y e z, respectivamente.

A tabela 2.1 contém os valores limites para o módulo de elasticidade de acordo com o tipo de solo.

Tabela 2.1 – Valores limites para o módulo de elasticidade (WINTERKORN e FANG 1975)

Tipo de solo	Módulo de Elasticidade (MPa)
Argila muito mole	0,345 a 2,758
Argila mole	1,724 a 4,137
Argila média	4,137 a 8,274
Argila rija	6,895 a 17,237
Argila arenosa	27,579 a 41,368
Areia siltosa	6,895 a 20,684
Areia fofa	10,342 a 24,132
Areia compacta	48,263 a 82,737
Areia compacta e pedregulho	96,526 a 193,053

A Tabela 2.2 apresenta valores que podem ser tomados como referências para o valor do coeficiente de Poisson em função do tipo do material do terreno.

Tabela 2.2 – Valores para o coeficiente de Poisson em relação ao tipo do material terreno (PRAKASH, 1981)

Tipo de solo	Coeficiente de Poisson
Argila	0,5
Areia	0,3 a 0,35
Rocha	0,15 a 0,25

O módulo de elasticidade transversal G pode ser determinado relacionando a tensão de cisalhamento, τ_{zx} , num cubo elástico com a distorção de cisalhamento, γ_{zx} , na hipótese de ser conhecida. Assim, G é dado por

$$G = \frac{\tau_{zx}}{\gamma_{zx}} \quad (2.82)$$

Outra forma de definir o módulo de elasticidade transversal é associá-lo ao módulo de Young e ao coeficiente de Poisson

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.83)$$

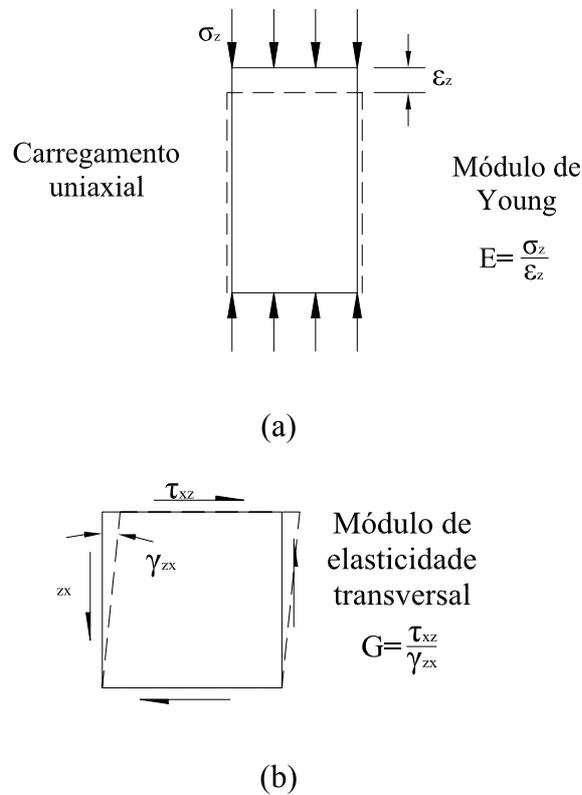


Figura 2.6 – (a) Módulo de Young e (b) Módulo de elasticidade transversal

2.2.2 – MÓDULO DE ELASTICIDADE TRANSVERSAL DINÂMICO

O módulo de elasticidade transversal dinâmico pode ser definido por meio de expressões aproximadas, ensaios em campo ou ensaios em laboratórios. No entanto, as expressões necessitam de outros parâmetros fornecidos por laboratório.

Os ensaios fornecem a velocidade da onda de distorção, V_S , e a velocidade de propagação da onda de Rayleigh, V_R , sendo $V_R \cong 0,94V_S$. Para solos com o coeficiente de Poisson acima de 0,35, as velocidades das ondas de distorção e de Rayleigh são semelhantes (Figura 2.7). O módulo de elasticidade transversal dinâmico máximo é determinado por:

$$G_{\text{máx}} = \rho V_S^2 \quad (2.84)$$

ou

$$G_{\text{máx}} = \rho V_R^2 = \rho (fL_R)^2 \quad (2.85)$$

onde

ρ – densidade do solo;

f – frequência do oscilador;

L_R – comprimento da onda de Rayleigh.

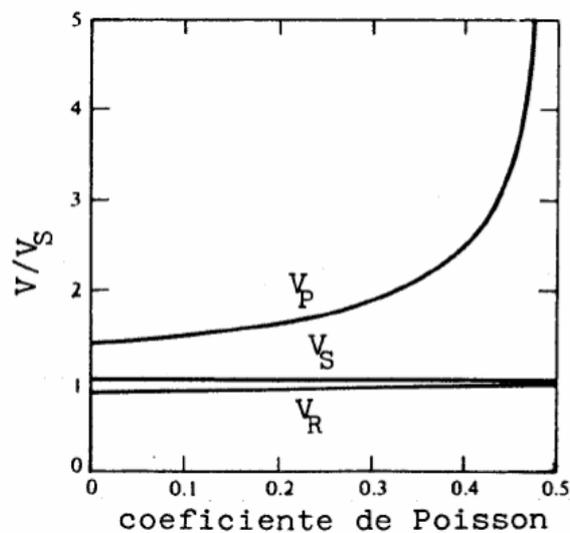


Figura 2.7 – Relação entre o coeficiente de Poisson e as velocidades de propagação das ondas (adaptada de RICHART et al, 1970)

Os ensaios em laboratório de coluna ressonante e o de *bender elements* são utilizados para a obtenção da velocidade de propagação da onda V_s . Dessa forma, tem-se o módulo de elasticidade transversal.

Os ensaios de campo para a determinação da velocidade de onda V_s são: *crosshole*, *downhole*, *uphole*, piezocone sísmico, refração sísmica, vibração em regime estacionário, pressiométrico e análise espectral de onda de superfície (BARROS e HACHICH, 1998).

2.2.2.1 – Ondas

As ondas volumétricas, P e S, são aquelas que se propagam através do corpo inteiro. As ondas P, também conhecidas como ondas primárias ou de compressão, são ondas longitudinais. Ou seja, a vibração das partículas do sólido ocorre no mesmo sentido da vibração da onda (Figura 2.8). As ondas S, também conhecidas como ondas secundárias ou de distorção, são ondas transversais. Ou seja, a vibração das partículas do sólido ocorre no sentido perpendicular à direção de propagação da onda (Figura 2.9) (DIAS, 2000), (NEVES, 2005).

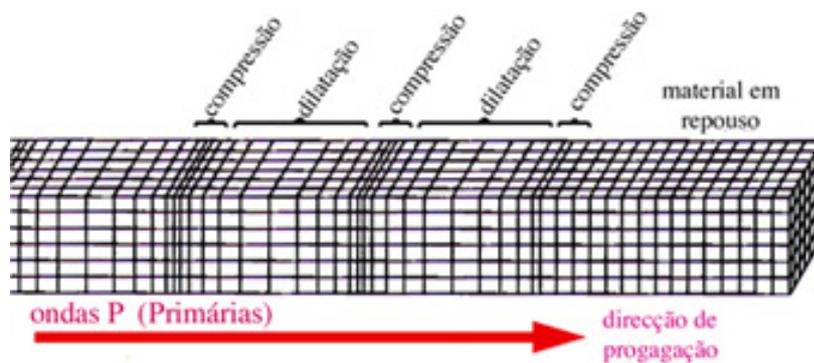


Figura 2.8 – Ondas P. (DIAS, 2000)

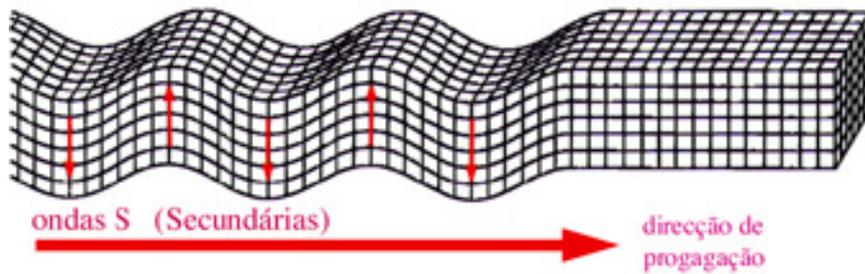


Figura 2.9 – Ondas S. (DIAS, 2000)

As ondas superficiais são aquelas que se propagam paralelamente à superfície do terreno. Não havendo transmissão de energia para o seu interior, a sua amplitude decresce exponencialmente com a profundidade (LOPES, *et al*, 2003). Na onda R, onda de Rayleigh, as partículas se deslocam num formato de uma elipse, e o sentido do seu deslocamento é retrogrado em relação à direção da onda (Figura 2.10 e Figura 2.11).

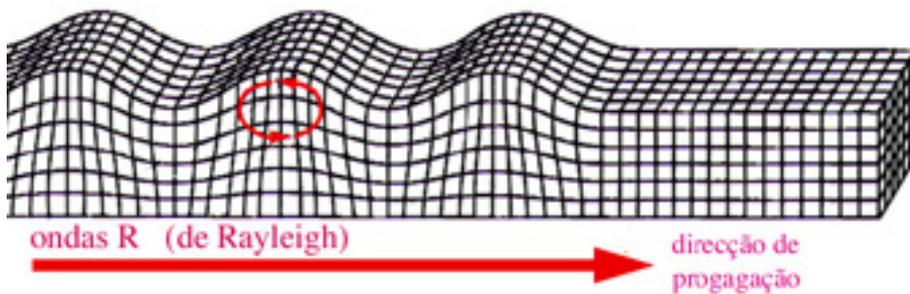


Figura 2.10 – Ondas Rayleigh. (DIAS, 2000)

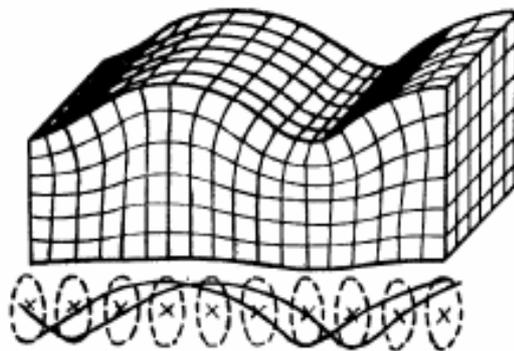


Figura 2.11 – Detalhe da forma de deslocamento elíptico da onda Rayleigh
 [Ref. http://www.ualg.pt/fcma/dact/ficheiros/fich_TB/Estrutura02.pdf]

As ondas de superfícies são importantes na sismologia industrial por causa das bases das estruturas industriais colocadas próximas à superfície, já que essas ficam sendo receptores das vibrações causadas pelas máquinas. As ondas de superfície contêm mais de setenta por cento da energia de vibração total, tornando-se predominantes em relação aos outros tipos de ondas, para pequenas distâncias das fontes de vibração (MARK e SVINKIN, 2002).

2.2.2.2 – Fatores que afetam o módulo de elasticidade transversal dinâmico

O módulo de elasticidade transversal dinâmico diminui com o aumento da deformação. É, no entanto, constante para amplitudes de deformação cisalhante com valores inferiores a $10^{-3}\%$. Para valores de amplitudes de deformação abaixo desse limite, denomina-se módulo de elasticidade transversal máximo. Abaixo são citados alguns fatores que afetam o módulo de elasticidade transversal dinâmico.

i) Tensão efetiva, índice de vazios e razão de sobreadensamento

Em 1978, Hardin propôs uma equação para o módulo transversal máximo para areias e argilas após o adensamento primário do solo. Essa equação é bastante utilizada em solos brasileiros como areias secas, solos sedimentares saturados e solos saprolíticos (HACHICH E BARROS, 1998). É determinada por:

$$G_{\text{máx}} = 625 \frac{\text{RSA}^K}{0,3 + 0,7e^2} \sqrt{p_a \sigma_0} \quad (2.86)$$

onde

σ_0 – tensão normal efetiva octaédrica;

e – índice de vazios;

RSA – razão de sobreadensamento;

p_a – pressão atmosférica;

K – constante dependente do índice de plasticidade (ver Tabela 2.3).

O índice de plasticidade, o índice de vazios e a razão de sobreadensamento são fornecidos através de ensaios no laboratório. A tensão normal efetiva pode ser calculada em função da profundidade do solo. A razão de sobreadensamento, RSA, também

denominada de overconsolidation, OCR, é definida pela relação da máxima tensão vertical já sofrida pelo solo e a tensão vertical efetiva atual.

Tabela 2.3 – Valores de K para diferentes índices de plasticidade

Índice de Plasticidade (IP) (%)	K
0	0
20	0,18
40	0,30
60	0,41
80	0,48
≥100	0,50

Já nos solos lateríticos os valores do $G_{\text{máx}}$, obtidos por ensaios, diferenciam muito dos fornecidos pela Eq. 2.86. Portanto, essa não é aconselhável para este tipo de solo. Essa diferença nos solos lateríticos é causada essencialmente pela cimentação natural das partículas e pelas tensões de sucção.

ii) Componentes individuais de tensão

A tensão efetiva média, σ_0 , não deve ser usada e, sim, as componentes individuais da tensão. Foi comprovado que o módulo de elasticidade transversal depende da tensão principal na direção da velocidade de propagação de onda, σ_a , e a tensão principal na direção da vibração das partículas, σ_b , e a terceira tensão principal, σ_c , não influencia. Dessa forma, a Eq. 2.86 só é indicada quando há estado isotrópico de tensões.

Assim, a equação do módulo transversal foi reescrita, considerando-se as componentes individuais de tensões.

$$G_{\text{máx}} = 625 \frac{RSA^K}{0,3 + 0,7e^2} \sqrt[4]{\sigma_a \sigma_b} \sqrt{p_a} \quad (2.87)$$

iii) Duração do confinamento

A variação de $G_{m\acute{a}x}$ com o tempo de adensamento foi dividida em duas fases: adensamento primário e efeito do tempo a longo prazo (Figura 2.12). Na fase de adensamento primário, ocorre a variação do índice de vazios e o $G_{m\acute{a}x}$ varia rapidamente com o tempo. A fase denominada efeito do tempo a longo prazo tem como característica o fato de o módulo transversal dinâmico aumentar linearmente com o logaritmo do tempo. O aumento do módulo na segunda fase resulta da variação de vazios e da mudança da estrutura do solo devido a uma consolidação da aderência de natureza físico-químico para os solos coesivos e para os solos não coesivos o aumento do contato entre partículas. Antes do ponto de transição, no adensamento primário, a tensão efetiva é menor que a assumida devido ao excesso de pressão de água nos poros (PRAKASH e PURI, 1988).

A duração de cada fase depende do tipo de solo analisado, índices de vazios, resistência à tensão de cisalhamento não drenada (resistência não drenada), pressão confinante e do histórico das tensões.

Dois coeficientes são usados para representar o efeito do tempo a longo prazo. O coeficiente de acréscimo do módulo transversal com o tempo, I_G , ou seja, a taxa de aumento por ciclo logarítmico de tempo

$$I_G = \frac{\Delta G}{\log\left(\frac{t_2}{t_1}\right)} \quad (2.88)$$

onde

ΔG – variação de $G_{m\acute{a}x}$ entre os instantes t_1 e t_2 ;

t_1 e t_2 – tempos após adensamento primário.

O outro coeficiente é o acréscimo normalizado do módulo transversal com o tempo, N_G .

$$N_G = \frac{I_G}{(G_{m\acute{a}x})_{1000}} 100\% \quad (2.89)$$

onde $(G_{\text{máx}})_{1000}$ é o módulo transversal máximo medido após 1000 minutos de pressão confinante, que ocorre após o adensamento primário.

A Tabela 2.4 contém alguns valores propostos de N_G de acordo com o tipo de solo.

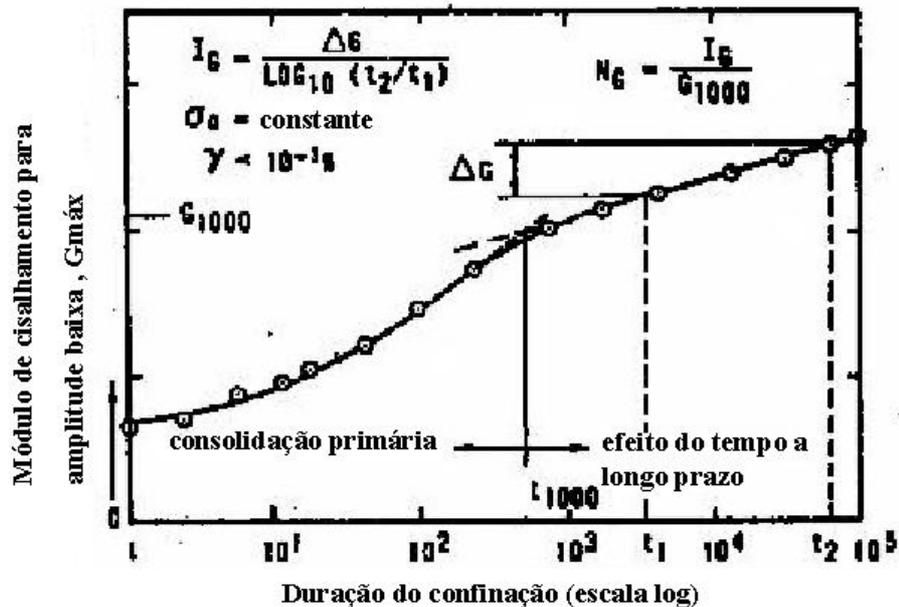


Figura 2.12 – Variação de $G_{\text{máx}}$ em relação ao tempo, determinada em ensaio de coluna ressonante (adaptada de PRAKASH e PURI, 1988)

Tabela 2.4 – Valores de N_G de acordo com o solo (RICHART et al., 1977 apud HACHICH e BARROS, 1998)

Tipo de Solo	N_G
Areia limpa	1 a 3%
Argila sobreadensada	3 a 10%
Argila normalmente adensada	5 a 20%

Para a determinação do módulo transversal com o efeito da duração do tempo para baixas amplitudes no local, utiliza-se o valor do módulo máximo no fim do adensamento primário, $(G_{\text{máx}})_{\text{primário}}$, que é obtido pelo ensaio de coluna ressonante,

somado ao coeficiente I_G com o fator idade para o local, F_A . Então o módulo de elasticidade máximo de campo a ser estimado, $(G_{\max})_{\text{campo}}$, é

$$(G_{\max})_{\text{campo}} = (G_{\max})_{\text{primário}} + F_A I_G \quad (2.90)$$

O fator idade para o local é calculado por

$$F_A = \log_{10} \left(\frac{t_c}{t_p} \right) \quad (2.91)$$

onde

t_c – intervalo de tempo decorrido desde o início da última mudança significativa na história das tensões no local;

t_p – intervalo de tempo para concluir o adensamento primário no local devido à variação de tensão.

iv) Grau de saturação

O fluido afeta a velocidade da onda de cisalhamento devido ao acréscimo da massa das partículas em movimento. Em um estudo feito em areia, verificou-se que a influência do grau de saturação na velocidade de onda pode ser calculada devido ao efeito do peso da água. Portanto, para solos não coesivos, deve ser considerado o peso unitário, no local, e a pressão efetiva para obter o módulo de elasticidade transversal.

v) Cimentação das partículas

Existem solos naturalmente cimentados e os melhorados através de aditivos. Para analisar o comportamento dinâmico nesses solos, foram realizados estudos em areias artificialmente cimentadas. Foi observado que, com o aumento do grau de cimentação, aumenta o G_{\max} e diminui a tensão efetiva, σ_0 , em que o grau de cimentação é definido pela relação entre o volume de cimento e o volume de vazios.

vi) Número de ciclos da carga dinâmica

Para ciclos entre 1 e 100, em areias secas, o módulo transversal aumenta com o aumento do número de ciclos e, em solos coesivos, diminui com o aumento do número de ciclos.

vii) Intensidade da carga dinâmica

A carga dinâmica influi no nível de tensão provocado no solo; conseqüentemente, o módulo de elasticidade transversal diminui com o aumento da carga dinâmica.

viii) Pré-deformação dinâmica

A pré-deformação dinâmica é resultado de vibrações de grande amplitude. Essa, por sua vez, modifica o módulo de elasticidade transversal. Quanto maior o número de ciclos dessas amplitudes, maior o módulo de elasticidade transversal.

2.2.3 – CONSTANTES DE MOLA EQUIVALENTE AO SOLO

O comportamento do solo, quando atua uma carga sobre ele, pode ser representado por uma mola equivalente. Para essa representação, são necessários basicamente o módulo de Young, o coeficiente de Poisson e o módulo transversal.

A constante de mola, k , é definida como:

$$k = \frac{P}{\Delta Z} \quad (2.92)$$

onde

P – carga na mola;

ΔZ – deflexão da mola.

A fundação de uma máquina pode transmitir ao solo deslocamentos horizontais, verticais, balanços e torção (Figura 3.1). As respectivas condições no solo são:

compressão uniforme, cisalhamento uniforme, compressão não uniforme e cisalhamento não uniforme.

Em 1962, Barkan propôs coeficientes de solo para cada modo de vibração. Por meio deles, fornece a mola equivalente do solo:

i) Coeficiente de compressão elástica uniforme

$$C_u = \frac{p}{S_e} \quad (2.93)$$

onde p é a compressão uniforme e S_e é o recalque elástico.

A rigidez da mola para oscilações verticais é a seguinte:

$$k_z = \frac{pA}{S_e} \rightarrow k_z = C_u A \quad (2.94)$$

onde A é a área da fundação da base em contato com o solo.

ii) Coeficiente de cisalhamento elástico uniforme

$$C_\tau = \frac{\tau_{AV}}{S_e} \quad (2.95)$$

onde τ_{AV} é a tensão média de cisalhamento no solo no plano de contato com a fundação.

A rigidez da mola para oscilações horizontais é

$$k_x = \frac{\tau_{AV}A}{S_e} \rightarrow k_x = C_\tau A \quad (2.96)$$

iii) Coeficiente de compressão elástica não uniforme e coeficiente de cisalhamento elástica não uniforme

O coeficiente de compressão elástica uniforme é o seguinte:

$$C_u = \frac{1,13E}{1-\nu^2} \frac{1}{\sqrt{A_f}} \quad (2.97)$$

onde E é módulo de elasticidade, ν é coeficiente de Poisson e A_f área da fundação.

E os outros coeficientes, registrados a seguir, são fornecidos a partir do coeficiente de compressão elástica uniforme.

$$C_\tau = 0,5C_u \quad (2.98)$$

$$C_\phi = 2C_u \quad (2.99)$$

$$C_\psi = 0,75C_u \quad (2.100)$$

Para uma fundação retangular, em que um dos seus lados é o dobro do outro, os coeficientes de compressão não uniforme e cisalhamento não uniforme estão relacionados por:

$$C_\phi = 1,73C_u \quad (2.101)$$

2.2.4 – AMORTECIMENTO DO SOLO

O amortecimento causado pelo solo reduz a amplitude de vibração, e esta redução é similar à do sistema com vibração livre com amortecedor viscoso. De forma simplificada para representar o amortecimento interno do solo, utiliza-se o sistema com um grau de liberdade com amortecimento viscoso para descrevê-lo.

