GERSON MARTINS FONTALVA

UM ESTUDO SOBRE INEQUAÇÕES:

ENTRE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC-SP

São Paulo

2006

GERSON MARTINS FONTALVA

UM ESTUDO SOBRE INEQUAÇÕES:

ENTRE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Pontíficia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do título de ***MESTRE EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA****, sob a orientação do(a)* ***Prof(a). Dr(a). Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão.***

PUC/SP

São Paulo

2006

BANCA EXAMINADORA:

À memória de meu pai, João José Fontalva, por estar sempre presente em todos os momentos de minha vida para me apoiar e por me ensinar o verdadeiro significado da palavra “pai”, dedico este trabalho com muito carinho.

“*Ninguém morre enquanto permanecer vivo no coração de alguém”* (ANÔNIMO).

AGRADECIMENTOS

A redação da presente dissertação, embora fruto de meu esforço pessoal para vencer os inúmeros obstáculos encontrados nessa jornada, seria impossível sem o auxílio e colaboração de diversas pessoas, merecedoras de meus sinceros agradecimentos.

Iniciando pela Professora Doutora Maria Cristina Souza de Albuquerque Maranhão, orientadora e amiga, pela boa vontade que me acolheu como orientando, pela sua orientação competente e simples, acompanhando de forma sistemática o desenvolvimento deste trabalho, tecendo comentários, fazendo sugestões e me colocando, às vezes, diante de desafios, que, ao superá-los, só me fizeram crescer como pesquisador. Obrigado.

Em seguida, gostaria de agradecer às seguintes pessoas:

À Professora Doutora Silvia Dias Alcântara Machado e ao Professor Doutor Méricles Thadeu Moretti por comporem a banca examinadora e principalmente pelas valiosas críticas e sugestões durante o exame de qualificação.

À Professora Doutora Leila Zardo Puga, não só por sua participação no exame de qualificação, colaborando com valiosas sugestões, mas principalmente por sua amizade que conservo com carinho.

Aos professores do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, que contribuíram com seus conhecimentos ao longo do curso.

Aos colegas de nosso grupo de pesquisa, especialmente a Luciana Lage e Janaina Lage Souza, que contribuíram, de forma bastante eficiente, como observadoras durante a aplicação da pesquisa.

Aos colegas de mestrado, em especial a Luciane Martinelli, José Kioshi Nakamura e Paulo Roberto Vieira de Oliveira, pelo apoio e pela sincera amizade que pretendo preservar.

Aos meus alunos que, com boa vontade e seriedade, participaram da pesquisa, sem o que o presente trabalho seria impossível.

À Professora Maria Silvia Brumatti Sentelhas, pela importante colaboração na composição do texto do exame de qualificação.

À Professora Nanci Geroldo Richter, pela eficiência e dedicação com que fez a revisão do texto da dissertação e por sua amizade.

À Professora Edna Cristina do Prado, pela revisão cuidadosa do texto do exame de qualificação e por suas sugestões oportunas.

Aos meus pais, pela vida e pelos bons exemplos que fizeram de mim uma pessoa de bem.

À minha família pelo incentivo, paciência, apoio e compreensão nos momentos mais difíceis dessa jornada e também por dividirem comigo muitas de minhas responsabilidades para que eu pudesse desenvolver o presente trabalho.

A Deus, por tudo!

Muito obrigado.

O homem prudente não diz tudo quanto pensa, mas pensa tudo quanto diz.

(ARISTÓTELES, filósofo grego)

RESUMO

Essa pesquisa diagnóstica foi aplicada a alunos do 3º ano do *Ensino Médio* de uma escola técnica estadual localizada em São Bernardo do Campo. Visamos investigar as seguintes questões: (1) De quais recursos esses estudantes lançam mão na resolução de *inequações*? Quais *domínios* fazem interagir? (2) Que justificativas fornecem para as diversas etapas na resolução de *inequações*? (3) Nessas justificativas, explicitam ferramentas tais como conceitos e propriedades ou explicitam apenas termos relativos a técnicas de resolução de *inequações*? (4) Quais tipos de erros apresentam? Quais são os erros mais freqüentes? Para tanto elaboramos um instrumento de diagnose inspirado no trabalho de Gallo e Battú (2000), entrevistamos o professor de matemática desses alunos nas séries anteriores, consultamos o livro didático adotado por ele e o plano de trabalho docente da instituição. Esse instrumento, com *inequações* polinomiais do 1º, 2º e 3º graus na forma fatorada e algumas *inequações* racionais, a serem resolvidas pelos alunos, foi aplicado através da técnica de pesquisa denominada “thinking aloud”. Para a análise dos resultados, utilizamos como referencial teórico a *interação entre domínios* de Douady (1986) e a categorização de técnicas devida a Assude (2000). Estabelecemos também relações entre os tipos de erros em *inequações* dados por Tsamir, Almog e Tirosh (1998) e os encontrados no presente diagnóstico. Em relação aos recursos empregados, verificamos maior tendência do emprego do *domínio algébrico*, sendo que observamos algumas interações entre domínios, dependendo da *inequação* proposta. Houve forte tendência do emprego de técnicas de resolução em vez de conceitos e propriedades matemáticas nas resoluções. A maior parte das justificativas se referiu a *técnica algébrica*, mesmo nos casos onde seu uso era inviável. Verificamos que os tipos de erros também dependem do tipo de *inequação* proposta, sendo que os mais freqüentes foram: “*Conexões sem sentido com raízes quadradas*”, “*Multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos”* e “*Dedução incorreta de sinais de fatores a partir do sinal do produto ou quociente”.* É provável que esse quadro seja decorrente do processo ensino-aprendizagem das *inequações*, o qual julgamos ter privilegiado técnicas em vez de conceitos e propriedades matemáticas.

Palavras-chave: *inequações, desigualdades, Álgebra, Ensino Médio*

ABSTRACT

This diagnostic research was applied for 3^{rd} level *high school* students of a technical school located in the city of São Bernardo do Campo, aiming at the investigation of the following questions: (1) Which resources do these students lay hold of for the resolution of *inequalities ?* What interplays among domains do they get? (2) What justifications do they provide for the several *inequalities'* resolution stages? (3) On these justifications, do they explicit tools such as concepts and properties or only terms related to the resolution's techniques of inequalities ? (4) Which types of mistakes do they present? What are the most frequent ones?. So that we elaborated a diagnose instrument based on the work of Gallo and Battú (2000), we interviewed the mathematics' teacher of these students in the previous grades, checked the educational book adopted by them, as well as the institution's educational plane. This instrument contains 1^{st}, 2^{nd} and 3^{rd} polynomial *inequalities* in the factored form and some rational *inequalities* to be solved by the students which was applied through a research technique called "thinking aloud". The theoretical reference used for the analysis of results was the '*interplays among domains'* of Douady (1986), and the categories proposed by Assude (2000) about resolution's techniques of inequalities. We also established relations among the types of mistakes in *inequalities* given by Tsamir, Almog and Tirosh (1998) and the mistakes found in the present diagnose. Regarding the resources applied, we verified a higher tendency for the use of *algebraic domain,* but also some *interplays among domains,* depending on the proposed *inequality*. A high tendency for the use of resolution's techniques instead of concepts and mathematical properties took place. The major part of justifications was related to the *algebraic technique*, even in cases where its use was inappropriate. We verified that the types of mistakes depend on the *inequality* type proposed, and the most frequent were: *"Forming meaningless connections with quadratic roots", "Multiplying/ dividing by factors that are not necessarily positive", and "Incorrectly deducting signs of factors from signs of product/quotient".* Probably it was a result of the process of the *inequalities* teaching/learning process, which, in our judgment, has given preference to techniques instead of concepts and mathematical properties.

Keywords: *inequalities, Algebra, high school.*

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CD..............................Conceito da Divisão (Refere-se à condição de não existência de divisão por zero

CRQ............................Erro do tipo “Conexões sem sentido com raízes quadradas”

DA..............................Domínio Algébrico

DN..............................Domínio Numérico

DRG.......................... .Domínio das Representações Gráficas

DA+DN......................Interação entre os Domínios Algébrico e Numérico

DA+DRG+DN............Interação entre os Domínios Algébrico, Representações Gráficas e Numérico

DA+DRG....................Interação entre os Domínios Algébrico e das Representações Gráficas

DIS.............................Erro do tipo “Dedução incorreta de sinais de fatores a partir do sinal do produto/quociente”

DN+DRG...................Interação entre os Domínios Numérico e das Representações Gráficas

MDF..........................Erro do tipo “Multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos”

OM.............................Propriedade da Compatibilidade da relação de ordem com a multiplicação

OM’...........................Propriedade decorrente da OM e que é descrita em nossa análise *a priori*

PCN...........................Parâmetros Curriculares Nacionais

PDMA.......................Propriedade Distributiva da Multiplicação em relação a Adição

TA............................Técnica Algébrica

TAS..........................Técnica Algébrica com Tabela de Sinais

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

I-PROBLEMÁTICA

I.1-O problema, o quadro teórico e as questões de pesquisa

Há muitos anos, atuo como professor do Ensino Médio e do Ensino Superior em disciplinas de Matemática e de Física. Não é rara minha observação de dificuldades entre alunos desses níveis de ensino no trato com inequações, tanto quando resolvem problemas de Física como quando resolvem problemas de Matemática.

Tsamir, Almog e Tirosh (1998) afirmam em sua pesquisa que:

> [...] inequações recebem relativamente pequena atenção e são usualmente discutidas somente nos últimos anos da escola secundária. (TSAMIR, ALMOG e TIROSH, 1998, p.129).

Ainda, segundo essas autoras, pesquisas em Educação Matemática têm dado pouca atenção para a obtenção de dados sobre concepções de alunos relativamente a inequações e sugestões para o ensino/aprendizagem desse conteúdo.

Tal afirmação também pode ser estendida ao Brasil, pois ao examinarmos as listagens elaboradas por Fiorentini (1993; 1995a; 1997; 2001) sobre teses e dissertações nacionais, verificamos que entre 1971 e 2001, não constam pesquisas cujos títulos se relacionem com inequações nem sobre temas correlatos, como desigualdades, por exemplo. Em busca de trabalhos desenvolvidos sobre esse tema, após 2001 encontramos uma única pesquisa nacional no ano de 2002. Seu título é “Sistemas de inequações do 1º grau”, de autoria de Traldi Jr. Constatamos, desta forma, que há carência de pesquisas nacionais sobre esse assunto.

Contudo, existem, em nível nacional, alguns projetos de pesquisa relacionados ao processo de ensino e aprendizagem da Álgebra. Um desses projetos tem sido desenvolvido na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), pelo grupo de pesquisa denominado Educação Algébrica. Tal projeto procura estudar temas relacionados à Álgebra nos segmentos de ensino básico e superior.

De acordo com Coelho, Machado e Maranhão (2003), o referido projeto tem como questões principais:

> 1-Qual a Álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de Matemática?
>
> 2-Como se configura a “lacuna” entre o ensino básico e o ensino superior e como examiná-la a partir do currículo de Álgebra da Licenciatura em Matemática ?
>
> (COELHO;MACHADO;MARANHÃO,2003,p.8)

O grupo também desenvolve, de forma atrelada ao citado projeto, um sub-projeto que investiga as questões:

> 1 – O que se entende por Álgebra?
>
> 2 – Como se configuram as “lacunas” entre os diversos segmentos de ensino e, em particular entre o ensino básico e superior ?
>
> (MARANHÃO; MACHADO; COELHO, 2004, p.9)

Este sub-projeto enfoca principalmente temas ligados ao ensino e aprendizagem de Números, Equações e Inequações, buscando interações entre tópicos de diversos campos ou domínios matemáticos.

Nossa investigação sobre inequações se insere nesse sub-projeto e acreditamos que tenha o potencial de com ele contribuir. O referido sub-projeto se ocupa de questões relativas à maneira de pensar de estudantes brasileiros, de conhecimentos colocados em jogo durante as resoluções de inequações, como também com questões relativas aos tipos de erros cometidos e os domínios matemáticos empregados como recursos nas referidas resoluções. Ressaltamos que há diversas pesquisas sobre esse tema em andamento nesse sub-projeto visando a uma futura síntese dessas investigações.

Ressaltamos que, de acordo com Tsamir, Almog e Tirosh (1998) as inequações desempenham importante papel na matemática por estarem presentes em ramos como a Álgebra, Trigonometria, Programação Linear e no estudo de funções, além de complementar o estudo de equações.

Destacamos também que pesquisadores como Tsamir, Almog e Tirosh (1998), Gallo e Battú (2000) e Traldi Jr (2002) apontam, em suas pesquisas, dificuldades de alunos no trato com inequações.

Assim, a carência de pesquisas nacionais no tema, a importância do estudo das inequações, bem como as dificuldades dos alunos no trato com tal tópico, conforme as pesquisas citadas e, ainda, nossa inserção no projeto de pesquisa mencionado, nos conduziu a desenvolver uma investigação sobre inequações. Passamos, então, a uma breve descrição das pesquisas mencionadas.

Tsamir, Almog e Tirosh (1998) realizaram uma pesquisa diagnóstica entre alunos de escola secundária e analisaram procedimentos de resolução de inequações bem como as dificuldades enfrentadas pelos alunos.

Dentre as constatações dessas pesquisadoras, podemos citar que, ao resolverem inequações quadráticas e racionais usando representações gráficas de parábolas, os alunos produziram, em geral, soluções corretas. A maior fonte de dificuldade, porém, foi o uso de processos de resolução válidos para equações como se fossem válidos para inequações.

Entre os procedimentos mais usados para a resolução destacaram-se o das "manipulações algébricas" e o dos "esboços gráficos".

Manipulações algébricas são, de acordo com as autoras, procedimentos de resolução de inequações nos quais os alunos lançam mão de recursos como adicionar ou subtrair expressões idênticas a ambos os membros da inequação, multiplicar ambos os membros por um fator (que pode ser , em alguns casos o quadrado do denominador) ou multiplicar ambos os membros por um fator negativo e mudar o sentido do sinal de desigualdade (> ou <), encontrar as raízes de funções quadráticas, investigar o sinal do coeficiente do termo ao quadrado e de $\Delta = b^2 - 4ac$ ou resolver uma inequação do tipo $f(x)g(x)$>0 , na qual $f(x)$ e $g(x)$ representam expressões na variável x, fazendo-se a reunião das soluções dos dois sistemas de inequações , S1 e S2, a seguir:

$$(S1)\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (S2)\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

Esboços gráficos, segundo Tsamir, Almog e Tirosh (1998), são os procedimentos nos quais o aluno faz o esboço do gráfico da função relevante e examina os valores da variável para os quais a função representada assume valores positivos ou negativos.

As principais dificuldades apresentadas pelos alunos durante as resoluções foram:

a) Dificuldades com valores excluídos: As restrições, para os tipos de inequações propostas, foram denominadores não poderem ser nulos em inequações racionais[1] e radicandos não poderem ser negativos em raízes quadradas. Segundo Tsamir, Almog e Tirosh (1998), os alunos produziram em geral soluções erradas ao negligenciarem essas restrições. Isso significa que as autoras detectaram dificuldades dos alunos em relação a condições de existência de soluções no conjunto dos números reais.

b) Escolha inapropriada de conectivos lógicos: Os alunos, com freqüência, inverteram o uso dos conectivos “e” e “ou” em inequações quadráticas dos tipos x^2-25>0, x^2<16 e (x-1)(x-2)>0, bem como em inequações racionais do tipo $\frac{2x-2}{x+1}<1$.

c) Dedução incorreta de sinais de fatores a partir do sinal do produto/quociente: A origem desse tipo de dificuldade foi o uso de afirmações insuficientes do tipo:

$$\frac{a}{b}>0 \quad \Rightarrow \quad a>0 \quad e \quad b>0$$

$$a^2>b^2 \quad \Rightarrow \quad a>b$$

$$a^2<b^2 \quad \Rightarrow \quad a<b$$

[1] Inequação racional é considerada pelas autoras como aquela dada pelo quociente entre dois polinômios.

d) Resolver equação no lugar de inequação: Alguns alunos, em inequações não lineares, simplesmente trocaram o sinal de desigualdade (> ou <) pelo sinal de igualdade (=) e resolveram inequações como se fossem equações.

e) Multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos: Uma boa parte dos alunos multiplicou ambos os membros de inequações racionais pelo denominador, sem levar em conta o caso em que o denominador era negativo.

f) Formação de conexões sem sentido com raízes quadradas: Como exemplo apresentamos o caso $x^2 - 25 > 0 \Rightarrow x^2 > 25 \Rightarrow x > \pm 5$.

g) Resolver o quadrado de uma inequação dada: Esse erro foi gerado pela seguinte propriedade das igualdades. Se a=b então $a^2 = b^2$.

As autoras consideram que os erros categorizados nos itens d, e, f e g tiveram suas origens no uso de processos de resolução válidos para equações como se fossem válidos para inequações.

Segundo Tsamir, Almog e Tirosh (1998), o impacto das similaridades estruturais entre equações e inequações criam um forte sentimento intuitivo que os procedimentos empregados para resolver equações poderão ser empregados para inequações. Dada a riqueza das categorias formuladas na pesquisa dessas autoras, consideramos interessante utilizá-las para as análises em nosso trabalho.

Gallo e Battú (2000) desenvolveram um estudo sobre inequações. Nele, procuraram esclarecer analogias e diferenças entre a manipulação de escritas algébricas, cujo significado está ligado ao sinal de igualdade (=) e à manipulação de escritas algébricas, cujo significado está ligado às relações “ser menor que”, “ser maior que”, “ser maior ou igual a” e “ser menor ou igual a” (<, >, $\geq$, $\leq$). Para esse estudo, elaboraram um conjunto de tarefas de resolução de inequações e analisaram os procedimentos de resolução que designaram de controle interno[2] e o grau de estruturação dos modelos empregados nas resoluções. O público alvo era constituído por alunos de séries correspondentes ao primeiro ano do Ensino Médio no Brasil (15 a 16 anos), que, se supunha, saberem resolver inequações do primeiro grau.

Interessa-nos exibir a parte das tarefas propostas nessa pesquisa:

1) $-7x+14 \geq 0$

2) $-7(x+2) \geq 0$

3) $-7+0.x \geq 0$

4) $2(3-x) < 0$

5) $2(3-x) < 1$

6) $\frac{5}{x} \leq 0$

7) $\frac{x}{5} \leq 0$

8) $\frac{5}{x} \leq 1$

9) $\frac{5}{2-x} \geq 0$

[2] controle interno, segundo as autoras, é o que leva o aluno à solução, correta ou não, de um problema, sem influência exterior.

10) $\frac{5}{2-x} < 5$

11) $3(2-x)(3+x) < 0$

12) $2(2-x)(3+x) < 0$

Relativamente às tarefas que mencionamos, as autoras detectaram dois modelos de resolução, aos quais elas denominaram de "modelo das inequações do 1° grau" e "modelo do estudo do sinal", descritos a seguir.

a) Modelo das inequações do 1º grau: Nesse modelo, os alunos aplicaram o que as autoras designaram de "princípios da equivalência" de modo a obter uma inequação equivalente à primeira e que tinha solução imediata.

b) Modelo do estudo do sinal: Esse modelo, normalmente, foi aplicado no caso em que a inequação foi apresentada como um produto de fatores e sua resolução foi obtida usando o que as autoras designaram de "regra de anulação do produto" e a "regra de sinais".

Cabe ressaltar que o conjunto de tarefas era uma seqüência de exercícios articulados de maneira a mostrar a comparação dos modelos de resolução e de suas possíveis mudanças.

De acordo com Gallo e Battú (2000) o modo que a inequação é apresentada ao aluno, fatorada ou não, segundo membro nulo ou não, pode evocar modelos de resolução diferentes e mudanças de modelo.

Segundo as autoras a técnica de pesquisa usada foi do tipo “thinking aloud” (pensando em voz alta), na qual o aluno devia escrever em cada passagem o que ele estava pensando ao resolver a inequação.

Alguns dos resultados dessa pesquisa, que nos interessam diretamente, são a rigidez com a qual os alunos escolheram e desenvolveram os modelos de resolução e, ao empregarem o modelo do estudo do sinal bem como o modelo das inequações do 1º grau, apresentaram procedimentos de forma mecânica e sem reflexão sobre o que faziam.

> [...] o estudo do sinal se revela como um procedimento mecânico sem reflexão no significado da pergunta posta e da resposta obtida e no sentido da simbologia usada para determinar a solução; analogamente, a aplicação dos princípios de equivalência encaminham para passagens que, de modo automático, levam ao resultado. (GALLO E BATTÙ, 2000, p.6)

A pesquisa de Traldi Jr. (2002) apoiou-se no quadro teórico de R. Duval sobre registros de representação semiótica e foi realizada com alunos concluintes de 3ª série do Ensino Médio. O autor procurou verificar se os alunos eram capazes de resolver problemas de programação linear utilizando como ferramenta sistemas de inequações de 1º grau.

Uma de suas constatações mais importantes, e que interessa muito em nossa pesquisa, é que os alunos tinham a tendência de resolverem sistemas de inequações com os mesmos procedimentos usados para sistemas de equações.

> Pudemos constatar, a partir dos resultados encontrados, que os alunos[...].Buscaram transferir os procedimentos de resolução de um sistema de equações para resolver um sistema de inequações, porém não consideraram as diferenças entre eles, formulando a resposta como se fosse um sistema de equações, não considerando outros pontos possíveis para a resposta. (TRALDI JR, 2002, p. 99)

O tema "inequações" é considerado interessante de se desenvolver no Brasil, porque, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do Ensino Fundamental um dos objetivos da Matemática no quarto ciclo (7ª e 8ª séries) é capacitar o aluno a produzir e interpretar escritas algébricas nas quais as inequações sejam uma ferramenta.

Assim deve-se visar que o aluno possa:

> produzir e interpretar diferentes escritas algébricas–expressões, igualdades e desigualdades- , identificando as equações, inequações e sistemas; resolver [...] inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos; (...) (BRASIL, 1998, p.40, grifo nosso)

Ainda de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Médio:

> O currículo do Ensino Médio deve garantir também espaço para que os alunos possam estender e aprofundar seus conhecimentos sobre números e álgebra, [...] (BRASIL, 1999, p.257) .

Vemos aí a inclusão das inequações como um conteúdo necessário para a extensão e aprofundamento dos conhecimentos sobre números e álgebra.

Considerando o quadro apresentado, nos propusemos a desenvolver, junto a alunos brasileiros do Ensino Médio, uma investigação *com o objetivo de: a) sabermos se há dificuldades de nossos alunos no trato com esse tópico matemático e, se houver, apontarmos quais são elas; b) diagnosticar conceitos, propriedades e procedimentos utilizados nas resoluções de algumas inequações e explicitados nas justificativas sobre essas resoluções.*

Em nossas análises, tanto para a elaboração do instrumento diagnóstico como para a interpretação dos resultados, usamos também o quadro teórico de Douady.

O quadro teórico de Douady, que inclui as noções de ferramenta e objeto e, também, a noção de *interação entre domínios*[3]*,* possibilita a análise da interação entre diferentes domínios da matemática nos recursos utilizados pelos alunos. Segundo essa pesquisadora, convém distinguir em um conceito matemático sua característica ferramenta de sua característica objeto.

Entende-se por *ferramenta* o uso de um conceito matemático nos diversos problemas que ele permite resolver. Um conceito alcança significado por sua característica de ferramenta. Ainda, conforme essa pesquisadora:

> Essa característica põe em jogo as relações que ele mantém com os outros conceitos implicados no mesmo problema. Em outras palavras, do ponto de vista ferramenta não se pode falar de um conceito, mas de uma rede de conceitos gravitando, eventualmente, em torno de um conceito principal. Assim a aprendizagem deverá levar em conta tal conjunto. (DOUADY E PERRIN-GLORIAN, 1984, p.10)

Por *objeto,* entende-se o conceito matemático considerado como objeto cultural, tomando seu lugar num edifício mais amplo, socialmente reconhecido.

Segundo essa autora, em atividades matemáticas, ao resolvermos um problema, podemos considerá-lo resolvido se pudermos fundamentar suas explicações conforme um sistema de validação próprio dos matemáticos. Nessa tentativa, criamos conceitos que exercem o papel de ferramentas que servirão à resolução do problema. Quando passamos esse conceito para a comunidade científica e o descontextualizamos de modo que possa ser reutilizado, tornamo-lo um objeto do saber.

[3] Em francês, *jeux de cadres.*

Segundo Maranhão (1999), para um pesquisador ou professor “ferramenta” é um objeto em seu funcionamento científico. Para um aluno, o uso de uma ferramenta é sempre prático.

Ainda segundo essa autora, diferentes domínios (quadros) são citados por Douady, físico, geométrico, numérico, gráfico, das representações (gráficas ou algébricas), das grandezas etc, e a formulação de *problemas de aprendizagem* devem envolver pelo menos dois domínios, de modo que um sirva de referência ao outro e possibilitem meios de validação pela ação.

“Validação” é entendida como um processo de aceitação ou refutação, em geral coletiva, por meio de debates. Em nosso caso entenderemos também como justificativa, porque, ao justificar, o aluno pode ser levado a rever sua produção.

Para Maranhão (1999, p.129-130), não é correto o uso do termo mudança de domínios, em lugar de interação entre domínios, pois não se trata de se obter conhecimentos de um domínio e depois aplicá-los no outro. Trata-se sim de disponibilizá-los em, ao menos, dois domínios para se formular problemas que levem a produzir conhecimentos novos ao se fazer interagir conhecimentos dos domínios em jogo. São esses problemas que ela denomina de *problemas de aprendizagem.*

Segundo Douady,

> [...] Um quadro [domínio] é constituído de objetos de uma parte da matemática, de relações entre objetos, suas formulações eventualmente diferentes [...]. Dois quadros [domínios] podem ter os mesmos objetos e serem diferentes [...] (DOUADY, 1986, p.11)

De acordo com Maranhão (1999, p.130):

> Esse termo interação, prevê idas e vindas entre domínios estabelecendo relações matematicamente relevantes entre as noções estudadas. (MARANHÃO, 1999, P.130)

E ainda, segundo essa pesquisadora, as noções são ferramentas, isto é, são previstos usos de conceitos, propriedades e procedimentos de cada domínio e que:

> É precisamente pelo fato de os conhecimentos de um domínio não serem suficientes para avançar, numa situação, que o aluno lança mão de conhecimentos de outros domínios. (MARANHÃO, 1999, p.119)

Em nosso caso, supomos que os domínios que os alunos poderiam lançar mão seriam o numérico, o algébrico e o das representações gráficas para as resoluções ou validações, uma vez que estudamos a resolução de inequações de 1º , 2º e 3º graus, focalizando as de 1º e 2º graus (conforme descrevemos no próximo capítulo).

Face à possibilidade de predominância de emprego de termos técnicos, por parte dos sujeitos da pesquisa, nas justificativas de suas resoluções, lançamos mão de alguns tipos de técnicas apresentadas por Assude (2000) com a intenção de complementar as análises com base em Douady (1986).

Assim, no presente trabalho, consideramos que quando o aluno explicita predominantemente termos técnicos, nas justificativas das resoluções de inequações, não se baseia necessariamente em propriedades e conceitos matemáticos.

De Assude, destacamos:

> [...] toda atividade humana, e em particular uma atividade matemática pode ser analisada e descrita por tarefas e mesmo por tipos de tarefas. Por exemplo, um tipo de tarefa que os alunos do secundário devem poder realizar é ‘fatorar’ uma expressão algébrica’, por exemplo f(x) = -5x (x+1)+ (x+1). Para realizar essa tarefa, os alunos devem ter uma <u>técnica</u>, isto é, uma maneira de fazer: por exemplo reconhecer e colocar o fator (x+1) em evidência e encontrar os termos do outro fator, a saber f(x) = (x+1) (-5x+1)... (ASSUDE, 2000, p.9, grifo nosso)

Desta forma, reiteramos que nesse estudo entendemos técnica como uma maneira de fazer uma tarefa, sem explicitação de fundamentos teóricos tais como conceitos, propriedades ou princípios matemáticos.

Classificamos as técnicas de resolução das inequações, propostas nesta pesquisa , com base em Assude (2000), focalizando a Técnica Algébrica (TA) e a Técnica Algébrica com Tabela de Sinais (TAS), pois consideramos ambas serem suficientes para expressar, de modo evidente, o possível apelo a técnicas de resolução de inequações sem apelo a explicitações relativas a conceitos e propriedades matemáticas. Assude (2000) em sua pesquisa classifica outros tipos de técnicas. Focalizamos apenas as mencionadas porque supusemos serem adequadas e suficientes para elucidar diferenças, nas produções dos estudantes entre uso de ferramentas (tais como conceitos e propriedades matemáticas) e uso de técnicas.

A técnica algébrica é considerada por Assude como aquela em que são feitas apenas manipulações algébricas. Segundo ela costuma ser bem detalhada, com reagrupamentos no mesmo membro de termos em “x” e no outro os demais termos, usando para isso regras de transposição de termos para a redução da expressão. Porém, nem todas as inequações podem ser resolvidas com técnica algébrica, como por exemplo, inequações do segundo ou terceiro graus, inequações produto, inequações quociente entre outras.

Algumas inequações podem ser reduzidas a produtos ou quocientes de expressões que exigem para a resolução o uso de técnicas algébricas com tabelas de sinais (TAS). Tal técnica, de acordo com Assude (2000) uma inequação como $x \leq \frac{1}{x}$ teria como primeiro passo a explicitação de restrições sobre "x" ; como segundo passo a transposição dos termos para um mesmo membro e fatoração, obtendo:

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x} \leq 0$$

Como terceiro passo ocorreria o estudo do sinal do quociente

$Q(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x}$ em tabelas tais como:

x	$-\infty$	-1	0	1 $+\infty$
x+1	-	+	+	+
x-1	-	-	-	+
x	-	-	+	+
Q(x)	-	+	-	+

O último passo conteria a apresentação de solução na forma de intervalos ou como:

$S = \{ x \in \Re \ / \ x \leq -1 \quad \text{ou} \quad 0 < x \leq 1 \}$

Nesse quadro teórico, e considerando alguns estudantes do Ensino Médio em face a tarefas propostas por nós (descritas no próximo capítulo) empreendemos a presente investigação com as seguintes questões de pesquisa:

1) De quais recursos esses estudantes lançam mão na resolução de inequações? Quais domínios fazem interagir?
2) Quais tipos de erros apresentam? Quais são os erros mais freqüentes?
3) Que justificativas fornecem para as diversas etapas na resolução de inequações?
4) Nessas justificativas estudantes do Ensino Médio explicitam ferramentas tais como conceitos e propriedades ou explicitam apenas termos relativos a técnicas de resolução de inequações?

II-ESCOLHAS METODOLÓGICAS

II.1 - Método de pesquisa

O interesse dos pesquisadores da área de educação em relação às pesquisas qualitativas vem crescendo dia-a-dia.

Uma pesquisa dessa espécie apresenta certas particularidades. Segundo Bogdan e Biklen (apud Lüdke e André, 1986), existem cinco características relativas a esse tipo de pesquisa:

- A fonte de dados na pesquisa qualitativa é o ambiente natural e o mais importante instrumento é o pesquisador.
- Deve-se preocupar muito mais com o processo do que com o produto.
- O pesquisador deverá focar de forma especial o "significado" que as pessoas dão às coisas e à sua vida.
- Os dados colhidos têm caráter predominantemente descritivos.
- A análise dos dados tem tendência de seguir um caminho indutivo. No início do estudo existem questões de interesses muito amplos, tornando-se diretos e específicos no final.

Segundo Lüdke e André (1986), dentre as várias formas nas quais uma pesquisa qualitativa pode se apresentar, uma das que as autoras afirmam merecer especial destaque é o <u>estudo de caso</u>, tendo na área de educação uma aceitação crescente, pois possui um bom potencial para estudar questões que se relacionam com a escola.

O estudo de caso é o estudo de <u>um</u> caso que deverá sempre ser bem restrito, com seus limites bem definidos ao longo do estudo. Um caso pode ter a mesma natureza de outros, mas, ao mesmo tempo, é distinto, por ter um interesse peculiar, individual.

