

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Dissertação de Mestrado

**Dinâmica Quântica em Espaços Curvos:
aplicações em Matéria Condensada**

por

Anibal Livramento da Silva Netto

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Julho, 2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Anibal Livramento da Silva Netto

Dinâmica Quântica em Espaços Curvos: aplicações em
Matéria Condensada

Dissertação de mestrado apresentada
à Coordenação do Programa de Pós-
graduação em Física da Universidade
Federal da Paraíba como parte dos
requisitos para a obtenção do grau de
Mestre em Física

Orientador: Cláudio B. S. Furtado

João Pessoa - Paraíba - Brasil

Julho, 2006

A Deus, meu Senhor e Salvador
Aos meus pais, meus irmãos e minha “vó Tíndha” (in memoriam)
Aos meus amigos, tanto os de João Pessoa quanto os da Bahia.

Agradecimentos

Primeiro a Deus, causa e efeito da minha existência e perseverança: valeu!

Ao meu orientador, Cláudio Furtado, pela orientação que foi decisiva para minha formação como pesquisador em Física. Agradeço também pela sua amizade desde minha chegada a João Pessoa. Obrigado mestre!

Aos meus pais, Edson e Edinalva, por quem hoje sou, pelas lições de vida, amor e carinho que me dedicaram: amo vocês! Longe de vocês, com muitas saudades, os levo onde quer vá. Aos meus irmãos Gerson, Milena e Yuri: os amo muito! E a todos os meus demais familiares.

Aos meus amigos de Feira de Santana e de João Pessoa.

Ao grande Marlon, amigo de todas as horas. Torço pelo seu sucesso. Você é um dos maiores amigos que fiz ao longo da minha jornada. Obrigado por tudo! Quando precisar deste companheiro aqui, estou às ordens.

Aos amigos Caio e Getúlio (que hoje está em São Paulo) que fizeram a convivência em sala muito divertida, com todas suas histórias.

Aos grandes amigos Alessio, Emerson, Erms, Alyson, Miguel, Rodrigo e Renilton

pela amizade e companheirismo: vocês são prova de que amizade ainda pode existir no sentido real da palavra. Podem contar comigo para o que precisarem.

Aos amigos Marcelo, Ferdinande, Alex (conhecido como “Pastor”). Ao Clélio e ao Carlos. Ao Cleverson, André, Diego e Edilberto.

Ao meu orientador de Iniciação Científica (IC), Carlos Alberto: obrigado pela amizade, conselhos e orientação no início de minha vida acadêmica. Tive ótimos mestres: Cláudio e Carlos Alberto. Obrigado!

Aos estudantes e professores do Grupo de Física da Matéria Condensada que também contribuíram para a melhoria das discussões neste trabalho a partir das discussões no seminário que apresentei no grupo.

Aos professores das disciplinas que cursei desde o Ensino Fundamental à pós-graduação. Ao prof. Fernando Moraes pela amizade.

À D. Nazaré e suas filhas, do Departamento de Física da UFPB, pelo auxílio e boa convivência. Aos ex-funcionários Neide e Walmir (sempre legais), ao seu Mariano (sempre engraçado), às funcionárias da biblioteca, à Ana Virgínia da Coordenação de Pós-graduação.

E a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para o ser humano e profissional que me tornei mas que não foram citados explicitamente.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro durante a execução do trabalho.

RESUMO

Os sistemas mesoscópicos são muito estudados há algumas décadas. Estas estruturas com dimensões da ordem de nanômetros (10^{-9}m) apresentam algumas propriedades típicas de sistemas clássicos bem como outras próprias dos sistemas quânticos. Como exemplos de sistemas mesoscópicos temos os pontos quânticos, os *antidots*, os fios e anéis quânticos. O entendimento e caracterização destes sistemas são de importância tanto para a Ciência Básica (por exemplo, a Física, a Química e a Biologia) quanto para o desenvolvimento tecnológico. Lasers, fotodetectores, computação quântica, estudo de sistemas biológicos, células solares: estes são alguns dentre as inúmeras e distintas aplicações do estudo de sistemas mesoscópicos.

Uma característica dos sistemas mesoscópicos é a dependência de propriedades físicas com as dimensões do sistema tratado. Este aspecto nos motivou a investigar como a torção e a curvatura poderiam também influenciar nas propriedades destes sistemas. Com esse objetivo, estudamos a dinâmica de partículas em espaços ora com curvatura ora com torção. Encontramos que grandezas físicas como espectro de energia, magnetização e correntes persistentes são fortemente afetadas pela torção e pela curvatura que possam existir no meio.

Para modelar cada um dos diferentes tipos de sistemas mesoscópicos em um meio com torção utilizamos um tipo de confinamento proposto na literatura por Tan e Inkson [1], onde o controle dos parâmetros do potencial confinante. A torção no meio surge com a presença de uma deslocação do tipo hélice ao longo da direção z . Encontramos os autovalores de energia e , a partir destes últimos, as correntes persistentes e magnetização. Como principais resultados vimos a dependência das grandezas físicas citadas com a intensidade do vetor de Burgers e o surgimento de níveis de Landau (mesmo sem campo magnético externo aplicado). Os níveis de Landau que encontramos são função da característica de torção, a saber, o vetor

de Burgers. Por outro lado, encontramos também a possibilidade de uma partícula em um espaço com defeitos e sujeita a um fluxo magnético se comportar como uma partícula livre em um espaço euclidiano (sem defeitos).

Para modelar sistemas mesoscópicos em um meio com curvatura utilizamos uma adaptação do potencial presente na referência [1], para o caso em que a superfície é curva. O trabalho ao qual nos referimos é o artigo na referência [2], onde é feito um estudo para um plano de Lobachevsky (superfície de curvatura negativa). Em nosso trabalho, por outro lado, estudamos a dinâmica de partículas em um espaço com curvatura positiva, o qual foi obtido pela projeção estereográfica dos pontos de uma esfera sobre um plano. Novamente encontramos níveis de Landau associados a frequências efetivas que dependem da curvatura, do fluxo magnético e dos parâmetros do potencial confinante. Encontramos ainda uma degenerescência dupla nos autovalores de energia para $m \neq 0$; quanto menores forem os números quânticos n e m , mais decisiva será a contribuição do raio de curvatura para os autovalores. Diferente do espectro de energia encontrado na referência [2], encontramos um espectro de autovalores discreto.

Em suma, mostramos que a curvatura e a torção afetam propriedades físicas de sistemas mesoscópicos.

Palavras Chaves: Sistemas Mesoscópicos; Defeitos Topológicos; Torsão; Curvatura.

ABSTRACT

Mesoscopic systems have been studied since some decades. These structures with dimensions of the order of nanometers (10^{-9}m) present some typical properties of classic systems as well as other belonging to quantum systems. Examples of mesoscopic systems are quantum dots, *antidots*, quantum wires and rings. Understanding and characterization of these systems are very important to different branches like Basic Science (for example, Physics, Chemistry and Biology) and technological development. Lasers, photodetectors, quantum computation, solar cells and studies about biological systems: these are some examples of the several and distinct applications of the research about mesoscopic systems.

Mesoscopic systems have your physical properties depending on the dimensions of the system. This aspect have motivated us to investigate the role played for the torsion and the bending concerning the physical properties of these systems. So, we focus on the dynamics of particles in curved spaces and twisted spaces. We have found eigenvalues spectrum, persistent currents and magnetization strongly dependent on torsion or bending parameters.

In order to study confinement for mesoscopic systems we have been based in an paper by Tan and Inkson [1], where the adjust of the potential. The torsion have appeared because the presence of a screw along the z -direction. We have found the energy eigenvalues, persistent currents and magnetization. Our main results were: we have observed the physical properties depend on Burgers vector; we have found Landau levels (even though no magnetic fields are present). We have found Landau levels dependent on the torsion (closely speaking, dependent on Burgers vector). We have seen it's possible that a particle in a space with defects and subject to a magnetic flux can behave like a free particle in an euclidian space (without defects).

In order to study mesoscopic systems in a medium with torsion we have been

based in a slightly different potential from [1]. We have been based in the article in the reference [2] where the authors had studied the dynamics in a curved space (Lobachevsky plane). In our work we have made a stereographic projection from the points belonging to a sphere to a plane. Again we have found Landau levels which depend on curvature radius, magnetic flux and parameters of the potential. In addition, we have found energy eigenvalues twofold degenerated for $m \neq 0$. The shorter are n and m the more decisive it will be the contribution of the curvature radius for the eigenvalues. Unlike the [2] reference, we have found a discrete spectrum.

In short, we have shown that torsion and curvature affect physical properties of the mesoscopic systems.

Keywords: Mesoscopic Systems; Topological Defects; Torsion ; Curvature.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Teoria Geométrica de Defeitos (TGD)	1
1.2	Sistemas Mesoscópicos	6
2	Sistemas mesoscópicos em um espaço com torção	12
2.1	Estados eletrônicos em um anel bidimensional – um modelo solúvel exatamente	12
2.2	Anéis quânticos em um espaço com deslocções	19
2.2.1	Fio Cilíndrico	19
2.2.2	Potencial <i>Parede Rígida</i>	22
2.2.3	Potencial Confinante	28
2.2.4	Campo Externo	30
3	Anéis quânticos em um espaço com curvatura	33
4	Conclusões	41
	Referências	47

Lista de Figuras

1.1	Etapas da geração de uma desclinação positiva através do processo de Volterra	4
1.2	Diferentes tipos de desclinações. De cima para baixo: wedge disclination, splay disclination e twist disclination.	10
1.3	À esquerda temos uma deslocação lateral e à direita uma deslocação tipo hélice. Aqui \mathbf{b} representa o vetor de Burgers.	11
2.1	Confinamento do tipo Parede Rígida.	22
3.1	Projeção estereográfica dos pontos de uma esfera	34

Capítulo 1

Introdução

1.1 Teoria Geométrica de Defeitos (TGD)

Na Natureza encontramos vários sistemas físicos cristalinos onde defeitos estão presentes. Propriedades como plasticidade, ponto de fusão, dentre outras são fortemente influenciadas pela presença de defeitos na estrutura do material. Contudo ainda não há uma teoria de defeitos fundamental apesar dos vários trabalhos já publicados a respeito. Uma das teorias que melhor descrevem defeitos em sólidos é baseada na geometria de Riemann-Cartan que se relaciona a sistemas onde métrica que descreve o meio não é euclidiana e onde pode existir torção.

Nesta abordagem um cristal em três dimensões pode ser visto como um meio elástico tridimensional contínuo. Podemos supor que o meio não-deformado e sem defeitos é invariante por translações (homogeneidade) e por rotações (isotropia) em algum sistema de coordenadas. Neste sistema de coordenadas preferencial o meio é

descrito por uma métrica¹ euclidiana [3] do tipo

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 \quad . \quad (1.1)$$

A métrica da forma (1.1) é chamada cartesiana. Assim no estado não-deformado temos o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 com um sistema de coordenadas cartesianas. Nesta situação, ao se deslocar um vetor ao longo de um circuito fechado o vetor retorna à sua posição inicial de forma a se superpor perfeitamente à orientação que tinha antes de percorrer o circuito. Tal deslocamento ao longo de um circuito é o chamado transporte paralelo [4]. No caso de espaços onde há defeitos, o transporte paralelo de um vetor ao longo de um circuito fechado tem como resultado uma não-superposição perfeita do vetor após o transporte em relação ao vetor inicial.

No caso de um espaço euclidiano sem defeitos podemos deformá-lo elasticamente até reduzi-lo a um ponto; eis aí o exemplo de um espaço denominado simplesmente conexo. Contudo, quando o espaço contém defeitos chamados topológicos, ele se deforma de tal maneira que não pode ser reduzido a um ponto, o que caracteriza tais espaços como multiconexos [3]. Na presença de defeitos topológicos, ao enlaçar qualquer vizinhança de pontos neste espaço nem todas as regiões podem ser contraídas a um ponto. Tal classe de defeitos se caracteriza por não poderem ser retirados do meio por meio das chamadas *deformações contínuas*: por exemplo, um cubo pode ser deformado continuamente para se obter uma esfera e vice-versa. Matematicamente, o processo de deformação contínua do espaço é feito através de um homeomorfismo [3, 5], uma função bijetora, contínua e cuja inversa também é contínua. Em outras palavras tanto há uma função que relaciona todos os pontos dos dois espaços e não há um sentido preferencial, ou seja, tanto existe uma função contínua que leva os pontos do cubo naqueles da esfera quanto uma inversa que leva

¹A métrica é uma função não-negativa que descreve a “distância” entre dois pontos vizinhos para um dado espaço.

os pontos da esfera nos do cubo. Dizemos dessa forma que um cubo e uma esfera são topologicamente idênticos.

