



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

IMPLEMENTAÇÃO DE MÉTODOS EXPLÍCITOS DE INTEGRAÇÃO  
COM CONTROLE DE ERRO PARA MODELOS ELASTOPLÁSTICOS E  
VISCO-ELASTOPLÁSTICOS.

IGOR FERNANDES GOMES

RECIFE – 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

IMPLEMENTAÇÃO DE MÉTODOS EXPLÍCITOS DE INTEGRAÇÃO  
COM CONTROLE DE ERRO PARA MODELOS ELASTOPLÁSTICOS E  
VISCO-ELASTOPLÁSTICOS.

IGOR FERNANDES GOMES

Dissertação submetida ao corpo docente  
do curso de pós-graduação da  
Universidade Federal de Pernambuco  
como parte dos requisitos necessários à  
obtenção do grau de Mestre em Ciências  
em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Engenharia  
Geotécnica

**Orientador:** Leonardo José do Nascimento Guimarães

**Co-orientador:** Ivaldo Dário da Silva Pontes Filho

**Gomes, Igor Fernandes**

**Implementação de métodos explícitos de integração com controle de erro para modelos elastoplásticos e visco-elastoplásticos / Igor Fernandes Gomes. – Recife : O Autor, 2006.**

**x, 106 folhas : il., fig., tab.**

**Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Engenharia Civil, 2006.**

**Inclui bibliografia e anexos.**

**1. Engenharia geotécnica – Modelos constitutivos de materiais. 2. Elastoplasticidade e viscoplasticidade – Método dos elementos finitos – Integração de tensões. 3. Eficiência dos algoritmos explícitos – Euler modificado e Runge-Kutta-Dormand-Price. I. Título.**

**624.13  
624.176**

**CDU (2.ed.)  
CDD (22.ed.)**

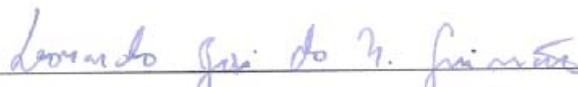
**UFPE  
BC2006-277**

IMPLEMENTAÇÃO DE MÉTODOS EXPLÍCITOS DE INTEGRAÇÃO  
COM CONTROLE DE ERRO PARA MODELOS ELASTOPLÁSTICOS E  
VISCO-ELASTOPLÁSTICOS.

IGOR FERNANDES GOMES

DISSERTAÇÃO APROVADA PELA COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-  
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE  
PERNAMBUCO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO  
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



LEONARDO JOSÉ DO NASCIMENTO GUIMARÃES, Ph.D., UFPE



IVALDO DÁRIO DA SILVA PONTES FILHO, D.Sc., UFPE



LÍCIA MOUTA DA COSTA, D.Sc., UFCG

RECIFE, PE – BRASIL  
FEVEREIRO DE 2006

## DEDICATÓRIA

*À DEUS, aos meus pais Rildo e Giselda  
e à minha esposa Julliana.*

*Sabedoria se mede, não pela quantidade de experiências vividas, mas pelo que se fez com elas. Porque muita gente passa por muitas coisas na vida, e não aprendeu nada, não viu nada, não apercebeu-se de nada, nem sequer que Deus estava querendo lhe ensinar através daqueles acontecimentos. A sabedoria está no desejo de aprender, na abertura para as coisas novas, na maleabilidade da alma, no permitir-se errar. Só quem se coloca na posição de um eterno aprendiz pode aprender com o Mestre. Sábio não é alguém que chegou a algum lugar, mas que sabe ser um caminhante.*

*Pr. Daniel Rocha*

## AGRADECIMENTOS

À meu DEUS onipotente, onipresente e onisciente que, pelo Seu amor, me capacitou dando contínua força e sabedoria para o desenvolvimento deste trabalho, sendo sempre o meu socorro, e colocando as pessoas corretas a me auxiliar e orientar nesta caminhada.

Aos meus pais pela educação a mim concedida e pelo longo incentivo à minha vida acadêmica e profissional, através de grande esforço de suas vidas para me concederem a realização de tal objetivo.

À minha esposa Julliana que a todo tempo foi minha auxiliadora, entendendo as minhas ausências e incentivando o meu trabalho, sempre intercedendo por mim em suas orações, e a seus pais e irmãos que me apoiaram a todos os momentos.

Aos professores Leonardo Guimarães e Ivaldo Pontes, orientador e co-orientador respectivamente, pelo profissionalismo e responsabilidade na condução do meu trabalho, me concedendo ótimas condições de desenvolvimento desta dissertação, sempre elucidando minhas dúvidas e fornecendo as referências bibliográficas necessárias para a ampliação dos meus conhecimentos. Agradeço também pela relação pessoal que tiveram comigo, me recebendo tão bem no programa de pós-graduação, sempre acessíveis diante de minhas dúvidas e necessidades, dando-me um tratamento além da condição de aluno, mas também como pessoa, inclusive dando suporte financeiro a meus estudos, pois, caso contrário, este trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao professor José Maria Justino, pela sua insistente ajuda a minha pessoa, também sempre acessível, disponibilizando materiais, tirando dúvidas não só relativas às disciplinas, como também referentes a assuntos extra-acadêmicos.

À professora Lícia Mouta pela simpatia e profissionalismo, por aceitar compor a comissão examinadora do meu trabalho, além também de sempre se dispor a me auxiliar no desenvolvimento deste trabalho quando esclarecendo algumas de minhas dúvidas.

Em especial aos amigos Luciano e Roubier, meus “professores estendidos” ao me auxiliarem ensinando alguns conceitos e programas e tirando dúvidas, e a João Barbosa (“Joãozinho”), pois todos contribuíram de forma relevante na minha capacitação para concluir este trabalho. Agradeço também pelos momentos de conversa e descontração, o que possibilitou um ambiente mais agradável de se trabalhar.



Aos amigos de curso Ricardo, Rafael, Eduarda, Paulo e Joelson pelos momentos de alegria através de nossas conversas, e pelo apoio mútuo sempre com espírito altruísta diante das dificuldades encontradas ao longo do curso.

Aos amigos do LMCG Marcos George, Ana Cláudia Leão, Maria Helena, Ramom, Rafael, Manoela, Bruno e Gustavo que sempre me estenderam as mãos quando necessitei, através da grande amizade e de muita alegria, bem como pelo auxílio acadêmico trocado entre nós.

Aos demais amigos Frank, Gérson, Cláudia e Fábio pelo contínuo apoio a meu trabalho sempre se preocupando com meu sucesso e me presenteando com suas amizades.

À Andréia Negromonte e Laudénice, secretárias do programa de pós-graduação, por me concederem ótima estrutura de informação e auxílio acadêmico, através de suas orientações e esclarecimentos de dúvidas. Agradeço também pela relação de amizade a mim concedida, sendo isto um grande privilégio meu.

Aos funcionários do departamento de geotecnia Brito, Chico, Sr. Severino e Vânia pelo companheirismo e atenção dada, através de grande amizade.

À irmã Neide, instrumento abençoado de DEUS, que desde que me conheceu vem me colocando em suas orações, elevando o meu nome, trabalho e família ao reino celeste.

Ao Pastor José Deusarte e demais membros da Igreja Batista da Várzea, por suas orações e acompanhamento espiritual de minha vida.

Por fim, agradeço aos professores da UFPB Primo Fernandes, Clóvis Dias e Roberto Pimentel pelo conhecimento concedido e pelo apoio a minha nova investida acadêmica.

## **RESUMO**

# **IMPLEMENTAÇÃO DE MÉTODOS EXPLÍCITOS DE INTEGRAÇÃO COM CONTROLE DE ERRO PARA MODELOS ELASTOPLÁSTICOS E VISCO-ELASTOPLÁSTICOS.**

**Igor Fernandes Gomes**

**Fevereiro /2006**

**Orientador: Leonardo José do Nascimento Guimarães**

**Programa: Engenharia Civil**

Nas últimas décadas presenciamos um grande avanço no desenvolvimento de modelos constitutivos elastoplásticos e elasto-viscoplasticos para materiais geomecânicos. Paralelamente, com o desenvolvimento dos métodos numéricos e dos ambientes computacionais foram propostas, a partir do método dos elementos finitos, várias técnicas discretas de integração das relações constitutivas que garantem convergência e satisfazem as condições de consistência. Estas técnicas podem ser divididas em integração explícita e implícita.

Neste trabalho serão implementados os métodos explícitos de integração de Euler Modificado e Runge-Kutta-Dormand-Price, ambos com controle de erro, formulados para sistemas de equações ordinárias de segunda e quarta e quinta ordens, respectivamente, bem como o modelo viscoplástico de Perzyna. Serão feitas também comparações das performances entre estas técnicas onde, tanto o controle de erro quanto o tamanho de passo variável para cada ponto de integração, baseiam-se no tempo total de CPU para análise total e no número máximo de passos de integração durante qualquer incremento de deslocamento e para a análise total. Serão ainda comparados os resultados da aplicação, às análises elastoplasticas e visco-elastoplásticas, dos métodos de integração implementados. As verificações entre os métodos são feitas a partir da aplicação dos critérios de Mohr Coulomb e Von Mises apresentam-se em três problemas, cuja simulação é feita por meio do código CODE\_BRIGHT, utilizando o método dos elementos finitos.

**Palavras Chave: Elementos Finitos, Elastoplasticidade, Viscoplasticidade.**

## **ABSTRACT**

### **IMPLEMENTATION OF EXPLICIT INTEGRATION METHODS WITH ERROR CONTROL TO ELASTOPLASTIC AND VISCO-ELASTOPLASTIC MODELS.**

**Igor Fernandes Gomes**

**February /2006**

**Advisor: Leonardo José do Nascimento Guimarães**

**Department: Civil Engineering**

In the last decades we have presented a great advance in the development of elastoplastic constitutive models to geomechanic materials. Some discrete techniques of integration of the constitutive relations that guarantee convergence and satisfy the consistency conditions, parallel with the development of the numerical methods and the computational ambient were suggest, from the finite elements method. These techniques can be divided in explicit and implicit integration.

In this work it will be implemented the explicit methods of integration of Modified-Euler and Runge-Kutta-Dormand-Price, both with error control, formulated to systems of ordinary equations of second and four and fifth order, respectively, as well as Perzyna viscoplastic model. Will also be made comparisons of performances between these techniques where, the control and the size of the variable step to each integration point, are based on total CPU time to total analysis and in the maximum number of integration substeps during any increment of displacement and to the total analysis. Still will be compared the results of the applications, to elastoplasticity and visco-elastoplasticity, of the integration methods implemented. The verifications between the methods are made from the application of Mohr Coulomb and Von Mises criteria, are presented in three problems whose simulation is made by the CODE\_BRIGHT code using the finite element method.

**Keywords: Finite Elements, Elastoplasticity, Viscoplasticity.**

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Esquema de um corpo no espaço: Conceito do Contínuo.	07
Figura 2.2 – Descrição de Movimento.	07
Figura 2.3 – Ciclo Carga-Descarga.	13
Figura 2.4 – Critério de Plastificação – Espaço de Tensões Admissíveis.	18
Figura 2.5 – Tipos de Comportamento de Material Elastoplástico.	18
Figura 2.6 – Representação do Potencial Plástico e dos Vetores de Deformação Plástica (Sousa, 2004).	20
Figura 2.7 – Espaço de Tensões Principais: definição dos invariantes (Prat e Gens, 2003).	26
Figura 2.8 – Superfície de Fluência de Mohr Coulomb: (a) representação no espaço das tensões principais; (b) plano octaédrico e direção de deformação plástica.	28
Figura 2.9 – Vetor de Deformações Plásticas e suas componentes.	29
Figura 2.10 – Lei de Endurecimento e Amolecimento:(a) relação $c'-E_d^p$ ; (b) relação $\phi'-E_d^p$ .	30
Figura 2.11 – Superfície de fluência de Von Mises.	31
Figura 2.12 – Direção de incremento de deformação plástica do critério de Von Mises.	32
Figura 3.1 – Esquema de Intersecção á Superfície de Fluência (Sousa, 2004).	43
Figura 3.2 – Estado de Tensões em processo incremental: afastamento da superfície de fluência (Sousa, 2004).	44
Figura 3.3 – Aproximação Hiperbólica da Função da Superfície de Morh Coulomb.	46
Figura 3.4 – Funções no plano octaédrico.	48
Figura 3.5 – Esquema explícito de Euler Modificado.	52
Figura 3.6 – Esquema explícito de Runge-Kutta-Dormand-Price (Pedroso, 2002).	57
Figura 3.7 – Representação quantitativa dos erros para derivação numérica com aproximação de primeira ordem via diferenças finitas para frente.	62
Figura 4.1 – Cavidade Cilíndrica – Problema Físico.	64
Figura 4.2 – Malha de Elementos Finitos: elementos quadriláteros de 4 nós.	65

Figura 4.3 – Gráfico Carga-Deslocamento para análise elastoplástica ( $STOL=10^{-4}$ ): comparação entre os métodos explícitos de Euler Modificado e Runge-Kutta- Dormand-Price.	66
Figura 4.4 – Curva Carga-Deslocamento para análise elastoplástica ( $STOL=10^{-4}$ ): comparação com solução analítica (Yu, 1992) e de Sloan et al. (2000).	67
Figura 4.5 – Distribuição de deformações plásticas.	69
Figura 4.6 – (a) Distribuição de forças nodais; (b) Vetores de forças nodais.	69
Figura 4.7 – (a) Malha deformada; (b) Vetores de deslocamento.	70
Figura 4.8 – Distribuição das tensões principais.	70
Figura 4.9 – (a) Distribuição de vetores de tensões principais; (b) Detalhe da distribuição de vetores de tensões principais.	71
Figura 4.10 – Curva Carga-Deslocamento para análise viscoplástica ( $STOL=10^{-4}$ ): comparação entre dois parâmetros de viscosidade diferentes.	73
Figura 4.11 – Gráfico Carga-Deslocamento: comparação entre análises visco-elastoplástica e elastoplástica.	74
Figura 4.12 – Análise visco-elastoplástica: (a) Distribuição de deslocamentos para ambas as análises; (b) Distribuição de deformações viscoplásticas.	75
Figura 4.13 – Resultado numérico da tensão radial no regime estacionário.	77
Figura 4.14 – Resultado numérico da tensão tangencial no regime estacionário.	78
Figura 4.15 – Resultado numérico da tensão axial no regime estacionário.	78
Figura 4.16 – Problema Físico – Talude Vertical	80
Figura 4.17 – Malha de elementos finitos.	81
Figura 4.18 – Variação da Altura Crítica do Talude com o Fator de Gravidade Aplicado.	82
Figura 4.19 – Evolução dos Deslocamentos com a Altura Crítica.	83
Figura 4.20 – Evolução do deslocamento com o Fator de Gravidade (FS).	84
Figura 4.21 – Evolução das Deformações Plásticas Cisalhantes com o Fator de Gravidade.	84
Figura 4.22 – Deslocamento Horizontal x Tempo: (a) Elastoplástico; (b) Visco- elastoplástico.	86
Figura 4.23 – Deslocamento Vertical x Tempo: (a) Elastoplástico; (b) Visco-	87

elastoplástico.	
Figura 4.24 – Evolução das deformações permanentes com o tempo.	88
Figura 4.25 – Evolução de tensões verticais com o tempo.	89
Figura 4.26 – Análise das malhas deformadas – (a) Viscoplastica; (b) Elastoplastica.	90
Figura 4.27 – Distribuição de Deslocamentos – (a) Análise Viscoplastica; (b) Análise Elastoplastica.	90
Figura 4.28 – Vetores de deslocamento – (a) Análise Viscoplastica; (b) Análise Elastoplastica.	91
Figura 4.29 – Deformações Permanentes: (a) Deformações Viscoplasticas; (b) Deformações Plásticas.	92
Figura 4.30 – Variação da Porosidade: (a) Deformações Viscoplasticas; (b) Deformações Plásticas.	92
Figura 4.31 – Distribuição de Tensões Principais $\sigma_1$ , $\sigma_2$ e $\sigma_3$ : (a) Análise Viscoplastica; (b) Análise Elastoplastica.	94
Figura 4.32 – Vetores de Tensões Principais: (a) Análise Viscoplastica; (b) Análise Elastoplastica.	95

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Propriedades do Material para diferentes tipos de análises.	65
Tabela 2 – Resultados de algoritmos para análise elastoplástica de cavidade cilíndrica por Mohr Coulomb.	68
Tabela 3 – Resultados de algoritmos para análise visco-elastoplástica de cavidade cilíndrica por Mohr Coulomb.	75
Tabela 4 – Parâmetros do Problema de Expansão de Cavidade por Von Mises.	77
Tabela 5 – Parâmetros do Problema de Talude Vertical.	80

## SUMÁRIO

<b>1 – INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1– OBJETIVOS .....	2
1.2-ORGANIZAÇÃO DO TEXTO .....	4
<b>2 - CARACTERIZAÇÃO MECÂNICA E RELAÇÕES CONSTITUTIVAS EM MATERIAIS INELÁSTICOS.....</b>	<b>6</b>
2.1 – CINEMÁTICA E EQUILÍBRIO .....	6
2.2 – RELAÇÕES CONSTITUTIVAS .....	10
2.2.1 – Fundamentos da Teoria da Plasticidade .....	11
2.2.1.1 – Equação Constitutiva Elástica .....	14
2.2.1.2 – Função e Superfície de Fluência.....	16
2.2.1.3 – Regra de Fluxo.....	19
2.2.1.4 – Lei de Endurecimento .....	21
2.2.1.5 – Tensor Elastoplástico.....	22
2.2.1.6 – Critério de Plastificação de Mohr-Coulomb .....	24
2.2.1.7 – Critério de Plastificação de Von Mises .....	30
2.2.2 – Fundamentos Teóricos da Visco-elastoplasticidade.....	32
2.2.2.1 – Conceitos de Visco-elastoplasticidade.....	33
2.2.2.2 – Modelo Visco-elastoplástico de Perzyna .....	34
<b>3 – INTEGRAÇÃO DA RELAÇÃO CONSTITUTIVA .....</b>	<b>38</b>
3.1 – INTRODUÇÃO .....	38
3.2 – DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	39
3.3 – ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO EXPLÍCITA.....	42
3.3.1 – Intersecção e retorno à Superfície de Fluência .....	43
3.3.2 – Suavização da Superfície de Fluência de Mohr Coulomb .....	45
3.3.3 – Esquema de Euler Modificado com Controle de Erro.....	49
3.3.4 – Esquema Explícito de Runge-Kutta-Dormand-Price com Controle de Erro .....	55
3.4 – GRADIENTES DA FUNÇÃO DE FLUÊNCIA DE MOHR COULOMB .....	59
3.5 – OBTENÇÃO DA MATRIZ TANGENTE VISCO-ELASTOPLÁSTICA .....	60
<b>4 – CASOS ANALISADOS.....</b>	<b>63</b>
4.1 – EXPANSÃO DE CAVIDADE CILÍNDRICA .....	63
4.1.1 – Análise de Expansão de Cavidade Cilíndrica pelo critério de Mohr Coulomb.....	64
4.1.2 – Análise de Expansão de Cavidade Cilíndrica pelo critério de Von Mises.....	76
4.2 – ANÁLISE DE TALUDE VERTICAL .....	79
<b>5 – CONCLUSÃO .....</b>	<b>96</b>
5.1 – SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS .....	98
<b>6 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>100</b>



# 1 – INTRODUÇÃO

---

O solo é um meio trifásico composto por partículas sólidas e vazios preenchidos com água e/ou ar. Seu comportamento mecânico caracterizado por suas relações constitutivas, é função de inúmeras variáveis, tais como, condições de carregamento, condições de drenagem, temperatura, entre outros. Nas últimas décadas presenciamos um grande avanço no desenvolvimento de modelos constitutivos para solos. O principal papel que os modelos podem desempenhar do ponto de vista teórico e prático é a previsão do comportamento do material sob solicitações de laboratório e de campo.

As relações constitutivas podem ser caracterizadas a partir de processos reversíveis ou irreversíveis. Em carregamentos monótonos os processos reversíveis podem ser modelados a partir da teoria da elasticidade, enquanto os processos irreversíveis são caracterizados a partir da teoria da plasticidade, independente da ação do tempo, ou dependente da ação do tempo, a exemplo da viscoplasticidade, creep ou relaxação de tensões, (Prat e Gens, 2003).

A experiência já permite afirmar que os modelos constitutivos baseados na teoria elastoplástica demonstram um grande potencial de aplicação aos solos para simular comportamentos independentes do tempo (Pedroso, 2002). Para situações cujo comportamento mecânico do solo depende do tempo, a experiência também demonstra que a viscoelasticidade e a viscoplasticidade podem reproduzir adequadamente o comportamento dos solos. Portanto, é possível afirmar que o estudo dos modelos constitutivos para solos é importante para o desenvolvimento da geotecnia.

É preciso destacar ainda que o desenvolvimento intensivo dos modelos constitutivos em solos deve-se, em parte, ao desenvolvimento dos modelos aproximados e técnicas numéricas a exemplo da técnica dos elementos finitos, que consiste basicamente na discretização de equações diferenciais e integrais sobre um contínuo (Zienkiewicz, 1980; Zienkiewicz e Morgan, 1984), sob condições iniciais e de contorno conhecidas. Esta ferramenta pode ser utilizada em problemas lineares ou não-lineares, em regime permanente ou transitório, a materiais homogêneos ou heterogêneos (Oñate, 1995).

Inicialmente o Método dos Elementos Finitos foi aplicado a problemas lineares (relação tensão-deformação linear), entretanto, a consideração da não-linearidade do

problema torna-se indispensável nos casos de não-linearidade material (que ocorre em modelos inelásticos e hiperelásticos onde há relação constitutiva não-linear), e/ou geométrica (que ocorre devido à modificação da geometria de referência da análise ao longo do processo de deformação do corpo) e da não-linearidade de condições de contorno (decorrem de mudanças nas condições de contorno do problema).

Em problemas elastoplásticos, o comportamento tensão-deformação de cada ponto de integração numérica é, por definição, não-linear (Abbo, 1997). A determinação das tensões, ao fim de um incremento de deslocamento, é feita através da integração das relações constitutivas sobre um dado incremento de deformação, que por sua vez, pode ser obtido pela divisão do incremento de deformação total em subincrementos. O tamanho dos incrementos de deformação, que levem a uma solução mais precisa, depende da linearidade local da superfície de fluência e da lei de endurecimento.

Finalmente, a análise do comportamento do solo através da implementação de modelos elastoplásticos e viscoplásticos, utilizando o Critério de Mohr-Coulomb, em um programa de Elementos Finitos, necessita de esquemas de integração numérica devido à não-linearidade dos problemas. Esta integração leva a obtenção do novo estado de tensões devido ao incremento de deformação calculado a cada passo de tempo, através do Método dos Elementos Finitos, ao passo que durante este processo também se determina a variação da superfície de fluência (Simo, 1994).

Os algoritmos de integração numérica utilizados são denominados em explícitos e implícitos, que serão descritos mais adiante. Neste trabalho serão empregados os esquemas explícitos de integração numérica usando os algoritmos de Euler Modificado e Runge-Kutta-Dormand-Price (Sloan *et al*, 2001).

## **1.1– Objetivos**

O presente trabalho tem como objetivo a obtenção de modelos numéricos que satisfaçam a necessidade da determinação de uma solução aproximada, através do cálculo iterativo da relação tensão-deformação em problemas não-lineares, de forma a atender às necessidades do problema dentro dos limites de tolerância compatíveis com os critérios e parâmetros de engenharia adotados.

Através de esquemas explícitos de integração numérica, que atualizam o estado de tensões e deformações e o tamanho da superfície de fluência, para incrementos de tensão e deformação fornecidos num ponto de integração, busca-se chegar ao comportamento mecânico do solo, nos problemas analisados, com maior proximidade da solução exata (comportamento real), verificando então, a eficiência dos modelos numéricos implementados e sua adequação ao critério de plastificação.

Serão analisados os resultados dos problemas usando os dois esquemas diferentes de integração numérica, implementados através da linguagem FORTRAN 77 e utilizando o código CODE\_BRIGTH, *Coupled Deformation Brine Gás and Heat Transport*, (Olivella, et al., 1994; Olivella, et al., 1995; Guimarães, 2002). Serão comparados seguindo os seguintes critérios de análise de resultados:

- Resultados de Pós-Processamento: saídas gráficas de distribuição de tensão, deslocamentos, deformações plásticas, índice de vazios, vetores de deslocamentos, deformação da geometria pela malha de elementos finitos deformada, evolução destes parâmetros com o tempo;
- Comparação com as soluções analíticas disponíveis na literatura e pertinentes aos casos analisados;
- Para cada esquema de integração implementado, e para tolerâncias diferentes, verificar e comparar o Número Total de Subpassos (NTS) ao fim do processo total de análise, e Tempo Total de processamento em CPU requerido pelos esquemas de integração (CPU Time);

Este trabalho busca ainda realizar uma análise do comportamento mecânico de uma estrutura de solo e de metal, através de um modelo visco-elastoplástico usando, para isso, o Modelo de Perzyna ( Perzyna, 1966 apud Cormeu, 1975).

Objetiva-se também comparar os resultados de pós-processamento das análises elastoplástica e visco-elastoplástica, verificando assim a interferência do fenômeno viscoso no processo de análise.

## 1.2-Organização do Texto

Este trabalho está dividido em seis capítulos, onde a descrição do histórico da Teoria da Plasticidade e da Visco-elastoplasticidade é feita no Capítulo 2. Ainda neste capítulo se faz uma breve revisão sobre a cinemática e equilíbrio dos corpos, bem como os fundamentos da plasticidade partindo desde os conceitos básicos como mecanismo do comportamento plástico, lei constitutiva elástica, definição da superfície de fluência, regra de fluxo e lei de endurecimento, até os critérios de plastificação de Mohr Coulomb, para solos, e de Von Mises, para metais. Conceitos sobre plasticidade perfeita e associada também são expostos assim como a determinação da deformação plástica cisalhante.

As definições iniciais de plasticidade nesse capítulo também servem como um embasamento teórico para a introdução dos conceitos da Teoria Visco-elastoplástica, que finalizam esta revisão de teorias constitutivas. Portanto os conceitos sobre a teoria de Perzyna para materiais visco-elastoplásticos vêm descritos e, como será visto, acoplados à teoria da plasticidade, com algumas alterações na regra de fluxo e no conceito de condição de plastificação.

No Capítulo 3 é feita uma abordagem numérica das leis constitutivas, onde se descrevem dois algoritmos explícitos de integração de tensões com controle de erro e suas formas de implementação, sendo estes o Método de Euler Modificado e Runge-Kutta-Dormand-Price (Abbo, 1997). São abordados os métodos de tratamento numéricos das singularidades do critério de Mohr Coulomb, bem como o método de suavização da superfície de fluência, e descrevem-se os gradientes da função de fluência suavizada utilizados neste trabalho. A necessidade de redefinir um novo tensor para a análise visco-elastoplástica leva à implementação de uma matriz tangente visco-elastoplástica, por meio da determinação da matriz gradiente de velocidade de deformação, onde a forma de obtenção dessa matriz tangente é descrita no fim deste capítulo.

A aplicação dos métodos de integração implementados e a comparação entre eles, para ambas as teorias elastoplástica e visco-elastoplástica, são feitas no Capítulo 4. Para isso são descritas as soluções numéricas para três problemas, onde dois consistem em casos de Expansão de Cavidade Cilíndrica, sendo um aplicado usando o critério de Mohr

Coulomb e outro usando o critério de Von Mises, e o terceiro problema consiste na análise de um Talude Vertical Hipotético. Para cada problema são analisados o desempenho e aplicabilidade dos métodos de integração, assim como são discutidos os resultados obtidos e sua comparação com a solução analítica de referência.

Por fim os Capítulos 5 e 6 apresentam, respectivamente, a conclusão e as sugestões para continuidade deste trabalho, e propostas para desenvolvimento de outros trabalhos seguindo a abordagem feita aqui; e as referências bibliográficas utilizadas para o desenvolvimento desta dissertação.

## 2 - CARACTERIZAÇÃO MECÂNICA E RELAÇÕES CONSTITUTIVAS EM MATERIAIS INELÁSTICOS

---

A modelagem matemática da plasticidade e visco-plasticidade tem o objetivo de obter relações tensão-deformação adequadas para a descrição fenomenológica das deformações plásticas, bem como a adoção de critérios de fluência adequados para definir o início do processo de plastificação. Para isso três considerações devem ser observadas (Martins, 2001): as leis constitutivas para o material durante o regime elástico do material; um nível de tensões representativo do limite de escoamento ou estabelecimento de um critério de escoamento (superfície de fluência); as leis constitutivas para o material durante o regime elasto-plástico do material.

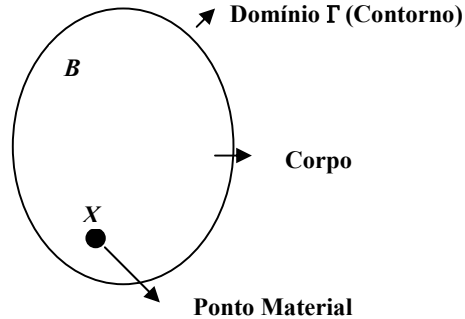
Portanto, alguns conhecimentos básicos da elasticidade e da cinemática dos corpos, bem como o equilíbrio do corpo se torna necessário para os estudos posteriormente enunciados, pois representam o comportamento do material durante o regime elástico. O material é homogêneo e isotrópico, e utiliza-se uma aproximação Lagrangeana (estado deformado obtido em função do estado indeformado do corpo).

Serão caracterizados os conceitos da cinemática e equilíbrio do meio contínuo, que consiste na base para a formulação das teorias matemáticas aplicadas à mecânica dos materiais, bem como as definições e considerações sobre a visco-elastoplasticidade, onde o comportamento mecânico do material é avaliado considerando sua dependência quanto ao tempo.

### 2.1 – Cinemática e Equilíbrio

O movimento de um corpo é caracterizado pela posição das partículas desse no espaço, e sua determinação é obtida a partir de uma configuração de referência  $B$  e fronteira regular  $\Gamma$ , em que um ponto  $X \in B$  é definido como ponto material (Figura 2.1) onde, submetendo o corpo à uma força  $f_t$ , num instante  $t$ , a configuração inicial  $B$  é levada à uma configuração final  $B_t$  e os pontos materiais  $X \in B$  são levados em pontos espaciais  $x \in B_t$ . Logo:

$$\begin{aligned}
 f_t: B &\rightarrow B_t \\
 X &\rightarrow x = f_t(X, t)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$



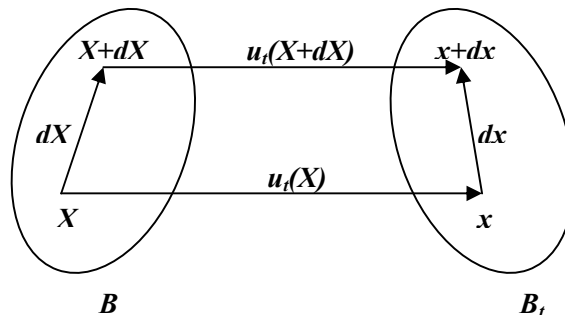
**Figura 2.1 – Esquema de um corpo no espaço: Conceito do Contínuo**

A seqüência de deformações no tempo, através de formulações incrementais definem, portanto, o movimento de um corpo, onde o conceito do contínuo leva a um Jacobiano ( $J$ ) da transformação que exista em qualquer ponto de qualquer configuração ( $J > 0$ ). O movimento pode, então, ser expresso por equações da forma:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(X_1, X_2, X_3, t) = \mathbf{x}_i(X, t)
 \tag{2.2}$$

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{X}_i(x, t)
 \tag{2.3}$$

A descrição do movimento de acordo com a equação (2.2) é definida como Lagrangeana, enquanto que define-se como descrição Euleriana a expressa pela equação (2.3). Um dado elemento  $dX$  da configuração de referência  $B$ , na vizinhança de  $X$ , é deformado para o elemento  $dx$  em  $B_t$  (Figura 2.2).