De acordo com essas pesquisadoras o estudo de caso apresenta as seguintes características fundamentais:

- <u>Enfatiza a interpretação em contexto.</u>

Para uma melhor apreensão de um objeto, o estudo de caso leva em conta a necessidade de se considerar o contexto onde ele ocorre. Por exemplo, a análise de um caso relacionado a uma escola deverá levar em conta as características específicas da região onde ela se encontra, sua história, recursos materiais e humanos, estrutura física e administrativa.

- <u>Utiliza várias fontes de informação.</u>

Por várias fontes queremos indicar variedade de dados, coletas feitas em diferentes ocasiões, variedade de situações e tipos diferentes de informantes que o pesquisador pode utilizar.

O pesquisador, munido desta variedade de informações, provenientes de variadas fontes, terá oportunidade de confirmar ou refutar hipóteses, descobrir novos dados, cruzar informações, erigir hipóteses alternativas ou afastar suposições.

- O estudo de caso propõe-se à descoberta.

O investigador deve se manter atento a novas informações que poderão surgir durante o estudo, mesmo no caso em que parta de conjecturas teóricas iniciais, uma vez que o conhecimento é sempre algo dinâmico, que sempre se faz e refaz ao longo do tempo e não algo estático e acabado.

- Mostra experiência vicária e permite generalizações naturalísticas.

O investigador procura descrever suas experiências de modo a dar condições ao leitor de produzir generalizações naturalísticas.

> Em lugar da pergunta: Esse caso é representativo de quê ? o leitor vai indagar o que posso (ou não) aplicar desse caso na minha situação ? (LÜDKE E ANDRÉ, 1986, P.19)

Segundo Stake (Apud Lüdke e André, 1986):

> A generalização naturalística [...] ocorre em função do conhecimento experiencial do sujeito, no momento em que este tenta associar dados encontrados no estudo com dados que são frutos das suas experiências pessoais. (LÜDKE E ANDRÉ, 1986, P.19)

- Procura representar com exatidão a realidade de maneira completa e profunda.

O pesquisador tende a mostrar a diversidade de dimensões que ocorrem num dado problema, enfocando-o como um todo. Com essa maneira de tratar o problema tende-se a evidenciar a inter-relação existente entre seus componentes bem como dar ênfase à sua complexidade natural.

II.2- Procedimentos de Pesquisa

A pesquisa foi realizada durante os meses de maio e junho de 2003, em uma Escola Técnica Estadual (ETE) da região do ABC, localizada em São Bernardo do Campo, na Grande São Paulo.

Essa escola conta com vários laboratórios, videoteca, biblioteca, refeitório, lanchonete, papelaria, oficinas, enfim, recursos materiais requeridos por seus professores visando a um bom desempenho na aprendizagem de seus alunos. Mantém o Ensino Médio no período da manhã e o Ensino Técnico nos períodos da tarde e noite. De acordo com a secretaria da escola, cerca de 30% dos alunos do Ensino Médio também freqüentam algum curso técnico.

O corpo docente é composto, em sua maioria, por professores experientes e com longos anos de trabalho nessa instituição.

O ingresso de novos alunos é feito mediante um concurso vestibular, o que proporciona um alunado de nível diferenciado do de outras escolas estaduais em que isso não ocorre.

Por todas essas características, essa instituição foi considerada interessante para o diagnóstico pretendido, comportando um estudo de caso.

A escolha dessa escola deveu-se, também, ao fato de o pesquisador ser professor da instituição, conhecendo-a bem. Além disso, obtivemos a concordância da coordenação do Ensino Médio para aplicarmos a pesquisa em horário normal de aula dos alunos.

Os alunos que participaram da pesquisa, trinta (30) no total, eram de turmas das 3ªs séries do Ensino Médio, com idade entre 17 e 18 anos, que haviam estudado o tema inequações na 1ª série do referido curso.

Os participantes se apresentaram como voluntários após um trabalho inicial de conscientização sobre a importância da pesquisa que realizamos.

Nessa tarefa, discutimos de forma sucinta alguns problemas educacionais e de forma um pouco mais detalhada os problemas ligados ao ensino da Matemática no Brasil. Consideramos ainda as conseqüências, para o futuro do jovem, geradas pela carência de conhecimentos na referida ciência.

Escolhemos turmas de 3ªs séries pela facilidade de acesso do pesquisador/professor a esses grupos e pela disponibilidade dos professores em cederem aulas para alguns dos eventos referentes a este trabalho de pesquisa.

A partir dessas escolhas, procedemos à análise do Plano de Trabalho Docente referente às 3ªs séries e realizamos entrevistas com o professor que ministrou as aulas de tal conteúdo investigado a esse grupo de alunos em séries anteriores.

Essas entrevistas nos subsidiaram a escolha das inequações a serem propostas em nosso instrumento diagnóstico e também adequações em nossa análise *a priori* sobre os procedimentos e possíveis domínios a serem colocados em interação, pelos alunos, durante as resoluções das questões de nosso instrumento diagnóstico. Elas serviram também para a formação de grupos de alunos com desempenho “fraco”(f), “médio”(M) e “forte”(F) em matemática, em igual número, de acordo com um mapa de aproveitamento apresentado pelo professor.

Interessa explicitar[4] que:

-apesar de nossa pesquisa apresentar certa similaridade com as de Tsamir, Almog e Tirosh (1998) e de Gallo e Battù (2000) pelo fato de todas serem do tipo diagnóstico, ela difere pelo menos quanto à nacionalidade dos alunos investigados. Enquanto Tsamir, Almog e Tirosh (1998) aplicaram a pesquisa a alunos israelenses e Gallo e Battù (2000) a alunos italianos, nossa pesquisa foi aplicada a alunos aqui do Brasil;

-além disso, como já apresentamos, usamos referências teóricas diferentes dos desses autores para a elaboração das tarefas propostas e para a interpretação de dados. Por outro lado, em nossas análises, estabelecemos algumas relações entre nossos resultados e os de Tsamir, Almog e Tirosh (1998);

-para a escolha das inequações que fariam parte do instrumento de diagnose tomamos como base as inequações propostas na pesquisa de Gallo e Battú (2000), elaborando uma seqüência de tarefas articuladas, que difere da apresentada por essas autoras, por termos em mente as referências teóricas de Douady, nessa elaboração. Propusemos inequações que poderiam evocar procedimentos de resolução diferentes por parte dos alunos: ora por propiciarem interação entre domínios, ora por não propiciarem.

Pensamos, em princípio, na possibilidade de explicitação, por parte dos alunos, de conceitos e propriedades matemáticas.

[4] Respondendo a pedido de membros da banca do exame de qualificação dessa dissertação.

Essas considerações são detalhadas e, também, ajustadas no próximo capítulo, nas "análises *a priori*" das inequações propostas no instrumento diagnóstico;

-um dos motivos de nossa escolha pela inspiração nas tarefas de Gallo e Battù (2000), foi o fato de que nela as tarefas propostas guardarem uma certa similaridade com as questões normalmente trabalhadas na instituição que nos serviu de campo de pesquisa, a qual não possui a tendência de priorizar a resolução de problemas. Reiteramos que nossa escolha por esta instituição deveu-se ao fato de conhecê-la bem, por ser professor da casa há muito tempo. Portanto, já sabíamos dessa similaridade;

- a pesquisa de Traldi Jr.(2002) que, assim como a nossa, foi aplicada a alunos do 3º ano do Ensino Médio do Brasil; no entanto, diferencia-se principalmente por não ser do tipo diagnóstico mas por desenvolver uma seqüência didática. Uma outra diferença básica é que em Traldi Jr.(2002) o conteúdo matemático investigado era o de sistemas de inequações do 1º grau e em nossa pesquisa tratamos de inequações de 1º e 2º graus principalmente.

Realizamos a experimentação em dois (2) encontros de 50 minutos cada, em duas semanas consecutivas, contamos também com o apoio de duas observadoras que anotaram as reações dos alunos durante a resolução das questões propostas.

No primeiro encontro, que ocorreu em 10/06/03, aplicamos as quatro (4) primeiras tarefas, consideradas de menor grau de dificuldade. No segundo, que ocorreu em 17/06/03, aplicamos as três (3) últimas tarefas, cujo grau de dificuldade era maior. Os alunos não estavam avisados sobre com quais conteúdos matemáticos iriam tratar.

Em cada encontro os alunos foram instruídos a resolver uma inequação por folha recebida, na qual existia um espaço destinado para resolução e outro para justificativa por escrito como pensaram ao realizarem cada passagem efetuada.

Essa proposta tem por base a técnica de pesquisa denominada “thinking aloud” (pensando alto) que desde a década de 1930 tem ganhado popularidade em pesquisas segundo Gallo e Battú (2000). Para seguir a referida técnica, fornecemos para cada aluno e para cada questão a resolver, uma folha sulfite com um espaço para resolver e outro para justificar por escrito como ele pensou ao realizar cada passagem da resolução.

Os alunos deram respostas usando caneta preta e, caso cometessem algum erro eles deveriam passar um traço em diagonal sobre o que considerassem errado. Pedimos que usassem caneta para termos todas as informações escritas pelos alunos. Solicitamos também que resolvessem as questões individualmente, sem comunicação e sem usar calculadora.

III- ESTUDOS PRELIMINARES E ANÁLISE *A PRIORI*

Ao longo do desenvolvimento de nosso estudo de caso, os estudos preliminares se inserem na fase “Utilização de várias fontes de informação”, uma vez que neles buscamos informações no Plano de Trabalho Docente, livro didático e entrevistamos um professor.

Também identificamos esses estudos preliminares com a fase do estudo de caso intitulada “Procura representar com exatidão a realidade de maneira completa e profunda”.

Para um maior aprofundamento na análise das situações do instrumento de diagnose, procedemos também a análise *a priori* dessas situações, com base nos estudos preliminares que retratam o contexto escolar e em estudos mais amplos de outros pesquisadores. Com isso, tínhamos a intenção de aproximarmos essas situações às situações escolares vivenciadas pelos alunos, sem reproduzi-las. Também tínhamos a intenção de analisarmos a adequação do instrumento tendo em vista outras pesquisas. Enfim, com esta análise, pretendemos propor situações com base em outras pesquisas alterando-as para serem pertinentes às questões da que se apresenta entre alunos brasileiros da referida escola.

III.1 - Estudos preliminares

Com a finalidade de obtermos informações sobre conhecimentos dos alunos que participaram de nossa pesquisa usamos os seguintes recursos:

- Análise do Plano de Trabalho Docente

- Breve descrição do livro didático adotado

- Entrevista com o professor que ministrou os tópicos sobre inequações para os alunos envolvidos no presente trabalho.

III.1.1- O Plano de Trabalho Docente

Conforme esse documento informa, foram previstas cinco aulas semanais de matemática durante o primeiro ano do Ensino Médio valendo-se dos seguintes procedimentos didáticos e metodológicos: aula expositiva, correção de exercícios, filmes, recuperação e seminários.

De acordo com o Plano de Trabalho Docente é previsto o seguinte perfil do egresso:

> O aluno concluinte do ensino médio deve estar preparado para exercer ativa e solidariamente sua cidadania, dar prosseguimento a seus estudos em diferentes níveis e atuar no mundo do trabalho, demonstrando, para isso, que:
>
> 1.domina basicamente a norma culta da língua portuguesa e sabe usar as diferentes linguagens para se expressar e comunicar;
>
> 2.é capaz de construir e aplicar conceitos das diferentes áreas do conhecimento de modo a investigar e compreender a realidade;
>
> 3.consegue selecionar, organizar, relacionar e interpretar dados e informações, trabalhando-os contextualizadamente para enfrentar situações-problema e tomar decisões;
>
> 4.organiza informações e conhecimentos disponíveis de forma a argumentar consistentemente;
>
> 5.recorre a conhecimentos desenvolvidos para elaborar propostas de intervenção solidária na realidade. (PLANO DE TRABALHO DOCENTE, 2001)

Constatamos que o perfil do egresso aqui descrito é coerente com os três blocos de competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática que constam nos PCN (1999) do Ensino Médio.

No Plano de Trabalho Docente constam os conteúdos a serem desenvolvidos durante o ano letivo da 1ª série. Destes, destacamos somente os capítulos que apresentam relação com nossa pesquisa.

CAPÍTULO 3 – Função do 1º grau

- Definição e gráfico da função
- Coeficientes: linear e angular
- Domínio e imagem da função
- Estudo dos sinais e zeros da função
- Inequações do 1º grau
- Inequações produto e quociente
- Sistemas de inequações

CAPÍTULO 4 – Função do 2º grau

- Equações do 2º grau
- Definição e gráfico da função
- Coordenadas do vértice da parábola

- Valor máximo/mínimo da função
- Domínio e imagem da função
- Estudo do sinal da função
- Inequações do 2º grau
- Inequações produto e quociente
- Sistema de inequações

Consta ainda no referido plano um cronograma, segundo o qual os itens sobre inequações de 1º e 2º graus deveriam ser desenvolvidos aproximadamente entre a metade do 1º e metade do 2º bimestre da 1ª série, ou seja, entre os meses de abril e maio de 2001, o que é coerente com a carga horária citada e os conteúdos acima descritos.

Nossa pesquisa diagnóstica foi aplicada dois anos após os conteúdos sobre inequações terem sido ministrados, de acordo com as informações dadas pelo professor das turmas, em entrevista, como apresentamos adiante, em III.1.3.

III.1.2- Breve Descrição do Livro Didático Utilizado na Escola em 2001

Para as turmas do 1º ano do Ensino Médio adotou-se um livro-texto.

Em tal livro-texto, com a intenção de evidenciar a aplicabilidade da Matemática em nossa vida, o autor apresenta leituras complementares sob o título “As profissões e a Matemática”, nas quais comenta a importância da Matemática em diversas profissões como a administração, medicina, direito, engenharia, por exemplo.

Com base em Fiorentini (1995b), consideramos que no livro-texto os conteúdos são expostos no estilo tecnicista, de acordo com a conhecida seqüência: definição, exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos. No final de cada volume existe uma bateria de testes de múltipla escolha destinados aos concursos vestibulares, mostrando-se compatível com o plano de trabalho docente.

O livro apresenta os conceitos de inequação do 1º e 2º grau, inequação produto e inequação quociente. Em seus exemplos resolvidos ele trabalha nos domínios algébrico e das representações gráficas, mostrando invariavelmente tanto manipulações algébricas quanto esboços dos gráficos das funções envolvidas. Apresenta também, durante a resolução das inequações, quando pertinente, a tabela de sinais e, ao final, mostra o conjunto de solução.

Nossa pesquisa utiliza tarefas na forma de inequações para os alunos resolverem, o que é coerente com a proposta do livro didático analisado. Ela difere dessa proposta no que tange a justificativas pedidas para os alunos.

III.1.3 - Entrevista com o professor das turmas

Com a finalidade de obtermos informações sobre os conhecimentos dos alunos e previsões sobre os procedimentos deles durante a aplicação da pesquisa diagnóstica, fizemos uma entrevista com o professor que, em 2001, ministrou os conteúdos sobre inequações para as referidas turmas. Obtivemos com isso algumas informações a respeito de seu trabalho.

A seguir reproduzimos os trechos mais importantes da entrevista.

PESQUISADOR: O que você poderia dizer sobre o grau de dificuldade e o desempenho dos alunos do 1º ano, durante o ano de 2001?

PROFESSOR: *Os alunos que ingressam nessa escola passam por um exame vestibular, o chamado vestibulinho. Apesar disso, alguns alunos apresentam deficiências na formação matemática no Ensino Fundamental e com isso mostram dificuldades no aprendizado, o que interfere nos seus desempenhos.*

PESQUISADOR: Quando ensina funções, você aborda o estudo do sinal das mesmas?

PROFESSOR*: Sim, faz parte do conteúdo a ser desenvolvido*.

PESQUISADOR: Você aborda explicitamente o estudo do sinal das funções na resolução de inequações?

PROFESSOR: *Sim, já que não se consegue resolver certas inequações sem esse tipo de estudo e, também, por constar nos conteúdos programáticos antecedendo o estudo de inequações.*

PESQUISADOR: Você aborda problemas de outras áreas que recaem em inequações?

PROFESSOR: *Raramente se consegue fazer isso. O tempo é muito curto.*

PESQUISADOR: Por que essa preocupação com o tempo?

PROFESSOR: *Existe ainda, por parte dos pais dos alunos, a preocupação com os conteúdos por causa do vestibular. Eles costumam cobrar em reuniões de pais e mestres.*

PESQUISADOR: Quais procedimentos você mais usa ao resolver as inequações?

PROFESSOR: *Depende do tipo de inequação, porém posso dizer que uso com freqüência princípios da equivalência e estudo do sinal.*

PESQUISADOR: Será que se propusermos aos alunos que atribuam valores numéricos para "x" nas inequações eles encontrarão a solução?

PROFESSOR: *É possível, porém não trabalho desta forma e não conheço ninguém que o faça. É um procedimento não convencional.*

PESQUISADOR: Ao apresentarmos uma inequação do tipo $4\,(x-2)\leq 0$, quais seriam os procedimentos de resolução esperados por um aluno típico de suas turmas?

PROFESSOR: *Provavelmente aplicaria a propriedade distributiva, em seguida transposição de um termo para o 2º membro e dividiria por 4.*

PESQUISADOR: Ao apresentarmos uma inequação do tipo $-4x+8\geq 0$, quais seriam os procedimentos de resolução esperados por um aluno típico de suas turmas?

PROFESSOR*: O aluno faria a transposição do 8 para o 2º membro, depois dividiria por –4.*

PESQUISADOR: Ao apresentarmos uma inequação do tipo (x-2)(2x+4)$\leq$0, quais seriam os procedimentos de resolução esperados por um aluno típico de suas turmas?

PROFESSOR*: O aluno provavelmente usaria o estudo do sinal, pois está diante de um produto. Depois ele faria o quadro produto.*

PESQUISADOR: Ao apresentarmos uma inequação do tipo (x-2)(2x+4)$\leq$2, quais seriam os procedimentos de resolução esperados por um aluno típico de suas turmas?

PROFESSOR: *Darei aqui duas respostas.*

1) Se essa inequação fosse proposta antes dos alunos estudarem a função do 2º grau, os alunos diriam que não dá para resolver.

2) Se fosse proposta após estudo da função quadrática usariam a propriedade distributiva, depois a transposição do 2(dois) e resolveriam na forma $ax^2+bx+c \leq 0$ *com o esboço gráfico. No caso desse tipo de inequação, eu não dou regra prática, mas somente uso representação gráfica.*

PESQUISADOR: Ao apresentarmos uma inequação do tipo $\frac{5}{x-2}$>0, quais seriam os procedimentos de resolução esperados por um aluno típico de suas turmas ?

PROFESSOR: *O mais provável é que o aluno faça x-2>0 pensando em regra de sinal*.

PESQUISADOR: Ao apresentarmos uma inequação do tipo $\frac{5}{x-2}$>5, quais seriam os procedimentos de resolução esperados por um aluno típico de suas turmas?

PROFESSOR: *Aqui os alunos deverão iniciar transpondo o 5 (cinco), depois usarão o m.m.c. (mínimo múltiplo comum) e resolverão a inequação resultante usando regra de sinais com auxílio do quadro-quociente.*

PESQUISADOR: Ao apresentarmos uma inequação do tipo $(x-1)(x^2-4)>0$, quais seriam os procedimentos de resolução esperados por um aluno típico de suas turmas?

PROFESSOR: *Os alunos farão os esboços dos gráficos de $y=x-1$ e de $y=x^2-4$ fazendo a seguir o estudo do sinal. A seguir aplicarão as regras de sinais com o auxílio do quadro-produto. Nenhuma chance existe para usarem a propriedade distributiva e recaírem no estudo do sinal de uma função do 3º grau.*

III.1.3.1- Conclusões parciais

De acordo com a entrevista com o professor que ministrou em 2001 as aulas sobre inequações para as turmas envolvidas na pesquisa, podemos esboçar como primeiras conclusões parciais que é provável que os alunos trabalhem preferencialmente nos domínios algébrico e das representações gráficas e, é muito pequena a probabilidade da utilização do domínio numérico.

Quando na entrevista o professor das turmas se refere a quadro-produto e a quadro-quociente, notamos que é o mesmo que Assude (2000) chama de “ tabela de sinais”. Também, durante a entrevista, o professor das turmas menciona “transposição” ou “transposição de termos”, como essa pesquisadora.

Confrontando as respostas do professor às questões da entrevista com o que examinamos no livro didático adotado (considerado por nós de linha tecnicista), concluímos que o trabalho do professor é coerente com o citado livro.

Com o auxílio desses estudos preliminares, reunimos as informações que consideramos necessárias para elaborar nossa análise *a priori.*

III.2 - Análise *a priori*

Vamos inicialmente citar algumas propriedades matemáticas que eventualmente seriam utilizadas pelos alunos durante as resoluções das inequações.

Para essa finalidade, tomamos como base a obra: *Curso de Álgebra*, de Abramo Hefez (1993).

As propriedades da relação de ordem que apresentamos a seguir estão de acordo com esse autor e foram enunciadas por ele em relação a um anel ordenado. Como o corpo dos números reais, por ser corpo ordenado é um anel ordenado, elas são válidas para o conjunto dos números reais, que é o conjunto no qual são propostas as situações desta pesquisa aos sujeitos investigados.

Anel ordenado:

Um anel A será chamado de anel ordenado se existir uma relação binária $x \le y$, que se lê x é menor do que ou igual a y, que goza das seguintes propriedades:

O_1 **(Reflexividade)[Propriedade reflexiva]**

Para todo $a \in A$, temos que $a \le a$.

O_2 **(Antissimetria)[Propriedade anti-simétrica]**

Para todos $a,b \in A$, se $a \le b$ e $b \le a$, então a=b.

O_3 **(Transitividade)[Propriedade transitiva]**

Para todos $a,b,c \in A$, se $a \le b$ e $b \le c$, então $a \le c$.

O_4 **(Totalidade)[Propriedade da tricotomia]**

Dados $a,b \in A$, tem-se que é verdadeira uma

das asserções $a \le b$ ou $b \le a$.

OA **(Compatibilidade com a adição) [Propriedade da compatibilidade da relação de ordem com a adição]**

Para todos $a,b,c \in A$, se $a \le b$ então $a + c \le b + c$.

OM **(Compatibilidade com a multiplicação)[Propriedade da compatibilidade da relação de ordem com a multiplicação]**

Para todos $a,b,c \in A$, se $a \le b$ e $0 \le c$, então $ac \le bc$.

(HEFEZ, 1993, p.27).

Também é importante citar outra propriedade, a qual indicamos pela sigla OM' e que destacamos mais adiante através de grifo, que o mesmo autor apresenta na forma de exercício, assim:

1.6 Mostre que num anel ordenado valem as seguintes propriedades

a) Se $a + c \le b + c$, então $a \le b$

b) Se $a \le b$ e $c \le d$, então $a + c \le b + d$

c) <u>Se $\underline{a \le b}$ e $\underline{c \le 0}$, então $\underline{a.c \ge b.c}$</u>

(HEFEZ**,** 1993, p.34, grifo nosso).

Vamos agora às inequações escolhidas para a pesquisa:

Inequação 01: $4(x-2) \leq 0$

Conforme entrevista com o professor das turmas, é muito provável que os alunos trabalhem no *domínio algébrico* e, neste caso, usariam a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, mesmo que implicitamente. Torna-se também necessário o uso da “propriedade da compatibilidade da relação de ordem com a adição” bem como a “propriedade da compatibilidade da relação de ordem com a multiplicação”, mesmo que implicitamente.

Uma outra possibilidade, menos provável, conforme entrevista com o professor das turmas, é a de que os alunos façam o estudo do sinal do produto 4(x-2), da seguinte forma:

Como $4>0$ e $4(x-2) \leq 0$, restando estudar a inequação $x-2 \leq 0$ e isto poderia ser feito usando a “propriedade da compatibilidade da relação de ordem com a adição”.

Concluímos que o aluno trabalharia no *domínio algébrico.* Em todo caso, a resposta é $S =]-\infty, 2]$.

Uma outra possibilidade, porém com probabilidade muito pequena, é a de que os alunos atribuam valores numéricos para a variável “x” e verifiquem os casos nos quais a sentença é verdadeira.

Inequação 02: $-4x+8 \geq 0$

Trata-se aqui da mesma inequação anterior que, apresentada dessa forma, poderia induzir os alunos a usarem inicialmente a “propriedade da compatibilidade da relação de ordem com a adição”, seguida da propriedade OM’ já descrita, mesmo que de forma implícita. Os alunos trabalhariam então no *domínio algébrico.*

Pela análise do Plano de Trabalho Docente da escola, é de se esperar uma outra possibilidade, porém menos provável, na qual os alunos fatorariam a inequação recaindo na anterior, escrevendo $-4(x-2) \geq 0$, fariam a seguir o estudo do sinal do produto, como foi comentado na inequação nº 01. Trabalhariam, então, no domínio algébrico.

Segundo o exame do Plano de Trabalho Docente e a entrevista com o professor, podemos concluir que uma possibilidade muito remota é a de que os alunos trabalhassem no *domínio numérico,* no qual eles atribuiriam valores à variável “x” e observariam o intervalo em que a sentença seria verdadeira.

<u>Inequação 03: </u> $(x-2)(2x+4) \leq 0$

Apresentamos a inequação na forma fatorada e, segundo a entrevista com o professor, a resolução coloca em jogo os domínios algébrico e das representações gráficas.

Consideramos também que muito provavelmente isso induziria os alunos a usarem na resolução a Técnica Algébrica com Tabela de Sinais (TAS), como descrita por Assude (2000), já que ao examinarmos o Plano de Trabalho Docente, encontramos o item “inequação-produto e inequação-quociente”, cujo livro didático apresenta técnicas de resolução de inequações como essa e que a forma de trabalho da obra adotada no ensino de inequações é tecnicista.

Uma outra resolução possível, porém menos provável, é aquela na qual os alunos utilizariam a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Logo a seguir reduziriam os termos semelhantes[5], recaindo numa inequação do 2º grau, trabalhando até então com manipulações algébricas. Para prosseguir a resolução, os alunos utilizariam a Técnica Algébrica com tabela de sinais (TAS). Admitimos que os alunos possam utilizar essa segunda forma de resolução, mas julgamos essa última possibilidade como menos provável, pois, durante a entrevista, o professor das turmas sequer citou essa forma de resolução.

Inequação 04: (x-2) (2x+4) ≤ 2

Na resolução dessa inequação, os domínios que estarão em jogo são provavelmente o *algébrico* e o das *representações gráficas,* ocorrendo, provavelmente interação entre ambos.

A probabilidade de o aluno trabalhar no *domínio numérico* é praticamente nula de acordo com a entrevista com o professor.

Esta inequação foi obtida da inequação anterior pela substituição do zero (0) pelo dois (2) no segundo membro e, como a inequação está na forma fatorada, os alunos poderiam ser inicialmente induzidos a empregar os mesmos procedimentos usados quando o segundo membro é nulo (conforme inequação 3), ou seja, estudarem diretamente o sinal do produto $(x-2)(2x+4)$ com o uso da tabela de sinais. Ocorre, porém, que alguns alunos poderiam verificar que o uso dos procedimentos descritos é inviável e estariam diante de um impasse podendo sentir a necessidade de mudar o procedimento de resolução.

Poderiam inicialmente usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição no 1º membro. Logo a seguir poderiam usar, mesmo que

[5] Usamos essa expressão “reduzir termos semelhantes” do mesmo modo que Assude (2000) com o significado de adicionar termos passíveis desta operação.

implicitamente, a “propriedade da compatibilidade da relação de ordem com a adição” e recair numa inequação do 2º grau, trabalhando até aqui no *domínio algébrico.*

Pela análise do livro didático adotado, pensamos que, para prosseguirem a resolução, os alunos provavelmente usariam técnicas como a Técnica Algébrica com Tabela de Sinais (TAS). Como no Plano de Trabalho Docente consta “Inequações do 2º grau” e “Inequações produto e quociente” sendo que essa idéia foi reforçada.

Inequação 05: $\frac{5}{x-2}>0$

Ao analisarmos o Plano de Trabalho Docente, percebemos a existência do item *“inequações, produto e quociente”.*

Tal item, desenvolvido pelo professor conforme entrevista, leva-nos a admitir que seja bem provável que os alunos estudassem o sinal do quociente da seguinte forma: como 5>0 e como $\frac{5}{x-2}>0$, só resta a possibilidade de ser x-2>0 ou seja x>2 e, nesse caso o aluno trabalharia com manipulações algébricas. Essa estratégia seria mais econômica do que se lançasse mão da técnica algébrica com tabela de sinais (TAS), descrita por Assude (2000).

Uma outra possibilidade, porém considerada menos provável, é aquela na qual os alunos usariam a “técnica algébrica com tabela de sinais” (TAS) para essa inequação quociente , para verificarem em que condições $\frac{5}{x-2}>0$.

Inequação 06: $\frac{5}{x-2}>5$

Essa inequação foi obtida da inequação anterior pela substituição do zero (0) pelo número cinco (5) no segundo membro. Os alunos poderiam, assim, ser induzidos ao uso do primeiro procedimento descrito para a inequação anterior, quando eles trabalharam no *domínio algébrico*, porém eles poderiam perceber a ineficácia de tal uso. A situação requereria mudança de procedimentos e os alunos provavelmente usariam, mesmo que implicitamente, a “propriedade da compatibilidade da relação de ordem com a adição” no domínio algébrico. Para continuar a resolução poderiam lançar mão do domínio das representações gráficas.

Supomos, no entanto, pelas análises preliminares, que os alunos fariam algo como mostrado a seguir, principalmente por meio de técnicas:

$$\frac{5}{x-2} > 5 \Rightarrow \frac{5}{x-2}-5>0 \Rightarrow \frac{5}{(x-2)}-\frac{5(x-2)}{(x-2)}>0 \Rightarrow \frac{5-5(x-2)}{x-2}>0 \Rightarrow \frac{5-5x+10}{x-2}>0 \Rightarrow$$

$$\frac{-5x+15}{x-2}>0$$

Até aqui os alunos trabalhariam com manipulações algébricas. A continuação da resolução requereria que os alunos usassem a Técnica Algébrica com Tabela de Sinais (TAS), conforme Assude (2000), o que admitimos ser provável, conforme entrevista com o professor.

<u>Inequação 07:</u> $(x-1)(x^2-4)>0$

Os domínios que poderão intervir na resolução dessa inequação são *o algébrico, o numérico e o das representações gráficas.*

No entanto, para a resolução, a possibilidade mais provável, de acordo com o Plano de Trabalho Docente e o professor das turmas, é a de que os alunos poderiam usar a “técnica algébrica com tabela de sinais” (TAS), por ser uma “inequação-produto”.

Uma segunda possibilidade, porém menos provável, é a de que os alunos inicialmente recorressem ao uso da fatoração da seguinte maneira:

Se $(x-1)(x^2-4)>0$ então, ao fatorarem $(x^2-4)=(x+2)(x-2)$ poderiam escrever a inequação na forma $(x-1)(x+2)(x-2)>0$, considerando a seguir as funções de 1º grau. Se esse fosse o caminho escolhido, os alunos em seguida construiriam a tabela de sinais para estudar o sinal do produto, chegando à resposta final.

Uma terceira possibilidade, também pouco provável, é aquela na qual os alunos aplicariam a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, recaindo numa inequação do 3º grau escrita na forma $ax^3+bx^2+cx+d>0$ com $a \neq 0$. Como no Plano de Trabalho Docente nada consta sobre equações e inequações de 3º grau, e como foi confirmado pelo professor durante as entrevistas que esse tópico não foi tratado com os alunos, parece-nos que não ocorreria essa possibilidade de os alunos continuarem a resolução da inequação escrita nesta forma.

Possivelmente tal procedimento conduziria os alunos a um impasse e provavelmente eles sentiriam a necessidade de mudar seus procedimentos de resolução, recaindo nos casos anteriormente apresentados.