Um trabalho que marcou a abordagem via TGD foi o artigo publicado em 1992 por Katanaev e Volovich [6]. Nele vemos uma nova abordagem para a Teoria de Defeitos em Sólidos que faz um elo com a Gravitação e na qual os defeitos são incorporados à métrica que descreve o meio. É mostrada então uma alternativa ao paradigma representado pela Teoria da Elasticidade na qual a descrição de defeitos em sólidos se caracteriza pela manipulação de equações relativamente complicadas em comparação àquelas da TGD. A abordagem de Katanaev e Volovich serve tanto para descrição de defeitos topológicos isolados bem como se aplica a densidades de defeitos.

Em nossa dissertação abordamos um tipo de defeito topológico linear, as deslocamentos tipo hélice. Além das deslocamentos, um outro tipo de defeito linear é a desclinação. Uma maneira de representar geometricamente a formação de defeitos lineares é através do chamado processo de Volterra. Este procedimento consiste de um mecanismo de “corte” e “cola” em que, para gerar o defeito, podem ocorrer uma ou mais das seguintes etapas: inserção ou retirada de material do meio, deslocamentos ou encurvamentos do material.

No caso das desclinações ocorre a retirada ou inserção de material extra no meio. Quando é retirada uma fatia do material, temos desclinações positivas; quando é adicionado material, temos desclinações negativas. Na Figura (1.1) é representada a visualização do processo de Volterra para geração de uma desclinação do tipo cunha, que é um exemplo de desclinação positiva. Inicialmente temos um plano, do qual é retirada uma fatia de ângulo diedral λ^2 e em seguida as extremidades são identificadas, gerando um cone.

²O ângulo diedral corresponde ao ângulo que há entre os dois planos (lados) separados após a retirada do material e que serão identificados.

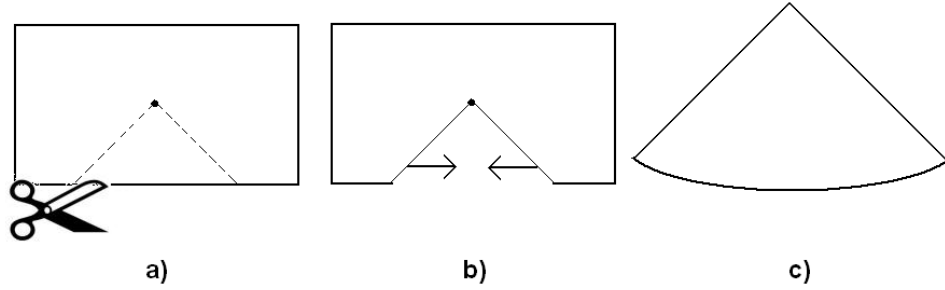


Figura 1.1: Etapas da geração de uma desclinação positiva através do processo de Volterra

A métrica que descreve uma desclinação, em coordenadas cilíndricas, é da forma

$$ds^2 = d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad , \quad (1.2)$$

onde $\rho > 0$, $0 < \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ e $\alpha < 1$ corresponde a desclinação positiva enquanto $\alpha > 1$ corresponde a desclinação negativa. O ângulo diedral λ e o parâmetro α na métrica acima relacionam-se [7] via expressão $\lambda = 2\pi(\alpha - 1)$. Além disso, ao ângulo diedral λ podemos associar o vetor axial $\vec{\lambda}$, que está orientado ao longo do eixo z para o caso da desclinação em cunha. Este vetor axial é o chamado vetor de Frank.

Na Figura (1.2) está representado o processo de Volterra para a desclinação em cunha (do inglês *wedge dislocation*), para a desclinação do tipo “splay”³ (do inglês *splay disclination*) e para a desclinação de torção (do inglês *twist disclination*). Observamos que a direção de giro do vetor de Frank, na etapa de identificação dos planos que formam um ângulo λ entre si, é diferente em cada um dos tipos de desclinações obtidos.

³No caso da *splay disclination* não obtive uma tradução apropriada.

O vetor de Frank e o tensor de curvatura são relacionados [8] através de

$$\lambda^{ij} = \int \int_S dx^\mu \wedge dx^\nu R_{\mu\nu}{}^{ij} \quad . \quad (1.3)$$

A partir da expressão (1.3) vemos que o tensor de curvatura representa fisicamente a densidade superficial do vetor de Frank. Assim, a presença de desclinações em um meio está associada ao fato de o espaço em questão ser curvo.

Um outro tipo de defeito linear é a deslocação. Os principais tipos de deslocações são a deslocação tipo hélice (do inglês *screw dislocation*) e a deslocação lateral (do inglês *edge dislocation*). A visualização desses dois tipos de deslocações através do processo de Volterra está representada na Figura (1.3). Nela aparece um vetor (representado pela letra **b**) que dá uma idéia da intensidade do deslocamento relativo dos planos separados para gerar a deslocação a partir do processo de Volterra. Este vetor é denominado vetor de Burgers.

Como exemplo de métrica para um meio com uma deslocação do tipo hélice ao longo do eixo z temos

$$ds^2 = d\rho^2 + (dz + \beta d\varphi)^2 + \rho^2 d\varphi^2 \quad , \quad (1.4)$$

onde $\rho > 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ e $-\infty \leq z \leq \infty$.

No caso da métrica que aparece na expressão (1.4), o vetor de Burgers tem apenas a componente b^z não-nula. A intensidade do vetor de Burgers e o parâmetro β relacionam-se via relação $b^z = 2\pi\beta$.

Vimos anteriormente que a presença de desclinações está ligada à curvatura no meio. A existência de deslocações, por sua vez, tem ligação com outra propriedade do meio, a torção. O tensor de torção e o vetor de Burgers se relacionam através da expressão

$$b^i = \int \int_S dx^\mu \wedge dx^\nu T_{\mu\nu}{}^i \quad , \quad (1.5)$$

onde $dx^\mu \wedge dx^\nu$ é o elemento de superfície e $T_{\mu\nu}^i$ é o tensor de torção. A região de integração S para o caso em que o vetor de Burgers aponta numa certa direção x^3 , corresponde à superfície que foi gerada via processo de Volterra que antes do surgimento da deslocação era formada pelas direções x^1 e x^2 , conforme a figura (1.3).

Observamos, a partir da expressão (1.5), que o tensor de torção representa fisicamente a densidade superficial do vetor de Burgers [8].

Em sólidos com rede cristalina, por exemplo, as deslocações surgem devido ao mal-alinhamento de átomos, correspondendo a uma imperfeição local no alinhamento das camadas de átomos na rede. Estas imperfeições podem ser produzidas durante a solidificação, na deformação plástica de sólidos cristalinos ou ainda como resultado da concentração de vacâncias⁴.

Vemos também o aparecimento de desclinações em outros sistemas de Matéria Condensada, como é o caso de cristais líquidos, para os quais se pode ter um laboratório para simular fenômenos em Cosmologia. Eis alguns exemplos que podemos citar: da passagem da luz próximo a corpos massivos ou estudo de cordas cósmicas via modelagem por sistemas de cristais líquidos na fase nemática [9, 10].

1.2 Sistemas Mesoscópicos

São conhecidos por mesoscópicos os sistemas físicos cujas dimensões são da ordem de nanômetros ($10^{-9}m$). Eles são intermediários entre as escalas macro e microscópica, já apresentando certos efeitos quânticos notáveis. Dentre os sistemas mesoscópicos mais conhecidos temos os pontos quânticos, os *antidots* e os fios quânticos.

Os pontos quânticos são estruturas que caracterizam pelo confinamento nas três direções espaciais para os elétrons. Isto implica na completa localização dos

⁴Vacâncias surgem quando um sítio (local) de uma rede formada por átomos está desocupado.

portadores, semelhante ao que acontece com os átomos [11, 12, 13, 14]. Daí também serem conhecidos como átomos artificiais [15].

Um exemplo de montagem experimental para pontos quânticos é através de um gás de elétrons bidimensional colocado como interface entre um semicondutor e um isolante (sendo que este último está sobre uma camada metálica. Eletrodos metálicos colocados sobre a camada semicondutora criam potenciais sobre o gás de elétrons que confinam o movimento dos elétrons a certas regiões do plano [15]. O número N de partículas no dispositivo pode ser ajustado por um potencial ao qual o ponto quântico está ligado. A condutância do sistema está relacionada ao número N e em geral ela é bem definida para os casos onde as condutâncias das junções que se conectam ao ponto quântico são pequenas em comparação com o *quantum* de condutância, a saber, $\frac{e^2}{h}$ [16]. As constantes e e h são, respectivamente, a carga elétrica e a constante de Planck.

Uma das características dos pontos quânticos é apresentar níveis discretos de energia. Uma aplicação simples dessa propriedade física seria para a construção de laser e fotodetectores, aproveitando o fato de que as transições entre os níveis ocorram para energias bem definidas [11].

Sabe-se da literatura que a coloração dos pontos quânticos depende mais das suas dimensões que do material de que é feito. Quanto maior o ponto quântico, mais para o vermelho do espectro tende a fluorescência⁵; quanto menor, mais para o azul ela tende. A fluorescência em pontos quânticos se deve à recombinação radiativa de um par elétron-buraco excitado, o *exciton* [12]. Exemplos de aplicação de aplicação dessa tecnologia em nosso cotidiano são os novos Playstation 3 e tocadores de DVD, os quais utilizam um laser azul para leitura de dados.

Fios quânticos, nanofios ou anéis quânticos são estruturas que têm uma dimensão lateral confinada e uma dimensão longitudinal livre com dimensões envolvidas

⁵A fluorescência é o processo de emissão de um fóton na passagem de um estado eletrônico de energia mais alta para um estado de energia mais alta.

que são da ordem de nanômetros. Dentre os tipos de materiais com que os nanofios podem ser feitos temos os metais (de níquel, prata), isolantes (TiO_2) e semicondutores (InP , $GaAs$). Para os nanofios surgem os efeitos de borda, onde átomos na superfície do nanofio não se ligam fortemente aos átomos vizinhos e atuam como “obstáculos” à condução, diminuindo drasticamente a condutividade quando comparada ao *bulk*⁶. Vemos, dessa forma, que o transporte balístico⁷ não ocorre. Anéis metálicos de dimensões mesoscópicas em um campo magnético externo exibem uma gama de fenômenos físicos interessantes tais como : o efeito Aharonov-Bohm, o efeito Hall quântico, correntes persistentes, fases de Berry e o efeito spin-órbita [17, 18]. Recentemente muitos modelos teóricos que levam em consideração anéis de dimensões finitas [19, 20, 21, 22] tais como: anéis 2D com potencial confinante tipo “hardwall” [23], potenciais parabólicos [19, 1], etc.

Um exemplo de trabalho teórico interessante [2] a respeito de fios quânticos foi publicado em 2004 onde é estudado um gás de elétrons bidimensional sobre uma superfície de curvatura negativa. O confinamento deste sistema se faz através de um potencial. O potencial confinante utilizado é uma adaptação do modelo de confinamento proposto no artigo pioneiro de W-C Tan [1], agora levando em conta a contribuição da curvatura para o confinamento. Na referência [2] foi mostrado que a curvatura da superfície influencia decisivamente o espectro de autovalores e a intensidade de correntes persistentes que existam, por exemplo.

Um *quantum antidot*⁸ pode ser obtido a partir da sobreposição de fortes espalhadores em um gás de elétrons bidimensional, normalmente perfurando buracos em um intervalo regular em um gás de elétrons com alta mobilidade. O perfil do potencial para um antidot é semelhante ao de um ponto quântico visto de forma

⁶Entenda-se bulk como átomos agrupados formando uma estrutura extensa.