**Figura 2.2 – Descrição de Movimento**

Os problemas aqui estudados consistem em situações que envolvem pequenas deformações, ou seja, cujas componentes do gradiente de deslocamento são bem menores que 1, onde os tensores de deformações infinitesimais Lagrangeano e Euleriano são definidos, respectivamente, pelas expressões (2.4) e (2.5).

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{X}_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial \mathbf{X}_i} \right) \quad (2.4)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \quad (2.5)$$

Com isso, para deformações infinitesimais os gradientes de deslocamento e os deslocamento são muito pequenos, o que leva à uma diferença desprezível entre as coordenadas espaciais e materiais de uma partícula do meio contínuo. Isso leva à uma igualdade aproximada entre os tensores Lagrangeano e Euleriano, onde as componentes de gradiente material e espacial são praticamente iguais, logo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{X}_j} \approx \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{x}_j} \Rightarrow \mathbf{G} = \mathbf{E} \quad (2.6)$$

Logo, a definição de deformação, mais comumente utilizada na engenharia, e limitada apenas para problemas com pequenos deslocamentos (não é possível utilizar em problemas de não-linearidade e instabilidade geométrica, por exemplo), é obtida pelo *tensor de deformações infinitesimais*  $\boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \mathbf{X}_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial \mathbf{X}_i} \right) \quad (2.7)$$

Ou ainda:



$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (2.8)$$

Na consideração de deformações infinitesimais, um operador tangente  $\mathbf{D}$  pode ser utilizado para estabelecer uma relação linear entre as deformações de um corpo  $\varepsilon$  a um campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$  (Pontes Filho, 1993):

$$\varepsilon = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (2.9)$$

Pode-se chegar à uma relação linear entre as forças aplicadas a um corpo  $\mathbf{F}$ , e os deslocamentos  $\mathbf{u}$  ocorridos em uma série de pontos deste corpo, através da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  da estrutura (que depende apenas da geometria inicial). Esta relação é proveniente da lei constitutiva elástica que será descrita mais adiante neste trabalho. Logo:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\cdot\mathbf{u} \quad (2.10)$$

Ainda é necessário o conceito de tensor de tensões  $\sigma$  que consiste em esforços internos definidos por funcionais lineares e contínuos sobre  $\mathcal{W}$ , onde o conjunto destes funcionais lineares constitui o espaço  $\mathcal{W}'$ , cujos elementos são denominados campos de tensões de Cauchy (Pontes Filho, 1993). Pode-se relacionar as forças de superfície aplicadas em um ponto da fronteira  $\Gamma$  de um corpo, submetido a um estado de tensões  $\sigma$ , com as tensões, por meio da relação:

$$\mathbf{p}_i = \sigma_{ij}\mathbf{n}_j \rightarrow i, j = 1, 2, 3 \quad (2.11)$$

Onde  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à fronteira  $\Gamma$ .

O equilíbrio de um corpo de densidade  $\rho$ , ocupando um volume  $\Omega$ , é alcançado, para um caso quase-estático, se obedecida a equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \mathbf{b}_i = 0 \quad (2.12)$$

ou

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (2.13)$$

Onde  $\mathbf{x}_j$  é o vetor de coordenada de uma partícula qualquer,  $\mathbf{b}_i$  são as forças de massa e  $\text{div}$  é o operador divergente do tensor de tensões.

Como condições de contorno, equação (2.14), são prescritos deslocamentos  $\bar{\mathbf{u}}_i$  na fronteira  $\Gamma_u$  e forças de superfície  $\mathbf{h}_i$  na fronteira  $\Gamma_h$  (Martins, 2001). Então:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i(x, t) &= \bar{\mathbf{u}}_i(x, t) \text{ em } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma}_{ij} \mathbf{n}_j &= \mathbf{h}_i(x, t) \text{ em } \Gamma_h \end{aligned} \quad (2.14)$$

Onde  $t$  é o tempo que, no caso quase-estático, consiste numa variável paramétrica que descreve a configuração atual.

## 2.2 – Relações Constitutivas

A solução de um problema linear pode ser obtida de tal forma que as equações de equilíbrio e compatibilidade são verificadas, na configuração final. Mas, como já visto, na engenharia a grande parte dos problemas devem ser analisados pela consideração de não-linearidade material, onde a solução destes problemas é mais complexa do que para casos lineares, onde para problemas não-lineares a solução nem sempre é única, ao contrário dos problemas lineares.

Como as características tensão-deformação dos materiais reais são muito complexas e susceptíveis a interferência de fatores como tempo, temperatura e condições ambientais, bem como por condições de carregamento (estático, dinâmico, etc), então diferentes modelos foram e devem ser idealizados para cada material levando a formulação de equações que descrevam estes modelos.

Logo, as soluções para problemas não-lineares, em geral aproximadas, levam à obtenção da relação entre tensões e deformações, cuja definição é empregada em

simulações numéricas, e ao conjunto destas relações matemáticas, ou equações constitutivas, dá-se o nome de Relações Constitutivas.

As relações constitutivas são baseadas em duas categorias de modelos:

- Modelos independentes do tempo: elasticidade e plasticidade;
- Modelos dependentes do tempo: visco-elasticidade e visco-plasticidade.

Os itens a seguir tratarão sobre estas relações e sua formulação básica para solução de problemas elastoplásticos e visco-elastoplásticos, levando assim a uma base teórica consistente para o emprego de simulações numéricas, através dos devidos esquemas de integração de tensões.

### **2.2.1 – Fundamentos da Teoria da Plasticidade**

Um breve histórico será apresentado a seguir de forma a elucidar praticamente todo o processo de criação e desenvolvimento da Teoria da Plasticidade, considerando seus fundamentos até a sua aplicação via modelagem numérica dos dias atuais.

Portanto, a princípio observa-se que a Teoria da Plasticidade está fundamentada nos trabalhos de Tresca apud Abbo (1997), onde problemas de perfuração e extrusão levaram ao desenvolvimento do seu critério de escoamento. Mas foram observados trabalhos de Coulomb, aproximadamente em 1773, nos quais foram propostos: um critério de fluência, a definição de ruptura em um plano e sua aplicação no estudo de pressões de terra e muros de arrimo (Abbo, 1997). Um novo critério de fluência aplicado a estudos de metais e a introdução do conceito e associação, com a superfície de fluência, da direção de deformação plástica foram enunciados por Von Mises em 1913.

Os trabalhos de Mohr, que descreviam o limite de comportamento elástico e que esses limites eram governados pela combinação entre tensões normais e cisalhantes. Trabalhos como os de Hill (1950) e Mendelson (1968) trouxeram um importante incremento na história da teoria da plasticidade ao apresentarem soluções para vários problemas clássicos. Uma abrangência maior sobre a teoria da plasticidade pode, ainda, ser encontrada nos trabalhos de Prager (1959), Hodge (1959), Martin (1975), Johnson e Mellor (1983), entre outros.

A aplicação da Teoria da Plasticidade com sua formulação via Método dos Elementos Finitos teve início em estudos desenvolvidos por Marçal e King (1967) apud Abbo (1997). Estes trabalhos serviram como referência para posteriores estudos como os feitos por Zienkiewicz que desenvolveu as relações governantes da elastoplasticidade mais adequadas para o acoplamento com elementos finitos. A teoria da plasticidade aliada ao método dos elementos finitos pode ser ainda encontrada enunciada nos trabalhos de Hinton e Owen (1977), Samuelson e Fröier (1979), Bathe (1996), Simo e Hughes (1998), Potts e Zdravković (1999), Prat e Gens (2003), entre outros. Códigos para solução de problemas envolvendo elastoplasticidade, com solução via método dos elementos finitos, e exemplos solucionados podem ser vistos em diversos trabalhos, dentre os quais o de Smith e Griffiths (1998), Sloan (1989), Sloan et al. (2001).

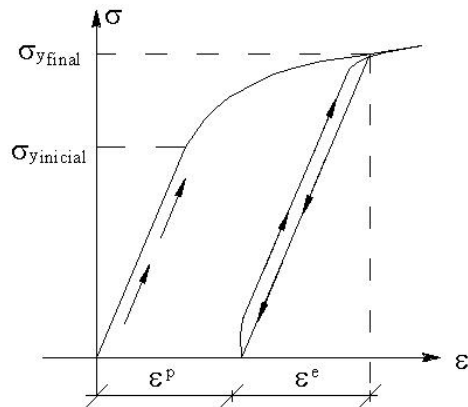
Visto então todo o histórico acima descrito passa-se a definição da Teoria da Plasticidade que consiste em um estudo formulado para a análise do comportamento mecânico de um material.

Quando submetido a solicitações externas um material pode sofrer deformações reversíveis seguidas de deformações plásticas, daí este ser caracterizado por um comportamento elastoplástico. Em geral este comportamento é modelado de forma incremental, onde a carga total é aplicada em sub-passos aliada a uma variável de tempo  $t$  que descreve o regime de carga e deslocamento do material.

Em uma análise elastoplástica, há a necessidade do emprego de conceitos do modelo elástico, além das definições da teoria da plasticidade. Consideram-se, ainda, uma série de hipóteses básicas na formulação dessa teoria, sendo essas:

- Decomposição Aditiva da Deformação;
- Caracterização elástica do modelo;
- Características plásticas do modelo: região das Tensões Plasticamente Admissíveis;
- Evolução da Deformação Plástica;
- Condições de Complementaridade e Condições de Consistência.

O entendimento do comportamento elastoplástico do material pode ser obtido analisando a Figura (2.3), que mostra o comportamento tensão-deformação elastoplástico de um problema unidimensional.



**Figura 2.3 – Ciclo Carga-Descarga**

O material se comporta elasticamente enquanto a tensão não exceder o valor de limite elástico ( $\sigma_{y\text{inicial}}$ ). Não cessando o carregamento, a tensão supera este limite e o regime elástico não ocorre, onde ao descarregar-se o material, a deformação não será totalmente recuperada, ou seja, existirá uma parcela de deformação residual ou plástica ( $\epsilon^p$ ). A continuidade do ciclo repetirá o comportamento descrito, resultando em parcelas de deformação elástica e num aumento de deformação plástica.

Com base nos conceitos anteriormente enunciados, pode-se então, definir a primeira das hipóteses básicas da formulação da Teoria Plástica, ou seja, o Princípio da Decomposição Aditiva da Deformação. Este princípio consiste basicamente na teoria de que a deformação total ( $\epsilon$ ) de um certo material, submetido a um estado de tensões qualquer que exceda o limite elástico, é decomposta em uma parte elástica ( $\epsilon^e$ ) e outra parte plástica ( $\epsilon^p$ ). Logo:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \rightarrow d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (2.15)$$

A parcela elástica é determinada pela teoria elástica, que se inclui na segunda hipótese básica da teoria da plasticidade que será descrita no item seguinte, onde ainda neste capítulo as demais hipóteses serão estudadas uma a uma com maior detalhamento por meio dos conceitos básicos da teoria de plasticidade, e ainda o critério de plastificação de Mohr-Coulomb.

### 2.2.1.1 – Equação Constitutiva Elástica

Como já visto a elasticidade linear independe do tempo e da história de carregamento, e considera que todas as mudanças de deformação em função de variações do estado tensional são instantâneas e o sistema é completamente reversível, ou seja, a energia absorvida é totalmente recuperada no processo de descarregamento.

A deformação elástica pode ser definida por meio do princípio da decomposição aditiva, descrita no item seguinte, que decompõe a deformação total em uma parcela elástica e outra plástica (cuja determinação será descrita no item 2.2.1.4 deste trabalho). Logo:

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.16)$$

Onde:

$\varepsilon_{ij}^e \rightarrow$  Parcela elástica das deformações totais;

$\varepsilon_{ij}^p \rightarrow$  Parcela plástica das deformações totais.

A equação constitutiva para um sólido elástico linear, relaciona as tensões totais com as deformações elásticas através de um tensor elástico constitutivo de quarta ordem  $\mathbf{D}_{ijkl}$ . Então:

$$\sigma_{ij} = \mathbf{D}_{ijkl} \cdot \varepsilon_{ij} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2.17)$$

Este tensor elástico possui, em sua forma mais geral, 81 elementos, pois, relaciona nove componentes de tensão com nove componentes de deformação. Considerando a simetria dos tensores de tensão e deformação, os elementos do tensor elástico são reduzidos a 36. Se existe uma função de energia de deformação, então ocorre a simetria do tensor, isto é, o tensor passa ser constituído por 21 elementos. Logo:

$$\mathbf{D}_{km} = \mathbf{D}_{mk} \quad k, m = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (2.18)$$

Para a consideração de que o meio elástico é isotrópico e homogêneo, a forma explícita do tensor elástico é definida em função das constantes  $\lambda$  e  $\mu$  (Equação 2.19), chamadas de constantes de Lamé. A forma matricial do tensor é a descrita na equação (2.21).

$$\mathbf{D}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (2.19)$$

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{se } a=b \\ 0, & \text{se } a \neq b \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & \text{simet.} & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

De forma inversa, pode-se determinar as deformações em função das tensões, utilizando o tensor elástico inverso  $\mathbf{C}$ . Logo:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ij} \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2.22)$$

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \frac{1}{2\mu} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (2.23)$$

As constantes de Lamé  $\lambda$  e  $\mu$  são definidas em termos do coeficiente de Poisson e do Módulo de Young, ou seja:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.24)$$

e

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.25)$$

Por fim, em notação científica, a relação elástica passa a ser definida por:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \cdot \varepsilon_{ij}^e + \lambda \cdot \varepsilon_{kk}^e \cdot \delta_{ij} \quad (2.26)$$

Deve ainda haver a consideração do Estado Plano de Deformação, em que considera os deslocamentos normais em uma das direções do problema (direção longitudinal) como nulos, devido ao fato de que o modelo seja usado para representar o comportamento de estruturas de grande comprimento. As considerações para esta situação resumem-se a:

$$u_1 = u_1(x, y) \quad (2.27)$$

$$u_2 = u_2(x, y) \quad (2.28)$$

$$u_3 = 0 \quad (2.29)$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0 \quad (2.30)$$

A tensão normal  $\sigma_{33}$  é não nula e seu valor, na equação de equilíbrio de tensões, pode ser determinado a partir do valor das outras componentes de deformação. Portanto, para o estado plano de deformação, a relação constitutiva entre tensão e deformação é definida, na forma matricial, por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

### 2.2.1.2 – Função e Superfície de Fluência

Para um material, em um determinado tempo  $t$ , não é possível definir as tensões totais apenas em função das respectivas deformações totais, sendo mais conveniente, então, modelar as tensões também em função da história de tensões e deformações do material. A história de tensões e deformações do material é introduzida implicitamente por parâmetros de estado  $\kappa$ , definidos por uma lei específica (Gomes, 2001).



Na Teoria da Plasticidade o limite elástico é definido por uma região denominada de domínio elástico ( $E_\sigma$ ), onde existe uma função de fluência ( $F_\sigma$ ) que restringe o conjunto  $\{\sigma_{ij}, \kappa\}$  a este domínio (Martins, 2001). Em outras palavras, a função de fluência delimita uma região fechada, num espaço hexadimensional, através de uma superfície de fluência ( $\partial E_\sigma$ ) que separa, no espaço de tensões, as combinações de tensões que descrevem os comportamentos plásticos ou elásticos. Logo a função de fluência pode ser definida como:

$$F(\sigma, \kappa) = \phi(\sigma) - \sigma_f(\kappa) \quad (2.32)$$

Onde:

$$\sigma_f(\kappa) = \sigma_e + h.\kappa \quad (2.33)$$

$\phi(\sigma) \geq 0 \rightarrow$  tensão uniaxial equivalente;

$h \rightarrow$  parâmetro de endurecimento.

O critério de plastificação não permite que o estado de tensões ( $\sigma_{ij}, \kappa$ ) assumam valores fora do espaço de tensões admissíveis, ou seja:

$$F(\sigma, \kappa) \leq 0 \quad (2.34)$$

Onde, as expressões do domínio elástico inicial, domínio elástico, superfície de fluência e espaço de tensões admissíveis são definidas, respectivamente, por:

$$E_\omega^0 = \{\sigma / F(\sigma, \kappa) < 0\} \rightarrow \kappa = 0 \quad (2.35)$$

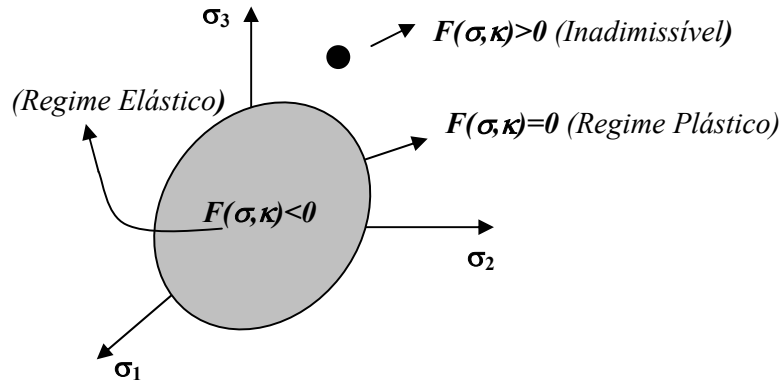
$$E_\sigma^e = \{\sigma / F(\sigma, \kappa) < 0\} \quad (2.36)$$

$$\partial E_\sigma = \{\sigma / F(\sigma, \kappa) = 0\} \quad (2.37)$$

$$E_\sigma = E_\sigma^e \cup \partial E_\sigma = \{\sigma / F(\sigma, \kappa) \leq 0\} \quad (2.38)$$

Portanto, se a função de fluência é menor do que zero, então não ocorrem deformações plásticas, pois o regime é elástico, e se a função é igual a zero então existe um

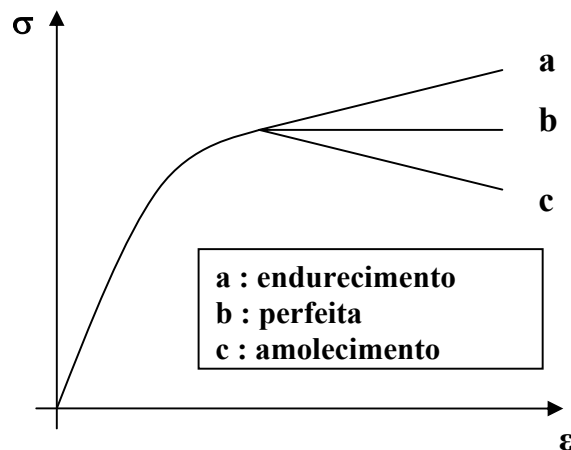
fluxo plástico. Caso a função de fluência exceda a zero, então o estado de tensões não será permitido, pois estará na região das tensões plasticamente inadmissíveis. Isto pode ser observado na figura (2.4).



**Figura 2.4 – Critério de Plastificação – Espaço de Tensões Admissíveis**

É importante observar que em materiais endurecíveis, o carregamento pode exceder o limite elástico, chegando à superfície de fluência, o que leva a ocorrência de deformações plásticas ou, se exceder o limite elástico, tende a um estado de tensões inadmissíveis (Lourenço, 1999).

Um material pode ter diferentes comportamentos (Figura 2.5) em função do parâmetro de endurecimento  $h$ , que determina no espaço de tensões a expansão ou contração do domínio elástico  $E_\sigma$ , com o aumento do parâmetro de estado  $\kappa$ .



**Figura 2.5 – Tipos de Comportamento de Material Elastoplástico**

Neste trabalho, será adotado o comportamento de plasticidade perfeita para os materiais dos problemas modelados, ou seja, não serão considerados os fenômenos de endurecimento e amolecimento e, conseqüentemente, não haverá variação da superfície de fluência.

### 2.2.1.3 – Regra de Fluxo

A regra de fluxo consiste em uma equação evolutiva, que relaciona incrementos de deformação com gradientes de uma função do potencial de plastificação  $P$ , que define a direção do incremento de deformação. Considera-se implicitamente que, em casos uniaxiais, o local de ocorrência das deformações plásticas tem a mesma direção que as tensões aplicadas, entretanto, há uma maior complicação dessa situação para um caso multiaxial que envolve seis componentes de tensão e de deformação (Potts e Zdravković, 1999).

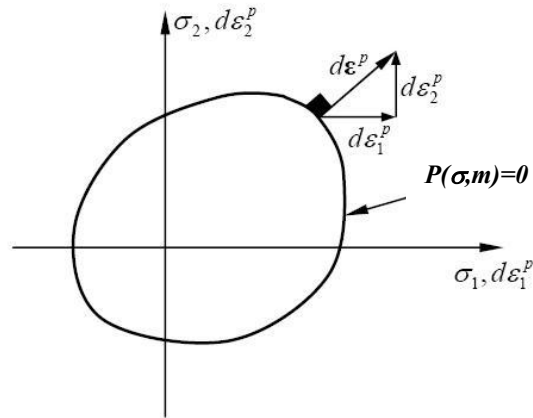
Por isso há a necessidade da consideração da função de potencial plástico, que é função das tensões e de um vetor de parâmetros de estado  $m$ , e de um multiplicador escalar  $\Lambda$ , que aplicados à regra de fluxo resulta em uma relação entre as diferentes componentes de deformação incremental plástica. Portanto, a regra de Fluxo é caracterizada pela seguinte expressão:

$$\dot{\epsilon}^p = \Lambda \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, m)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.39)$$

Onde  $\dot{\epsilon}^p$  é a taxa de deformação plástica, e o potencial plástico é definido por:

$$P(\boldsymbol{\sigma}, m) = 0 \quad (2.40)$$

A direção da deformação plástica é paralela à direção do gradiente de potencial plástico, logo sua direção é definida pelo vetor normal à superfície  $P=constante$  (Gens e Prat, 2003). Considera-se que os eixos de tensões acumuladas e de incremento de deformações plástica coincidem, por isso expressam-se as duas componentes em um mesmo eixo. Isto pode ser verificado pelo esquema da figura (2.6).



**Figura 2.6 – Representação do Potencial Plástico e dos Vetores de Deformação Plástica (Sousa, 2004).**

Quando a superfície de fluência e a superfície de potencial plástico coincidem, então a plasticidade é dita associada (Equação 2.41), e o caso contrário caracteriza a plasticidade não-associada.

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = P(\boldsymbol{\sigma}, m) \quad (2.41)$$

No caso de plasticidade associada, o parâmetro  $\lambda$  também definido como parâmetro de consistência ou multiplicador plástico, juntamente com a função de fluência definem as condições de complementaridade e de consistência (persistência) de Kuhn-Tucker, onde:

$$\dot{\lambda} \geq 0; F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) \leq 0 \rightarrow \dot{\lambda} F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 \quad (2.42)$$

(Condições de Complementaridade)

$$\dot{\lambda} \dot{F}(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 \quad (2.43)$$

(Condições de Consistência)

As condições de complementaridade e de consistência são uma forma adicional de obter, através de operações algébricas adicionais, o multiplicador plástico  $\lambda$ .

### 2.2.1.4 – Lei de Endurecimento

Com o início da plastificação, poderá ocorrer um aumento (*endurecimento* /“*hardening*”) ou diminuição (*amolecimento*/“*softening*”) do nível de tensões que define o critério de fluência do material. Isso ocorre devido às deformações plásticas e a superfície sofre variações de forma e posição, ou seja, é a Lei de Endurecimento que regula este fenômeno.

Então, para controlar a variação do tamanho, forma ou posição da superfície de fluência devem ser definidos os parâmetros de endurecimento  $h$ , que por sua vez são funções da deformação plástica acumulada. Logo:

$$h = h(\varepsilon^p) \quad (2.44)$$

Para uma situação de solitação multi-axial as leis de endurecimento e amolecimento são expressas pela variação do tamanho da superfície de fluência com relação as componentes (ou invariantes) de deformação plástica acumulada, ou com relação ao incremento de trabalho plástico  $W^p$ .

Onde:

$$W^p = \int \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \{\Delta\varepsilon^p\} \quad (2.45)$$

Para a consideração do comportamento de plasticidade perfeita, a superfície de fluência não sofrerá alteração em sua forma, tamanho e posição. Entretanto, no caso de endurecimento isotrópico, como já visto, a superfície poderá sofrer uma expansão (endurecimento) ou retração (amolecimento), enquanto que na situação do endurecimento cinemático, a superfície de fluência é apenas deslocada sem sofrer variação de forma ou tamanho, ou seja, é transladada na direção do fluxo plástico.

### 2.2.1.5 – Tensor Elastoplástico

Definida a função de fluência, verificamos que quando  $F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) < 0$ , o material comporta-se elasticamente e é analisado pela relação entre os vetores de componentes de tensões (equação 2.46) e de deformações (equação 2.47), através do tensor elástico  $\mathbf{D}_e$ .

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \right\}^T \quad (2.46)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right\}^T \quad (2.47)$$

Já quando  $F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0$ , ocorrem as deformações plásticas e, como já visto, é considerada a existência do parâmetro plástico ( $\kappa \neq 0$ ). A derivada da função de fluência com relação ao tempo é definida por:

$$\dot{F} = \left( \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left( \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \kappa} \right)^T \dot{\kappa} = 0 \quad (2.48)$$

Então, para determinar as tensões em função das deformações para um comportamento elastoplástico considera-se a relação constitutiva que utiliza um tensor elastoplástico  $\mathbf{D}_{ep}$ . Logo:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_{ep} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.49)$$

Onde:

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \mathbf{D}_p \quad (2.50)$$

Logo, deve-se definir o tensor elastoplástico onde, para isso, utilizam-se duas considerações da teoria elastoplástica. Primeiramente toma-se o princípio da decomposição aditiva na forma de taxa (variação com o tempo):

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (2.51)$$

Tomando-se a relação constitutiva elástica (2.17) e aplicando a equação (2.51) temos:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \mathbf{D}_e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) \quad (2.52)$$

A segunda consideração é a regra de Fluxo que define a direção da taxa de deformação plástica pela equação (2.39). Substituindo, então, esta equação da regra de Fluxo na equação (2.52), temos:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \mathbf{D}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \Lambda \mathbf{D}_e \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, m)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.53)$$

Verifica-se então que é necessário obter o multiplicador plástico  $\Lambda$ , o que pode ser feito através da combinação da equação (2.53) com um rearranjo da equação (2.48) definido por:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = - \frac{\left\{ \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \kappa} \right\}^T \cdot \dot{\kappa}}{\left\{ \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T} \quad (2.54)$$

Logo, o multiplicador plástico será determinado pela expressão:

$$\Lambda = - \frac{\left\{ \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_e \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\left\{ \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot \left\{ \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} + A} \quad (2.55)$$

Onde:

$$A = - \frac{1}{\Lambda} \left\{ \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, m)}{\partial \kappa} \right\}^T \cdot \dot{\kappa} \quad (2.56)$$

O parâmetro  $A$  dependerá do tipo de plasticidade considerada, e no caso de plasticidade perfeita este parâmetro será nulo ( $A=0$ ), pois os parâmetros de estado  $\kappa$  não

sofrem variação. Quando se considera plasticidade com endurecimento ou amolecimento haverá uma variação dos parâmetros de estado  $\kappa$  com relação as deformações plásticas acumuladas. Com isso a equação (2.56) assume a forma:

$$A = -\frac{1}{\Lambda} \left\{ \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, m)}{\partial \kappa} \right\}^T \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (2.57)$$

Em geral os modelos de endurecimento e amolecimento adotam uma relação linear entre os parâmetros de estado  $\kappa$  e as deformações plásticas  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  (Potts e Zdravković, 1999). Isto leva a independência, quanto a deformação plástica, do termo de derivação dos parâmetros de estado, pois esse se torna constante e a variável  $\Lambda$  é cancelada, o que permite a determinação do parâmetro  $A$ . No caso de uma relação não-linear entre  $\kappa$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , não é possível obter o tensor elastoplástico, pois o multiplicador plástico não é cancelado e  $A$  se torna indeterminado.

Aplicando a equação (2.55) à equação (2.53) obtém-se o tensor elastoplástico  $\mathbf{D}_{ep}$ :

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \cdot \left\{ \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \mathbf{D}_e}{\left\{ \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot \left\{ \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} + A} \quad (2.58)$$

### 2.2.1.6 – Critério de Plastificação de Mohr-Coulomb

O critério de plastificação de Mohr-Coulomb consiste em um modelo, com regra de fluxo associada ou não-associada, em que suas leis constitutivas são utilizadas para o estudo do comportamento de solos, e também tem uma grande importância que consiste no fato de que todos os seus parâmetros têm significados físicos diretos e podem ser medidos através de testes ou ensaios convencionais.

Neste critério a tensão tangencial máxima resistida depende do próprio estado tensional no ponto, e a envoltória de ruptura definida neste modelo, em termos de tensões



efetivas (por exemplo), é caracterizada pelos parâmetros de coesão  $c$  e ângulo de atrito interno  $\phi$ , e é tangente aos círculos de Mohr.

A forma mais simples deste critério é expressa como função das tensões normais efetivas  $\sigma'$  e tangenciais  $\tau$  sobre o plano de ruptura. Logo, o critério caracteriza a fluência do material através da tensão tangencial (cisalhante), cuja expressão é:

$$\tau = c' + \sigma' \tan \phi' \quad (2.59)$$

Onde:

$c'$ : coesão efetiva;

$\phi'$ : ângulo de atrito efetivo.

O critério de Mohr Coulomb escrito em termos das tensões efetivas principais maior e menor,  $\sigma_1'$  e  $\sigma_3'$  respectivamente, leva a uma nova forma da equação da envoltória de ruptura:

$$\sigma_1' - \sigma_3' = 2c' \cos(\phi') + (\sigma_1' + \sigma_3') \sin(\phi') \quad (2.60)$$

A expressão (2.60) consiste no critério de plastificação de Mohr Coulomb, cuja função de fluência é definida a partir desta expressão, assumindo então, a forma seguinte:

$$F(\sigma', \kappa) = \sigma_1' - \sigma_3' - 2c' \cos(\phi') - (\sigma_1' + \sigma_3') \sin(\phi') \quad (2.61)$$

Neste trabalho, o critério de Mohr Coulomb será aplicado em análises com a consideração de problemas de plasticidade isotrópica e perfeita, utilizando para isso conceitos de regra de fluxo. Por conveniência computacional, para plasticidade isotrópica, a função de fluência deste critério será definida em termos de três invariantes de tensão resultantes da combinação das tensões principais, onde se reduz o número de variáveis de seis para três.

Logo, a tensão média efetiva  $p$ , a tensão desviadora  $J$  e o ângulo de Lode  $\theta$ , são os três invariantes considerados no critério de Mohr Coulomb. Os invariantes de tensão para a plasticidade são obtidos a partir dos invariantes de tensão e deformação para modelos elásticos, e são definidos por:

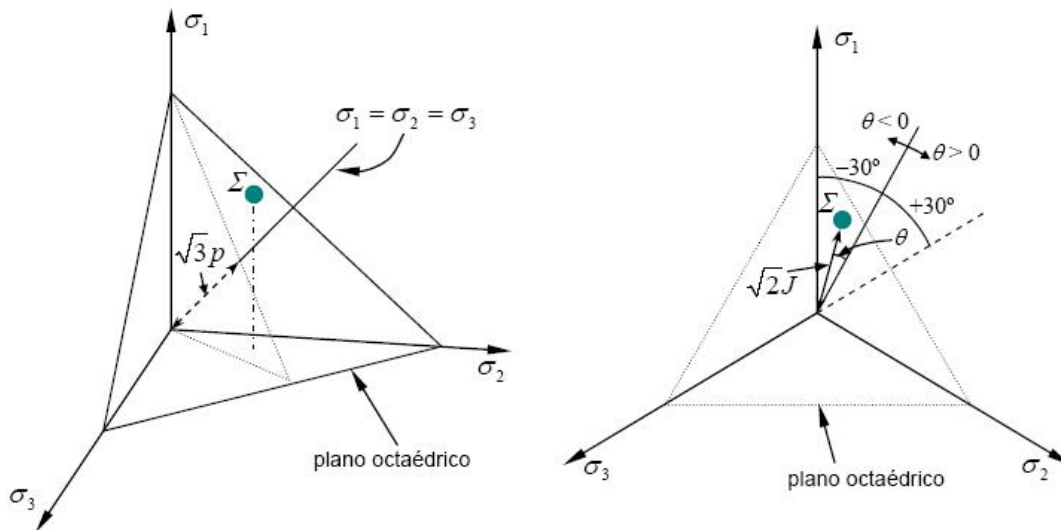
$$p = \frac{I_1}{3} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2.62)$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.63)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \right] \quad (2.64)$$

A interpretação destes invariantes pode ser feita tomando-se um espaço de tensões principais e um plano octaédrico (normal ao eixo de compressão hidrostática, onde  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ), e um estado tensorial definido por um ponto  $\Sigma = (\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$ . Isto pode ser observado na figura (2.7).