Para descrever o decaimento da amplitude de vibração no sistema amortecido com um grau de liberdade, usa-se o decremento logarítmico para duas amplitudes sucessivas, z_1 e z_2 .

$$\delta = \ln \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.102)$$

A Tabela 2.5 apresenta algumas frações de amortecimento, ξ , para alguns tipos de solos. De acordo com a tabela, o amortecimento interno do solo é na ordem de 0,05.

Tabela 2.5 – Alguns valores típicos de amortecimento interno no solo (RICHART et al., 1970)

Tipo de solo	ξ equivalente	Referência
Areia seca e cascalho	0,03 – 0,07	Weissmann e Hard (1961)
Areia seca e saturada	0,01 – 0,03	Hall e Richard (1963)
Areia seca	0,03	Whitman (1963)
Areia seca e saturada e pedregulho	0,05 – 0,06	Barkan (1962)
Argila	0,02 – 0,05	Barkan (1962)
Areia com silte	0,03 – 0,10	Stevens (1966)
Areia seca	0,01 – 0,03	Hardin (1965)

O decremento logarítmico pode ser determinado experimentalmente pelo teste de coluna ressonante.

Considerando uma base vibrando sob um corpo elástico semi-infinito, a sua perda de energia se deve à transmissão através da energia de onda elástica da base para o infinito. O amortecimento geométrico se deve à distribuição geométrica da energia de onda elástica. Na Tabela 1.2, são apresentados os coeficientes de amortecimento geométrico.

2.3. CONCEITOS GERAIS SOBRE FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS

Na elaboração do projeto de fundação de máquinas, a comparação entre a frequência natural e a frequência da máquina é importante devido ao efeito da ressonância. A ressonância acontece quando a frequência de excitação se iguala a alguma frequência natural do sistema, elevando as amplitudes e prejudicando todo o conjunto.

Para a fundação de máquina, existem dados e considerações que são necessários nas análises. Alguns serão expostos a seguir.

No projeto de uma fundação de máquina, é necessário obterem-se alguns dados referentes à máquina. Estes dados são normalmente fornecidos pelo fabricante, e alguns manuais têm os dados para as máquinas mais usuais. Esses dados são:

- a velocidade normal de operação da máquina;
- desenho da máquina e localização do centro de gravidade;
- peso da máquina e de suas partes móveis;
- amplitude admissível da máquina;
- localização das cargas estáticas e cargas dinâmicas;
- localização das aberturas necessárias na fundação para a máquina: parafuso de ancoragem, tubulação e etc.

Informações sobre o solo também são indispensáveis, tais como a carga admissível do solo e os parâmetros do solo. Na teoria do semi-espaço, são necessários os seguintes parâmetros de solo: coeficiente de Poisson (ν), densidade (ρ), fração de amortecimento (ξ) e módulo de elasticidade transversal dinâmico (G).

Um outro dado importante sobre o solo são as posições do nível de água durante o ano. Recomenda-se que a base da fundação esteja a pelo menos a 1/4 da largura da fundação acima do nível d'água (SRINIVASULU e VAIDYANATHAN, 1976).

As tubulações de vapor embutidas no bloco de fundação devem ser isoladas adequadamente. A fundação deve ser protegida do óleo da máquina. Essa proteção pode ser realizada por meio de processos químicos adequados ou de pinturas resistentes a ácido. É necessária também a proteção do bloco contra a umidade. Para isso, são aplicados materiais resistentes à umidade, como, por exemplo, o asfalto.

2.3.1 – ISOLADOR DE VIBRAÇÕES

O isolador nas fundações de máquinas é utilizado normalmente para reduzir a amplitude do sistema máquina-fundação-solo para satisfazer as amplitudes admissíveis da máquina. Mesmo quando a amplitude está dentro dos limites admissíveis para o sistema, a energia transmitida pelas ondas causadas pela vibração também pode ser prejudicial a pessoas, equipamentos e estruturas da vizinhança. O isolador pode ser, então, colocado entre a máquina e a fundação. No caso do martelo, normalmente o isolador fica abaixo da bigorna e/ou abaixo da fundação, entre o bloco e a laje de revestimento da vala (Figura 2.13). Isoladores de vibrações são constituídos de

materiais capazes de resistir à deformação elástica. Os materiais mais utilizados como isoladores são: madeira, cortiça, mola de aço, borracha, neoprene e absorvedor pneumático.

A madeira é normalmente usada abaixo da bigorna, onde pode ser colocada com uma ou mais camadas. A madeira é posta de forma que a veia da madeira seja perpendicular à carga aplicada.

A cortiça é um bom isolador devido ao seu peso reduzido, à impermeabilidade aos gases e a líquidos e à alta compressibilidade. Por ter grande capacidade de alteração do volume, esse isolador deve ser utilizado de forma que fique confinado, pois, se submetido rapidamente a deformações permanentes, ele se torna ineficaz. O óleo e a água diminuem a vida útil da cortiça (SALDANHA, 1968).

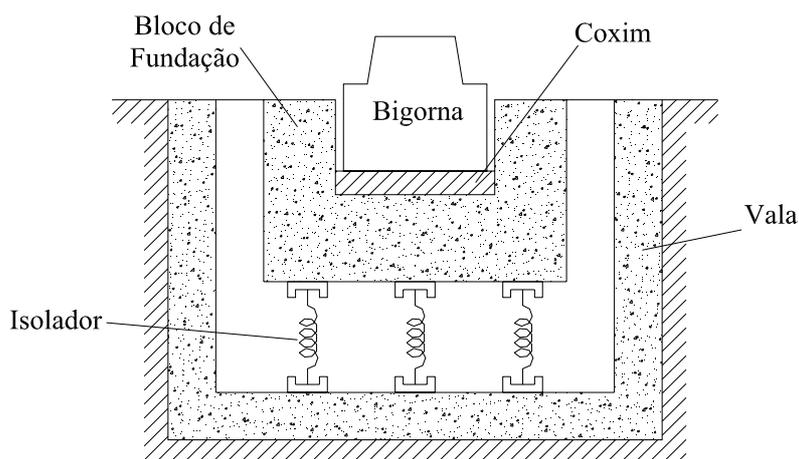


Figura 2.13 – Esquema de fundação de máquina tipo martelo com isoladores (adaptada de PRAKASH, S. e PURI, V. K., 1988)

O isolador de mola helicoidal de aço pode conter uma ou mais molas. Essas molas são disponíveis em diferentes tamanhos e capacidades, e suas características são determinadas pelos seus fabricantes. É preciso lembrar, porém, que a mola de aço deve receber tratamento contra corrosão.

KUMAR e REDDY, em 2006, colocaram molas helicoidais, com rigidez inferior à do solo, entre a fundação e a máquina, que oferece carregamento harmônico vertical. E verificaram que há uma grande redução da amplitude na base devido à ressonância.

Devido às suas propriedades elásticas, a borracha é um ótimo isolador. Pode ser usada em coxins ou molas. A vulcanização, contudo, provoca transformações químicas

na borracha natural, melhorando suas propriedades elásticas. Assim, as molas obtidas pela vulcanização da borracha, envolvendo o metal, têm a vantagem de resistir à compressão, ao cisalhamento ou à torção. Mas, devido às propriedades elásticas, a sua vida útil pode ser reduzida se exposta a, por exemplo, temperaturas operacionais, óleo e cargas excêntricas quando for coxim.

Os aparelhos de apoios em neoprene são disponíveis para diversos tipos de carga e deformações.

Nos isoladores pneumáticos, é usado ar ou gás como material elástico. O seu desempenho é estabelecido pelo fabricante. A deflexão estática pode ser controlada ajustando a pressão do ar ou gás. Isso é de grande importância nos casos em que se tem uma grande carga aplicada com uma baixa frequência ou mudança da carga.

A trincheira também é uma opção para diminuir ou isolar a propagação das vibrações da máquina (Figura 2.14). Ela também pode ser utilizada com a finalidade de proteger algum equipamento.

O monitoramento das vibrações transmitidas ao solo é necessário para garantir que o limite das amplitudes admissíveis não seja ultrapassado. Essas amplitudes admissíveis são selecionadas com base nas condições da estrutura, sensibilidade do equipamento em relação à estrutura e à tolerância humana. Nas estruturas que podem ser afetadas por fontes de vibrações próximas a elas, instala-se normalmente sismógrafo para a monitoração.

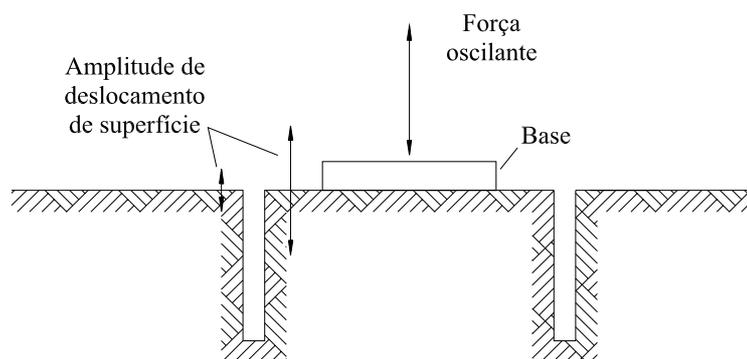


Figura 2.14 – Esquema de trincheira circular para isolar a vibração

Na escolha de um isolador, é essencial definir qual é a direção da vibração. Se a vibração for somente em uma direção, basta que o isolador garanta isolamento nessa

direção. Mas, se houver perturbação em mais de uma direção, é necessário um isolador para cada direção ou um isolador com propriedades de isolamento para múltiplas direções.

Quando se opta por um isolador, deve verificar se:

- a capacidade de deflexão do isolador é suficiente para receber as amplitudes máximas esperadas;
- a capacidade de carga do isolador é suficiente para receber as máximas cargas resultantes da vibração;
- existem problemas devido ao sobreaquecimento ou fadiga causada por cargas elevadas durante um longo período.

Para que um isolador desempenhe sua função, ele deve ser mais flexível que a estrutura suporte. Na prática, aconselha-se que a rigidez da estrutura suporte seja dez vezes maior do que a rigidez do isolador (SAMPAIO, 2004).

2.3.2 – EFEITOS DAS AMPLITUDES NAS PESSOAS

Antigamente, não havia muitas investigações sobre vibração no corpo humano, pois normalmente, nos ambientes em que há vibrações, existe muito ruído. Dessa maneira, esses já eram classificados como insalubres. Grandes vibrações podem prejudicar tanto a máquina quanto o ser humano, podendo causar neste enjôo, diminuição da capacidade de trabalho ou lesões graves (REGAZZI e XIMENES, 2005).

A sensibilidade das pessoas depende da frequência de vibração e da amplitude. A Figura 2.15 apresenta cinco zonas de sensibilidade que vão da imperceptível à severa, para o ser humano em pé, com relação à frequência e amplitude para vibrações verticais. Também consta no gráfico o limite em que a fundação da máquina opera satisfatoriamente.

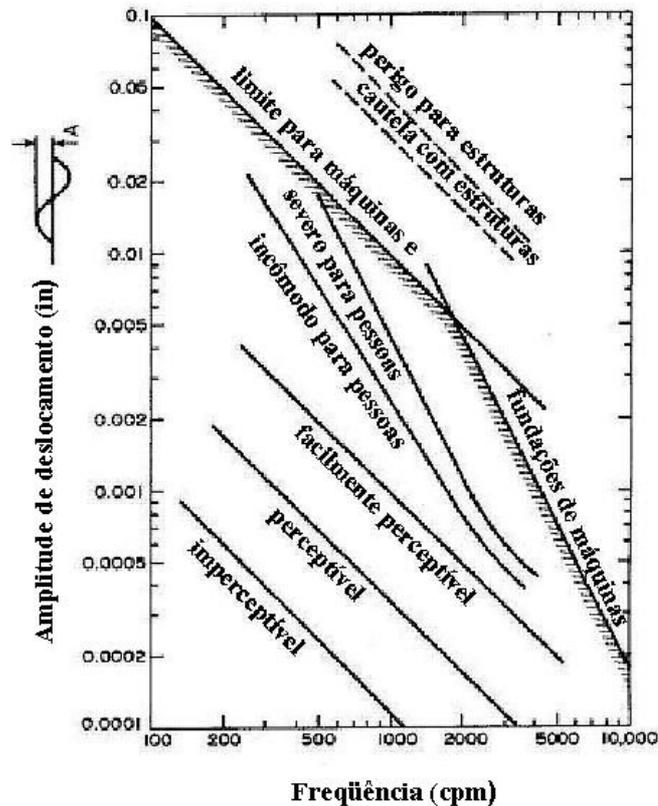


Figura 2.15 – Limites de amplitudes em relação à frequência para seres humanos(adaptada de RICHART et al, 1970)

2.3.3 – VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS

A Figura 2.16 apresenta limites, proposta pelo Bureau de Minas dos EUA, para que as estruturas vizinhas estejam seguras. Apresenta, ainda, limites para fundações e máquinas propostas por Raush e limites para pessoas. Embora a Figura 2.15 apresente, para o limite de cautela nas estruturas, o pico de velocidade de 3 in/s, o Bureau de Minas dos EUA propõe o pico de velocidade de 2 in/s. A Figura. 2.16 também exhibe duas zonas em que existe a possibilidade de dano estrutural, particularmente em paredes provocadas por vibrações no estado permanente (*steady-state*).

Segundo Dias (2001), a NBR 9653, “Guia para avaliação dos efeitos provocados pelo uso de explosivos em minerações em áreas urbanas”, de dezembro de 1989, recomenda que, para prevenir danos em obras recentes, corretamente projetadas e construídas, e em bom estado de conservação, a velocidade resultante da partícula não deve ultrapassar o valor de 15 mm/s.

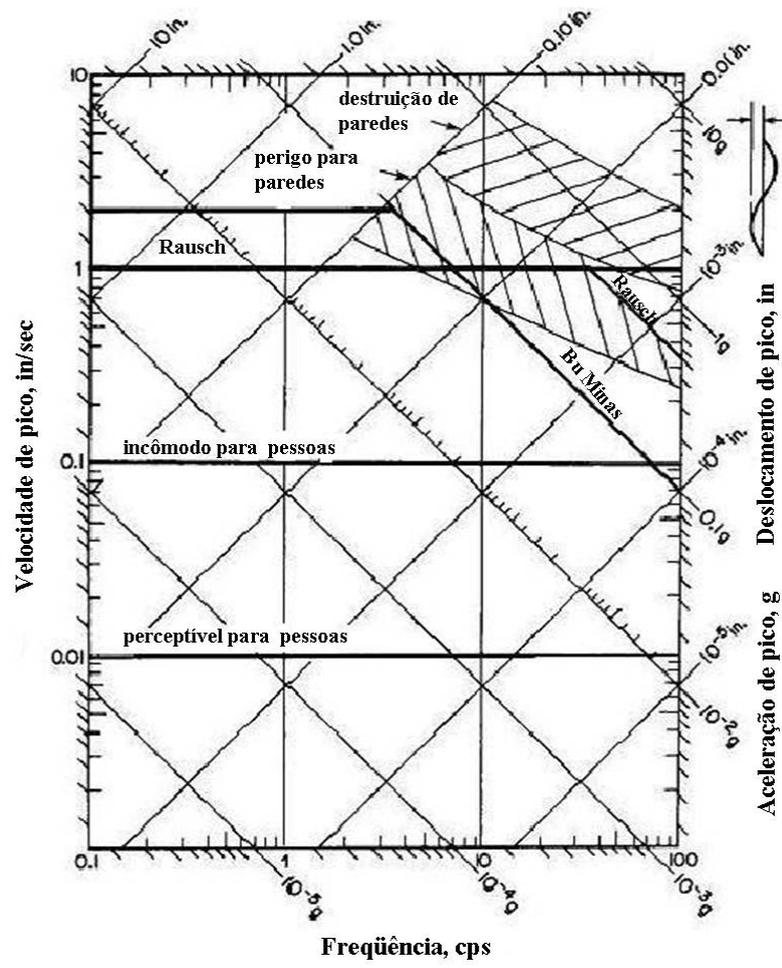


Figura 2.16 – Limites de vibrações (adaptada de RICHART et al, 1970)

CAPÍTULO 3

FUNDAÇÕES DE MÁQUINAS

Cada tipo de máquina requer um tipo de fundação que se adapte melhor às suas cargas e à sua geometria. Este capítulo apresenta três tipos de máquinas: duas necessitam de fundação em bloco e a outra, de fundação aporticada.

A fundação em bloco é frequentemente utilizada para máquinas que produzem forças periódicas e para as que geram esforços de impacto. O bloco pode ser maciço ou não e, às vezes, são necessárias aberturas no bloco por razões funcionais da máquina.

As fundações em blocos são geralmente modeladas como um bloco rígido, ou seja, indeformável já que suas deformações são desprezíveis quando comparadas às do solo (ALMEIDA, 1989). Analisando-se o bloco dessa maneira, têm-se seis modos de vibração, e cada um deles tem uma frequência natural, resultando em seis frequências naturais. Os modos são assim subdivididos: três de translação ao longo dos eixos e três de rotação sobre os eixos axiais. É o que se vê na Figura 3.1 (ALMEIDA e SIMÕES, 1996).

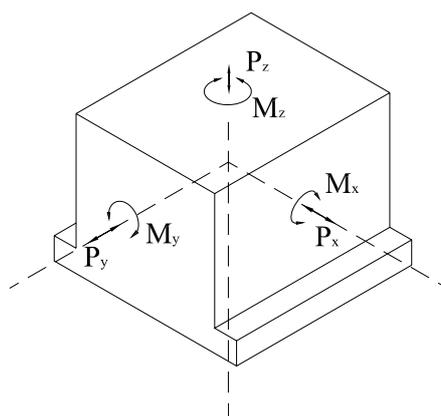


Figura 3.1 – Modos de vibração de um bloco de fundação.

A fundação aporticada é utilizada para turbomáquinas que normalmente necessitam de espaços para acomodar os equipamentos da máquina. Para análise dessas fundações, a consideração das deformações na estrutura é tão importante quanto a das deformações no solo.

3.1. FUNDAÇÃO PARA MÁQUINAS ALTERNATIVAS

Têm-se como exemplos de máquinas alternativas a de combustão interna, a vapor, bombas tipo pistão, compressores e qualquer máquina que tenha o mecanismo tipo pistão. Exemplo clássico é o mecanismo manivela, mostrado na Figura 3.2, que transforma o movimento de translação em movimento de rotação ou vice-versa. O movimento de um mecanismo tipo manivela simples é feito como o que segue.

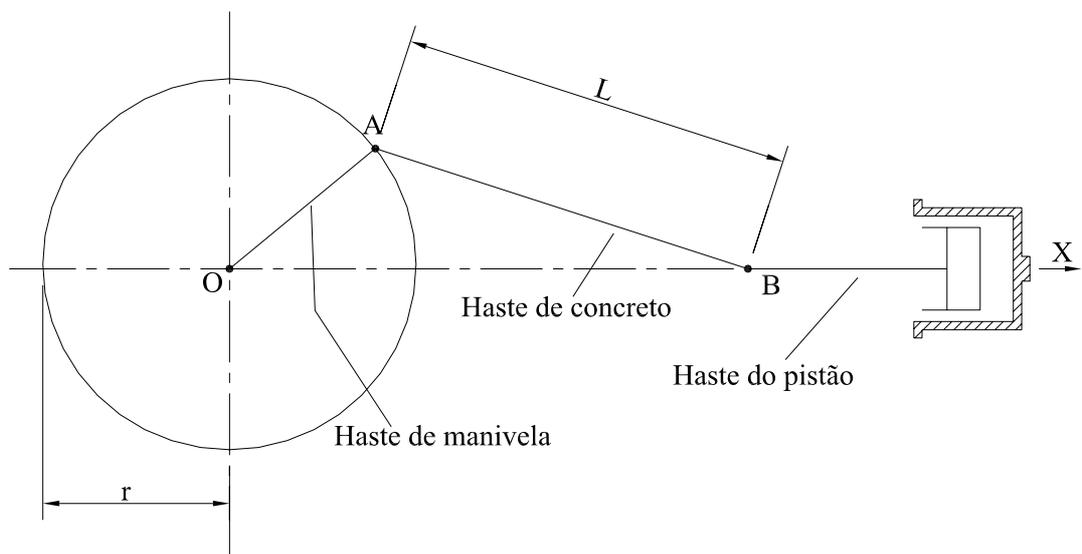


Figura 3.2 – Mecanismo tipo manivela simples.

- O pistão tem movimento oscilatório ao longo do eixo.
- A partir do movimento anterior, a manivela de comprimento L rotaciona em torno do O .
- O ponto A faz um percurso circular, enquanto no ponto B o percurso oscila linearmente. Já entre os pontos A e B o percurso é de forma elíptica.

A Figura 3.3 apresenta um compressor de gás recíproco e a Figura 3.4 mostra um dos pistões do compressor.



Figura 3.3 – Compressor a gás alternativo
[Ref. <http://www.hse.gov.uk/research/rrpdf/rr076b.pdf>]

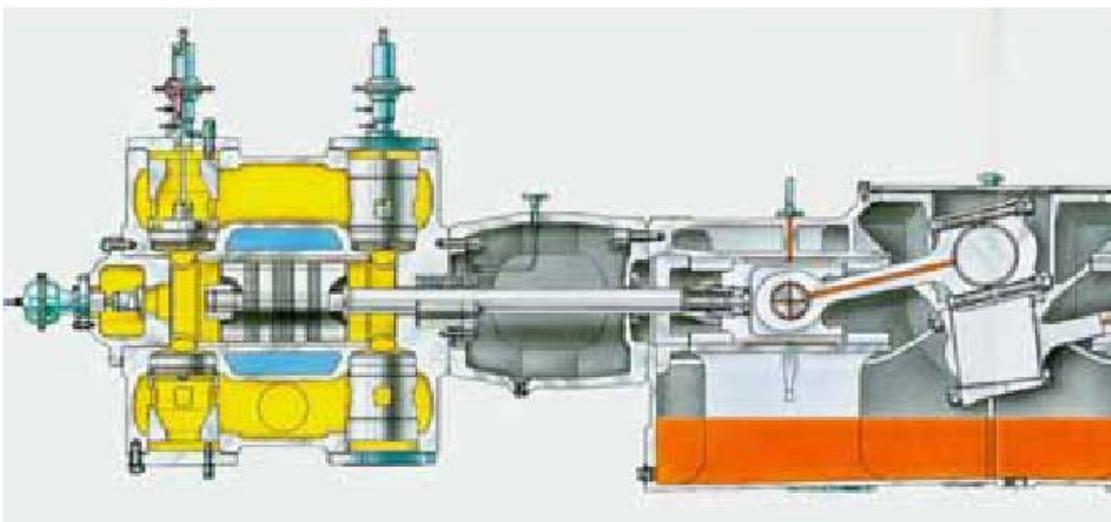


Figura 3.4 – Parte do compressor
[Ref. <http://www.hse.gov.uk/research/rrpdf/rr076b.pdf>]

Essas máquinas podem ter movimento tanto na direção vertical quanto na direção horizontal. A velocidade de operação normalmente é inferior a 1200 rpm. Frequentemente, opta-se pela fundação tipo bloco para este tipo de solicitação. A função periódica é uma boa representação dos esforços gerados pelas máquinas alternativas.