⁷O regime de transporte balístico ocorre quando a resistividade causada pelo espalhamento por obstáculos no meio é desprezível

⁸Aqui preferimos utilizar o termo quantum antidot em lugar de “anfifio” quântico, que seria a tradução literal do inglês.

invertida: enquanto o potencial do ponto quântico é uma função convexa, o do antidot é uma função côncava.

A estrutura desta dissertação é como segue.

No Capítulo 2 estudamos como a torção no meio onde se desenvolve a dinâmica quântica de uma partícula afeta suas propriedades físicas. O meio estudado possui uma deslocação do tipo hélice ao longo da direção z . Partimos de formas mais simples de representação do confinamento da partícula até chegar ao modelo de potencial confinante proposto na referência [1]. Estudamos ainda neste capítulo a influência de um campo magnético externo na região onde está a partícula sobre suas propriedades físicas.

No Capítulo 3 estudamos a influência da curvatura no meio onde se desenvolve a dinâmica quântica da partícula sobre as propriedades físicas do sistema. O meio estudado possui curvatura positiva e foi obtido a partir da projeção estereográfica dos pontos de uma esfera sobre um plano. O potencial de confinamento é semelhante ao utilizado na referência [2], mas contemplando agora o caso em que a curvatura é positiva.

No Capítulo 4 apresentamos as conclusões de nosso trabalho.

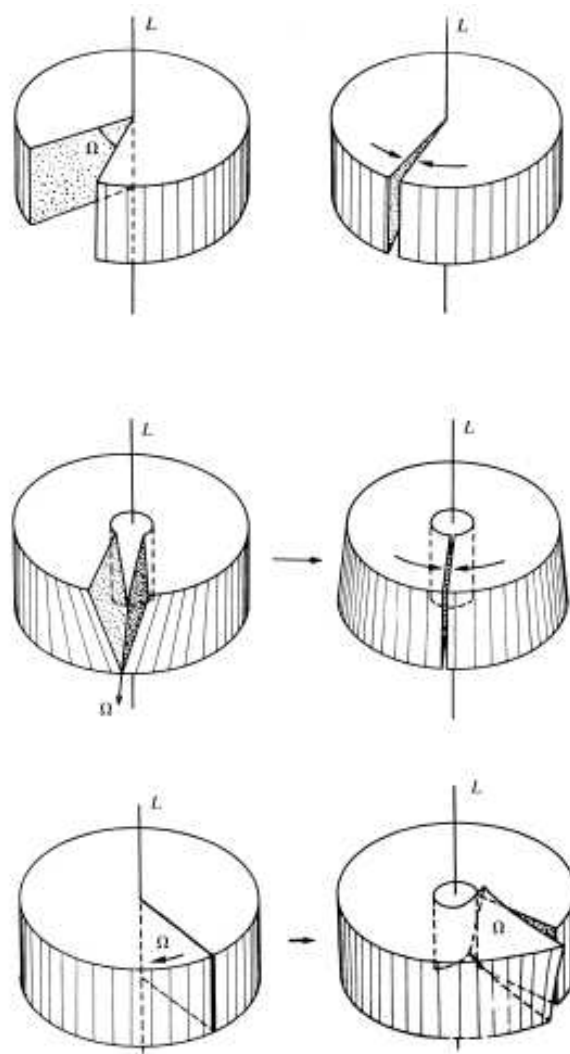


Figura 1.2: Diferentes tipos de desclinações. De cima para baixo: wedge disclination, splay disclination e twist disclination.

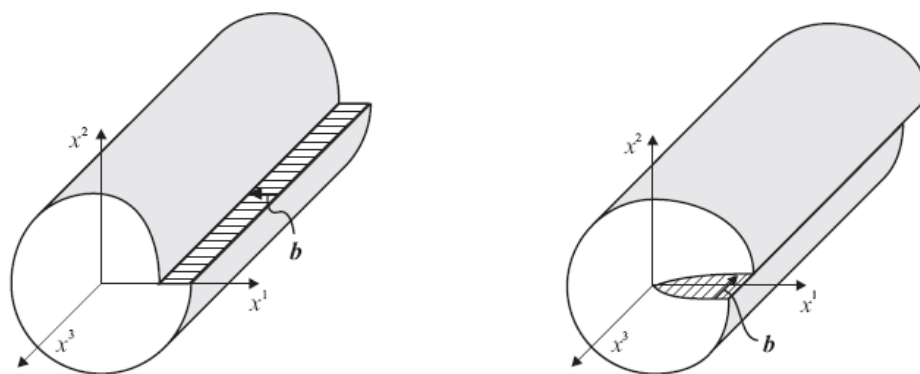


Figura 1.3: À esquerda temos uma deslocação lateral e à direita uma deslocação tipo hélice. Aqui \mathbf{b} representa o vetor de Burgers.

Capítulo 2

Sistemas mesoscópicos em um espaço com torção

2.1 Estados eletrônicos em um anel bidimensional – um modelo solúvel exatamente

Nesta seção, a título de revisão neste capítulo, apresentamos um modelo de potencial confinante que descreve um anel isolado com uma largura finita em um meio sem defeitos. Este trabalho, que não é de nossa autoria, foi publicado em periódico no ano de 1996 [1]. O modelo proposto nesse artigo de Tan e Inkson é bastante flexível e pode ser ajustado para descrever outros sistemas mesoscópicos – pontos quânticos, antidots e fios quânticos (tanto os unidimensionais quanto os bidimensionais) são alguns exemplos. O ajuste é feito via controle de dois parâmetros do modelo de potencial. O modelo de potencial confinante proposto nos mostra que a geometria espacial de um anel bidimensional ($2D$) afeta a estrutura eletrônica desse anel.

O potencial $V(\rho)$ radial proposto em [1] para um anel bidimensional no plano

XY é dado pela seguinte expressão:

$$V(\rho) = \frac{a_1}{\rho^2} + a_2\rho^2 - V_0 \quad (2.1)$$

com $V_0 = 2\sqrt{a_1a_2}$.

O mínimo de $V(\rho)$, tal que $V(\rho_0) = 0$ ocorre para

$$\rho = \rho_0 = (a_1/a_2)^{1/4} \quad , \quad (2.2)$$

e na vizinhança de ρ_0 o potencial tem a forma parabólica

$$V(\rho) = \frac{1}{2}\mu\omega_0^2(\rho - \rho_0)^2 \quad , \quad (2.3)$$

com $\omega_0 = \sqrt{8a_2/\mu}$, onde μ é a massa efetiva do elétron.

Para o potencial (2.1), teremos os seguintes limites [1]:

- para ρ_0 constante e $\omega_0 \rightarrow \infty$ temos o limite de um anel unidimensional;
- para ω_0 constante e $\rho_0 \rightarrow \infty$ temos o fio reto $2D$, ou seja, uma fita no plano;
- para $a_1 = 0$ temos o potencial confinante típico de um ponto quântico;
- para $a_2 = 0$ temos o potencial confinante de um antidot centrado em $\rho = 0$.

O espaço plano XY pode ser descrito pela seguinte métrica em coordenadas cilíndricas:

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \quad , \quad (2.4)$$

onde $\rho > 0$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Em nosso estudo consideraremos a presença de um fluxo magnético Φ_{AB} que perpassa o centro do anel $2D$. O hamiltoniano para esse sistema pode ser dado, em

2.1 Estados eletrônicos em um anel bidimensional – um modelo solúvel exatamente

termos da métrica a partir da expressão:

$$H = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0} \right)^2 - i \frac{eB}{\hbar} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0} \right) + \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2} \rho^2 \right] + V(\rho) \quad , \quad (2.5)$$

com Φ_{AB} e Φ_0 representando, respectivamente, o fluxo magnético que passa pelo centro do anel e o período do fluxo magnético ligado ao efeito Aharanov-Bohm.

Para encontrar as autofunções e autovalores da equação $H\Psi = E\Psi$, consideraremos o seguinte *ansatz* para a forma das autofunções:

$$\Psi(\rho, \varphi) = R(\rho) \exp^{im\varphi} \quad (2.6)$$

Dessa maneira chegamos à seguinte equação diferencial radial:

$$\left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{M^2}{\rho^2} + \frac{\mu}{4\hbar^2} \omega^2 \rho^2 - (m - \phi_{AB}) \frac{eB}{\hbar} - \frac{\mu^2 \omega_0^2 \rho_0^2}{2\hbar^2} - \frac{2\mu E}{\hbar^2} \right] R = 0 \quad (2.7)$$

onde $M = \sqrt{(m - \phi_{AB})^2 + \frac{2\mu a_1}{\hbar^2}}$, $\phi_{AB} \equiv \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0}$, $\omega_c = \frac{eB}{\mu}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{8a_2}{\mu}}$ e $\omega \equiv \sqrt{\omega_c^2 + \omega_0^2}$. Aqui ω_c é a frequência de ciclotron adquirida por elétrons que se movem em um plano na presença de um campo magnético perpendicular.

Definindo a variável $\xi \equiv \frac{\rho^2}{2\lambda^2}$, onde $\lambda \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}$, teremos

$$\frac{d}{d\rho} = \frac{d\xi}{d\rho} \frac{\sqrt{2\xi}}{\lambda} \quad e \quad \frac{d^2}{d\rho^2} = \frac{2\xi}{\lambda^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \quad (2.8)$$

o que nos leva à equação

$$\xi \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{dR}{d\xi} + \beta R - \frac{\xi}{4} - \frac{M^2}{4\xi} R = 0 \quad . \quad (2.9)$$

2.1 Estados eletrônicos em um anel bidimensional – um modelo solúvel exatamente

Se $R(\xi) = \exp(-\frac{\xi}{2})\xi^{\frac{M}{2}}u(\xi)$, logo

$$\frac{dR}{d\xi} = \exp(-\frac{\xi}{2})\xi^{\frac{M}{2}} \left[-\frac{1}{2}u + \frac{M}{2}\frac{1}{\xi}u + \frac{du}{d\xi} \right] , \quad (2.10)$$

então

$$\xi \frac{d^2R}{d\xi^2} = \exp(-\frac{\xi}{2})\xi^{\frac{M}{2}} \left[\frac{\xi}{4}u - \frac{M}{2}u + \frac{M^2}{4}\frac{1}{\xi}u + (-\xi + M)\frac{du}{d\xi} + \frac{d^2u}{d\xi^2} \right] . \quad (2.11)$$

Dessa maneira chegamos a equação diferencial hipergeométrica confluyente na variável $u(\xi)$

$$\xi \frac{d^2u}{d\xi^2} + (M + 1 - \xi) \frac{du}{d\xi} + \left(\beta - \frac{M + 1}{2} \right) u = 0 , \quad (2.12)$$

cujas soluções é

$$u(\xi) = F \left(-\beta + \frac{M + 1}{2}, M + 1, \xi \right) , \quad (2.13)$$

que é uma *função hipergeométrica confluyente*.

Para encontrar os autovalores de energia, utilizemos a condição para que ocorra a normalização das funções hipergeométricas confluyentes,

$$-\beta + \frac{M + 1}{2} = -n . \quad (2.14)$$

Chegamos à seguinte expressão para os autovalores de energia:

$$E_{n,m} = \left(n + \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega - \frac{(m - \phi_{AB})}{2} \hbar\omega_c - \frac{\mu\omega_0^2\rho_0^2}{4} \quad (2.15)$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$ e $m = \dots, -1, 0, 1, \dots$

Tomando o limite para o anel unidimensional (ρ_0 constante e $\omega_0 \rightarrow \infty$) teremos

$$E_{n,m} \approx \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\bar{m}}{\rho_0} \right)^2 , \quad (2.16)$$

2.1 Estados eletrônicos em um anel bidimensional – um modelo solúvel exatamente 16

com $|\bar{m}| = |m - m_0|$ e $m_0 \equiv \frac{eB\rho_0^2}{2\hbar}$. Esta última constante, a saber, m_0 representa o número de *quanta* de fluxo envolvido por um anel com um raio efetivo ρ_0 . A expressão de autovalores acima tem a estrutura de níveis de um confinamento parabólico.

Na expressão de autovalores em (2.15) observamos que o número quântico m é deslocado por um fator ligado aos *quanta* de fluxo magnético existentes na região onde está a partícula. Uma outra característica dos autovalores encontrados é que os níveis de Landau estão ligados a uma frequência de Landau efetiva ω que depende implicitamente dos parâmetros do potencial radial em 2.1 – se a partícula não estivesse confinada ao anel, a frequência de Landau seria ω_c , que é a de cíclotron [24, 25].