O invariante  $p$  define a distância entre a origem de coordenadas do espaço de tensões ao plano octaédrico, ao longo do eixo de compressão hidrostática, através da forma  $\sqrt{3} \cdot p$ . Já a distância do ponto  $\Sigma$ , situado no plano octaédrico, ao eixo de compressão hidrostática, sobre o próprio plano octaédrico, é definida pelo segundo invariante através da forma  $\sqrt{2} \cdot J$ .



**Figura 2.7 – Espaço de Tensões Principais: definição dos invariantes (Prat e Gens, 2003).**

O ângulo de Lode é o ângulo definido entre a reta que liga o ponto  $\Sigma$  à origem e o eixo de compressão hidrostática, onde  $\theta = 0$ . Esse pode assumir valores no intervalo  $[-30^\circ; 30^\circ]$ , onde ao considerar um estado de tensões tal que  $\sigma_1' > \sigma_2' > \sigma_3'$ , chega-se as seguintes situações:

$$\begin{aligned}\sigma_1' = \sigma_2' &\Rightarrow \theta = +30^\circ \\ \sigma_3' = \sigma_2' &\Rightarrow \theta = -30^\circ \\ \sigma_2' = \frac{\sigma_1' + \sigma_3'}{2} &\Rightarrow \theta = 0^\circ\end{aligned}\tag{2.65}$$

Portanto, para o caso de isotropia, a superfície de fluência independe do sistema de referência e será definida em função dos invariantes:

$$F(\boldsymbol{\sigma}') = F(p, J, \theta)\tag{2.66}$$

Com isso, a função de fluência do critério de Mohr Coulomb escrita em função dos três invariantes descritos anteriormente, é definida por:

$$F(\boldsymbol{\sigma}', \kappa) = J - \left( \frac{c'}{\tan(\phi')} + p' \right) g(\theta) = 0 = J - (-p' + a)g(\theta)\tag{2.67}$$

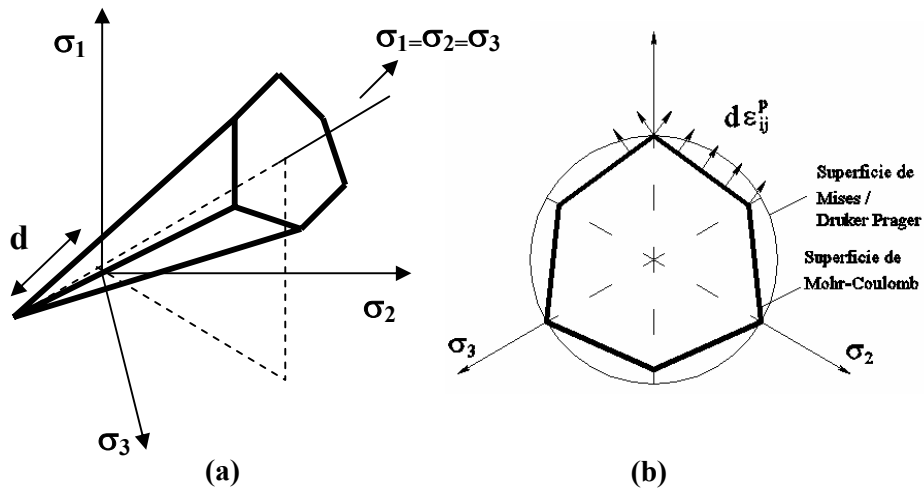
Onde:

$$g(\theta) = \frac{\text{sen}(\phi')}{\cos(\theta) + \frac{\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi')}{\sqrt{3}}}\tag{2.68}$$

$$a = \frac{c'}{g(\theta)}\tag{2.69}$$

A superfície de fluência é, então, representada por um sólido formado por 6 tetraedros, cada um correspondendo às possíveis seis combinações entre as tensões. Este sólido consiste em uma pirâmide de base hexagonal irregular (Figura 2.8a), cuja distância do vértice da pirâmide à origem do espaço de tensões é:

$$d = \sqrt{3}.c'.\cot \phi'\tag{2.70}$$



**Figura 2.8 – Superfície de Fluência de Mohr Coulomb: (a) representação no espaço das tensões principais; (b) plano octaédrico e direção de deformação plástica.**

As arestas da superfície de Mohr Coulomb representam pontos de singularidade no cálculo do vetor de fluxo plástico (Martins, 2001), e isso se deve ao fato de que a direção deste vetor ser indeterminada nas arestas localizadas em  $\theta = \pm 30^\circ$ . No critério de Mohr Coulomb, o fato de neste caso haver uma descontinuidade do seu gradiente, leva a situação de problemas numéricos na implementação em programas que utilizam o método dos elementos finitos. O tratamento adotado para este problema será apresentado no item 3.3.2 deste trabalho.

O vetor de incremento de deformação plástica ( $\Delta \varepsilon^p$ ) indica a direção negativa destas deformações, decorrente da tensão de tração, onde este vetor forma um ângulo  $\phi'$  com a vertical e resulta na ocorrência de uma deformação plástica volumétrica com dilatação. No presente trabalho adota-se uma função de potencial plástico  $P = (\sigma', m)$  que, como já visto anteriormente, na plasticidade perfeita é igual à função de fluência deste critério  $F = (\sigma', \kappa)$ , onde o ângulo de dilatação  $\nu$  é igual ao ângulo de atrito interno  $\phi'$ .

A função de potencial plástico é definida em função dos parâmetros  $p_c'$ ,  $J_c$  e  $\theta_c$ , que são os invariantes de tensão para o estado de tensão atual.

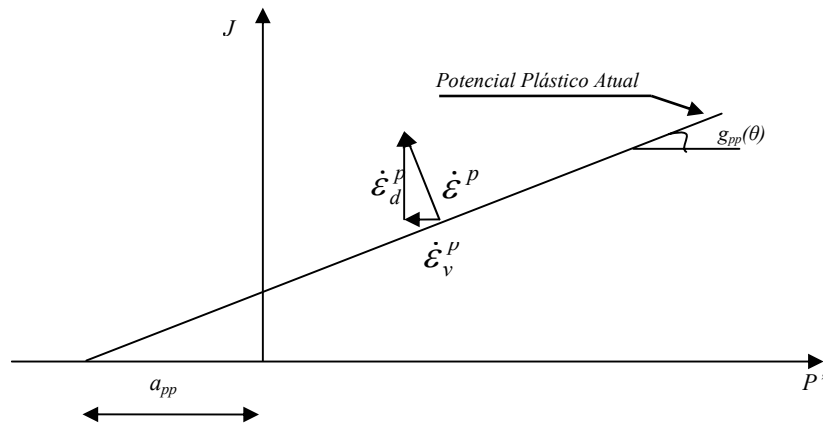
$$P(\boldsymbol{\sigma}', m) = J - \left[ \left( \frac{c'}{\tan(\phi')} + p'_c \right) \frac{g(\theta_c)}{g_{pp}(\theta_c)} - p'_c + p' \right] g_{pp}(\theta) = 0$$

$$g_{pp}(\theta) = \frac{\text{sen}(\nu)}{\cos(\theta) + \frac{\text{sen}(\theta) \cdot \text{sen}(\nu)}{\sqrt{3}}} \quad (2.71)$$

Portanto, para situações em que  $\phi' = \nu$  ocorre uma condição associada ( $F=P$ ). O incremento de deformação plástica pode ser decomposto em duas componentes (figura 2.9), onde a primeira é o incremento de deformação plástica volumétrica  $\dot{\epsilon}_v^P$  que é definido em função da dilatância e apresenta aumento de volume (sinal negativo) no seu comportamento dilatante. A outra componente é o incremento de deformação plástica cisalhante  $\dot{\epsilon}_d^P$  que consiste na parte desviadora da deformação plástica.

$$\dot{\epsilon}_v^P = \dot{\epsilon}_1^P + \dot{\epsilon}_2^P + \dot{\epsilon}_3^P = -2 \cdot \Lambda \cdot (1 - \text{sen}(\nu))$$

$$\dot{\epsilon}_d^P = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_1^P - \dot{\epsilon}_v^P) = \Lambda \quad (2.72)$$

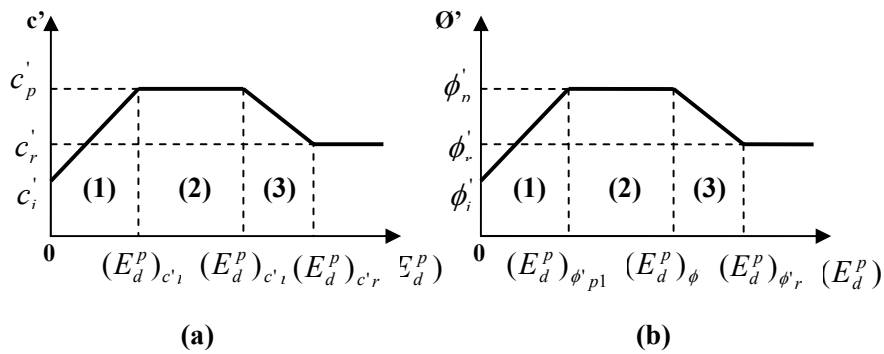


**Figura 2.9 – Vetor de Deformações Plásticas e suas componentes**

No critério de Mohr-Coulomb é utilizado um modelo que relaciona linearmente a variação dos parâmetros de resistência do solo (coesão, ângulo de atrito interno e ângulo de dilatância) com as deformações plásticas desviadoras acumuladas  $E_d^P$ . Esta relação é

apresentada nos planos  $c'-(E_d^p)_c$  e  $\phi'-(E_d^p)_\phi$ , figuras (2.10a) e (2.10b) respectivamente, e dividida em três regiões definidas em função do tipo de plasticidade

Neste trabalho, como utiliza-se plasticidade associada e perfeita, o comportamento do material quanto à variação do  $E_d^p$  com os parâmetros de resistência, a ser considerado é o representado na região 2. Nesta os parâmetros de resistência não variam com o aumento do  $E_d^p$ , permanecendo assim os valores constantes.



**Figura 2.10 – Lei de Endurecimento e Amolecimento:(a) relação  $c'-E_d^p$ ;**

**(b) relação  $\phi'-E_d^p$ .**

Logo:

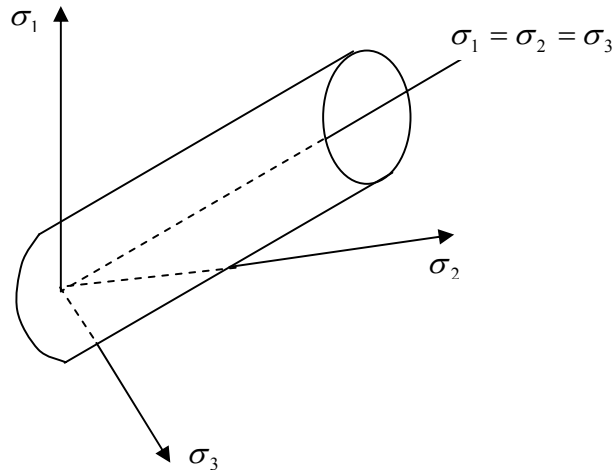
$$\frac{\partial \phi'}{\partial E_d^p} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial c'}{\partial E_d^p} = 0 \quad (2.73)$$

### 2.2.1.7 – Critério de Plastificação de Von Mises

O critério de von Mises é um modelo de plasticidade associada e independe do terceiro invariante (ângulo de Lode). Como este modelo é aplicado a metais, e sabendo que na plasticidade de metais a superfície de fluência é independente da tensão média  $p$ , então se chega a forma da função de fluência para este modelo:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = J - \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \quad (2.74)$$

A parcela  $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y$  representa o raio da superfície de fluência e  $\sigma_y$  é a tensão de fluência. A superfície de fluência de Von Mises tem a forma de um cilindro circular no espaço de tensões principais (Figura 2.11).



**Figura 2.11 – Superfície de fluência de Von Mises**

A deformação plástica ocorre no sentido normal à superfície de fluência e no sentido do espaço de tensões inadmissíveis (Figura 2.12). A taxa de deformação plástica neste modelo é definida por:

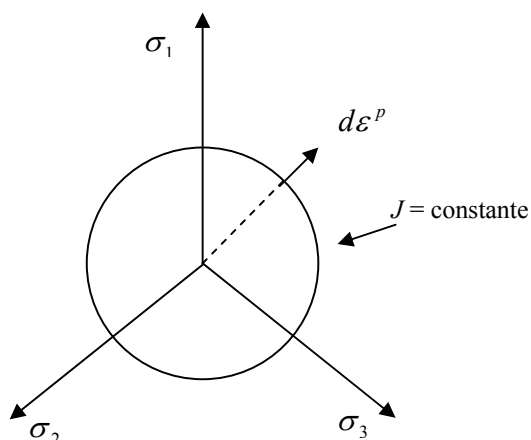
$$\dot{\epsilon}^P = \dot{\lambda} \frac{J}{\|J\|} = \dot{\lambda} n \quad (2.75)$$

Para este modelo o tensor constitutivo elastoplástico é descrito como:

$$\mathbf{D}^{ep} = k\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad \text{com } \dot{\lambda} > 0 \quad (2.76)$$

O tensor  $\mathbf{I}$  é unitário de quarta ordem e  $\mathbf{1}$  é o tensor unitário simétrico de segunda ordem. O parâmetro  $k$  é definido como módulo de deformação volumétrica e é definido em função das constantes de Lamé  $\lambda$  e  $\mu$ , como descrito a seguir:

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu > 0 \quad (2.77)$$



**Figura 2.12 – Direção de incremento de deformação plástica do critério de Von Mises**

## 2.2.2 – Fundamentos Teóricos da Visco-elastoplasticidade

Alguns problemas da engenharia podem ser analisados considerando apenas teorias que consideram o comportamento mecânico independente do tempo, onde as teorias da elasticidade e da plasticidade correspondem a essas características. Mas, existem alguns casos em que as propriedades dos solos que dependem do tempo, ou seja, as propriedades viscosas, tornam-se de indispensável consideração na análise de certos problemas, onde isto pode ser feito utilizando teorias viscoelásticas ou visco-elastoplásticas.

Na mecânica dos sólidos há, então, a consideração de materiais cujo comportamento mecânico é dependente do tempo. Estes materiais podem ser definidos como viscoplásticos e são caracterizados por ter seu estado tensional dependente da taxa de deformação, onde permitem uma modelagem dos efeitos da taxa de tempo no processo de deformação plástica. Portanto, após a fluência inicial do material, o fluxo plástico e as tensões e deformações resultantes são dependentes do tempo, e este comportamento ocorre em uma série de fenômenos, entre os quais o creep e relaxação (Karaoulanis, 2003).

Segundo Heeres (2001), seguindo os trabalhos, desenvolvidos em metais, de Lüders e Portevin-Le Chatelier bem como os trabalhos de Desai e Zhang (1987), Critescu (1994), Samtani et al (1996) e Critescu e Cazacu (2000), que apresentavam estudos de relaxação e creep em geomateriais, foram desenvolvidos diversos outros trabalhos com modelos de



materiais viscoplasticos. Mas o modelo mais comumente utilizado é o desenvolvido por Perzyna (1966) descrito em alguns trabalhos (Simo, 1989; Simo e Hughes, 1988; Sánchez, 1997; Simo e Hughes, 1998; Heeres, 2001; Plešek e Korouš, 2002; Karaoulanis, 2003), cuja maior característica é a possibilidade da função independente do tempo (plástica), utilizada para descrever a deformação viscoplástica, ser maior que zero o que leva a um efeito de tensão superior ao limite elástico (“*overstress*”).

A viscoplasticidade pode ainda, ser modelada através da incorporação da dependência do tempo na função de fluência que, considerando o parâmetro de consistência, deve obedecer às relações clássicas de Kuhn-Tucker (Heeres, 2001). Além do modelo de Perzyna, existe ainda o modelo de Consistência no qual é definida uma superfície de fluência dependente do tempo, bem como modelos que consideram a formulação de uma função dependente do tempo com acoplamento de dano (Heeres, 2001 apud Mahnken et al, 1998, e Johansson et al., 1999).

Neste trabalho será adotado, para a análise dos casos propostos, o modelo visco-elastoplástico de Perzyna, e no presente item este modelo será descrito com maior detalhe.

### **2.2.2.1 – Conceitos de Visco-elastoplasticidade**

Como já visto, decorrente da necessidade de analisar o problema físico que envolve as características específicas do problema e a forma em que os efeitos plásticos e reológicos estão conectados, foi formulada a teoria visco-elastoplástica. Esta teoria consiste em métodos matemáticos que permitem modelar o comportamento macroestrutural de um determinado material a partir da consideração de que as tensões e deformações do sólido dependem do tempo, levando-se em conta que o comportamento plástico depende da história de tensões do material.

Adicionando então a dependência da tensão máxima quanto à velocidade de aplicação de carga, ao descrito no parágrafo anterior, pode-se dizer que o modelo unicamente plástico não é suficiente (real) para descrever o comportamento de um sólido. O modelo visco-elastoplástico consiste em uma simplificação do comportamento real de um material, onde as propriedades viscosas são consideradas apenas quando ocorrem deformações plásticas (equação 2.78). Com isso quando o material sofre deformações

elásticas sua superfície de fluência inicial não se altera com o tempo, e com isso sua formulação e implementação numérica é mais simples. Este é o tipo de modelo utilizado neste trabalho baseado na formulação desenvolvida por Perzyna que será descrita no item seguinte.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{vp} \quad (2.78)$$

### 2.2.2.2 – Modelo Visco-elastoplástico de Perzyna

O modelo de Perzyna foi formulado para um comportamento visco-elastoplástico onde sua estrutura é baseada na formulação matemática da teoria da plasticidade e a taxa de deformação total é determinada através do princípio da decomposição aditiva, de acordo com a expressão seguinte:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} \quad (2.79)$$

Logo, a taxa de tensão será relacionada com a taxa de deformação elástica, através do tensor constitutivo elástico, de acordo com a relação constitutiva seguinte:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}) \quad (2.80)$$

A taxa de deformação viscoplástica é definida pela regra de fluxo:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \dot{\Lambda} m \quad (2.81)$$

Onde o tensor de segunda ordem  $m$  determina a direção da taxa de deformação viscoplástica e é derivado de uma função de potencial plástico  $P$ . Neste trabalho é considerada a viscoplasticidade do tipo associada, onde  $P \equiv F$  :

$$m = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.82)$$

Sánchez (1997) utiliza a forma unidimensional expandida da regra de fluxo, no modelo de Perzyna, onde a taxa de deformação viscoplástica é definida por:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \Gamma \langle \Phi(F) \rangle \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.83)$$

Onde  $Q$  é a função de potencial viscoplástico,  $\Gamma$  é a fluidez do material,  $\Phi$  é uma função de fluxo,  $F$  é a função de fluência e  $\langle * \rangle$  é definido por:

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} \Phi(F) & \text{se } \Phi(F) > 0 \\ 0 & \text{se } \Phi(F) \leq 0 \end{cases} \quad (2.84)$$

Ele considera ainda uma forma de determinar o valor de  $\Phi$  considerando um parâmetro viscoso  $N$  e um valor de referência  $F_0$  (que torna a expressão adimensional). Logo:

$$\Phi(F) = \left[ \frac{F}{F_0} \right]^N \quad (2.85)$$

Portanto nesta descrição, a formulação de Perzyna considera um multiplicador viscoplástico definido pelos parâmetros viscosos  $\chi = \Gamma \langle \Phi(F) \rangle$ .

Heeres (2001) adota uma forma do modelo de Perzyna onde a deformação viscoplástica é obtida através da regra de fluxo (equação 2.86), considerando um multiplicador viscoplástico (equação 2.87) definido em função de um parâmetro de viscosidade  $\eta$  e de uma função  $\zeta$  de estado tensional fora da superfície de fluência plástica que depende da função de fluência plástica. Para o critério de Von Mises, o multiplicador viscoplástico assume a forma da equação 2.88.

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\langle \zeta(F) \rangle}{\eta} \cdot m = \frac{\langle \zeta(F) \rangle}{\eta} \cdot \frac{\partial G(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.86)$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{\langle \zeta(F) \rangle}{\eta} \quad (2.87)$$

$$\dot{\Lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\langle \zeta(F) \rangle}{\eta} \quad (2.88)$$

Onde  $G(\boldsymbol{\sigma}, \varphi)$  é a função de potencial viscoplástico, usada para casos de plasticidade não-associada, e  $\varphi$  é o parâmetro de variáveis internas. A obtenção do termo  $\langle \zeta(F) \rangle$  é análoga à forma utilizada por Sanchez (1997).

Simo (1989), Simo e Hughes (1998) e outros autores determinam a função  $\zeta(F)$  usando uma expressão análoga a usada por Sánchez (1997) na equação (2.89). Logo:

$$\zeta(F) = \left[ \frac{F}{\alpha} \right]^N \quad (2.89)$$

Onde  $\alpha$  é a tensão inicial de fluência e  $N$  deve satisfazer  $N \geq 1$ .

No presente trabalho será adotada a notação do modelo de Perzyna adotada por Karaoulanis (2003), onde a formulação considerada neste e nos trabalhos anteriormente citados é também baseada no modelo de Perzyna que consiste na referência na presente dissertação.

Então, parte-se das definições gerais das equações (2.79) à (2.82), onde o multiplicador viscoplástico é definido por uma função  $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$ , por um parâmetro viscoso  $\eta$ , pela introdução de uma variável interna  $q$ . As equações de evolução para as variáveis internas da viscoplasticidade  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}, q\}$  são formuladas em função de um tensor elástico  $D_e$ , por uma função  $\phi$  monótona em que  $\phi(x) = 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ . Portanto, para viscoplasticidade associada temos:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\langle \phi(F(\boldsymbol{\sigma}, q)) \rangle}{\eta} \cdot \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.90)$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{\langle \phi(F(\boldsymbol{\sigma}, q)) \rangle}{\eta} \quad (2.91)$$

A lei de endurecimento pode ser definida no espaço de tensões por  $\dot{q}$ , considerando um parâmetro de endurecimento  $K$ , e no espaço de deformação por  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp}$ , onde:

$$\dot{q} = -\dot{\Lambda} K \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial q} \quad (2.92)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \dot{\Lambda} \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, q)}{\partial q} \quad (2.93)$$

A equação (2.86) é definida como equação constitutiva viscoplástica de Perzyna. Neste modelo as variáveis  $(\boldsymbol{\sigma}, q)$ , tal que  $F(\boldsymbol{\sigma}, q) \geq 0$ , não são forçadas a permanecerem no interior do domínio elástico, ao contrário do modelo plástico (Karaoulanis, 2003). O comportamento viscoso do material é cessado quando o parâmetro viscoso  $\eta \rightarrow 0$ .

## 3 – INTEGRAÇÃO DA RELAÇÃO CONSTITUTIVA

---

Neste capítulo serão apresentados os métodos explícitos de integração de tensões via Método dos Elementos Finitos que utilizaremos neste trabalho, para avaliar o comportamento elasto-plástico e visco-elastoplástico dos materiais. Logo serão apresentados os métodos de Euler Modificado com controle de erro e de Runge-Kutta-Dormand-Price com controle de erro (Sloan *et al.*, 2001; Abbo, 1997) que foram implementados, no programa de elementos finitos CODE\_BRIGTH, neste trabalho. Uma breve descrição dos métodos de intersecção e retorno à superfície de fluência, para a análise elastoplástica, também será exibida, bem como os mecanismos de suavização da superfície de fluência do critério de Mohr-Coulomb. Por fim, serão descritos os gradientes da função de fluência suavizada e o método de obtenção da matriz tangente global visco-elastoplástico.

### 3.1 – Introdução

Como se sabe, existem vários problemas da engenharia geotécnica, tais como creep, plasticidade, viscoplasticidade, transferência de calor, entre outros, que são solucionados através de métodos de integração numérica de suas relações constitutivas, mediante a discretização espacial pelo método dos elementos finitos. Essas relações definem uma série de equações diferenciais ordinárias e sua integração leva a obtenção de variáveis de incrementos de tensões. Com isso, muitos modelos têm sido desenvolvidos para a solução destes problemas, onde dois tipos de métodos podem ser utilizados para estes fins, ou seja, os métodos de integração explícitos e implícitos.

Nos métodos explícitos a superfície de fluência, os gradientes de potencial plástico e a lei de endurecimento são obtidos em função de um estado de tensões conhecido, utilizando-se o processo iterativo para definir as tensões finais, sendo necessário um processo de retorno à superfície de fluência, das tensões finais e parâmetros de

endurecimento (Sloan et al., 2001), como será descrito no item seguinte. Estes métodos possuem a facilidade de uma implementação mais rápida e direta, pois utilizam apenas as derivadas de primeira ordem da função de fluência e potencial plástico, e podem ser aplicados a modelos constitutivos como elastoplásticos e visco-elastoplástico.

Segundo Sloan (1987), os métodos explícitos tem uma precisão bastante satisfatória se combinados o controle de subpasso automático e o controle de erro, e, ao contrário dos métodos implícitos, não necessitam de uma solução de equações não-lineares para determinar as tensões para cada ponto de Gauss. Mas esses métodos necessitam de um cuidado especial na determinação do ponto de intersecção à superfície de fluência no passo de tensão, pois, isso pode levar a falsas determinações destes pontos intermediários.

Já nos métodos implícitos os gradientes e lei de endurecimento são definidos por estados de tensão desconhecidos, com a utilização de processo iterativo para a solução do sistema de equações não-lineares. Há uma desvantagem quanto aos métodos explícitos, devido a necessidade de solução das derivadas de segunda ordem da função de fluência e potencial plástico, o que pode levar a um processo algébrico muito difícil em alguns casos. Estes modelos não necessitam da definição de um ponto de intersecção com a superfície de fluência decorrente do passo de tensão. Logo as tensões resultantes já satisfazem ao critério de fluência para a tolerância especificada.

No presente trabalho foram utilizados métodos explícitos de integração de tensões devido a maior simplicidade de implementação, mas verificando sua eficiência nas aplicações feitas.

### **3.2 – Discretização pelo Método dos Elementos Finitos**

Para a solução das equações diferenciais dos modelos constitutivos pode-se aplicar o método dos elementos finitos, o que leva, para problemas mecânicos, à dois tipos de equações a serem resolvidas. São elas:

- **Equações Globais de Carga-Descarga**

Que corresponde a uma análise global do problema, envolve as equações globais de carga-descarga. Neste caso parte-se da equação de equilíbrio de tensões de um corpo

qualquer (equação 2.13), formulando-se um problema de contorno definido pelas condições de contorno (equação 2.14) e condições iniciais (equação 3.1).

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x,0) &= \mathbf{u}_0(x) \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(x,0) &= v_0(x) \text{ em } \Omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

Toma-se uma solução aproximada  $\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^M \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{u}_i$ , definida pelas funções de forma  $\mathbf{N}_i$ , e aplica-se o método dos elementos finitos via-Galerkin, ao problema de contorno chegando-se a forma integral da equação de equilíbrio de tensões, que por sua vez governa o comportamento de cada elemento finito e é aplicada a qualquer relação constitutiva. Logo:

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega = 0 \quad (3.2)$$

onde :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_e \sum_{j=1}^M \mathbf{B}_j \cdot \mathbf{u}_j$$

Onde matriz deformação-deslocamento  $\mathbf{B}$  do elemento é também definida como matriz de coeficientes geométricos constantes,  $\mathbf{u}$  são os deslocamentos nodais (incógnitas),  $\mathbf{D}_e$  o tensor elástico,  $\mathbf{t}$  tensões externas atuantes e  $\mathbf{b}$  são as forças de corpo. O primeiro termo da equação integral consiste na matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$ , definida através da matriz tangente  $\mathbf{D}$ , o segundo termo refere-se às forças da fronteira (condições de contorno), e o terceiro termo define as forças de corpo. O vetor taxa de força externa global  $\dot{\mathbf{F}}^{\text{ext}}$  é definido pela derivada das forças externa e de corpo com relação ao tempo t. Logo:

$$\mathbf{K} = \sum_{\text{elementos } \Omega} \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (3.3)$$

$$\dot{\mathbf{F}}^{\text{ext}} = \sum_{\text{elementos } \Gamma} \int \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \dot{\mathbf{b}} d\Omega \quad (3.4)$$



Portanto, o problema é solucionado através da obtenção dos deslocamentos em função das cargas, por meio da relação constitutiva carga-deslocamento, que depende da matriz de rigidez global. Esta relação pode ser expressa por:

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{\text{ext}} \quad (3.5)$$

No processo iterativo, para o início de cada intervalo de tempo são conhecidos o deslocamento, tensões e parâmetros de endurecimento, onde esses consistem nas condições iniciais do problema mecânico.

- **Relações Governantes Incrementais Tensão-Deformação**

Os métodos explícitos de integração utilizados neste trabalho consistem em métodos que usam uma relação incremental tensão-deformação, que levam a um tratamento local da solução do problema. Neste processo as tensões e deformações são calculadas para um número discreto de pontos de integração dentro de cada elemento, usando as relações constitutivas adequadas.

Parte-se então da consideração da relação constitutiva incremental, onde sua integração numérica é feita considerando um intervalo de tempo de integração  $0 \leq T \leq 1$ , cujo tempo de início de carregamento é definido por  $t_0$  ( $T = 0$ ) e o tempo final de carregamento  $t$  onde  $T=1$ . A integração se desenvolve com o tempo de integração  $T$  que, por sua vez, é obtido pela relação entre os tempos inicial e final com o incremento de tempo considerado  $\Delta t$ .

$$T = \left( \frac{t - t_0}{\Delta t} \right) \quad (3.6)$$

Considerando os conceitos definidos no Capítulo 2 desse trabalho, e a discretização temporal para a relação constitutiva incremental, então temos as seguintes formulações para o processo de integração elastoplástico de tensões:

$$\frac{d\sigma}{dT} = D_{ep} \cdot \Delta \varepsilon = \Delta \sigma_e - \Delta \lambda \cdot D_e \cdot b \quad (3.7)$$

$$\frac{d\kappa}{dT} = \dot{\lambda} \cdot \Delta t \cdot B = \Delta \lambda \cdot B \quad (3.8)$$

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D}_e - \frac{\mathbf{D}_e \cdot b \cdot a^T \cdot \mathbf{D}_e}{a^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot b + A} \quad (3.9)$$

$$\Delta \lambda = \frac{a^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot \Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{a^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot b + A} \quad (3.10)$$

$$B = -\frac{A}{\frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}', \kappa)}{\partial \kappa}} = \frac{\dot{\kappa}}{\dot{\lambda}} = \dot{\varepsilon}^p \quad (3.11)$$

$$a = \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}', \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (3.12)$$

$$b = \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}', m)}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (3.13)$$

### 3.3 – Algoritmos de Integração Explícita

Como já visto, os algoritmos utilizados neste trabalho são do tipo algoritmos explícitos de integração de tensões com controle de erro, via Euler Modificado e Runge-Kutta-Dormand-Price (Abbo, 1997). Estes algoritmos, para uma análise elastoplástica, requerem a determinação da tensão que intercepta a superfície de fluência no passo do estado elástico para o plástico, bem como necessita da determinação de uma zona de tolerância para o limite elástico, onde se adota um algoritmo de retorno à superfície de fluência quando excedido o limite no sentido do estado plástico.

Já, para o caso da visco-elastoplasticidade esses dois processos não são necessários devido à formulação adotada por Perzyna que não limita o estado de tensão ao domínio elástico ( $F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0$ ).

Portanto, nos subitens deste tópico serão definidos, de forma breve, os algoritmos de intersecção e retorno à superfície de fluência, e também os algoritmos explícitos de integração de tensões adotados neste trabalho.