Alguns critérios para fundações que suportam máquinas de ações recíprocas são as seguintes:

- a diferença entre a frequência natural do sistema solo-fundação e a velocidade de operação da máquina deve ser no mínimo 30% para evitar a possibilidade de ressonância;
- a amplitude de vibração na máquina não deve exceder a amplitude permissível especificada. Geralmente esses valores não devem ultrapassar o limite de 0,2 a 0,25 mm, (BARKAN, 1962 e SRINIVASULU e VAIDYANATHAN, 1976);
- a tensão no solo não deve exceder 80% da capacidade de carga estática do solo (IS: 2974 – Parte I, 2003).

Para definição das dimensões de um bloco num projeto preliminar, são propostos alguns critérios:

- área – a área da fundação tem que ser superior à da placa de suporte da máquina tendo a fundação uma folga de 15 cm em torno da placa de suporte da máquina;
- espessura – a espessura do bloco deve ser suficiente para garantir a estabilidade do conjunto;
- massa – a massa do bloco tem que ser superior à massa da máquina (IS: 2974 – Parte I, 2003).

O principal objetivo das análises é determinar as frequências naturais do sistema solo-fundação e as amplitudes de movimento. As frequências não podem aproximar-se devido à ressonância e à limitação impostas às amplitudes. Durante as pesquisas desenvolvidas para projetos de fundações de máquinas, muitos métodos foram descobertos e aperfeiçoados. Os métodos desenvolvidos neste trabalho são, contudo, os do semi-espaco elástico e da mola elástica linear.

Para a análise a partir das fórmulas tradicionais, indica-se que, entre os centros de gravidade da máquina alternativa e da fundação, não haja excentricidade nos eixos da horizontal, sendo admitida uma excentricidade máxima de 5% da dimensão do bloco em

que se esteja fazendo a análise. Essa condição tinha importância quando não se dispunha de meio eficiente para manipulação numérica de dados. Se houver excentricidade, as vibrações de translações e rotações têm que ser levadas em conta.

3.1.1. MÉTODO DO SEMI-ESPAÇO ELÁSTICO

Este método considera a fundação de uma máquina oscilante com base circular repousando no solo. Neste método, o solo é considerado como um corpo semi-infinito, elástico, homogêneo e isotrópico.

A teoria do semi-espaço elástico pode ser aplicada em bases com forma retangular, de lados com dimensões a e b , utilizando-se o chamado raio equivalente (r_0), que difere de acordo com a direção da vibração. Para esse método, as fórmulas dos parâmetros dos solos utilizados são apresentadas na Tabela 1.2. A seguir, são apresentadas as equações de movimento e as fórmulas utilizadas para obter as freqüências e as amplitudes, devido ao carregamento dinâmico, que modificam de acordo com o modo de vibração, utilizando-se o método do semi-espaço elástico.

i) Vibrações verticais

A equação de movimento para uma força vertical P_z , aplicada na fundação, é a seguinte:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + k_z z = P_z \quad (3.1)$$

A freqüência natural da fundação na direção z é dada por:

$$\omega_{nz} = \sqrt{\frac{k_z}{m}} \quad (3.2)$$

onde m é a massa da fundação.

Para essa fundação sujeita à carga dinâmica vertical, P_z , a amplitude de operação é dada pela Eq. 2.33

$$A_z = \frac{P_z}{k_z \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{nz}}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi_z \frac{\omega}{\omega_{nz}}\right)^2}} \quad (3.3)$$

Barkan analisou fundações sujeitas a carregamento vertical. A frequência natural calculada era semelhante à observada, enquanto o mesmo não ocorria com a amplitude.

ii) Vibrações de torção

A equação do movimento para um momento horizontal atuante no eixo z, força $M_z e^{i\omega t}$, é a seguinte:

$$M_{mz} \ddot{\psi} + c_\psi \dot{\psi} + k_x \psi = M_z e^{i\omega t} \quad (3.4)$$

A frequência natural de uma fundação sujeita a vibrações em torno da axial z é dada por:

$$\omega_{n\psi} = \sqrt{\frac{k_\psi}{M_{mz}}} \quad (3.5)$$

onde M_{mz} é o momento de inércia da fundação em torno do eixo vertical. Para fundações circulares, o M_{mz} é dado por:

$$M_{mz} = \frac{\pi r_0^2 H r_0^2}{g} \frac{r_0^2}{2} \gamma_c \quad (3.6)$$

Quando a fundação não é circular, o M_{mz} é determinado por

$$M_{mz} = M_{mx} + M_{my} \quad (3.7)$$

onde

$$M_{mx} = \frac{m}{12} (b^2 + h^2) \quad (3.8)$$

$$M_{my} = \frac{m}{12} (a^2 + h^2) \quad (3.9)$$

A amplitude é expressa por:

$$A_{\psi} = \frac{M_z}{k_{\psi} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n\psi}} \right)^2 \right]^2 + \left(2\xi_{\psi} \frac{\omega}{\omega_{n\psi}} \right)^2}} \quad (3.10)$$

iii) Vibrações horizontais e de rotação simultâneas

Somente em condições ideais é que há o movimento horizontal ou de rotação. Para haver o movimento puro de deslizamento, seria necessário que a massa da base estivesse numa camada muito fina apoiada no solo, de tal forma que o centro de gravidade e as forças atuantes – restrição e excitação do movimento – estivessem numa mesma linha (Figura 3.5) (SIMÕES, 1996). A Figura 3.6 ilustra o que seria o movimento puro de rotação. Na realidade, numa fundação onde há aplicação de força horizontal P_x e/ou momento M_y , tem-se movimento de deslizamento e de rotação simultaneamente.

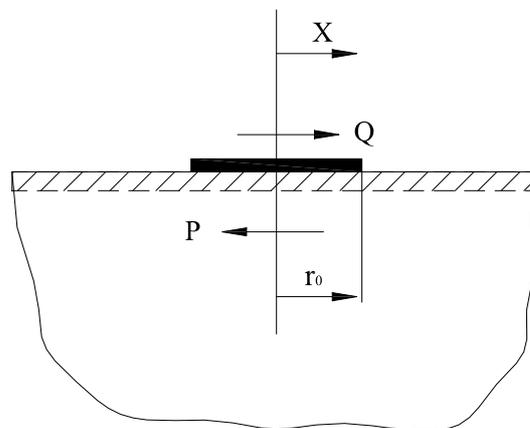


Figura 3.5 – Modelo de vibração horizontal

Considerando-se que há o movimento de puro deslizamento exercido pela força P_x , a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x = P_x \quad (3.11)$$

No movimento de puro balanço exercido pelo momento M_y , a equação de movimento é

$$M_{m0}\ddot{\phi} + c_\phi\dot{\phi} + k_\phi\phi = M_y \quad (3.12)$$

As frequências naturais referentes à vibração de deslizamento na direção x e à vibração de balanço não considerando elas acopladas são:

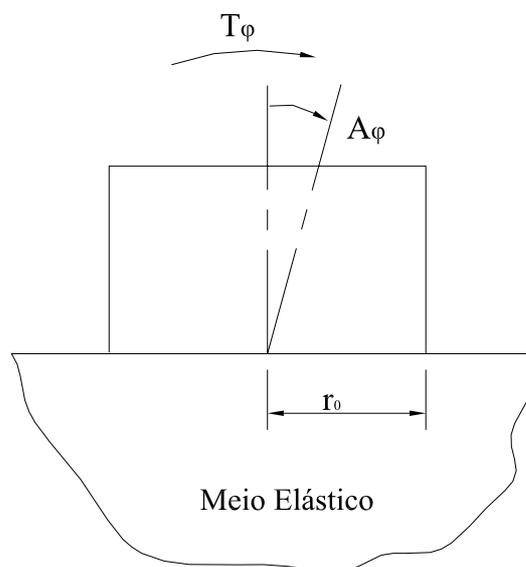


Figura 3.6 – Modelo de vibração de rotação

$$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{k_x}{m}} \quad (3.13)$$

$$\omega_{n\phi} = \sqrt{\frac{k_\phi}{M_{m0}}} \quad (3.14)$$

onde M_{m0} é o momento de inércia do sistema em relação ao eixo e passa através do centróide da base e perpendicular ao plano de vibração.

Numa fundação circular, o M_{m0} é determinado por:

$$M_{m0} = \frac{\pi r_0^2 H}{g} \left(\frac{r_0^2}{4} + \frac{H^2}{3} \right) \gamma_c \quad (3.15)$$

enquanto que, numa fundação que não seja circular, o M_{m0} é dado por:

$$M_{m0} = M_m + mL^2 \quad (3.16)$$

onde M_m é o momento de inércia do sistema, fundação e máquina, em relação a um eixo passando pelo centro de gravidade do sistema. E L é a distância entre o centro de gravidade do sistema e a base.

Numa fundação onde atua um momento vertical $M_y = M_y e^{i\omega t}$ e uma força horizontal $P_x = P_x e^{i\omega t}$, a equação de movimento para o deslizamento é

$$m\ddot{x} + c_x \dot{x} + k_x x - Lc_\phi \dot{\phi} - Lk_\phi \phi = P_x e^{i\omega t} \quad (3.17)$$

enquanto a equação de movimento para a vibração de balanço é

$$M_m \ddot{\phi} + (c_\phi + L^2 c_x) \dot{\phi} + (k_\phi + L^2 k_x) \phi - Lc_x \dot{x} - Lk_x x = M_y e^{i\omega t} \quad (3.18)$$

As frequências naturais referentes às vibrações de deslizamento e rotação acopladas são obtidas por:

$$\omega_n^4 - \left(\frac{\omega_{nx}^2 + \omega_{n\phi}^2}{\gamma} \right) \omega_n^2 + \frac{\omega_{nx}^2 \omega_{n\phi}^2}{\gamma} = 0 \quad (3.19)$$

$$\text{onde } \gamma = \frac{M_m}{M_{m0}} \quad (3.20)$$

$$M_m = \frac{\pi r_0^2 H \gamma c r_0^2}{4g} \quad (3.21)$$

Amplitudes da vibração horizontal e de rotação ocasionadas pelo momento M_y são:

$$A_x = \frac{M_y}{M_m} \frac{\sqrt{(\omega_{nx}^2)^2 + (2\xi_x \omega_{nx})^2}}{\Delta(\omega^2)} \quad (3.22)$$

$$A_\phi = \frac{M_y}{M_m} \frac{\sqrt{(\omega_{nx}^2 - \omega^2)^2 + (2\xi_x \omega_{nx} \omega)^2}}{\Delta(\omega^2)} \quad (3.23)$$

As amplitudes da vibração horizontal e de rotação ocasionadas pela força horizontal P_x são:

$$A_x = \frac{P_x}{mM_m} \frac{\sqrt{(-M_m \omega^2 + k_\phi + L^2 k_x)^2 + 4\omega^2 (\xi_\phi \sqrt{k_\phi M_{m0}} + L^2 \xi_x \sqrt{k_x m})^2}}{\Delta(\omega^2)} \quad (3.24)$$

$$A_\phi = \frac{P_x L}{M_m} \frac{\omega_{nx} \sqrt{\omega_{nx}^2 + 4\xi_x \omega^2}}{\Delta(\omega^2)} \quad (3.25)$$

onde o $\Delta(\omega^2)$ é calculado pela seguinte expressão:

$$\Delta(\omega^2) = \left\{ \left[\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{\omega_{n\phi}^2 + \omega_{nx}^2}{\gamma} - \frac{4\xi_x \xi_\phi \omega_{nx} \omega_{n\phi}}{\gamma} \right) + \frac{\omega_{nx}^2 \omega_{n\phi}^2}{\gamma} \right]^2 + 4 \left[\xi_x \frac{\omega_{nx} \omega}{\gamma} (\omega_{n\phi}^2 - \omega^2) + \frac{\xi_\phi \omega_{n\phi} \omega}{\gamma} (\omega_{nx}^2 - \omega^2) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (3.26)$$

Quando estiverem atuando simultaneamente a força e o momento, as amplitudes resultantes serão a soma da Eq. 3.22 com a Eq. 3.24 e da Eq. 3.23 e Eq. 3.25.

3.1.2. MÉTODO DA MOLA ELÁSTICA LINEAR SEM PESO

O princípio deste método é que o solo em que a fundação está apoiada pode ser equivalente a um conjunto de molas elásticas independentes que produziriam forças reativas equivalentes ao deslocamento desenvolvido. Esse conceito foi bastante explorado por BARKAN (1962), admitindo-se as seguintes hipóteses:

- O bloco de fundação é muito mais rígido que o solo.
- Não é considerado o peso do solo abaixo da fundação.
- O solo pode ser representado por molas elásticas lineares.
- O amortecimento do solo é desprezado.
- A fundação está apoiada no solo.

Com essas suposições, o sistema solo-fundação pode ser representado pelo sistema mola-massa equivalente, em que a mola representa a elasticidade do solo e a massa é formada pelo conjunto fundação–máquina. A seguir, são apresentadas as equações de movimento e as fórmulas utilizadas para obter as frequências e as amplitudes devido à carga dinâmica, que modificam de acordo com o modo de vibração, aplicando o método desenvolvido por Barkan.

i) Vibrações verticais

Para existir somente a vibração vertical exercida por uma força vertical P_z , gerada pela operação da máquina, é necessário que o centro de gravidade da fundação, a máquina e o centróide da área da base da fundação em contato com o solo estejam numa mesma linha vertical e que essa coincida com a linha de ação da carga aplicada. Como o bloco é considerado rígido, o movimento pode ser analisado pelo deslocamento no centro de gravidade. Dessa maneira, a massa pode ser representada por uma massa concentrada. Conseqüentemente, o sistema pode ser reduzido a um sistema com um grau de liberdade não amortecido, em que a equação de movimento é definida por:

$$m\ddot{z} + k_z z = P_z \quad (3.27)$$

onde $k_z = C_u A$

A frequência natural é fornecida por:

$$\omega_{nz} = \sqrt{\frac{C_u A}{m}} \quad (3.28)$$

A amplitude é obtida por:

$$A_z = \frac{P_z}{m(\omega_{nz}^2 - \omega^2)} \quad (3.29)$$

ii) Vibrações horizontais

Quando só é exercida a força horizontal P_x , nas condições semelhantes às das vibrações verticais, a equação de movimento é dada por:

$$m\ddot{x} + k_x x = P_x \quad (3.30)$$

onde $k_x = C_\tau A$

A frequência natural é a seguinte:

$$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{C_\tau A}{m}} \quad (3.31)$$

A amplitude é dada por:

$$A_x = \frac{P_x}{m(\omega_{nx}^2 - \omega^2)} \quad (3.32)$$

iii) Vibrações de rotação

Considerando-se o momento excitante M_y , atuante no plano vertical da fundação xz para vibrações de rotação, assume-se que o centro de massa do conjunto fundação-máquina e o centróide da base encontram-se numa mesma linha vertical localizada no plano do momento. Assim, a equação de movimento para vibrações de rotação com um momento M_y aplicado na fundação é a seguinte:

$$M_{m0}\ddot{\phi} + (C_\phi I - WL)\phi = M_y \quad (3.33)$$

onde:

M_{m0} – momento de inércia de massa do sistema com relação ao eixo de rotação;

L – distância entre o centro de gravidade do sistema e o eixo horizontal;

W – peso da fundação.

A frequência natural é a seguinte:

$$\omega_{n\phi} = \sqrt{\frac{C_\phi I - WL}{M_{m0}}} \quad (3.34)$$

O WL pode ser desprezado, pois o seu valor é muito menor que o de $C_\phi I$. Dessa maneira, a rigidez de vibrações de rotação é definida por:

$$k_\phi = C_\phi I \quad (3.35)$$

A amplitude é obtida por:

$$A_\phi = \frac{M_\phi}{M_{m0} \left(\omega_{n\phi}^2 - \omega^2 \right)} \quad (3.35)$$

A amplitude máxima vertical é a seguinte:

$$A_v = \frac{a}{2} A_\phi \quad (3.36)$$

onde a é a dimensão da base da fundação perpendicular ao eixo de rotação.

A amplitude máxima horizontal é dada por:

$$A_h = hA_\phi \quad (3.37)$$

iv) Vibrações de torção

A equação de movimento para um momento M_z aplicado na fundação, em que a posição da fundação é definida pelo ângulo de rotação ψ , é expressa por:

$$M_{mz}\ddot{\psi} + k_\psi\psi = M_z \quad (3.38)$$

onde $k_\psi = C_\psi J_z$

O M_{mz} é o momento de inércia de massa do sistema sobre o eixo vertical de rotação e J_z é o momento polar de inércia da área da base da fundação.

A frequência natural é a seguinte:

$$\omega_{n\psi} = \sqrt{\frac{C_\psi J_z}{M_{mz}}} \quad (3.39)$$

A amplitude é a seguinte:

$$A_\psi = \frac{M_z}{M_{mz} \left(\omega_{n\psi}^2 - \omega^2 \right)} \quad (3.40)$$

A amplitude horizontal é a seguinte:

$$A_h = rA_\psi \quad (3.41)$$

onde r é a distância horizontal do ponto na fundação ao eixo vertical.

v) Vibrações horizontais e de rotação simultâneas

Considerando-se que o centro de gravidade da máquina e fundação e o centróide da área da base da fundação se encontram num mesmo eixo vertical e é exercida pela força, P_x , e o momento M_y , as equações de movimento para o caso não amortecido são:

$$m\ddot{x} + k_x(x - L\phi) = P_x \quad (3.42)$$

$$M_m\ddot{\phi} - k_x Lx + (k_\phi - WL + k_x L^2)\phi = M_y \quad (3.43)$$

A frequência natural é a seguinte:

$$\omega_n^4 - \left(\frac{\omega_{nx}^2 + \omega_{n\phi}^2}{\gamma} \right) \omega_n^2 + \frac{\omega_{nx}^2 \omega_{n\phi}^2}{\gamma} = 0 \quad (3.44)$$

onde $\gamma = \frac{M_m}{M_{m0}}$

As Amplitudes amortecidas da vibração horizontal e de rotação ocasionada pelo momento M_y são:

$$A_x = \frac{M_y(k_x L)}{\Delta(\omega^2)} \quad (3.45)$$

$$A_\phi = \frac{M_y(k_x - m\omega^2)}{\Delta(\omega^2)} \quad (3.46)$$

As amplitudes amortecidas da vibração horizontal e de rotação ocasionadas pela força horizontal P_x são:

$$A_x = \frac{P_x (k_x L^2 + k_\phi - WL - M_m \omega^2)}{\Delta(\omega^2)} \quad (3.47)$$

$$A_\phi = \frac{P_x (k_x L)}{\Delta(\omega^2)} \quad (3.48)$$

onde o $\Delta(\omega^2)$ é:

$$\Delta(\omega^2) = mM_m (\omega_{n1}^2 - \omega)(\omega_{n2}^2 - \omega) \quad (3.49)$$

Quando estiver atuando simultaneamente o momento, M_y , e a força, P_x , as amplitudes resultantes serão as somas da Eq. 3.43 com a Eq. 3.45 e da Eq. 3.44 com a Eq. 3.46, resultando em:

$$A_x = \frac{M_y (k_x L) + P_x (k_x L^2 + k_\phi - WL - M_m \omega^2)}{\Delta(\omega^2)} \quad (3.50)$$

$$A_\phi = \frac{M_y (k_x - m\omega^2) + P_x (k_x L)}{\Delta(\omega^2)} \quad (3.51)$$

A amplitude horizontal resultante dos dois tipos de vibrações é dada por:

$$A_h = A_x + hA_\phi \quad (3.52)$$

onde h é a distância do topo da fundação ao centro de gravidade do sistema.

3.2. FUNDAÇÃO PARA MÁQUINAS DE IMPACTO

Os martelos de forjar e os de estampagem são exemplos de máquinas que causam esforços de impacto. A máquina é basicamente composta pelo pórtico, martinete e bigorna. A Figura 3.7 é um exemplo de uma máquina tipo martelo.

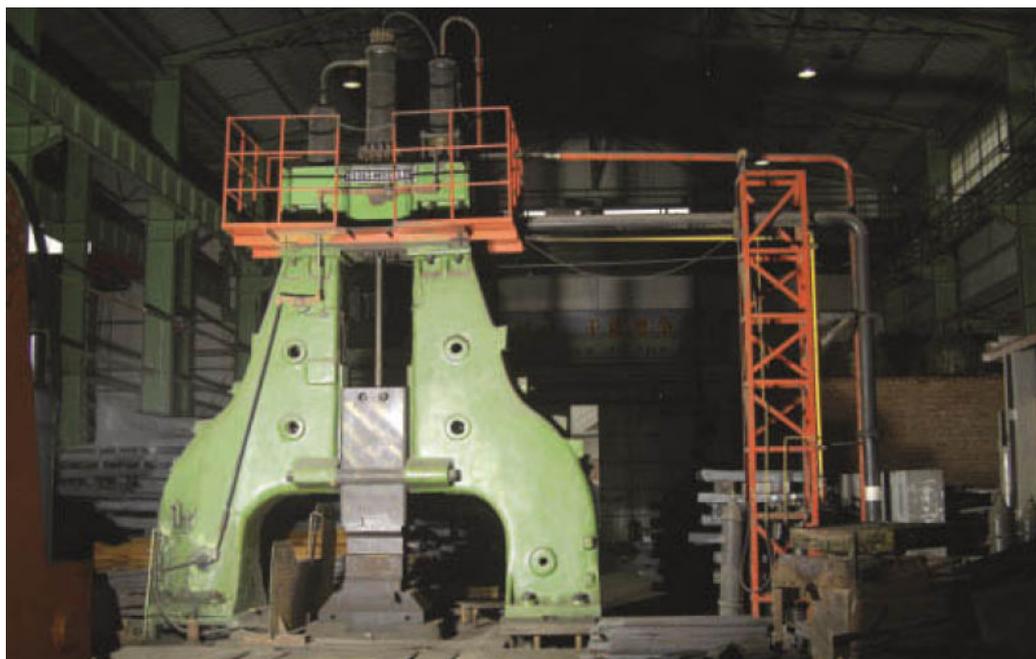


Figura 3.7 – Máquina tipo martelo

[Ref. http://www.equipmatching.com/used_equipment/6/91/53128.php]

Esses equipamentos normalmente têm movimento vertical e geram esforços dinâmicos de grande intensidade e curta duração que podem ser representados por pulsos intermitentes. Recomenda-se que não haja excentricidade, pois choques excêntricos podem causar rotações do bloco e recalques diferenciais. Para máquinas que geram pequenos esforços de impacto, a bigorna pode repousar diretamente sobre o bloco de concreto, já para as que têm maior capacidade, normalmente, utiliza-se um coxim abaixo da bigorna para reduzir a transmissão das tensões de impacto (Figura 3.8).