Um fenômeno que podemos investigar é o aparecimento das chamadas correntes persistentes [18, 21, 2], as quais surgem quando anéis metálicos mesoscópicos são atravessados por um fluxo magnético. Sabe-se que tais correntes são funções periódicas do fluxo magnético, com período Φ_0 . Mas para isso teremos de calcular inicialmente a magnetização.

Da Termodinâmica sabemos que, a temperatura nula, a magnetização de um sistema com um número N de elétrons é dada por

$$\mathcal{M}(B) = -\frac{\partial U}{\partial B} \quad , \quad (2.17)$$

onde a grandeza U dada por

$$U = \sum_{n,m} E_{n,m} \quad , \quad (2.18)$$

representa a energia interna do sistema.

Em termos do momento magnético $\mathcal{M}_{n,m}$ magnetização é dada por

$$\mathcal{M}(B) = \sum_{n,m} \mathcal{M}_{n,m} \quad . \quad (2.19)$$

Logo chegamos a uma expressão que nos permite obter a magnetização a partir da expressão de autovalores que encontramos

$$\mathcal{M}(B) = -\frac{\partial E_{n,m}}{\partial B} . \quad (2.20)$$

Para obter a expressão da magnetização devemos combinar as expressões (2.15) e (2.20). Para fazer isto devemos lembrar das definições de ω e ω_c , as quais apresentam dependência com o campo magnético B , o que nos permite chegar a

$$\frac{d\omega}{dB} = \frac{e\omega_c}{\mu\omega} \quad e \quad \frac{d\omega_c}{dB} = \frac{e}{\mu} , \quad (2.21)$$

então,

$$\mathcal{M}_{n,m} = -\frac{\hbar e}{\mu} \left[\left(n + \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{\omega_c}{\omega} - \frac{m - \phi_{AB}}{2} \right] \quad (2.22)$$

A magnetização, portanto, aumenta através de valores negativos à medida que a contribuição da frequência natural ω_0 se torna muito superior a ω_c ; por sua vez, quando ω_0 torna-se muito inferior a ω_c , a magnetização torna-se cada vez mais negativa, ou seja: o diamagnetismo, caracterizado por valores negativos de \mathcal{M} , torna-se mais acentuado.

Temos aqui uma situação semelhante àquela apresentada em um Physical Review Letters (PRL) de 1961 [26]. Nesse artigo os autores apresentam um teorema em que relacionam as correntes persistentes I presentes em um corpo supercondutor com uma cavidade central com a função de partição Z do sistema. Discutindo-se aí apenas a situação onde as dimensões do corpo são muito superiores ao chamado **comprimento de penetração**¹, os autores do referido artigo chegaram à seguinte relação entre I e Z :

$$I = ck_B T \frac{\partial \ln Z}{\partial \Phi_{AB}} , \quad (2.23)$$

¹O comprimento de penetração representa a distância dentro do supercondutor penetrada por um campo magnético externo do lado de fora desse supercondutor.

A partir da expressão da energia livre de Helmholtz F em função da função de partição, a saber,

$$F = -k_B T \ln Z \quad , \quad (2.24)$$

em unidades do Sistema Internacional (SI) encontramos a seguinte expressão, denominada relação de Byers-Yang [21]:

$$I_{n,m} = -c \frac{\partial E_{n,m}}{\partial \Phi} \quad . \quad (2.25)$$

Dessa forma, combinando (2.25) e (2.15), chegamos à seguinte forma para as correntes persistentes:

$$I_{n,m} = -\frac{e\omega}{4\pi} \left(\frac{m - \phi_{AB}}{M} - \frac{\omega_c}{\omega} \right) \quad . \quad (2.26)$$

Ressaltamos que a utilização da relação de Byers-Yang só foi possível devido ao fato de os autoestados serem nulos em $\rho = 0$, o que corresponde a multiconexidade no sistema descrito em [26].

Observamos que a intensidade das correntes persistentes, conforme a expressão (3.19), aumenta à medida que o campo magnético externo aplicado cresce, visto que a frequência ω_c é diretamente proporcional à intensidade do campo magnético B aplicado. Vale lembrar

Podemos colocar a magnetização em termos da expressão para as correntes persistentes de tal modo que

$$\mathcal{M} = \pi \rho_{n,m}^2 I_{n,m} - \frac{e\hbar}{\mu} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\omega_c}{\omega} \quad (2.27)$$

com $\rho_{n,m} \equiv \sqrt{2M}\lambda$ representando o raio efetivo do (n,m)ésimo estado.

O primeiro termo na expressão acima corresponde ao momento magnético clássico para um loop de corrente com raio igual ao raio efetivo $\rho_{n,m}$. O

segundo termo representa um deslocamento diamagnético (pois tende a diminuir a magnetização). Pode-se ver ainda que no limite de campos fracos o momento magnético será proporcional à corrente.

2.2 Anéis quânticos em um espaço com deslocações

Nesta seção e nas próximas, tanto as deste quanto as do próximo capítulo, os resultados obtidos são de nossa autoria. Nas próximas seções deste capítulo investigaremos o papel da curvatura nas propriedades físicas de uma partícula cuja dinâmica acontece em um meio (com curvatura). Partiremos dos tipos de confinamento mais simples até o mais refinado proposto na seção (2.1). Nosso estudo também investigará como um campo magnético externo influi nas propriedades físicas do sistema.

2.2.1 Fio Cilíndrico

Nesta seção investigaremos a dinâmica de uma partícula em um meio com uma deslocação ao longo da direção z , comparando com os resultados discutidos na seção anterior.

Considere um fio cilíndrico contendo um defeito topológico linear orientado ao longo do eixo z . A métrica neste caso é dada por

$$ds^2 = d\rho^2 + (dz + \beta d\varphi)^2 + \rho^2 d\varphi^2 \quad , \quad (2.28)$$

onde $\rho > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ e $-\infty \leq z \leq \infty$.

Há um acoplamento entre as coordenadas z e φ , o que pode ser visualizado pela maneira como as deslocações são construídas através do chamado processo de

Volterra, conforme vimos no primeiro capítulo desta dissertação.

Visto que estudaremos o caso do fio quântico com um raio constante, faremos $\rho = \text{const}$ na métrica (2.28). Então,

$$ds^2 = (dz + \beta d\varphi)^2 + R_0^2 d\varphi^2, \quad (2.29)$$

Os tensores métricos covariante e contravariante associados a (2.29) são, respectivamente,

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} R_0^2 + \beta^2 & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

e

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_0^2} & \frac{-\beta}{R_0^2} \\ \frac{-\beta}{R_0^2} & \frac{R_0^2 + \beta^2}{R_0^2} \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

O determinante do tensor covariante (\mathbf{g}) é igual a R_0^2 .

A forma geral para o hamiltoniano em termos do tensor métrico é dada por

$$H = \frac{1}{2\mu\sqrt{g}} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{e}{c} A_i \right) \sqrt{g} g^{ij} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{e}{c} A_j \right), \quad (2.32)$$

Logo a expressão para o hamiltoniano é dada por

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{R_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]. \quad (2.33)$$

Construindo a solução para a equação de autovalor $H\Psi = E\Psi$ a partir do *ansatz*

$$\Psi(\varphi, z) = e^{im\varphi} e^{ikz}, \quad (2.34)$$

encontramos a seguinte expressão para os autovalores:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} + \frac{\hbar^2 (m - k\beta)^2}{2\mu R_0^2} \quad (2.35)$$

onde o primeiro termo está associado a energia cinética de translação para uma partícula em um espaço euclidiano e o segundo termo representa a energia cinética de rotação em torno do centro do fio. Este segundo termo difere daquele que seria encontrado para o caso de um espaço euclidiano, sem defeitos: a passagem do caso euclidiano (sem defeitos) para o caso em que há a deslocação se dá via transição $\frac{\hbar^2 m^2}{2\mu R_0^2} \rightarrow \frac{\hbar^2 (m - k\beta)^2}{2\mu R_0^2}$.

Os autovalores de energia na expressão (2.35) mostram uma dependência com o parâmetro β , que está relacionado ao vetor de Burgers b^z pela sentença $b^z = 2\pi\beta$, bem como da geometria, o que se vê pela dependência em R_0 . Outro fato verificado é que o número quântico m sofre um deslocamento, situação esta que ocorre quando aplicamos um campo magnético externo, conforme veremos mais adiante.

Agora investigaremos como os autovalores mudam quando a partícula que se movimenta no fio quântico sente o fluxo magnético $\frac{\Phi_{AB}}{2\pi R_0}$. Neste caso a expressão do hamiltoniano é

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{R_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right], \quad (2.36)$$

Utilizando *ansatz* (2.34), encontramos:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} + \frac{\hbar^2 (m' - k\beta)^2}{2\mu R_0^2} \quad (2.37)$$

onde $m' \equiv m - \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0}$ e $\Phi_0 \equiv hc/|e|$.

Além de os autovalores de energia dependerem do vetor de Burgers, causando um deslocamento do número quântico m – como aconteceu para o caso sem fluxo

magnético –, o valor de m também sofre um deslocamento decorrente da presença do fluxo magnético.

Comparando a expressão de autovalores de energia acima com aquelas em (2.16) e vemos que em (2.35) e (2.37), vemos que as três expressões mencionadas são semelhantes em sua dependência com a dimensão radial (seja ρ_0 ou R_0), com $\bar{m} \rightarrow m' - k\beta$ (ou $\bar{m} \rightarrow m - k\beta$, no caso em que não há fluxo magnético). Por outro lado, no caso do meio com deslocação, os níveis de Landau não aparecem na expressão dos autovalores de energia.

A partir dos resultados a que chegamos podemos ver que existe a possibilidade de o espectro de autovalores de uma partícula cuja dinâmica se desenvolve em um espaço com uma deslocação linear apresentar apenas o termo de energia cinética de translação. Para isso bastaria controlar a intensidade do fluxo Φ_{AB} que perpassa o fio. Dessa forma, uma partícula confinada em um fio em um espaço com uma deslocação linear pode ter espectro idêntico àquele para uma partícula em um espaço sem defeitos.

2.2.2 Potencial *Parede Rígida*

Nesta seção consideraremos um fio quântico com uma deslocação do tipo hélice ao longo da direção Z considerando um potencial de confinamento do tipo *parede rígida*.

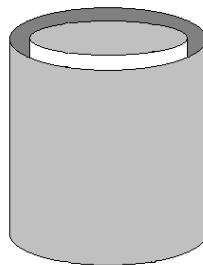


Figura 2.1: Confinamento do tipo Parede Rígida.

O potencial do tipo parede rígida aqui apresentado pode ser visualizado via Figura (2.1). Nesse tipo de confinamento a partícula teria seu movimento restrito à região entre os raios interno e externo iguais a a e b , respectivamente, da casca cilíndrica. Conseqüentemente, as regiões para $\rho < a$ e para $\rho > b$ são proibidas à partícula. Este último fato é expresso pelas condições de contorno $\Psi(\rho = a) = \Psi(\rho = b) = 0$.

Este modelo de confinamento é mais realístico do que o discutido na seção anterior; agora a largura finita do anel será levada em conta. O modelo aqui apresentado trata de uma partícula confinada em uma faixa circular circular da superfície que corta o eixo Z , mas com o movimento livre ao longo do eixo Z .