### 3.3.1 – Intersecção e retorno à Superfície de Fluência

- **Intersecção à Superfície de Fluência**

Para um dado estado de tensões inicial ( $\sigma_0$ ) e suas respectivas variáveis históricas ( $\kappa_0$ ) localizados na região elástica, ao dar-se um incremento de deformação ou de tensão elástico ( $\Delta\sigma_e$ ) chega-se a um novo estado de tensões ( $\sigma_e = \sigma_0 + \Delta\sigma_e$ ) que pode localizar-se fora da superfície de fluência. Portanto, para análises elastoplásticas, atinge-se uma zona de tensões inadmissíveis, o que pode desprender muito tempo neste tipo de análise via Método dos Elementos Finitos.

Por isso leva a necessidade de determinar um ponto intermediário, de intersecção com a superfície de fluência, entre os estados de tensões inicial e final, onde o algoritmo utilizado descrito por Sloan (1987) consiste no método de Regula-Falsi, que foi implementado por Sousa (2004) no código e elementos finitos utilizado neste trabalho. Este método determina um multiplicador  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) que defina o ponto de intersecção ( $\sigma_{int} = \sigma_0 + \alpha\Delta\sigma_e$ ) de forma a satisfazer a condição necessária para que se determine o estado de tensões intermediário, ou seja:  $F(\sigma_{int}, \kappa_0) = 0$ .

Na forma numérica, esta condição pode ser redefinida em função de um parâmetro de tolerância positivo e aproximado a zero, assumindo a forma  $|F(\sigma_{int}, \kappa_0)| \leq FTOL$ . Este método enunciado até então pode ser descrito pela figura (3.1).

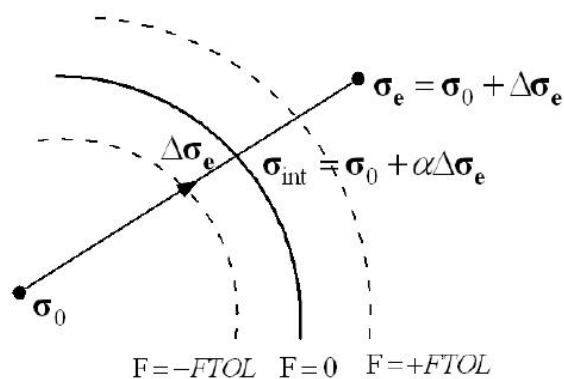
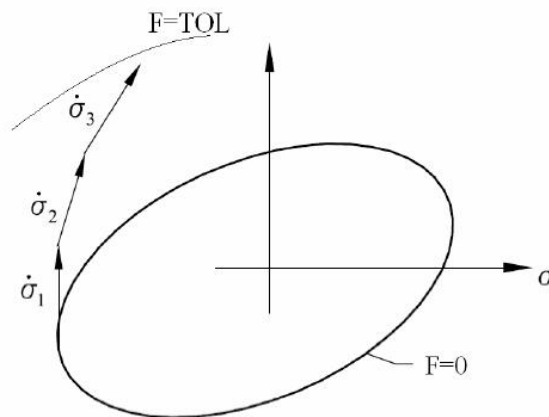


Figura 3.1 – Esquema de Intersecção à Superfície de Fluência (Sousa, 2004).

- **Retorno à Superfície de Fluência**

Como já descrito anteriormente, um incremento de tensão pode levar o estado de tensões a um ponto externo à superfície de fluência. Isso pode ser progressivo em função do andamento do processo incremental, o que leva a função de fluência a exceder a tolerância limite entre a superfície de fluência e a zona de tensões inadmissíveis. Esse processo pode ser visualizado na figura (3.2), e necessita de um método de retorno à superfície de fluência.

O método utilizado neste trabalho também foi implementado por Sousa (2004), e baseia-se no método descrito por Abbo (1997) que combina os métodos de correção consistente (Potts e Gens, 1985) e de correção normal (Sloan, 1987). O primeiro método de retorno não considera variação de deformações totais durante o retorno e atualiza tanto as tensões quanto as variáveis de história, enquanto que o segundo método realiza o retorno na direção definida pelo vetor normal à superfície de fluência e atualiza as direções a cada passo iterativo e, de forma geral, no algoritmo de retorno utilizado, as derivas são determinadas no ponto inicial de iteração (Sousa, 2004). As correções de tensões são mostradas detalhadamente nos trabalhos de Abbo (1997), Sloan *et al.* (2001) e Sousa (2004).



**Figura 3.2 – Estado de Tensões em processo incremental: afastamento da superfície de fluência (Sousa, 2004).**

### 3.3.2 – Suavização da Superfície de Fluência de Mohr Coulomb

Como já visto, o critério de Mohr Coulomb apresenta alguns problemas numéricos, em programas de elementos finitos, em função dos pontos de singularidades já comentados no Capítulo 2 deste trabalho. Várias propostas de correção deste problema foram feitas, dentre as quais a de Matsuoka e Nakai (1974), Zienkiewics e Pande (1977), Sloan e Booker (1986), Sheng et al. (2000). Estas propostas têm o objetivo de solucionar o problema de singularidades através da suavização da função de Mohr Coulomb.

O tipo de suavização da função de fluência de Mohr Coulomb adotado neste trabalho é o proposto por Zienkiewicz e Pande (1977), também usado por Abbo (1997). Este método de suavização consiste em um arredondamento hiperbólico na função de fluência de forma a eliminar a singularidade do vértice da superfície de fluência, o que torna necessário utilizar apenas um parâmetro adicional (ver figura 3.3).

Segundo Abbo (1997) uma grande vantagem deste método é que a aproximação torna-se, com o aumento da tensão média, assíntota rapidamente à superfície de fluência original. Daí obtém-se uma nova superfície de fluência, interna à superfície de Mohr Coulomb original, que por sua vez dará ao solo uma menor resistência.

Sousa (2004) explica que o ponto de singularidade referente ao vértice da superfície de fluência tem maior importância quando os parâmetros de resistência, coesão e ângulo de atrito, são baixos, pois, isso leva a uma elevação da tensão média que se encontrará mais próxima à origem da superfície de fluência.

O ponto em que a superfície de fluência toca no eixo da tensão média  $p$ , define o seu vértice no qual a singularidade leva a um gradiente indefinido da função de fluência. A função deste plano é definida por:

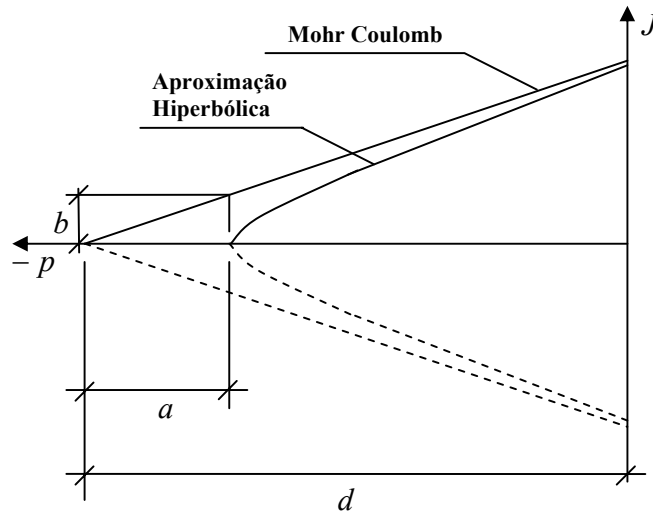
$$J = \left[ \frac{c}{\tan \phi} + p \right] g(\theta) \quad (3.14)$$

Onde,  $g(\theta)$  define a declividade da reta e  $p = c / \tan \phi$  caracteriza o intercepto. A equação geral que define a aproximação hiperbólica assíntota ao plano  $(p, J)$  é:

$$\frac{(p+d)^2}{a^2} - \frac{J^2}{b^2} = 1 \quad (3.15)$$

Os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $d$  são descritos na figura (3.3), onde a relação  $b/a$  define a declividade da reta obtida pela suavização hiperbólica, e com intercepto em  $d$ . Logo:

$$b/a = g(\theta) \quad \text{e} \quad d = \frac{c}{\tan \phi} \quad (3.16)$$



**Figura 3.3 – Aproximação Hiperbólica da Função da Superfície de Morh Coulomb**

Assim define-se através desta aproximação e substituindo a equação (3.16) na (3.15), uma nova função de fluência (equação 3.17) em função de um parâmetro de ajuste  $a$ . Reassume-se a forma original da superfície de Mohr Coulomb quando  $a=0$ . Segundo Abbo (1997) assumi-se  $a = 0,05.c / \tan \phi$ .

$$F(\sigma, \kappa) = \left[ a^2 (\sen \phi)^2 + J^2 K(\theta)^2 \right]^{1/2} - \left( \frac{c}{\tan \phi} + p \cdot \sen \phi \right) \quad (3.17)$$

Onde:

$$K(\theta) = \cos \theta + \frac{\sen \theta \cdot \sen \phi}{\sqrt{3}}$$

Pode-se ainda definir várias destas aproximações, gerando assim diversas outras novas superfícies, em função de um parâmetro positivo  $n$ . Segundo Sousa (2004) utiliza-se o parâmetro  $n = 3$ , pois ao assumir este valor não seria obtida uma não-linearidade muito alta e com isso reduz-se o custo computacional do programa. A nova forma da função de fluência para definir  $n$  superfícies é:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) = \left[ a^n (\text{sen}\phi)^n + J^n K(\theta)^n \right]^{1/n} - \left( \frac{c}{\tan\phi} + p \cdot \text{sen}\phi \right) \quad (3.18)$$

Um outro método de suavização é a proposta por Sloan e Booker (Abbo, 1997; Sousa, 2004) onde a função no plano octaédrico não se modifica, alterando apenas os vértices  $\theta = \pm 30^\circ$  através de um ângulo de ajuste  $\theta_T$ . Esta aproximação leva a uma continuidade das derivadas nestes pontos, o que combate o efeito das singularidades.

Para  $|\theta| \leq \theta_T$  a função do plano é a original e se  $|\theta| > \theta_T$  a função adotada é suavizada. Logo:

$$K(\theta) = \begin{cases} A + B \text{sen} 3\theta & |\theta| > \theta_T \\ \cos\theta + \frac{\text{sen}\theta \cdot \text{sen}\phi'}{\sqrt{3}} & |\theta| \leq \theta_T \end{cases} \quad (3.19)$$

Onde:

$$A = \frac{1}{3} \cos\theta_T \left( 3 + \tan\theta_T + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sign}(\theta) (\tan 3\theta_T - 3 \tan\theta_T) \text{sen}\phi' \right) \quad (3.20)$$

$$B = \frac{1}{3 \cos 3\theta_T} \left( \text{sign}(\theta) \text{sen}\theta_T + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{sen}\phi' \cos\theta_T \right) \quad (3.21)$$

$$\text{sign}(\theta) = \begin{cases} -1 & \text{para } \theta \geq 0^\circ \\ +1 & \text{para } \theta < 0^\circ \end{cases} \quad (3.22)$$

$$0 \leq \theta_T \leq 30^\circ$$

Alguns trabalhos sugerem valores para  $\theta_T$ , onde Abbo (1997) e Sousa (2004) adotam um valor de  $\theta_T = 25^\circ$  e  $\phi' = 30^\circ$ .

Existe ainda a suavização através do critério de Drucker-Prager, onde adota-se uma função do plano octaédrico obtida a partir da combinação entre a função de Mohr Coulomb

clássica para  $|\theta| \leq \theta_T$ , e a função de Drucker-Prager nas regiões próximas aos pontos de singularidade (Sousa, 2004). Logo a função suavizada é definida por:

$$K(\theta) = \begin{cases} \cos(\theta_T \cdot \text{sign}(\theta)) + \frac{\text{sen}(\theta_T \cdot \text{sign}(\theta)) \text{sen} \varphi'}{\sqrt{3}} & |\theta| > \theta_T \\ \cos \theta + \frac{\text{sen} \theta \cdot \text{sen} \varphi'}{\sqrt{3}} & |\theta| \leq \theta_T \end{cases} \quad (3.23)$$

Existe ainda um tipo de suavização que se ajusta a outras funções, e é Sheng *et al.* (1999). Esta utiliza um parâmetro de ajuste  $\alpha$ , cujos pontos coincidem nos pontos de estado triaxial de tensão com a superfície de Mohr Coulomb para :

$$\alpha = \frac{(3 - \text{sen} \varphi')}{(3 + \text{sen} \varphi')} \quad (3.24)$$

A função é definida por:

$$g(\theta) = M_{\max} \left( \frac{2\alpha^4}{1 + \alpha^4 + (1 - \alpha^4) \text{sen} 3\theta} \right)^{1/4} \quad (3.25)$$

$$M_{\max} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \text{sen} \varphi'}{3 - \text{sen} \varphi'}$$

As funções de Drucker-Prager, Mohr Coulomb e Sheng no plano octaédrico são descritas na figura (3.4).

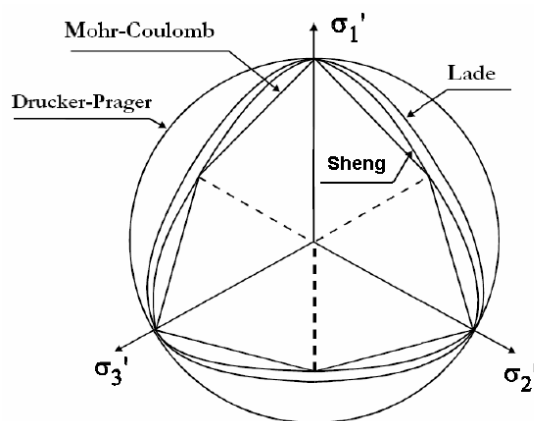


Figura 3.4 –

octaédrico.

Funções no plano



### 3.3.3 – Esquema de Euler Modificado com Controle de Erro

O modelo de integração explícita consiste na formulação definida por Sloan (1987), que, usando o erro local medido para o subincremento e integrando o incremento de deformação aplicada, dividido em subpassos, controla o erro nas tensões e variáveis de história calculadas. Este método foi posteriormente modificado e descrito por Abbo (1997), onde define tamanhos mais adequados para cada subpasso em que o incremento de deformação é dividido, e requer apenas primeiras derivadas da superfície de fluência e do potencial plástico, ambas com relação ao estado de tensão atual.

Este método requer dupla avaliação do tensor elastoplástico para o fim de cada intervalo de tempo, e calcula o novo estado de tensões juntamente com o método de retorno do estado de tensões calculado à superfície de fluência durante o processo iterativo, caso seja necessário.

As relações constitutivas são integradas para cada ponto de Gauss, para um dado incremento de deformação  $\Delta\varepsilon$ , de acordo com as equações (3.7) e (3.8), assumindo um intervalo de tempo  $0 \leq T \leq 1$ . Os parâmetros  $\Delta\lambda$  e  $B$  são definidos como descrito nas equações (3.10) e (3.11), onde, devido aos parâmetros de endurecimento serem funções do invariante de deformações cisalhantes para as relações constitutivas adotadas neste trabalho, o parâmetro  $B$  é definido por:

$$B = \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, m)}{\partial J} \quad (3.26)$$

O processo de integração desenvolve-se após a determinação de um estado de tensões tentativa onde se verifica que este pertence ou não ao domínio elástico. Divide-se o incremento de deformação em  $n$  subincrementos iguais, e define as tensões e variáveis de história determinadas como parâmetros iniciais do processo iterativo.

Passa-se então a definir o novo estado de tensões e variáveis de história em função do incremento de deformação dado, onde estes são determinados através da tensão inicial e do incremento de tensão decorrente do incremento de deformação aplicado. Assim, obtém-se uma estimativa de primeira ordem da solução de acordo com as expressões a seguir:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_n &= \boldsymbol{\sigma}_{n-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_1 \\ \kappa_n &= \kappa_{n-1} + \Delta\kappa_1\end{aligned}\quad (3.27)$$

Onde:

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\sigma}_1 &= \mathbf{D}_{ep}(\boldsymbol{\sigma}_{n-1}, \kappa_{n-1})\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n &= \Delta T_n \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad ; 0 < \Delta T_n \leq 1 \\ \Delta\kappa_1 &= \Delta\lambda(\boldsymbol{\sigma}_{n-1}, \kappa_{n-1}, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n)B(\boldsymbol{\sigma}_{n-1})\end{aligned}\quad (3.28)$$

Uma segunda estimativa do estado de tensões e variáveis de história, definida para o fim do intervalo de tempo  $\Delta T_n$ , é do tipo de segunda ordem e obtida pelo método de Euler Modificado, de acordo com as expressões seguintes:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n &= \boldsymbol{\sigma}_{n-1} + \frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{\sigma}_1 + \Delta\boldsymbol{\sigma}_2) \\ \hat{\kappa}_n &= \kappa_{n-1} + \frac{1}{2}(\Delta\kappa_1 + \Delta\kappa_2)\end{aligned}\quad (3.29)$$

Onde:

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\sigma}_2 &= \mathbf{D}_{ep}(\boldsymbol{\sigma}_{n-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_1, \kappa_{n-1} + \Delta\kappa_1)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n \\ \Delta\kappa_2 &= \Delta\lambda(\boldsymbol{\sigma}_{n-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_1, \kappa_{n-1} + \Delta\kappa_1, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n)B(\boldsymbol{\sigma}_{n-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_1)\end{aligned}\quad (3.30)$$

O erro local de truncamento da solução é de ordem  $O(\Delta T^3)$  e pode ser obtido pela diferença entre as equações (3.29) e (3.27), ou seja, é definido pela diferença entre a integração de Euler modificada e integração de Euler para cada subpasso. Daí, chega-se à estimativa do erro local em  $\boldsymbol{\sigma}_n$  e  $\kappa_n$ , obtida pela expressão:

$$R_n = \frac{1}{2} \max\left(\frac{\|\Delta\boldsymbol{\sigma}_2 - \Delta\boldsymbol{\sigma}_1\|}{\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_n\|}, \frac{\|\Delta\kappa_2 - \Delta\kappa_1\|}{\|\hat{\kappa}_n\|}\right)\quad (3.31)$$

Estabelece-se uma tolerância *STOL* que limitará o erro relativo calculado, ou seja, se o erro encontrado exceder a tolerância adotada ( $R_n > STOL$ ) o passo de integração é rejeitado. O próximo passo é definido em função do erro calculado através da constante  $q$ , que por sua vez é multiplicada por uma constante, definida por alguns autores (0,8 é

adotado por Sloan; e 0,9 por Abbo), de forma a minimizar o número de passos rejeitados. Neste trabalho o valor adotado é o proposto por Abbo (1997), logo o processo de cálculo do passo de tempo seguinte e a determinação de  $q$  são expressos por:

$$\begin{aligned}\Delta T_{n+1} &= q\Delta T_n \\ q &= 0,9\sqrt{\frac{STOL}{R_n}}\end{aligned}\quad (3.32)$$

O valor de  $q$  deverá estar compreendido no intervalo  $0,1 \leq q \leq 1,1$ , de forma que :

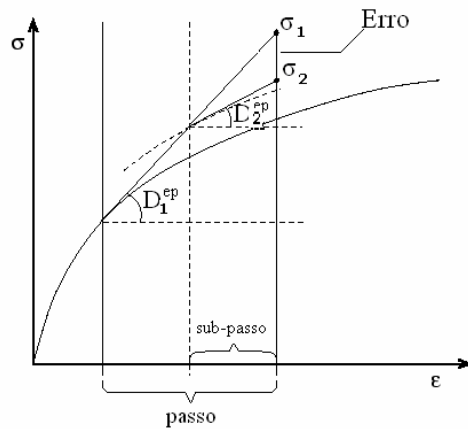
$$0,1\Delta T_{n-1} \leq \Delta T_n \leq 1,1\Delta T_{n+1} \quad (3.33)$$

De forma que o próximo passo de tempo não seja superior ao último passo de tempo, impõe-se que o passo de tempo seguinte seja menor ou igual ao anterior. Estabelece-se ainda um valor mínimo de passo de tempo  $\Delta T_{\min}$ , de forma a controlar o número de passos de tempo reinício do processo. Abbo (1997) adota um valor mínimo de passo de tempo de  $\Delta T_{\min} = 10^{-4}$ . Os passos de tempo seguintes terão subincrementos variáveis de acordo com o erro calculado.

Caso o erro obtido satisfaça o limite imposto pela tolerância, o subincremento é aceito e as tensões e variáveis de história são atualizados através da equação (3.29). Portanto, as novas tensões e variáveis de história são submetidas ao processo de verificação e correção, ou seja, se necessário, procede-se com a determinação da intersecção com a superfície de fluência e o retorno a esta, como descrito no item (3.3.1) deste trabalho. Isso deverá ser realizado para o caso de uma análise elastoplástica, tendo em vista que para a análise elasto-viscoplástica não há problema quando a função de fluência é positiva, onde para isso é adotado um valor mínimo de tolerância ( $VISCMIN$ ) que caracteriza o comportamento viscoso. Pode-se entender esquematicamente este método através da figura (3.5).

Logo, o fim da integração ocorre quando todo o incremento de deformação é aplicado, onde:

$$\sum \Delta T_n = T = 1 \quad (3.34)$$



**Figura 3.5 – Esquema explícito de Euler Modificado**

Por fim, o algoritmo modificado de Euler, envolvendo os refinamentos descritos no item (3.3.1), pode ser descrito em sua totalidade como a seguir:

***Algoritmo Explícito de Integração de Tensões de Euler Modificado com Controle de Erro***

---

1. Entra com valores iniciais de tensões e variáveis de história ( $\sigma_0, \kappa_0$ ), com o incremento de deformação  $\Delta\varepsilon$  e a tolerância do erro  $STOL$ ;
2. Determina o incremento de tensão e o estado de tensões elástico tentativa,  $\Delta\sigma_e$  e  $\sigma_e$  respectivamente, seguindo o processo:

$$\Delta\sigma_e = \mathbf{D}_e \Delta\varepsilon$$

$$\sigma_e = \sigma_0 + \Delta\sigma_e$$

**Se**  $F(\sigma_e, \kappa_0) \leq FTOL$  (Incremento de Tensões é Elástico)  $\rightarrow \sigma_1 = \sigma_e$  e  $\kappa_1 = \kappa_0$  (Passa para Passo 16)

3. **Se**  $F(\sigma_0, \kappa_0) < -FTOL$  e  $F(\sigma_e, \kappa_0) > FTOL$  o passo sai do regime elástico para o plástico. Calcula a parte de  $\Delta\sigma_e$  que provoca deformação puramente elástica, calcula  $\alpha$  usando o método de regula-falsi (método descrito em Abbo, 1997; Sloan et al., 2001; Sousa, 2004). Vai para o passo 5.

4. **Se**  $|F(\boldsymbol{\sigma}_0, \kappa_0)| \leq FTOL$  e  $F(\boldsymbol{\sigma}_e, \kappa_0) > FTOL$ , verificar o multiplicador plástico negativo com ângulo entre  $a$  e  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_e$ :

$$\cos \theta = \frac{a^T \Delta\boldsymbol{\sigma}_e}{\|a\|_2 \|\Delta\boldsymbol{\sigma}_e\|_2}$$

$a$  é calculado para tensão inicial.

**Se**  $\cos \theta \geq -LTOL \rightarrow$  incremento de tensão puramente plástico:  $a = 0$

**Caso contrário**  $\rightarrow$  calcula parte de  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_e$  que causa deformação puramente elástica e  $\alpha$  usando método de regula-falsi para multiplicadores plásticos (método descrito em Abbo, 1997; Sloan et al., 2001; Sousa, 2004).

**Caso Contrário:** o estado de tensões é inadmissível.

5. Atualiza o estado de tensões até o início da plastificação:  $\boldsymbol{\sigma}_0 \leftarrow \boldsymbol{\sigma}_0 + a\Delta\boldsymbol{\sigma}_e$   
Calcula a parte de  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_e$  que causa deformação plástica:  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_e \leftarrow (1 - a)\Delta\boldsymbol{\sigma}_e$
6. Fixa  $T = 0$  e  $\Delta T = 1$ .
7. **Enquanto**  $T < 1$ , executa passos 8 à 15.
8. Calcula  $\Delta\boldsymbol{\sigma}_i$  e  $\Delta\kappa_i$  para  $i = 1, 2$  através de:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_i = \Delta T \Delta\boldsymbol{\sigma}_e - \Delta\lambda_i \cdot \mathbf{D}_e \cdot b_i$$

$$\Delta\kappa_i = \Delta\lambda_i B_i$$

Onde:

$$\Delta\lambda_i = \max \left\{ \frac{\Delta T a_i^T \cdot \Delta\boldsymbol{\sigma}_e}{a_i^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot b_i + A_i}, 0 \right\}$$

$$A_i = - \left( \frac{\partial F}{\partial \kappa} \right) B_i$$

$$a_i = \left( \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_i$$

$$b_i = \left( \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, m)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_i$$

$$B_i = \dot{E}_d^p = \left( \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, m)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)_i$$

São, avaliados para:  $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_i, \bar{\kappa}_i)$ , onde:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_1 &= \sigma_T & \bar{\kappa}_1 &= \kappa_T \\ \bar{\sigma}_2 &= \sigma_T + \Delta\sigma_1 & \bar{\kappa}_2 &= \kappa_T + \Delta\kappa_1\end{aligned}$$

9. Calcula novo estado de tensões e variáveis de história, e armazena em variável temporária de acordo com:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{T+\Delta T} &= \sigma_T + \frac{1}{2}(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2) \\ \bar{\kappa}_{T+\Delta T} &= \kappa_T + \frac{1}{2}(\Delta\kappa_1 + \Delta\kappa_2)\end{aligned}$$

10. Determina o erro relativo para o subpasso atual:

$$R_{T+\Delta T} = \max\left(\frac{\|\Delta\sigma_2 - \Delta\sigma_1\|}{2\|\bar{\sigma}_{T+\Delta T}\|}, \frac{|\Delta\kappa_2 - \Delta\kappa_1|}{2\bar{\kappa}_{T+\Delta T}}, EPS\right)$$

EPS: constante de precisão do computador que indica o menor erro relativo que pode ser calculado.

11. **Se**  $R_{T+\Delta T} > STOL \rightarrow$  Passo falha e deve-se determinar um passo de tempo inferior.

$$\begin{aligned}q &= \max\left\{0,9\sqrt{\frac{STOL}{R_{T+\Delta T}}}; 0,1\right\} \\ \Delta T &\leftarrow \max\{q\Delta T, \Delta T_{\min}\}\end{aligned}$$

Retorna ao passo 8.

12. O passo é aceito, logo se atualizam as tensões e as variáveis de história:

$$\begin{aligned}\sigma_{T+\Delta T} &= \bar{\sigma}_{T+\Delta T} \\ \kappa_{T+\Delta T} &= \bar{\kappa}_{T+\Delta T}\end{aligned}$$

13. **Se**  $|F(\sigma_{T+\Delta T}, \kappa_{T+\Delta T})| > FTOL$  e  $\eta < VISCMIN \rightarrow$  deve-se corrigir  $(\sigma_{T+\Delta T}, \kappa_{T+\Delta T})$  através do algoritmo de correção de tensão (ver item 3.3.1).
14. Determina próximo passo de tempo:

$$q = \min\left\{0,9 \sqrt{\frac{STOL}{R_{T+\Delta T}}}; 1,1\right\}$$

Se passo anterior falhou :

$$q = \min\{q, 1\}$$

Calcula novo passo de integração e atualiza o tempo :

$$\Delta T \leftarrow q\Delta T$$

$$T \leftarrow T + \Delta T$$

15. Avalia tamanho mínimo do passo de tempo e verifica se excede  $T = 1$  :

$$\Delta T \leftarrow \max\{\Delta T, \Delta T_{\min}\}$$

e

$$\Delta T \leftarrow \min\{\Delta T, 1 - T\}$$

16. Sai com estado de tensões e variáveis de história  $(\sigma_1, \kappa_1)$

As tolerâncias adotadas foram  $LTOL \approx 10^{-6}$  e  $EPS \approx 10^{-6}$ , onde estas são sugeridas por Abbo (1997), Sloan et al. (2001), para computadores de dupla precisão.

### 3.3.4 – Esquema Explícito de Runge-Kutta-Dormand-Price com Controle de Erro

Este método de integração explícita tem forma análoga ao Método de Euler Modificado, com exceção de que o esquema de Runge-Kutta-Dormand-Price (Abbo, 1997; Pedroso, 2003) utiliza expressões de quarta e quinta ordem para estimar as tensões, variáveis de história e erro de truncamento local. Este esquema de alta ordem calcula as tensões e variáveis de história para o fim de cada subincremento de forma bastante precisa, e também pode ser utilizado na verificação da precisão de métodos de baixa ordem.

Ao aplicar-se este método às expressões (3.7) e (3.8), para um passo de tempo  $\Delta T_n$ , obtêm-se as soluções de quarta e quinta ordem para as tensões e variáveis de história, descritas respectivamente por:

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \sigma_{n-1} + \frac{31}{540} \Delta\sigma_1 + \frac{190}{297} \Delta\sigma_3 - \frac{145}{108} \Delta\sigma_4 + \frac{351}{220} \Delta\sigma_5 + \frac{1}{20} \Delta\sigma_6 \\
\kappa_n &= \kappa_{n-1} + \frac{31}{540} \Delta\kappa_1 + \frac{190}{297} \Delta\kappa_3 - \frac{145}{108} \Delta\kappa_4 + \frac{351}{220} \Delta\kappa_5 + \frac{1}{20} \Delta\kappa_6
\end{aligned} \tag{3.35}$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_n &= \sigma_{n-1} + \frac{19}{216} \Delta\sigma_1 + \frac{1000}{2079} \Delta\sigma_3 - \frac{125}{216} \Delta\sigma_4 + \frac{81}{88} \Delta\sigma_5 + \frac{5}{56} \Delta\sigma_6 \\
\kappa_n &= \kappa_{n-1} + \frac{19}{216} \Delta\kappa_1 + \frac{1000}{2079} \Delta\kappa_3 - \frac{125}{216} \Delta\kappa_4 + \frac{81}{88} \Delta\kappa_5 + \frac{5}{56} \Delta\kappa_6
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Onde:

$$\left. \begin{aligned}
\Delta\sigma_i &= \mathbf{D}_{ep}(\bar{\sigma}_i, \bar{\kappa}_i) \Delta\epsilon_n \\
\Delta\epsilon_n &= \Delta T_n \Delta\epsilon \quad ; 0 < \Delta T_n \leq 1 \\
\Delta\kappa_i &= \Delta\lambda(\bar{\sigma}_i, \bar{\kappa}_i, \Delta\epsilon_n) B(\sigma_i)
\end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, 6 \tag{3.37}$$

As tensões e variáveis de história, para cada passo de integração, são calculados por:

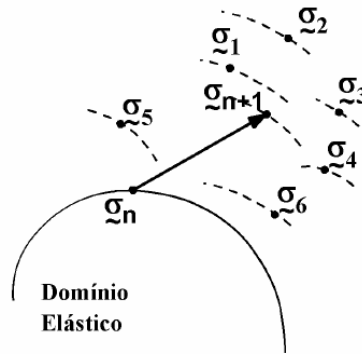
$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_1 &= \sigma_{n-1} \\
\bar{\sigma}_2 &= \sigma_{n-1} + \frac{1}{5} \Delta\sigma_1 \\
\bar{\sigma}_3 &= \sigma_{n-1} + \frac{3}{40} \Delta\sigma_1 + \frac{9}{40} \Delta\sigma_2 \\
\bar{\sigma}_4 &= \sigma_{n-1} + \frac{3}{10} \Delta\sigma_1 - \frac{9}{10} \Delta\sigma_2 + \frac{6}{5} \Delta\sigma_3 \\
\bar{\sigma}_5 &= \sigma_{n-1} + \frac{226}{729} \Delta\sigma_1 - \frac{25}{27} \Delta\sigma_2 + \frac{880}{729} \Delta\sigma_3 + \frac{55}{729} \Delta\sigma_4 \\
\bar{\sigma}_6 &= \sigma_{n-1} - \frac{181}{270} \Delta\sigma_1 + \frac{5}{2} \Delta\sigma_2 - \frac{266}{297} \Delta\sigma_3 - \frac{91}{27} \Delta\sigma_4 + \frac{189}{55} \Delta\sigma_5 \\
\bar{\kappa}_1 &= \kappa_{n-1} \\
\bar{\kappa}_2 &= \kappa_{n-1} + \frac{1}{5} \Delta\kappa_1 \\
\bar{\kappa}_3 &= \kappa_{n-1} + \frac{3}{40} \Delta\kappa_1 + \frac{9}{40} \Delta\kappa_2 \\
\bar{\kappa}_4 &= \kappa_{n-1} + \frac{3}{10} \Delta\kappa_1 - \frac{9}{10} \Delta\kappa_2 + \frac{6}{5} \Delta\kappa_3 \\
\bar{\kappa}_5 &= \kappa_{n-1} + \frac{226}{729} \Delta\kappa_1 - \frac{25}{27} \Delta\kappa_2 + \frac{880}{729} \Delta\kappa_3 + \frac{55}{729} \Delta\kappa_4 \\
\bar{\kappa}_6 &= \kappa_{n-1} - \frac{181}{270} \Delta\kappa_1 + \frac{5}{2} \Delta\kappa_2 - \frac{266}{297} \Delta\kappa_3 - \frac{91}{27} \Delta\kappa_4 + \frac{189}{55} \Delta\kappa_5
\end{aligned} \tag{3.38}$$



O erro de truncamento local de quinta ordem é definido pela diferença entre as equações (3.36) e (3.35):

$$\begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_n \\ \hat{k}_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sigma_n \\ k_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{11}{360} \Delta\sigma_1 - \frac{10}{63} \Delta\sigma_3 + \frac{55}{72} \Delta\sigma_4 - \frac{27}{40} \Delta\sigma_5 + \frac{11}{280} \Delta\sigma_6 \\ \frac{11}{360} \Delta k_1 - \frac{10}{63} \Delta k_3 + \frac{55}{72} \Delta k_4 - \frac{27}{40} \Delta k_5 + \frac{11}{280} \Delta k_6 \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

Com relação ao algoritmo de Euler Modificado, o esquema de Runge-Kutta-Dormand-Price tem uma seqüência de integração basicamente igual, onde há modificação apenas nos passos 8, 9, 10, 11 e 14 do algoritmo. Este método pode ser visto no esquema da figura (3.6).