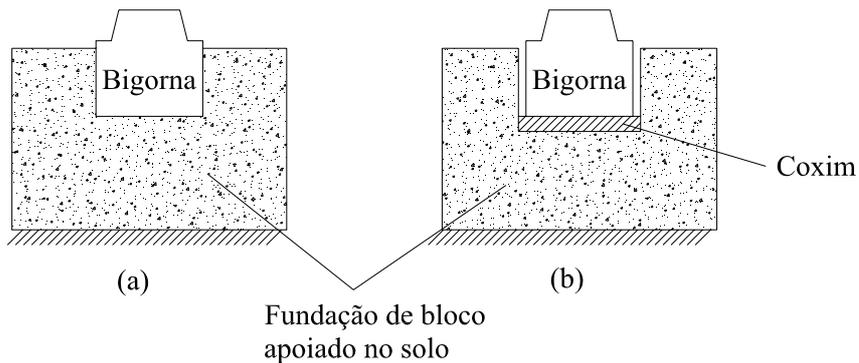


Figura 3.8 – (a) bigorna apoiada no bloco e (b) bigorna apoiada no coxim.

Pode-se tomar como referência para definição das dimensões de um bloco num projeto preliminar:

- Área – a área deve ser suficiente para garantir que na operação do martelo a tensão de carregamento no solo não seja ultrapassada;
- Espessura – na Tabela 3.1 são propostas algumas espessuras mínimas do bloco que varia de acordo com o peso do martinete (IS: 2974 – Parte II, 2003);

Tabela 3.1 – Espessuras do bloco de acordo com o peso do martinete

Peso do martinete (t)	Espessura do bloco (m)
Até 1	1
1 - 2	1,25
2 - 4	1,75
4 - 6	2,25
Acima de 6	2,5

- Massa – a massa do bloco deve ser pelo menos 3 vezes a massa da bigorna; já a massa da bigorna é normalmente 20 vezes a massa do martinete. Quando a fundação está apoiada em argila rija ou depósito de areia compacta, a massa do bloco deve ser de 4 a 5 vezes a massa da bigorna. Entretanto, quando apoiadas em argilas e areias razoavelmente firmes, a massa do bloco deve ser de 5 a 6 vezes a massa da bigorna.

Esse tipo de equipamento produz esforços de curta duração que são considerados como um único pulso, já que seu efeito acaba antes que ocorra outro golpe. Normalmente não se conhece nem a forma real do pulso, nem sua duração. Então, para representá-lo, usualmente é utilizado um pulso retangular equivalente.

O pulso pode também ser representado pela forma triangular ou semi-seno (Figura 3.9). A carga de impacto tem como características a amplitude, forma de variação com o tempo e duração ou energia de impacto. Para um pulso de curta duração, período do pulso menor que um décimo do período natural do sistema fundação-máquina, a forma do pulso não tem influência significativa para a resposta.

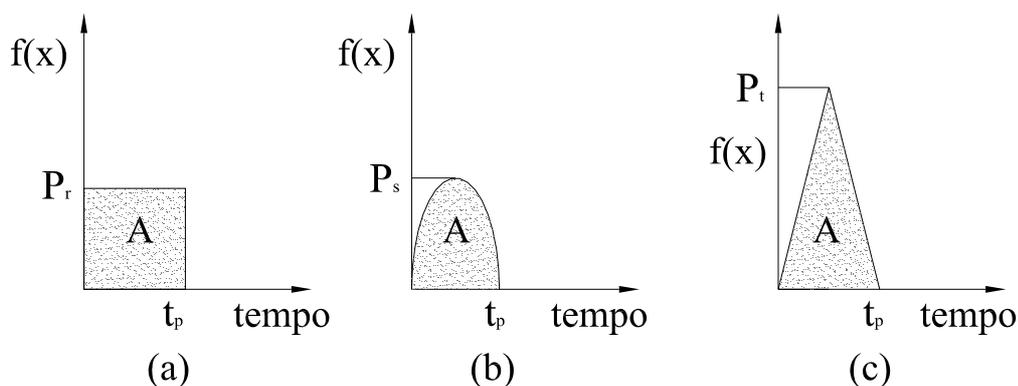


Figura 3.9 – Diferentes formas de pulso de carga – (a) retangular, (b) semi-seno e (c) triangular (CHEHAB e NAGGAR, 2004)

Quando aumenta a duração do pulso, diminui a resposta do sistema. Dessa maneira, pode-se ter controle sobre a resposta desejada.

Para um período do pulso longo, existe grande diferença entre as respostas. Sendo o pulso triangular, o que produz maior resposta, por segurança, utiliza-se esse tipo de função. Mas, se o período for superior a duas vezes o período natural do sistema, a duração do pulso passa a não ter uma influência significativa para a resposta do sistema (CHEHAB e NAGGAR, 2004).

Para máquinas tipo martelo, a duração do pulso é da ordem de 0,001 a 0,02 segundos (NOVAK e EL HIFNAWY, 1983 apud SIMÕES, 2001).

Para diminuir as tensões no concreto, pode ser usado um coxim abaixo da bigorna, que pode ser de madeira, feltro ou outro material de efeito amortecedor. A espessura do coxim varia de uma fundação para outra de acordo com a necessidade de

reduzir tensões transmitidas à fundação e amplitudes. A Tabela 3.2 mostra as espessuras propostas por BARKAN (1962) para iniciar uma análise.

Tabela 3.2 – Espessuras de coxim em madeira para alguns tipos de martelos

Peso do martinete (t)	Espessura do coxim (m)		
	Martelos de queda de dupla ação	Martelos de queda de ação simples	Martelo de Forjar
Até 1	Até 0,2	Até 0,1	Até 0,2
1 – 3	0,2 – 0,6	0,1 – 0,4	0,2 – 0,6
Acima de 3	0,6 – 1,2	0,4 – 0,6	0,6 – 1,0

Nas fundações que suportam máquinas de ações de impacto, as amplitudes de vibração da fundação e da bigorna não devem exceder o valor especificado pelo fabricante. Quando esses valores não são disponíveis, alguns autores admitem que a amplitude da fundação seja inferior a 1,2 mm e a amplitude admissível da bigorna varia de acordo com o peso do martinete. A Tabela 3.3 contém os valores propostos pela IS: 2974 – Parte II (2003) para a amplitude admissível da bigorna e do bloco de fundação.

Tabela 3.3 – Amplitude admissível para a bigorna e para o bloco de fundação

Peso do martinete (t)	Amplitude da bigorna (mm)	Amplitude do bloco (mm)
Até 1	1	1,0
1 – 2	2	1,5
2 – 4	3 a 4	2,0

Observa-se que a grandeza dos deslocamentos para fundações com máquina tipo martelo é na ordem de milímetros, enquanto, o deslocamento para as fundações com máquinas alternativas as deformações são da ordem de décimos ou centésimos de milímetros.

A carga no solo exercida pela fundação não deve exceder 80% da pressão de contato admissível do solo ou do material em contato (IS: 2974 – Parte II, 2003).

3.1.1. MÉTODO DE ANÁLISE

Para uma fundação apoiada no solo, com a bigorna sobre um coxim, atuando somente carga vertical, o sistema pode ser considerado com dois graus de liberdade. Neste método é considerado que fundação, bigorna, corpo da máquina e martinete são corpos rígidos. O centro de gravidade da bigorna, do bloco de fundação, do pórtico, da carga aplicada pelo martinete e o centróide da área da base encontram-se numa mesma linha vertical. Tanto o coxim quanto o solo são representados por molas e seus amortecimentos são desconsiderados (Figura 3.10). Para fundações semi-enterradas, as ações correspondentes à parte do solo em contato com as laterais do bloco são desprezadas.

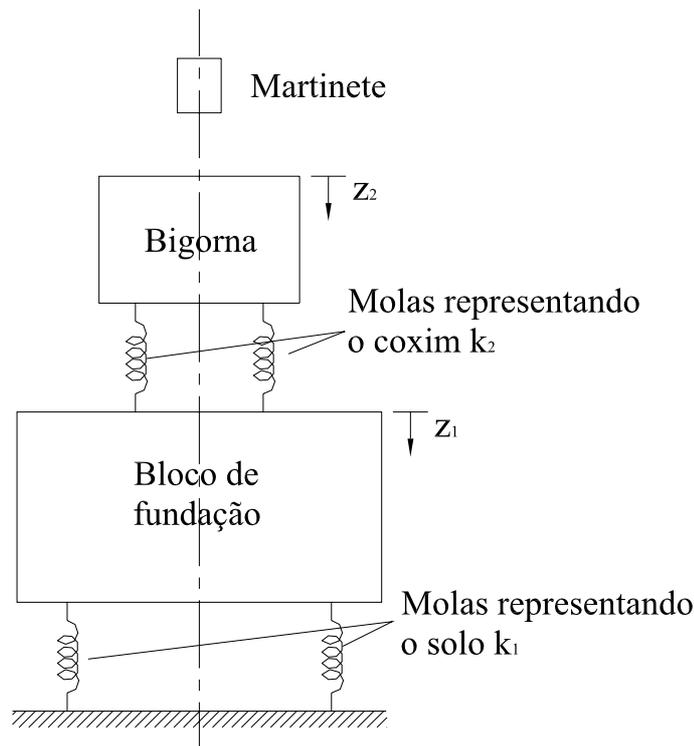


Figura 3.10 – Modelo simplificado com dois graus de liberdade

Nas fundações semi-enterradas para máquinas que geram grande energia de impacto, as vibrações, ao longo do tempo, causam um descolamento entre a fundação e o terreno ao redor, reduzindo assim o efeito do embutimento (SIMÕES, 2001).

Para esse sistema com dois graus de liberdade, a equação de movimento para vibração livre é dada por:

$$m_1 \ddot{z}_1 + k_1 z_1 + k_2 (z_1 - z_2) = 0 \quad (3.53)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + k_2 (z_2 - z_1) = 0 \quad (3.54)$$

onde:

m_1 – massa da fundação e do pórtico da máquina, se este estiver apoiado na fundação;

m_2 – massa da bigorna e do pórtico da máquina se este estiver apoiado na fundação;

k_1 – rigidez equivalente ao solo abaixo da fundação para vibrações verticais;

k_2 – rigidez equivalente ao coxim abaixo da bigorna;

z_1 – deslocamento da fundação;

z_2 – deslocamento da bigorna.

O valor da rigidez equivalente ao solo, $k_1 = k_z$, é definido pelo método de mola linear (Eq. 2.94) ou pelo método do semi-espaço elástico (Tabela 1.2). A rigidez equivalente do coxim k_2 é obtida por:

$$k_2 = \frac{E_c A_2}{t_c} \quad (3.55)$$

onde E_c e t_c são, respectivamente, módulo de elasticidade e espessura do coxim, e A_2 é a área da base da bigorna em contato com o coxim.

As frequências naturais, ω_{n1} e ω_{n2} são calculadas através da Eq. 3.56, em que ω_{nL1} é a frequência natural do conjunto fundação–bigorna, considerando-se que elas formam um único corpo apoiado no solo, e ω_{nL21} é a frequência natural da bigorna, vista isoladamente, apoiada no coxim.

$$\omega_n^4 - \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) (\omega_{nL_1}^2 + \omega_{nL_2}^2) \omega_n^2 + \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \omega_{nL_1}^2 \omega_{nL_2}^2 = 0 \quad (3.56)$$

$$\omega_{nL_1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1 + m_2}} \quad (3.57)$$

$$\omega_{nL_2} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (3.58)$$

A amplitude máxima da fundação, A_{z1} , e da bigorna, A_{z2} , são:

$$A_{z1} = \frac{(\omega_{nL_2}^2 - \omega_{n1}^2)(\omega_{nL_2}^2 - \omega_{n2}^2)}{\omega_{nL_2}^2 (\omega_{n1}^2 - \omega_{n2}^2) \omega_{n2}} V_a \quad (3.59)$$

$$A_{z2} = \frac{\omega_{nL_2}^2 - \omega_{n1}^2}{(\omega_{n1}^2 - \omega_{n2}^2) \omega_{n2}} V_a \quad (3.60)$$

onde V_a é a velocidade da bigorna após o impacto e V_{Ti} é a velocidade do martinete no instante do impacto. Sendo e o coeficiente de restituição elástica, tem-se:

$$V_a = \frac{1+e}{1+s} V_{Ti} \quad (3.61)$$

onde

$$s = \frac{m_2}{m_0} \quad (3.62)$$

O coeficiente de restituição elástica se situa no intervalo $0 < e < 1$. Mas, para projetos, deve-se calcular para a situação mais desfavorável e o valor proposto do coeficiente deve ser superior a 0,6. No entanto, em casos específicos, esse valor pode ser inferior (IS:2974 – Parte II, 2003). Ainda assim, Prakash e Puri (1988) sugerem que o coeficiente seja igual a 0,5.

A velocidade do martinete, no momento do impacto, após queda livre é

$$V_{Ti} = \eta \sqrt{2gh} \quad (3.63)$$

onde η é a eficiência de queda e h é altura de queda em metros. Para martelos bem ajustados, o valor da eficiência de queda aproxima-se de 1. Normalmente, utiliza-se $\eta=0,65$ (PRAKASH. e PURI, 1988).

Quando há pressão a vapor ou pneumática, V_{Ti} é determinado por:

$$V_{Ti} = \frac{\eta \sqrt{2g(W_0 + pA_p)h}}{W_0} \quad (3.64)$$

onde W_0 é o peso do martinete, p é a pressão e A_p é a área do pistão.

A força dinâmica transmitida pela fundação é dada por:

$$f_{din1} = \xi k_1 A_{z1} \quad (3.65)$$

onde ξ é o fator de fadiga.

O carregamento dinâmico pode provocar a fadiga do material; por isso, esse fator é multiplicado pela força dinâmica. Normalmente, utiliza-se o valor do fator de fadiga igual a 3, mas pode ser diferente se for especificado.

A força dinâmica transmitida pela bigorna é dada por:

$$f_{din2} = \xi (A_{z1} - A_{z2}) k_2 \quad (3.66)$$

Admitindo-se que a distribuição da carga seja uniforme, a tensão na fundação transmitida ao solo é dada por:

$$\sigma_f = \frac{W + f_{din1}}{A_f} \quad (3.67)$$

onde W é o peso total da fundação.

A tensão no coxim abaixo da bigorna é obtida por

$$\sigma_a = \frac{W_2 + f_{din2}}{A_2} \quad (3.68)$$

As tensões no solo e no coxim não devem exceder os valores admissíveis dos seus respectivos materiais.

3.3. FUNDAÇÃO PARA MÁQUINAS DE ALTA VELOCIDADE

Fazem parte desse grupo de máquinas de alta velocidade as turbomáquinas: turbogeradores (Figura 3.11), turbocompressores, turboventiladores e turbobombas. Essas máquinas normalmente têm peso elevado e altas frequências. Para esse tipo de máquina, usualmente se utilizam fundações aporticadas já que são necessárias muitas aberturas para acomodar os equipamentos. E, com esse tipo de fundação, obtém-se um bom desempenho e economia em relação à fundação tipo bloco. A IS 2974 – Parte III (1995) classifica as máquinas de acordo com a velocidade. Considera, então, de frequência média aquela em que a frequência de operação está entre 25 e 50Hz, e de alta frequência aquela que opera acima de 50Hz. Os projetos para máquinas com média ou alta frequência seguem, todavia, as mesmas normas.



Figura 3.11 – Turbogenerador

[Ref. <http://www.energy.rochester.edu/pl/blacktriangle/>]

As fundações aporticadas são classificadas como subsincronizadas ou sobre-sincronizada. Considera-se fundação subsincronizada ou sobre-sincronizada se a frequência natural do modo de vibração for inferior ou superior à frequência de operação da máquina, respectivamente.

As fundações aporticadas podem ser construídas em concreto armado ou em aço, sendo a utilização do concreto armado mais comum. As fundações em concreto armado têm a vantagem de a massa ajudar no comportamento dinâmico da estrutura e de a taxa de amortecimento ser maior, quando comparada com as estruturas em aço, gerando dessa maneira, menos ruído. Uma das principais desvantagens é a dificuldade de obtenção do módulo de elasticidade dinâmico, já que esse é influenciado pelo efeito de retração e fissuração do concreto.

Uma das vantagens da utilização da estrutura metálica é a precisão com que são obtidas as frequências naturais, já que o módulo de elasticidade é constante para toda a estrutura. Outra vantagem é a possibilidade da eliminação das vibrações não previstas no projeto através de enrijecedores colocados na estrutura. As fundações constituídas por estruturas metálicas são mais flexíveis e leves que as constituídas por concreto armado; por isso, há mais possibilidades de existirem frequências naturais abaixo da frequência de operação.

A amplitude de deslocamento admissível para turbogeradores é bem menor que a admissível pelas máquinas alternativas e pelas de impacto. A sua amplitude admissível modifica de acordo com a velocidade da máquina.

Os valores apresentados na Tab 3.4 podem ser usados como referência, mas a fundação deve ser projetada para a amplitude fornecida pelo fabricante da máquina (BARKAN, 1962).

Tabela 3.4 – Amplitude admissível para a vibração da máquina

Velocidade de máquina (rpm)	Amplitude de vibração admissível (microns)	
	Vertical	Horizontal
3000	20 a 30	40 a 50
1500	40 a 60	70 a 90

As cargas dinâmicas são provocadas pelo desbalanceamento do rotor e outras como, por exemplo, as cargas sísmicas e as cargas devido ao mau funcionamento da máquina.

O balanceamento da máquina nunca está perfeito, já que sempre há excentricidade entre o centro de gravidade do rotor e o eixo geométrico de rotação. Mesmo pequenas excentricidades devem ser consideradas, pois resultam em forças centrífugas elevadas, já que as frequências são altas e a massa do rotor é elevada.

A força dinâmica decorrente do balanceamento imperfeito do rotor é uma força centrífuga que gira na mesma frequência da máquina. As componentes vertical e horizontal dessas forças são:

$$F_z = r_0 m_0 \omega^2 \sin(\omega t) \quad (3.69)$$

$$F_x = r_0 m_0 \omega^2 \cos(\omega t) \quad (3.70)$$

onde:

F_x – componente horizontal da força excitante que atua no plano perpendicular do eixo da máquina;

F_z – componente vertical da força excitante que atua no plano perpendicular do eixo da máquina;

r_0 – excentricidade do rotor da máquina;

m_0 – massa do rotor;

ω – frequência de operação da máquina.

A fundação aporticada é composta por grelha ou laje superior, pilares e laje inferior. A IS 2974 – Parte III (1995) faz algumas recomendações em relação às dimensões da grelha, pilares e laje inferior. São elas:

i) Grelha

As dimensões da grelha são praticamente definidas pelo fabricante da máquina que fornece os locais de apoio e de abertura necessários para os componentes da

máquina. A Tabela 3.5 apresenta algumas propostas de dimensões da viga com relação à espessura.

Tabela 3.5 – Dimensões da viga em relação à espessura

Vigas que suportam	Razão do vão livre com a espessura	Razão da espessura com largura
Turbina	2 a 3	1 a 3
Gerador	2,5 a 3,5	1 a 1,5

ii) Pilares

Os pilares, quando possível, devem ser colocados em pares, abaixo de cada viga transversal. A tensão de compressão e o encurtamento elástico devem ser uniformes para todos os pilares. As duas primeiras frequências naturais dos pilares engastados nas extremidades devem diferir pelo menos 20% da frequência de operação da máquina.

iii) Laje inferior

A laje inferior deve ser rígida o suficiente para garantir o alinhamento do eixo da máquina, ou seja, para que não haja deslocamento não uniforme na laje. Para isso, sugere-se que: (1) a massa da laje inferior seja maior do que a soma das massas da máquina com a grelha ou laje superior; (2) a rigidez de flexão da laje inferior seja pelo menos duas vezes a rigidez do maior pilar na direção transversal; e (3) a espessura da laje não seja menor que $0,07\sqrt[3]{L^4}$, em que L é a média de dois vãos livres adjacentes (Isso só é válido para lajes apoiadas no solo).

A Tabela 3.6 apresenta espessuras propostas por BARKAN (1962), de acordo com a potência da máquina, que podem ser tomadas como referência para o projeto.

Tabela 3.6 – Espessura da laje de base em função da potência da máquina

Potência da máquina (kw)	Espessura da laje da base (m)
Até 6000	0,8 a 1,2
6000 a 12000	1,0 a 1,6
12000 a 25000	1,6 a 2,00
Acima de 25000	2,00 a 4,00

O centro de gravidade do sistema fundação-máquina deve coincidir com o centróide da área da base da laje inferior. Quando a excentricidade for inevitável, a IS 2974 – Parte III (1995) admite uma excentricidade de até 3%.

A diferença entre a frequência natural da fundação e a frequência de operação da máquina deve ser no mínimo 20%.

Os métodos conhecidos como simplificados para obtenção da frequência natural e da amplitude, são subdivididos em dois grupos: o que considera o pórtico como um sistema com um grau de liberdade e o que o considera como um sistema com dois graus de liberdade. Nesses métodos, os pilares são considerados engastados, e os efeitos da laje inferior e do solo são desprezados.

3.3.1. MÉTODO DE ANÁLISE

O método que utiliza o sistema com um grau de liberdade é fundamentado em muitas suposições para simplificar o problema. Dessa maneira, os valores obtidos resultam de muitas aproximações.

O sistema com dois graus de liberdade representa melhor as características de vibração de um pórtico. Observa-se que o modelo que usa esse sistema é um refinamento do modelo com um grau de liberdade.

Por isso, esse trabalho aborda brevemente o método que utiliza o sistema com um grau de liberdade e descreve com maiores detalhes aquele com dois graus.

3.3.1.1 – Sistema com um grau de liberdade

i) Vibração vertical

Nessa análise, considera-se o pórtico formado por dois pilares e uma viga, e essa é perpendicular ao eixo principal da máquina. A rigidez do sistema é resultante da rigidez da viga com os pilares atuando juntos, e a massa é a soma de todas as massas atuantes neste pórtico, ou seja, carga devido às vigas longitudinais, peso da máquina e peso próprio da viga do pórtico. A frequência resultante é a média das frequências dos pórticos.