Tendo em vista a análise *a priori* feita a partir das análises preliminares e dos elementos teóricos que tomamos por base, passamos à aplicação da pesquisa e às análises dos resultados.

IV-APLICAÇÃO DA PESQUISA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

IV.1– Aplicação da pesquisa

Conforme já descrevemos nos procedimentos de pesquisa, aplicamos nosso instrumento de diagnose em dois (2) encontros que ocorreram em duas semanas consecutivas.

Durante o primeiro encontro, contamos com a participação de trinta (30) alunos, dispostos no local da aplicação de modo a ficarem distanciados uns dos outros para evitar trocas de informações entre eles.

Iniciamos a aplicação primeiramente estabelecendo que o pesquisador/professor não poderia eliminar dúvidas sobre o conteúdo matemático investigado na pesquisa, nem ensinar o assunto em questão. Foi esclarecido que aquela atividade não faria parte das avaliações, porém poderia contribuir para a melhoria do ensino de Matemática.

Ficou estabelecido, também, que as questões deveriam ser respondidas com caneta preta e, caso o aluno errasse, ele deveria passar um traço em diagonal sobre o que era considerado errado, sem apagar.

Solicitamos que resolvessem cada tarefa com cuidado e que fizessem a verificação em cada uma, chamando a atenção sobre as instruções contidas nas folhas que iriam receber.

Distribuímos a primeira folha que continha o problema 1 e estabelecemos que, quando terminassem, deveriam levantar a mão para pedir a próxima.

O segundo dos dois encontros ocorreu na semana seguinte, com apenas duas diferenças, a primeira é que os três últimos problemas eram mais complexos e a segunda, devida a um fato não previsto, cinco (5) dos participantes faltaram motivados pelo término do semestre letivo e a entrada do período de recuperação para alguns alunos. Contamos, então, no segundo encontro com apenas vinte e cinco (25) participantes.

IV.2-Análise dos Resultados

Após a aplicação do instrumento de diagnose que continha os problemas a serem resolvidos, realizamos inicialmente uma categorização dos protocolos dos alunos, em termos de desempenho, isto é, separando-os em dois grupos: protocolos com soluções corretas e protocolos com soluções incorretas.

IV.2.1-Análise de Desempenho

Os resultados obtidos foram reunidos e apresentados quadro nº 01 a seguir:

Quadro nº 01-Desempenho dos alunos.

	Inequação	Nº de alunos	Respostas Corretas	Respostas Incorretas	Respostas em Branco
1	$4(x-2)\leq 0$	30	29	1	0
2	$-4x+8\geq 0$	30	21	9	0
3	$(x-2)(2x+4)\leq 0$	30	7	22	1
4	$(x-2)(2x+4)\leq 2$	30	7	17	6
5	$\frac{5}{(x-2)} > 0$	25	17	4	4
6	$\frac{5}{x-2} > 5$	25	8	17	0
7	$(x-1)(x^2-4)>0$	25	4	20	1

IV.2.2-Análise de erros mais freqüentes

Inicialmente apresentamos os erros mais freqüentes cometidos pelos alunos em cada problema resolvido. Nessa análise, vamos chamar de protocolos válidos àqueles nos quais os alunos realmente resolveram o problema, já que em alguns casos eles os deixaram em branco.

Observando o quadro nº 1, constatamos que a quantidade de respostas incorretas ficou na dependência do tipo de inequação proposta.

Nas inequações 1 e 2 , que são do 1º grau, as quantidades de respostas incorretas 1 e 9 respectivamente, foram relativamente pequenas quando comparamos com as inequações 3 e 4 , que são do 2º grau, nas quais encontramos 22 e 17 protocolos com respostas incorretas, respectivamente. Portanto, esses alunos cometeram mais erros ao resolverem inequações do 2º grau do que ao resolverem inequações do 1º grau. Isso nos levou a crer que as inequações do 2º grau tiveram grau de dificuldade maior do que as do 1º grau para esses alunos.

Consideramos que o número de protocolos entregues em branco (6 protocolos) no caso da inequação 4, deveu-se provavelmente ao término do tempo oferecido para os alunos efetuarem as resoluções, uma vez que os protocolos com a inequação 4 foram entregues por último, no primeiro encontro.

Comparando as inequações 3 e 4 , no que se refere aos resultados obtidos, elas foram consideradas por nós como tendo aproximadamente o mesmo grau de dificuldade, pois, se considerarmos apenas os protocolos válidos, verificamos que 75,9% continham respostas incorretas na inequação 3 e 70,8% na inequação 4. A inequação 4 foi obtida da inequação 3 através da substituição do número zero pelo número dois (2) no 2º membro. Apesar de a diferença de desempenho dos alunos ser pequena, o fato de termos no segundo membro o número dois (2) , em vez do número zero, constituiu uma variável didática que provavelmente influenciou no grau de dificuldade da inequação 4 em relação à inequação 3. A diferença nas taxas de erros pode se dever à presença ou não do número dois (2) no segundo membro.

A inequação 6 foi obtida da inequação 5 pela substituição do número zero pelo número cinco (5) no segundo membro. O fato de termos no segundo membro o número zero ou não, constituiu uma variável didática que provavelmente influenciou no grau de dificuldade das inequações, ou seja, a troca do zero pelo cinco (5) fez com que os alunos cometessem mais erros na inequação 6 do que na inequação 5. Isso nos levou a considerar que a inequação 6 fosse mais difícil do que a inequação 5 para os alunos. Essa conclusão é compatível com os resultados encontrados na tabela nº 1, na qual consta que na inequação 5, 19,0% dos protocolos válidos continham respostas incorretas e para a inequação 6 o respectivo percentual foi 68,0%. Vale observar que os 4 alunos que entregaram os protocolos da inequação 5 em branco, ao tentarem resolver a inequação 6, apresentaram respostas incorretas.

Diante desse quadro, consideramos pertinente a análise dos erros mais freqüentes encontrados nos protocolos válidos, para cada inequação em particular, conforme segue.

Inequação 1: $4(x-2) \leq 0$

Apenas 3,3% do total de protocolos válidos continha solução incorreta, ou seja, apenas 1 aluno.

A causa de seu erro foi o uso inadequado da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (PDMA).

Seu protocolo é apresentado na figura a seguir.

Resolva em R a inequação :	Escreva em cada passagem como você pensou .
1) $4(x-2) \leq 0$	
$4x - 2 \leq 0$	1º Eu eliminei os parêntes aplicando distributiva, para facilitar a conta.
$4x \leq 2$	2º Eu passei o número 2 para o outro lado para separar letras e números.
$x \leq \frac{2}{4}$	3º Eu passei o número 4 para o outro lado para isolar a incógnita
$x \leq \frac{1}{2}$	4º Como não dava para dividir em simplifiquei a fração.
$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 1/2\}$	5º Eu coloquei a solução .

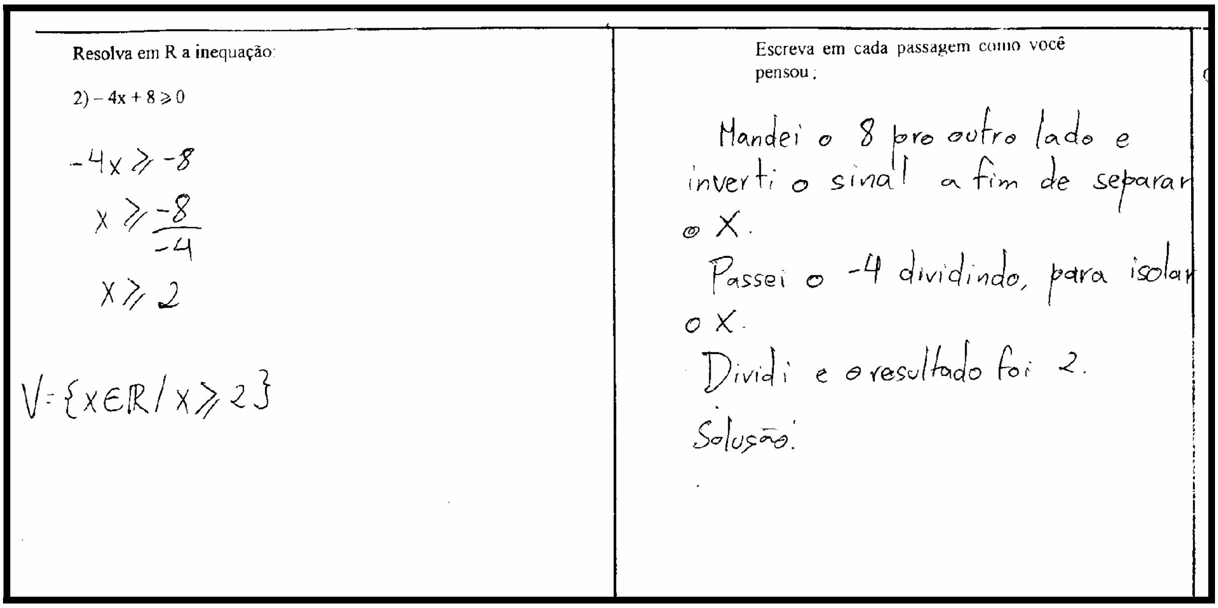
Figura 1 – Uso inadequado da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (PDMA).

Inequação 2: $-4x + 8 \geq 0$

Verificamos que 30% do total de protocolos válidos continha solução incorreta e isto corresponde a 9 alunos.

Verificamos também que 77,8% desses alunos que erraram (7 alunos) demonstraram não utilizar corretamente a propriedade (OM’), descrita em nossa análise *a priori*, que é decorrente da propriedade da compatibilidade da relação de ordem com a multiplicação (OM). Provavelmente, tais alunos resolveram a inequação com os mesmos procedimentos usados para equações.

Na figura abaixo mostramos, a título de exemplo, um protocolo que ilustra esse tipo de erro.


Resolva em R a inequação:

2) $-4x + 8 \geq 0$

$-4x \geq -8$

$x \geq \frac{-8}{-4}$

$x \geq 2$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

Mandei o 8 pro outro lado e inverti o sinal a fim de separar o X.

Passei o -4 dividindo, para isolar o X.

Dividi e o resultado foi 2.

Solução:

Figura 2 – Uso incorreto da propriedade (OM').

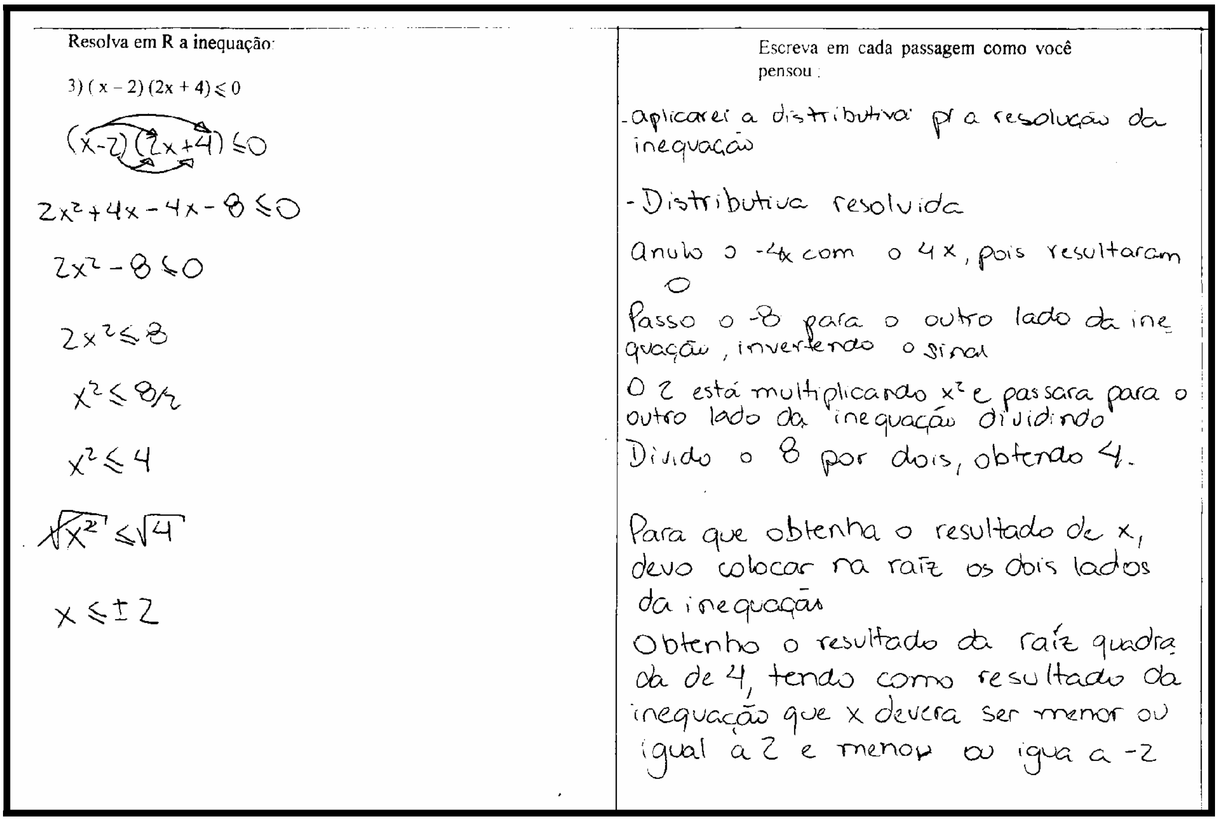
Inequação 3: $(x-2)(2x+4) \leq 0$

Verificamos que 75,9% do total de protocolos válidos continha solução incorreta, correspondendo a 22 alunos.

Também verificamos que 68,2% desses alunos que erraram (15 alunos) cometeram um erro do tipo "conexões sem sentido com raízes quadradas" (CRQ) conforme Tsamir, Almog e Tirosh (1998, p.135). Um exemplo de tal erro é o seguinte:

$$2x^2 - 8 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 \leq 8 \quad \Rightarrow \quad x^2 \leq 4 \quad \Rightarrow \quad x \leq \pm 2$$

Na próxima figura apresentamos exemplo de protocolo no qual o aluno cometeu tal equívoco.



Resolva em R a inequação:

3) $(x-2)(2x+4) \leq 0$

$(x-2)(2x+4) \leq 0$

$2x^2+4x-4x-8 \leq 0$

$2x^2-8 \leq 0$

$2x^2 \leq 8$

$x^2 \leq 8/2$

$x^2 \leq 4$

$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{4}$

$x \leq \pm 2$

Escreva em cada passagem como você pensou:

-aplicarei a distributiva p/ a resolução da inequação

-Distributiva resolvida

anulo o -4x com o 4x, pois resultaram 0

Passo o -8 para o outro lado da inequação, invertendo o sinal

O 2 está multiplicando x^2 e passara para o outro lado da inequação dividindo

Divido o 8 por dois, obtendo 4.

Para que obtenha o resultado de x, devo colocar na raíz os dois lados da inequação

Obtenho o resultado da raíz quadrada de 4, tendo como resultado da inequação que x devera ser menor ou igual a 2 e menor ou igua a -2

Figura 3 – Exemplo de erro do tipo “conexões sem sentido com raízes quadradas” (CRQ).

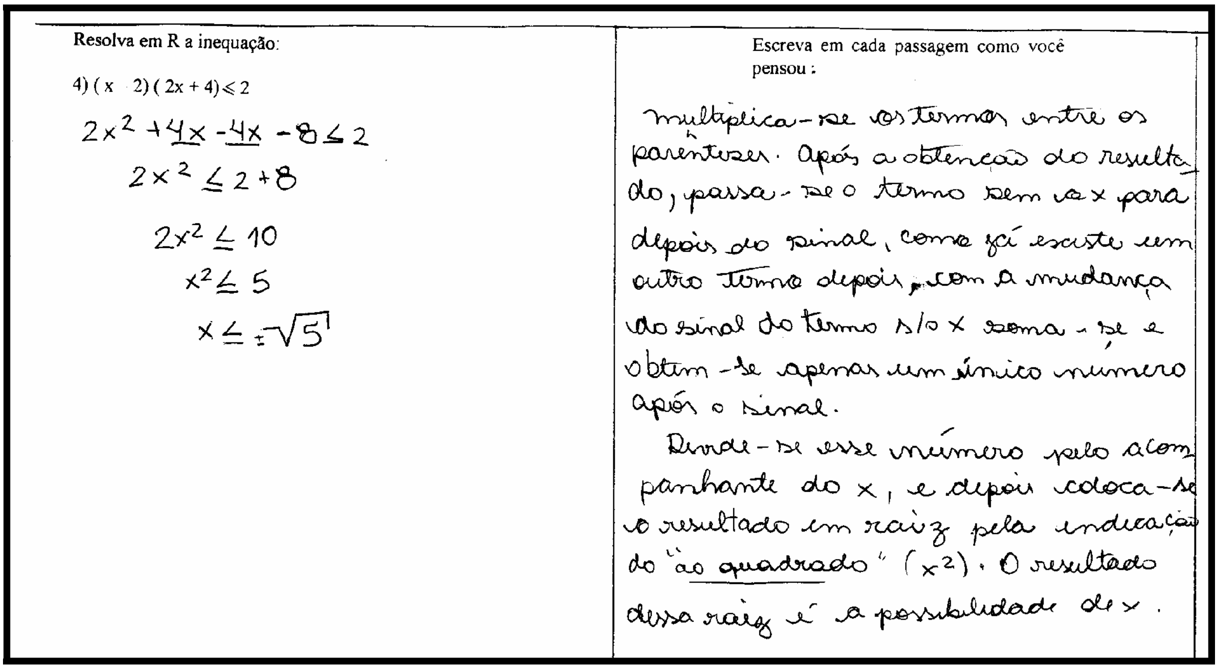
Considerando-se apenas protocolos válidos, essa inequação apresenta alto índice de respostas incorretas pois 75,9% desses protocolos continham respostas erradas. Conforme já comentamos anteriormente, provavelmente tal constatação se deve ao grau de dificuldade das inequações do 2ºgrau, que cremos ser maior do que em relação às inequações do 1º grau.

Inequação 4: $(x-2)(2x+4) \leq 2$

Na resolução desse problema 70,8% do total de protocolos válidos continham solução incorreta, o que corresponde a 17 alunos.

Cerca de 64,7% desses alunos que erraram (11 alunos) cometeram, como no caso do problema 3, o erro do tipo “conexões sem sentido com raízes quadradas”, conforme Tsamir, Almog e Tirosh (1998, p.135).

Como no caso da inequação anterior (inequação 3), também aqui os alunos confundiram procedimentos usados para inequações polinomiais do 1º grau com os usados para inequações polinomiais do 2º grau. Mostramos a seguir um exemplo de protocolo no qual o aluno cometeu o citado erro.


Resolva em R a inequação:

4) $(x \quad 2)(2x + 4) \leqslant 2$

$2x^2 + \underline{4x} - \underline{4x} - 8 \leq 2$

$2x^2 \leq 2 + 8$

$2x^2 \leq 10$

$x^2 \leq 5$

$x \leq \pm\sqrt{5}$

Escreva em cada passagem como você pensou :

multiplica-se os termos entre os parentezes. Após a obtenção do resultado, passa-se o termo sem o x para depois do sinal, como já existe um outro termo depois, com a mudança do sinal do termo s/o x soma-se e obtem-se apenas um único número após o sinal.

Divide-se esse número pelo acompanhante do x, e depois coloca-se o resultado em raiz pela indicação do "ao quadrado" (x^2). O resultado dessa raiz é a possibilidade de x.

Figura 4 – Exemplo de erro do tipo (CRQ).

Também como na inequação anterior (inequação 3), verificamos que o número de protocolos com respostas incorretas é grande, correspondendo a 70,8 % dos protocolos válidos. Aqui também julgamos que a constatação é devida provavelmente ao grau de dificuldade das inequações do 2º grau ser maior do que no caso de inequações do 1º grau.

Inequação 5: $\frac{5}{x-2} > 0$

Constatamos na resolução desse problema que 19,0% do total de protocolos válidos(4 alunos) continha solução incorreta, dos quais 75,0% (3 alunos) cometeram o erro do tipo “multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos” (MDF), conforme Tsamir, Almog e Tirosh (1998, p.134). Um exemplo desse tipo de erro é o seguinte:

$$\frac{5}{x-2} > 0 \quad \Rightarrow \quad 5 > 0(x-2) \quad \Rightarrow \quad 5 > 0$$

Observando o erro descrito, constatamos que o aluno não se preocupou com o sinal que $(x-2)$ poderia ter. Tampouco mostrou preocupação com o fato do denominador de $\frac{5}{x-2}$ não poder ser nulo.

Na próxima figura apresentamos um exemplo de protocolo contendo esse tipo de erro.

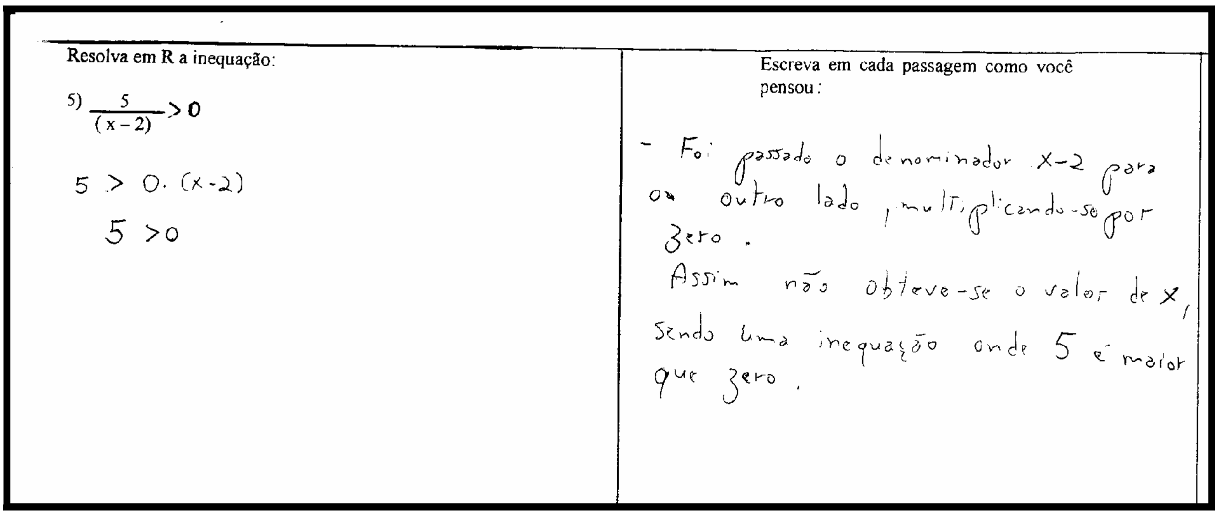


Figura 5 – Exemplo de erro do tipo “multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos” (MDF).

Nessa inequação o número de protocolos com respostas corretas foi 17, o que corresponde a 81,0$\%$ dos protocolos válidos.

Dos 17 alunos que acertaram, cerca de 15 alunos resolveram a inequação de forma muito simples: Como $\frac{5}{x-2}>0$ eles apenas impuseram a condição que x-2>0 e obtiveram a resposta correta em poucas passagens.

Analisando os 4 protocolos com respostas incorretas, observamos que 3 alunos deixaram de mencionar a condição de existência $x-2\neq 0$, ou seja $x\neq 2$, o que corresponde a um erro do tipo “dificuldades com valores excluidos”, conforme Tsamir, Almog e Tirosh (1998, p.132); porém, essa negligência não afetou suas respostas, isto é, ninguém errou incluindo o número 2 no conjunto solução. Acreditamos, porém, que, se a desigualdade envolvida fosse “maior ou igual a” ($\geq$), esse tipo de erro se evidenciaria.

Em relação aos 4 protocolos em branco, esses alunos só iniciaram as resoluções, abandonando-as num estágio preliminar que não permitia dizer se eles alcançariam soluções corretas ou incorretas, razão pela qual categorizamos esses protocolos como contendo respostas em branco.

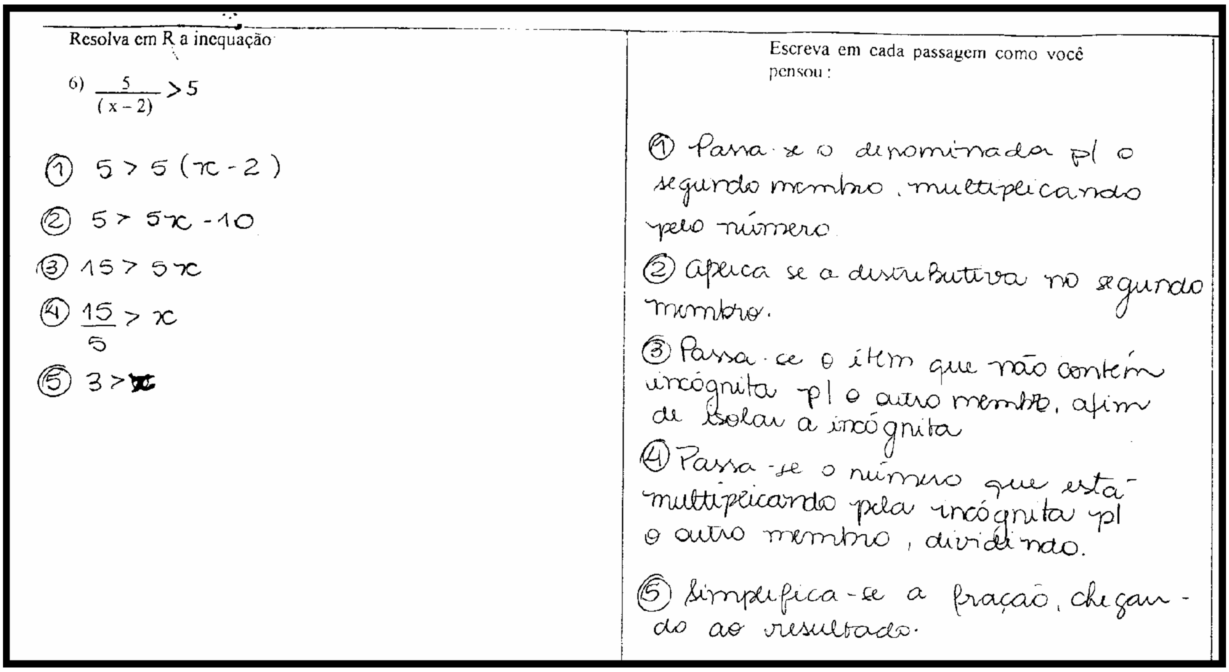
Inequação 6: $\frac{5}{x-2}>5$

Nesse problema 68,0% do total de protocolos válidos continha solução incorreta, correspondendo a 17 alunos.

Cerca de 88,2% desses alunos que erraram (15 alunos) cometeram, como no caso da inequação 5, o erro do tipo “Multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos”, conforme Tsamir, Almog e Tirosh (1998, p. 134). Apresentamos abaixo, um exemplo ilustrando esse tipo de erro.

$$\frac{5}{x-2} > 5 \quad \Rightarrow \quad 5 > 5(x-2) \quad \Rightarrow \quad 5x<15 \quad \Rightarrow \quad x<3$$

Apresentamos a seguir um exemplo de protocolo no qual se cometeu o erro acima citado.



Resolva em R a inequação

6) $\frac{5}{(x-2)} > 5$

① $5 > 5(x-2)$

② $5 > 5x - 10$

③ $15 > 5x$

④ $\frac{15}{5} > x$

⑤ $3 > x$

Escreva em cada passagem como você pensou :

① Passa-se o denominador p/ o segundo membro, multiplicando pelo número

② aplica se a distributiva no segundo membro.

③ Passa-se o item que não contém incógnita p/ o outro membro, afim de isolar a incógnita

④ Passa-se o número que está multiplicando pela incógnita p/ o outro membro, dividindo.

⑤ Simplifica-se a fração, chegando ao resultado.

Figura 6 – Exemplo de erro do tipo (MDF).

Nessa inequação constatamos que em 6 protocolos (24,0% dos protocolos válidos) os alunos aplicaram a condição de existência $x-2 \neq 0$ ou

$x \neq 2$ e, em 19 protocolos (76,0% dos protocolos válidos) eles não aplicaram a condição citada. Dos 17 alunos que erraram a inequação, 5 aplicaram a condição de existência e a maioria (12 alunos) não aplicou. Porém, analisando os erros dos 17 alunos mencionados, nenhum deles chegou a resultado errado simplesmente por incluir o número 2 no conjunto solução. As causas de seus erros foram outras.

Observamos o elevado número de respostas incorretas na inequação 6 em comparação com a inequação 5 e concluimos que o fato de mudar o número zero pelo cinco (5) no segundo membro constituiu um fator complicador (variável didática), que mudou os procedimentos de resolução, por parte dos alunos de uma para a outra inequação.

Inequação 7: $(x-1)(x^2-4)>0$

As constatações nesse caso foram que 83,3% do total de protocolos válidos continha solução incorreta, o que corresponde a 20 entre 24 alunos que resolveram a inequação.

Cerca de 70,0% dos alunos que apresentaram soluções incorretas (14 alunos), cometeram o seguinte tipo de erro:

Para resolver a inequação $(x-1)(x^2-4)>0$ eles apresentaram apenas a possibilidade de ser $x-1>0$ e $x^2-4>0$, sem considerarem todas as possibilidades para a resolução da inequação. Deveriam considerar que:

Se $(x-1)(x^2-4)>0$ então $x-1>0$ e $x^2-4>0$ ou $x-1<0$ e $x^2-4<0$. Este procedimento é equivalente a resolver os dois sistemas de inequações (S1) e (S2) que apresentamos a seguir, fazendo posteriormente a união entre as respectivas soluções. Os citados sistemas são:

(S1) $\begin{cases} x-1>0 \\ x^2-1>0 \end{cases}$ ou (S2) $\begin{cases} x-1<0 \\ x^2-4<0 \end{cases}$

O equívoco que acabamos de descrever é descrito como “dedução incorreta de sinais de fatores a partir do sinal do produto/quociente” (DIS), conforme Tsamir, Almog e Tirosh (1998, p.133).

Continuando a análise dessas soluções incorretas, verificamos que na seqüência os alunos fizeram:

$x-1>0$ e $x^2-4>0$ seguindo

$x>1$ e $x^2>4$ e ainda

$x>1$ e $x>\pm 2$ mostrando mais uma vez que cometeram o erro assinalado por Tsamir, Almog e Tirosh (1998, p.135) como “Conexões sem sentido com raízes quadradas”

Na figura abaixo, apresentamos como exemplo um protocolo em que o aluno comete esse tipo de erro.

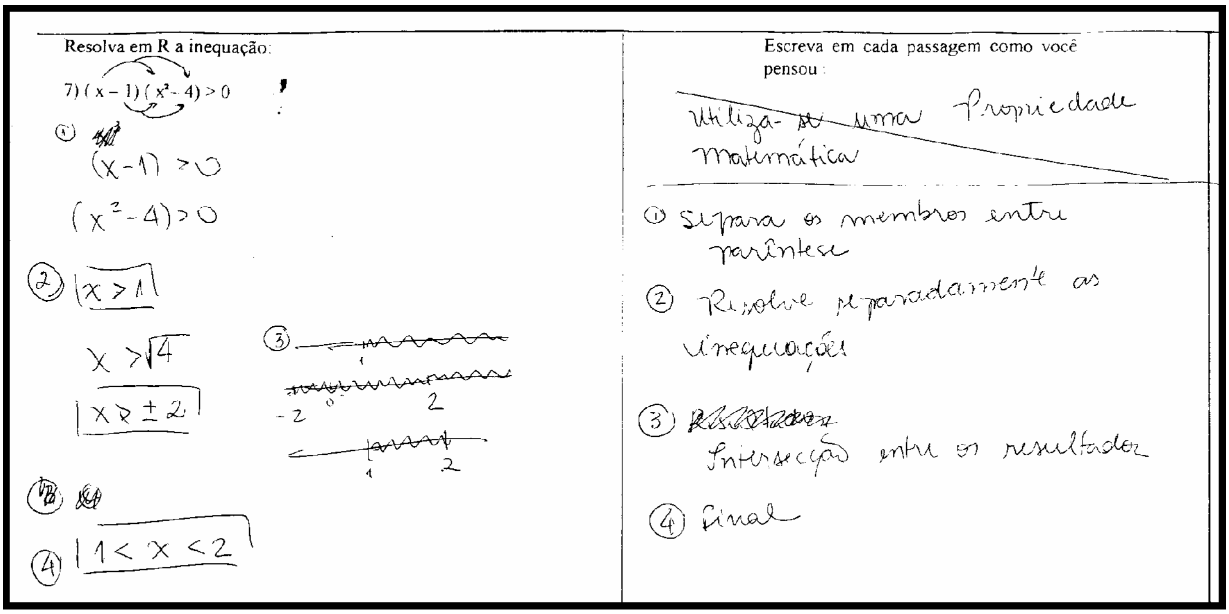


Figura 7 – Protocolo contendo erros dos tipos “dedução incorreta de sinais de fatores a partir do sinal do produto/quociente” (DIS) e (CRQ).