**Figura 3.6 – Esquema explícito de Runge-Kutta-Dormand-Price (Pedroso, 2002)**

A seguir serão mostradas apenas as modificações deste algoritmo quanto ao do método de Euler Modificado.

***Algoritmo Explícito de Integração de Tensões de Runge-Kutta-Dormand-Price com Controle de Erro***

---

8. A variável  $i$  varia de 1 a 6, e  $\bar{\sigma}_i$  e  $\bar{k}_i$  são calculados pela equação (3.39).

9. Calcula o estado de tensão e variáveis de história novos e armazena em variável temporária de acordo com:

$$\bar{\sigma}_{T+\Delta T} = \sigma_T + \frac{19}{216} \Delta \sigma_1 + \frac{1000}{2079} \Delta \sigma_3 - \frac{125}{216} \Delta \sigma_4 + \frac{81}{88} \Delta \sigma_5 + \frac{5}{56} \Delta \sigma_6$$

$$\bar{\kappa}_{T+\Delta T} = \kappa_T + \frac{19}{216} \Delta \kappa_1 + \frac{1000}{2079} \Delta \kappa_3 - \frac{125}{216} \Delta \kappa_4 + \frac{81}{88} \Delta \kappa_5 + \frac{5}{56} \Delta \kappa_6$$

10. Determina o erro relativo para o passo atual:

$$R_{T+\Delta T} = \max \left( \left\| \frac{E_{T+\Delta T}^\sigma}{\sigma_{T+\Delta T}} \right\|, \left| \frac{E_{T+\Delta T}^\sigma}{\kappa_{T+\Delta T}} \right|, EPS \right) \quad \text{Onde:}$$

$$E_{T+\Delta T}^\sigma = \frac{11}{360} \Delta \sigma_1 - \frac{10}{63} \Delta \sigma_3 + \frac{55}{72} \Delta \sigma_4 - \frac{27}{40} \Delta \sigma_5 + \frac{11}{280} \Delta \sigma_6$$

$$E_{T+\Delta T}^\kappa = \frac{11}{360} \Delta \kappa_1 - \frac{10}{63} \Delta \kappa_3 + \frac{55}{72} \Delta \kappa_4 - \frac{27}{40} \Delta \kappa_5 + \frac{11}{280} \Delta \kappa_6$$

11. **Se**  $R_{T+\Delta T} > STOL \rightarrow$  Passo falha e deve-se determinar um passo de tempo inferior.

$$q = \max \left\{ 0,9 \left( \frac{STOL}{R_{T+\Delta T}} \right)^{1/5}; 0,1 \right\}$$

$$\Delta T \leftarrow \max \{ q \Delta T, \Delta T_{\min} \}$$

Retorna ao passo 8.

14. Determina próximo passo de tempo:

$$q = \min \left\{ 0,9 \left( \frac{STOL}{R_{T+\Delta T}} \right)^{1/5}; 1,1 \right\}$$

Se passo anterior falhou :

$$q = \min \{ q, 1 \}$$

Calcula novo passo de integração e atualiza o tempo :

$$\Delta T \leftarrow q \Delta T$$

$$T \leftarrow T + \Delta T$$

Segundo Abbo (1997) e Sloan et al. (2001) a precisão do método de Runge-Kutta-Dormand-Price deve-se a utilização pelas avaliações adicionais das relações constitutivas em cada subincremento, ou seja, através das seis avaliações de tensões e variáveis de

história por subincremento, ao contrário das duas avaliações utilizadas no método de Euler Modificado.

### 3.4 – Gradientes da Função de Fluência de Mohr Coulomb

No processo de implementação numérica a superfície de fluência e o potencial plástico são derivados com relação aos invariantes de tensão, assim como os invariantes também são derivados com relação ao tensor de tensões. Logo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, m)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, m)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, m)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial P(\boldsymbol{\sigma}, m)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\end{aligned}\quad (3.40)$$

Quando a tensão cisalhante tende a ser nula, a derivada da tensão desviadora com relação ao tensor de tensões ( $\partial J / \partial \boldsymbol{\sigma}$ ) tende ao infinito, o que leva a ocorrência de singularidade no vértice da superfície de fluência de Mohr Coulomb. Ainda observa-se que para os limites  $\theta = \pm 30^\circ$ , a derivada do ângulo de Lode quanto ao tensor de tensões ( $\partial \theta / \partial \boldsymbol{\sigma}$ ) também apresenta problemas de singularidade no caso de tensões cisalhantes nulas.

Portanto, ao utilizar-se o processo de suavização descrito no item (3.3.2), substituem-se os gradientes referentes à função de Mohr Coulomb original (equação 3.41) pelos gradientes da função suavizada (equação 3.42). Logo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{2J} \left\{ \sigma_x + p \quad \sigma_y + p \quad \sigma_z + p \quad 2\tau_{xy} \quad 2\tau_{xz} \quad 2\tau_{yz} \right\}^T \\ \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \left( \frac{c}{\tan \phi} + p \right) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2J^3 \cos 3\theta} \left[ \frac{\det s}{J} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial(\det s)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]\end{aligned}\quad (3.41)$$

Onde;

$$\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\text{sen} \phi}{\left( \cos \theta + \frac{\text{sen} \theta \cdot \text{sen} \phi}{\sqrt{3}} \right)^2} \left( \text{sen} \theta - \frac{\cos \theta \cdot \text{sen} \phi}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{J^2 K(\theta)^3}{\sqrt[3]{(a^3 \sin \phi + J^3 K(\theta)^3)^2}} \frac{1}{2J} \begin{Bmatrix} \sigma_x + p \\ \sigma_y + p \\ \sigma_z + p \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \kappa)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{J^3 K(\theta)^2}{\sqrt[3]{(a^3 \sin \phi + J^3 K(\theta)^3)^2}} \frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2J^3 \cos 3\theta} \left[ \frac{\det s}{J} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial(\det s)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]$$

Os gradientes descritos, e suas novas formas que consideram  $n = 3$ , são relativos à função de fluência tendo em vista que a forma é a mesma para o potencial plástico, onde apenas se substitui o ângulo de atrito  $\phi$  pela dilatação  $\nu$ . A parcela  $\partial K(\theta)/\partial \theta$  adotada é a definida através do método de suavização proposto por Sloan e Booker (1982) descrito por Abbo (1997) e Sousa (2004). Logo:

$$\frac{\partial K(\theta)}{\partial \theta} = \begin{cases} -\sin \theta + \sin \phi \cos \theta & \text{para } |\theta| \leq \theta_T \\ 3B \cos 3\theta & \text{para } |\theta| > \theta_T \end{cases} \quad (3.43)$$

### 3.5 – Obtenção da Matriz Tangente Visco-Elastoplástica

Devido à formulação visco-elastoplástica, determina-se uma nova matriz tangente utilizada no cálculo do conjunto de equações não-lineares através do Método de Newton-Raphson. Ao aplicar-se a formulação elasto-viscoplástica de Perzyna ao problema de elementos finitos, deve-se redefinir a equação (3.3), em função de uma matriz tangente visco-elastoplástica  $\mathbf{D}^{**}$  que por sua vez é obtida pela relação entre o tensor constitutivo elástico  $\mathbf{D}$  e um tensor viscoplástico  $\mathbf{D}^*$ . Logo:

$$\mathbf{D}^{**} = \mathbf{D}^* \mathbf{D} \quad (3.44)$$

O tensor viscoplastico  $\mathbf{D}^*$  é obtido em função de uma matriz gradiente de velocidade de deformação  $\mathbf{G}^*$ . A determinação desta matriz parte da relação constitutiva,

considerando a decomposição aditiva visco-elastoplástica, definida pela equação (2.80). Logo, aplicando a esta equação a expressão (2.86), e desenvolvendo a equação obtida, temos:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}.d\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D} \frac{\langle \zeta(F) \rangle}{\eta} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D} - \mathbf{D} \frac{\partial \varepsilon^{vp}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{D} \frac{\partial \varepsilon^{vp}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{-1} \mathbf{D} \quad (3.47)$$

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{D} \frac{\partial \varepsilon^{vp}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{-1} \mathbf{D}.d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{D}^* = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{D} \frac{\partial \varepsilon^{vp}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{-1} \quad (3.49)$$

A matriz gradiente de velocidade de deformação é definida pela teoria de Perzyna através do gradiente da taxa de deformação viscoplástica com relação ao estado de tensão atuante. Logo:

$$\mathbf{G}^* = \frac{\partial \dot{\varepsilon}^{vp}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left[ \frac{\Delta t \langle \phi(F) \rangle}{\eta} \cdot \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] \quad (2.50)$$

$$\mathbf{G}^* = \frac{\Delta t}{\eta} \left\{ \left( \frac{\partial \phi(F)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \left( \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \right)^T + \phi(F) \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \right\} \quad (2.51)$$

Onde :

$$\mathbf{D}^* = (\mathbf{I} + \mathbf{D}.\Delta t.\theta.\mathbf{G}^*)^{-1} \quad (3.52)$$

Verifica-se que há um termo de segunda ordem no cálculo da matriz gradiente, cuja determinação desta derivada é necessária para a implementação numérica e não tem solução analítica. Logo são resolvidas por aproximações através de esquemas clássicos de diferenças.

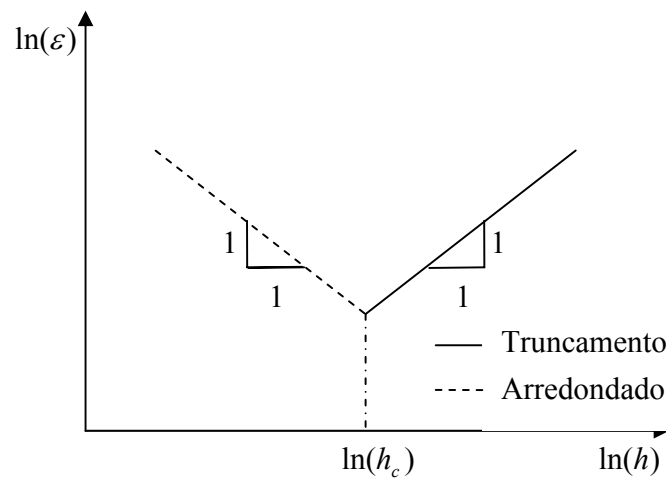
O método de aproximação numérica adotado é o apresentado por autores como Heeres (2001) e Pérez-Foguet *et al.* (2000) que sugerem a aproximação a primeiras

derivadas do vetor de fluxo, são possíveis de serem obtidas analiticamente. Para isso utilizou-se o método de diferenças para frente para primeiras derivadas do vetor de fluxo, que tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x + h_i e_i) - f(x)}{h_i} + O(h_i) \quad (3.53)$$

Num plano duplamente logarítmico (Figura 3.7) o erro de arredondamento aumenta linearmente com o decréscimo do tamanho do passo  $h_i$ . Já o erro de truncamento  $O(h_i)$  decresce linearmente quando o tamanho do passo tende a zero. O erro total é definido pela soma de ambos os erros, e existe um tamanho de passo crítico  $h_c$  em que o erro é mínimo.

Segundo Heeres (2001) para o esquema de aproximação de primeira ordem por diferenças para frente o erro total é muito pequeno, devido à inclinação 1:1 no plano duplamente logarítmico, o que implica num amplo espaço de variação do tamanho de passo e leva a uma convergência quadrática do esquema de Newton-Raphson.



**Figura 3.7 – Representação quantitativa dos erros para derivação numérica com aproximação de primeira ordem via diferenças finitas para frente.**

## 4 – CASOS ANALISADOS

---

Neste capítulo serão apresentados e discutidos os problemas analisados utilizando os algoritmos explícitos implementados no presente trabalho. A verificação do desempenho e funcionalidade dos algoritmos está apresentada através do tempo total de processamento em CPU (*CPUTIME*) e do número de interações (*NUMPASS*), bem como por meio da comparação dos resultados com os obtidos em trabalhos com soluções dos mesmos tipos de problema.

Quatro exemplos são apresentados e suas respectivas análises de resultados por meio das saídas gráficas de pós-processo, onde são descritas as variações, em função do estado de tensão atuante, de parâmetros como porosidade, deformações plásticas e/ou viscoplásticas, reações nodais, deslocamentos nodais e tensões principais.

### 4.1 – Expansão de Cavidade Cilíndrica

A teoria de expansão de cavidade tem várias aplicações na geotecnia, onde a principal ênfase é dada em casos de interpretação de ensaios de campo, seja com relação a pressurômetros, ensaios de penetração de cone e até na análise do comportamento de estacas. Este tipo de análise é também estendido a problemas de entalhe metálico.

Dentre os trabalhos realizados com a abordagem de expansão de cavidade podem-se citar Hill (1950), Burd e Houlsby (1990), Yu e Houlsby (1991 e 1992), Abbo (1997), Sloan et al. (2000) e Plešek e Korouš (2002).

Neste item são apresentados os resultados numéricos para dois casos de expansão de cavidade cilíndrica, sendo o primeiro um caso análogo ao apresentado em Sloan et al. (2000) para plasticidade em solos, e o segundo consiste em um problema apresentado por Plešek e Korouš (2002) para viscoplasticidade em cavidade metálica.

### 4.1.1 – Análise de Expansão de Cavidade Cilíndrica pelo critério de Mohr Coulomb.

O caso de expansão de cavidade cilíndrica apresentado neste item pode ser também encontrado em Abbo (1997), Sloan et al. (2000), com solução analítica apresentada por Yu (1992), e consiste em um problema modelado utilizando o critério de plastificação de Mohr-Coulomb com suavização hiperbólica para simular o carregamento drenado.

O problema físico proposto por Abbo (1997) e Sloan et al. (2000) pode ser visto na figura (4.1), onde apresenta 1/4 (um quarto) de cavidade cilíndrica de dimensões  $b/a = 2$ , solicitada internamente por uma pressão  $p$  prescrita e com as devidas condições de contorno de restrição de movimento, onde a pressão total durante a análise é  $p/c = 0,9808$  e é aplicada em 50 incrementos.

A análise é do tipo deformação plana, considerando plasticidade perfeita e associada. A malha de elementos finitos possui elementos quadrilaterais estruturados de quatro nós, com um total de 451 nós e 400 elementos, conforme a figura 4.2.

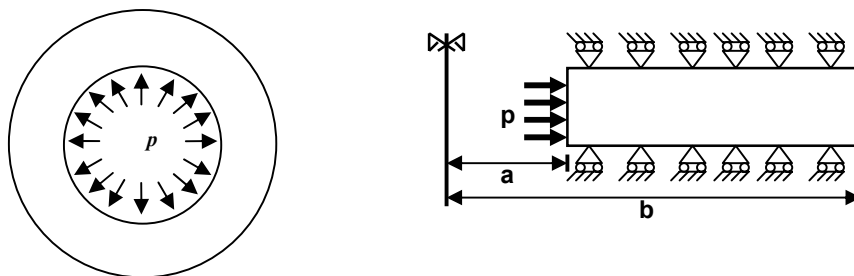


Figura 4.1 – Cavidade Cilíndrica – Problema Físico.

Os trabalhos de Abbo (1997) e Sloan et al. (2000) apresentam uma solução apenas para análises elastoplásticas. Diante disso neste item também é apresentada uma solução numérica baseada em uma análise visco-elastoplástica de forma a comparar os resultados por essa obtidos com os referentes à análise elastoplástica.

As propriedades do material estão descritas na Tabela 1, onde para a análise visco-elastoplástica são definidos o expoente de função  $N$ , e dois parâmetros de viscosidade  $\eta$ , de forma a analisar a eficiência do modelo viscoplástico para diferentes níveis de viscosidade.



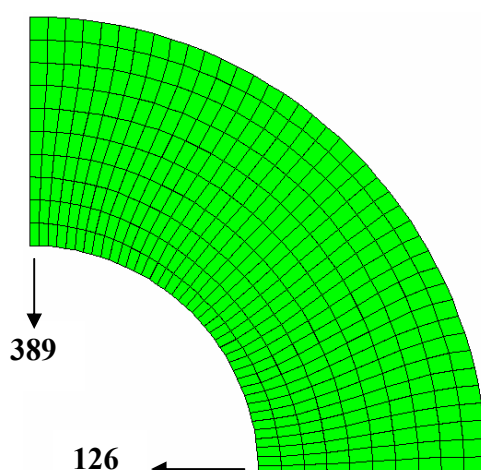


Figura 4.2 – Malha de Elementos Finitos: elementos quadriláteros de 4 nós

Tabela 1 – Propriedades do Material para diferentes tipos de análises.

Tipo de Análise	Parâmetros						
	$E/c$	$\phi = \psi$	$\nu$	$b/a$	$p_0$	$N$	$\eta / \Delta t$
<b>Elastoplástica</b>	1000	30°	0,30	2	0	---	---
<b>Elasto-viscoplástica</b>						1	10 <sup>3</sup> 10 <sup>2</sup>

De posse dos resultados obtidos na análise numérica via método dos elementos finitos, apresenta-se na figura 4.3 a solução numérica para ambos os métodos de integração explícita, Euler Modificado e Runge-Kutta-Dormand-Price. As análises foram feitas para quatro tolerâncias de erro (*STOL*) distintas, ou seja,  $STOL = 10^{-2}$ ,  $STOL = 10^{-3}$ ,  $STOL = 10^{-4}$  e  $STOL = 10^{-5}$ , onde as curvas apresentadas se referem ao resultado obtido para o valor de tolerância de  $STOL = 10^{-4}$ . Observa-se que as curvas carga-deslocamento, que se referem à análise da parte interna da cavidade cilíndrica (deslocamento radial interno), basicamente se sobrepõem o que leva à uma diferença muito pequena, na ordem da tolerância adotada, entre os resultados obtidos por ambos os métodos, no relativo a esse tipo de resposta.

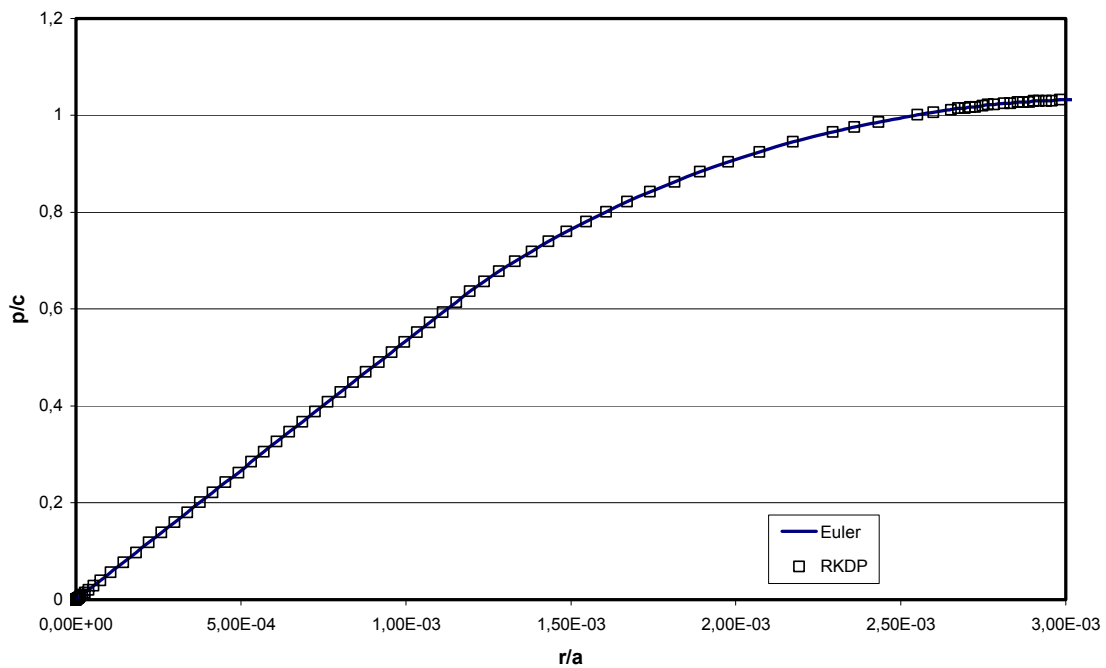
A comparação entre a solução numérica deste trabalho e os resultados mostrados por Yu (1992) e Sloan et al. (2000) está descrita na figura 4.4. O patamar de tensão de ruptura atingido é um pouco superior ao obtido através da solução analítica (equação 4.1)

proposta por Yu (1992) que prediz que o colapso ocorre para  $p/c = 1,0174$ . Observa-se ainda que a curva obtida neste trabalho sobrepõe-se na curva obtida pela análise numérica realizada por Sloan et al. (2000), e que a reta vermelha tracejada no gráfico corresponde à projeção do valor de pressão de colapso que coincide com o valor final apresentado por Yu (1992).

$$p/c = \frac{Y + (\alpha - 1)p_0}{c(\alpha - 1)} \left( (b/a)^{(\alpha-1)/\alpha} - 1 \right) + p_0/c$$

Onde :

$$Y = \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} \quad \text{e} \quad \alpha = \tan^2(45 + \phi/2) \tag{4.1}$$

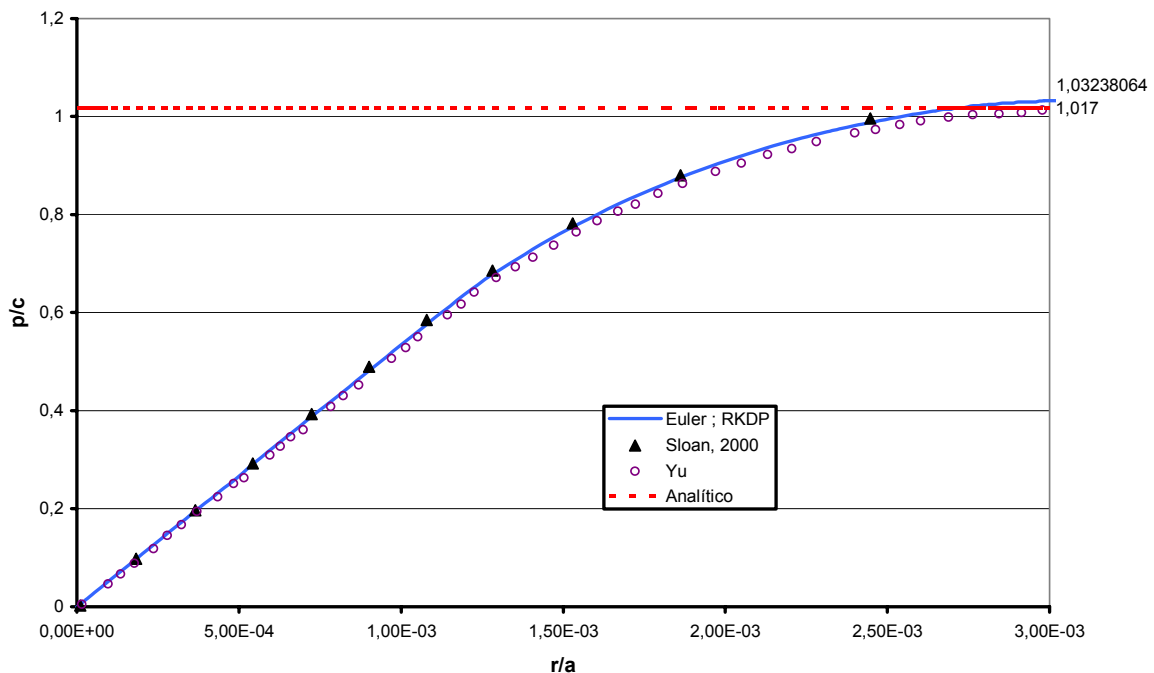


**Figura 4.3 – Gráfico Carga-Deslocamento para análise elastoplástica ( $STOL=10^{-4}$ ): comparação entre os métodos explícitos de Euler Modificado e Runge-Kutta-Dormand-Price.**

A solução obtida então para o colapso é de  $p/c \cong 1,0324$  para um deslocamento radial de  $r/a = 3,0 \times 10^{-3}$ , ou seja, para o mesmo nível de deslocamento atingido nos outros

trabalhos usados como referência, chegando-se a uma diferença de  $p/c \cong 0,0150$  entre a solução numérica obtida e a analítica.

A Tabela 2 mostra os resultados em termos de tempo total de processamento em CPU (*CPUTIME*) e número total de iterações (*NUMPASS*), de forma a comparar o desempenho dos métodos de integração implementados, para as tolerâncias (*STOL*) adotadas.



**Figura 4.4 – Curva Carga-Deslocamento para análise elastoplástica ( $STOL=10^{-4}$ ): comparação com solução analítica (Yu, 1992) e de Sloan et al. (2000).**

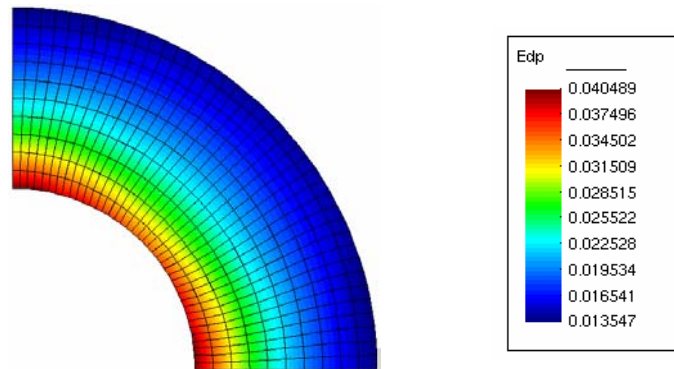
Segundo Sloan et al. (2000) o melhor indicador do desempenho das várias estratégias de solução é o seu tempo total de CPU, pois este reflete a complexidade do método quanto ao problema. Com base nisto a presente análise de desempenho é feita com ênfase neste aspecto, onde para a tolerância mais alta,  $STOL = 10^{-2}$ , o tempo de CPU para o método de Euler é, em segundos, de  $CPUTIME = 54,743$  enquanto que para o método de Runge-Kutta esse alcança o valor de  $CPUTIME = 78,96$ , ou seja, para esse nível de tolerância a eficiência do método de Euler Modificado é superior ao de Runge-Kutta.

Isso ocorre para tolerâncias de erro que variam até  $STOL = 10^{-3}$ , pois para tolerâncias inferiores a este limite ( $STOL \leq 10^{-4}$ ) o método de Runge-Kutta mostra um melhor resultado quanto ao tempo de CPU, o que se verifica no trabalho de Sloan (1987). Observa-se ainda que, para todos os níveis de tolerância de erro ( $STOL$ ), o método de Runge-Kutta se apresenta como muito estável com relação aos tempos de CPU, pois, não leva a variações muito bruscas, para diferentes tolerâncias, entre os tempos de processamento do problema, enquanto que no método de Euler Modificado se verifica o inverso disso, pois, com a redução da tolerância os tempos de CPU crescem de forma considerada.

**Tabela 2 – Resultados de algoritmos para análise elastoplástica de cavidade cilíndrica por Mohr Coulomb.**

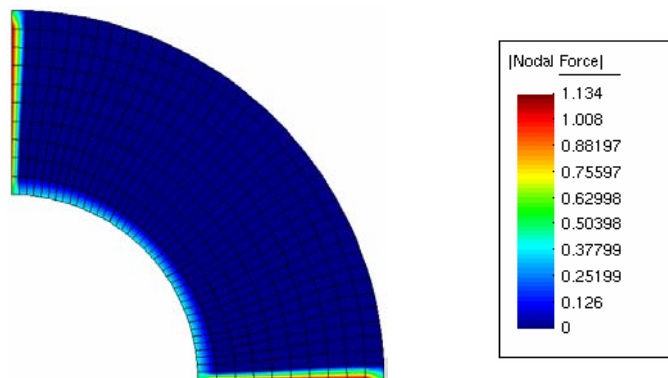
Métodos	Euler Modificado				Runge-Kutta-Dormand-Price			
	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
STOL	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
CPUTIME	54,743	61,205	88,187	170,929	78,96	78,808	79,638	84,255
NUMPASS	640	619	591	592	588	580	586	585

Segue-se com a análise dos resultados gráficos de pós-processamento obtidos no programa GID – 7.2, onde são obtidas as variações de parâmetros do material as quais são discutidas. Uma primeira análise se faz da variação da deformação plástica conforme a figura (4.5), onde se observa que essas possuem maior intensidade na parte interna da cavidade, sendo distribuída de forma aproximadamente uniforme à medida que se aproxima da parte externa. Há uma concentração maior de deformação na região mais interna da cavidade próxima aos apoios e mais suavizada na parte central do arco, onde isso se dá devido ao estado de tensões diferenciado gerado nas proximidades dos apoios nessa região em função da distribuição de forças nodais (Figura 4.6.b) nos nós 389 e 126 (mostrados na Figura 4.2).

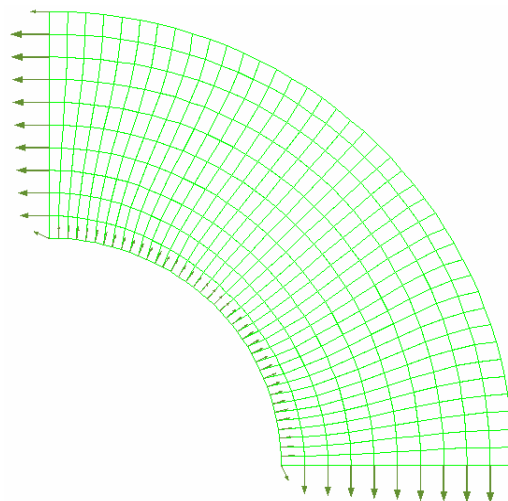


**Figura 4.5 – Distribuição de deformações plásticas.**

As forças nodais distribuem-se uniformemente no arco interno da cavidade e de forma variada nos apoios, conforme o mostrado na figura (4.6).