Algumas suposições nesta análise de vibração vertical são admitidas:

- Os pilares são engastados na ligação com a laje inferior.
- O efeito de elasticidade do solo é desprezado.
- O efeito da viga longitudinal na vibração vertical é negligenciado.
- A diferença de deformação vertical nos pilares do pórtico é desprezada.
- As frequências naturais de cada pórtico (dois pilares e uma viga) são da mesma ordem.
- A conexão da viga transversal com os pilares é rígida.

ii) Vibração horizontal

O pórtico é o mesmo da análise vertical, mas, para a obtenção da frequência resultante, a rigidez considerada é dada pela soma das rigidezes de cada pórtico. A massa é a soma da massa total da laje superior com a massa da máquina.

Algumas suposições nesta análise de vibração horizontal são admitidas, tais como:

- Os pilares são engastados na extremidade da laje inferior.
- O efeito de elasticidade do solo é desprezado.
- A laje superior é rígida no plano horizontal.
- A resistência dos pilares para a compressão axial é superior à resistência de flexão.
- As vibrações de torção na laje superior são desprezíveis.

3.3.1.2 – Sistema com dois graus de liberdade

i) Vibração vertical

Nessa análise, as hipóteses consideradas são as quatro primeiras oferecidas na vibração vertical do sistema com um grau de liberdade. As Figuras 3.12 e 3.12b apresentam o pórtico com o deslocamento e o sistema massa mola equivalente, respectivamente.

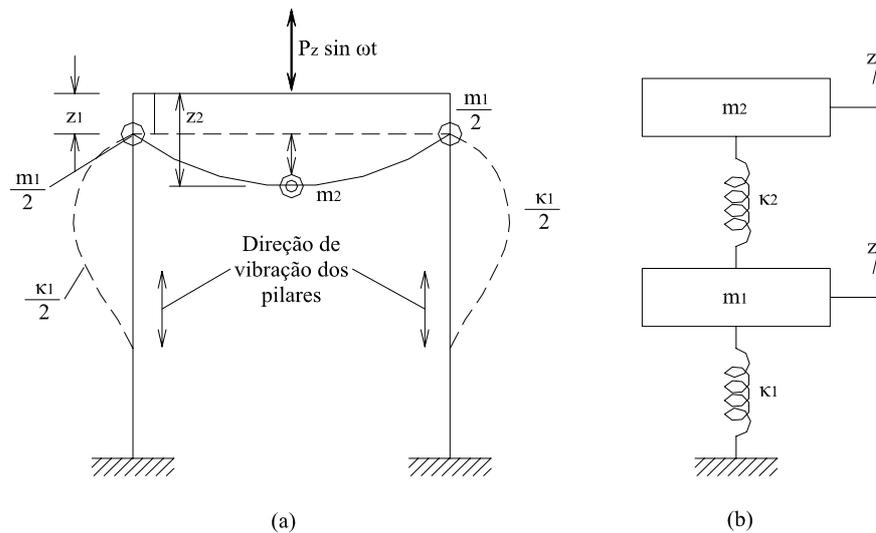


Figura 3.12 – Vibração vertical (a) pórtico deformado (b) modelo com dois graus de liberdade (adaptada PRAKASH e PURI, 1988)

A equação do sistema é dada por:

$$m_1 \ddot{z}_1 + k_1 z_1 - k_2 (z_2 - z_1) = 0 \quad (3.71)$$

$$m_2 \ddot{z}_2 + k_2 (z_2 - z_1) = P_z \text{sen}(\omega t) \quad (3.72)$$

A massa m_1 que representa a massa atuante no pilar é a seguinte:

$$m_1 = \frac{W_L + 0,33W_p + 0,25W_v}{g} \quad (3.73)$$

onde

W_L – carga das vigas longitudinais, incluindo o peso próprio, transmitida para o pilar;

W_p – pesos dos pilares do pórtico;

W_v – peso da viga transversal.

Enquanto que a massa m_2 no centro da viga, é dada por:

$$m_2 = \frac{W_m + 0,45W_v}{g} \quad (3.74)$$

onde W_m é o peso da máquina.

Se a conexão entre os pilares e a viga for considerada absolutamente flexível, o vão e a altura utilizada é L_0 e h_0 . E, se esta conexão for considerada absolutamente rígida, utiliza-se L_1 e h_1 (Figura 3.13).

As conexões não são, porém, totalmente flexíveis nem totalmente rígidas. Assim, o valor utilizado nos projetos é o vão efetivo e a altura efetiva, que são dados por:

$$L = L_0 - 2\alpha b \quad (3.75)$$

$$h = h_0 - 2\alpha a \quad (3.76)$$

onde a é a metade da altura da viga, b é a metade da largura do pilar e o coeficiente α é encontrado no gráfico da Figura 3.14.

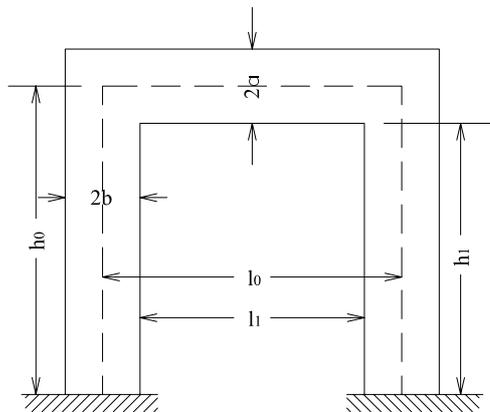


Figura 3.13 – Identificação dos parâmetros

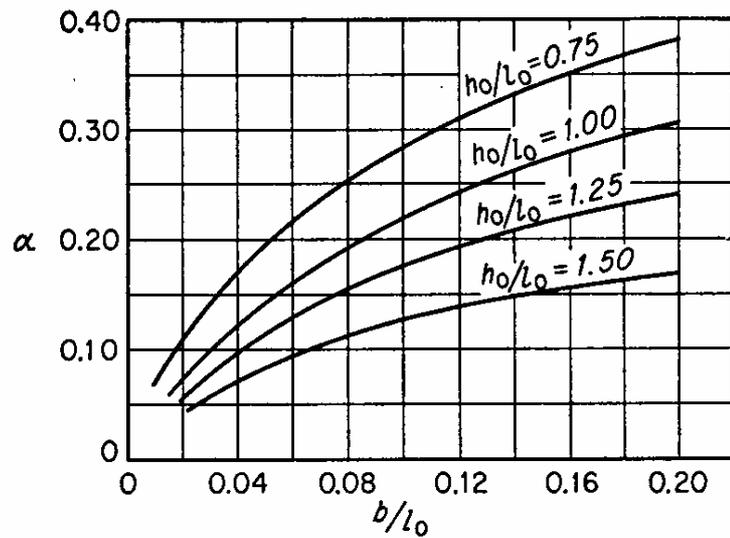


Figura 3.14 – Gráfico para a determinação do coeficiente α (BARKAN, 1962)

A rigidez vertical dos dois pilares é dada por:

$$k_1 = \frac{2EA_c}{h} \quad (3.77)$$

onde

E – módulo de Young do material do pilar;

h – altura efetiva do pilar;

A_c – área da seção transversal do pilar.

O k_2 é a rigidez da viga, relativa ao deslocamento do ponto central da viga do pórtico. Ou seja, é a força equivalente ao deslocamento unitário naquela direção. Tem-se:

$$k_2 = \frac{1}{\Delta z} \quad (3.78)$$

$$\Delta z = \frac{L^3 (1 + 2K)}{96EI_b (2 + K)} + \frac{3L}{8GA_b} \quad (3.79)$$

onde

G – módulo de elasticidade transversal;

L – vão efetivo da viga;

A_b – área da seção transversal da viga;

I_b – momento de inércia da viga;

I_c – momento de inércia do pilar;

K – fator de rigidez relativa, dado por:

$$K = \frac{I_b}{I_c} \frac{h}{L} \quad (3.80)$$

Como é um sistema com dois graus de liberdade naturais similar ao sistema utilizado na análise da fundação para máquina de impacto, utiliza-se, para encontrar as frequências naturais, as Equações 3.56, 3.57 e 3.58.

As amplitudes verticais no pilar, A_{z1} , e no meio do vão da viga, A_{z2} , para uma carga P_z são:

$$A_{z1} = \frac{\omega_{nL2}^2 P_z}{m_1 \Delta(\omega^2)} \quad (3.81)$$

$$A_{z2} = \frac{(1 + \mu) \omega_{nL1}^2 + \mu \omega_{nL2}^2 - \omega^2}{m_2 \Delta(\omega^2)} P_z \quad (3.82)$$

onde

$$\Delta(\omega^2) = \left[\omega^4 - \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \left(\omega_{nL1}^2 + \omega_{nL2}^2 \right) \omega^2 + \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \omega_{nL1}^2 \omega_{nL2}^2 \right] \quad (3.83)$$

ii) Vibração horizontal

As suposições utilizadas nesse caso são as quatro primeiras oferecidas na vibração vertical do sistema com um grau de liberdade. A Figura 3.15 apresenta translação horizontal na laje superior devido a uma força horizontal desbalanceada.

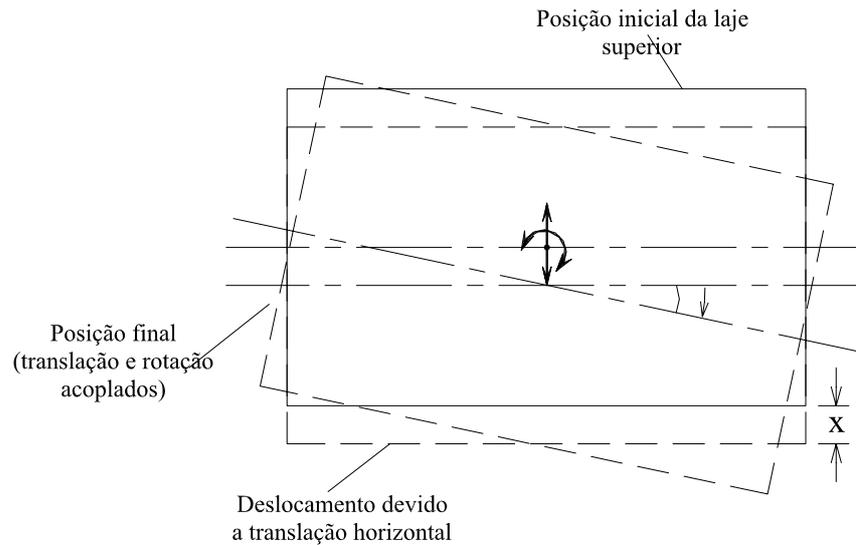


Figura 3.15 – Vibrações da laje superior devido à combinação da translação ao longo do eixo x e à torção em z (adaptada de PRAKASH e PURI, 1988)

A Figura 3.16 apresenta o movimento da laje superior para um pórtico com seis pilares e três vigas transversais. As massas da fundação e máquina são substituídas por três massas equivalentes situadas no meio do vão de cada viga transversal. O valor dessa massa é obtida pela Equação 3.82. O ponto C representa o centro de rigidez, ou seja, o centróide das molas k_{x1} , k_{x2} e k_{x3} e o ponto D é o centro de massa. A distância entre o centro de rigidez e o centro de massa é e. Tem-se que a_1 , a_2 e a_3 são determinados pela distância entre as massas e o centro de massa, e b_1 , b_2 e b_3 é a distância entre as massas e o centro de rigidez. A linha A_1B_1 representa a posição inicial da laje superior, a A_2B_2 é a posição devido ao deslocamento horizontal. E linha A_3B_3 é a posição final, ou seja, o deslocamento devido ao deslocamento horizontal e à torção.

$$m_i = \frac{W_{0i} + W_{vi} + 0,3W_{pi} + W_{Li}}{g} \quad (3.84)$$

onde

W_0 – peso da máquina sobre a viga transversal;

W_L – carga das vigas longitudinais, incluindo o peso próprio, transmitida para o pilar;

W_p – pesos dos pilares do pórtico;

W_v – peso da viga transversal.

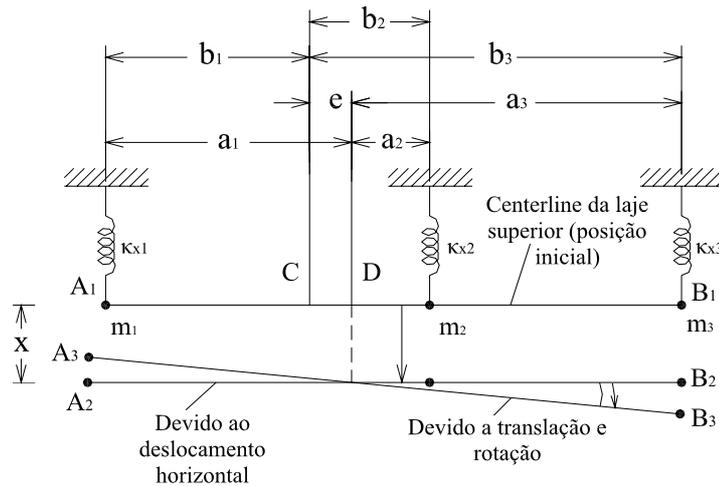


Figura 3.16 – Modelo massa-mola para a combinação das vibrações horizontal e de torção (adaptada de PRAKASH e PURI, 1988)

Considerando-se a laje superior com o um corpo rígido sobre molas, as equações do movimento para a translação e torção são dadas por:

$$m\ddot{x} + k_h x + k_h e\psi = P_x \text{sen}(\omega t) \quad (3.85)$$

$$M_{mz} \ddot{\psi} + k_h e x + \left(k_h e^2 + k_\psi \right) \psi = M_z \text{sen}(\omega t) \quad (3.86)$$

onde

m – massa total;

k_h – soma da rigidez lateral de todos os pórticos;

ψ – deslocamento horizontal devido à torção;

M_{mz} – momento de inércia polar de todas as massas, em torno do eixo vertical através do centro de gravidade (ponto D);

P_x – força desbalanceada horizontal;

M_z – momento horizontal desbalanceado;

k_ψ – rigidez torcional equivalente aos pilares.

O momento de inércia polar é definido por:

$$M_{mz} = \sum_{j=1}^n m_j a_j^2 \quad (3.87)$$

A rigidez lateral de cada pórtico é representada por molas, onde k_{xi} é:

$$k_{xi} = \frac{12EI_c}{h^3} \left(\frac{6K+1}{3K+1} \right) \quad (3.88)$$

então,

$$k_h = \sum_{j=1}^n k_{xj} \quad (3.89)$$

E a rigidez torcional equivalente aos pilares é definida por:

$$k_\psi = \sum k_{xj} b_j^2 \quad (3.90)$$

As frequências naturais para a vibração acoplada de translação horizontal e torção são dadas por:

$$\omega_n^4 - \left(\alpha \omega_{nx}^2 + \omega_{n\psi}^2 \right) \omega_n^2 + \omega_{nx}^2 \omega_{n\psi}^2 = 0 \quad (3.91)$$

onde

$$\alpha = 1 + \frac{e^2}{r^2} \quad (3.92)$$

O raio de giração é dado por:

$$r = \sqrt{\frac{M_{mz}}{m}} \quad (3.93)$$

A frequência natural só para a translação horizontal é a seguinte:

$$\omega_{nx} = \sqrt{\frac{k_h}{m}} \quad (3.94)$$

e a frequência natural, somente para a vibração torcional, é a seguinte:

$$\omega_{n\psi} = \sqrt{\frac{k_\psi}{M_{mz}}} \quad (3.95)$$

A amplitude horizontal é dada por:

$$A_x = \frac{\left(\frac{e^2}{r^2} \omega_{nx}^2 + \omega_{n\psi}^2 - \omega^2 \right) \frac{P_x}{m} - \omega_{nx}^2 \frac{M_z}{M_{mz}}}{\Delta(\omega^2)} \quad (3.96)$$

onde

$$\Delta(\omega) = \omega^2 - \left(\alpha \omega_{nx}^2 + \omega_{n\psi}^2 \right) \omega^2 + \omega_{nx}^2 \omega_{n\psi}^2 \quad (3.97)$$

A amplitude torcional é a seguinte:

$$A_\psi = \frac{\frac{e^2}{r^2} \omega_{nx}^2 \frac{P_x}{m} - \left(\omega_{nx}^2 - \omega^2 \right) \frac{M_z}{M_{mz}}}{\Delta(\omega^2)} \quad (3.98)$$

A amplitude horizontal resultante é definida por:

$$A_h = A_x + aA_\psi \quad (3.99)$$

onde a é a distância do ponto em que se deseja calcular a amplitude ao centro de gravidade do sistema.

CAPÍTULO 4

ANÁLISES E RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados exemplos de fundações baseados em exemplos clássicos da literatura, pelo método analítico e pelo método numérico. Foram tomados como referência os trabalhos de Barkan (1962), Prakash e Puri (1988), e Srinivasulu e Vaidyanathan (1976).

4.1. ANÁLISE DE FUNDAÇÃO PARA UMA MÁQUINA ALTERNATIVA

A fundação analisada é um bloco maciço de concreto apoiado no solo, com o formato de dois paralelepípedos superpostos (Figura 4.1). Uma máquina alternativa está apoiada sobre a fundação. A análise foi realizada pelos métodos do semi-espaço elástico, da mola elástica linear e por elementos finitos.

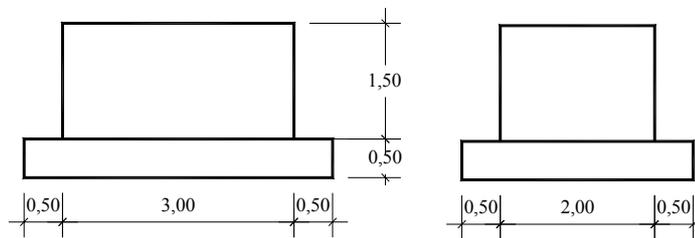


Figura 4.1 – Geometria da fundação da máquina com motor alternativo

Dados fornecidos sobre a máquina

- Frequência de operação 600 rpm
- Peso da máquina 10,791 kN
- A operação da máquina produz a sollicitação $P_z = 0,2\text{sen}(\omega t)$

Dados do solo

- Coeficiente de Poisson 0,33

– Módulo de elasticidade transversal do solo	49,05 MPa
– Densidade do solo	1,65 t/m ³
– Coeficiente de compressão elástica uniforme	49050 kN/m ³

Dados da Fundação

– Densidade do concreto	2,4 t/m ³
-------------------------	----------------------

O centro de gravidade do conjunto fundação–máquina, o centróide da área da base e a carga aplicada encontram-se numa mesma linha vertical.

Não foi especificada a amplitude admissível da fundação estudada. Para fundações com este tipo de máquina, utiliza-se a amplitude admissível 0,2 mm.

4.1.1 – MÉTODOS ANALÍTICOS

As análises da fundação citada anteriormente e efetuadas pelos métodos analíticos apresentados no capítulo anterior conduziram aos seguintes resultados:

4.1.1.1 – Resultados pelo método do semi-espço elástico

A Tabela 4.1 apresenta os resultados do raio equivalente, da rigidez, da razão de massa e da fração de amortecimento para o modo de vibração vertical, cujas equações estão contidas na Tabela 1.2.

Tabela 4.1 – Parâmetros equivalentes para a análise de uma fundação circular sobre um semi-espço elástico

Modo de vibração	Vertical (z)
Raio equivalente (m)	$r_0 = 1,954$
Rigidez (kN/m)	$k_z = 572370,32$
Razão de massa	$B_z = 0,504$
Fração de amortecimento	$\xi_z = 0,598$

Utilizando-se as Equações 3.2 e 3.3, obtém-se a frequência natural e a amplitude da fundação na direção vertical:

- Frequência $\omega_{nz} = 124,203 \text{ rad/s}$
- Amplitude $A_z = 3,574 \times 10^{-6} \text{ m}$

4.1.1.2 – Resultados pelo método da mola elástica linear

As Equações 3.94, 3.28 e 3.29 fornecem a rigidez do solo, frequência natural e a amplitude da fundação, respectivamente, utilizando-se o método da mola elástica linear.

- Rigidez $k_z = 588600 \text{ kN/m}$
- Frequência $\omega_{nz} = 125,957 \text{ rad/s}$
- Amplitude $A_z = 4,438 \times 10^{-6} \text{ m}$

4.1.2 – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A Fig 4.2 apresenta a malha utilizada na análise por elementos finitos e os eixos considerados. O bloco foi discretizado em 1365 nós e 960 elementos sólidos de oito nós.

O peso próprio da fundação foi calculado pelo programa, usando-se o peso específico e as dimensões da fundação. A massa da máquina foi distribuída em 9 nós e a carga dinâmica que ela exerce foi distribuída na superfície através de 16 elementos (Figura 4.3). O solo abaixo da fundação foi representado por molas aplicadas aos nós da base. A resposta dinâmica foi obtida através de análise linear modal.

Os valores das constantes de molas foram obtidos através das equações oferecidas pela analogia de Lysmer e a proposta por Barkan. Desta forma, foram realizadas duas análises já que os métodos analíticos empregados oferecem rigidezes diferentes para o mesmo modo de vibração.

Os valores das rigidezes para as translações e rotações utilizadas na análise são apresentadas nas Tabelas 4.2.