Conforme já mencionamos, 14 dentre os 20 alunos que erraram cometeram os equívocos por nós indicados. Os demais alunos que erraram (6 alunos), em suas resoluções aplicaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e obtiveram inequações do 3º grau. Persistindo na tentativa de resolver a inequação obtida, de acordo com o Plano de Trabalho Docente e a entrevista com o professor das turmas, os alunos não possuíam conhecimento suficiente sobre funções, nem sobre equações e inequações do 3º grau, não chegaram a respostas corretas.

IV.3 –Interpretações dos resultados

Neste item, procedemos a análise dos resultados da pesquisa, considerando os dados obtidos nos protocolos dos alunos, interpretando-a por meio das contribuições teóricas de Douady.

IV.3.1-Interpretações dos recursos empregados pelos alunos

Inicialmente, nos ocuparemos quanto a análise de quais os domínios empregados como recursos na resolução das inequações, conforme o quadro teórico de Douady.

Adotamos as seguintes siglas:

DA (emprego do domínio algébrico somente)

DRG (emprego do domínio das representações gráficas somente)

DN (emprego do domínio numérico somente)

DA+DRG (interação entre os domínios algébrico e das representações gráficas)

DA+DN (interação entre os domínios algébrico e numérico)

DRG+DN (interação entre os domínios das representações gráficas e o numérico)

DA+DRG+DN (interação entre os domínios algébrico, das representações gráficas e o numérico).

O quadro nº 02 a seguir, resume os resultados obtidos.

Quadro nº 02- Categorização dos domínios empregados como recursos.

Nº	Inequação	Nº de alunos	DA	DA + DRG	DA + DN	DA + DRG + DN	Respostas em Branco
1	$4(x-2) \leq 0$	30	29	1	0	0	0
2	$-4x+8 \geq 0$	30	29	1	0	0	0
3	$(x-2)(2x+4) \leq 0$	30	17	12	0	0	1
4	$(x-2)(2x+4) \leq 2$	30	13	11	0	0	6
5	$\frac{5}{(x-2)} > 0$	25	17	3	0	1	4
6	$\frac{5}{(x-2)} > 5$	25	15	8	1	1	0
7	$(x-1)(x^2-4) > 0$	25	7	16	0	1	1

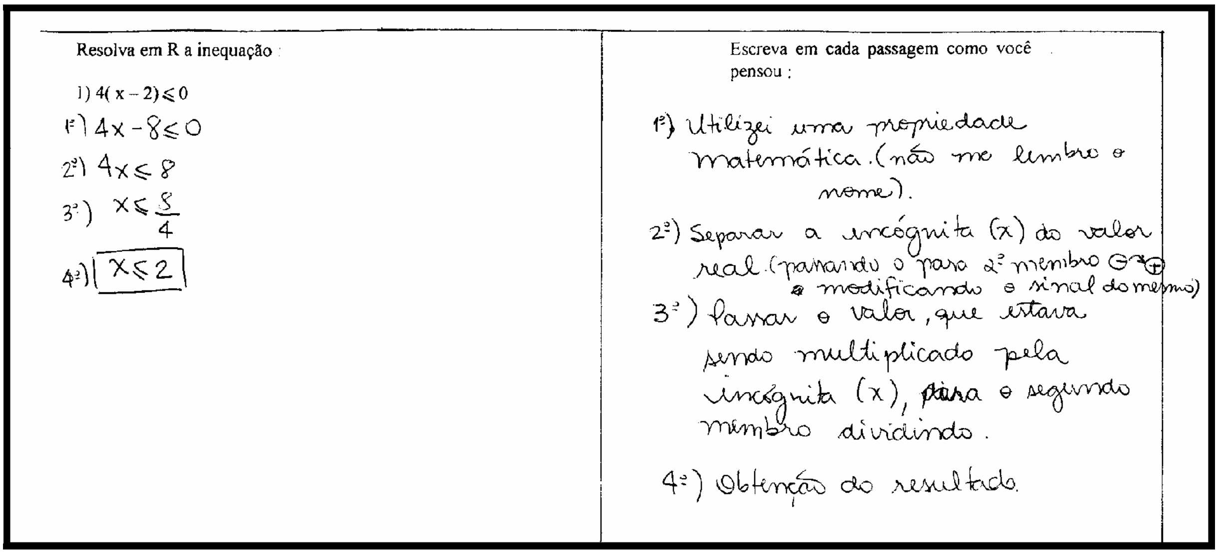
Quando elaboramos as inequações que fariam parte do diagnóstico, além de seguirmos as sugestões de Gallo (2000) também nos preocupamos em apresentar inequações em cujas resoluções pudessem ocorrer interação entre domínios, lembrando que segundo Maranhão“

> (...) para introduzir e suscitar o funcionamento da interação de conhecimentos em diferentes domínios devem-se escolher alguns problemas em que os conceitos intervêm, ao menos, dentro de dois domínios (MARANHÃO, 1996, p.24).

As inequações 1 e 2 são na verdade a mesma inequação que, apresentadas sob formas diferentes, visavam evocar métodos de resolução diferentes e, provavelmente, ocorrer interação entre domínios. A inequação 1 poderia envolver apenas os domínios algébrico e numérico. Usando o fato de o número 4 ser positivo, o aluno focalizaria $x - 2 \leq 0$ no produto, tornando sua resolução mais econômica pela interação do domínio numérico com o algébrico.

No entanto, podemos observar pelo quadro nº 02 que 29 dos 30 alunos que resolveram as inequações 1 e 2 (96,7%) optaram por trabalhar com o domínio algébrico (DA) e apenas 1 aluno (3,3%) optou pela interação entre os domínios algébrico e representações gráficas (DA+DRG). Tal resultado não nos surpreende, pois, de acordo com a entrevista realizada com o professor das turmas, já tínhamos previsto que os alunos utilizariam somente manipulações algébricas.

Apresentamos a seguir o protocolo de um aluno que, ao resolver a inequação 1, optou somente pelo domínio algébrico (DA).



Resolva em R a inequação

1) $4(x-2) \leq 0$

1º) $4x - 8 \leq 0$

2º) $4x \leq 8$

3º) $x \leq \frac{8}{4}$

4º) $\boxed{x \leq 2}$

Escreva em cada passagem como você pensou :

1º) Utilizei uma propriedade matemática. (não me lembro o nome).

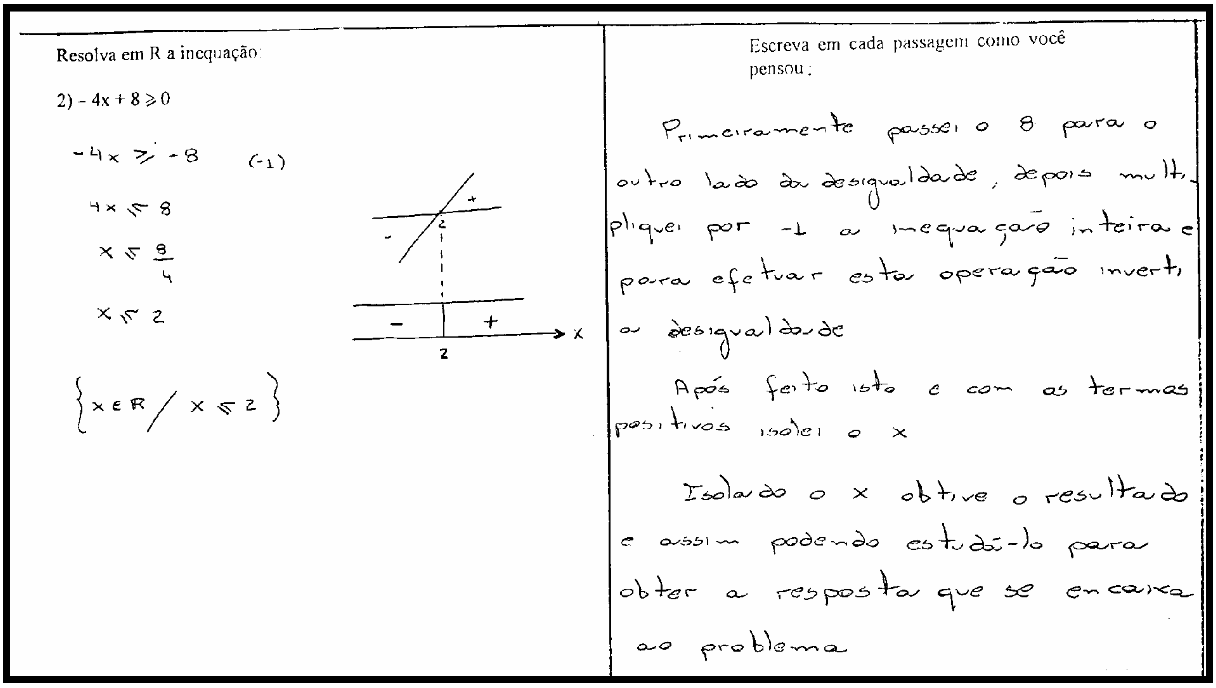
2º) Separar a incógnita (x) do valor real. (passando o para 2º membro ⊖ → ⊕ e modificando o sinal do mesmo)

3º) Passar o valor, que estava sendo multiplicado pela incógnita (x), para o segundo membro dividindo.

4º) Obtenção do resultado.

Figura 8 – Emprego do domínio algébrico (DA).

A seguir, apresentamos um protocolo de um aluno que, ao resolver a inequação 2, optou pela interação entre domínios (DA+DRG) por ter apresentado o esboço do gráfico e a tabela de sinais.



Resolva em R a inequação

2) $-4x + 8 \geq 0$

$-4x \geq -8 \quad (-1)$

$4x \leq 8$

$x \leq \frac{8}{4}$

$x \leq 2$

$\{x \in R \,/\, x \leq 2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou :

Primeiramente passei o 8 para o outro lado da desigualdade, depois multipliquei por -1 a inequação inteira e para efetuar esta operação inverti a desigualdade

Após feito isto e com os termos positivos isolei o x

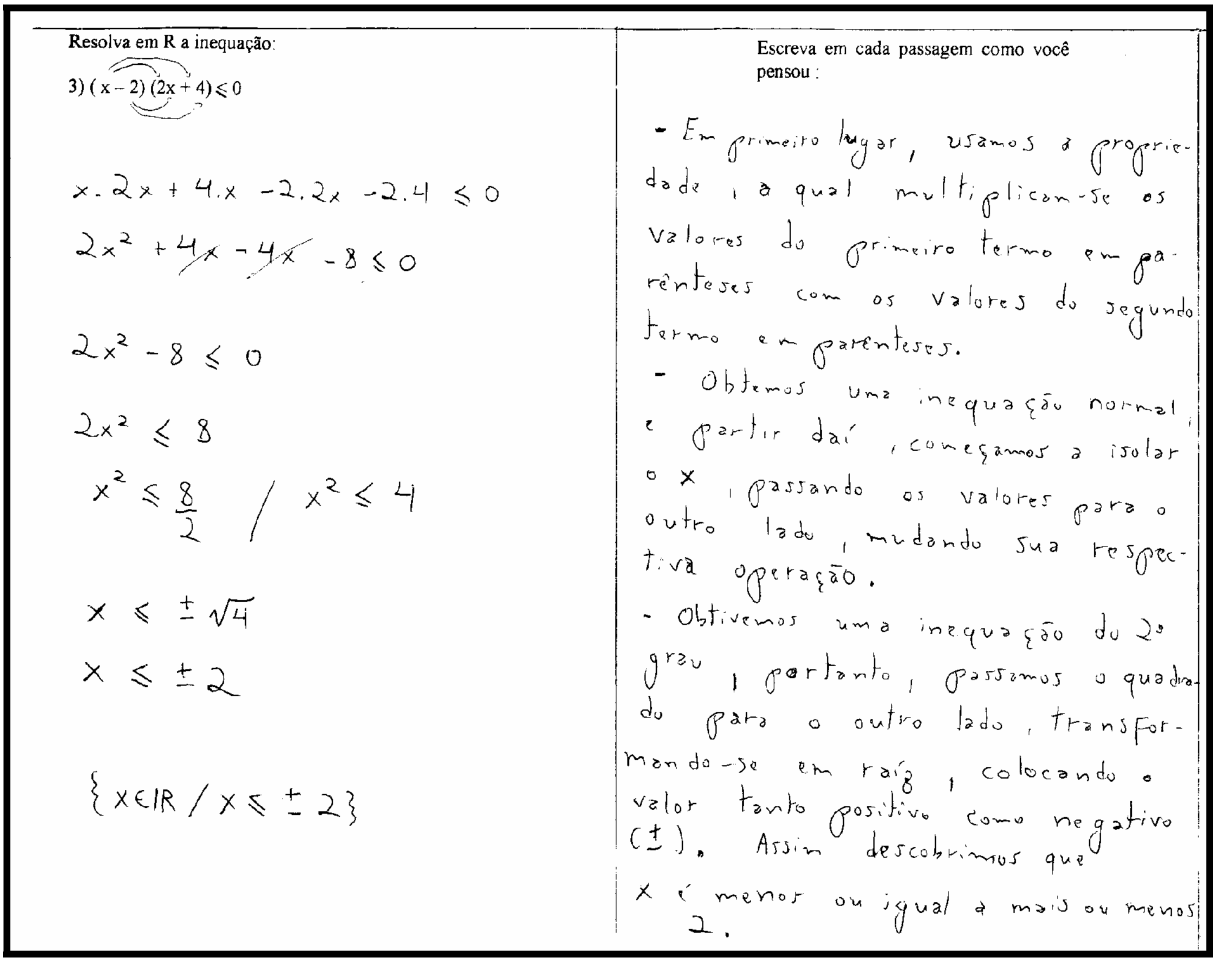
Isolado o x obtive o resultado e assim podendo estudá-lo para obter a resposta que se encaixa ao problema

Figura 9 – Interação entre os domínios (DA+DRG).

A inequação 3 é uma inequação do 2º grau proposta na forma de produto de 2 fatores do 1º grau com 2º membro igual a zero. Ao apresentarmos a inequação nesta forma, pretendíamos conduzir o aluno a estudar o sinal do produto.

Desta forma, os alunos mobilizariam conhecimentos de pelo menos dois domínios, no caso, o algébrico e o das representações gráficas, ocorrendo interação entre eles. Verificamos, porém, conforme a tabela indica que 17 dos 29 alunos (58,6%) que resolveram a inequação optaram em trabalhar somente no domínio algébrico, iniciando as respectivas resoluções pela aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e trabalhando somente no referido domínio que, no caso, não é a opção mais econômica para se chegar a respostas corretas.

A verificação acima é coerente com a alta taxa de respostas erradas encontrada (75,9%, 22 erradas em 29 resolvidas). Para exemplificar, mostramos a seguir o protocolo de um aluno que trabalhou somente no domínio algébrico (DA), na inequação 3


Resolva em R a inequação:

3) (x – 2) (2x + 4) ≤ 0

$x . 2x + 4 . x - 2 . 2x - 2 . 4 \leq 0$

$2x^2 + \cancel{4x} - \cancel{4x} - 8 \leq 0$

$2x^2 - 8 \leq 0$

$2x^2 \leq 8$

$x^2 \leq \frac{8}{2}$ / $x^2 \leq 4$

$x \leq \pm\sqrt{4}$

$x \leq \pm 2$

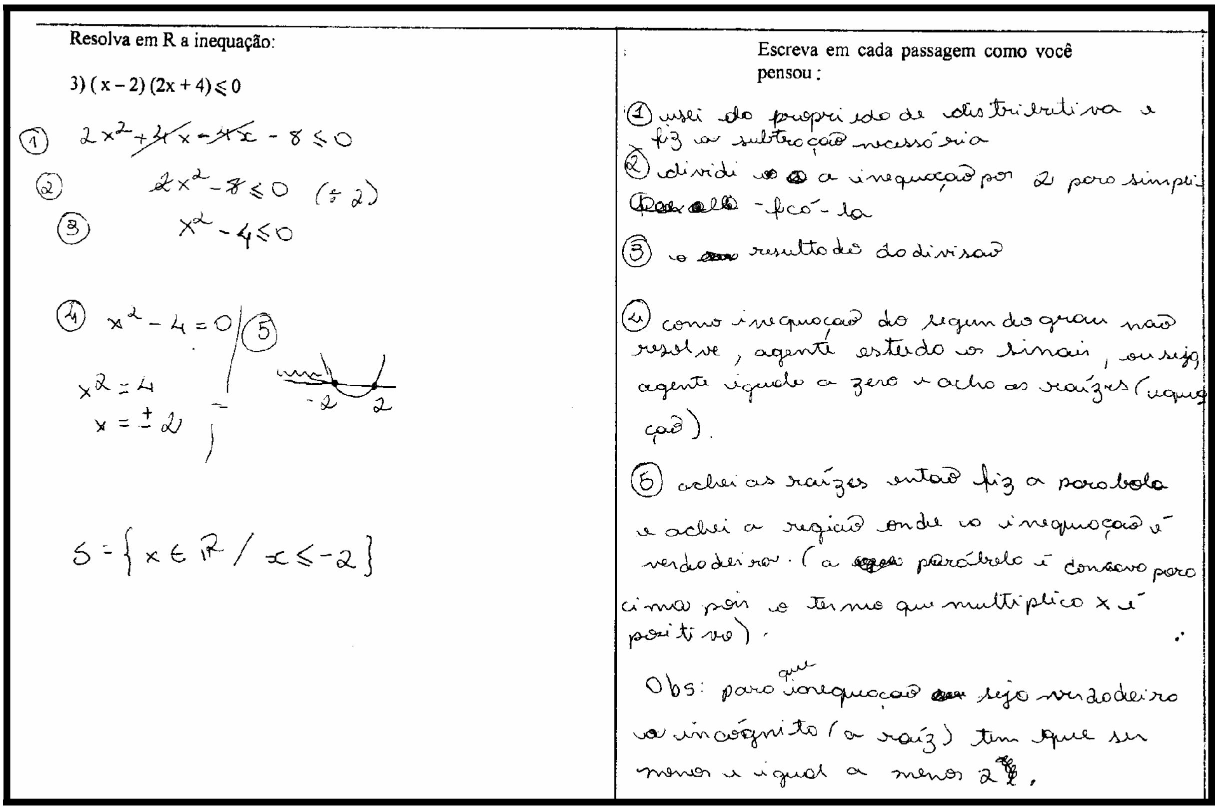
$\{x \in \mathbb{R} / x \leq \pm 2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou :

- Em primeiro lugar, usamos a propriedade, a qual multiplicam-se os valores do primeiro termo em parênteses com os valores do segundo termo em parênteses.
- Obtemos uma inequação normal, e partir daí, começamos a isolar o x, passando os valores para o outro lado, mudando sua respectiva operação.
- Obtivemos uma inequação do 2º grau, portanto, passamos o quadrado para o outro lado, transformando-se em raiz, colocando o valor tanto positivo como negativo (±). Assim descobrimos que x é menor ou igual a mais ou menos 2.

Figura 10 – Emprego do domínio algébrico (DA).

O seguinte protocolo mostra a interação entre os domínios algébrico e das representações gráficas:



Resolva em R a inequação:

3) $(x-2)(2x+4) \leq 0$

1) $2x^2 + \cancel{4x} - \cancel{4x} - 8 \leq 0$

2) $2x^2 - 8 \leq 0 \quad (\div 2)$

3) $x^2 - 4 \leq 0$

4) $x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

5) $-2 \quad 2$

$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

1) usei da propriedade distributiva e fiz a subtração necessária

2) dividi a inequação por 2 para simplificá-la

3) o resultado da divisão

4) como inequação do segundo grau não resolve, agente estuda os sinais, ou seja, agente iguala a zero e acho as raízes (equação).

5) achei as raízes então fiz a parabola e achei a região onde a inequação é verdadeira. (a parábola é concava para cima pois o termo que multiplica x é positivo).

Obs: para que inequação seja verdadeira a incógnita (a raíz) tem que ser menor e igual a menos 2.

Figura 11 – Interação entre os domínios (DA+DRG).

Observamos nesse último protocolo que, apesar de o aluno ter lançado mão do domínio das representações gráficas, seus conhecimentos nesse domínio não foram suficientes para a obtenção de uma solução correta.

A inequação 4 foi obtida da inequação 3 trocando-se o zero pelo número 2 no segundo membro.

Também nessa inequação, verificamos que 13 dos 24 alunos (54,2%) que a resolveram, optaram por trabalhar apenas no domínio algébrico (DA), porém, seus conhecimentos desse domínio foram insuficientes para se obter a solução correta. Conforme Maranhão:

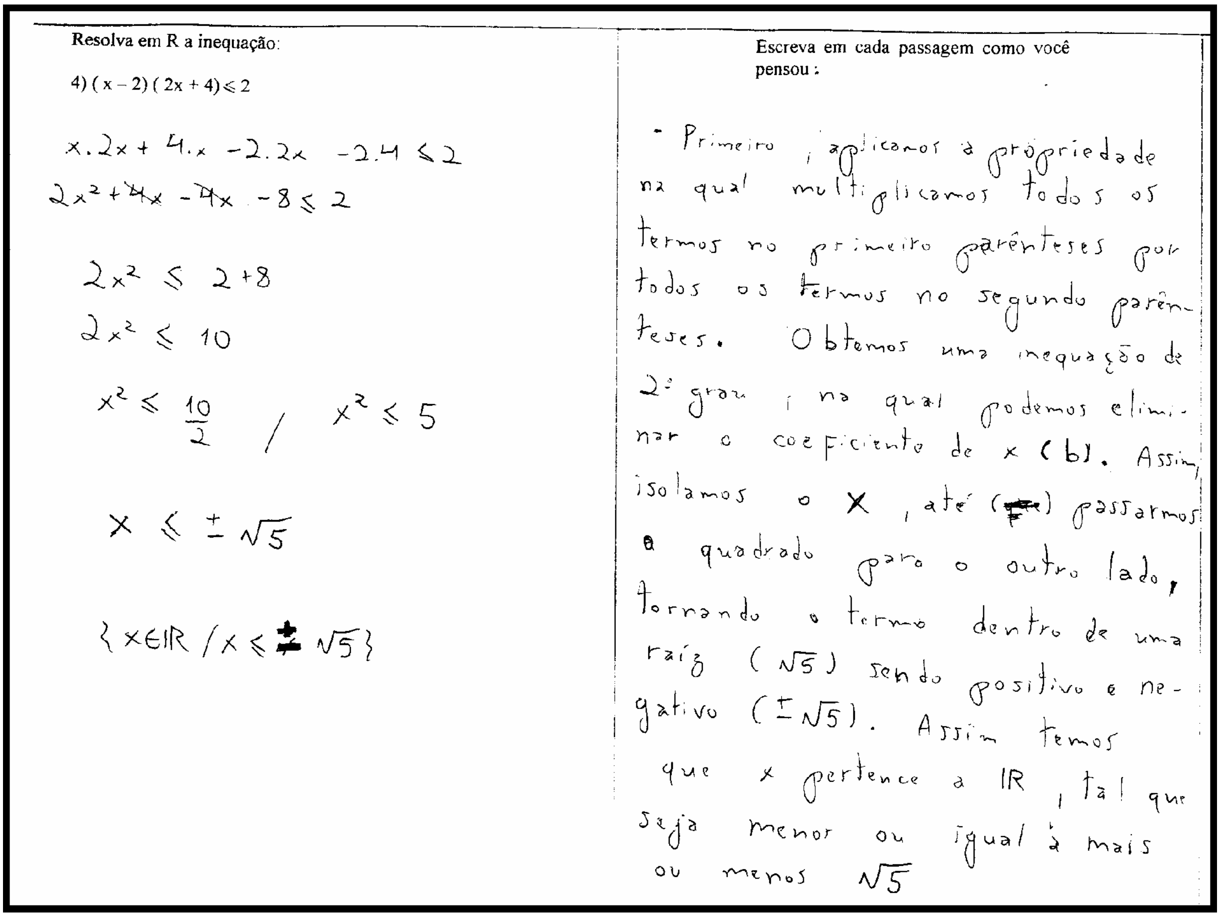
> É precisamente pelo fato de os conhecimentos de um certo domínio não serem suficientes para avançar, numa situação, que o aluno lança mão de conhecimentos de outros domínios.(MARANHÃO, 1999, p.119).

A escolha por trabalhar somente no domínio algébrico (DA) não foi adequada e isto contribuiu, a nosso ver, para alta taxa de soluções erradas, (70,8%, 17 erradas em 24 resolvidas).

Dos 24 alunos que resolveram a inequação, apenas 11 optaram pela interação entre os domínios algébrico (DA) e o das representações gráficas (DRG), e apesar de ser uma boa escolha, apenas 7 alunos obtiveram soluções corretas.

A escolha correta dos domínios a serem empregados na resolução nem sempre é garantia de sucesso. Existem dificuldades específicas de cada domínio, conforme mostramos no protocolo da inequação 3, no parágrafo anterior e na análise de erros apresentada no item IV.2.2.

Como exemplo, mostramos agora um protocolo de um aluno que ficou restrito apenas ao domínio algébrico (DA), na inequação 4.



Resolva em R a inequação:

4) $(x-2)(2x+4) \leqslant 2$

$x.2x + 4.x - 2.2x - 2.4 \leqslant 2$

$2x^2 + 4x - 4x - 8 \leqslant 2$

$2x^2 \leqslant 2 + 8$

$2x^2 \leqslant 10$

$x^2 \leqslant \frac{10}{2}$ / $x^2 \leqslant 5$

$x \leqslant \pm \sqrt{5}$

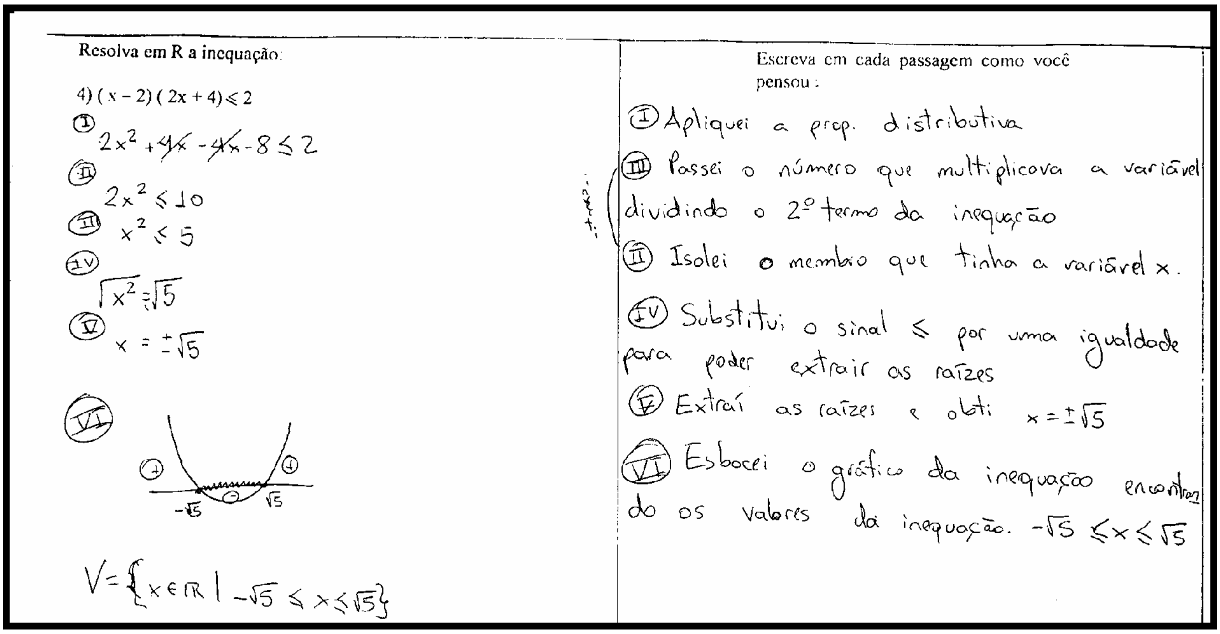
$\{x \in IR \,/\, x \leqslant \pm \sqrt{5}\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

- Primeiro, aplicamos a propriedade na qual multiplicamos todos os termos no primeiro parênteses por todos os termos no segundo parênteses. Obtemos uma inequação de 2º grau, na qual podemos eliminar o coeficiente de x (b). Assim, isolamos o X, até ~~(...)~~ passarmos o quadrado para o outro lado, tornando o termo dentro de uma raiz ($\sqrt{5}$) sendo positivo e negativo ($\pm\sqrt{5}$). Assim temos que x pertence a IR, tal que seja menor ou igual à mais ou menos $\sqrt{5}$

Figura 12 – Emprego do domínio algébrico (DA).

Como exemplo de interação entre o domínio algébrico (DA) e o das representações gráficas (DRG) na inequação 4, apresentamos o seguinte protocolo:


Resolva em R a inequação:

4) (x − 2) (2x + 4) ≤ 2

I $2x^2 + \cancel{4x} - \cancel{4x} - 8 \le 2$

II $2x^2 \le 10$

III $x^2 \le 5$

IV $\sqrt{x^2} = \sqrt{5}$

V $x = \pm\sqrt{5}$

VI

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

I Apliquei a prop. distributiva

III Passei o número que multiplicava a variável dividindo o 2º termo da inequação

II Isolei o membro que tinha a variável x.

IV Substitui o sinal ≤ por uma igualdade para poder extrair as raízes

V Extraí as raízes e obti $x = \pm\sqrt{5}$

VI Esbocei o gráfico da inequação encontrando os valores da inequação. $-\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$

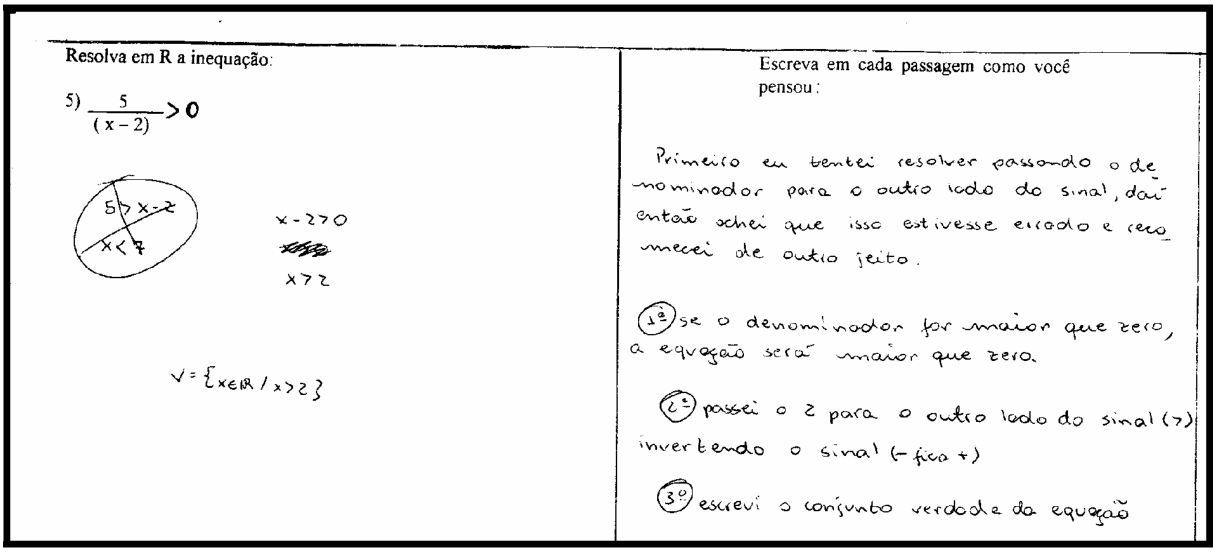
Figura 13 – Interação entre os domínios (DA+DRG).