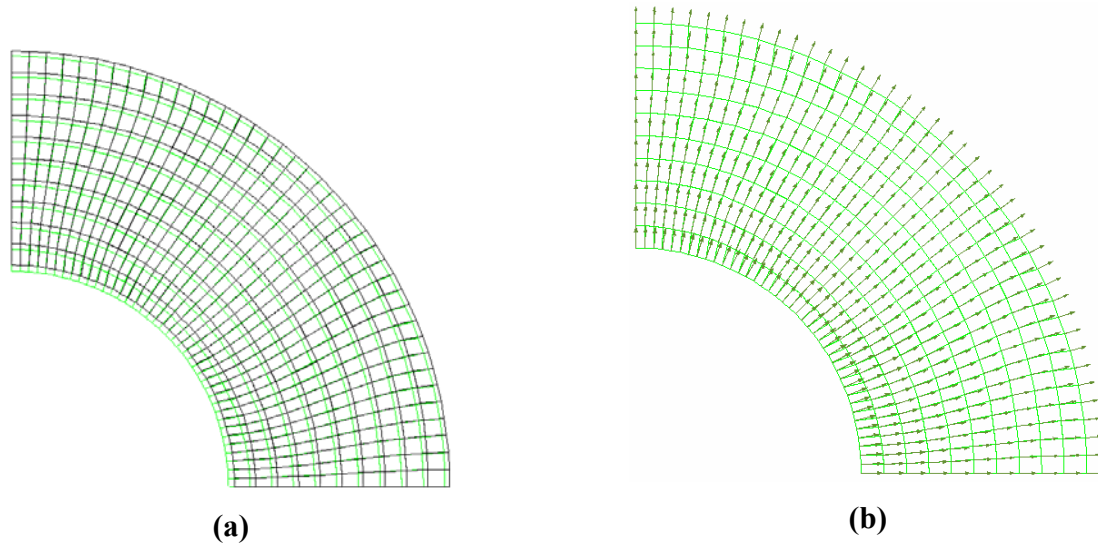
**(a)**



**(b)**

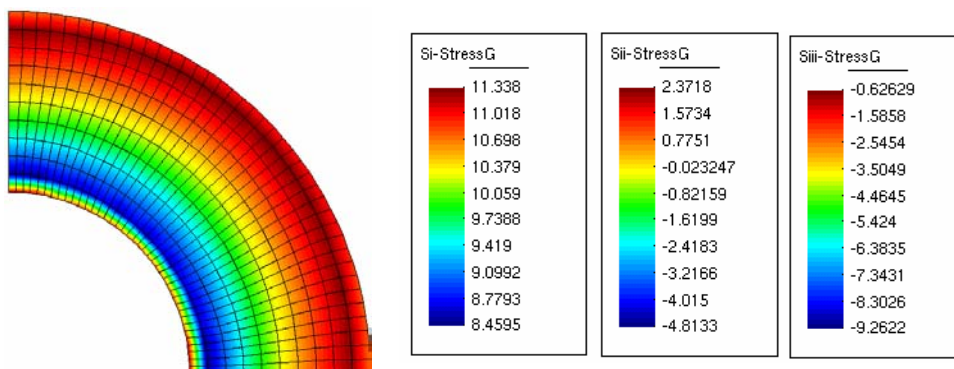
**Figura 4.6 – (a) Distribuição de forças nodais; (b) Vetores de forças nodais.**

Uma outra análise é feita com relação aos deslocamentos sofridos pela cavidade cilíndrica, onde se verifica um deslocamento uniforme e decrescente ao longo do raio da cavidade partindo da face interna para a externa. Os vetores de deslocamento e a malha deformada podem ser visualizados na figura (4.7).

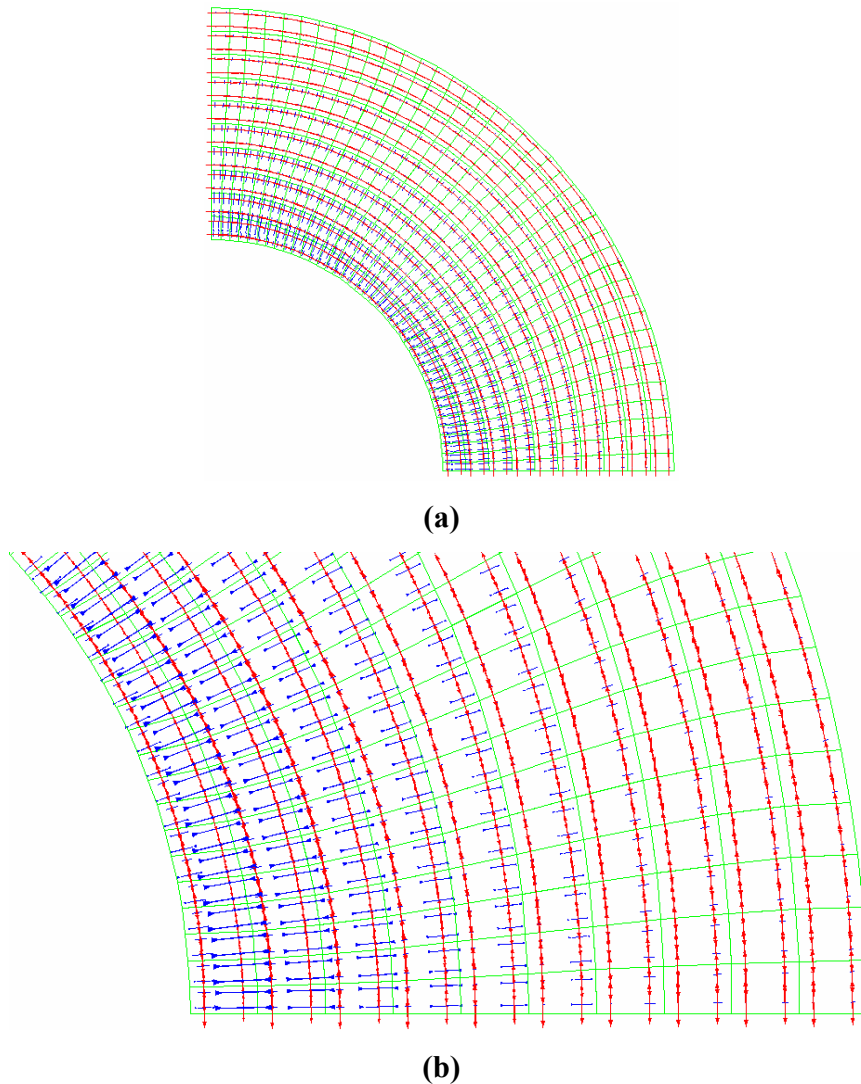


**Figura 4.7 – (a) Malha deformada; (b) Vetores de deslocamento.**

A análise do estado de tensões é feita em termos de tensões principais, onde, de acordo com a figura (4.8), a distribuição destas tensões é a mesma ao longo da cavidade, variando apenas a forma de sollicitação (tração ou compressão) e a intensidade, e os vetores de tensões principais (Figura 4.9) mostram as direções assumidas pelo estado tensional.



**Figura 4.8 – Distribuição das tensões principais**



**Figura 4.9 – (a) Distribuição de vetores de tensões principais; (b) Detalhe da distribuição de vetores de tensões principais.**

As tensões principais  $\sigma_1$  atuam na forma de tração seguindo o sentido do arco da cavidade, onde as solicitações de maior intensidade encontram-se nas zonas de maior susceptibilidade a esse tipo de esforço, ou seja, nos elementos localizados na região mais interna da cavidade e principalmente na região mais externa que é uma zona mais propícia à tração e sem efeitos muito grandes de compressão. São representadas por vetores de cor vermelha que se distribuem seguindo a curvatura da cavidade, como visto na figura (4.9).

Já as tensões principais  $\sigma_2$  ocorrem no sentido normal ao plano (representadas por pontos na figura (4.9) da cavidade cilíndrica, onde estas produzem tração na superfície

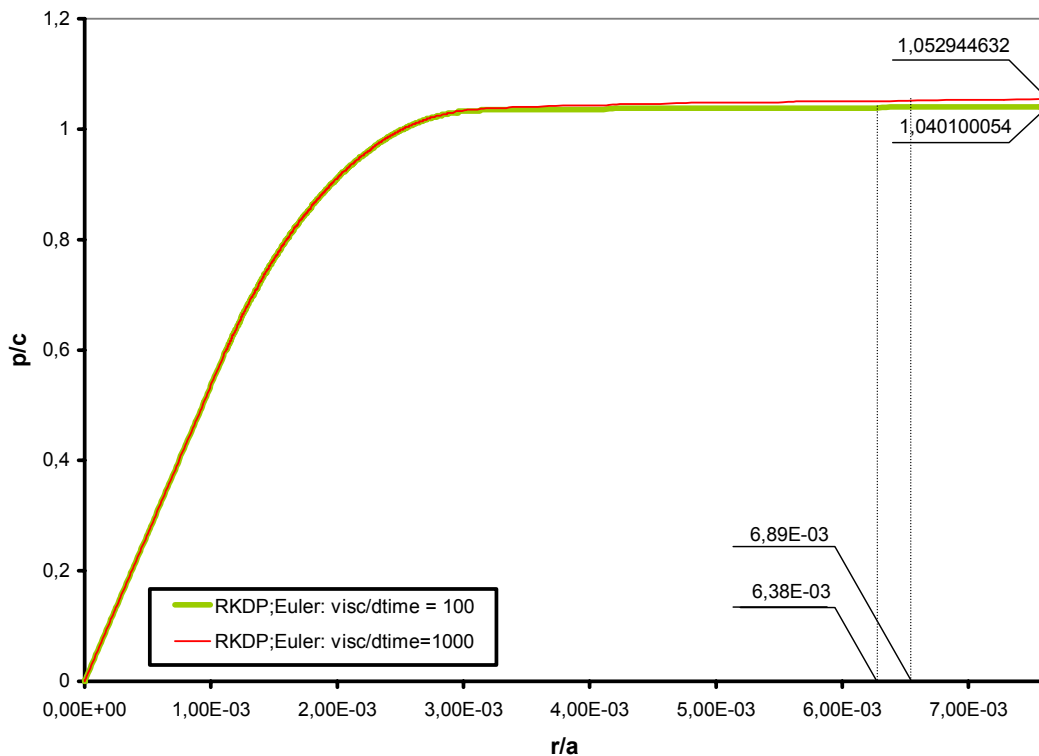
interna da cavidade e compressão nos três primeiros arcos de elementos mais internos. Estas tensões tornam a produzir tração nos elementos da região situada entre a metade e a parte mais externa da cavidade.

Por fim, as tensões principais  $\sigma_3$  atuam de forma unicamente compressiva e decrescendo radialmente, e de forma uniforme (Figura 4.9.b) a partir do raio interno até o raio externo. Estas tensões são representadas pelos vetores de cor azul e se concentram com maior intensidade na região interna da cavidade cilíndrica.

Passa-se então, à análise visco-elastoplástica que, como já visto, foi feita considerando duas situações de parâmetros viscosos, ou seja,  $\eta/\Delta t = 10^2$  e  $\eta/\Delta t = 10^3$ . A aplicação da pressão no anel interno da cavidade foi feita para dois valores distintos de tolerância  $STOL = 10^{-2}$  e  $STOL = 10^{-4}$ , de forma a comparar os métodos com a consideração do comportamento viscoso. Os outros valores de tolerância adotados na análise elastoplástica não foram utilizados por ter-se verificado a eficácia dos algoritmos nessa análise.

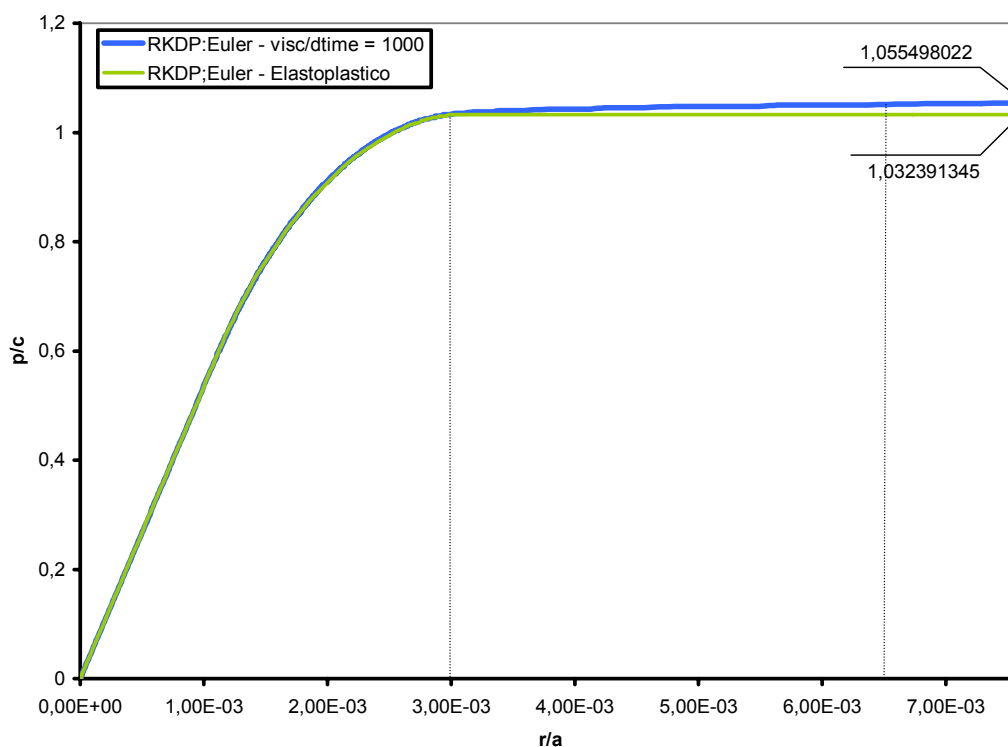
Obteve-se um patamar de escoamento mais elevado que na análise elastoplástica com um deslocamento radial também superior. Conforme a figura (4.10), as curvas de carga-deslocamento para as análises feitas com as duas situações de viscosidade são diferentes entre si, onde para  $\eta/\Delta t = 10^3$  atinge-se um patamar de carga de  $p/c \cong 1,0529$  para um deslocamento de  $r/a = 0,0069$  enquanto que, para  $\eta/\Delta t = 10^2$ , o patamar de carga é atingido para um valor de  $p/c \cong 1,0401$  para um deslocamento de  $r/a = 0,00638$ .





**Figura 4.10 – Curva Carga-Deslocamento para análise viscoplástica ( $STOL=10^{-4}$ ): comparação entre dois parâmetros de viscosidade diferentes.**

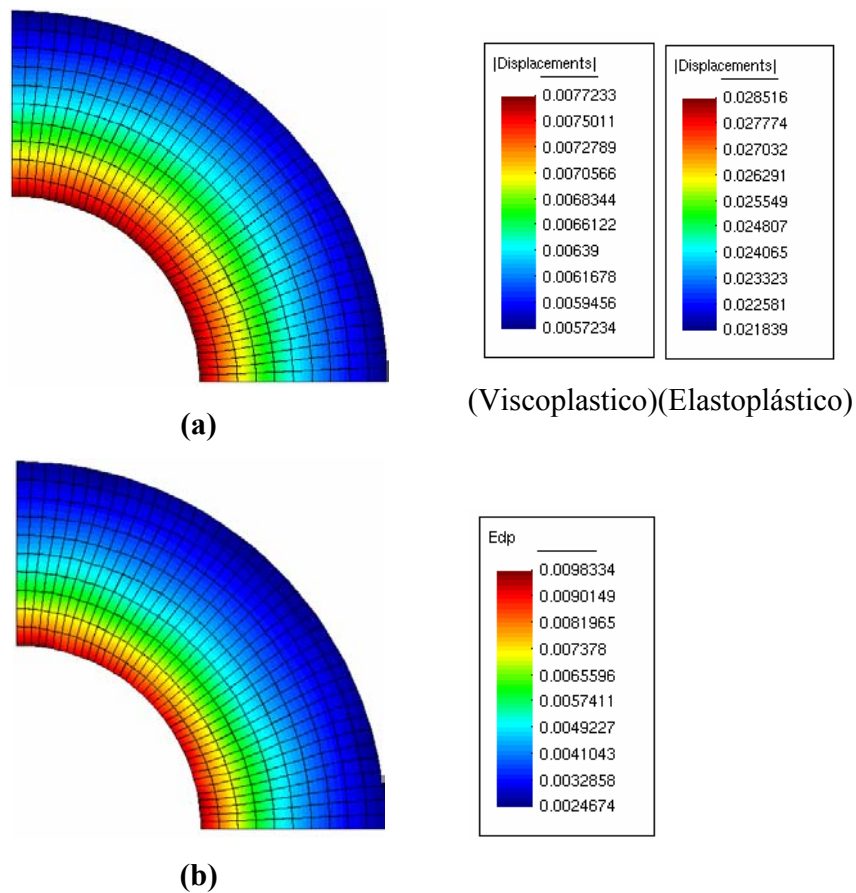
Na figura (4.11) pode-se comparar a curva da análise visco-elastoplástica, considerando  $\eta / \Delta t = 10^3$ , com a análise elastoplástica. Observa-se que o colapso na análise elastoplástica ocorre para um nível de carga um pouco abaixo do patamar de carga alcançado, para a análise visco-elastoplástica, chegando-se a uma diferença de  $p/c \cong 0,00205$ , o que leva a compreender que o material apresenta uma resistência mais elevada quando considerada sua propriedade viscosa. Para este valor de patamar de carga observa-se um deslocamento radial no arco interno da cavidade  $r/a \cong 0,00389$  superior ao deslocamento da cavidade para uma análise elastoplástica.



**Figura 4.11 – Gráfico Carga-Deslocamento: comparação entre análises visco-elastoplástica e elastoplástica.**

Uma consequência da análise visco-elastoplástica é que, para um estado de tensões equivalente ao da análise elastoplástica, os deslocamentos sofridos ao fim do processo são menores (Figura 4.12a), pois não ocorre o colapso do material, e seu estado tensional continua variando com o tempo. Para um mesmo nível de tensões, as deformações viscoplásticas (Figura 4.12b) são bem inferiores às deformações plásticas (Figura 4.5) da análise elastoplástica e, portanto o suporte de carga da cavidade é maior.

Uma outra observação a ser feita é que quanto menor for a relação  $\eta/\Delta t$ , mais próximo será o comportamento do material do comportamento elastoplástico. Logo, o inverso dará maior resistência ao material e estabilidade computacional da análise.



**Figura 4.12 – Análise visco-elastoplástica: (a) Distribuição de deslocamentos para ambas as análises; (b) Distribuição de deformações viscoplásticas.**

A comparação do desempenho dos métodos de integração implementados neste trabalho, quanto à análise visco-elastoplástica, pode ser vista na Tabela 3.

**Tabela 3 – Resultados de algoritmos para análise visco-elastoplastica de cavidade cilíndrica por Mohr Coulomb.**

Métodos	Euler Modificado				Runge-Kutta-Dormand-Price			
	$\eta/\Delta t = 100$		$\eta/\Delta t = 1000$		$\eta/\Delta t = 100$		$\eta/\Delta t = 1000$	
	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$
STOL	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$
CPUTIME	9423	5246,5	1057,03	583,04	6469,9	5106,6	706,73	477,142
NUMPASS	170358	72780	19104	8401	94692	64009	10320	5295

Com base nos resultados acima apresentados verifica-se que o método de Runge-Kutta é mais eficiente do que o Método de Euler Modificado em todas as situações de viscosidade, assim como para todos os valores de tolerância utilizados. As tensões são calculadas de forma que o erro relativo calculado para seis estimativas de tensões é menor que o calculado para o método de Euler Modificado, o que leva este segundo a uma maior dependência dos parâmetros de tolerância do controle de erro.

#### 4.1.2 – Análise de Expansão de Cavidade Cilíndrica pelo critério de Von Mises.

Neste item está descrito o caso de análise de expansão de cavidade cilíndrica de um material metálico, tomando como referência o trabalho de Plešek e Korouš (2002). O problema físico é análogo ao apresentado no item anterior e a verificação é feita utilizando o algoritmo explícito de Runge-Kutta-Dormand-Price, tendo em vista que sua eficácia foi verificada anteriormente. Busca-se então verificar a aplicação do método de integração ao modelo viscoplástico de Perzyna.

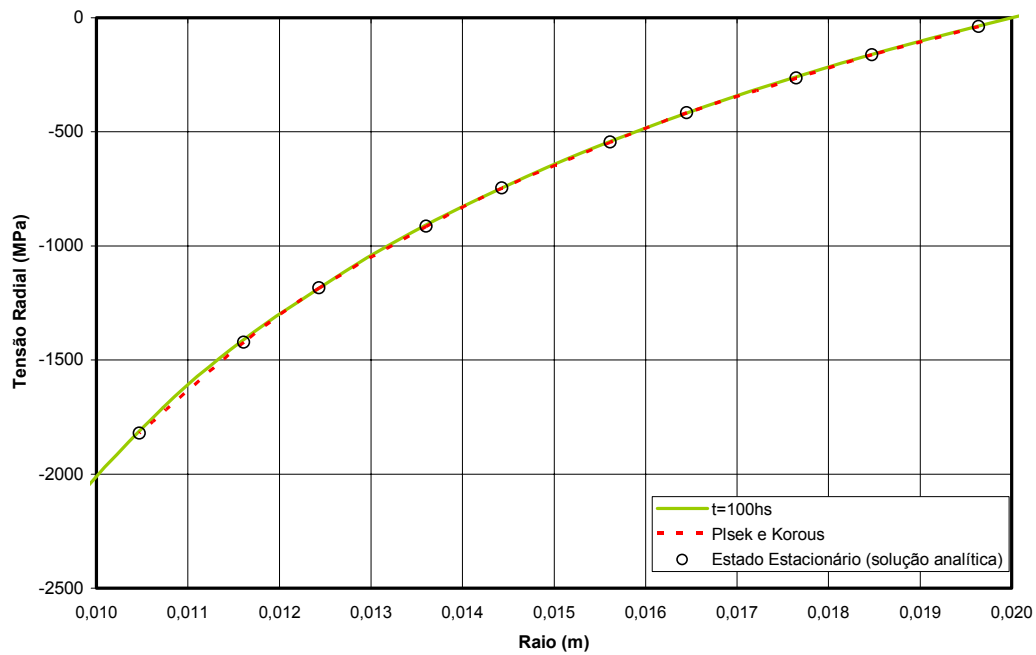
A análise é feita utilizando o critério de Von Mises, onde o tubo é submetido a um carregamento interno  $p = 2000$  MPa. É adotado o modelo visco-elastoplástico de Perzyna do tipo *quasi-linear* ( $N = 1$ ), e são analisadas as tensões radial, tangencial e axial, e o objetivo da análise é obter estas tensões para o estado estacionário, onde Plešek e Korouš (2002) definem a solução analiticamente de acordo com a expressão (4.2). Os parâmetros do material e do problema são descritos na tabela 4.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{p + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_y \cdot \ln \frac{a}{b}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} \left[ 1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2 \right] + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_y \left( \ln \frac{r}{b} \right) \\ \sigma_t &= \frac{p + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_y \cdot \ln \frac{a}{b}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1} \left[ 1 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 \right] + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_y \left( \ln \frac{r}{b} + 1 \right) \\ \sigma_a &= \frac{1}{2} (\sigma_t + \sigma_r)\end{aligned}\tag{4.2}$$

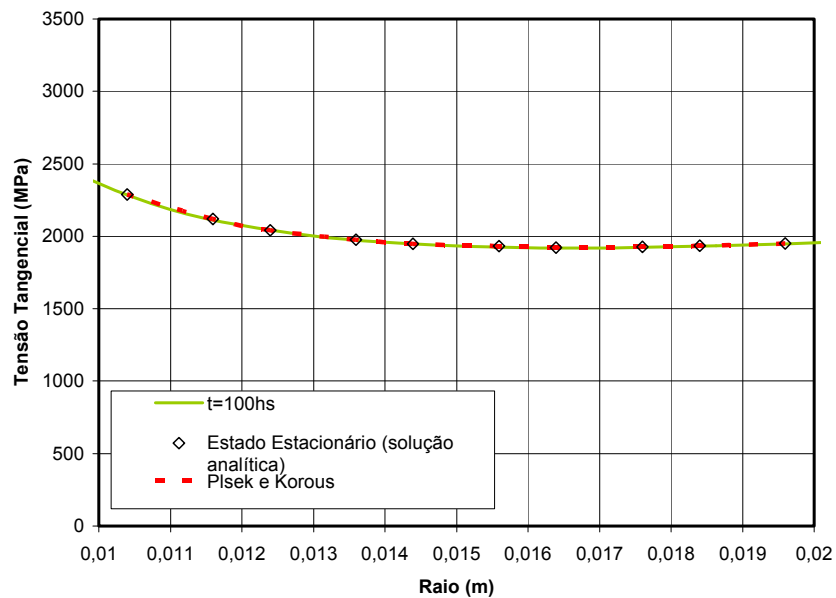
Segundo Plešek e Korouš (2002), a distribuição de tensões se aproxima da solução do estado estacionário quando  $t \rightarrow \infty$ . Os resultados da análise estão expressos nas figuras (4.13), (4.14) e (4.15) para as tensões radial, tangencial e axial, respectivamente.

**Tabela 4 – Parâmetros do Problema de Expansão de Cavidade por Von Mises**

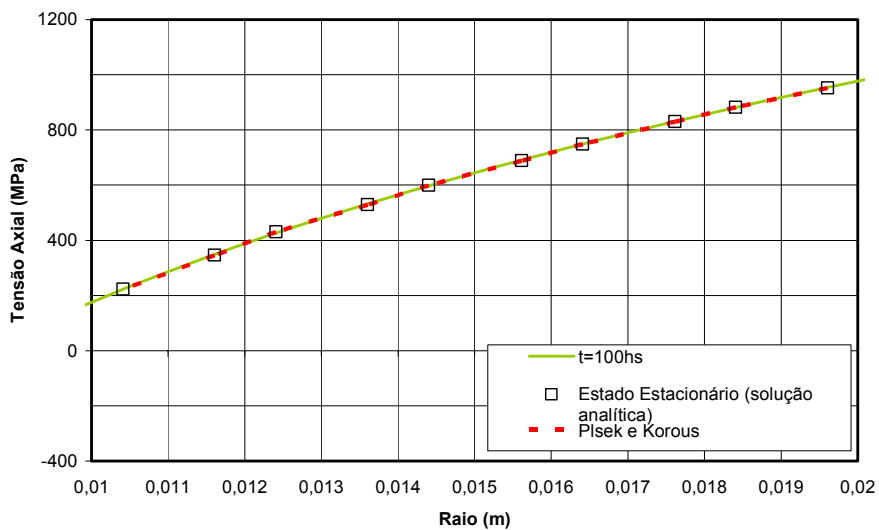
Tipo de Análise	Parâmetros						
	$E$ (MPa)	$\sigma_y$ (MPa)	$\nu$	$b/a$	$p_0$ (MPa)	$N$	$\eta/\Delta t$
Elasto-viscoplástica	$10^6$	1000	0,33	2	2000	1	$10^4$



**Figura 4.13 – Resultado numérico da tensão radial no regime estacionário.**



**Figura 4.14 – Resultado numérico da tensão tangencial no regime estacionário.**



**Figura 4.15 – Resultado numérico da tensão axial no regime estacionário.**

Os valores de tensão radial, tangencial e axial obtidos numericamente correspondem graficamente, conforme as figura anteriores, às curvas obtidas pela solução numérica (Plešek e Korouš ,2002) e pela solução analítica.

Para esta análise verificou-se que o estado estacionário foi atingido para um tempo de 100 horas, ao contrário da análise feita por Plešek e Korouš (2002), onde regime

estacionário foi alcançado para um tempo de 1000 horas. Esta diferença deve-se aos parâmetros utilizados na regra de fluxo adotada, onde neste trabalho aplica-se um multiplicador viscoplástico definido em função do parâmetro  $\eta$  ( $KNs/m^2$ ), que se distingue do parâmetro viscoso adotado no trabalho citado definido por  $\gamma$  ( $s^{-1}$ ).

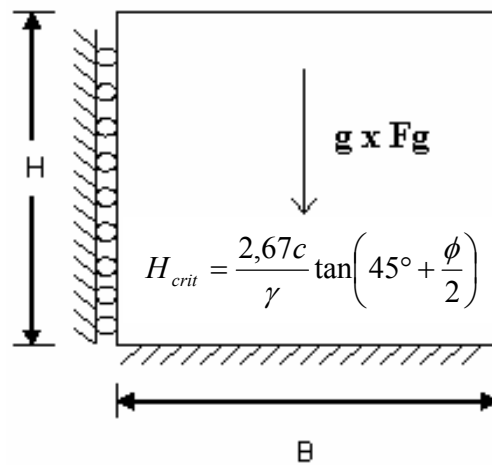
Pode-se observar através dos resultados que o método explícito utilizado neste trabalho apresenta eficiência em seus resultados, aplicando o modelo viscoso de Perzyna, pois atinge de forma relativamente precisa os valores analíticos obtidos.

## 4.2 – Análise de Talude Vertical

Para este tipo de problema, objetiva-se uma análise da estabilidade quanto à ruptura, de um talude vertical, de altura de 10 metros, através dos modelos elastoplástico e visco-elasto plástico, de forma a verificar a eficiência de ambos para um problema de ruptura crítico que exige um grande custo computacional. Para isso utiliza-se o método explícito de Runge-Kutta-Dormand-Price, com uma tolerância  $STOL = 10^{-4}$ , por ter se apresentado como um método mais consistente e estável numericamente que o método de Euler Modificado, segundo as verificações do item (4.1).

A análise é feita verificando a formação da superfície de ruptura do talude através da distribuição das deformações plástica e viscoplástica, através dos deslocamentos resultantes e das tensões atuantes. Por ser um problema unicamente mecânico a simulação da perda de resistência do material do talude é feita através do aumento, com o tempo, da gravidade aplicada por um fator de gravidade ( $0 \leq Fg \leq 4,5$ ).

A altura crítica é definida pela expressão analítica utilizada por Terzaghi (Caputo, 1983; Guidicini, 1983) para taludes verticais, em função do peso próprio, onde a ruptura deverá ter início quando a condição de altura crítica não for satisfeita. O problema físico e a expressão analítica de Terzaghi estão esquematizados na figura (4.16), e as propriedades do material e os parâmetros do problema estão descritos na Tabela 5.



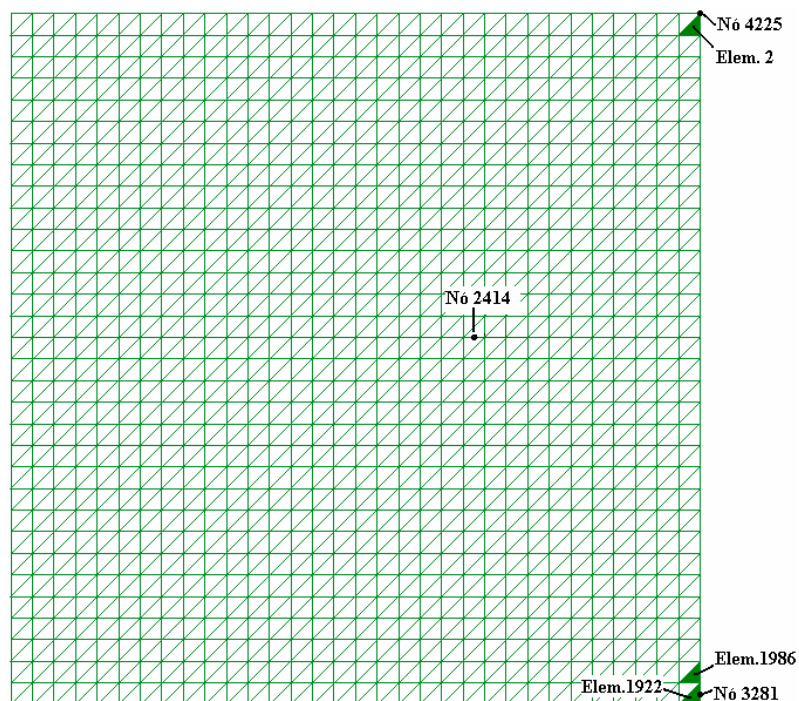
**Figura 4.16 – Problema Físico – Talude Vertical**

Para ambas as análises, utiliza-se o critério de Mohr-Coulomb com suavização hiperbólica, aplicado a um problema de deformação plana por meio de um programa de elementos finitos para uma malha discretizada de forma estruturada composta por elementos triangulares de seis nós, totalizando em 4225 nós e 2048 elementos (Figura 4.17). A condição de colapso é indicada pela não convergência do programa de elementos finitos (Griffiths e Lane, 1999).