Tabela 4.2 – Rigidezes para as translações e as rotações

Translação e Rotação	Semi-espaco elástico	Mola elástica linear
k_x, k_y (kN/m)	471403,71	294300
k_z (kN/m)	572321,27	588600
R_x (kN/m)	1215898,75	882900
R_y (kN/m)	1872067,26	1569600
R_z (kN/m)	2084504,50	919687,5

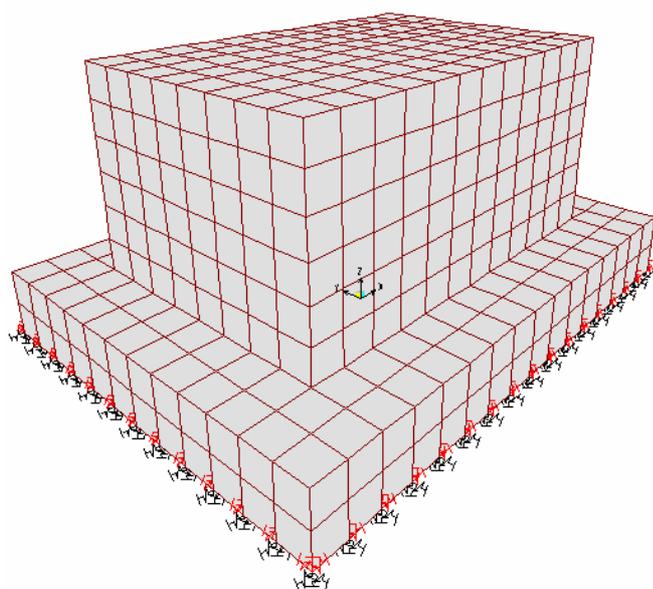


Figura 4.2 – Malha utilizada na análise da fundação da máquina alternada

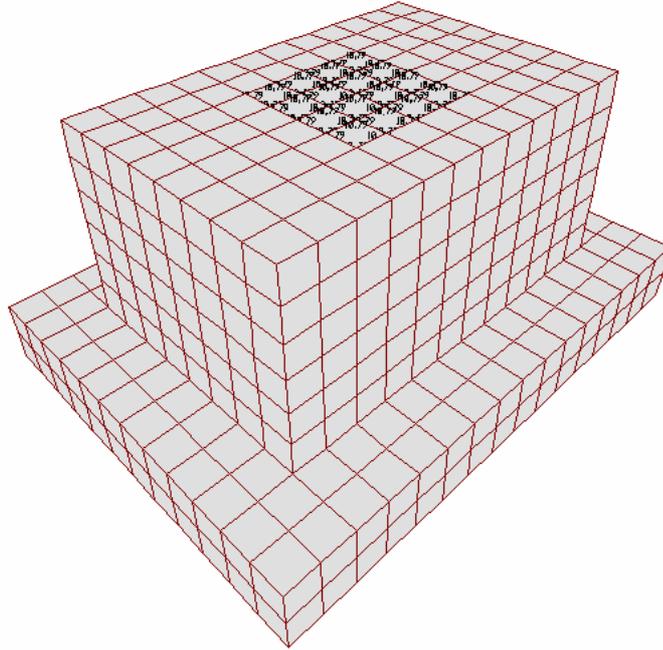


Figura 4.3 – Área em que é aplicada a carga dinâmica e estática no bloco

4.1.3 – ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1.3.1 – Frequências e Amplitudes

As Tabelas 4.3 e 4.4 apresentam os resultados das frequências e amplitudes calculadas na parte superior da fundação. A Tabela 4.3 contém os resultados pelo MEF e pelo método do semi-espaço elástico, enquanto que a tabela 4.4 contém os resultados pelo MEF e pelo método da mola elástica linear.

Tabela 4.3 – Resultados obtidos pelo método do semi-espaço elástico

	Elementos finitos	Semi-espaço elástico
Frequência (Hz)	19,7239	19,7676
Amplitude (mm)	0,0036	0,003574

Tabela 4.4 – Resultados obtidos pelo método da mola elástica linear

	Elementos finitos	Mola elástica linear
Frequência (Hz)	20	20,0467
Amplitude (mm)	0,004466	0,004438

Os resultados obtidos são equivalentes, como pode ser observado através das Tabelas 4.3 e 4.4.

4.1.3.2 – Tensões

As Figuras 4.4 a 4.9 apresentam as distribuições de tensões nas direções ortogonais z, x e y, respectivamente. As três primeiras figuras representam os valores correspondentes ao método do semi-espaco elástico e as outras três ao método da mola elástica linear. A unidade das tensões nessas figuras é kN/m². Esses gráficos são importantes tanto para a escolha de uma armadura adequada quanto para a verificação da tensão transmitida ao solo.

As tensões apresentadas nessa fundação são resultantes das cargas estática e dinâmica. A análise é baseada nos primeiros seis modos de vibração. O movimento vertical é representado pelo quarto modo de vibração da análise. A carga dinâmica foi multiplicada por três, já que, para este tipo de máquina IS: 2974, Parte I (2003), recomenda-se esse fator.

As Figuras 4.4 e 4.7 apresentam a distribuição de tensões na direção vertical. Observa-se que as tensões localizadas na face inferior do bloco são menores que a tensão admissível pelo solo.

As Figuras 4.5 e 4.8 mostram a distribuição de tensões na direção horizontal, segundo o eixo x, enquanto que as Figuras 4.6 e 4.9 representam a distribuição de tensões na direção horizontal, segundo o eixo y. As franjas de tensões apresentadas nas figuras têm as compressões representadas pelas cores quentes e as trações, pelas cores frias. A maior parte das tensões de tração está localizada na parte inferior do bloco,

onde deve ser colocada uma armadura que se prolongue pelas laterais. Essa armadura deve ser estendida até o comprimento de ancoragem necessário.

Observa-se, em todas as figuras, que as maiores tensões de compressão estão localizadas na reentrância do bloco. As tensões de compressão e tração desenvolvidas no bloco são baixas quando comparadas à resistência do concreto.

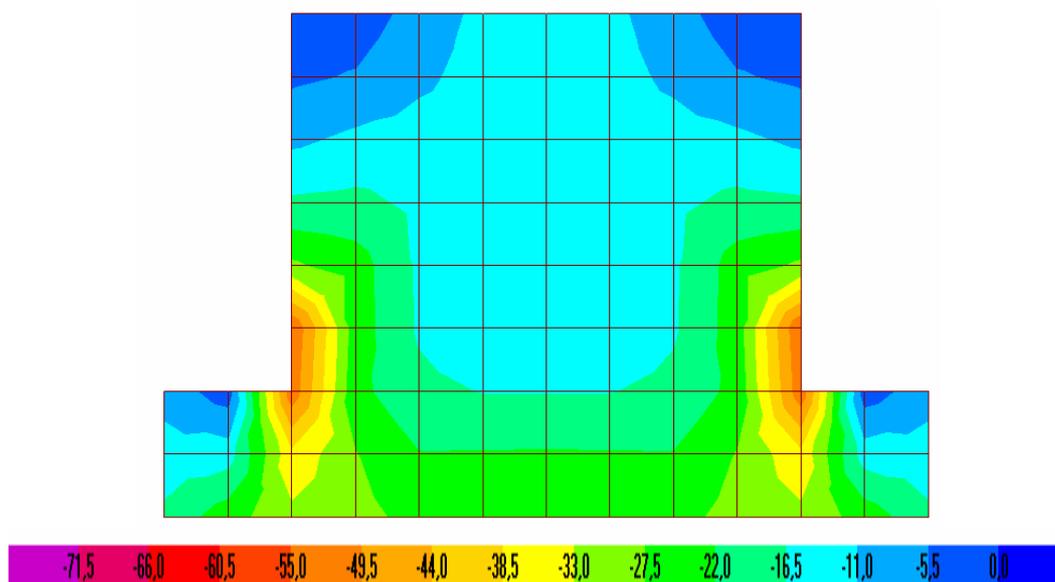


Figura 4.4 – Tensões em kN/m² na direção do eixo z, corte no plano yz, para o método semi-espaço elástico

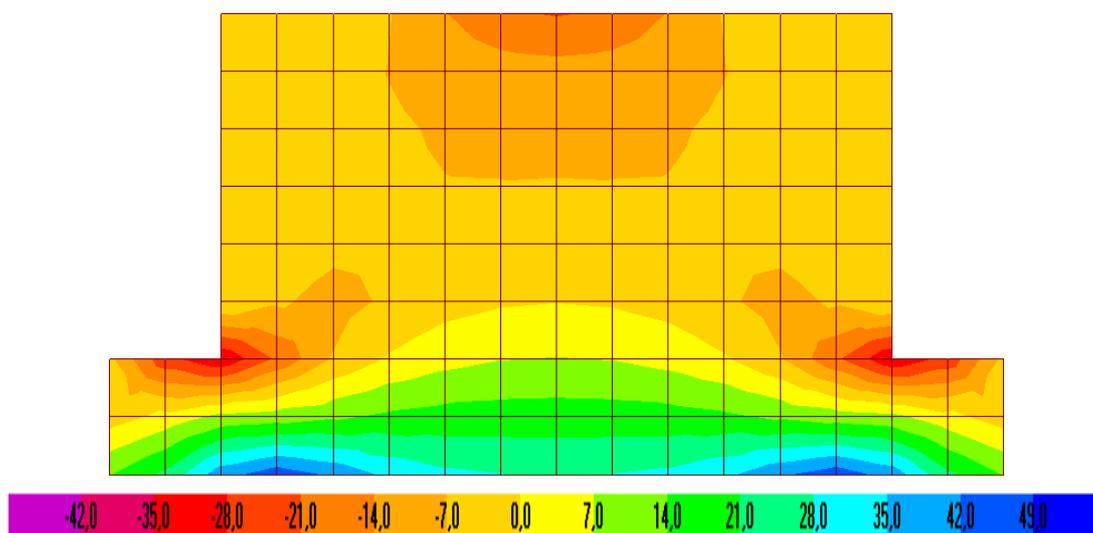


Figura 4.5 – Tensões em kN/m² na direção do eixo x, corte no plano xz, método semi-espaço elástico

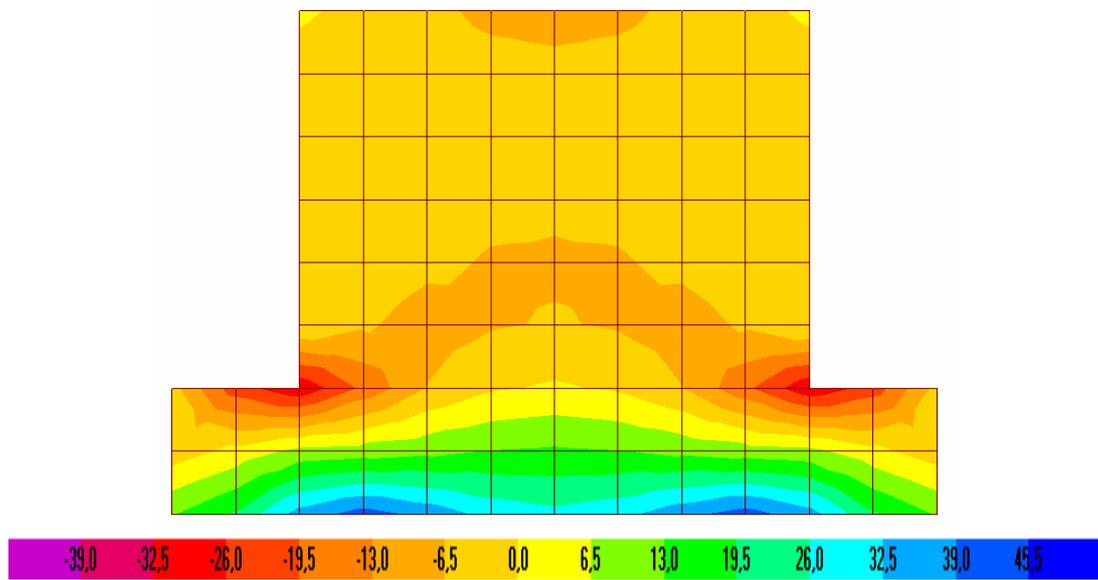


Figura 4.6 – Tensões em kN/m² na direção do eixo y, corte no plano yz, método semi-espaço elástico

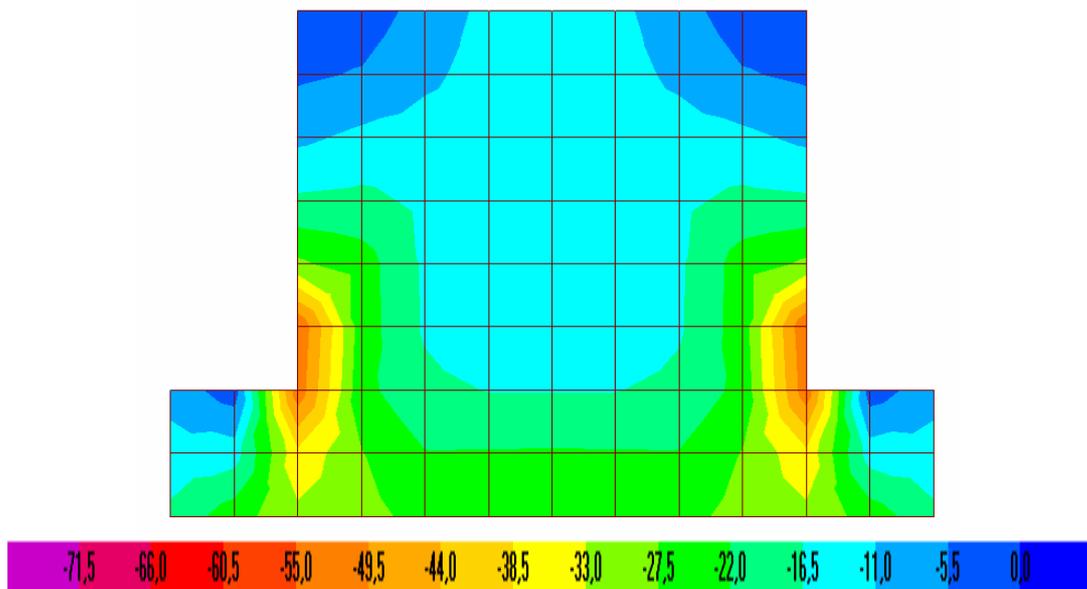


Figura 4.7 – Tensões em kN/m² na direção do eixo z, no plano yz, para o método mola elástica linear

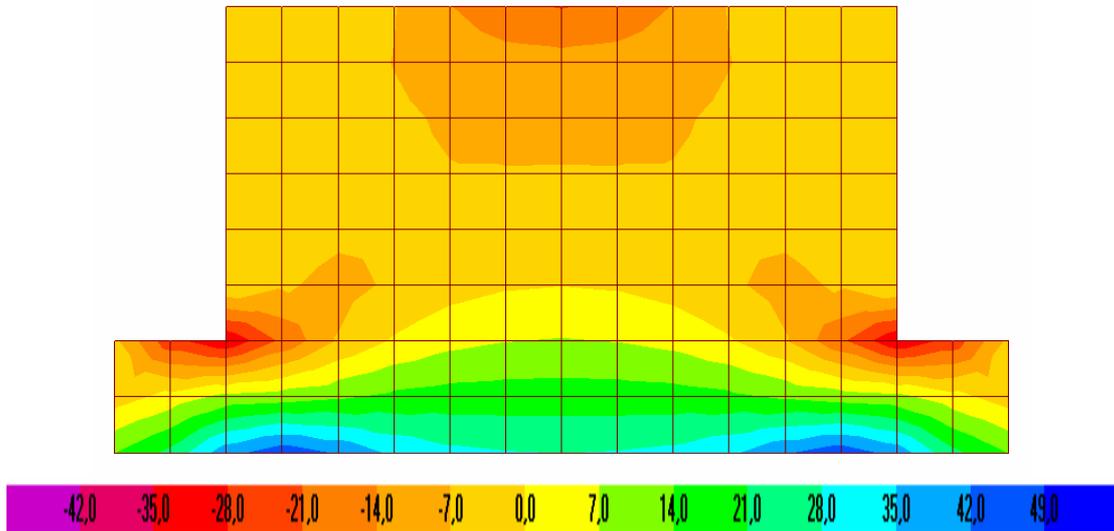


Figura 4.8 – Tensões em kN/m² na direção do eixo x, corte no plano xz, método mola elástica linear

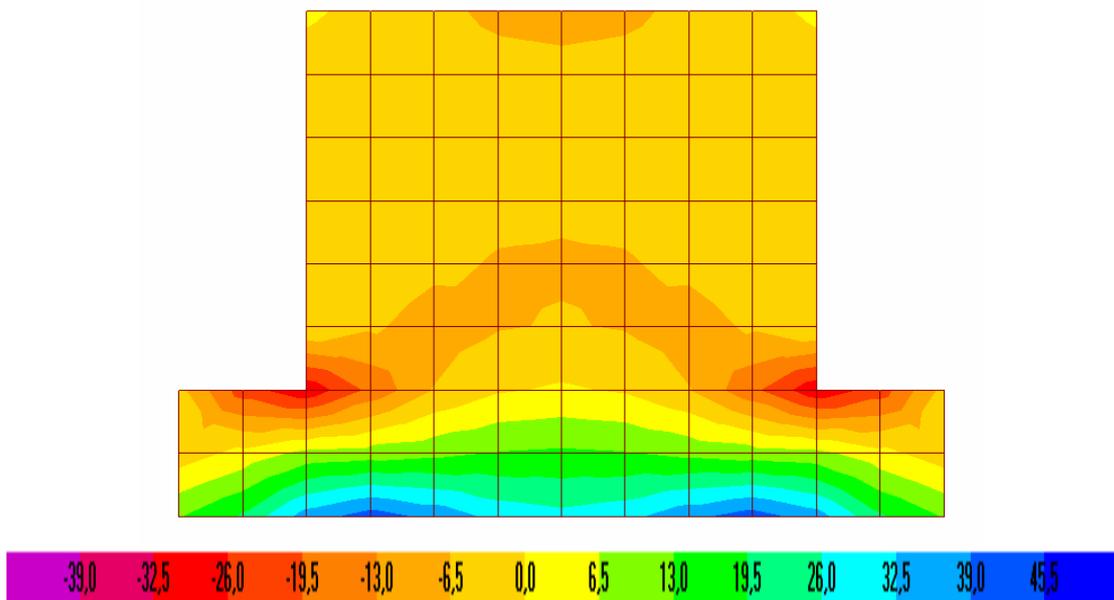


Figura 4.9 – Tensões em kN/m² na direção do eixo y, corte no plano yz, método mola elástica linear

4.2. ANÁLISE DE FUNDAÇÃO PARA UMA MÁQUINA TIPO MARTELO

Neste caso, a fundação analisada é um bloco maciço de concreto armado enterrado, cujas laterais não estão em contato com o solo (Figura 4.5). O coxim, em madeira, está localizado entre a bigorna e o bloco. A máquina atuante é um martelo de forjar e o pórtico da máquina é apoiado na bigorna.

Dados da máquina:

– Peso do martinete	15,205 kN
– Peso do martelo de forjar	19,62 kN
– Altura de queda do martinete	0,75 m
– Área do pistão	0,14 m ²
– Pressão a vapor	0,687 MPa
– Peso da bigorna	318,825 kN
– Peso do conjunto bigorna e pórtico	446,355 kN
– Eficiência de queda	0,65

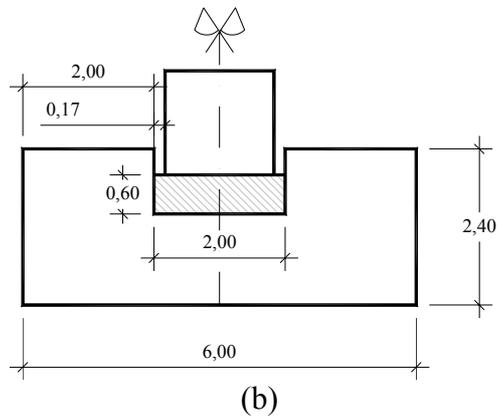
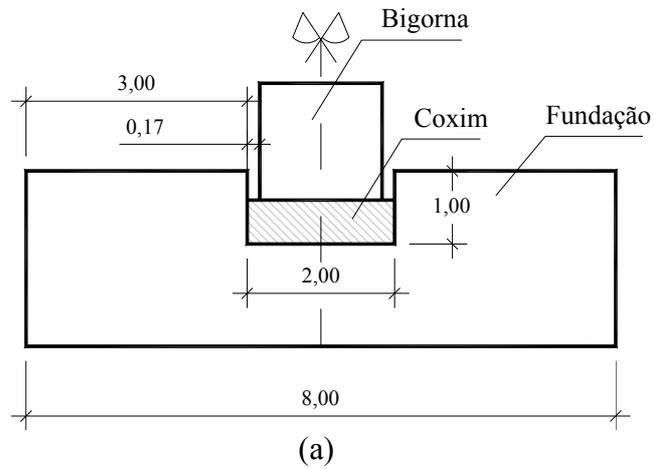


Figura 4.10 – Geometria da fundação da máquina de impacto

Dados do coxim:

- Coeficiente de Poisson 0,4
- Módulo de elasticidade do coxim 490,48 MPa
- Espessura do coxim 0,60 m
- Material do coxim madeira pinho
- Coeficiente de restituição elástica 0,5
- Tensão de compressão admissível no coxim,
perpendicular às fibras da madeira 3,92 MPa

Dados do solo:

- Coeficiente de Poisson 0,33

- Módulo de elasticidade transversal do solo 45,12 MPa
- Densidade do solo 2,050 t/m³

Dado do bloco de fundação:

- Densidade do concreto 2,4 t/m³

Nesta análise, as amplitudes de vibrações admissíveis para a bigorna e a fundação foram 1,5 mm e 1,0 mm, respectivamente. E a pressão admissível no solo causada pela fundação é de 0,245 MPa.

4.2.1 – MÉTODO ANALÍTICO

A rigidez equivalente ao solo para vibrações verticais, utilizando-se o método do semi-espaço elástico, e ao coxim de madeira tem-se a partir da Tabela 1.2 e Eq. 3.55, respectivamente, resultando em:

- Rigidez do solo $k_1 = 1053071,14 \text{ kN/m}$
- Rigidez do coxim $k_2 = 2253030,00 \text{ kN/m}$

onde o raio equivalente é $r_0 = 3,909 \text{ m}$

As frequências naturais do sistema são obtidas através das Equações 3.56, 3.57 e 3.58. Então,

- $\omega_{n1} = 57,758 \text{ rad/s}$
- $\omega_{n2} = 242,011 \text{ rad/s}$

Como a queda do martinete é acionada por pressão, utiliza-se a Equação 3.64 para obter a velocidade do martinete no momento do impacto. A velocidade de impacto da bigorna é dada pela Equação 3.61.

- Velocidade do martinete no momento do impacto $V_{Ti} = 5,491 \text{ m/s}$

- Velocidade de impacto da bigorna $V_a = 0,347 \text{ m/s}$

As amplitudes da fundação e da bigorna podem ser obtidas pelas Equações 3.59 e 3.60

- Amplitude da fundação $Z_1 = 9,178 \times 10^{-4} \text{ m}$

- Amplitude do coxim $Z_2 = 9,841 \times 10^{-4} \text{ m}$

As tensões transmitidas pela bigorna ao coxim e pela fundação ao solo são fornecidas a partir das Equações 3.65 a 3.67.

- Tensão na fundação $\sigma_f = 0,12 \text{ MPa}$

- Tensão na bigorna $\sigma_a = 0,32 \text{ MPa}$

4.2.2 – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A Fig 4.6 apresenta a malha utilizada na análise por elementos finitos. Para esse bloco, foram utilizados 20669 nós e 17792 elementos sólidos de oito nós. A carga do pórtico da máquina foi distribuída na superfície da bigorna. O solo abaixo da fundação foi representado por molas aplicadas aos nós. O pulso utilizado foi do tipo retangular com o tempo de contato de 0,01 segundos.

O coxim foi discretizado com elementos sólidos, também de oito nós, com as propriedades elásticas da madeira empregada na análise.

Também neste caso, a resposta dinâmica foi obtida através de análise linear modal.

Os valores das constantes de molas foram determinados através das equações oferecidas pela analogia de Lysmer.

A Tabela 4.5 apresenta as rigidezes de translação e rotação utilizadas no problema.