Elaboramos a inequação 5, $\frac{5}{x-2} > 0$, sem a intenção de conduzir o aluno ao uso de determinado domínio, pois é possível resolvê-la apenas com recursos do domínio algébrico. É possível também resolvê-la mediante interação entre os domínios algébrico e das representações gráficas.

Constatamos que 17 dos 21 alunos (81,0%) que resolveram a inequação, preferiram optar apenas pelo domínio algébrico (DA). Supomos que tenham feito isso por ser mais simples para eles, visto que tal procedimento dos alunos está de acordo com a entrevista cedida pelo professor das turmas.

Apenas 3 dos 21 alunos (14,3%) optaram pela interação entre os domínios algébrico e das representações gráficas (DA+DRG) e apenas 1 dos 21 alunos (4,7%) optou pela interação entre os domínios algébrico, das representações gráficas e o domínio numérico (DA+DRG+DN). As opções feitas pelos alunos foram boas porque resultou em alto índice de soluções corretas (17 corretas entre 21 resolvidas ou 81,0%). Este foi um caso em que a interação entre domínios favoreceu a produção de bons resultados.

O uso somente do domínio algébrico (DA) na inequação 5 é ilustrado no seguinte protocolo.


Resolva em R a inequação:

5) $\frac{5}{(x-2)} > 0$

$5 > x - 2$

$x < 7$

$x - 2 > 0$

$x > 2$

$V = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

Primeiro eu tentei resolver passando o denominador para o outro lado do sinal, daí então achei que isso estivesse errado e recomecei de outro jeito.

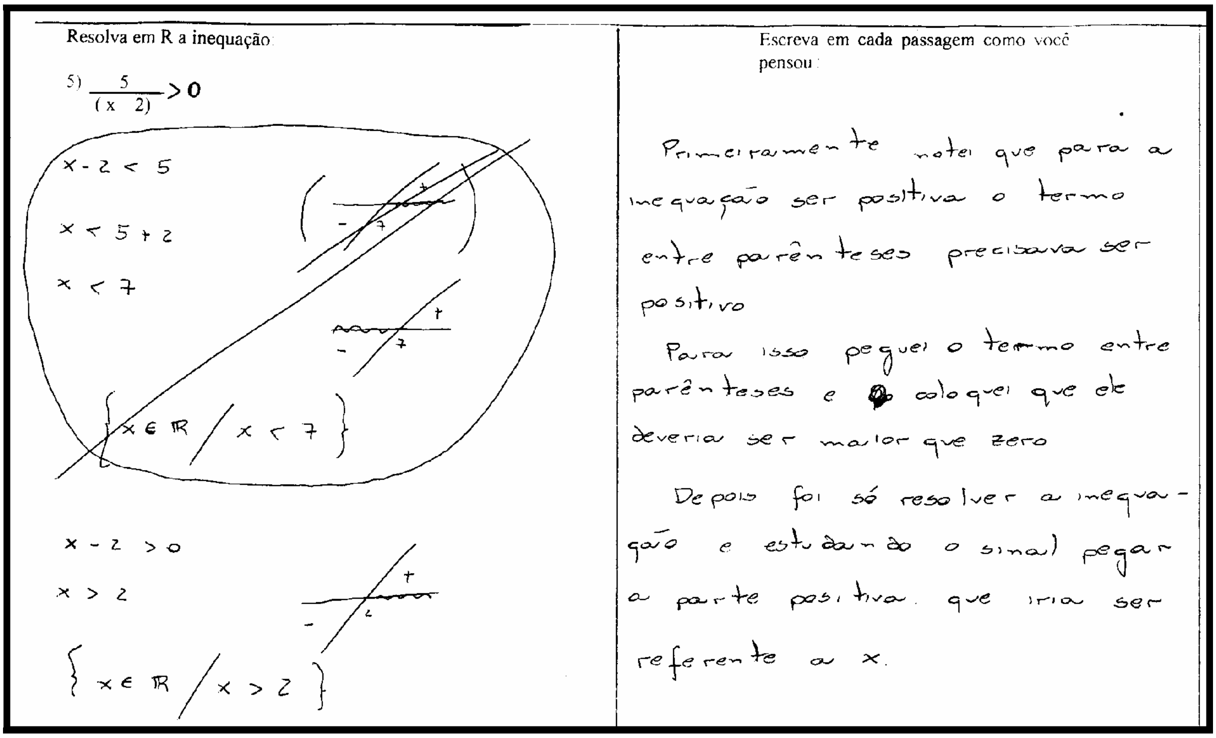
1º se o denominador for maior que zero, a equação será maior que zero.

2º passei o 2 para o outro lado do sinal (>) invertendo o sinal (- fica +)

3º escrevi o conjunto verdade da equação

Figura 14 – Emprego do domínio algébrico (DA).

Apresentamos a seguir um exemplo de protocolo em que ocorre interação entre os domínios algébrico e o das representações gráficas (DA+DRG), na inequação 5.



Resolva em R a inequação

5) $\frac{5}{(x \quad 2)} > 0$

$x - 2 < 5$

$x < 5 + 2$

$x < 7$

$\{x \in \mathbb{R} / x < 7\}$

$x - 2 > 0$

$x > 2$

$\{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

Primeiramente notei que para a inequação ser positiva o termo entre parênteses precisava ser positivo

Para isso peguei o termo entre parênteses e coloquei que ele deveria ser maior que zero

Depois foi só resolver a inequação e estudando o sinal pegar a parte positiva que iria ser referente a x.

Figura 15 – Interação entre os domínios (DA+DRG).

Como exemplo de interação entre os domínios algébrico, das representações gráficas e numérico na inequação 5, apresentamos o seguinte protocolo:

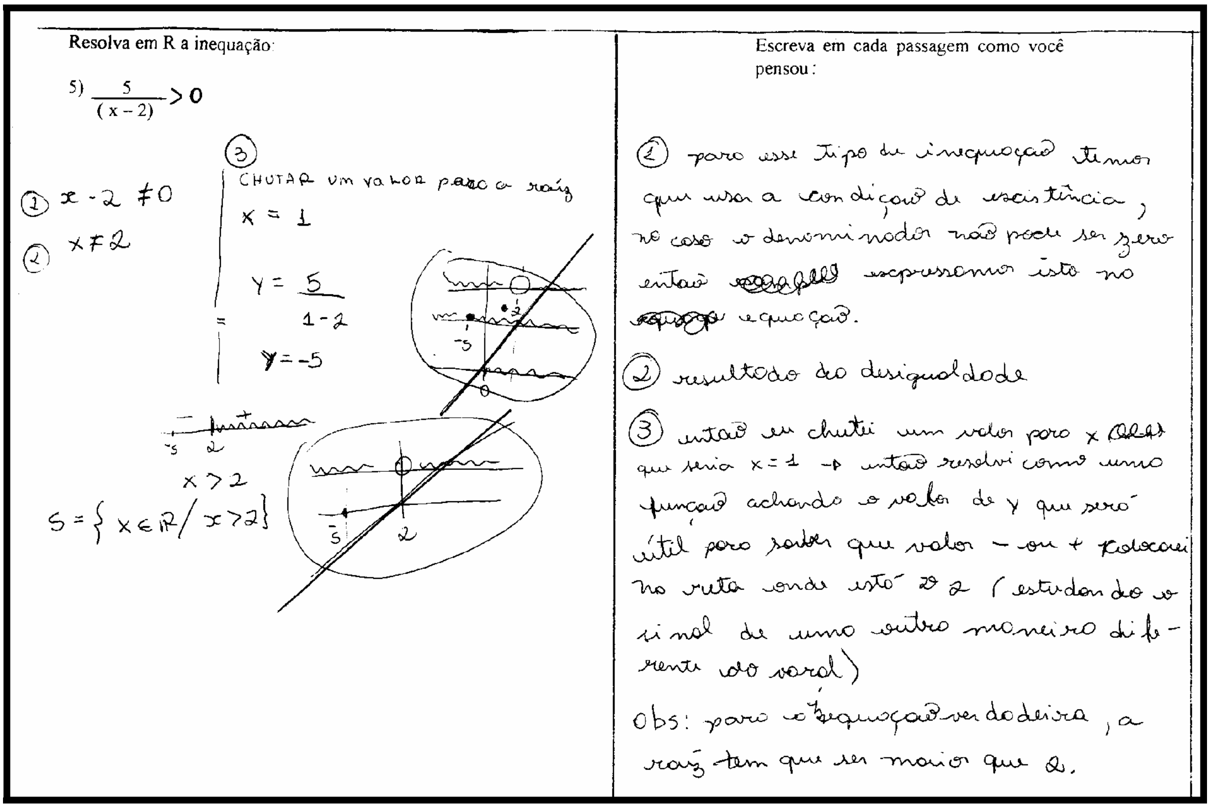


Figura 16 – Interação entre os domínios (DA+DRG+DN).

A inequação 6, $\frac{5}{x-2} > 5$ foi obtida da inequação 5 trocando-se o número zero pelo número cinco no segundo membro.

A razão pela qual fizemos essa troca sutil foi conduzir os alunos a modificarem os procedimentos utilizados na resolução da inequação 5, pois acreditamos que para alguns deles a referida alteração traria como conseqüência a mudança do método de resolução.

A resolução da inequação recorrendo apenas ao domínio algébrico (DA) pode ser, inicialmente, para alguns alunos, uma opção vantajosa, porem é de se esperar que os conhecimentos dos estudantes no referido domínio sejam insuficientes para prosseguir e que eles recorram a outro domínio, no caso, o das representações gráficas, ocorrendo interação entre domínios.

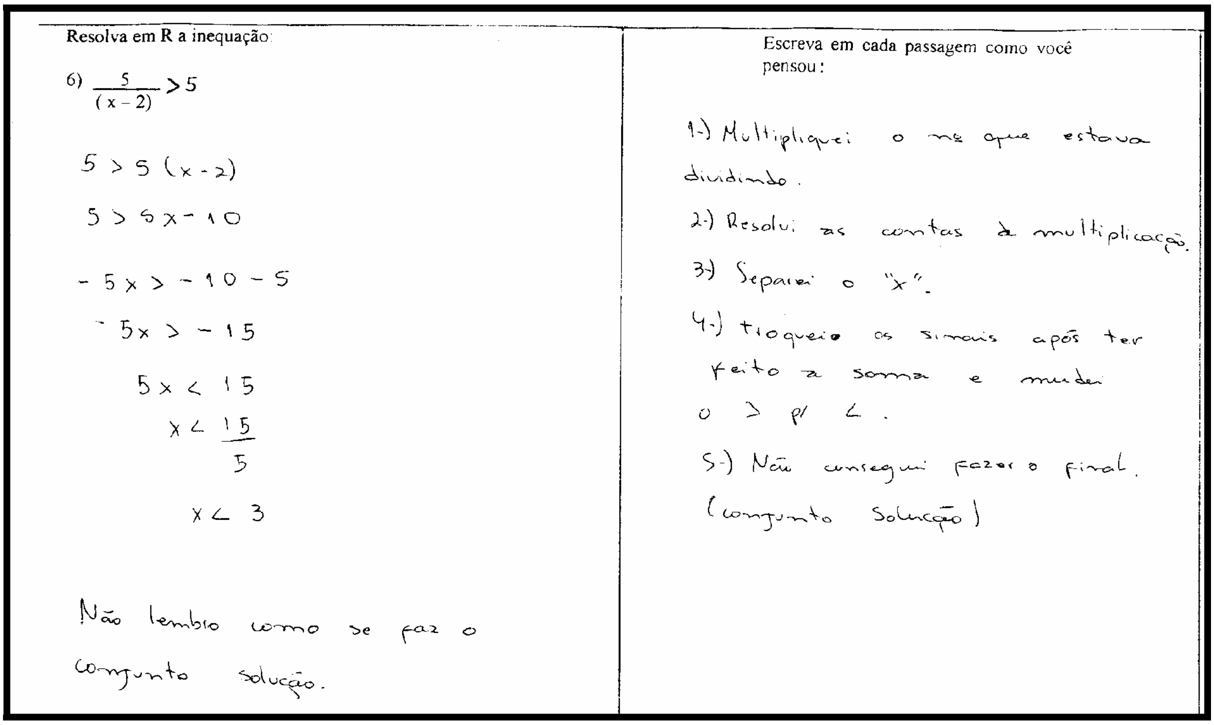
Constatamos que 15 dos 25 alunos que resolveram a inequação (60,0%) optaram por trabalhar somente no domínio algébrico (DA) e isto concorda com a alta taxa de soluções incorretas (68,0%, 17 incorretas em 25 resolvidas), pois a escolha do domínio algébrico como único meio para se obter soluções corretas, não foi interessante.

Um número menor de alunos, 8 dos 25 alunos que resolveram a inequação (32,0%), trabalharam de modo a fazer interagir os domínios algébrico e das representações gráficas (DA+DRG).

Apenas 1 aluno dos 25 que resolveram a inequação (4,0%) optou pela interação entre os domínios algébrico, das representações gráficas e numérico (DA+DRG+DN).

Somente 1 aluno dos 25 que resolveram (4,0%) optou pela interação entre os domínios algébrico e numérico (DA+DN).

A seguir apresentamos um protocolo em que o aluno trabalhou apenas no domínio algébrico (DA), na inequação 6.


Resolva em R a inequação:

6) $\frac{5}{(x-2)} > 5$

$5 > 5(x-2)$

$5 > 5x - 10$

$-5x > -10 - 5$

$-5x > -15$

$5x < 15$

$x < \frac{15}{5}$

$x < 3$

Não lembro como se faz o conjunto solução.

Escreva em cada passagem como você pensou:

1-) Multipliquei o nº que estava dividindo.

2-) Resolvi as contas de multiplicação.

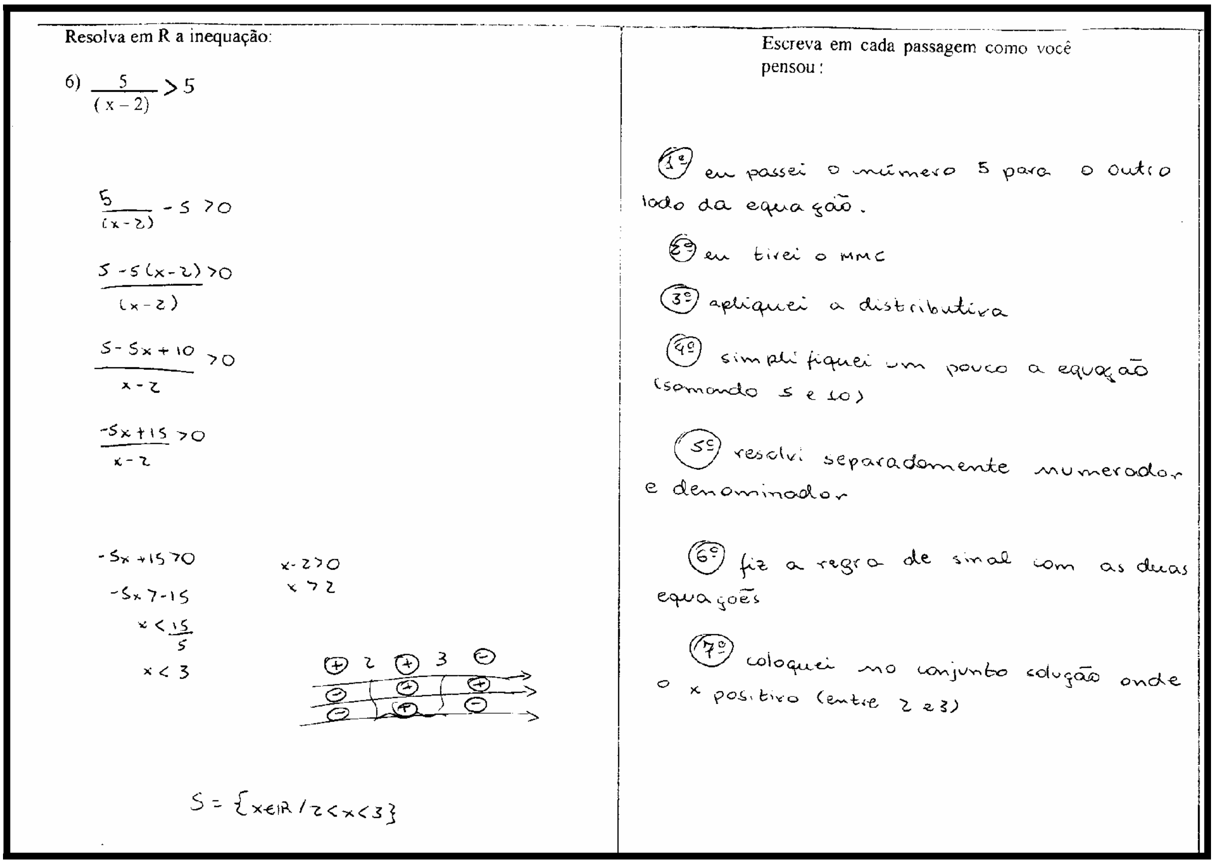
3-) Separei o "x".

4-) troquei os sinais após ter feito a soma e mudei o > p/ <.

5-) Não consegui fazer o final. (conjunto solução)

Figura 17 – Emprego do domínio algébrico (DA).

Como exemplo de interação entre os domínios algébrico e das representações gráficas (DA+DRG) na inequação 6, apresentamos o seguinte protocolo:



Resolva em R a inequação:

6) $\frac{5}{(x-2)} > 5$

$\frac{5}{(x-2)} - 5 > 0$

$\frac{5 - 5(x-2)}{(x-2)} > 0$

$\frac{5 - 5x + 10}{x-2} > 0$

$\frac{-5x + 15}{x-2} > 0$

$-5x + 15 > 0$ $\quad$ $x - 2 > 0$

$-5x > -15$ $\quad$ $x > 2$

$x < \frac{15}{5}$

$x < 3$

$S = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

1º eu passei o número 5 para o outro lado da equação.

2º eu tirei o MMC

3º apliquei a distributiva

4º simplifiquei um pouco a equação (somando 5 e 10)

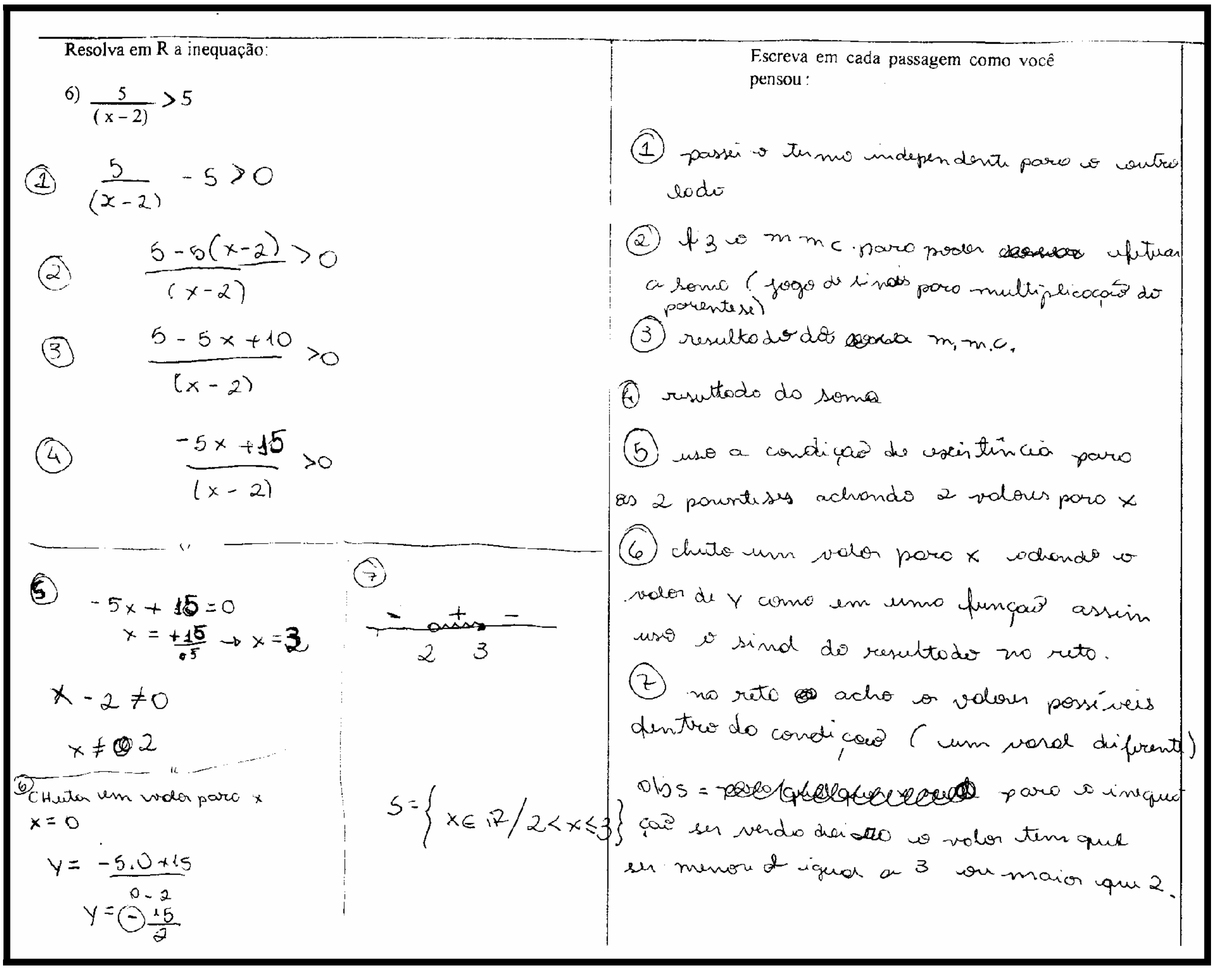
5º resolvi separadamente numerador e denominador

6º fiz a regra de sinal com as duas equações

7º coloquei no conjunto solução onde o x positivo (entre 2 e 3)

Figura 18 – Interação entre os domínios (DA+DRG).

O protocolo do aluno que trabalhou de modo a ocorrer a interação entre os domínios algébrico, representações gráficas e numérico (DA+DRG+DN) na inequação 6, é apresentado a seguir:



Resolva em R a inequação:

6) $\frac{5}{(x-2)} > 5$

① $\frac{5}{(x-2)} - 5 > 0$

② $\frac{5 - 5(x-2)}{(x-2)} > 0$

③ $\frac{5 - 5x + 10}{(x-2)} > 0$

④ $\frac{-5x + 15}{(x-2)} > 0$

⑤ $-5x + 15 = 0$

$x = \frac{+15}{+5} \rightarrow x = 3$

$x - 2 \neq 0$

$x \neq 2$

⑥ Chuto um valor para x

$x = 0$

$y = \frac{-5.0+15}{0-2}$

$y = (-)\frac{15}{2}$

⑦ $-\ \ +\ \ -$

$2 \quad 3$

$S = \{ x \in \mathbb{R} / 2 < x \leq 3 \}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

① passei o termo independente para o outro lado

② fiz o m.m.c. para poder efetuar a soma (jogo de sinais para multiplicação do parenteses)

③ resultado do m.m.c.

④ resultado da soma

⑤ uso a condição de existência para os 2 parenteses achando 2 valores para x

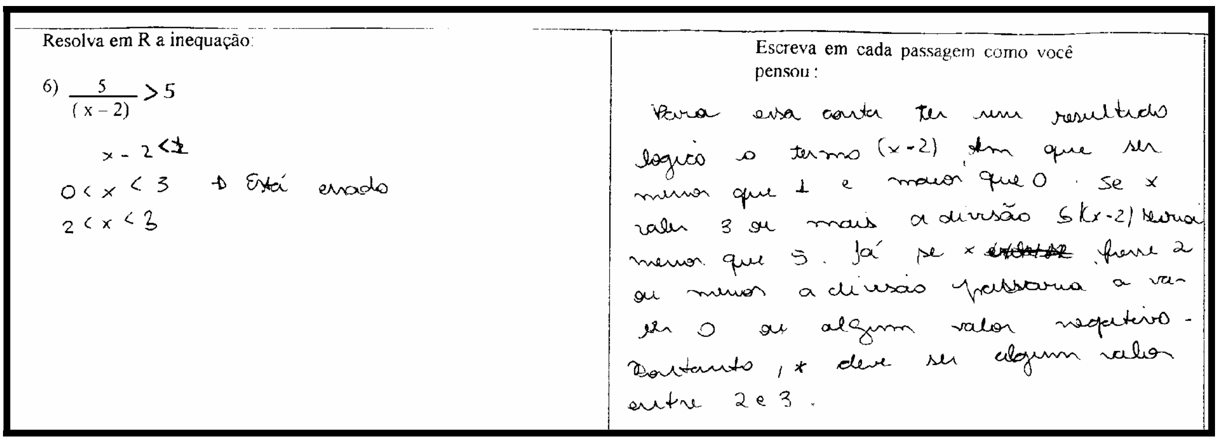
⑥ chuto um valor para x achando o valor de y como em uma função assim uso o sinal do resultado na reta.

⑦ na reta acho os valores possíveis dentro da condição (um sinal diferente)

obs = para a inequação ser verdadeira o valor tem que ser menor e igual a 3 ou maior que 2.

Figura 19 – Interação entre os domínios (DA+DRG+DN).

A seguir, apresentamos o protocolo do aluno que optou pela interação entre os domínios algébrico e numérico (DA+DN) na inequação 6.



Resolva em R a inequação:

6) $\frac{5}{(x-2)} > 5$

$x - 2 < 1$

$0 < x < 3$ → Está errado

$2 < x < 3$

Escreva em cada passagem como você pensou:

Para essa conta ter um resultado lógico o termo (x-2) tem que ser menor que 1 e maior que 0. Se x valer 3 ou mais a divisão 5/(x-2) seria menor que 5. Já se x ~~[illegible]~~ fosse 2 ou menor a divisão passaria a valer 0 ou algum valor negativo. Portanto, x deve ser algum valor entre 2 e 3.

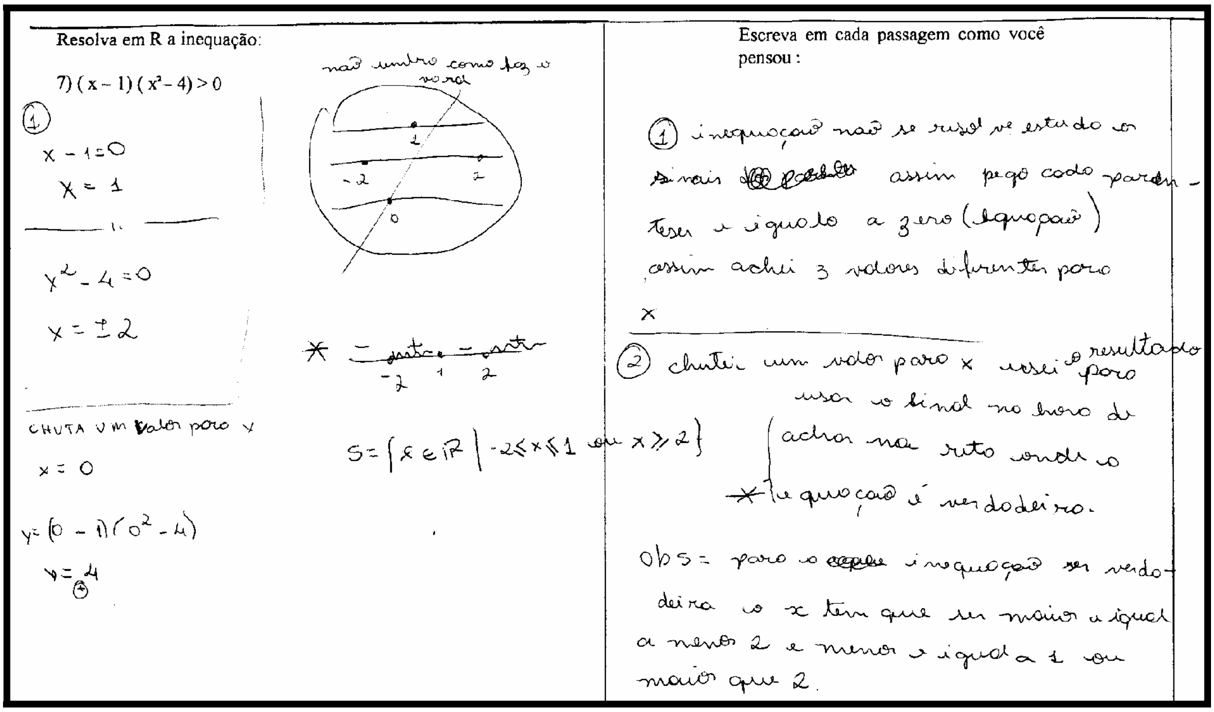
Figura 20 – Interação entre os domínios (DA+DN).

A inequação 7, $(x-1)(x^2-4)>0$, foi proposta na forma fatorada na tentativa de evocar métodos de resolução que permitiriam interação entre domínios, já que sabíamos previamente que o conhecimento por parte dos alunos a respeito de equações, inequações e funções do 3º grau era inexistente, pelo menos teoricamente, pois analisamos o Plano de Trabalho Docente e entrevistamos o professor das turmas.

Sendo assim, se o aluno usasse a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, recairia na inequação de 3º grau seguinte: $x^3 - x^2 - 4x + 4 > 0$, caso o aluno prosseguisse somente no domínio algébrico (DA), sentiria dificuldades intransponíveis e seria obrigado a mudar o método de resolução.

Mesmo assim, 7 entre os 24 alunos que resolveram a inequação (29,2%) optaram por trabalhar somente no domínio algébrico (DA), o que os conduziu a soluções incorretas. Dos 24 alunos que resolveram a inequação, 16 (66,7%) optaram pela interação entre os domínios algébrico e o das representações gráficas (DA+DRG). Apesar dessa ser uma escolha promissora, a maioria produziu soluções incorretas. Essas soluções incorretas surgiram em grande parte devido a dificuldades específicas, conforme analisamos no item IV.2.2.