A métrica que descreve o meio é dada por

$$ds^2 = d\rho^2 + (dz + \beta d\varphi)^2 + \rho^2 d\varphi^2. \quad (2.38)$$

Os tensores métricos covariante e contravariante que correspondem à métrica acima são da forma:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 + \beta^2 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

e

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2} & -\frac{\beta}{\rho^2} \\ 0 & -\frac{\beta}{\rho^2} & 1 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

O hamiltoniano para o sistema ora descrito é

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} . \quad (2.41)$$

A expressão anterior pode ser reescrita como

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2\beta \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} + \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} . \quad (2.42)$$

Logo a eq. de Schrödinger independente do tempo (ESIT) é dada por

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} - \left(2\beta \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi + \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad (2.43)$$

Utilizando o *ansatz*

$$\Psi(\rho, \varphi, z) = R(\rho) e^{im\varphi} e^{ikz} , \quad (2.44)$$

e substituindo na equação (2.43), encontramos

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{m^2}{\rho^2} R + 2\frac{\beta mk}{\rho^2} R - k^2 R - \frac{k^2 \beta^2}{\rho^2} R + \frac{2\mu E}{\hbar^2} R = 0 , \quad (2.45)$$

que pode ser reescrita como

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} - (m - k\beta)^2 R + \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - k^2 \right) \rho^2 R = 0 \quad (2.46)$$

Para simplificar a forma das equações, definiremos as constantes

$$\gamma^2 \equiv \frac{2\mu E}{\hbar^2} - k^2 \quad (2.47)$$

e

$$\alpha \equiv m - k\beta . \quad (2.48)$$

Podemos reescrever a equação diferencial radial acima da seguinte forma:

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + \gamma^2 \rho^2 R - \alpha^2 R = 0 \quad (2.49)$$

ou

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2 \rho^2}\right) \gamma^2 \rho^2 R = 0 \quad . \quad (2.50)$$

Fazendo a mudança de variável $x = \gamma\rho$, temos

$$\frac{d}{d\rho} = \frac{dx}{d\rho} \frac{d}{dx} = \gamma \frac{d}{dx} \quad , \quad (2.51)$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} = \gamma^2 \frac{d^2}{dx^2} \quad , \quad (2.52)$$

o que nos leva à nova equação diferencial radial

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) R = 0, \quad (2.53)$$

cujas soluções são funções de Bessel. Assim é possível escrever a solução de (2.53) na forma

$$R(\gamma\rho) = A_\alpha J_\alpha(\gamma\rho) + B_\alpha N_\alpha(\gamma\rho) \quad . \quad (2.54)$$

A motivação inicial desta seção foi modelar a situação de um fio quântico com largura finita. Ou seja, para um anel de raio interno a e raio externo b isso pode ser feito através do seguinte processo: vamos confinar a partícula a uma região cilíndrica contida no intervalo $a < \rho < b$ com $b > a$.

Utilizando as condições de contorno $\Psi(\rho = a) = \Psi(\rho = b) = 0$, chegamos à seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} J_\alpha(\gamma a) & N_\alpha(\gamma a) \\ J_\alpha(\gamma b) & N_\alpha(\gamma b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\alpha \\ B_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (2.55)$$

A solução não-trivial para este sistema é obtida desde que a matriz cujos elementos são as funções de Bessel tenha determinante nulo. Assim,

$$J_\alpha(\gamma a) \cdot N_\alpha(\gamma b) - J_\alpha(\gamma b) \cdot N_\alpha(\gamma a) = 0 \quad (2.56)$$

e chegamos às relações

$$\frac{B_\alpha}{A_\alpha} = -\frac{J_\alpha(\gamma a)}{N_\alpha(\gamma a)} \quad (2.57)$$

e

$$\frac{B_\alpha}{A_\alpha} = -\frac{J_\alpha(\gamma b)}{N_\alpha(\gamma b)} \quad (2.58)$$

Portanto a expressão (2.54) é dada por

$$R(\rho) = M' \left(J_\alpha(\gamma_{\alpha,s}\rho) - N_\alpha(\gamma_{\alpha,s}\rho) \frac{J_\alpha(\gamma_{\alpha,s}b)}{N_\alpha(\gamma_{\alpha,s}b)} \right) \quad , \quad (2.59)$$

onde $\gamma_{\alpha,s}$ é a n -ésima raiz da equação (2.56).

$$J_\alpha(\gamma a)N_\alpha(\gamma b) - J_\alpha(\gamma b)N_\alpha(\gamma a) = 0, \quad (2.60)$$

Chegamos a partir da definição de γ à seguinte expressão dos autovalores:

$$E = \frac{\hbar^2}{2\mu} (\gamma_{\alpha,s}^2 + k^2) \quad (2.61)$$

Agora vamos confinar a partícula a uma região cilíndrica contida no intervalo $a < \rho < b$ com $b > a$. Das condições de contorno encontramos as seguinte equação para os autovalores de energia (explicitando α):

$$J_{m-k\beta}(\gamma a) \cdot N_{m-k\beta}(\gamma b) - J_{m-k\beta}(\gamma b) \cdot N_{m-k\beta}(\gamma a) = 0 \quad (2.62)$$

Podemos expandir $\gamma_{\alpha,s}$ [19, 27] e obter

$$\gamma_{\alpha,s} \approx \kappa + \frac{p}{\kappa} \quad (2.63)$$

onde

$$\kappa \equiv \frac{s\pi}{b-a} \quad , \quad p \equiv \frac{4\alpha^2 - 1}{8ba} \quad . \quad (2.64)$$

Substituindo a expansão imediatamente acima na expressão de autovalores de energia encontrada, temos

$$E \approx \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{s^2\pi^2}{(b-a)^2} + 2\frac{(4\alpha^2 - 1)}{8ba} + \frac{(4\alpha^2 - 1)^2 (b-a)^2}{(8ba)^2 s^2\pi^2} + k^2 \right] \quad . \quad (2.65)$$

Considerando $\gamma a \gg 1$, $\gamma b \gg 1$ e substituindo em ?? para $b \rightarrow a$ obtemos, em primeira aproximação:

$$E \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} + \frac{\hbar^2 (m - k\beta)^2}{2\mu a^2} - \frac{\hbar^2}{8\mu a^2} \quad (2.66)$$

Comparando a expressão de autovalores em (com aquela obtida para a partícula livre na seção anterior, vemos surgir uma contribuição de superfície nos autovalores, representada pelo termo $\frac{\hbar^2}{8\mu a^2}$. Este termo representa a contribuição ao potencial que é dada aos autovalores da partícula que se movimenta numa superfície bidimensional imersa em um espaço tridimensional [29]. Na referência [29] é proposto um método para estudar a dinâmica de partículas imersas em superfícies imersas em espaços de dimensões maiores, pela adição ao hamiltoniano de um termo dependente da curvatura da superfície em questão. No citado trabalho esse termo adicional funciona como uma espécie de potencial geométrico de confinamento.

Nosso resultado na expressão (2.66), apesar de obtido por um caminho distinto, está em concordância com a proposta da referência [29].

2.2.3 Potencial Confinante

Nesta seção discutiremos o confinamento via potencial (2.1) apresentado na primeira seção deste capítulo em um meio com uma deslocação, objetivando verificar a influência do defeito topológico no espectro de autovalores associados à partícula confinada.

O hamiltoniano para esse sistema é

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2\beta \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} \right] - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2\mu a_1}{\hbar^2} \frac{1}{\rho^2} - \frac{2\mu a_2}{\hbar^2} \rho^2 - \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} \right] , \quad (2.67)$$

o que nos leva à seguinte equação de Schrödinger independente do tempo (ESIT):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} - 2\beta \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi + \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{2\mu a_1}{\hbar^2} \frac{\Psi}{\rho^2} - \frac{2\mu a_2}{\hbar^2} \rho^2 \Psi + 2\mu \frac{E - V_0}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad . \quad (2.68)$$

Supondo $\Psi(\rho, \varphi, z) = R(\rho)e^{im\varphi}e^{ikz}$,

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{M^2}{\rho^2} R + \left(2\mu \frac{E - V_0}{\hbar^2} - k^2 \right) R - \frac{2\mu a_2}{\hbar^2} \rho^2 R = 0 \quad , \quad (2.69)$$

onde $M \equiv (m - k\beta)^2 + \frac{2\mu a_1}{\hbar^2}$.

Introduzindo a variável $\xi = \sqrt{\frac{2\mu a_2}{\hbar^2}} \rho^2$, obtemos equação diferencial:

$$\xi \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{dR}{d\xi} - \frac{M^2}{4\xi} R + \beta' R - \frac{\xi}{4} R = 0 \quad , \quad (2.70)$$

cuja solução é

$$R(\xi) = e^{-\frac{\xi}{4}} \xi^{\frac{|M|}{2}} F \left(-\beta' + \frac{|M| + 1}{2}, |M| + 1, \xi \right) \quad . \quad (2.71)$$

Para que a função de onda seja normalizada, a série que representa a função hipergeométrica confluyente $F\left(-\beta' + \frac{|M|+1}{2}, |M| + 1, \xi\right)$ deve ser um polinômio de grau n [28]. Conseqüentemente,

$$-\beta' + \frac{|M| + 1}{2} = -n \quad , \quad (2.72)$$

o que nos leva à seguinte expressão dos autovalores de energia:

$$E = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{|(m - k\beta)^2 + \frac{2\mu a_1}{\hbar^2}|}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{k^2 \hbar^2}{2\mu} + V_0 \quad . \quad (2.73)$$

A expressão de autovalores de energia acima apresenta níveis de Landau, os quais não são esperados, visto que nenhum campo magnético externo está ligado ao sistema. A frequência ω_0 aqui faz o papel de frequência de ciclotron – a frequência que apareceria nos níveis energia (com níveis de Landau) para um sistema de partículas sujeitas a um campo magnético perpendicular ao plano em que elas se movimentam.

Outro fato verificado é a quebra da degenerescência introduzida por dois termos: um relacionado ao defeito (termo $k\beta$) e outro ao termo proporcional a $\frac{1}{\rho^2}$ no potencial (2.1) – ou seja, a parcela $\frac{2\mu a_1}{\hbar^2}$. Contudo, no caso deste último fator, a sua influência decai rapidamente com a distância em relação à origem do sistema, ao passo que a contribuição do defeito permanece.

Outro aspecto em relação à expressão (2.73) é a possibilidade de comparação com os autovalores associados a um sistema do tipo oscilador harmônico em um meio com uma deslocação [28], bastando fazer $a_1 \equiv 0$ na expressão (2.1). No entanto o potencial confinante apresentado neste capítulo é mais geral. Ele leva em conta a contribuição de repulsão que afeta os autovalores a pequenas distâncias, reforçando a quebra de degenerescência, conforme discutido no parágrafo anterior.

2.2.4 Campo Externo

Sabemos que no espaço euclidiano, sem defeitos, elétrons que se movem numa superfície e sujeitos à ação de um campo magnético perpendicular (a essa superfície) apresentam níveis de Landau em seu espectro de autovalores. Na subseção anterior vimos que a introdução de uma deslocação, juntamente com o confinamento pelo potencial da forma (2.1), causa o surgimento de níveis de Landau associados a uma frequência de ciclotron efetiva, que está ligada a um dos parâmetros do potencial.

Esta subseção, em virtude dos fatos citados, visa estudar a dinâmica quântica de uma partícula sujeita à ação de um campo magnético externo; compararemos a situação em que há confinamento com aquela em que tal confinamento não há. Este estudo nos dará uma idéia de quais sejam as parcelas de contribuição do potencial confinante e do campo magnético para os níveis de Landau que surjam em um meio com uma deslocação.

Considerando a introdução de campo magnético externo, sem confinamento, obtemos a ESIT

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{ieB\rho}{\hbar c} \frac{1}{2} \right]^2 \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad . \quad (2.74)$$

Supondo o *ansatz* (2.44) chegamos à seguinte equação diferencial radial:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{(m - k\beta)^2}{\rho^2} R + \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - k^2 + \frac{eB}{\hbar c} (m - k\beta) \right) R - \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2} \rho^2 R = 0 \quad . \quad (2.75)$$

Fazendo a mudança de variável $\xi = \frac{eB}{2\hbar c} \rho^2$, chegamos à equação diferencial radial

$$\xi \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{dR}{d\xi} - \frac{m'^2}{4\xi} R + \beta' R - \frac{\xi}{4} R = 0 \quad , \quad (2.76)$$

onde $m' \equiv m - k\beta$ e $\beta' \equiv \frac{1}{2} \left[m' + \frac{\hbar c}{eB} \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - k^2 \right) \right]$.