Tabela 4.5 – Rigidezes para as translações e as rotações

Translação e Rotação	Semi-espaco elástico
k_x, k_y (kN/m)	867382,82
k_z (kN/m)	1053071,14
R_x (kN/m)	8949014,80
R_y (kN/m)	13777909,62
R_z (kN/m)	15341953,17

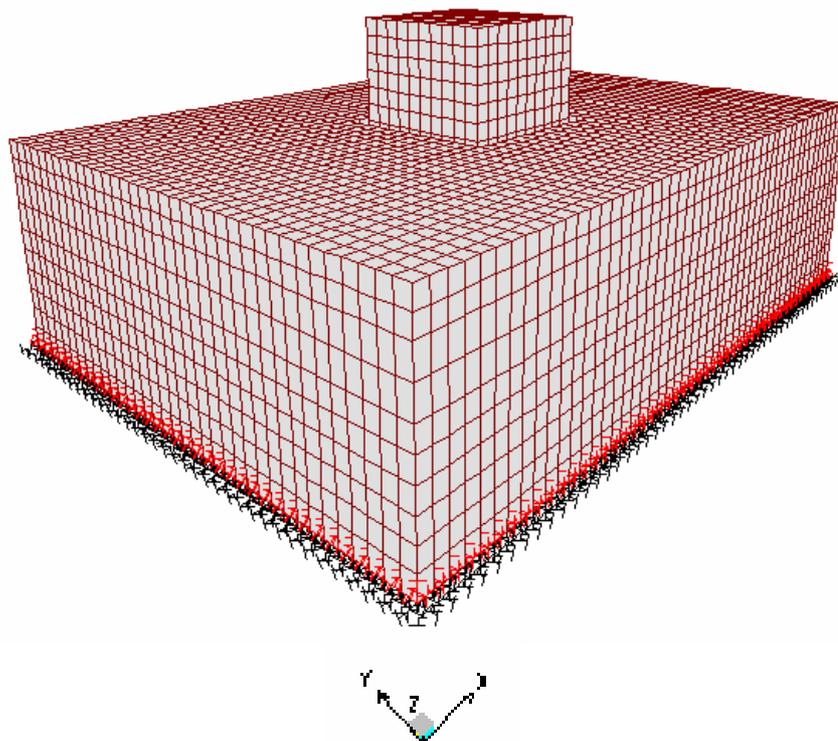


Figura 4.11 – Malha utilizada na análise da fundação da máquina martelo



Figura 4.12 – Materiais utilizados na modelagem da fundação

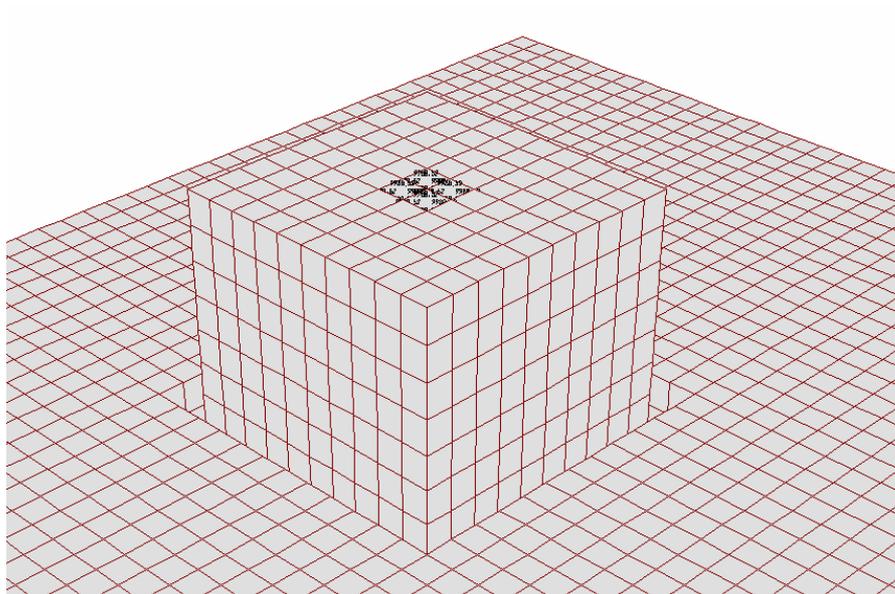


Figura 4.13 – Carga dinâmica aplicada na superfície da bigorna

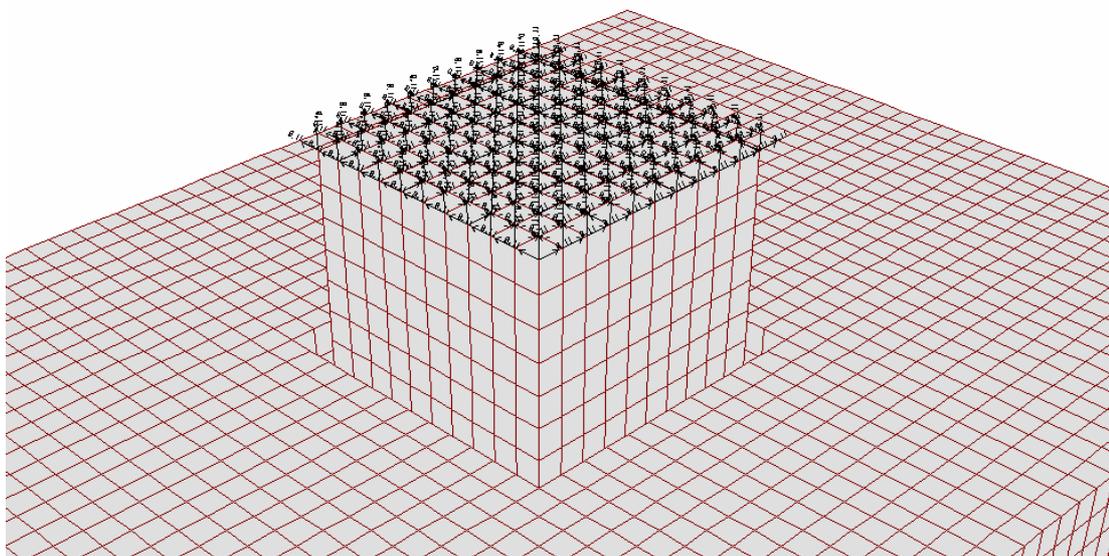


Figura 4.14 – Carga da máquina distribuída nos nós da bigorna

4.2.3 – ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.2.3.1 – Freqüências e Amplitudes

A Tabela 4.6 apresenta os resultados obtidos pelo MEF e pelo método analítico para as freqüências e amplitudes, na fundação e na bigorna, calculadas na parte superior da fundação e na parte superior da bigorna.

Tabela 4.6 – Resultados obtidos para máquina martelo

	Elementos finitos	Método analítico
Freqüência (Hz)	9,217	9,193
Amplitude na fundação (mm)	0,971	0,918
Amplitude na bigorna (mm)	0,995	0,984

4.2.3.2 – Tensões

As Figuras 4.15 a 4.17 apresentam distribuição de tensões nas direções ortogonais z, x e y, respectivamente. A unidade das tensões nessas figuras é em kN/m^2 . Esses gráficos são importantes para: a escolha de uma armadura adequada, verificação da tensão transmitida ao solo e verificação da escolha do coxim.

As tensões apresentadas nessa fundação também são resultantes da carga estática e dinâmica. A análise foi baseada nos primeiros quatro modos de vibração. O movimento vertical encontra-se no quarto modo de vibração da análise. A carga dinâmica foi multiplicada por três.

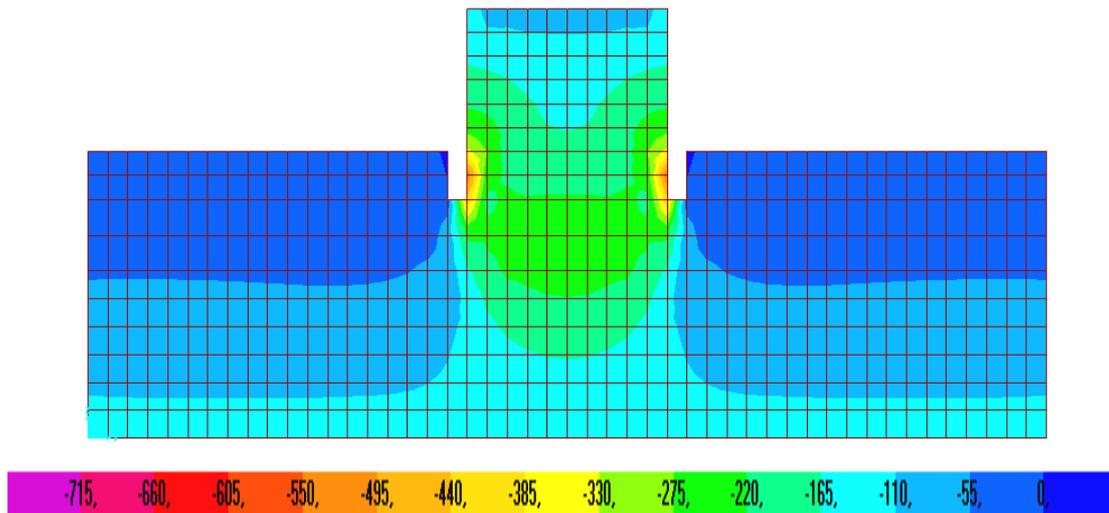


Figura 4.15 – Tensões em kN/m^2 na direção do eixo z, corte no plano yz

A Figura 4.15 representa as tensões de compressão na direção vertical, eixo z. Verifica-se que o coxim escolhido é adequado, já que as tensões transmitidas ao coxim são inferiores à admissível.

As Figuras 4.16 e 4.17 apresentam a distribuição de tensões nas direções horizontais, eixo x e y, respectivamente. Para essas direções, segue-se o mesmo critério da representação das cores do bloco da análise anterior. As maiores tensões de compressão estão localizadas na área do coxim e as de tração estão no centro da parte inferior do bloco. Essa distribuição de tensões mostra que a armadura deve ser colocada

na parte inferior do bloco, prolongando-se pelas laterais até o comprimento em que a ancoragem esteja garantida.

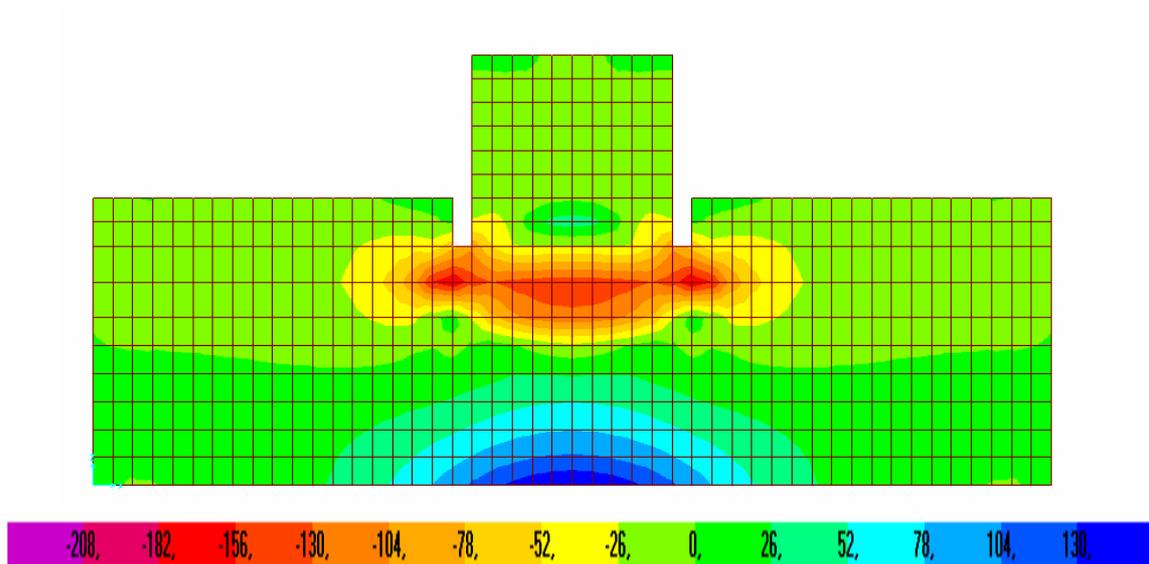


Figura 4.16 – Tensões em kN/m^2 na direção do eixo x, corte no plano a z

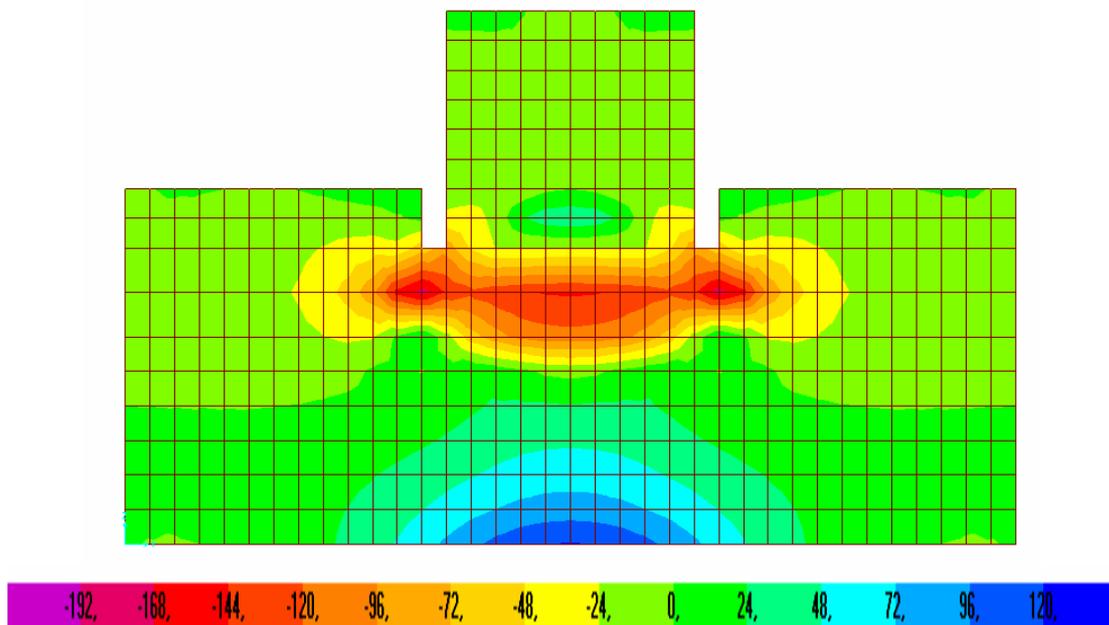


Figura 4.17 – Tensões em kN/m^2 na direção do eixo y, corte no plano a yz

4.3. ANÁLISE DE FUNDAÇÃO PARA UMA MÁQUINA DE ALTA VELOCIDADE

A fundação analisada suporta uma turbomáquina e é do tipo pórtico, formado por uma laje inferior, quatro pilares e uma laje superior (Figuras 4.18 e 4.19). Esse pórtico foi estudado utilizando-se o método simplificado com dois graus de liberdade e o método dos elementos finitos. Como o método analítico não leva em consideração o efeito do solo, ou seja, os pilares são considerados engastados, o solo também não foi considerado na análise por elementos finitos.

Dados da máquina:

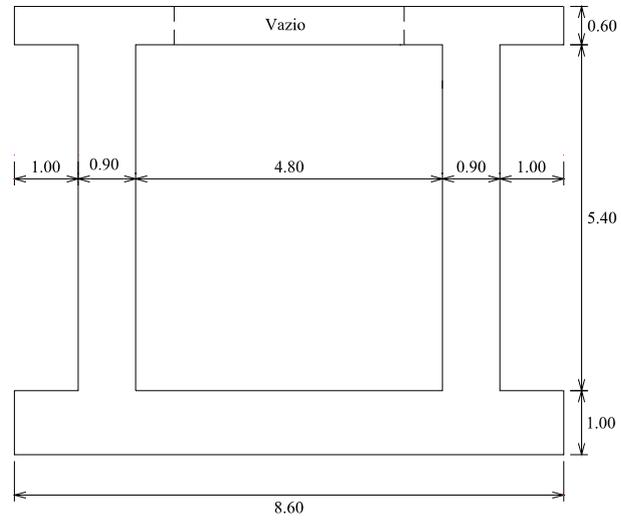
– Freqüência de operação	3000 rpm
– Excentricidade do rotor da máquina	$0,05 \cdot 10^{-3}$ m
– Peso do rotor	14,72 kN

Dados da Fundação:

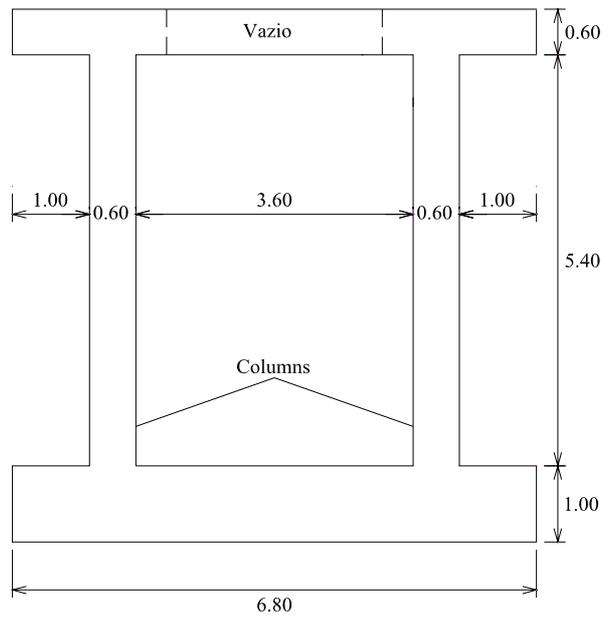
– Densidade do concreto	2,4 t/m ³
– Módulo de elasticidade	29429,07 MPa

As cargas, devido à ação da máquina, são apresentadas na Fig. 4.19. As cargas no sentido longitudinal resultam das cargas estáticas da máquina, enquanto no sentido transversal são impostas pelas partes giratórias da máquina.

Os valores das cargas estáticas são: $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 44,14$ kN e $P_5 = P_6 = 49,05$ kN.



(a)



(b)

Figura 4.18 – (a) Corte longitudinal e (b) Corte transversal.
Geometria da fundação da máquina

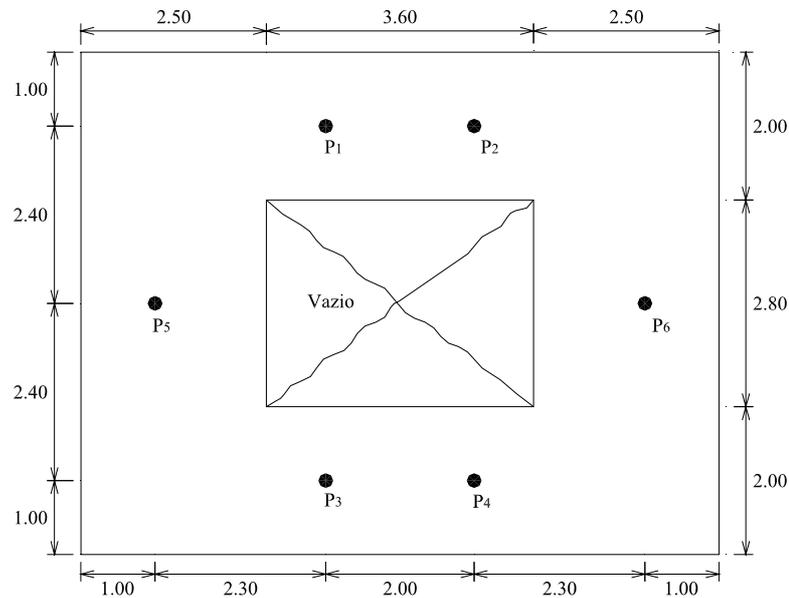


Figura 4.19 – Planta Baixa – Geometria da fundação da máquina

4.3.1 – MÉTODO ANALÍTICO

As rigidezes equivalentes ao par de pilares e às vigas obtêm-se a partir das Eqs. 3.76, 3.77, 3.78 e 3.79, resultando em:

- Rigidez dos pilares $k_1 = 5686956,52 \text{ kN/m}$
- Rigidez da viga $k_2 = 543252,50 \text{ kN/m}$

As massas resultantes das Eqs. 3.73 e 3.74 são as seguintes:

- Massa m_1 $m_1 = 4,196 \text{ t/m}$
- Massa m_2 $m_2 = 0,972 \text{ t/m}$

As frequências naturais do sistema são obtidas através das Equações 3.56, 3.57 e 3.58. Então,

- $\omega_{n1} = 35,439 \text{ rad/s}$

– $\omega_{n2} = 63,441 \text{ rad/s}$

As amplitudes da fundação e da bigorna podem ser obtidas pelas Equações 3.59 e 3.60

– Amplitude no pilar $Z_1 = 3,372 \times 10^{-6} \text{ m}$

– Amplitude na viga transversal no meio do vão $Z_2 = 1,567 \times 10^{-5} \text{ m}$

4.3.2 – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

As Figuras 4.20 e 4.21 apresentam a malha utilizada na análise por elementos finitos e as cargas dinâmica e estática, respectivamente. Para esse pórtico, a laje superior foi representada por elemento de casca e os pilares, por elementos de barra. A discretização foi efetuada com 1040 elementos de casca de quatro nós e 16 elementos de barra resultando 1160 nós. A carga da máquina foi representada por cargas pontuais na laje. Os pilares foram engastados na extremidade em contato com a laje inferior.

A estrutura é considerada delgada se a razão entre a espessura e o vão médio for igual ou inferior a 0,05. (BARROS, 2000). Como a razão da espessura com o vão médio é superior a 0,05, na modelagem do problema foi utilizado o elemento de casca espessa.

A resposta dinâmica foi obtida através de análise linear modal.