Apenas 1 aluno entre os 24 que resolveram essa inequação (4,2%) optou por interação entre os domínios algébrico, das representações gráficas e o numérico (DA+DRG+DN), e seu protocolo é o mostrado a seguir:



Resolva em R a inequação:

7) $(x-1)(x^2-4) > 0$

1

$x - 1 = 0$

$x = 1$

$x^2 - 4 = 0$

$x = \pm 2$

CHUTA UM valor para x

$x = 0$

$y = (0-1)(0^2-4)$

$y = 4$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

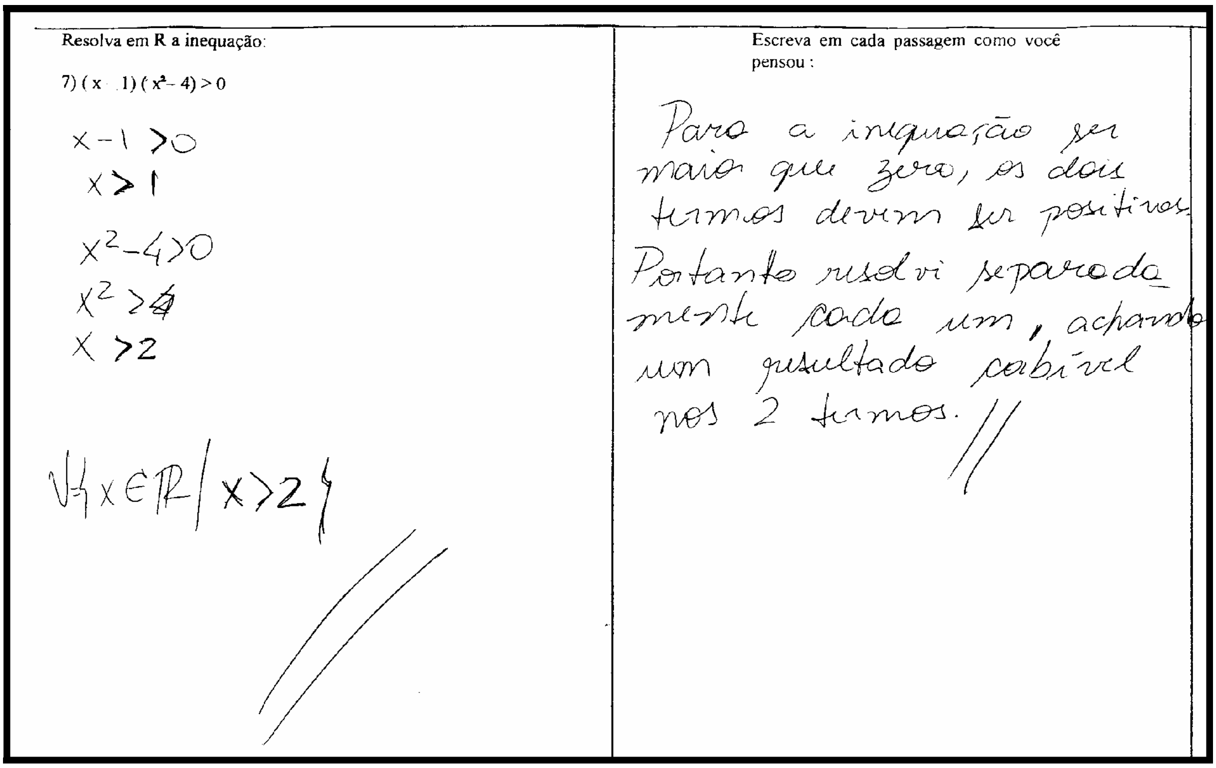
1 inequação não se resolve estudo os sinais assim pego cada parênteses e igualo a zero (equação) assim achei 3 valores diferentes para x

2 chutei um valor para x usei o resultado para usar o sinal no lugar de achar na reta onde a inequação é verdadeiro.

obs = para a inequação ser verdadeira o x tem que ser maior e igual a menos 2 e menor e igual a 1 ou maior que 2.

Figura 21 – Interação entre os domínios (DA+DRG+DN).

Apresentamos a seguir o protocolo de um aluno que trabalhou apenas no domínio algébrico (DA), na inequação 7:



Resolva em R a inequação:

7) $(x-1)(x^2-4) > 0$

$x - 1 > 0$

$x > 1$

$x^2 - 4 > 0$

$x^2 > 4$

$x > 2$

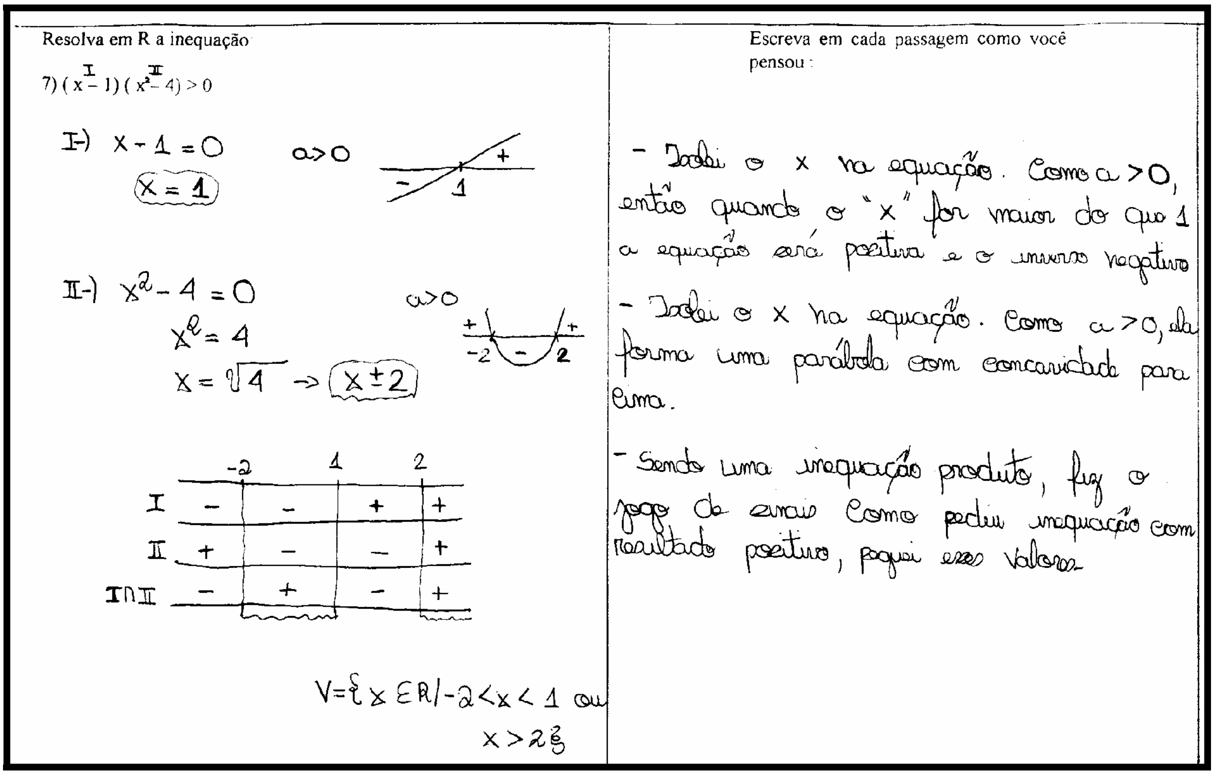
$V = \{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

Para a inequação ser maior que zero, os dois termos devem ser positivos. Portanto resolvi separadamente cada um, achando um resultado cabível nos 2 termos.

Figura 22 – Emprego do domínio algébrico (DA).

Dos alunos que trabalharam com a interação entre os domínios algébrico e das representações gráficas (DA+DRG) na inequação 7 escolhemos como exemplo o seguinte protocolo:


Resolva em R a inequação

7) $(x - 1)(x^2 - 4) > 0$

I-) $x - 1 = 0$ $\quad a > 0$

$x = 1$

II-) $x^2 - 4 = 0$ $\quad a > 0$

$x^2 = 4$

$x = \sqrt{4} \to x = \pm 2$

	-2		1		2	
I	-		-	+		+
II	+		-	-		+
I∩II	-		+	-		+

$V = \{x \in R / -2 < x < 1$ ou $x > 2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

- Isolei o x na equação. Como a > 0, então quando o "x" for maior do que 1 a equação será positiva e o inverso negativo

- Isolei o x na equação. Como a > 0, ela forma uma parábola com concavidade para cima.

- Sendo uma inequação produto, fiz o jogo de sinais. Como pediu inequação com resultado positivo, peguei esses valores.

Figura 23 – Interação entre os domínios (DA+DRG).

IV.3.2-Interpretações das justificativas apresentadas pelos alunos

Analisamos agora as justificativas fornecidas pelos alunos para as diversas etapas durante as resoluções das inequações.

IV.3.2.1-Uso de técnicas

Inicialmente apresentaremos uma categorização das justificativas relativas a técnicas empregadas pelos alunos, com base no quadro teórico de Assude. Adotamos para tanto as seguintes siglas:

TA (Técnica Algébrica)

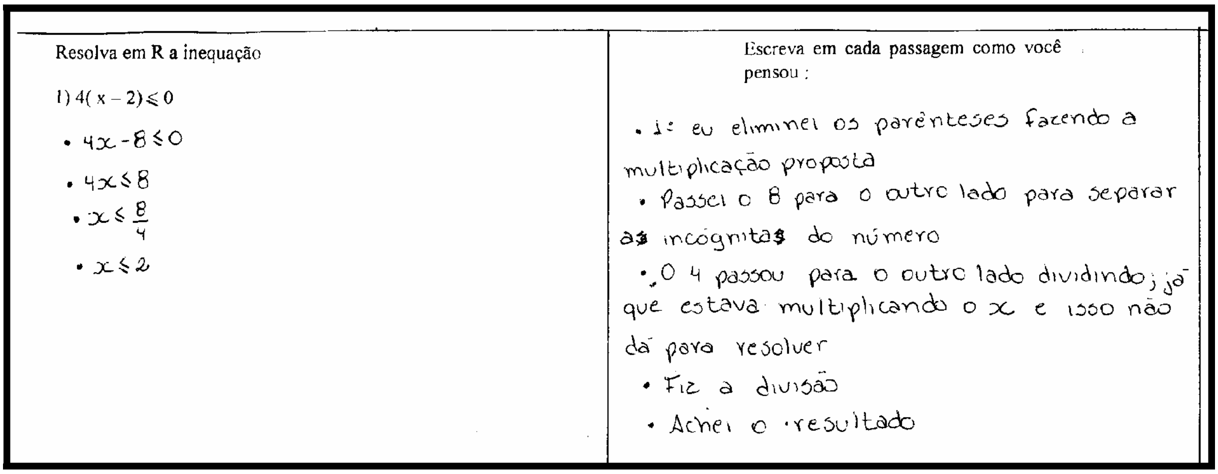
TAS (Técnica Algébrica com tabela de Sinais)

O quadro seguinte representa o resultado da categorização das técnicas, com base em Assude (2000).

Quadro nº 03-Categorização das técnicas.

Nº	Inequação	Nº de alunos	TA	TAS	Outras	Respostas em Branco
1	$4(x-2) \leq 0$	30	29	1	0	0
2	$-4x+8 \geq 0$	30	29	1	0	0
3	$(x-2)(2x+4) \leq 0$	30	17	12	0	1
4	$(x-2)(2x+4) \leq 2$	30	13	7	4	6
5	$\frac{5}{(x-2)} > 0$	25	17	4	0	4
6	$\frac{5}{(x-2)} > 5$	25	16	8	1	0
7	$(x-1)(x^2-4)>0$	25	7	11	6	1

Na inequação 1, 29 dos 30 alunos que resolveram (96,7%), empregaram a técnica algébrica (TA). Observemos o seguinte protocolo em que o aluno emprega a técnica algébrica (TA)

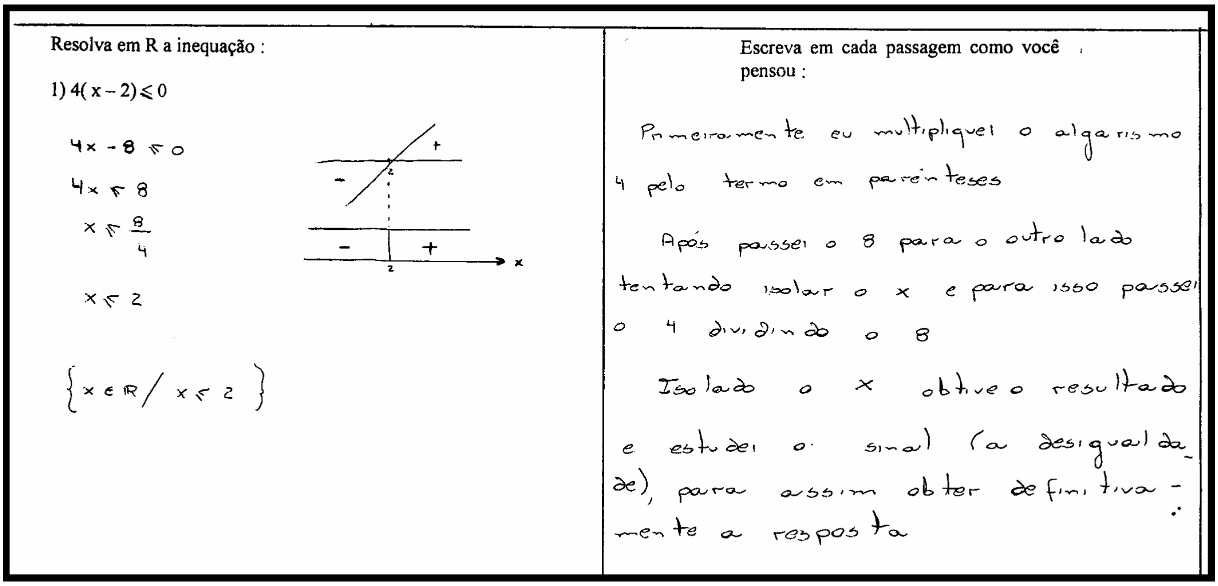


Resolva em R a inequação	Escreva em cada passagem como você pensou :
1) $4(x-2) \leqslant 0$	
• $4x - 8 \leqslant 0$	• 1: eu eliminei os parênteses fazendo a multiplicação proposta
• $4x \leqslant 8$	• Passei o 8 para o outro lado para separar as incógnitas do número
• $x \leqslant \frac{8}{4}$	• O 4 passou para o outro lado dividindo; já que estava multiplicando o x e isso não dá para resolver
• $x \leqslant 2$	• Fiz a divisão
	• Achei o resultado

Figura 24 – Emprego da técnica algébrica (TA).

Nesse protocolo, a técnica algébrica foi detectada não apenas pela observação da resolução em si, mas pelas justificativas apresentadas pelo aluno, as quais mostram apenas o emprego de técnicas e não de propriedades e conceitos matemáticos.

Um único aluno, que representa 3,3% dos 30 alunos que resolveram a inequação, empregou a técnica algébrica com tabela de sinais (TAS) e seu protocolo é mostrado a seguir:



Resolva em R a inequação :

1) $4(x-2) \leqslant 0$

$4x - 8 \leqslant 0$

$4x \leqslant 8$

$x \leqslant \frac{8}{4}$

$x \leqslant 2$

$\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leqslant 2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou :

Primeiramente eu multipliquei o algarismo 4 pelo termo em parenteses

Após passei o 8 para o outro lado tentando isolar o x e para isso passei o 4 dividindo o 8

Isolado o x obtive o resultado e estudei o sinal (a desigualdade), para assim obter definitiva-mente a resposta

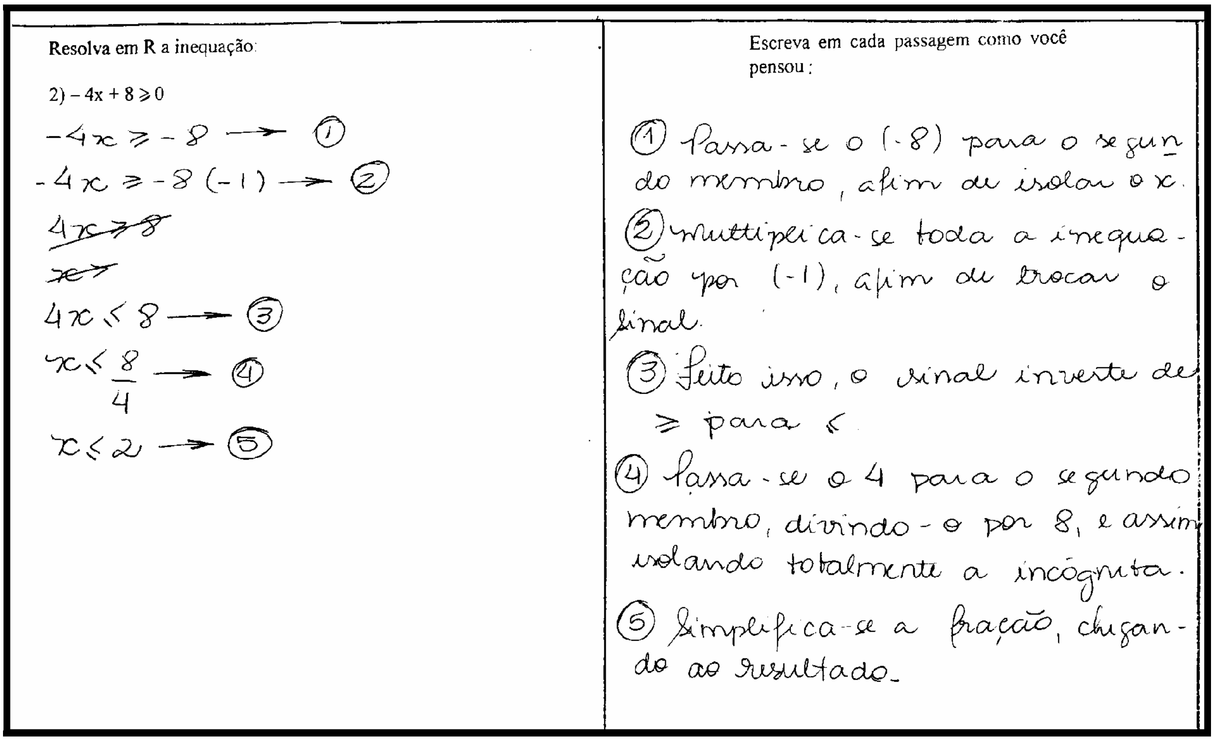
Figura 25 – Emprego da técnica algébrica com tabela de sinais (TAS).

O aluno, após desenvolver a parte algébrica, procura mostrar o resultado numa tabela de sinais e, ainda, em suas justificativas escreve:

“isolando o x obtive o resultado e estudei o sinal ... para assim obter definitivamente a resposta” .

Tudo isso nos induziu a categorizar como técnica algébrica com tabela de sinais (TAS).

Quanto à inequação 2, constatamos que 29 dos 30 alunos que resolveram (96,7%) utilizaram a técnica algébrica (TA). O protocolo seguinte ilustra o emprego da referida técnica.



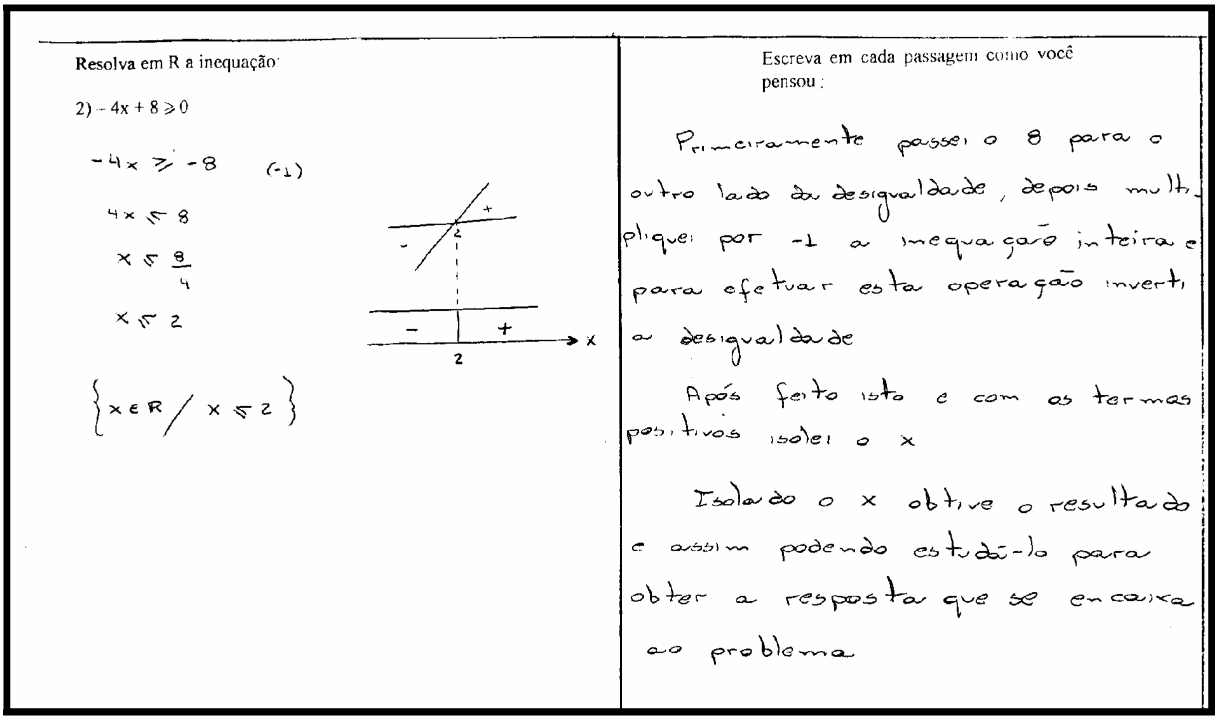
Resolva em R a inequação:	Escreva em cada passagem como você pensou:
2) $-4x + 8 \geq 0$	
$-4x \geq -8 \to$ 1	1 Passa-se o (-8) para o segundo membro, afim de isolar o x.
$-4x \geq -8\,(-1) \to$ 2	2 Multiplica-se toda a inequação por (-1), afim de trocar o sinal.
$\cancel{4x \geq 8}$	
$\cancel{x \geq}$	
$4x \leq 8 \to$ 3	3 Feito isso, o sinal inverte de $\geq$ para $\leq$
$x \leq \frac{8}{4} \to$ 4	4 Passa-se o 4 para o segundo membro, dividindo-o por 8, e assim isolando totalmente a incógnita.
$x \leq 2 \to$ 5	5 Simplifica-se a fração, chegando ao resultado.

Figura 26 – Emprego da técnica algébrica (TA).

Com as justificativas apresentadas:

"Passa-se o (-8) para o segundo membro, afim de isolar o x", "passa-se o 4 para o segundo membro, dividindo-o por 8, e assim isolando totalmente a incógnita".

O aluno demonstra conhecimento de técnicas e, ao confrontarmos com a resolução, categorizamos como técnica algébrica (TA). Constatamos que 1 aluno dentre os 30 alunos que resolveram (3,3%) utilizou a técnica algébrica com tabela de sinais (TAS), conforme é ilustrado a seguir:



Resolva em R a inequação:

2) $-4x + 8 \geq 0$

$-4x \geq -8 \quad (-1)$

$4x \leq 8$

$x \leq \frac{8}{4}$

$x \leq 2$

$\{x \in R \,/\, x \leq 2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

Primeiramente passei o 8 para o outro lado da desigualdade, depois multipliquei por -1 a inequação inteira e para efetuar esta operação inverti a desigualdade

Após feito isto e com os termos positivos isolei o x

Isolado o x obtive o resultado e assim podendo estudá-lo para obter a resposta que se encaixa ao problema

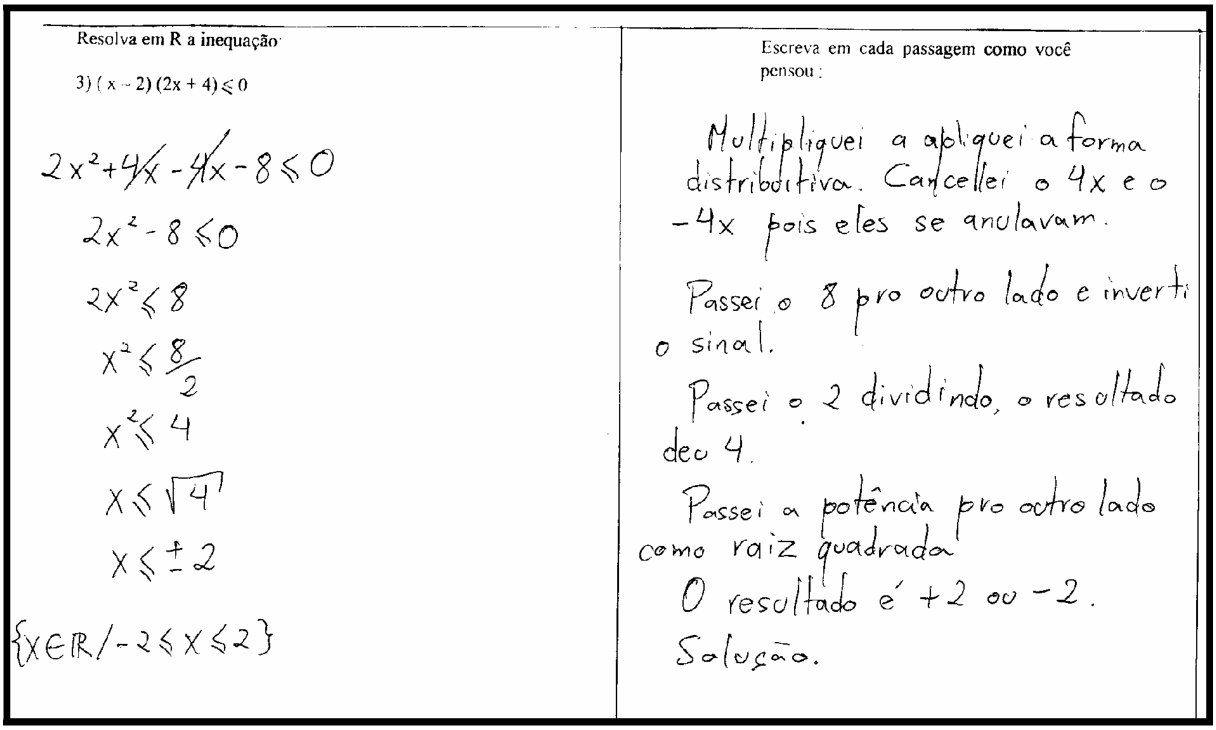
Figura 27 – Emprego da técnica algébrica com tabela de sinais (TAS).

O aluno, após manipulações algébricas, procura mostrar uma tabela de sinais para concluir e em suas justificativas escreve:

“isolado o x obtive o resultado e assim poder estudá-lo para obter a resposta que se encaixa ao problema”.

Essas informações nos levaram a categorizar esse caso como técnica algébrica com tabela de sinais (TAS).

Em relação à inequação 3, 17 dos 29 alunos que resolveram (58,6%) utilizaram somente a técnica algébrica (TA) e, como exemplo, apresentamos a seguir o protocolo de um aluno que utilizou somente a referida técnica:



Resolva em R a inequação

3) $(x - 2)(2x + 4) \leq 0$

$2x^2 + \cancel{4x} - \cancel{4x} - 8 \leq 0$

$2x^2 - 8 \leq 0$

$2x^2 \leq 8$

$x^2 \leq \frac{8}{2}$

$x^2 \leq 4$

$x \leq \sqrt{4}$

$x \leq \pm 2$

$\{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou :

Multipliquei a apliquei a forma distributiva. Cancelei o 4x e o -4x pois eles se anulavam.

Passei o 8 pro outro lado e inverti o sinal.

Passei o 2 dividindo, o resultado deu 4.

Passei a potência pro outro lado como raiz quadrada

O resultado é +2 ou -2.

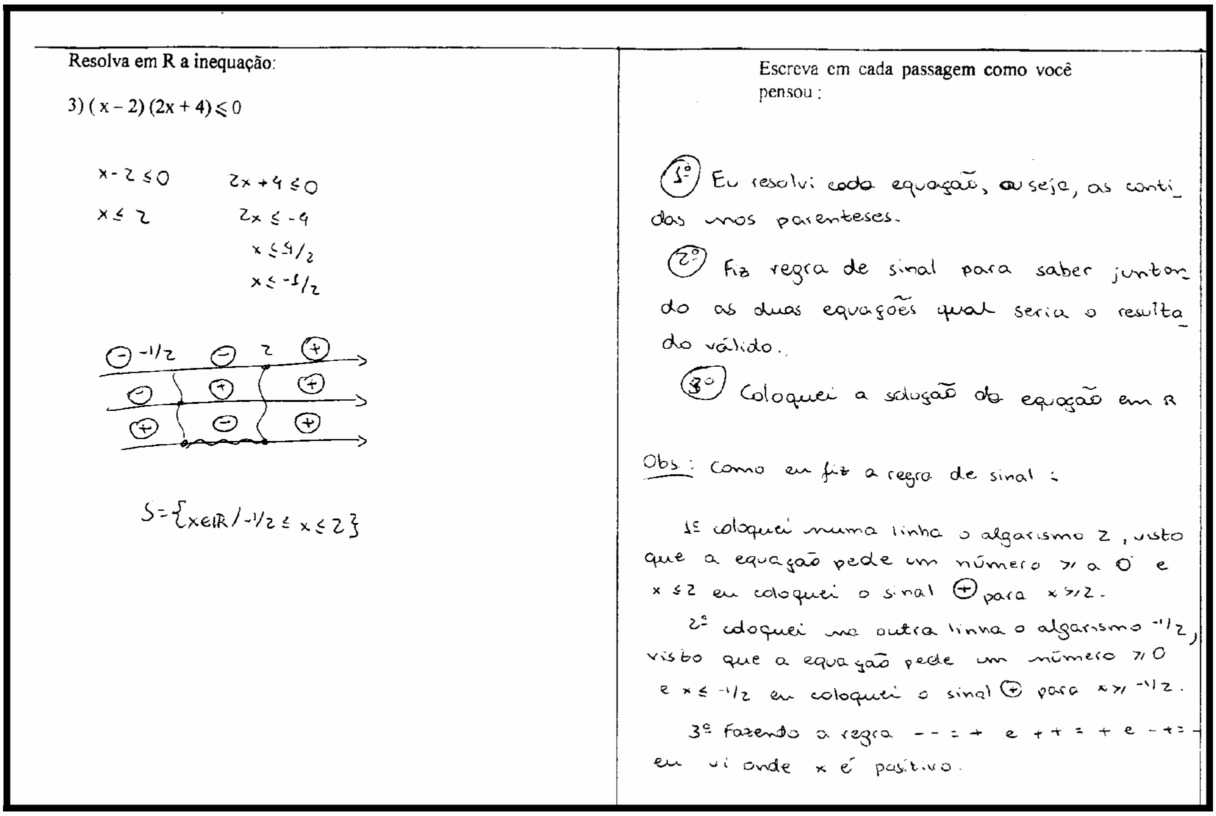
Solução.

Figura 28 – Emprego da técnica algébrica (TA).

Constatamos que se trata de técnica algébrica (TA), conforme o quadro de Assude (2000), pois foram feitas apenas manipulações algébricas. Isto ficou evidente ao observarmos a resolução e suas justificativas, nas quais encontramos dizeres característicos de técnicas, tais como:

“passei o 8 para outro lado e inverti o sinal “e” passei o 2 dividindo, o resultado deu 4”.

Dos 29 alunos que resolveram, cerca de 12 alunos (41,4%) empregaram a técnica algébrica com tabela de sinais (TAS). A seguir mostramos um protocolo de um desses alunos:


Resolva em R a inequação:

3) (x – 2) (2x + 4) ≤ 0

$x - 2 \leq 0$ $\quad$ $2x + 4 \leq 0$

$x \leq 2$ $\quad$ $2x \leq -4$

$x \leq -4/2$

$x \leq -1/2$

$S = \{x \in \mathbb{R} / -1/2 \leq x \leq 2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

1º Eu resolvi cada equação, ou seja, as conti_das nos parenteses.

2º Fiz regra de sinal para saber juntando as duas equações qual seria o resulta_do válido.

3º Coloquei a solução da equação em R

Obs: Como eu fiz a regra de sinal:

1º coloquei numa linha o algarismo 2, visto que a equação pede um número ≥ a 0 e x ≤ 2 eu coloquei o sinal ⊕ para x ≥ 2.

2º coloquei na outra linha o algarismo -1/2, visto que a equação pede um número ≥ 0 e x ≤ -1/2 eu coloquei o sinal ⊕ para x ≥ -1/2.