As soluções de (2.76) são da forma

$$R(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|m'|}{2}} F\left(-\beta' + \frac{|m'| + 1}{2}, |m'| + 1, \xi\right) \quad , \quad (2.77)$$

e os autovalores de energia que encontramos, após impor a condição de normalização, são

$$E = \hbar\omega_c \left[n + \frac{|m'|}{2} - \frac{m'}{2} + \frac{1}{2} \right] + \frac{k^2 \hbar^2}{2\mu} \quad . \quad (2.78)$$

Temos na expressão acima os níveis de Landau usuais² na presença de uma deslocção tipo hélice, com frequência de ciclotron dada por $\omega_c \equiv \frac{eB}{\mu c}$ no sistema gaussiano (ou CGS) de unidades.

Agora generalizemos um pouco mais nosso sistema incluindo, além do campo magnético externo, o potencial confinante proposto na seção anterior. Dessa forma, o hamiltoniano para essa situação é

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{ieB}{2\hbar c} \rho \right)^2 \right] - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2\mu a_1}{\hbar^2} \frac{1}{\rho^2} - \frac{2\mu a_2}{\hbar^2} \rho^2 - \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} \right] \quad , \quad (2.79)$$

e chegamos à ESIT:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{ieB\rho}{2\hbar c} \right]^2 \Psi + \\ & + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{2\mu a_1}{\hbar^2} \frac{1}{\rho^2} - \frac{2\mu a_2}{\hbar^2} \rho^2 - \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} \Psi = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.80)$$

²Entenda-se “usual” como significando que esses níveis advêm da presença de um campo magnético perpendicular.

Para o *ansatz* (2.44), encontramos a equação diferencial radial

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - \frac{M'^2}{\rho^2} R + \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - k^2 + \frac{eB}{\hbar c} (m - k\beta) - \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} \right) R - \lambda^2 \rho^2 R = 0 \quad , \quad (2.81)$$

onde $M'^2 \equiv (m - k\beta)^2 - \frac{2\mu a_1}{\hbar^2}$ e $\lambda^2 \equiv \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2} + \frac{2\mu a_2}{\hbar^2}$.

Fazendo a mudança de variável $\xi = \lambda \rho^2$, chegamos à equação diferencial

$$\xi \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{dR}{d\xi} - \frac{M'^2}{4\xi} R + \beta' R - \frac{\xi}{4} R = 0 \quad , \quad (2.82)$$

onde $\beta' \equiv \frac{1}{4\lambda} \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} + \frac{eB}{\hbar c} (m - k\beta) - k^2 - \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} \right)$.

A solução para (2.82) é

$$R(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|M'|}{2}} F \left(-\beta' + \frac{|M'| + 1}{2}, |M'| + 1, \xi \right) \quad , \quad (2.83)$$

enquanto os autovalores são dados por

$$E = \hbar\omega \left[n + \frac{|M'|}{2} + \frac{1}{2} \right] - \frac{(m - k\beta)}{2} \hbar\omega_c + \frac{k^2 \hbar^2}{2\mu} + V_0 \quad (2.84)$$

A expressão de autovalores que acabamos de encontrar é semelhante à que chegamos na seção imediatamente anterior, sendo que na expressão logo acima surge uma parcela dependente da frequência de cíclotron. Analisando a situação onde o confinamento é feito via um potencial do tipo oscilador harmônico veremos que a diferença se dá apenas no parâmetro M , por por uma parcela $\frac{2\mu a_1}{\hbar^2}$, conforme também visto na seção anterior.

Capítulo 3

Anéis quânticos em um espaço com curvatura

Neste capítulo investigaremos o problema de uma fita sobre uma esfera, buscando as autofunções e autovalores associados a esse sistema físico e investigando a existência de degenerescências. Este estudo é interessante pois sistemas mesoscópicos de interesse, como os pontos quânticos, por exemplo, são obtidos a partir da superposição de camadas de materiais. Durante esse processo não se consegue obter superfícies perfeitamente planas, o que nos motiva a verificar qual seria o efeito da curvatura da superfície nas propriedades físicas de um sistema desse tipo.

À medida que obtemos os resultados, compararemos com a referência [2], na qual é apresentado o estudo da dinâmica de uma partícula em um plano de Lobachevsky.

A métrica que descreverá o meio (fita sobre uma esfera) é obtida a partir da projeção estereográfica [30] dos pontos de uma esfera sobre um plano tangente a um dos pólos da esfera. Através desse procedimento obtemos a métrica de um espaço que corresponde a um plano mais um ponto no infinito (ponto este que corresponde à projeção do outro pólo da esfera), conforme representado na figura (3.1).

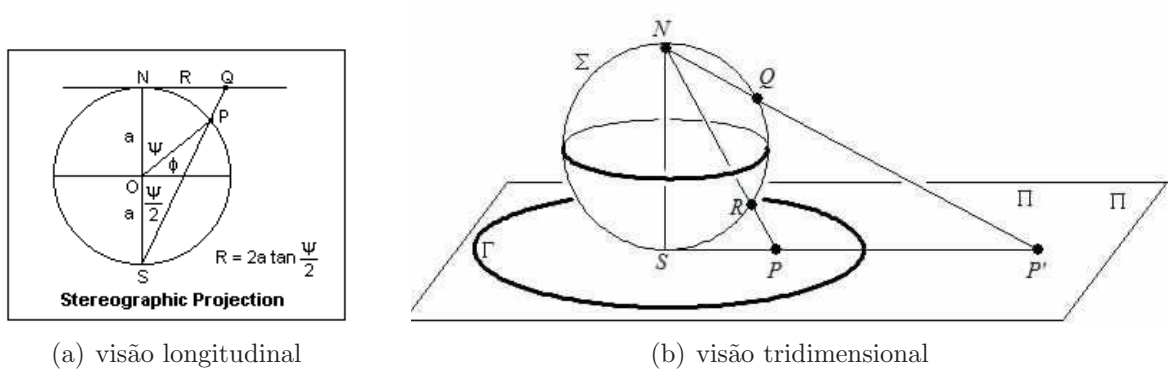


Figura 3.1: Projeção estereográfica dos pontos de uma esfera

Em nossa investigação projetamos estereograficamente os pontos de uma esfera de raio a ; os pontos resultantes distarão de ρ da origem (isto é, a projeção do centro da esfera) no plano de projeção. Além disso, utilizaremos a notação θ para o ângulo zenital em lugar do ψ utilizado na figura (3.1(a)). Do exposto, teremos as seguintes relações:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\rho}{2a} \quad , \quad (3.1)$$

e

$$d\theta^2 = \frac{1}{a^2 \left[1 + \left(\frac{\rho}{2a} \right)^2 \right]^2} d\rho^2 \quad , \quad (3.2)$$

Substituindo (3.1) e (3.2) na métrica que representa os pontos sobre uma esfera de raio a (a saber, $ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$) e, após combinar algumas relações trigonométricas, obtemos a métrica que descreve o nosso sistema:

$$ds^2 = \frac{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2}{\left[1 + \left(\frac{\rho}{2a} \right)^2 \right]^2} . \quad (3.3)$$

O campo magnético para o nosso sistema será radial de forma que, após a projeção, o campo magnético equivalente será ao longo da direção Z , ortogonal ao plano. Por sua vez, teremos um fluxo magnético de Aharonov-Bohm (Φ_{AB}) [31,

32, 33, 34, 35], atravessando o centro da fita (anel) sobre a esfera.

Conseqüentemente, o potencial vetor associado terá componente radial nula e componente azimutal dada por $\vec{A}_\varphi = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$, com

$$\vec{A}_1 = \left(0, \frac{B\rho}{2 \left[1 + \left(\frac{\rho}{2a} \right)^2 \right]^2} \right) \quad (3.4)$$

e

$$\vec{A}_2 = \left(0, \frac{\Phi_{AB}}{2\pi\rho} \right) . \quad (3.5)$$

As parcelas \vec{A}_1 e \vec{A}_2 representam, respectivamente, a componente uniforme do potencial vetor e o potencial vetor do fluxo de Aharonov-Bohm.

A partir da expressão do hamiltoniano em termos do tensor métrico e do potencial vetor, a qual já vimos no capítulo anterior, chegamos à seguinte expressão desse operador:

$$H_0 = \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left\{ -a^2 \left[1 + \left(\frac{\rho}{2a} \right)^2 \right]^2 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0} \right)^2 \right] \right\} - \\ - i\hbar \frac{\omega_c}{2} \left[1 + \left(\frac{\rho}{2a} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0} \right) + \mu \frac{\omega_c^2}{8} \rho^2 + \frac{\hbar^2}{8\mu a^2} . \quad (3.6)$$

Agora consideraremos a existência de um potencial confinante

$$V(\rho) = \lambda_1 \rho^2 + \frac{\lambda_2}{\rho^2} \left[1 + \left(\frac{\rho}{2a} \right)^2 \right]^2 - V_0 \quad , \quad (3.7)$$

com

$$V_0 = \frac{\lambda_2}{2a^2} + 2\sqrt{\lambda_2 \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{(2a)^4} \right)} \quad (3.8)$$

e

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8}{\mu} \left[\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{(2a)^4} \right]} \quad , \quad (3.9)$$

tal que o mínimo ρ_0 do potencial $V(\rho)$ seja

$$\rho_0 = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{(2a)^4}} \right)^{1/4}. \quad (3.10)$$

De acordo com o exposto acima, podemos escrever o hamiltoniano $H = H_0 + V(\rho)$ para partículas sobre a fita na esfera com potencial confinante e chegar à ESIT:

$$\begin{aligned} -a^2 \left[1 + \left(\frac{\rho}{2a} \right)^2 \right]^2 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0} \right)^2 \right] \Psi - i \frac{\mu a^2}{\hbar} \omega_c \left[1 + \left(\frac{\rho}{2a} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0} \right) \Psi + \\ + \frac{\mu^2 a^4 \omega_c^2}{\hbar^2} \left(\frac{\rho}{2a} \right)^2 \Psi + \frac{1}{4} \Psi + \frac{2\mu a^2}{\hbar^2} \lambda_1 \rho^2 \Psi + \frac{2\mu a^2 \lambda_2}{\hbar^2 \rho^2} \left[1 + \left(\frac{\rho}{2a} \right)^2 \right]^2 \Psi - \frac{2\mu a^2}{\hbar^2} V_0 \Psi - \frac{2\mu a^2}{\hbar^2} E \Psi = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Agora faremos a mudança de variável $x = \frac{1}{[1 + (\frac{\rho}{2a})^2]}$ e supondo $\Psi(\rho, \varphi) = e^{im\varphi} R(\rho)$, chegamos à seguinte equação

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} x(1-x) \frac{dR}{dx} + \frac{(m - \phi_{AB})^2 + \frac{2\mu\lambda_2}{\hbar^2}}{4} \frac{1}{1-x} R - \frac{\mu^2 a^4}{\hbar^2} \left[\frac{8}{\mu} \lambda_1 - \omega_c^2 - \frac{2V_0}{\mu a^2} \right] R + \frac{R}{4} + \\ + \frac{\mu^2 a^4}{\hbar^2} \left[\frac{\hbar^2 (m - \phi_{AB})^2}{4\mu^2 a^4} + \frac{\hbar\omega_c (m - \phi_{AB})}{\mu a^2} + \omega_c^2 + \frac{8}{\mu} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{(2a)^4} \right) \right] \frac{1}{x} R - \frac{2\mu a^2}{\hbar^2} E R = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

ou ainda,

$$-\frac{d}{dx} x(1-x) \frac{dR}{dx} + \frac{M^2}{4} \frac{1}{1-x} R + \frac{\mu^2 a^4}{\hbar^2} \omega_m^2 \frac{1}{x} R + \frac{\mu^2 a^4}{\hbar^2} \left[\omega_c^2 - \omega_0^2 \left(1 - \left(\frac{\rho_0}{2a} \right)^2 \right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{2\mu a^2}{\hbar^2} E \right] R = 0, \quad (3.13)$$

onde $M \equiv \sqrt{(m - \phi_{AB})^2 + (\mu\omega_0\rho_0^2/2\hbar)^2}$, $\omega_m \equiv \sqrt{[\omega_c - \hbar(m - \phi_{AB})/(2\mu a^2)]^2 + \omega_0^2}$ e $\phi_{AB} \equiv \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0}$.