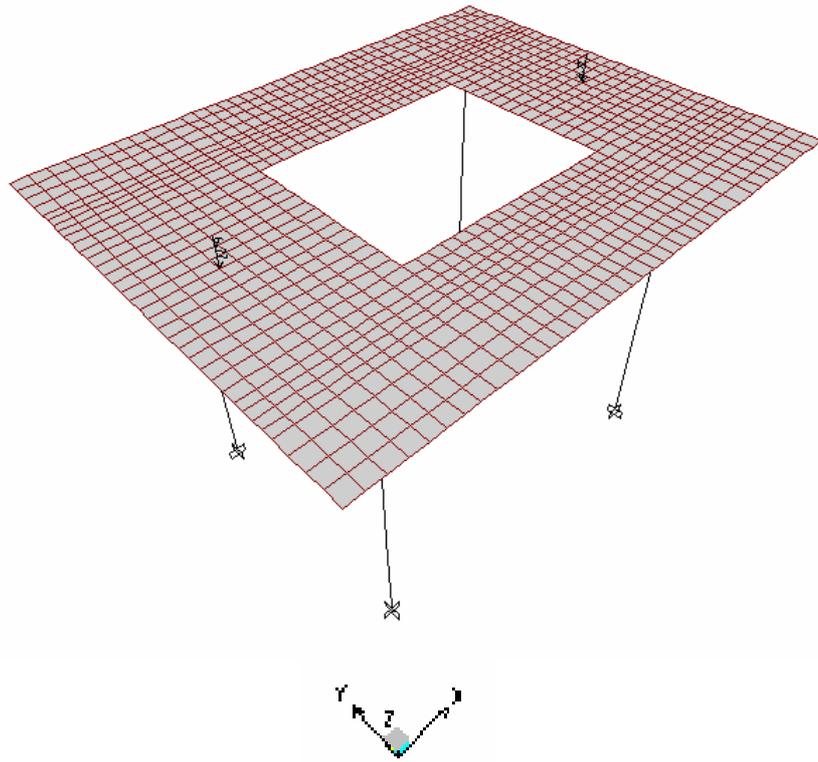


Figura 4.20 – Carga dinâmica aplicada nos nós da laje

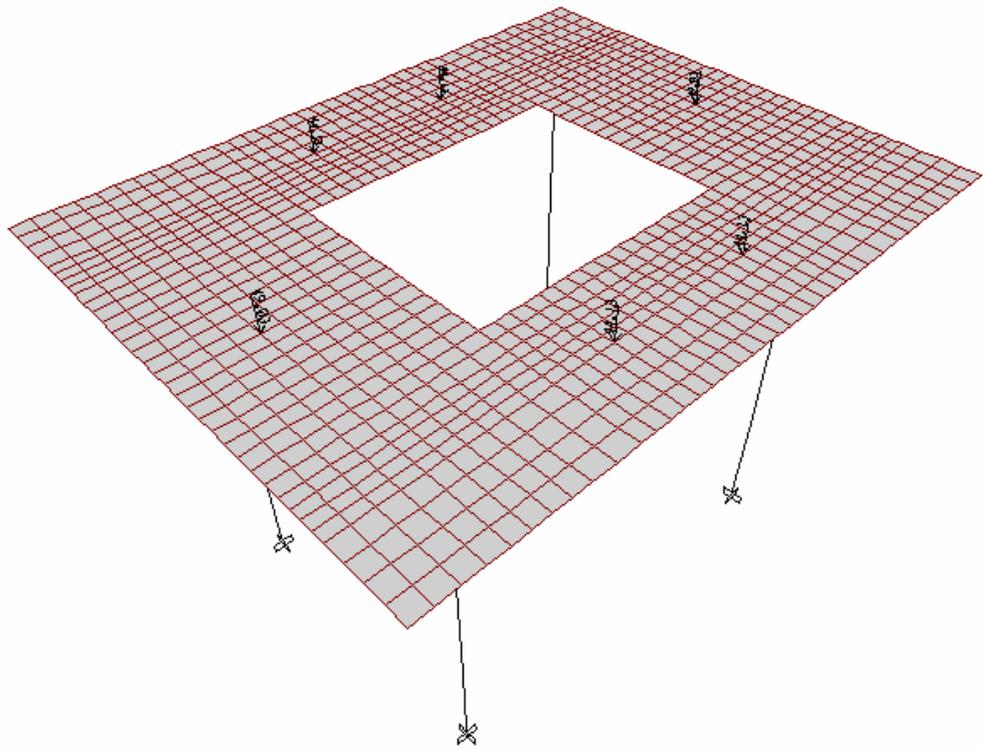


Figura 4.21 – Carga da máquina distribuída nos nós da laje

4.3.3 – ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.3.3.1 – Freqüências e Amplitudes

A tabela 4.7 apresenta os resultados obtidos pelo MEF e pelo método analítico para as freqüências e amplitudes na fundação e bigorna, calculadas na parte superior da fundação, onde Z_1 está acima do pilar e Z_2 está localizado no meio do vão transversal.

Tabela 4.7 – Resultados obtidos com pilares engastado

	Elementos finitos	Engastado
Freqüência (Hz)	35,728	35,439
Amplitude Z_1 (mm)	0,004	0,003
Amplitude Z_2 (mm)	0,015	0,01567

4.3.3.2 – Esforços

Os esforços apresentados são resultantes das cargas estática e dinâmica. A carga dinâmica foi multiplicada por dois, já que, para este tipo de máquina a IS: 2974, Parte III (1995), recomenda-se esse fator.

A análise foi baseada nos primeiros dezesseis modos de vibração. O modo de vibração que representa o movimento mostrado na Fig 3.12(a) é o sexto modo determinado na análise.

Nas Figuras 4.22 e 4.23 estão representados os momentos na laje superior do pórtico na direção x e na direção y, respectivamente. Os valores dos momentos estão apresentados no espectro.

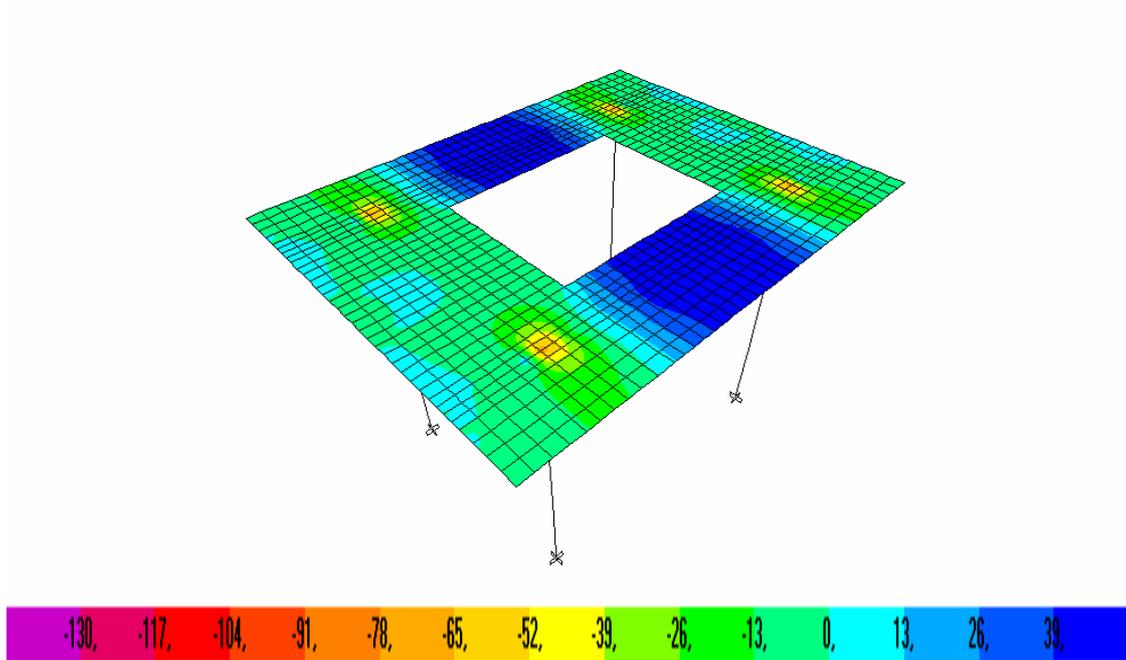


Figura 4.22 – Momento em kN.m na laje em torno do eixo y

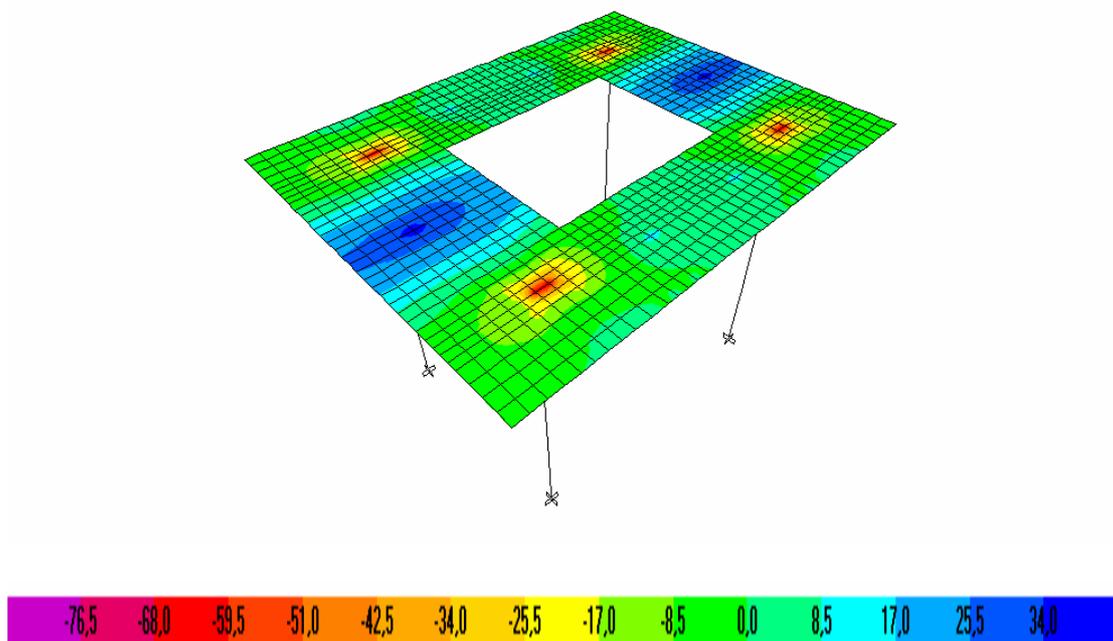


Figura 4.23 – Momento kN.m na laje em torno do eixo x

Os esforços ao longo dos pilares, apresentados nas figuras a seguir, são resultantes das cargas estática e dinâmica, máxima e mínima.

A Figura 4.24 apresenta as forças axiais ao longo dos pilares. O valor máximo de -337 kN se verifica na base inferior do pilar e o mínimo de - 234 kN se encontra no topo do pilar.

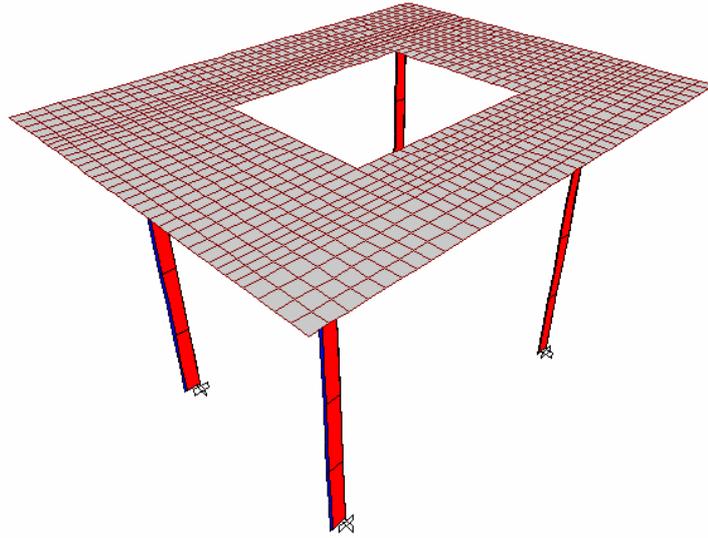


Figura 4.24 – Força axial em kN nos pilares

As figuras 4.25 e 4.26 ilustram os momentos nos pilares em torno dos eixos x e y, respectivamente. Para os momentos em torno do eixo y, tem-se como valor no topo do pilar 8 kN.m e na base 11 kN.m. Enquanto os momentos em torno do eixo x são de 29 kN.m e 55 kN.m, na base e no topo do pilar, respectivamente.

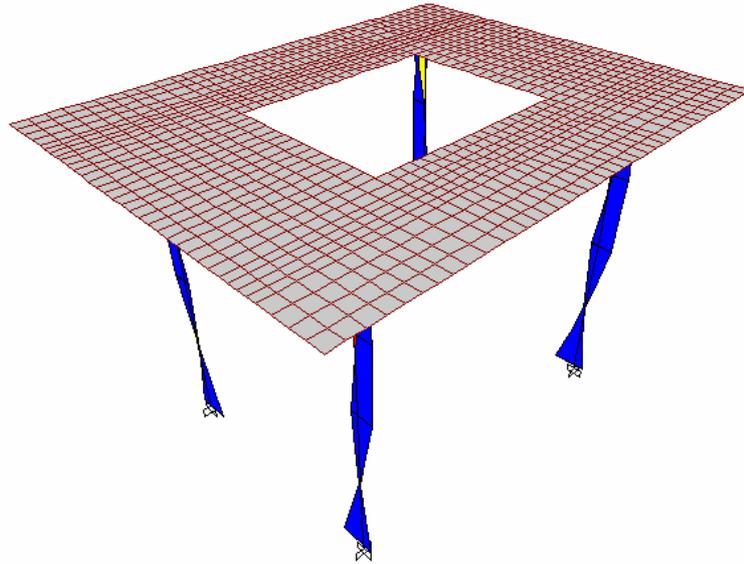


Figura 4.25 – Momento no pilar kN.m em torno do eixo x

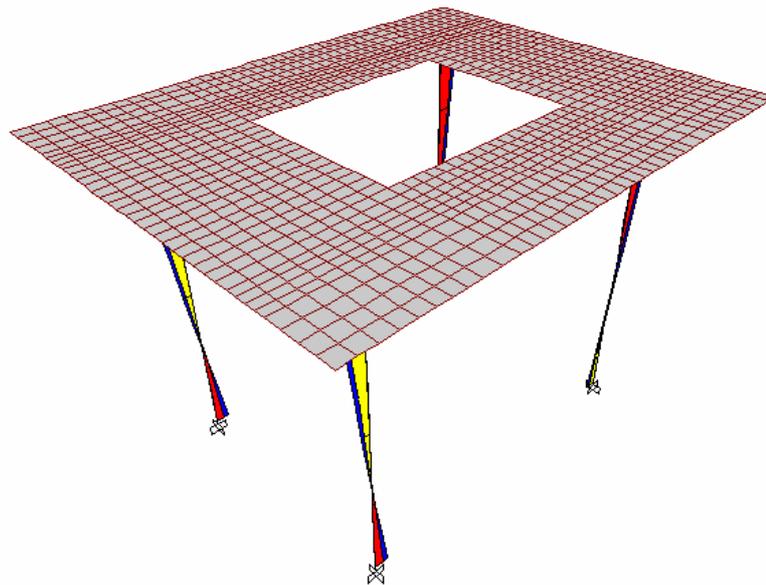


Figura 4.26 – Momento no pilar kN.m em torno do eixo y

Apesar de os esforços estarem representados nas direções x, y e z separadamente, eles são referentes aos mesmos carregamentos. Os pilares estão, portanto, solicitados à flexão composta oblíqua.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1 CONCLUSÕES

A complexidade da análise de fundações de máquinas é devida à quantidade e à variedade de parâmetros que interferem no problema e ao tratamento matemático necessário à análise. Para uma análise adequada, são necessários conhecimentos de dinâmica estrutural, dinâmica dos solos, associações de modelos matemáticos sofisticados que bem representem o sistema solo-fundação-máquina e informações da geometria, cargas estáticas e dinâmicas provenientes da máquina, além das amplitudes admissíveis.

Para um projeto de fundações de máquinas ter sucesso, há necessidade de um trabalho integrado de especialistas nas áreas de dinâmica estrutural, engenharia mecânica e geotécnica.

As soluções analíticas clássicas para o caso de blocos com geometria simples já estão consolidadas e largamente comprovadas através de medições. Nas fundações analisadas neste trabalho, os métodos analíticos de cálculos conduzem a resultados muito próximos daqueles obtidos com a aplicação do método dos elementos finitos. Quando a fundação tem uma geometria complexa, o método analítico torna-se muito complicado ou até inviável. Os resultados obtidos sugerem a aplicação do método dos elementos finitos a fundações com geometria e carregamentos mais complexos. Isso constitui um dos objetivos do presente trabalho, que é o de validar o procedimento (modelagem, discretização e condições de contorno) empregado para a obtenção da solução via elementos finitos.

Segundo a literatura sobre fundações de máquinas, as tensões nos blocos geralmente são baixas, necessitando apenas de armadura mínima. Isso foi comprovado nas análises, tendo em vista os baixos valores das tensões obtidas.

5.2 SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS CONCLUSÕES

Como sugestões para futuros trabalhos, podem ser mencionados:

- (i) Incluir a modelagem do solo através de elementos, usando o conceito de semi-espaço finito, representando o contorno por meio de absorvedores.
- (ii) Efetuar a modelar a máquina com o objetivo de melhor representar as cargas estáticas e dinâmicas e conseqüente distribuição de tensões.
- (iii) Analisar a degradação da rigidez do solo, decorrente da carga dinâmica.
- (iv) Tratar casos de fundações sobre estacas para os diversos casos de equipamentos (máquinas alternadas, máquinas de impactos, máquinas rotativas e máquinas que trabalham sob altas frequências).
- (v) Analisar os diversos tipos de isolamento de fundações de máquinas e de equipamentos.
- (vi) Usar modelos que considerem as não-linearidades do concreto e do solo, decorrentes da atuação das cargas dinâmicas, além das que são próprias destes materiais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, E. S. A. N. (1989), **Introdução à análise dinâmica de fundações de máquinas**. Dissertação (mestrado), Escola Politécnica/USP, São Paulo/SP.
- ALMEIDA, M. T. e SIMÕES, A. A. (1996), **Parâmetros de projeto dinâmico de fundações de máquinas**. IV CEM-NNE/96
- ASIK, M. Z. e VALLABHAN, C. V. G. (2001), **A simplified model for the analysis of machine foundations on a nonsaturated, elastic and linear soil layer**. Computers and Structures, 79, pp. 2717 - 2726.
- BARKAN, D. D. (1962), **Dynamics of bases and foundations**, New York: McGraw-Hill.
- BARROS, J. (2000), **Lajes e cascas segundo o método dos elementos finitos**. Relatório de pesquisa. Universidade do Minho. Portugal.
- CAMAROTTO, J. A. (1998), **Estudo das relações entre o projeto de edifícios industriais e a gestão da produção**. São Paulo.
- CHEHAB, A. G. e NAGGAR, M. H. (2004), **Response of block foundations to impact loads**. Journal of Sound and vibration, vol. 276, pp. 293 – 310.
- CREDE, C. E. (1972), **Choque e vibração nos projetos de engenharia**. Tradução de Edgar Ferreira da Costa e Souza e Renato Teixeira. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico.
- DIAS, J. A. (2000), **Sismos: Ondas Sísmicas**.
http://w3.ualg.pt/~jdias/GEOLAMB/GA5_Sismos/52_Sismologia/5203_OndasSismicas.html - acessado em 20/03/06
- DIAS, E. G. C. S. (2001), **Avaliação de impacto ambiental de projetos de mineração no estado de São Paulo: a etapa de acompanhamento**. Tese (doutorado), Escola Politécnica/USP, São Paulo/SP.

GAZETAS, G. (1983), **Analysis of machine foundation vibrations: state of the art.** Soil Dynamics and Earthquake Engineering, New York. Vol. 2, No. 1, p. 2 – 42.

HACHICH, W. e BARROS, J. M.C (1998), **Fundações: teoria e prática.** São Paulo: Pini.

IS: 2974 (Part I) (2003), Code of practice for design and construction of machine foundations Part I foundations for reciprocating type machines. Indian Standard. New Delhi.

IS: 2974 (Part II) (2003); Code of practice for design and construction of machine foundations Part II foundations for impact type machines (hammer foundations). Indian Standard. New Delhi.

IS: 2974 (Part III) (1995); Design and construction of machine foundations – code of practice Part 3 foundations for rotary type machines (medium and high frequency). Indian Standard. New Delhi.

KUMAR, J. e REDDY, C. R. (2006), **Dynamic response of footing and machine with spring mounting base.** Geotechnical and geological engineering, vol. 24, pp. 15-17.

LAMB, H (1904), **On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid.** Philosophical Transactions, vol. CCIII, pp. 1-42.

LOPES, I., et al. (2003), **O estudo das ondas sísmicas superficiais como método de caracterização dinâmica de solos.** VI Congresso Nacional de Geologia, Monte de Caparica, Portugal. <http://www.civil.ist.utl.pt/~jaime/SWM.pdf> - acessado em 15/03/06

MARK, R. e SVINKIN, M. (2002), **Predicting soil and structure vibrations from impact machines.** Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering, vol. 128, pp. 602 – 612.

- NEVES, M. C. (2005), **Notas de Aula: Sismologia**.
http://w3.ualg.pt/~mcneves/GGM/GGM_aula_12_13.ppt - acessado em 21/04/06
- OLIVEIRA, R. A. (1974), **Análise dinâmica de torres e estruturas elevadas lateralmente carregadas**. Dissertação (mestrado), COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro/RJ.
- PAZ, M. (1985), **Structural Dynamics**. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc, 1985.
- PRAKASH, S. e PURI, V. K. (1988), **Foundations for machine: analysis and design**.
Jonh Wiley & Sons.
- PRAKASH, S. (1981), **Soil Dynamics**. McGraw-Hill, New York.
- REGAZZI, R. D. e XIMENES, G. M.(2005), **A importância da avaliação da vibração no corpo humano**. INMETRO e 3R Brasil Tecnologia Ambiental, Rio de Janeiro
<http://www.isegnet.com.br/2index.asp> - acessado em 09/12/05.
- RICHART, F. E., Jr., WOODS, R. D. e HALL, J. R., Jr.(1970), **Vibrations of soils and foundations**. Prentice hall, New Jersey.
- SALDANHA, R. (1968), **Fundações de máquinas (notas de aula)**. UFPE, Recife/PE
- SAMPAIO, C (2004), **Notas de Aula: Supressão de vibração**. Escola náutica infante D. Henrique
http://www.enautica.pt/professores/Chedas/CCond/2004_2005/HPPessoal_CCCond.htm - acessado em 17/11/05
- SIMÕES, A. A (1996), **Análise da sensibilidade dos parâmetros no projeto dinâmico de fundações sobre blocos de compressores alternativos**. Dissertação (mestrado), EFEI, Itajubá/MG

SIMÕES A. A (2001), **Estudo dinâmico de fundações de máquinas sujeitas a carregamento pulsante**. Tese (doutorado), EFEI, Itajubá/MG.

SRINIVASULU, P. e VAIDYANATHAN C. V. (1976), **Handbook of machine foundations**. New Delhi: Tata McGraw-Hill Publishing Company.

TEXEIRA, A. H. (1971), **Notas de aula: Elementos de Fundações de Máquinas**. EESC/USP, São Paulo/SP.

THOMSON, W. T. (1978), **Teoria da vibração com aplicações**; tradução de Cássio Sigaud. Rio de Janeiro: Interciência.

WINTERKORN, H. F. e FANG, H (1975), **Foundation Engineering Handbook**, New York, Van Nostrand Reinhold Company.