**Tabela 5 – Parâmetros do Problema de Talude Vertical**

Tipo de Análise	Parâmetros					
	$E$ (MPa)	$c / \gamma H$	$\phi$	$B / H$	$N / F_0$	$\eta / \Delta t$
<b>Elastoplástica</b>	$10^2$	0,05	$30^\circ$	1	--	--
<b>Elasto-viscoplástica</b>					1	$10^2$





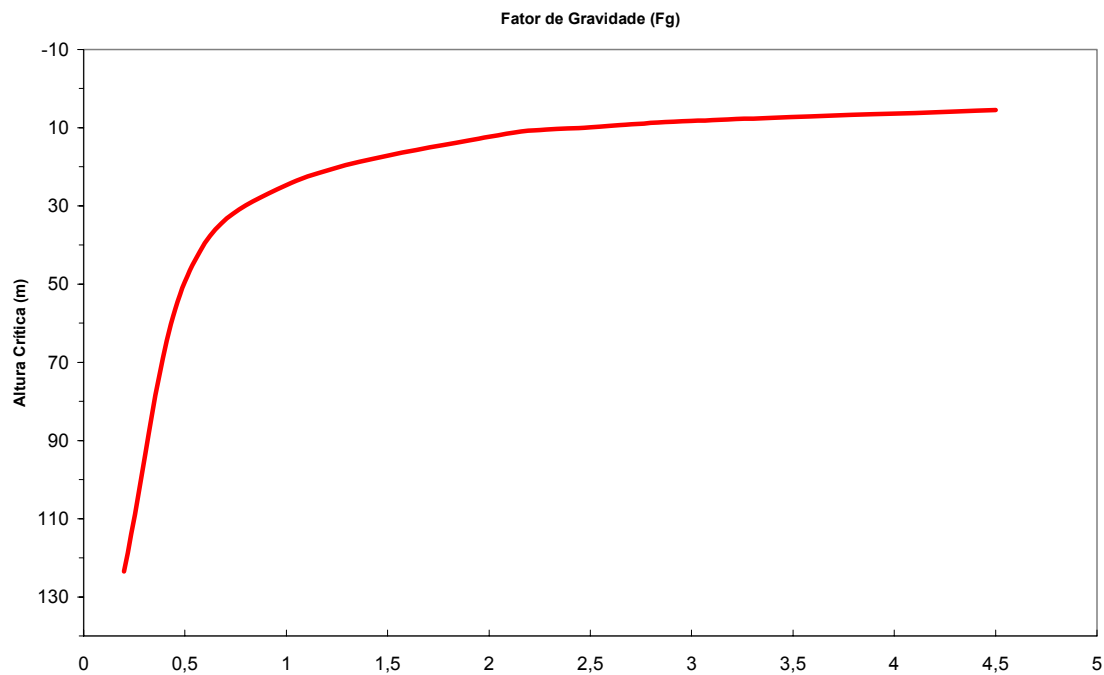
**Figura 4.17 – Malha de elementos finitos.**

O talude apresenta comportamento de ruptura para um fator ( $Fg$ ) definido na figura (4.18), para ambos os problemas, onde ao atingir o fator máximo, o caso elastoplástico apresenta problemas de convergência, enquanto que ao considerar o comportamento viscoso do material, o problema não converge para um fator ( $Fg$ ) máximo e por um tempo de submissão a este estado de perda de resistência mais prolongado. O fator  $Fg$  representa o fator de gravidade aplicado ao longo do tempo, cujo valor de referência é de  $g = 10,0m/s^2$ . Este fator leva ao aumento do peso próprio do material definido pela equação (4.3):

$$\gamma_t = \rho_s \cdot Fg \cdot g \quad (4.3)$$

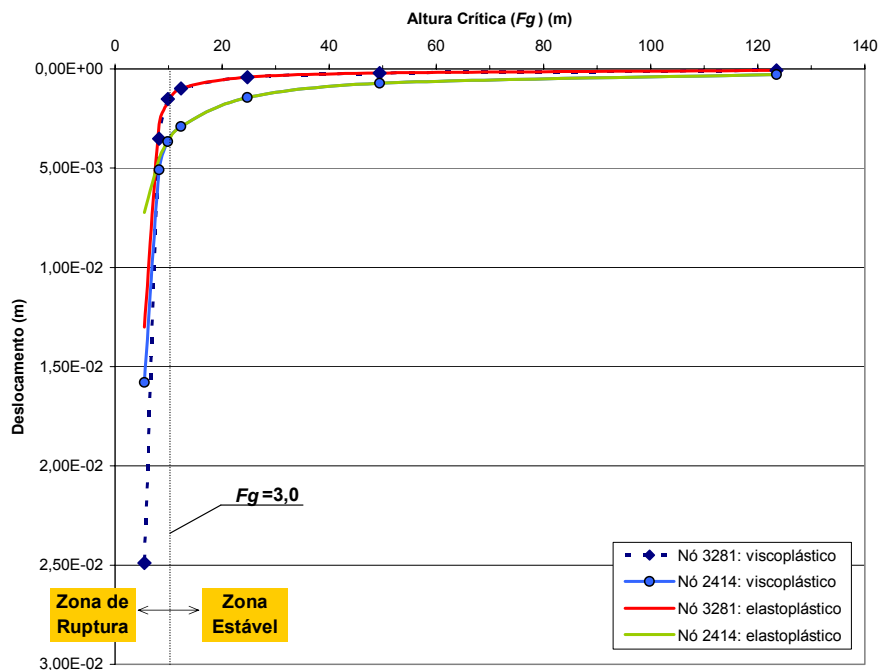
Onde  $\gamma_t$  é o peso próprio do talude,  $\rho_s$  é o peso específico do solo e  $g$  é a aceleração da gravidade.

A verificação numérica quanto a solução analítica de Terzaghi para determinação da altura crítica de taludes verticais, apresenta-se na figura (4.18) que mostra a evolução das deformações, obtidas numericamente, em função das alturas críticas obtidas a partir da variação do peso específico, que por sua vez é dependente do fator de gravidade usado.



**Figura 4.18 – Variação da Altura Crítica do Talude com o Fator de Gravidade Aplicado.**

Espera-se que para uma altura crítica superior a dez metros, que consiste na altura do talude analisado, os deslocamentos se desenvolvam de forma mais representativa e crescente comparados aos apresentados para valores de altura até dez metros. Isto pode ser observado na figura (4.19), onde para ambas as análises, elastoplástica e viscoelastoplástica, a estrutura sofre um aumento brusco dos deslocamentos decorrente do processo de ruptura do material.



**Figura 4.19 – Evolução dos Deslocamentos com a Altura Crítica.**

Com relação à verificação dos resultados obtidos quanto a solução analítica de Terzaghi, verifica-se que os deslocamentos horizontais passam a ser mais acentuados a partir do fator de gravidade que excede o limite de altura crítica, ou seja, a partir de um  $F_g \approx 3,0$ . Isso pode ser visto na figura (4.20), onde estão representados graficamente os deslocamentos variando com o fator de gravidade aplicado.

Na figura (4.21), o mesmo comportamento pode ser observado na análise da evolução das deformações plásticas cisalhantes com o fator de gravidade. Estas deformações desenvolvem-se a partir de um fator de gravidade em torno de  $F_g \approx 2,5$ , e assumem valores progressivamente elevados a partir do momento em que se excede a altura crítica do talude, ou seja, para um fator  $F_g \approx 3,0$ .

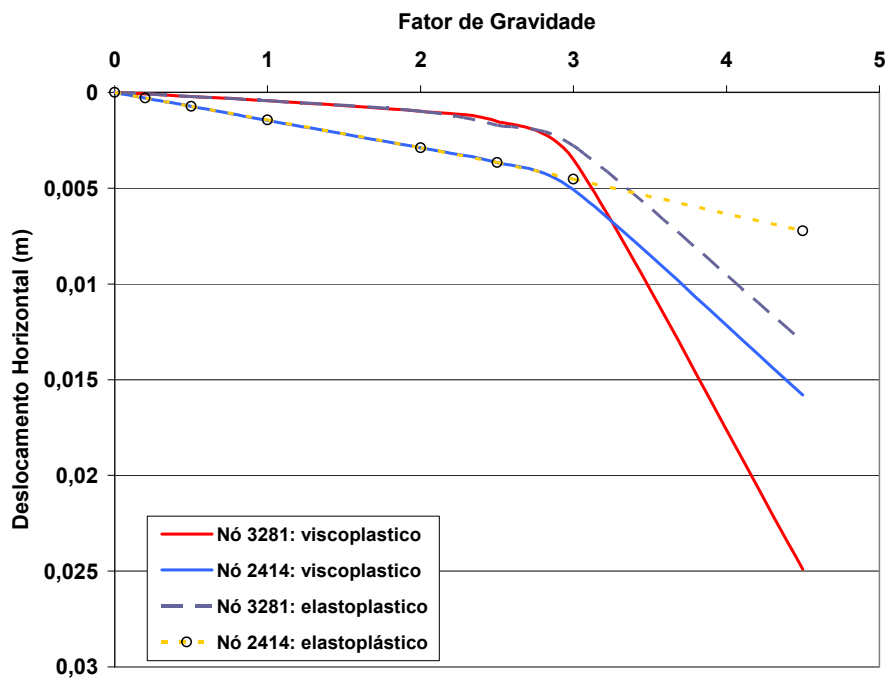


Figura 4.20 – Evolução do deslocamento com o Fator de Gravidade (FS).

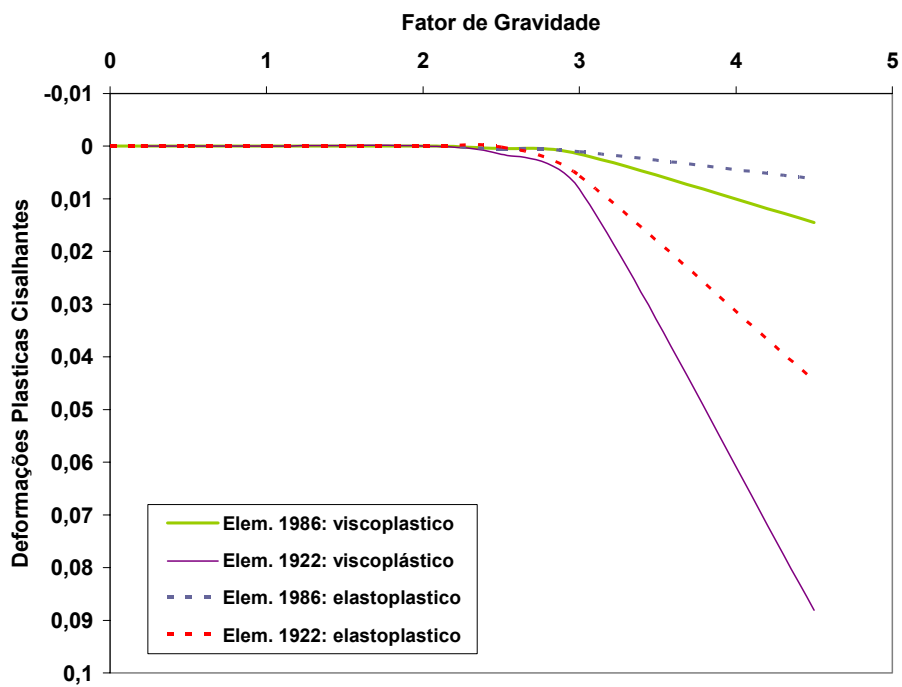
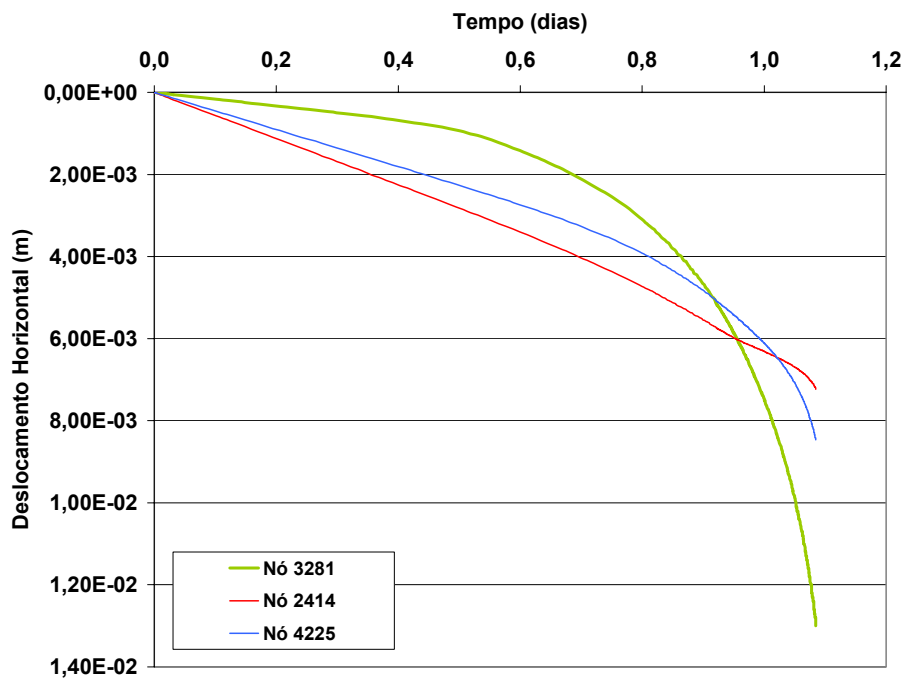


Figura 4.21 – Evolução das Deformações Plásticas Cisalhantes com o Fator de Gravidade.

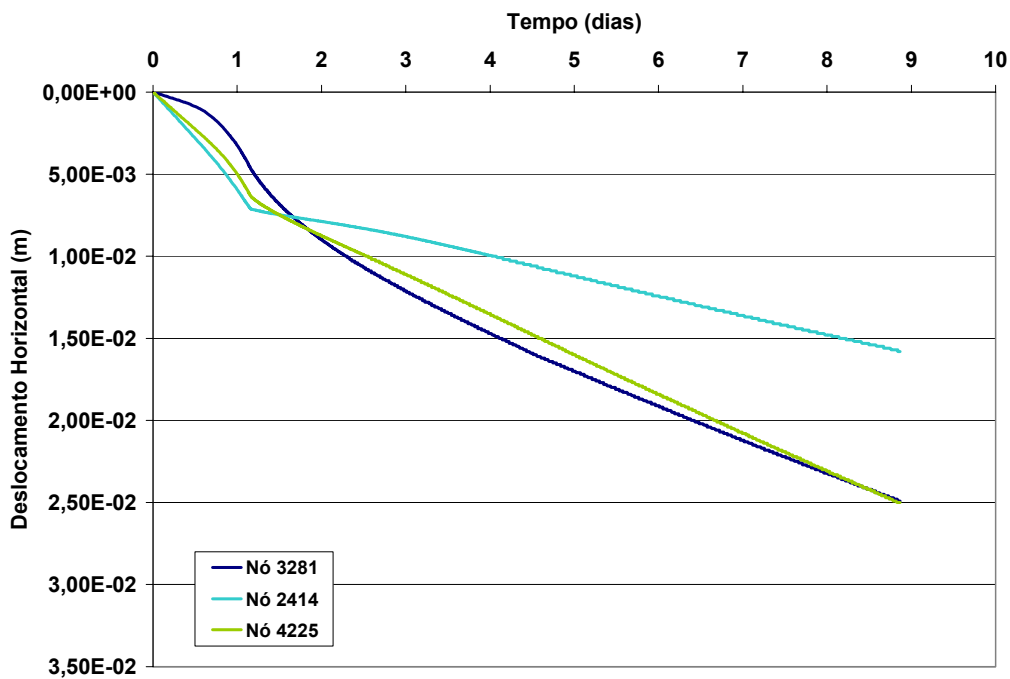
Por fim mostra-se uma relação dos deslocamentos horizontais e verticais, bem como as deformações permanentes, com o tempo em dias. Na figura (4.22), mostram-se os gráficos de variação do deslocamento horizontal com o tempo, para ambas as análises, e com resultados relativos aos nós propostos no início deste item.

Comparando as análises elastoplástica e viscoplástica, observa-se, como já discutido anteriormente, que para ambas as análises a ruptura ocorre quando superada a condição de altura crítica. Para o problema elastoplástico o talude deforma-se a partir do tempo inicial de processamento com deformações elásticas até o tempo equivalente ao limite da altura crítica, e a partir daí apresenta deformações crescentes até atingir a ruptura em pouco mais de um dia. Já para o caso viscoplástico, observa-se que o talude deforma até pouco mais de oito dias, chegando a deslocamentos até duas vezes maiores que os alcançados na análise elastoplástica. Nessa análise ainda verifica-se que os deslocamentos apresentam uma evolução semelhante à observada no caso elastoplástico, onde a partir do primeiro dia esses continuam crescendo, embora de forma mais suave.

Logo, observa-se que o nó 3281 apresenta o maior deslocamento horizontal para as duas análises, e menor deslocamento vertical, conforme a figura (4.23).

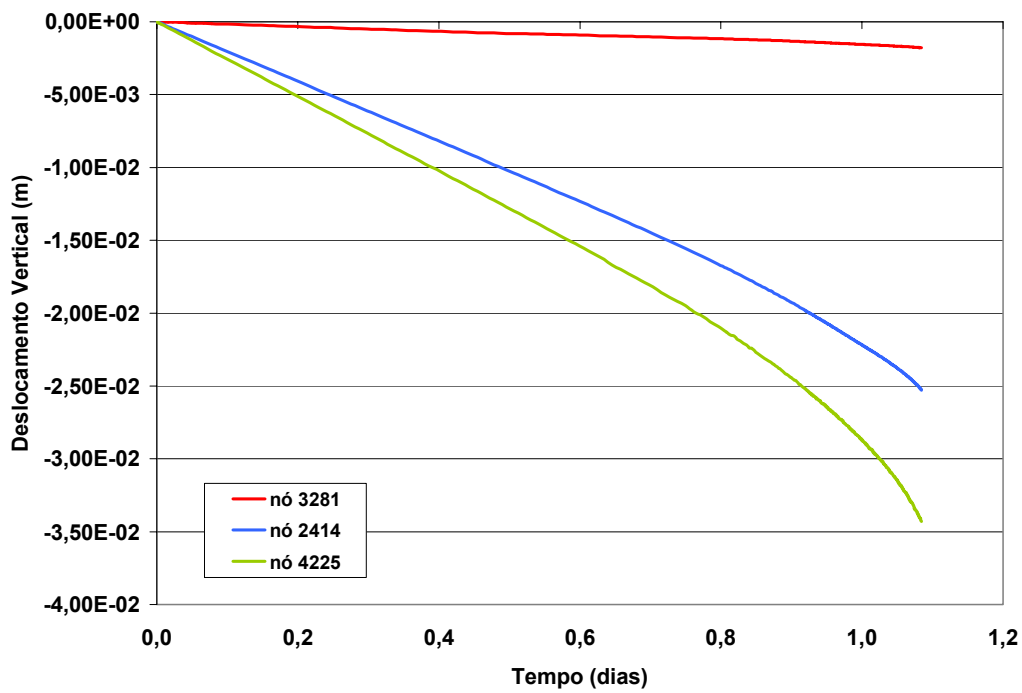


(a)

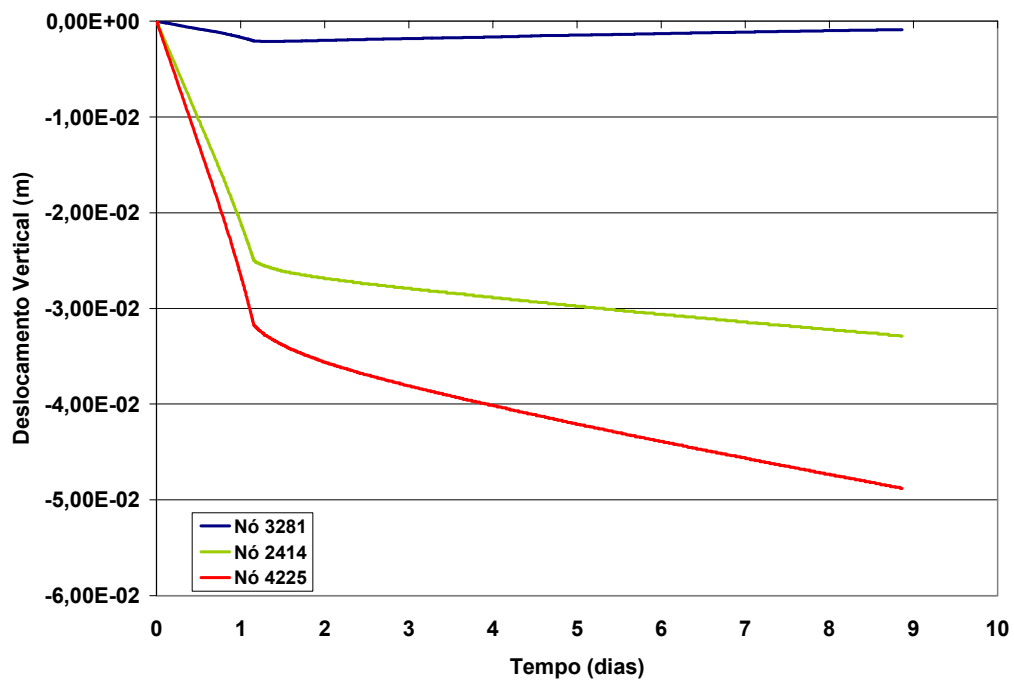


(b)

Figura 4.22 – Deslocamento Horizontal x Tempo: (a) Elastoplástico; (b) Visco-elastoplástico.



(a)

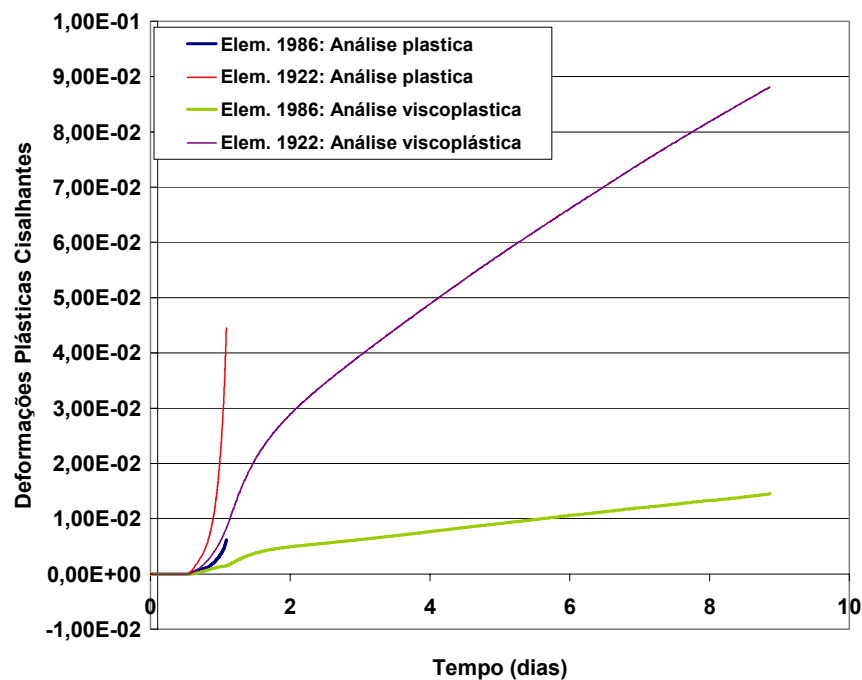


(b)

Figura 4.23 – Deslocamento Vertical x Tempo: (a) Elastoplástico; (b) Visco-elastoplástico.

Na figura (4.24) mostra-se a evolução das deformações elastoplásticas e viscoplásticas, para os elementos 1986 e 1922. Pode-se observar que as deformações permanentes se desenvolvem a partir de um tempo inferior a um dia, e no caso elastoplástico, essas deformações cessam em torno de um dia (quando ocorre a ruptura), enquanto que as deformações viscoplásticas se prolongam de forma crescente e aproximadamente linear com o tempo, até atingir o tempo de colapso.

Isto mostra que além de suportar condições mais prolongadas sobre o efeito do fator de gravidade máximo e de sofrer deslocamentos maiores, do que uma análise elastoplástica, o problema visco-elastoplástico permite que no material ocorram deformações viscoplásticas bem mais elevadas que as deformações plásticas, até a ruptura, por essas variarem em função do tempo.

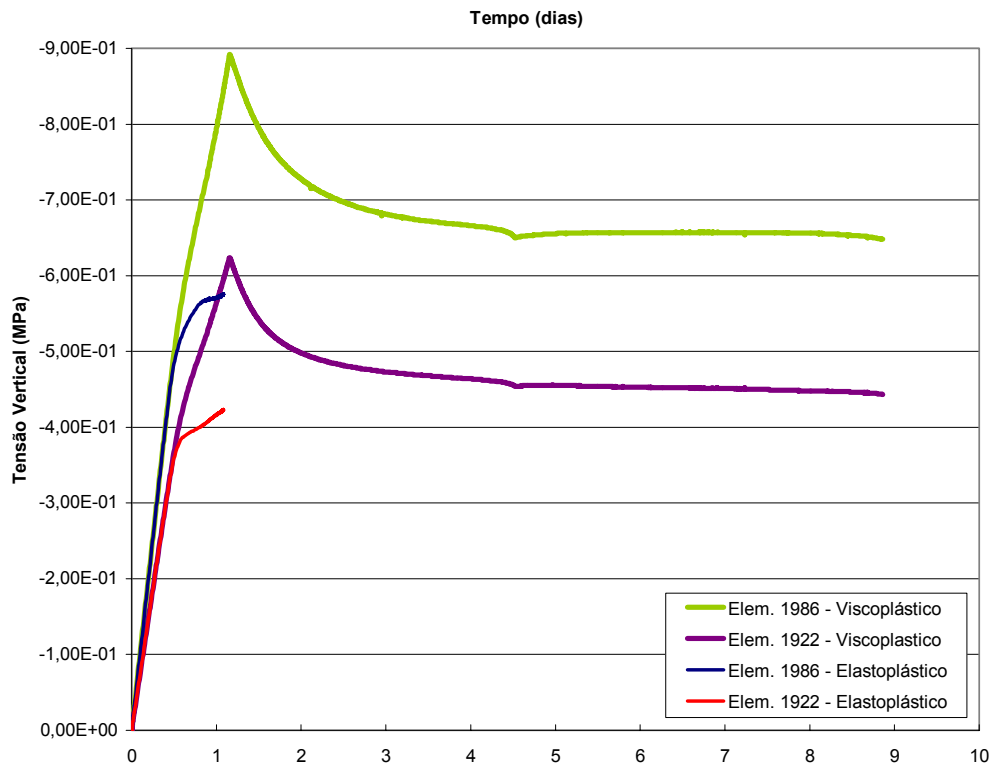


**Figura 4.24 – Evolução das deformações permanentes com o tempo.**

Uma outra análise pode ser feita através da variação da tensão vertical ( $\sigma_y$ ) com relação ao tempo, como pode ser visto na figura (4.25). Para a verificação elastoplástica observa-se que as tensões atingem um pico e o material rompe. Ao contrário disso, no problema visco-elastoplástico este pico é atingido em valores superiores, e em seguida as



tensões sofrem uma redução de seus valores ao longo do tempo, onde é proveniente de um rearranjo das tensões. Com isso mostra-se que a análise visco-elastoplástica define melhor a caracterização do colapso do material, ou seja, é um método de melhor previsão e definição da ruptura do material, pois define o desenvolvimento dos deslocamentos, deformações plásticas cisalhantes e tensões da estrutura..

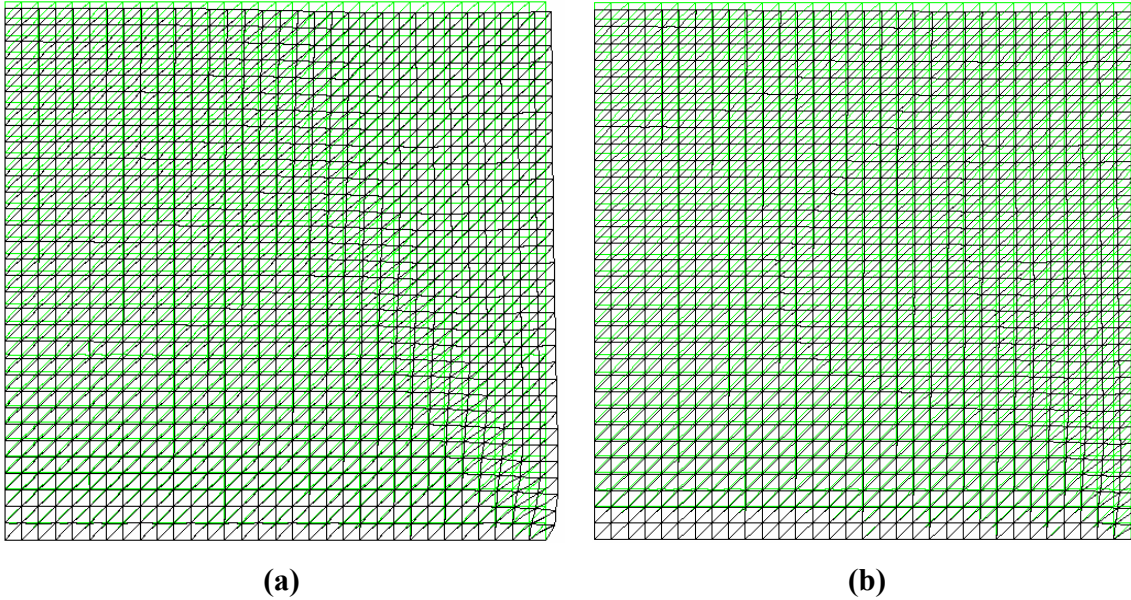


**Figura 4.25 – Evolução de tensões verticais com o tempo.**

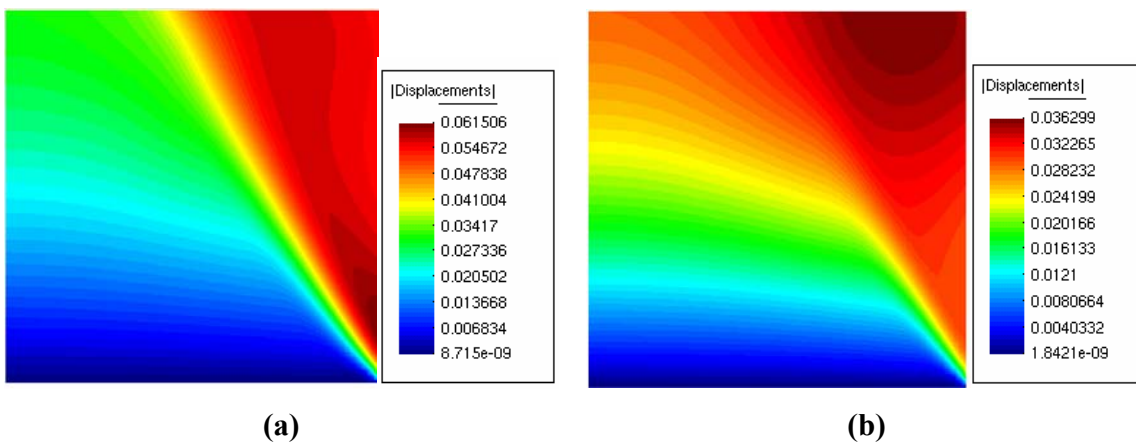
Quanto aos resultados gráficos obtidos no pós-processador, a análise de deslocamentos é feita para três nós considerados de grande importância para investigação, sendo eles o nó da extremidade superior do talude (nó 4225), o nó na parte inferior do talude (nó 3281) e o nó na parte central do talude cuja posição encontra-se na possível zona de ruptura (superfície de deslizamento). Para a verificação da deformação plástica e visco-elastoplástica consideram-se os elementos 1986 e 1922 que estão localizados conforme a figura (4.17).