A equação acima pode ser reescrita na forma

$$x(1-x) \frac{d^2 R}{dx^2} + (1-2x) \frac{dR}{dx} - \frac{M^2}{4} \frac{1}{1-x} R - \frac{\mu^2 a^4 \omega_m^2}{\hbar^2 x} R - \frac{\mu^2 a^4}{\hbar^2} \kappa^2 R = 0 \quad (3.14)$$

com $\kappa^2 \equiv \omega_c^2 - \omega_0^2 \left(1 - \left(\frac{\rho_0}{2a} \right)^2 \right)^2 + \frac{\hbar^2}{4\mu^2 a^4} - \frac{2E}{\mu a^2}$.

A solução de (3.14), utilizando o software Maple 7, é dada por

$$R(x) = C_1(x-1)^{M/2} x^{\frac{\gamma-1}{2}} F\left(\frac{M+\alpha'+\gamma}{2}, \frac{M-\alpha'+\gamma}{2}, \gamma, x\right), \quad (3.15)$$

onde $\gamma \equiv 1 + \frac{\mu\omega_m a^2}{\hbar}$, $\alpha' \equiv \sqrt{1 - 4\frac{\mu^2 \kappa^2 a^4}{\hbar^2}}$.

A partir da condição de normalização das autofunções, a função hipergeométrica acima deve ter:

$$\frac{M+\alpha'+\gamma}{2} = -n \quad . \quad (3.16)$$

Dessa forma chegamos à seguinte expressão para os autovalores de energia

$$E = \hbar\omega_m \left(n + \frac{M}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar\omega_c}{2} (m - \phi_{AB}) + \frac{1}{4}\mu\omega_0^2 \rho_0^2 + \mu a^2 \omega_c^2 + \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left[n + M \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} (m - \phi_{AB})^2 \right] \quad (3.17)$$

A expressão de autovalores acima apresenta alguns aspectos que destacamos a seguir.

Na expressão (3.17) temos níveis de Landau onde a frequência ω_m faz o papel da frequência de Landau. O confinamento em duas dimensões para o sistema explicaria a existência desses níveis no espectro encontrado. Contudo, ω_m diferentemente da frequência de Landau usual, não depende apenas do campo magnético externo: depende também fluxo magnético existente, da curvatura da superfície e da forma como se dá o confinamento (isto é, da forma do potencial confinante).

Quanto à curvatura vemos que os autovalores de energia, para superfícies de pequeno raio de curvatura ($a \rightarrow 0$), os valores de ω_m tendem a valores muito altos, implicando em grandes valores de energia em (3.17). Sabemos que energia e frequência estão relacionadas através da expressão

$$E = h\nu \quad , \quad (3.18)$$

onde h é a constante de Planck e ν é a frequência. Conseqüentemente, energias muito altas também podem relacionadas a frequências muito altas de fluorescência. Desta maneira sistemas mesoscópicos com dimensões reduzidas são viáveis como meios de armazenar e transmitir informações na frequência do azul e violeta, por exemplo.

Então no processo de crescimento de nanoanéis em superfícies em que há defeitos com curvatura (sejam eles oriundos do processo de crescimento utilizado ou dos defeitos intrínsecos a esta superfície) teríamos aqui um modelo para descrever tais tipos de sistemas mesoscópicos.

Os autovalores de energia não apresentam o fenômeno de degenerescência para $m = 0$, todavia ocorre degenerescência dupla quando $m \neq 0$. Temos ainda um deslocamento (no sentido de aumento) nos níveis de energia devido à curvatura da superfície devido à presença dos termos dependentes de a ; observamos ainda que quanto menores forem os valores dos números quânticos n e m , mais notável será a influência do raio de curvatura para os níveis de energia.

Vale lembrar que em nossa análise da dependência dos autovalores de energia em relação a m deve levar em conta o fato de as constantes M e ω_m dependerem implicitamente do citado número quântico. No caso específico de ω_m , a frequência de oscilação para os níveis de Landau, sua intensidade cresce com o aumento do módulo do campo magnético externo aplicado, além de depender dos parâmetros ligados ao potencial confinante.

Na referência [2] os autovalores de energia obtidos apresentam um espectro constituído de duas parcelas: uma que corresponde ao espectro discreto e outra relacionada ao espectro contínuo de autovalores de energia. Nesta mesma referência foi mostrado que, para o limite de baixas temperaturas, não há contribuição da parcela contínua ao espectro de autovalores às propriedades magnéticas e de transporte das nanoestruturas. O espectro de autovalores encontrado para o nosso

sistema é idêntico à parcela de autovalores discretos no espectro de energia obtido na referência [2]. A diferença dos nossos resultados para os desta última publicação é a parcela adicional $\mu a^2 \omega_c^2$.

Como fizemos no Capítulo 2 para anéis em espaços sem (ou com) torção investigaremos o surgimento de correntes persistentes em nosso sistema com curvatura. A partir da relação de Byers-Yang [21], a saber:

$$I_{n,m} = -\frac{\partial E_{n,m}}{\partial \Phi_{AB}} = -\frac{1}{\Phi_0} \frac{\partial E_{n,m}}{\partial \phi_{AB}} \quad , \quad (3.19)$$

e lembrando que os parâmetros ω_m e M dependem implicitamente de ϕ_{AB} , chegamos à seguinte expressão para as correntes persistentes:

$$I_{n,m} = -\frac{1}{\Phi_0} \left[\frac{\hbar^2}{2\mu\omega_m a^2} \left(\omega_c - \frac{\hbar(m - \phi_{AB})}{2\mu a^2} \right) \left(n + \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\omega_c}{2} \right] - \frac{1}{\Phi_0} \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{(m - \phi_{AB})}{M} - (m - \phi_{AB}) \right] \quad . \quad (3.20)$$

A expressão acima nos mostra que quando $a \gg 1$, correspondendo a uma esfera de grande raio, as correntes no anel tendem a um valor constante $I = \frac{e^2 B}{4\pi\mu c}$. Por outro lado, quando $a \ll 1$, as correntes persistentes são quantizadas através de n e m ; além disso, tais correntes na expressão (3.20) aumentam com o incremento do campo magnético aplicado através da frequência ω_c .

Investiguemos também a magnetização que pode ser obtida a partir das relações (2.17) e (2.20), resultando em:

$$M_{n,m} = -\frac{\hbar\omega_c}{\omega_m} \left(n + \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 (m - \phi_{AB})}{2\mu a^2 \omega_m} \left(n + \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \right) - \frac{e\hbar}{2\mu c} (m - \phi_{AB}) + \frac{2ea^2}{c} \omega_c \quad . \quad (3.21)$$

A partir da expressão acima vemos que para $m = \phi_{AB}$ e $a \gg 1$ o momento

magnético tende ao valor constante

$$M_{n,m} \approx -\frac{\hbar\omega_c}{\omega} \left(n + \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{2ea^2}{c} \omega_c \quad , \quad (3.22)$$

onde substituímos $\omega_m \approx \omega$ para $a \gg 1$.

A expressão (3.22) nos mostra que, para o limite em que ela foi obtida, o momento magnético apresenta uma parcela constante e outra que representa uma quantização do momento magnético $M_{n,m}$. Pode ainda acontecer de o raio de curvatura a ser extremamente grande a ponto de a parcela constante na expressão acima ser dominante, superando dessa forma a contribuição quantizante ao momento magnético.

Capítulo 4

Conclusões

No Capítulo 2 investigamos a influência da torção do espaço sobre as propriedades de um sistema confinado. A torção introduzida no espaço se faz sentir por meio de uma deslocação tipo hélice presente no meio. O confinamento, por outro lado, é introduzido através de um potencial confinante proposto na literatura [1].

Dentre as conclusões que podemos tirar acerca dos sistemas estudados na seção (2.1), temos:

- Na expressão de autovalores em (2.15) observamos que o número quântico m é deslocado por um fator ligado aos *quanta* de fluxo magnético existentes na região onde está a partícula. Uma outra característica dos autovalores encontrados é que surgem níveis de Landau ligados a uma frequência efetiva ω . Essa frequência efetiva está ligada aos parâmetros do potencial em 2.1 – se a partícula não estivesse confinada ao anel, a frequência de Landau seria ω_c , que é a de cíclotron [24, 25]. Tomando o limite para o anel unidimensional, o que é feito via ajuste dos parâmetros do potencial, obtemos a expressão (2.16), a qual tem a estrutura de níveis típica de um confinamento parabólico.
- A magnetização que encontramos apresentou um aumento através de valores

negativos à medida que a contribuição da frequência natural ω_0 se torna muito superior a ω_c ; por sua vez, quando ω_0 torna-se muito inferior a ω_c , a magnetização torna-se cada vez mais negativa, ou seja: o diamagnetismo, caracterizado por valores negativos de \mathcal{M} , torna-se mais acentuado.

- A partir da relação de Byers-Yang, presente na referência [26] calculamos as correntes persistentes que surgiriam em nosso sistema. Observamos que a intensidade das correntes persistentes, conforme a expressão (3.19), aumenta à medida que o campo magnético externo aplicado cresce, visto que a frequência ω_c é diretamente proporcional à intensidade do campo magnético B aplicado.
- Expressando a magnetização em termos das correntes persistentes encontramos a relação (2.1), onde há duas parcelas: uma que corresponde ao momento magnético clássico para um loop de corrente, com raio efetivo $\rho_{n,m}$; outra, representando um deslocamento diamagnético (pois tende a diminuir a magnetização). Pode-se ver ainda que no limite de campos fracos o momento magnético será proporcional à corrente e o resultado clássico é recuperado.

Na subseção (2.2.1), temos:

- A expressão de autovalores para o fio quântico na expressão (2.35), além do termo associado à energia cinética de translação para uma partícula em um espaço euclidiano, temos um outro ligado a energia cinética de rotação em torno do centro do fio. Este último termo difere daquele encontrado para o caso de um espaço euclidiano, sem defeitos, com a passagem do caso euclidiano (sem defeitos) para o caso em que há a deslocação sendo feita via transição $\frac{\hbar^2 m^2}{2\mu R_0^2} \rightarrow \frac{\hbar^2 (m-k\beta)^2}{2\mu R_0^2}$. Um novo deslocamento do número quântico m ocorre quando um fluxo magnético está presente na região onde está a partícula. Vimos ser possível que o espectro de autovalores de uma partícula cuja dinâmica se desenvolve em um espaço com uma deslocação se comporte

como uma partícula em um espaço sem defeitos. Para esse fim, bastaria o controle da intensidade do fluxo Φ_{AB} que perpassa o fio.

Na subseção (2.2.2), ao comparar a expressão (2.66) com aquela obtida para a partícula livre na seção (2.2.1), vemos a contribuição de superfície nos autovalores, através da parcela $\frac{\hbar^2}{8\mu a^2}$. Este termo pode ser entendido como a contribuição ao potencial que é dada aos autovalores da partícula que se movimenta numa superfície bidimensional imersa em um espaço tridimensional [29]. Nesta última referência a equação para a dinâmica de partículas imersas em superfícies imersas em espaços de dimensões maiores se faz através da adição ao hamiltoniano de um termo dependente da curvatura da superfície. No citado trabalho o termo adicional funciona como uma espécie de potencial geométrico de confinamento. Nosso resultado na expressão (2.66), apesar de obtido por um caminho distinto, está em concordância com a proposta da referência [29].

Na subseção (2.2.3), temos:

- Apesar de nenhum campo magnético externo estar ligado no sistema descrito nesta subseção, surgem níveis de Landau efetivos, dependentes do vetor de Burgers.
- Outro fato verificado é a quebra da degenerescência introduzida por dois termos: um relacionado ao defeito (termo k/β) e outro ao termo proporcional a $\frac{1}{\rho^2}$ no potencial (2.1) – ou seja, a parcela $\frac{2\mu a_1}{\hbar^2}$. Contudo, no caso deste último fator, a sua influência decai rapidamente com a distância em relação à origem do sistema, ao passo que a contribuição do defeito permanece. Conseqüentemente o defeito tem uma influência global sobre propriedades físicas da partícula como seu espectro de energia.
- Outro aspecto em relação à expressão (2.73) é a possibilidade de comparação com os autovalores associados a um sistema do tipo oscilador harmônico em

um meio com uma deslocação [28], bastando fazer $a_1 \equiv 0$ na expressão (2.1). No entanto o potencial confinante apresentado neste capítulo é mais geral. Ele leva em conta a contribuição de repulsão que afeta os autovalores a pequenas distâncias, reforçando a quebra de degenerescência, conforme discutido no parágrafo anterior.