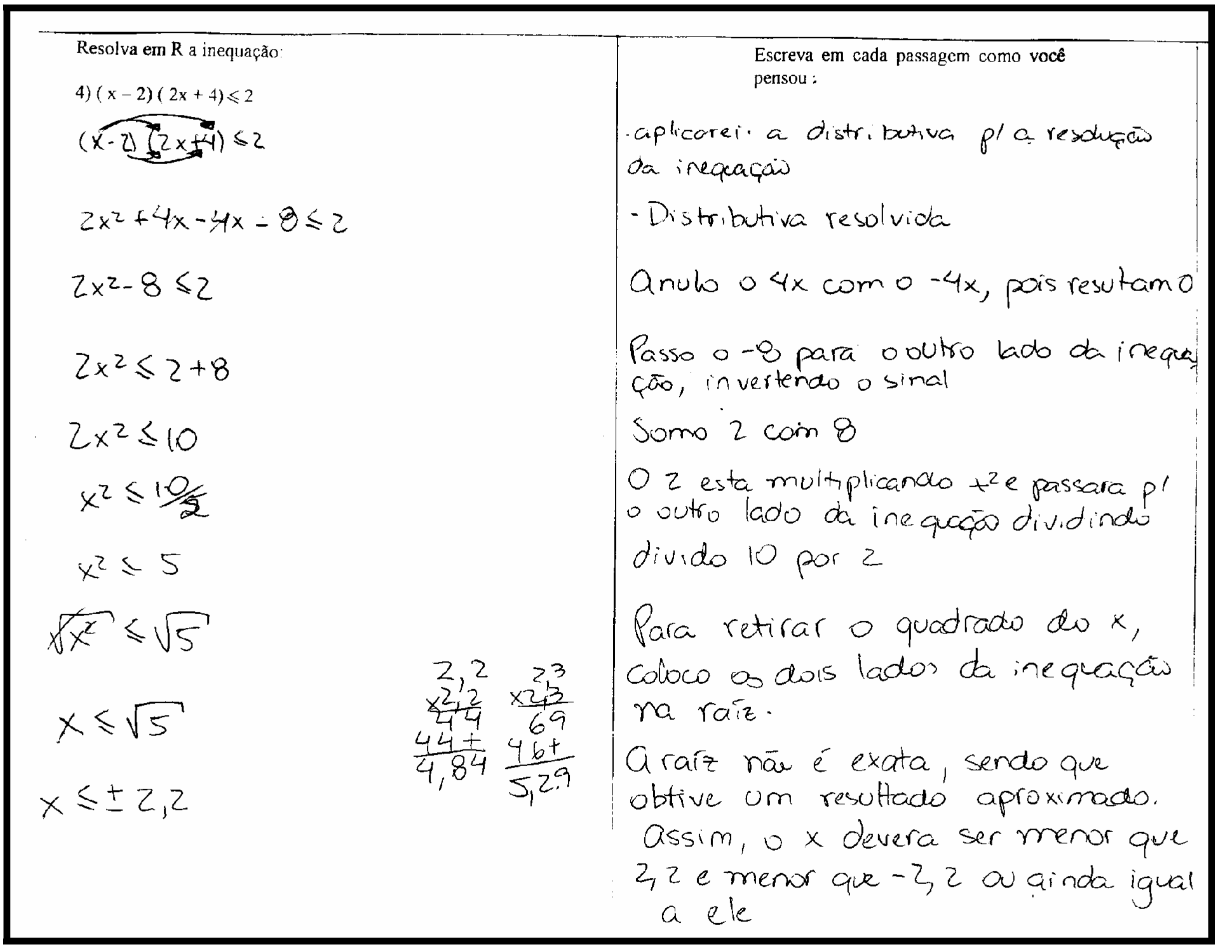
3º fazendo a regra - - = + e + + = + e - + = - eu vi onde x é positivo.

Figura 29 – Emprego da técnica algébrica com tabela de sinais (TAS).

De acordo com Assude (2000), a técnica algébrica com tabela de sinais é constituída de três etapas: analisar restrições sobre x, transpor os termos para um mesmo membro e fatorar e, finalmente, o estudo do sinal e resultado.

Ocorre, porém, que a inequação apresentada é dada por um produto de duas expressões e, como já estava na forma fatorada, não foram necessárias todas as etapas, categorizamos então como (TAS), pois após as manipulações algébricas o aluno lançou mão da utilização de uma tabela se sinais.

Em relação à inequação 4, 13 dos 24 alunos que resolveram (54,2%) empregaram a técnica algébrica (TA). O protocolo seguinte ilustra o emprego de tal técnica.



Resolva em R a inequação:	Escreva em cada passagem como você pensou:
4) $(x-2)(2x+4) \leq 2$	
$(x-2)(2x+4) \leq 2$	aplicarei a distributiva p/ a resolução da inequação
$2x^2+4x-4x-8 \leq 2$	- Distributiva resolvida
$2x^2-8 \leq 2$	Anulo o 4x com o -4x, pois resultam 0
$2x^2 \leq 2+8$	Passo o -8 para o outro lado da inequação, invertendo o sinal
$2x^2 \leq 10$	Somo 2 com 8
$x^2 \leq 10/2$	O 2 está multiplicando x^2 e passará p/ o outro lado da inequação dividindo
$x^2 \leq 5$	divido 10 por 2
$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{5}$	Para retirar o quadrado do x, coloco os dois lados da inequação na raiz.
$x \leq \sqrt{5}$ $2,2 \times 2,2 = 4,84$ $2,3 \times 2,3 = 5,29$	A raiz não é exata, sendo que obtive um resultado aproximado.
$x \leq \pm 2,2$	Assim, o x deverá ser menor que 2,2 e menor que -2,2 ou ainda igual a ele

Figura 30 –Emprego da técnica algébrica (TA).

Como podemos observar, o aluno só efetuou manipulações algébricas, com agrupamento de termos em “x” num membro e termos independentes no outro, assim como descrito no quadro de Assude (2000); portanto, é de fato técnica algébrica (TA).

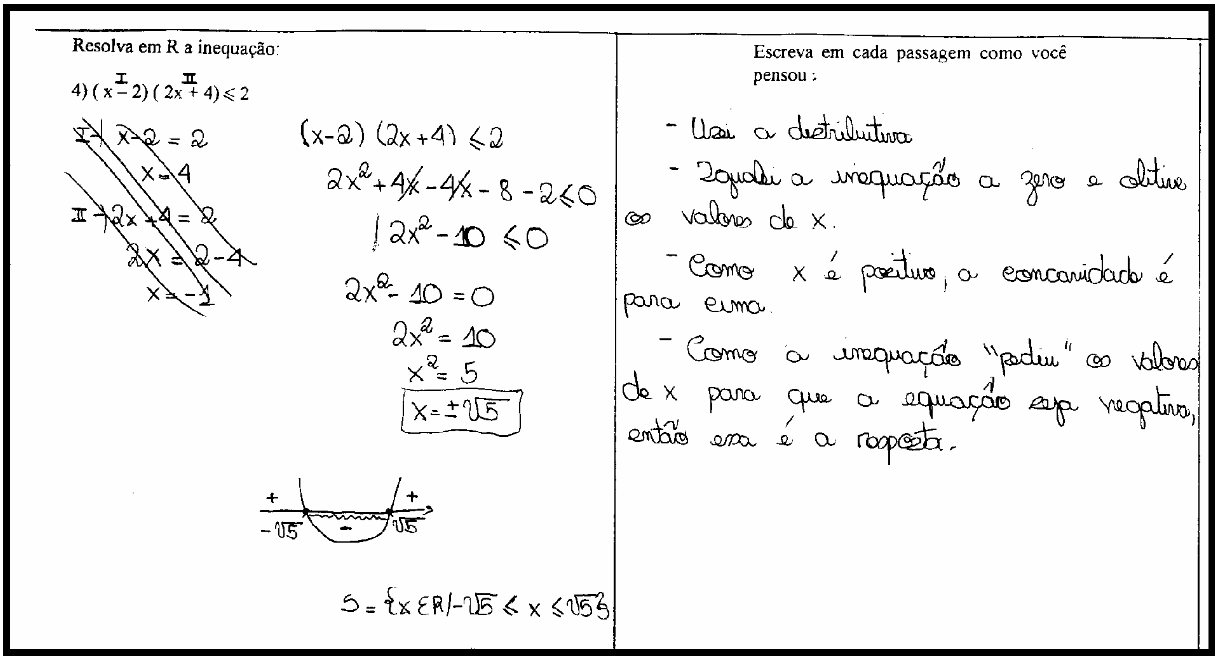
Cerca de 7 alunos dos 24 que resolveram a inequação (29,2%) empregaram a técnica algébrica com tabela de sinais (TAS). Na figura a seguir, mostramos um exemplo de um desses protocolos:

Resolva em R a inequação:	Escreva em cada passagem como você pensou:
4) $(x-2)(2x+4) \leq 2$ $2x^2 + \cancel{4x} - \cancel{4x} - 8 \leq 2$ $2x^2 - 8 \leq 2$ $2x^2 - 8 - 2 \leq 0$ $2x^2 - 10 \leq 0$ $2x^2 - 10 = 0$ $2x^2 = 10$ $x^2 = 5 \quad x = \pm\sqrt{5}$ $+ \mid - \mid +$ $-\sqrt{5} \quad \sqrt{5}$ $S = \{x \in R / -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}\}$	• Usei a distributiva • passei tudo para o lado esquerdo • achei a raiz trocando o $\leq$ pelo $=$ • coloquei na tabela "varal" para concluir a resposta.

Figura 31 – Emprego da técnica algébrica com tabela de sinais (TAS).

No início, o aluno empregou manipulações algébricas e, no final, após encontrar as raízes -$\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$, ele montou uma tabela de sinais para obter a solução. Trata-se, então, de técnica algébrica com tabela de sinais (TAS).

Cerca de 4 alunos dos 24 que resolveram (16,7%) empregaram um outro tipo de técnica não especificado em Assude (2000). Mostramos a seguir um exemplo de um desses protocolos:



Resolva em R a inequação:

4) $(x - 2)(2x + 4) \leq 2$

$\cancel{\text{I}\ x-2=2}$

$\cancel{x=4}$

$\cancel{\text{II}\ 2x+4=2}$

$\cancel{2x=2-4}$

$\cancel{x=-1}$

$(x-2)(2x+4) \leq 2$

$2x^2+\cancel{4x}-\cancel{4x}-8-2\leq 0$

$2x^2-10\leq 0$

$2x^2-10=0$

$2x^2=10$

$x^2=5$

$\boxed{x=\pm\sqrt{5}}$

$-\sqrt{5}$ $\sqrt{5}$

$S=\{x\in R/-\sqrt{5}\leq x\leq\sqrt{5}\}$

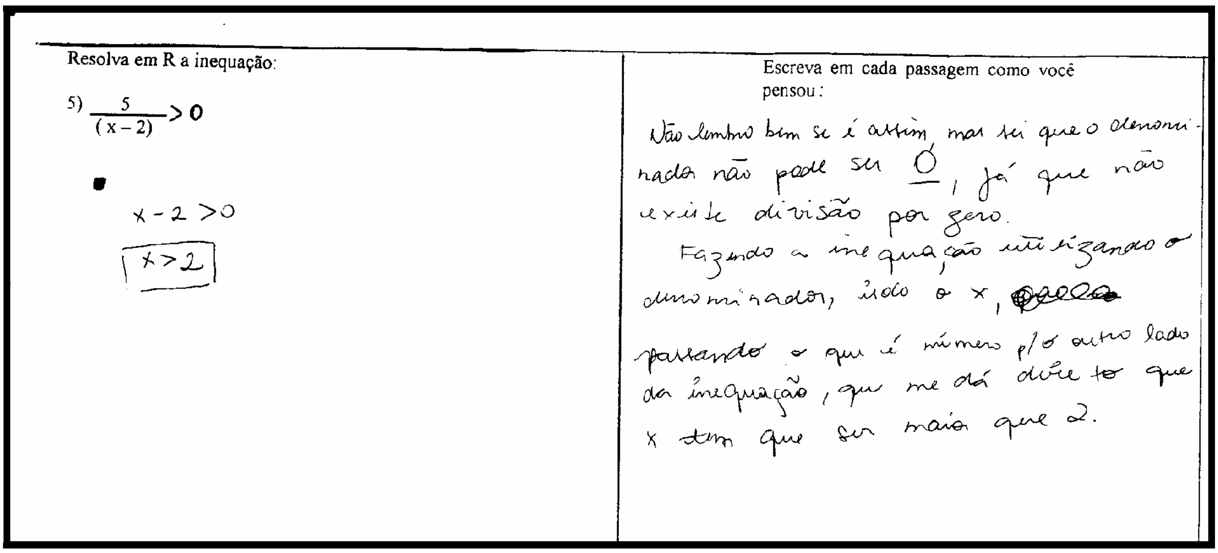
Escreva em cada passagem como você pensou:

- Usei a distributiva
- Igualei a inequação a zero e obtive os valores de x.
- Como x é positivo, a concavidade é para cima.
- Como a inequação "pediu" os valores de x para que a equação seja negativa, então essa é a resposta.

Figura 32 – Emprego de outro tipo de técnica não categorizada por Assude (2000).

A aplicação da pesquisa com as inequações 5,6 e 7 ocorreu no segundo encontro quando pudemos contar com 25 participantes.

Em relação à inequação 5, 17 alunos dos 21 que resolveram (81,0%) optaram pelo emprego da técnica algébrica (TA), conforme o protocolo seguinte:



Resolva em R a inequação:

5) $\frac{5}{(x-2)} > 0$

$x-2>0$

$\boxed{x>2}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

Não lembro bem se é assim mas sei que o denominador não pode ser 0, já que não existe divisão por zero.

Fazendo a inequação utilizando o denominador, isolo o x, passando o que é número p/ o outro lado da inequação, que me dá direto que x tem que ser maior que 2.

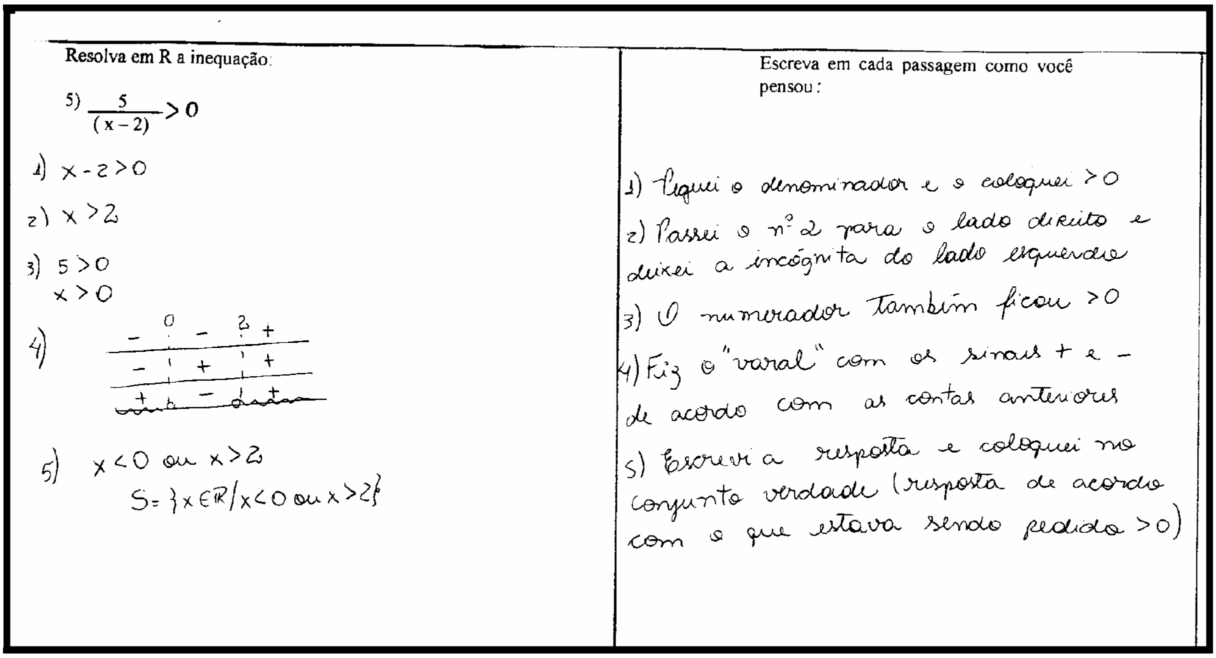
Figura 33 – Emprego da técnica algébrica (TA).

Ao escrever:

"... isolo o x, passando o que é número para o outro lado da inequação...".

Em suas justificativas, o aluno mostrou empregar a técnica algébrica (TA), pois está de acordo com o quadro de Assude (2000).

Apenas 4 alunos dos 21 que resolveram (19,0%) empregaram a técnica algébrica com tabela de sinais (TAS), conforme mostramos um dos protocolos a seguir.



Resolva em R a inequação:

5) $\frac{5}{(x-2)} > 0$

1) $x - 2 > 0$

2) $x > 2$

3) $5 > 0$
$x > 0$

4)

	0		2	
−		−		+
−		+		+
+		−		+

5) $x < 0$ ou $x > 2$
$S = \{x \in \mathbb{R} / x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

1) Peguei o denominador e o coloquei >0
2) Passei o nº 2 para o lado direito e deixei a incógnita do lado esquerdo
3) O numerador também ficou >0
4) Fiz o "varal" com os sinais + e − de acordo com as contas anteriores
5) Escrevi a resposta e coloquei no conjunto verdade (resposta de acordo com o que estava sendo pedido >0)

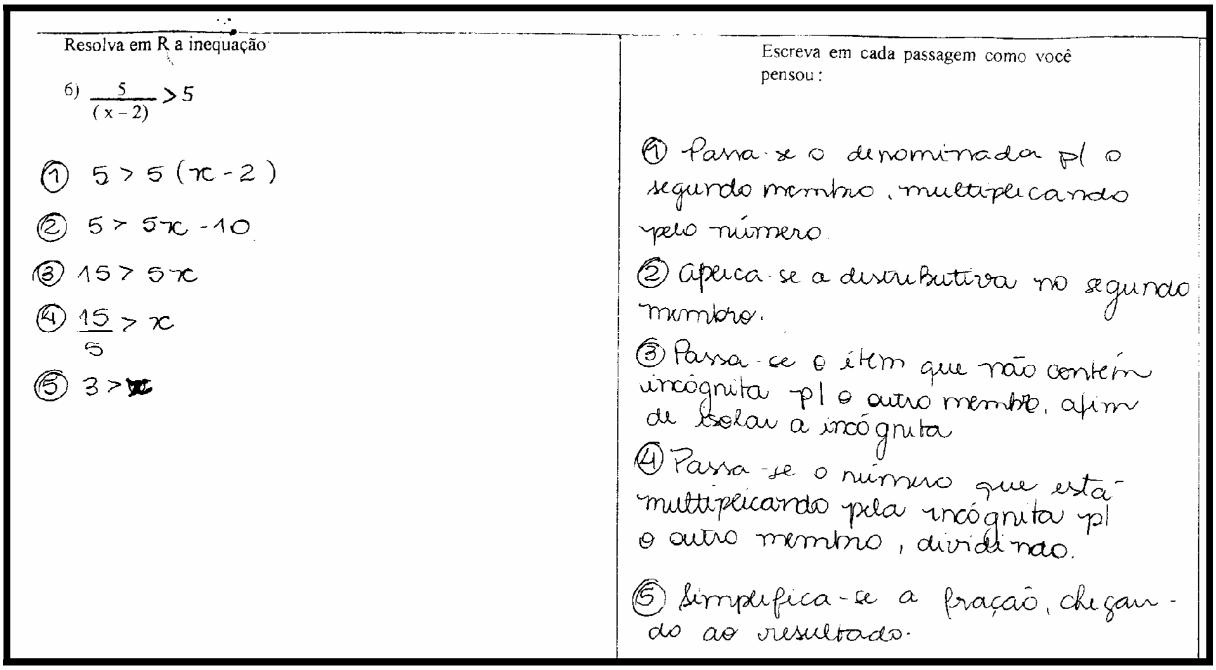
Figura 34 – Emprego da técnica algébrica com tabela de sinais (TAS).

Pela maneira que a inequação foi proposta, não seria necessário executar todas as etapas da (TAS) previstas no quadro de Assude (2000).

Categorizamos como (TAS), pois inicialmente o aluno realizou manipulações algébricas conforme justificativas 1,2 e 3 e, para continuar a resolução, ele lançou mão do emprego da tabela de sinais, conforme vemos na passagem 4 e na justificativa 4 onde diz *"... fiz o varal com os sinais* + *e* - *de acordo com as contas anteriores ...".* Vemos então que é coerente com o quadro de Assude (2000).

A inequação 6 foi resolvida pelos 25 alunos que participaram, dentre os quais 16 alunos (64,0%) optaram pela técnica algébrica (TA).

A seguir, mostramos o protocolo de um aluno que empregou a citada técnica:


Resolva em R a inequação

6) $\frac{5}{(x-2)} > 5$

① $5 > 5(x-2)$

② $5 > 5x - 10$

③ $15 > 5x$

④ $\frac{15}{5} > x$

⑤ $3 > x$

Escreva em cada passagem como você pensou:

① Passa-se o denominador p/ o segundo membro, multiplicando pelo número.

② Aplica-se a distributiva no segundo membro.

③ Passa-se o item que não contém incógnita p/ o outro membro, afim de isolar a incógnita

④ Passa-se o número que está multiplicando pela incógnita p/ o outro membro, dividindo.

⑤ Simplifica-se a fração, chegando ao resultado.

Figura 35 – Emprego da técnica algébrica (TA).

Observando-se a resolução, juntamente às justificativas apresentadas, constatamos que se trata de técnica algébrica (TA). Durante as justificativas ficou claro o emprego da citada técnica, conforme os dizeres do aluno:

“Passa-se o item que não contém incógnita para o outro membro, a fim de isolar a incógnita”, “passa-se o número que está multiplicando pela incógnita para o outro membro, dividindo”.

O que está de acordo com o descrito no quadro de Assude (2000).

Constatamos que 8 entre os 25 alunos que resolveram a inequação (32,0%) utilizaram a técnica algébrica com tabela de sinais (TAS).

Observemos um exemplo de protocolo dessa categoria:

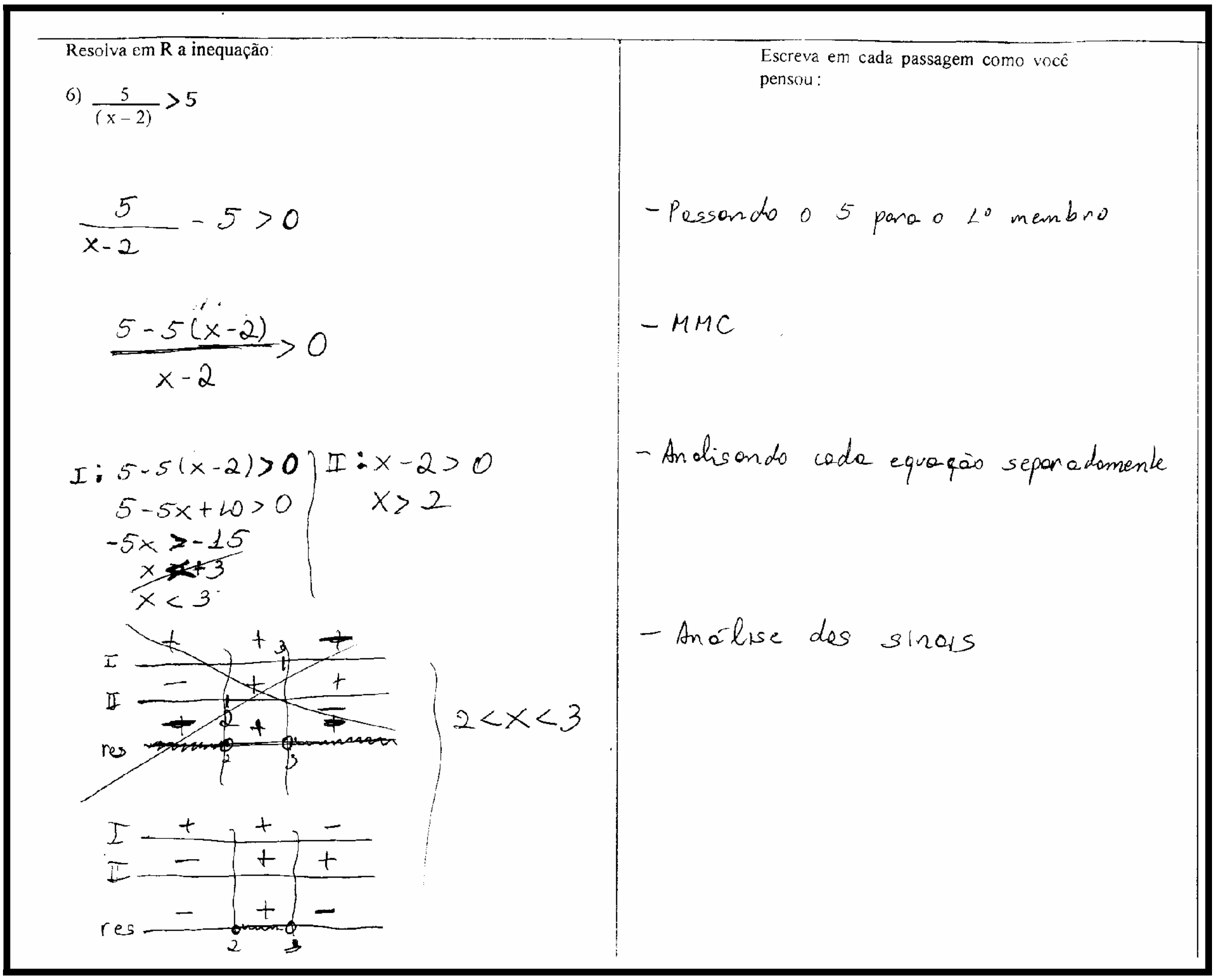


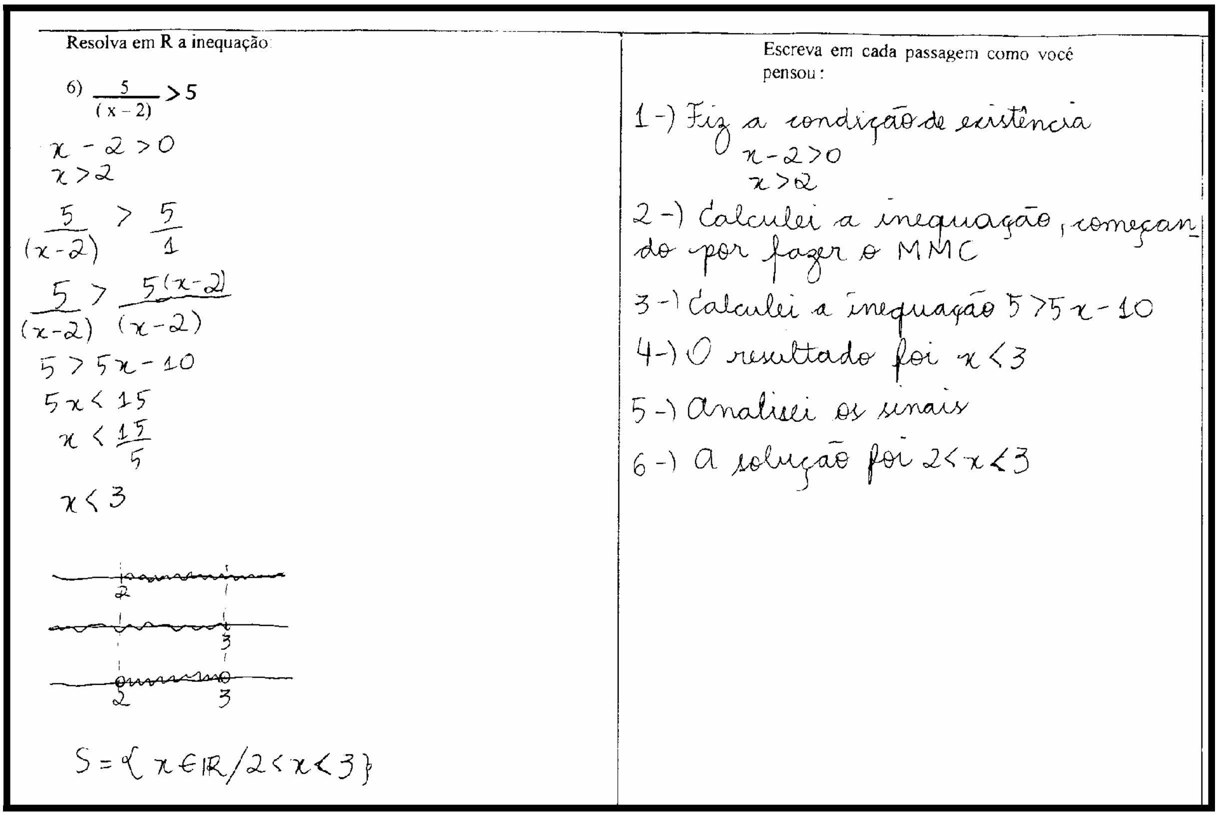
Figura 36 – Emprego da técnica algébrica com tabela de sinais (TAS).

Categorizamos o protocolo como TAS, pois de acordo com as justificativas do aluno.

"Passando o 5 para o 1º membro", "MMC", "analisando cada equação separadamente" e "Análise dos sinais".

Paralelamente à resolução, onde ele apresenta uma tabela de sinais, levou-nos a categorizar como TAS, por concordar com a descrição da TAS no quadro de Assude (2000).

Apenas 1 aluno, dentre os 25 que resolveram (4,0%), lançou mão de uma técnica que não se encaixa no quadro de Assude (2000), razão pela qual incluímos na categoria "outras". Seu protocolo é mostrado a seguir:


Resolva em R a inequação

6) $\frac{5}{(x-2)} > 5$

$x - 2 > 0$

$x > 2$

$\frac{5}{(x-2)} > \frac{5}{1}$

$\frac{5}{(x-2)} > \frac{5(x-2)}{(x-2)}$

$5 > 5x - 10$

$5x < 15$

$x < \frac{15}{5}$

$x < 3$

$S = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

1-) Fiz a condição de existência
$x - 2 > 0$
$x > 2$

2-) Calculei a inequação, começando por fazer o MMC

3-) Calculei a inequação $5 > 5x - 10$

4-) O resultado foi $x < 3$

5-) Analisei os sinais

6-) A solução foi $2 < x < 3$

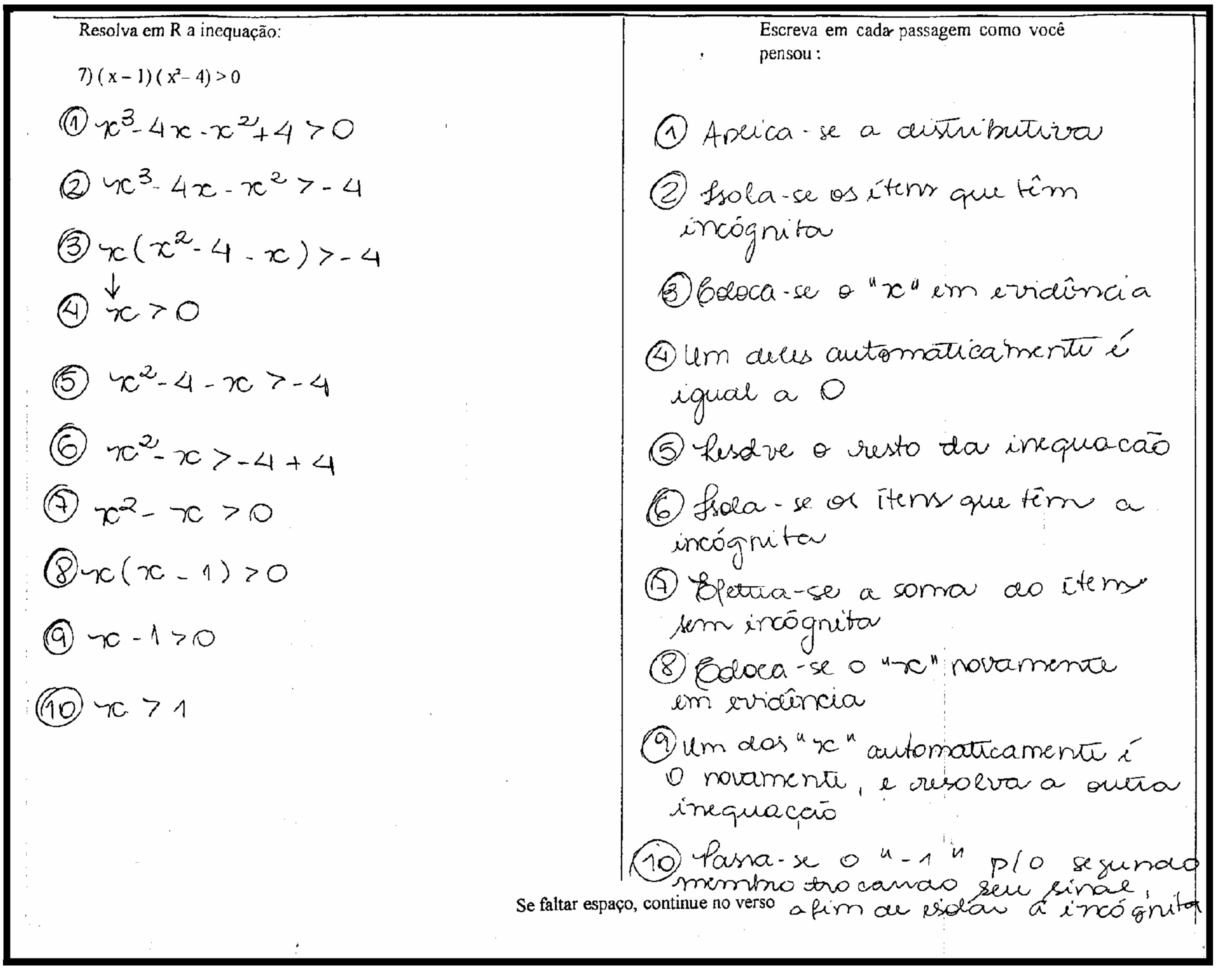
Figura 37 – Emprego de outro tipo de técnica não categorizado por Assude (2000).