As malhas deformadas para ambas as análises estão descritas na figura (4.26), onde se observa um maior deslocamento da malha de elementos finitos para o material de comportamento viscoso com relação ao de comportamento elastoplástico. Os

deslocamentos podem ser verificados através da distribuição gráfica e de vetores de deslocamento mostrados nas figuras (4.27) e (4.28), respectivamente.



**Figura 4.26 – Análise das malhas deformadas – (a) Viscoplastica; (b) Elastoplastica.**

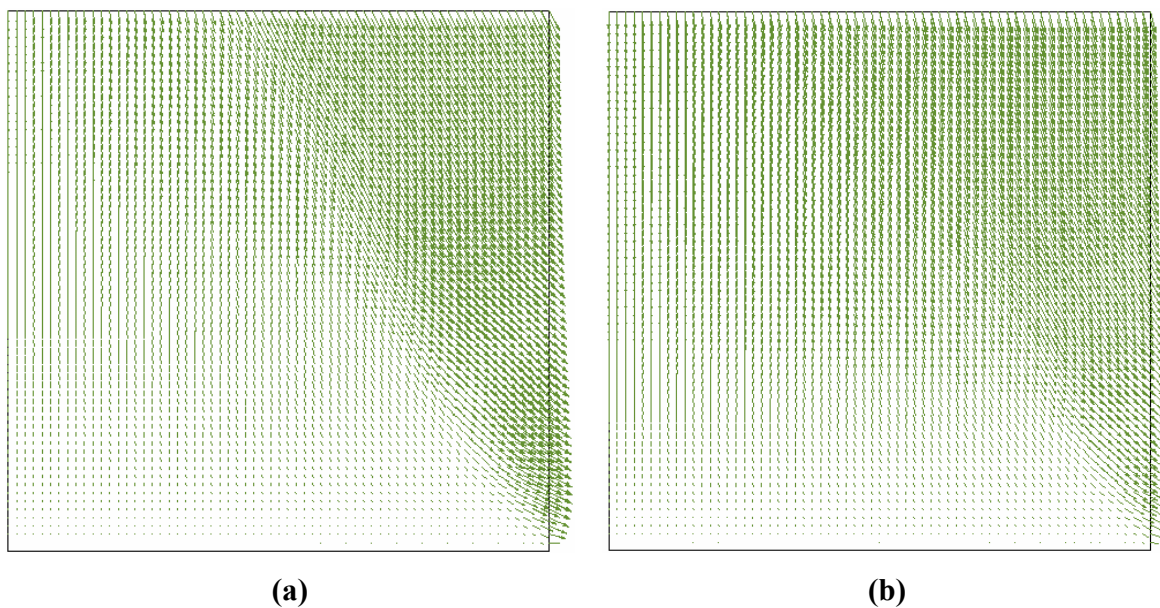


**Figura 4.27 – Distribuição de Deslocamentos – (a) Análise Viscoplastica; (b) Análise Elastoplastica.**

Na análise numérica, o problema não convergiu para um tempo de 766.023 segundos e 93.700,3 segundos para os casos viscoplastico e elastoplasticos, respectivamente. Com relação às deformações sofridas, verifica-se que na análise visco-

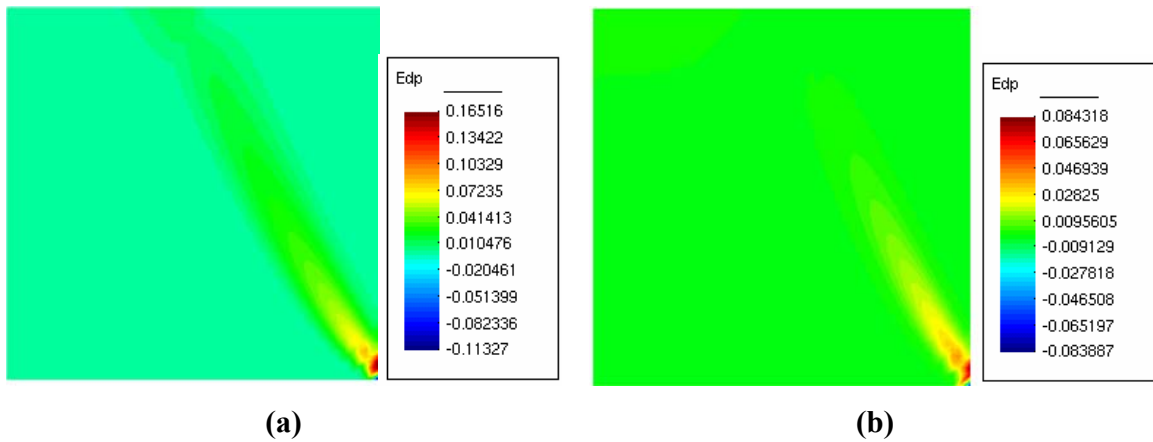
elastoplástica a ruptura se dá para um peso próprio maior que na elastoplástica, pois, a primeira desenvolve-se com o tempo, logo a submissão ao fator de gravidade aplicado é maior. Em consequência disso na consideração do comportamento viscoso, a estrutura sofre uma deformação bem mais acentuada que para a análise elastoplástica, onde ocorre a formação mais bem definida da superfície plana de ruptura (zona amarela e verde de deslocamentos – Figura 4.27).

Como é de se esperar os maiores deslocamentos ocorrem na região definida a partir da superfície de ruptura até a parte superior e lateral do talude, o que é mais acentuado na consideração da propriedade viscosa do material, e isto se verifica também através dos vetores de deslocamento (Figura 4.28). A consideração da viscosidade do material permite que este sofra um maior deslocamento antes do colapso.



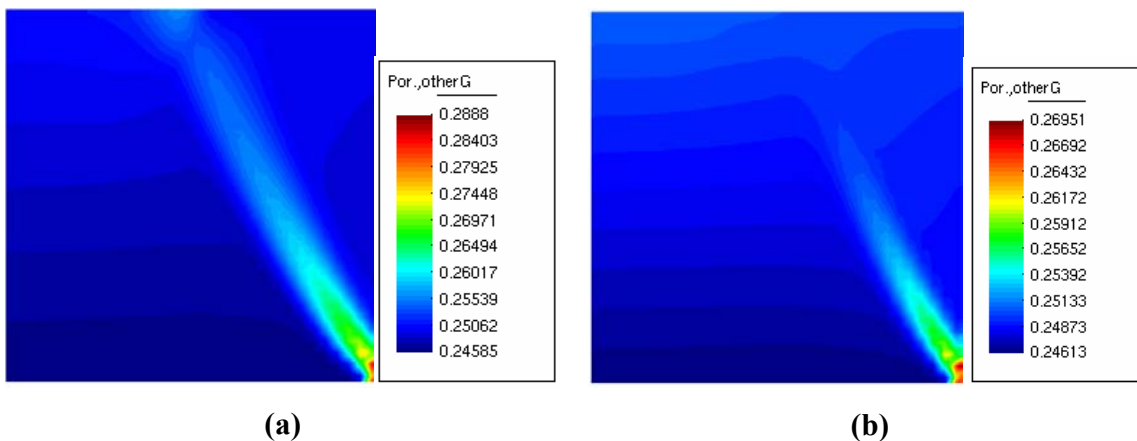
**Figura 4.28 – Vetores de deslocamento – (a) Análise Viscoplastica; (b) Análise Elastoplástica.**

A formação da superfície de ruptura pode ser observada na distribuição das deformações viscoplasticas e plásticas (Figura 4.29), que ocorrem na faixa de ruptura do talude. Para a análise viscosa esta faixa é bem definida através das deformações viscoplasticas, mostrando toda a extensão da região onde ocorre realmente o colapso do material. Já na análise elastoplástica, as deformações plásticas formam apenas um pico de início da região de ruptura e entra em colapso antes de formar toda a faixa de deslizamento.



**Figura 4.29 – Deformações Permanentes: (a) Deformações Viscoplasticas; (b) Deformações Plásticas.**

A variação da porosidade do material, cujo valor de referência é de  $n=0,25$ , segue a forma da superfície de colapso, onde devido ao comportamento dilatante do material, ou seja, decorrente da variação volumétrica, seu valor é aumentado nas áreas plastificadas, e reduzido nas regiões em que o solo é tracionado, o que leva ao afastamento entre os grãos. A variação é bem mais definida para a análise viscoplastica por essa permitir uma maior plastificação da área de ruptura (Figura 4.30).

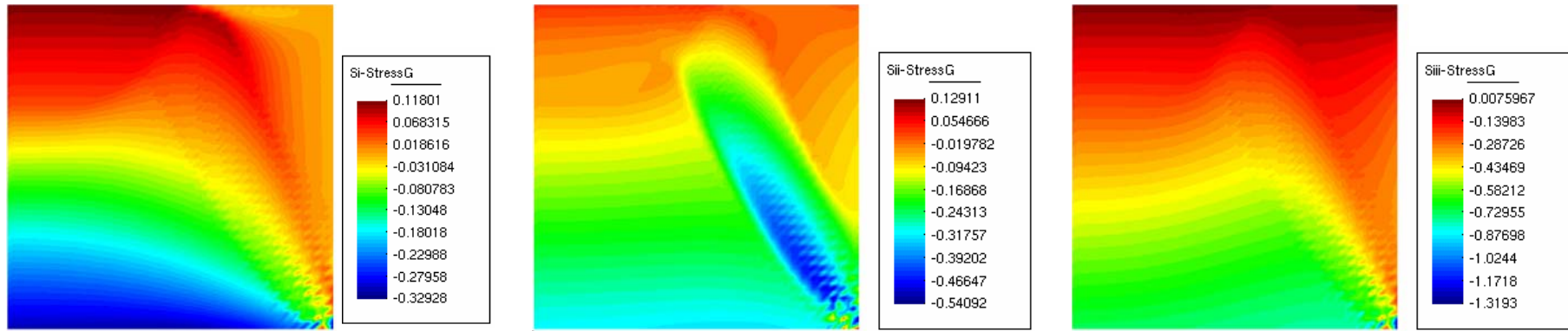


**Figura 4.30 – Variação da Porosidade: (a) Deformações Viscoplasticas; (b) Deformações Plásticas.**

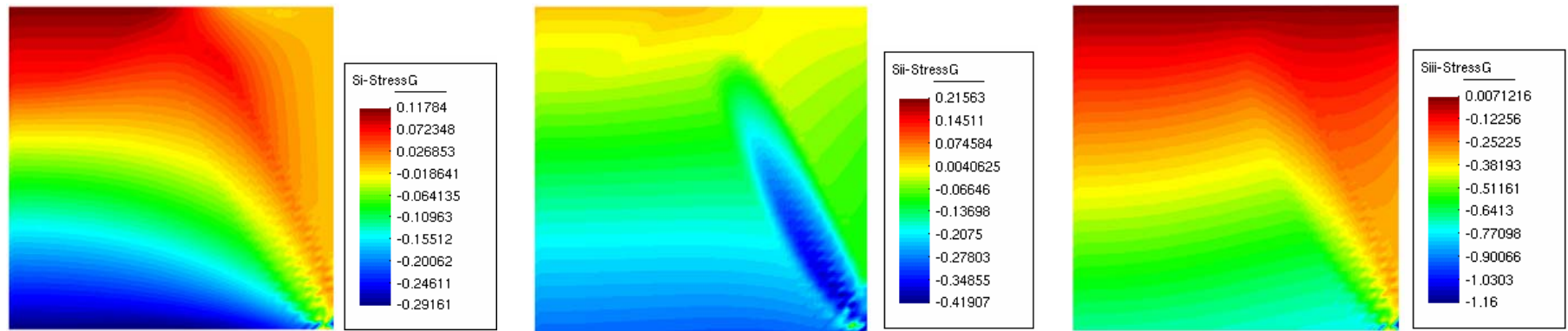
As tensões principais são analisadas de acordo com a figura (4.31), onde os efeitos de tensão são basicamente os mesmos para ambas as análises, devido ao equilíbrio de tensões. As tensões principais ( $\sigma_1$ ) causam um efeito de tração na região sujeita ao deslizamento, ou seja, na região acima da superfície de ruptura, e abaixo desta as tensões atuantes passam a ser de compressão. As tensões principais ( $\sigma_2$ ) apresentam-se na forma de compressão atuando no sentido normal ao plano do talude. Já as tensões principais ( $\sigma_3$ ) tracionam toda a superfície do topo do talude que está sujeita ao rebaixamento, e comprime sua região interna.

Os vetores de tensões principais são mostrados na figura (4.32), onde vetores de cor azul representam as tensões de compressão e os de sentido aproximadamente vertical representam as tensões  $\sigma_1$ , enquanto que os vetores mais horizontais definem as tensões  $\sigma_3$ . Os vetores de cor vermelha representam as tensões de tração  $\sigma_1$ , e as tensões  $\sigma_2$  são representadas por vetores normais à superfície (pontos).

Este último resultado leva ao fechamento da comparação entre os métodos de análise deste trabalho, que mostra uma maior consistência do programa na análise visco-elastoplástica, bem como uma maior resistência do material que pode atingir maiores deformações que a aplicação elastoplástica, e por isso apresenta uma caracterização de colapso bem mais definida.

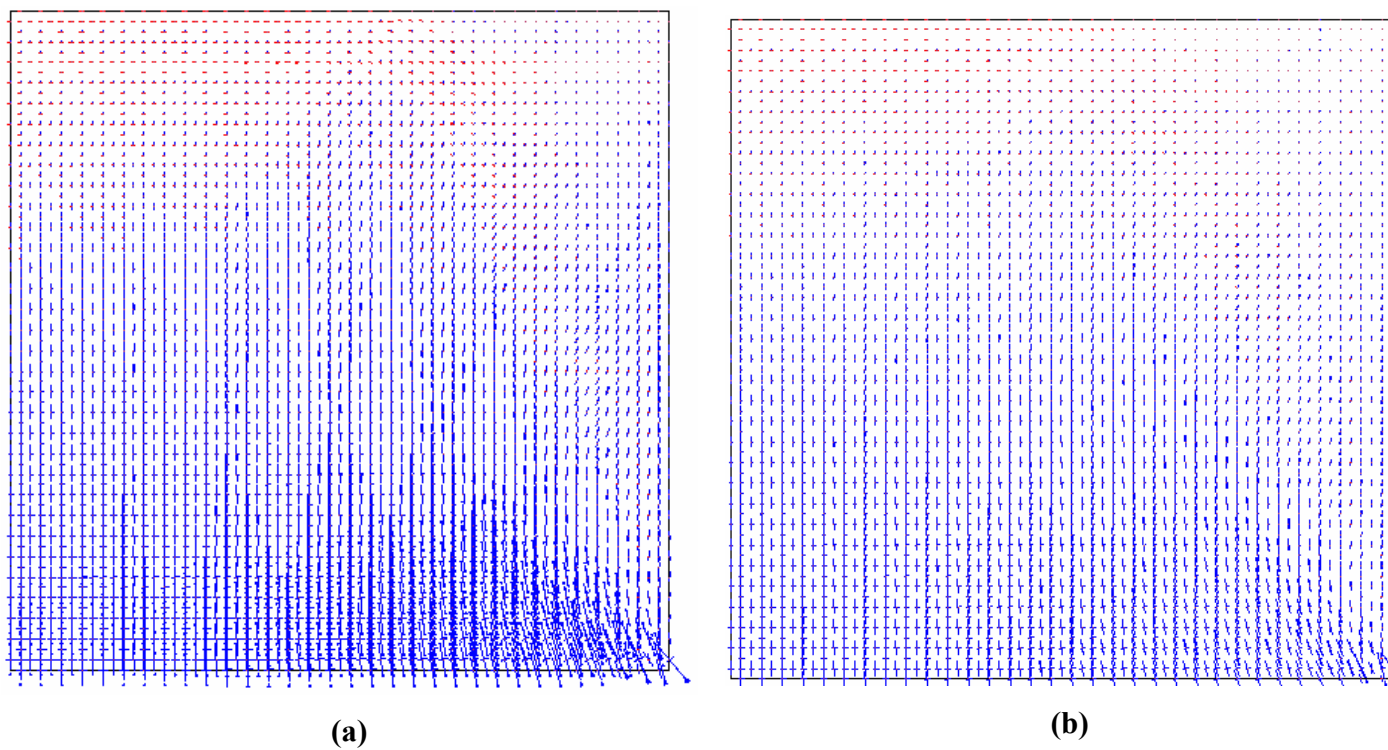


(a)



(b)

Figura 4.31 – Distribuição de Tensões Principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ : (a)Análise Visco-elastoplástica; (b) Análise Elastoplástica.



**Figura 4.32 – Vetores de Tensões Principais: (a) Análise Viscoplastica; (b) Análise Elastoplastica.**

## 5 – CONCLUSÃO

---

Neste trabalho foram implementados os algoritmos de integração explícita de Euler Modificado e Runge-Kutta-Dormand-Price, no programa de elementos finitos CODE\_BRIGTH, de forma a verificar sua aplicabilidade aos problemas resolvidos através deste programa.

Foi implementado ainda um modelo visco-elastoplástico baseado no trabalho desenvolvido por Perzyna (Perzyna, 1966 apud Cormeu, 1975), onde para isso também foi programada uma nova matriz tangente definida como matriz tangente viscoplástica, para a aplicação deste modelo.

No Capítulo 4, com o objetivo de verificar a aplicabilidade de ambas as implementações e sua eficiência, foram selecionados e modelados trabalhos com a mesma abordagem de forma a comparar os resultados obtidos no presente trabalho. Optou-se ainda em fazer uma comparação entre o método elastoplástico convencional com o método elasto-viscoplástico implementado, através de um problema hipotético com fins de visualizar o comportamento do material para uma mesma condição, mas para modelos diferentes.

Portanto, a verificação da utilização dos métodos explícitos de integração de tensão implementados foi feita em um exemplo clássico de expansão de cavidade cilíndrica (Sloan et al., 2000), onde os esquemas de integração foram aplicados para diferentes parâmetros de tolerância de erro. Este problema foi modelado tanto para a análise elastoplástica quanto para a análise elasto-viscoplástica, e foram comparados, além dos resultados de pós-processamento, o tempo total de CPU e o número de interações.

A partir disso pôde-se concluir que na análise elastoplástica o método explícito de Euler Modificado apresentou um melhor desempenho numérico que o Runge-Kutta em termos de tempo total de CPU, para tolerâncias altas até a ordem de  $STOL = 10^{-3}$ . Observou-se o inverso quando as tolerâncias adotadas eram inferiores a esta, ou seja, o método de Runge-Kutta torna-se bem mais rápido a medida que a tolerância diminui, apesar da necessidade de avaliar seis vezes o tensor elastoplástico. Isto é satisfatório com



relação aos resultados obtidos nos trabalhos referidos, tendo em vista que se deseja um controle de erro mais criterioso de forma a obterem-se resultados mais precisos tanto para tensões quanto para variáveis de história, onde isso ocorre quando são assumidos valores de tolerância bem pequenos.

Embora os desempenhos tenham sido diferentes, os resultados para os níveis de tolerância adotados foram bastante semelhantes. Isto ocorreu tanto para a análise elastoplástica quanto para a visco-elastoplástica. Para a segunda, observou-se que o método de Runge-Kutta foi mais eficiente que o método de Euler Modificado para todos os níveis de tolerância adotados, o que se pode atribuir ao fato de que o retorno de tensões à superfície de fluência não ser necessário, o que leva ao processo numérico tornar-se mais rápido e favorável ao método mais eficiente onde as estimativas de tensão são mais precisas.

Em um outro problema, também de expansão de cavidade cilíndrica, foi utilizado o critério de Von Mises numa modelagem elasto-viscoplástica baseada na teoria de Perzyna, de forma a verificar o desempenho desta teoria ao compará-lo com resultados obtidos por Plešek e Korouš (2002). Neste caso, verificou-se uma concordância entre os resultados de tensões e deslocamentos obtidos para o estado estacionário deste trabalho com os descritos no trabalho de referência. Embora este estado foi atingido de forma antecipada na análise numérica do presente trabalho, o que foi atribuído a diferença da forma do parâmetro viscoso utilizado na lei de fluxo.

Por fim buscou-se fazer um comparativo entre o comportamento dos materiais em função do tipo de modelo utilizado. Isto pôde ser verificado no caso de expansão de cavidade aplicado ao critério de Mohr Coulomb onde o material apresentou um patamar de ruptura mais elevado e para um nível maior de deslocamento radial que na análise elastoplástica.

O mesmo pôde-se observar no problema de estabilidade de um talude vertical hipotético, onde a ruptura deste ocorreu ao atingir-se a região da altura crítica para a análise elastoplástica. A estrutura atingiu níveis de tensão, deslocamento e deformações permanentes maiores para o modelo visco-elastoplástico, sendo ainda submetida por mais tempo a um regime crítico determinado por um fator de gravidade elevado, que simulou a

perda de resistência do material, mostrando assim o comportamento dependente do tempo, deste modelo.

Com isso se concluiu que a consideração das propriedades viscosas do material leva o mesmo a apresentar uma maior resistência, e torna a análise numérica mais consistente com um menor desprendimento computacional. Esta conclusão baseia-se apenas nos resultados apresentados neste trabalho, levando assim a necessidade de outras aplicações com bases comparativas de forma a calibrar o modelo.

Observou-se ainda um tempo de processamento superior para os métodos de integração com relação aos trabalhos de referência, devido à subdivisão dos incrementos. Quando utilizada a análise viscoplástica este problema é contornado, a medida que a relação  $\eta/\Delta t$  aumenta, o que implica em uma maior velocidade numérica. Isto pôde ser verificado também na análise feita para a expansão de cavidade no item 4.1.1.

## **5.1 – Sugestões para Futuras Pesquisas**

Para possíveis extensões da presente dissertação são propostos alguns aspectos a serem abordados. Entre estes se pode citar a aplicação dos algoritmos implementados para análises elastoplástica e visco-elastoplástica considerando o comportamento com endurecimento ou amolecimento, ou seja, aplicar a propriedade dilatante do material.

Uma outra proposta é fazer a mesma análise deste trabalho para métodos implícitos de integração de tensões (Backward Euler por exemplo) de forma a comparar os resultados obtidos para estes métodos e os dos esquemas explícitos obtidos neste trabalho.

Pode-se ainda, verificar a utilização dos algoritmos explícitos de Euler Modificado e Runge-Kutta aplicados à análises de problemas envolvendo solos argilosos, através de modelos como Cam-Clay.

Uma outra possibilidade de extensão deste trabalho seria aplicar o modelo de Perzyna para problemas de maior investigação visco-elastoplástica, analisando também o comportamento do material para várias ordens de não-linearidade, através da variação do expoente  $N$ , da equação (2.89).

Esta dissertação pode também ser continuada aplicando os métodos explícitos implementados em outros modelos visco-elastoplásticos como por exemplo o Modelo de

Viscoplasticidade Consistente descrito por Heeres (2001) e o de Peric apresentado por Alfano (2000). Com isso realiza-se a comparação dos resultados entre estes modelos e o modelo de Perzyna utilizado neste trabalho.

Por fim, uma última proposta consiste na análise de problemas envolvendo um acoplamento hidro-mecânico, entre outros, para problemas de estabilidade de taludes, escavações ou perfuração de poços.

## 6 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

Abbo, A. J., *Finite Element Algorithms for Elastoplasticity and Consolidation*. PhD Thesis, University of Newcastle, pp. 271, February, 1997.

Alfano, G., De Angelis, F., Rosati, L., *General solution procedures in elasto/viscoplasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 190, 5123-5147, 2000.

Bathe, K. J., *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.

Burd, H. J., Houlsby, G. T., *Finite element analysis of two cylindrical expansion problems involving nearly incompressible material behaviour*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics. Vol. 14, 351-366, 1990.

Caputo, H. P., *Mecânica dos Solos e suas aplicações*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 5ª Edição, Vol. 2, Rio de Janeiro, 1983.

Cormeau, I., *Numerical stability in quasi-static elasto/visco-plasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 9, 109-127, 1975.

Critescu, N., *Viscoplasticity of geomaterials, Visco-Plastic Behaviour of Geomaterials*. Springer-Verlag, New York, 103-207, 1994.

Critescu, N., Cazacu, O., *Viscoplasticity of geomaterials, Modeling in Geomechanics*. Wiley, Sussex, 129-154, 2000.

Desai C. S., Zhang D., *Viscoplastic models for geologic materials with generalized flow rule*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, **11**, 603–620, 1987.

Gomes, I. R., *Simulação Numérica do ensaio de compressão de prismas de alvenaria pelo método dos elementos finitos com comportamento de interface*. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, Engenharia de Produção, Florianópolis, 2001.

Griffiths, D. V., Lane, P. A., *Slope stability analysis by finite elements*. *Géotechnique* 49, No. 3, 387-403, 1999.

Guidicini, G., Nieble, C. M., *Estabilidade de taludes naturais e de escavação*. Edgard Blücher, 2ª Edição, São Paulo, 1983.

Guimarães, L. J. N., *Análisis multi-componente no isoterma em médio poroso deformable no saturado*. Tesis Doctoral, Universitat Politècnica Catalunya, Barcelona, 195 pp. 2002.

Heeres, O. M., *Modern Strategies for the Numerical Modeling of the Cyclic and Transient Behavior of Soils*. Doctor Thesis, Civiel Ingenieur, Technische Universiteit Delft, Netherlands, 2001.

Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, London, England, 355 pp., 1950.

Hinton, E., Owen, D. R. J., *Finite Element Programming*. Academic Press, London, UK, 1977.

Hodge, P. G., *Plastic Analysis of Structures*. McGraw-Hill, 1959.

Johnson, W., Mellor, P. B., *Engineering Plasticity*. Ellis Horwood, Chichester, 1983.

Johanson, M., Mahnken R., Runesson, K., *Efficient integration technique for generalized viscoplasticity coupled to damage*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44, 1727-1747, 1999.

Karaoulanis, F., *Viscoplastic Material Modelling*. Master Thesis, Computational Mechanics, Lehrstuhl für Bauinformatik, Technische Universität München, München, 2003.

Lourenço, P. B., *Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não-linear*. Relatório 99-DEC/E-1, Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho, 1999.

Mahnken, R., Johanson, M., Runesson, K., *Parameter estimation for a viscoplastic damage model using a gradient-based optimization technique*. Engineering Computations, 15, 925-955, 1998.

Martin, J. B., *Plasticity – fundamentals and general results*. The MIT Press, Cambridge, Mass., London, 1975.

Martins, M. A. D., *Estrutura de dados por arestas para solução de problemas em plasticidade computacional*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, Engenharia Civil, Rio de Janeiro, 2001.

Matsuoka, H., Nakai, T., *Stress-deformation and strength characteristics of soils under three different principal stresses*. Proc. Jap. Soc. Civ. Eng., vol. 232, pp. 59-70, 1974.

Mendelson, A., *Plasticity: theory and application*. Macmillan Publishing Co., New York, USA, 353p., 1968.

Olivella, S., Carrera, J., Gens, A., Alonso, E. E., *Non-isothermal multiphase flow of brine and gas through saline media*. Transport in Porous Media, vol. 15, pp. 271-293, 1994.

Olivella, S., Carrera, J., Gens, A., Alonso, E. E., *Numerical formulation for a Simulator (CODE\_BRIGTH) for the coupled analysis of saline media*. Engineering Computations, vol. 7, pp. 87-112, 1995.

Oñate, E., *Una introducción generalizada al método de los elementos finitos*. Barcelona, 1995.

Pedroso, D. M., Modelos elastoplásticos para solos argilosos: capacidade de previsão de comportamento e integração da relação constitutiva. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Civil, 171 p., Brasília - DF, 2002.

Pérez-Foguet, A., Rodríguez-Ferran, A., Huerta, A., *Numerical differentiation for local and global tangent operators in computational plasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 189, 277-296, 2000.

Plešek, J., Korouš, J., *Explicit integration method with time step control for viscoplasticity and creep*. Elsevier Science Ltd., Advances in Engineering Software 33 (2002), 621-630.

Pontes Filho, I. D. S., *Análise Limite Não-Linear em Problemas Geotécnicos*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

Potts, D. M., Zdravković, L., *Finite element analysis in geotechnical engineering*. Vol. 1, Published by Thomas Telford Publishing, London, 440 pp., 1999.

Prager, W., *Introduction to plasticity*. Assison-Wesley, 1959.

Prat, P., Gens, A., *Leyes de Comportamiento de Materiales*. Curso de Master, Metodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingenieria, Universidad Politécnica da Cataluña, Barcelona, Febrero, 2003.

Ribeiro, D. B., *Análise da Interação solo-estrututura via acoplamento MEC-MEF*. 121p.. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

Samuelsson, A., Fröier, M., *Finite elements in plasticity – a variational inequality approach*. MAFELAP III, Whiteman, J., E. (ed), Academic Press, New York, 1979.

Samtani, N. C., Desai, C. S., Vulliet, L., *An interface model to describe viscoplastic behaviour*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 20, 231-252, 1996.

Sánchez, M. J., *Implementación de modelos viscoelásticos-viscoplásticos, para suelos, en elementos finitos y simulación de movimientos diferidos em taludes*. Tesina de MÁSTER, Universitat Politècnica de Catalunya, Escola Tècnica Superior d'Enginiers de Camins, Canals i Ports, Barcelona, 1997.

Sheng, D., Sloan, S. W., Yu, H. S., *Aspects of finite element implementation of critical states models*. Computational Mechanics, vol. 26, 185-196, 2000.

Simo, J. C., Hughes, T. J. R., *Elastoplasticity and viscoplasticity – computational aspects*. Copyright 1986, 1987, 1988.

Simo, J. C., *Strain softening and dissipation: a unification of approaches, cracking and damage, strain localization and size effects*. Mazars J., Bazant Z. P., (Editors) Elsevier, London, 440-461, 1989.

Simo, J. C., *Topics on the numerical analysis and simulation of plasticity*. Handbook of Numerical Analysis, P. G. Ciarlet & J. L. Lions (eds.), Elsevier, USA, 315p., 1994.

Simo, J. C., Hughes, T. J. R., *Computational Inelasticity*. Springer, New York, 1998.

Sloan, S. W., Booker, J. R., *Removal of singularities in Tresca and Mohr-Coulomb yield functions*. Communications in Applied Numerical Methods, vol. 2, pp. 173-179, 1986.



Sloan, S. W., *Substepping schemes for the numerical integration of elastoplastic stress-strain relations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, 893-911, 1987.

Sloan, S. W., Sheng, D., Abbo, A. J., *Accelerated initial stiffness for elastoplasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24: 579-599, 2000.

Sloan, S. W., Abbo, A. J., Sheng, D., *Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control*. Engineering Computations, Vol. 18, No. 1/2, pp. 121-154, 2001.

Smith, I. M., Griffiths, D. V., *Programming the finite element method*. Third Edition, John Wiley & Sons Ltd., England, 1998.

Sousa, R. M., Modelagem acoplada hidro-mecânica da perfuração de poços em Rochas frágeis. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Engenharia Civil, 112 f., Recife, 2004.

Yu, H. S., Houlsby, G. T., *Finite cavity expansion in dilatant soils: loading analysis*. Géotechnique. 41, No. 2, (73-183), 1991.

Yu, H. S., Houlsby, G. T., *Finite cavity expansion in dilatant soils: loading analysis*. Géotechnique. 42, No. 4, (649-654), 1992.

Yu, H. S., *Expansion of a thick cylinder of soils*. Computers and Geotechnics. 1992, 14:21-41.

Zienkiewicz, O. C., Pande, G. N., *Some useful forms for isotropic yield surfaces for soils and rock mechanics*. Finite Element in Geomechanics, Chichester, Wiley, pp. 179-190, 1977.

Zienkiewicz, O. C., *El método de los elementos finitos*. Reverte, Barcelona, 1980.

Zienkiewicz, O. C., Morgan, K., *Finite Elements and Approximation*. University of Wales, Swansea, United Kingdom, John Wiley & Sons, 1982.

Zienkiewicz, O. C., Morgan, K., *Finite Elements Approximation Procedures in Engineering*. John Wiley, 1984.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., *The Finite Element Method: Basic-Formulation and Linear Problems*. (4<sup>th</sup> Ed.) - Volume 1, McGrae-Hill, Berkshire, England, UK, 1989.

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)