É conhecido que em um espaço euclidiano, sem defeitos, elétrons que se movem em uma superfície, sujeitos à ação de um campo magnético perpendicular (a essa superfície), apresentam níveis de Landau em seu espectro de autovalores de energia. Na subseção anterior vimos que a introdução de uma deslocação, juntamente com o confinamento pelo potencial da forma (2.1), causa o surgimento de níveis de Landau associados a uma frequência de ciclotron efetiva, que está ligada a um dos parâmetros do potencial. Assim, objetivando observar quais seriam as parcelas de contribuição do potencial confinante e do campo magnético, respectivamente, para os níveis de Landau que surjam em um meio com uma deslocação, encontramos os resultados na subseção (2.2.4). Nesta seção estudamos a dinâmica de uma partícula sujeita à ação de um campo magnético externo e em um meio com uma deslocação.

As expressões de autovalores encontradas na subseção (2.2.4), seja na presença, seja na ausência do potencial confinante, são semelhantes entre si. Em ambos os casos os parâmetros envolvidos dependem da intensidade do vetor de Burgers.

No Capítulo 3 investigamos a influência da curvatura sobre as propriedades físicas de um sistema mesoscópico. Este estudo é interessante pois sistemas como os pontos quânticos, por exemplo, são obtidos a partir da superposição de camadas de materiais. Durante esse processo não se consegue obter superfícies perfeitamente planas, o que nos motiva a verificar qual seria o efeito da curvatura da superfície nas propriedades físicas. Fizemos comparação de alguns resultados com aqueles presentes na referência [2], na qual é apresentado o estudo da dinâmica de uma partícula em um plano de Lobachevsky. Dentre os resultados e conclusões a respeito

do Capítulo 3 podemos destacar:

- Na expressão (3.17) temos níveis de Landau onde a frequência ω_m faz o papel da frequência de Landau. O confinamento em duas dimensões para o sistema explicaria a existência desses níveis no espectro encontrado. Contudo, ω_m diferentemente da frequência de Landau usual, não depende apenas do campo magnético externo: depende também fluxo magnético existente, da curvatura da superfície e da forma como se dá o confinamento (isto é, dos parâmetros do potencial confinante).
- Vimos ainda que para o limite ($a \rightarrow 0$), os valores de ω_m tendem a valores muito altos, implicando em grandes valores de energia em (3.17). Como a energia e a frequência estão relacionadas através da expressão $E = h\nu$, energias muito altas também podem relacionadas a frequências muito altas de fluorescência. Desta maneira sistemas mesoscópicos com dimensões reduzidas são viáveis como meios de armazenar e transmitir informações na frequência do azul e violeta, por exemplo. No processo de crescimento de nanoanéis em superfícies em que há defeitos com curvatura (sejam eles oriundos do processo de crescimento utilizado ou dos defeitos intrínsecos a esta superfície) teríamos aqui um modelo para descrever tais tipos de sistemas mesoscópicos.
- Os autovalores de energia não apresentam o fenômeno de degenerescência para $m = 0$, todavia ocorre degenerescência dupla quando $m \neq 0$. Observamos ainda que quanto menores forem os valores dos números quânticos n e m , mais notável será a influência do raio de curvatura para os níveis de energia.
- Na referência [2] os autovalores de energia obtidos apresentam um espectro constituído de duas parcelas: uma que corresponde ao espectro discreto e outra relacionada ao espectro contínuo de autovalores de energia. Nesta mesma referência foi mostrado que, para o limite de baixas temperaturas, não há

contribuição da parcela contínua ao espectro de autovalores às propriedades magnéticas e de transporte das nanoestruturas. O espectro de autovalores encontrado para o nosso sistema é idêntico à parcela de autovalores discretos no espectro de energia obtido na referência [2]. A diferença dos nossos resultados para os desta última publicação é a parcela adicional que encontramos, a saber, $\mu a^2 \omega_c^2$.

- Com base na expressão (3.20) percebemos que quando $a \gg 1$ (isto é, para uma esfera de grande raio) as correntes no anel tendem a um valor constante $I = \frac{e^2 B}{4\pi\mu c}$. Por outro lado, quando $a \ll 1$, as correntes persistentes são quantizadas através de n e m ; as correntes na expressão (3.20) aumentam com o incremento do campo magnético aplicado através da frequência ω_c .
- A expressão (3.22) nos mostra que, para o limite em que ela foi obtida, o momento magnético apresenta uma parcela constante e outra que representa uma quantização do momento magnético $M_{n,m}$. Entretanto, o raio de curvatura a pode ser extremamente grande a ponto de a parcela constante na expressão (3.22) ser dominante, fazendo com que o momento magnético deixe de ser quantizado.
- Para o anel quântico temos degenerescência dupla quando $m \neq 0$ (para $m = 0$ não há degenerescência); observamos ainda que quanto menores forem os valores dos números quânticos n e m , mais notável será a contribuição da curvatura para os níveis de energia.

Bibliografia

- [1] TAN, W. C. e INKSON, J.C., *Electron states in a two-dimensional ring - an exactly soluble model*, Semiconductor Science and Technology, 11, p.1635, 1996.
- [2] BULAEV, D.V., GEYLER, V.A. e MARGULIS, V.A., *Effect of surface on magnetic moment and persistent currents in two-dimensional quantum rings and dots*, Physical Review B **69**, p.195313, 2004.
- [3] DOMINGUES, H.H., *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*, Atual (São Paulo), 1982.
- [4] LANDAU, L.D. e LIFSHITZ, E.M., *Teoria do Campo*, Mir (Moscou), 1980.
- [5] NASH, C., SEN, S., *Topology and Geometry for Physicists*, 7ed, Academic Press, 1992.
- [6] KATANAEV, M. O. e VOLOVICH, I.V., *Theory of Defects in Solids and Three-Dimensional Gravity*, Annals of Physics **216**, p.1, 1992.
- [7] MARQUES, G.A. de, FURTADO, C., BEZERRA, V.B. e MORAES, F., *Landau levels in the presence of topological defects*, Journal of Physics A: Mathematical and General **34**, p.5945, 2001.

-
- [8] KATANAEV, M.O., *Geometric theory of defects*, arXiv:cond-mat/0407469 v3 5 Dec 2005 ; KATANAEV, M.O., *Introduction to the Geometric Theory of Defects*, arXiv:cond-mat/0502123 v1 4 Feb 2005.
- [9] SÁTIRO, C. e MORAES, F., *Lensing effects in a nematic liquid crystal with topological defects*, arXiv:cond-mat/0503482 v2 18 May 2006.
- [10] BOWICK, M.J., CHANDAR, L. e SCHIFF, E.A., *The Cosmological Kibble Mechanism in the Laboratory: String Formation in Liquid Crystals*, arXiv:hep-ph/9208233 v1 19 Aug 1992.
- [11] PAGNOSSIN, I.R., *Propriedades de transporte elétrico de gases bidimensionais de elétrons nas proximidades de pontos-quânticos de InAs*. 2004. 165f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade de São Paulo.
- [12] DOOSE, S., *Single-Molecule Characterization of Photophysical and Colloidal Properties of Biocompatible Quantum Dots*. 2003. 188f. Tese (Doutorado em Física) - Universidade de Heidelberg.
- [13] WILLIAMS, S. C., *Patterning Nanocrystals Using DNA*. 2003. 200f. Tese (Doutorado em Química) - Universidade da Califórnia.
- [14] HINZER, K., *Semiconductor Quantum Dot Lasers*. 1998. 110f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade de Ottawa.
- [15] KASTNER, M.A., *Artificial atoms*, Physics Today, **46**, 1, pp.24-31, 1993.
- [16] FRADKIN, E., *Field Theories of Condensed Matter Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, 1991.
- [17] AVISHAI, Y., HATSUGAI, Y. e KOHMOTO, M., *Persistent currents and edge states in a magnetic field*, Physical Review B, **47**, p.9501, 1993.

-
- [18] AVISHAI, Y. e KOHMOTO, M., *Quantized persistent currents in quantum dot at strong magnetic field*, Physical Review Letters, **71**, p.279, 1993.
- [19] KUMAGAI, M. e OHNO, T., *Topology in Artificial Structures*, Solid State Communications, **83**, 11, p.837, 1992.
- [20] TAN, W. C. e INKSON, J.C., *Landau quantization and the Aharonov-Bohm effect in a two-dimensional ring*, Physical Review B, **53**, 11, p.6947, 1996.
- [21] TAN, W. C. e INKSON, J.C., *Magnetization, persistent currents, and their relation in quantum rings and dots*, Physical Review B, **60**, p.5626, 1999.
- [22] FUHRER, A., LÜSCHER, S., IHN, T., HEINZEL, T., ENSSLIN, K., WEGSCHEIDER, W. e BICHLER, M., *Energy spectra of quantum rings*, Nature, **413**, p.822, 2001.
- [23] KLAMA, S., *The electron energy spectrum of a circular ring in an external magnetic field*, Journal of Physics: Condensed Matter **5**, p.5609, 1993.
- [24] BIALYNICKI-BIRULA, I., CIEPLAK, M. e KAMINSKI, J., *Theory of Quanta*, Oxford University Press (Oxford), 1992.
- [25] HUANG, K., *Statistical Mechanics*, 2nd edition, John Wiley & Sons, 1987.
- [26] BYERS, N. e YANG, C.N., *Theoretical Considerations Concerning Quantized Magnetic Flux in Superconducting Cylinders*, Physics Review Letters **7**, p.46, 1961.
- [27] ABRAMOWITZ, M. e STEGUN, I.A., *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards (Washington), 1964.

- [28] FURTADO, C., MORAES, F., *Harmonic oscillator interacting with conical singularities*, Journal of Physics A: Mathematical and General, **33**, p.5513, 2000.
- [29] COSTA, R.C.T., *Quantum mechanics of a constrained particle*, Physical Review A, **23**, 4, p.1982, 1981.
- [30] RUSSO JR., M. F. e CUROTTOA, E., *Stereographic projections path integral in S^1 and $(S^2)^m$ manifolds*, Journal of Chemical Physics, **118**, 15, p.6806, 2003.
- [31] LANDAU, L.D. e LIFSHITZ, E.M., *Mecânica Quântica: teoria não relativista*, Mir (Moscou), 1985.
- [32] SAKURAI, J.J., *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [33] BOGACHEK, E.N. e LANDMAN, U., *Edge states, Aharonov-Bohm oscillations, and thermodynamic and spectral properties in a two-dimensional electron gas with antidots*, Physical Review B, **52**, p.14067, 1995.
- [34] FURTADO, C., de LIMA RIBEIRO, C.A., AZEVEDO, S. *Aharonov-Bohm effect in the presence of a density of defects*, Physics Letters A, **296**, p.171, 2002.
- [35] DUNNE, G.V., *Hilbert Space for Charged Particles in Perpendicular Magnetic Fields*, Annals of Physics, **215**, p.233, 1992.

Índice Remissivo

- ansatz, 20, 21, 24
- antidot, 8
- autovalores, 21, 26, 27, 31, 32
- autovalores de energia, 29
- Bessel
 - função de, 25
 - funções de, 26
- bulk, 8
- Burgers
 - vetor de, 21
- cíclotron
 - frequência de, 29, 31
- campo externo, 30
- cilíndrico
 - fio, 19
- confinamento, 30
- confinante
 - potencial, 28, 31
- confluente
 - função hipergeométrica, 29
- contínuas
 - deformações, 2
- energia
 - autovalores de, 21
- ESIT, 24, 30
- função de onda, 29
- hamiltoniano, 31
- homeomorfismo, 2
- Landau
 - níveis de, 31
- métrica, 23
- magnético
 - campo, 30, 31
- mesoscópicos
 - anéis metálicos, 16
 - sistemas, 6, 7, 12, 33, 38
- nanofios, 7
- Parede Rígida
 - potencial do tipo, 22
- partícula livre, 27

quântica

 dinâmica, 30

quântico

 fio, 22

quânticos

 anéis, 7, 19

 pontos, 6, 7, 12

resistividade, 8

tensores métricos, 23

 contravariante, 23

 covariante, 23

topológico

 defeito, 19

torção, 19

Volterra

 processo de, 20

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)