O aluno trabalha com manipulações algébricas ao aplicar a condição de existência e ao resolver a inequação.

Para finalizar, a resolução o aluno lança mão de um recurso gráfico, pois apresenta três retas paralelas, a primeira correspondente à condição de existência, a segunda corresponde à solução e a terceira representando a intersecção das duas primeiras e que serve para apresentar a solução final.

A inequação 7 foi resolvida por 24 alunos dos 25 participantes da pesquisa e surgiram 3 categorias de técnicas que passamos a analisar.

Constatamos que 7 alunos dentre os 24 que resolveram (29,2%) empregaram a Técnica Algébrica (TA). Um desses protocolos é o indicado a seguir:



Resolva em R a inequação:

7) $(x-1)(x^2-4)>0$

① $x^3-4x-x^2+4>0$

② $x^3-4x-x^2>-4$

③ $x(x^2-4-x)>-4$

④ $x>0$

⑤ $x^2-4-x>-4$

⑥ $x^2-x>-4+4$

⑦ $x^2-x>0$

⑧ $x(x-1)>0$

⑨ $x-1>0$

⑩ $x>1$

Escreva em cada passagem como você pensou:

① Aplica-se a distributiva

② Isola-se os itens que têm incógnita

③ Coloca-se o "x" em evidência

④ Um deles automaticamente é igual a 0

⑤ Resolve o resto da inequação

⑥ Isola-se os itens que têm a incógnita

⑦ Efetua-se a soma dos itens sem incógnita

⑧ Coloca-se o "x" novamente em evidência

⑨ Um dos "x" automaticamente é 0 novamente, e resolva a outra inequação

⑩ Passa-se o "-1" p/o segundo membro trocando seu sinal, a fim de isolar a incógnita

Se faltar espaço, continue no verso

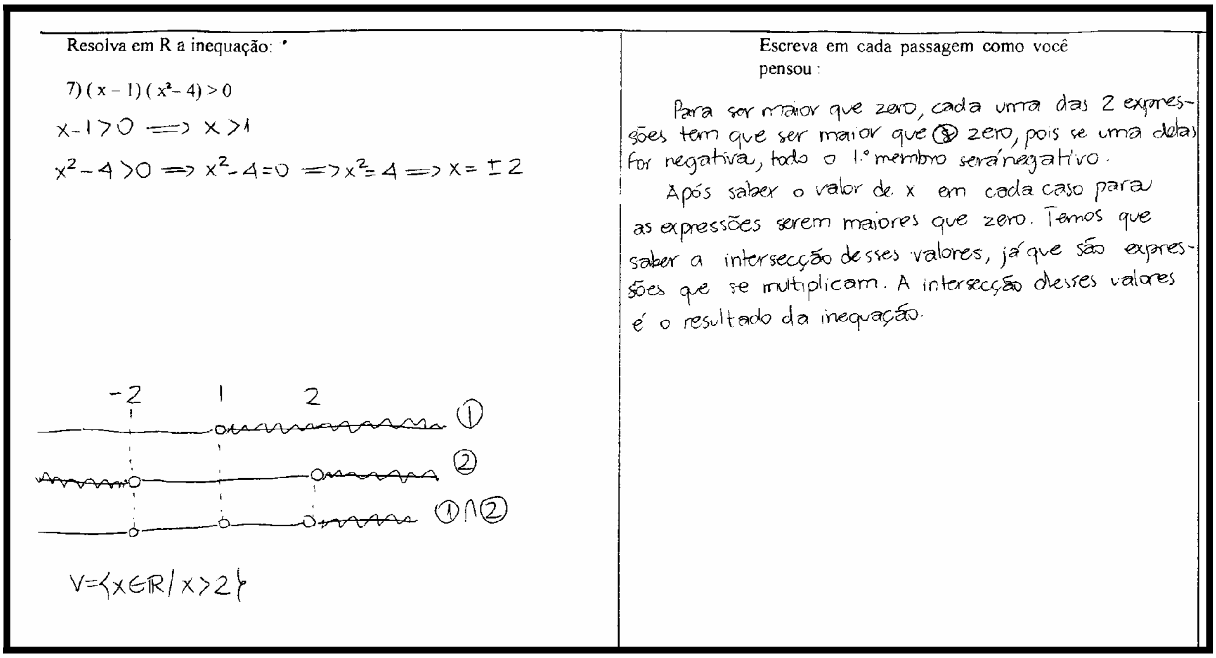
Figura 38 – Emprego da técnica algébrica (TA).

Confrontamos a resolução apresentada com as justificativas para concluir que se tratava da referida técnica. Nas justificativas, os dizeres do aluno:

"Isola-se os itens que tem incógnitas", "coloca-se o x em evidência", "passa-se o -1 para o segundo membro trocando seu sinal, a fim de isolar a incógnita".

São concordantes com a descrição da Técnica Algébrica (TA) no quadro de Assude (2000).

Verificamos que 6 alunos dentre os 24 que resolveram (25,0%) usaram uma técnica que não consta no quadro de Assude (2000), razão pela qual encaixamos seus protocolos na categoria “outras”. Mostramos a seguir um exemplo dessa categoria:



Resolva em R a inequação:	Escreva em cada passagem como você pensou :
7) $(x-1)(x^2-4)>0$ $x-1>0 \Rightarrow x>1$ $x^2-4>0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$	Para ser maior que zero, cada uma das 2 expressões tem que ser maior que zero, pois se uma delas for negativa, todo o 1.º membro será negativo. Após saber o valor de x em cada caso para as expressões serem maiores que zero. Temos que saber a intersecção desses valores, já que são expressões que se multiplicam. A intersecção desses valores é o resultado da inequação.

Figura 39 – Emprego de outro tipo de técnica não categorizado por Assude (2000).

Após manipulações algébricas, o aluno lançou mão de um recurso gráfico pois traçou três retas paralelas, a primeira para indicar onde x-1>0, a segunda para indicar onde x^2-4>0 e a terceira que se refere à intersecção e que serve para concluir sobre a solução final.

Cerca de 11 alunos dos 24 que resolveram (45,8%) lançaram mão da técnica algébrica com tabela de sinais (TAS). A seguir mostramos um desses protocolos:

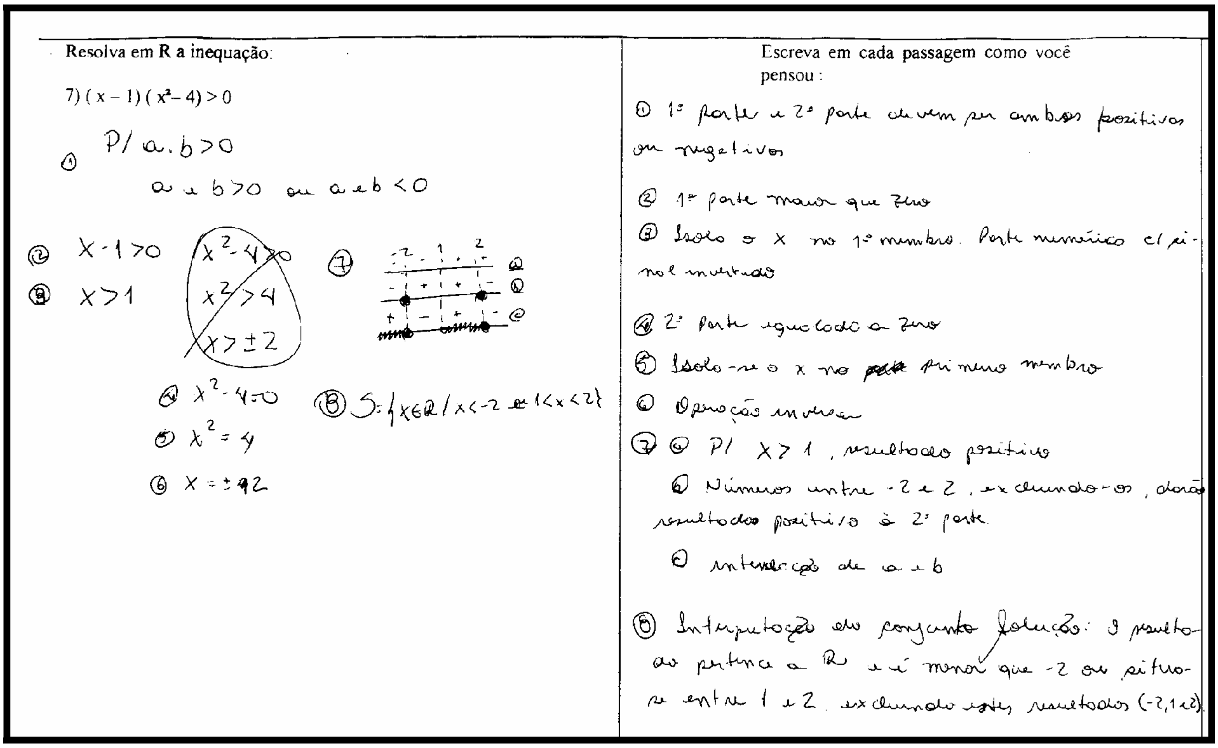


Figura 40 – Emprego da técnica algébrica com tabela de sinais (TAS).

Como a inequação já foi proposta na forma fatorada, algumas etapas daquelas descritas no quadro de Assude para a (TAS) evidentemente não foram realizadas por considerarmos sem necessidade. Admitimos ser concordante com o quadro de Assude, pois o aluno efetuou manipulações algébricas conforme se constata na resolução e respectivas justificativas e, logo após, lançou mão de uma tabela de sinais para concluir sobre a solução.

IV.3.2.2-Interpretações sobre o uso de conceitos e propriedades

Apresentaremos agora uma categorização das justificativas fornecidas pelos alunos relativamente a conceitos (ou condições deles), leis ou princípios e, também, propriedades, nas diversas etapas da resolução das inequações.

Adotaremos as seguintes siglas para os conceitos, as leis ou princípios ou as propriedades, empregados pelos alunos:

CD: conceito da divisão, mais precisamente, a condição de não existência de divisão por zero.

PDMA: propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (descrita em nossa análise *a priori*).

OM: propriedade da compatibilidade da relação de ordem com a multiplicação (ou sua propriedade decorrente OM', já descritas em nossa análise *a priori*).

O quadro a seguir nos mostra uma visão panorâmica dos resultados encontrados:

Quadro nº 04-Categorização dos conceitos e propriedades matemáticas.

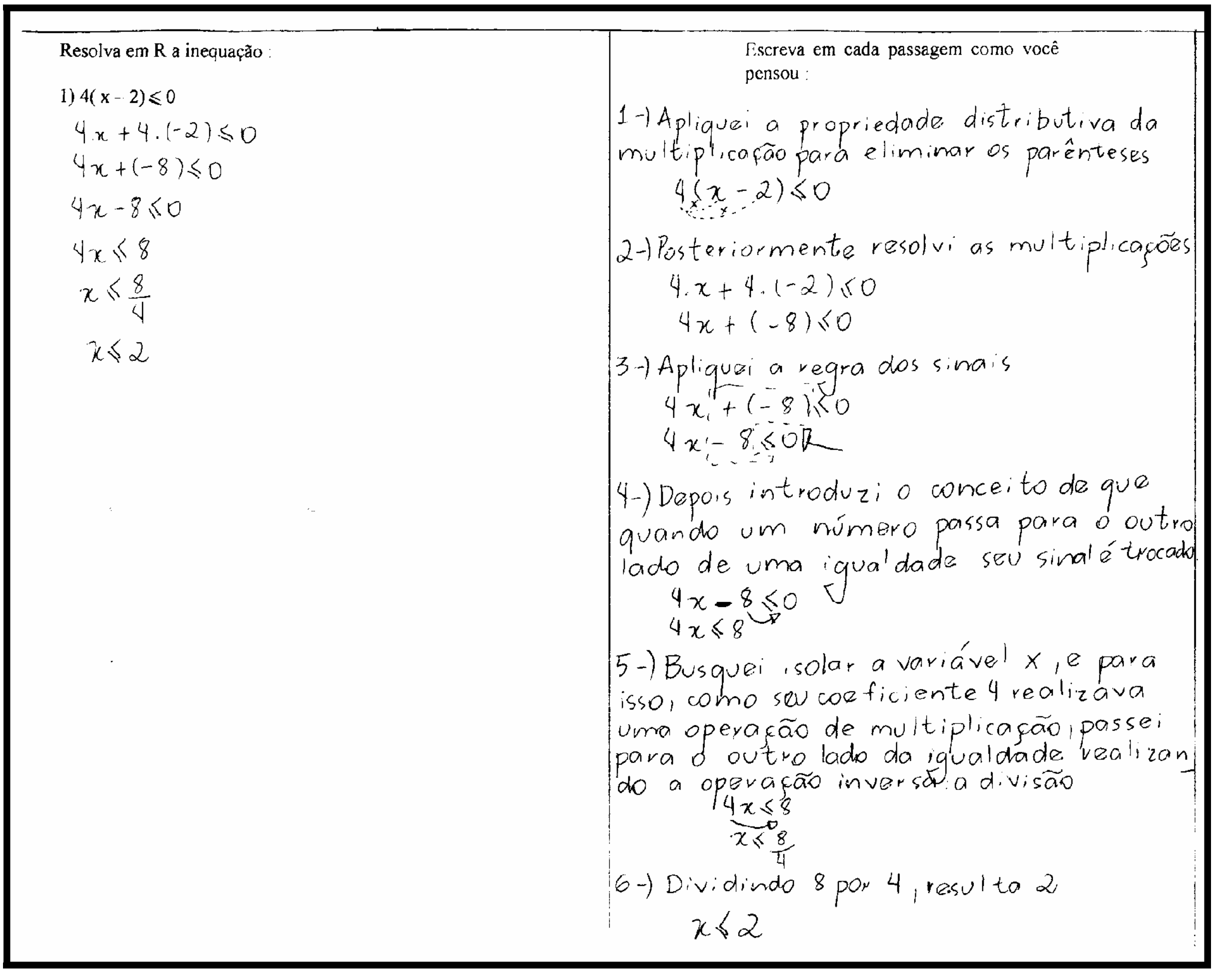
Nº	Inequação	Nº Alunos	PDMA	OM	CD	Respostas em Branco
1	$4(x-2)\leq 0$	30	16	0	0	0
2	$-4x+8\geq 0$	30	0	13	0	0
3	$(x-2)(2x+4)\leq 0$	30	20	0	0	1
4	$(x-2)(2x+4)\leq 2$	30	14	0	0	6
5	$\frac{5}{(x-2)} > 0$	25	0	0	6	4
6	$\frac{5}{(x-2)} > 5$	25	5	0	3	0
7	$(x-1)(x^2-4)>0$	25	3	0	0	1

Como se pode constatar, o emprego de uma determinada propriedade ou conceito depende do tipo de inequação proposta. Inequações apresentadas em forma fatorada, como as inequações 1, 3, 4 e 7, induziram os alunos ao uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (PDMA). Inequações racionais, como a 5 e a 6, levaram alguns alunos a considerar a impossibilidade da divisão por zero, ou seja, levaram em consideração o conceito da divisão (CD).

Uma inequação, como a 2 por exemplo, na qual o coeficiente da variável “x” é negativo, levou os alunos, ao final da resolução, a multiplicarem por -1 ambos os membros da inequação e inverterem o sentido da desigualdade, usando nesse caso a propriedade (OM’), decorrente da propriedade da compatibilidade da relação de ordem com a multiplicação (OM).

Afastando-nos um pouco dessa visão panorâmica, passaremos agora a focar nossa atenção em cada inequação em particular, exibindo alguns protocolos significativos, tecendo alguns comentários.

Iniciando pela inequação 1, dos 30 alunos que resolveram, 16 deles (53,3%) explicitaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (PDMA). Dentre os 16 protocolos mencionados, apresentamos a seguir um protocolo que apresenta de forma evidente o emprego da citada propriedade.



Resolva em R a inequação :

1) $4(x - 2) \leq 0$

$4x + 4.(-2) \leq 0$

$4x + (-8) \leq 0$

$4x - 8 \leq 0$

$4x \leq 8$

$x \leq \frac{8}{4}$

$x \leq 2$

Escreva em cada passagem como você pensou :

1-) Apliquei a propriedade distributiva da multiplicação para eliminar os parênteses

$4(x - 2) \leq 0$

2-) Posteriormente resolvi as multiplicações

$4.x + 4.(-2) \leq 0$

$4x + (-8) \leq 0$

3-) Apliquei a regra dos sinais

$4x + (-8) \leq 0$

$4x - 8 \leq 0$

4-) Depois introduzi o conceito de que quando um número passa para o outro lado de uma igualdade seu sinal é trocado

$4x - 8 \leq 0$

$4x \leq 8$

5-) Busquei isolar a variável x, e para isso, como seu coeficiente 4 realizava uma operação de multiplicação, passei para o outro lado da igualdade realizando a operação inversa a divisão

$4x \leq 8$

$x \leq \frac{8}{4}$

6-) Dividindo 8 por 4, resulto 2

$x \leq 2$

Figura 41 – Explicitação da propriedade (PDMA).

Mesmo explicitando a propriedade acima (PDMA) ele não resolve inteiramente a inequação apoiando-se em propriedades e conceitos, o aluno mescla uso de técnicas e propriedades e apresenta certas confusões conceituais conforme mostra nas justificativas 4 e 5, nas quais escreve:

"Depois introduzi o conceito de que quando um número passa para o outro lado de uma igualdade seu sinal é trocado" e "Busquei isolar a variável x, e para isso, como seu coeficiente 4 realizava uma operação de multiplicação, passei para o outro lado da igualdade realizando a operação inversa a divisão", (grifos nossos).

Nos outros 15 protocolos os alunos mencionaram explicitamente a propriedade distributiva (PDMA), mas na maior parte da resolução apoiaram-se no uso de técnicas apenas.

Em relação à inequação 2, dos 30 alunos que resolveram, apenas 13 (43,3%) explicitaram a propriedade (OM'), decorrente da propriedade da compatibilidade da relação de ordem com a multiplicação (OM). O protocolo a seguir é um exemplo dessa categoria.

Resolva em R a inequação	Escreva em cada passagem como você pensou :
2) $-4x + 8 \geqslant 0$	
• $-4x \geqslant -8$	• Passei o 8 para o outro lado invertendo o sinal
• $4x \leqslant 8$	• Tirei o sinal negativo, já que o 4x não pode ser negativo , multiplicando os números por -1, também inverte o sinal de maior, passando a ficar menor que
• $x \leqslant \frac{8}{4}$	• O 4 é passado para o outro lado, dividindo o 8, já que o 4 estava multiplicando a incógnita.
• $x \leqslant 2$	• fiz a divisão e achei o resultado.

Figura 42 – Explicitação da propriedade (OM').

O aluno usou implicitamente a propriedade citada (OM') ao escrever:

"...Multiplicando os números [membros] por -1, também inverte o sinal de maior, passando a ficar menor que", (grifos nossos).

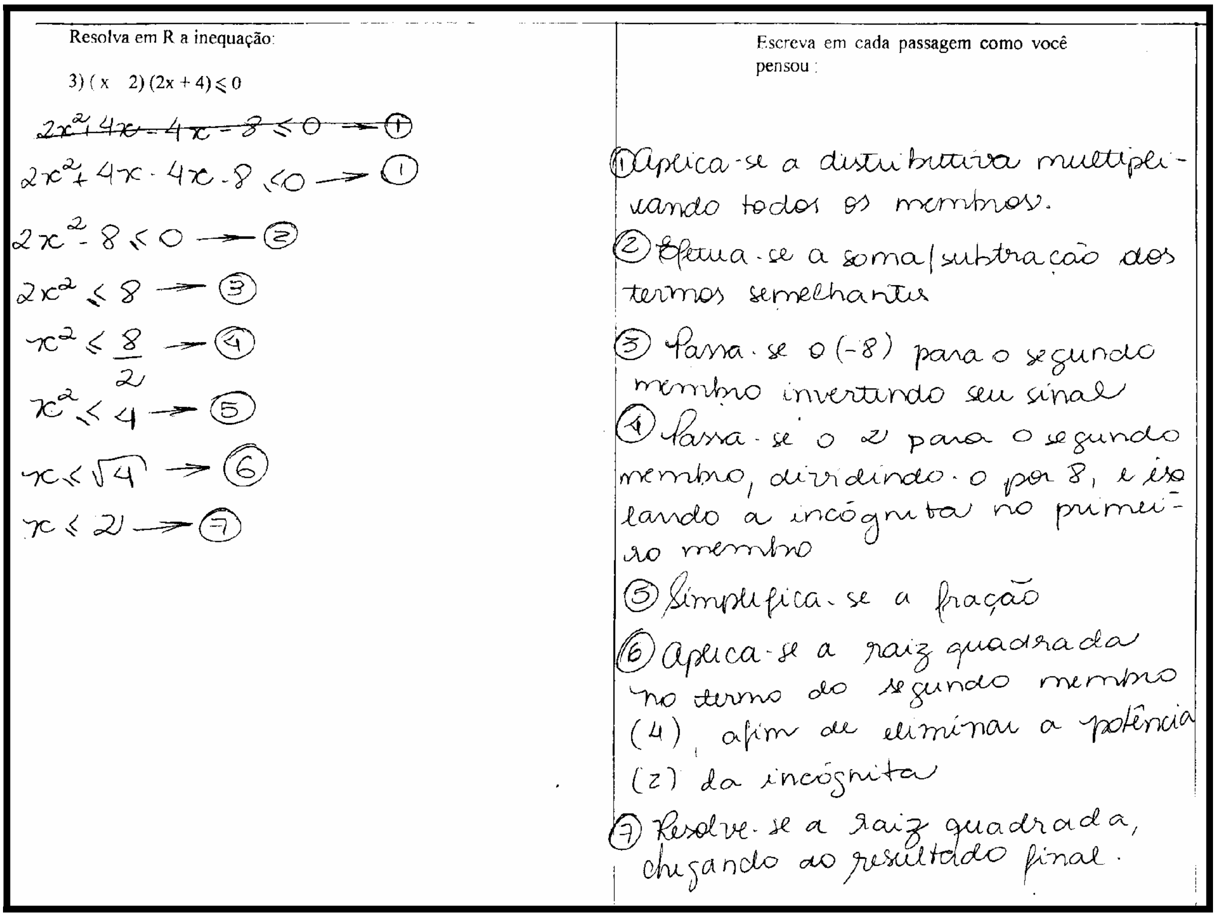
Pois apesar de explicitar parte dessa propriedade, o aluno apresenta graves confusões sobre desigualdades e, conseqüentemente, sobre essa propriedade quando escreve :

"tirei o sinal negativo já que 4x não pode ser negativo"(grifo nosso).

Também no restante da resolução se apoiou na utilização de técnicas, o mesmo valendo para os demais 12 protocolos.

Quanto à inequação 3, dos 29 alunos que resolveram 20 deles (69,0%) explicitaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (PDMA).

A seguir, mostramos um protocolo com o uso da citada propriedade.



Resolva em R a inequação:

3) (x 2) (2x + 4) $\leq$ 0

$\cancel{2x^2+4x-4x-8\leq 0} \rightarrow 1$

$2x^2+4x \cdot 4x - 8 \leq 0 \rightarrow 1$

$2x^2 - 8 \leq 0 \rightarrow 2$

$2x^2 \leq 8 \rightarrow 3$

$x^2 \leq \frac{8}{2} \rightarrow 4$

$x^2 \leq 4 \rightarrow 5$

$x \leq \sqrt{4} \rightarrow 6$

$x \leq 2 \rightarrow 7$

Escreva em cada passagem como você pensou:

1 Aplica-se a distributiva multiplicando todos os membros.

2 Efetua-se a soma/subtração dos termos semelhantes

3 Passa-se o (-8) para o segundo membro invertendo seu sinal

4 Passa-se o 2 para o segundo membro, dividindo-o por 8, e isolando a incógnita no primeiro membro

5 Simplifica-se a fração

6 Aplica-se a raiz quadrada no termo do segundo membro (4), afim de eliminar a potência (2) da incógnita

7 Resolve-se a raiz quadrada, chegando ao resultado final.

Figura 43 – Explicitação da propriedade (PDMA).

Verificamos, como nesse protocolo, que os demais alunos (19), apesar de explicitarem a propriedade em questão, na maior parte da resolução se apoiaram no uso de técnicas.

Dos 24 alunos que resolveram a inequação 4, um total de 14 alunos (58,3%) explicitaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (PDMA).

Destacamos a seguir um dos 14 protocolos no qual o aluno usou a citada propriedade.

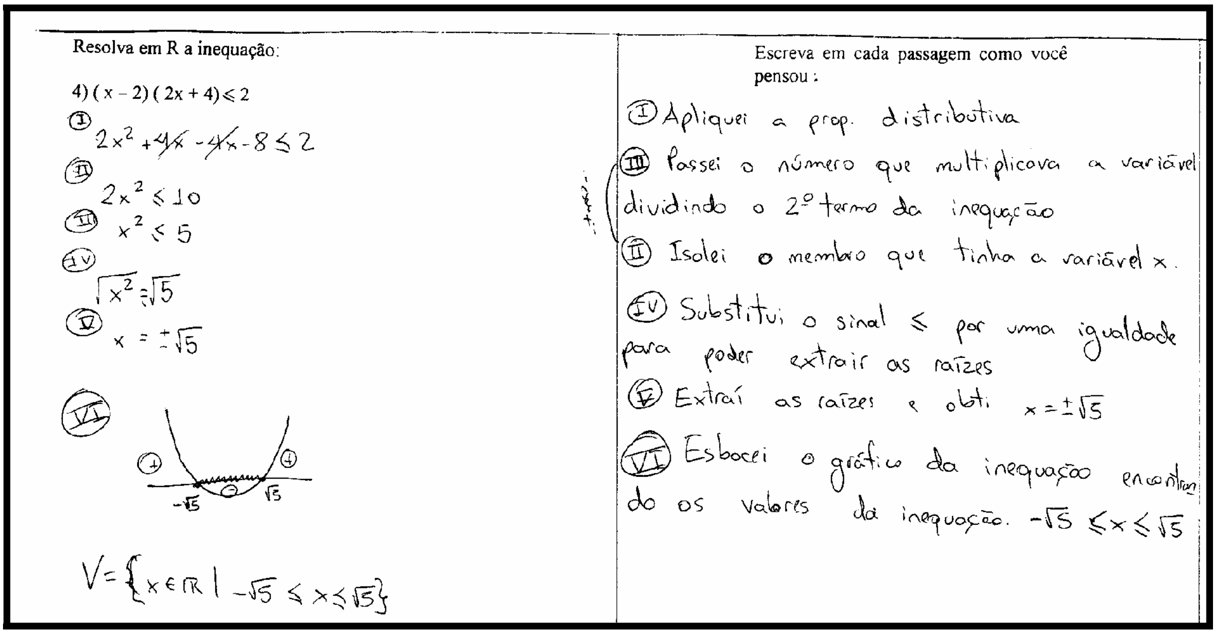
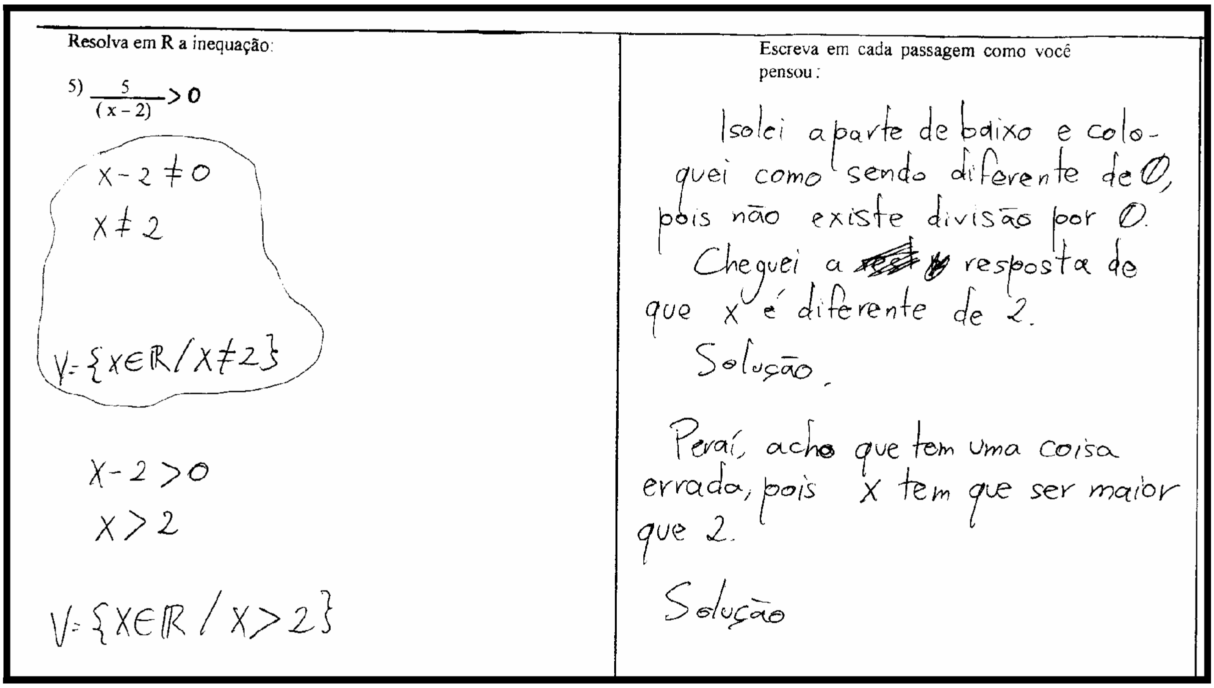


Figura 44 – Explicitação da propriedade (PDMA).

Como podemos observar, o aluno utiliza a referida propriedade, porém, no restante da resolução, ele se refere somente ao uso de técnicas. Esses comentários valem para os demais 13 protocolos.

Quanto à inequação 5, constatamos que dos 21 alunos que resolveram, apenas 6 alunos (28,6%) explicitaram a impossibilidade da divisão por zero, assim como ilustra o seguinte protocolo.



Resolva em R a inequação:

5) $\frac{5}{(x-2)} > 0$

$x - 2 \neq 0$

$x \neq 2$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\}$

$x - 2 > 0$

$x > 2$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x > 2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

Isolei a parte de baixo e coloquei como sendo diferente de 0, pois não existe divisão por 0. Cheguei a ~~rest~~ resposta de que x é diferente de 2.

Solução.

Peraí, acho que tem uma coisa errada, pois x tem que ser maior que 2.

Solução

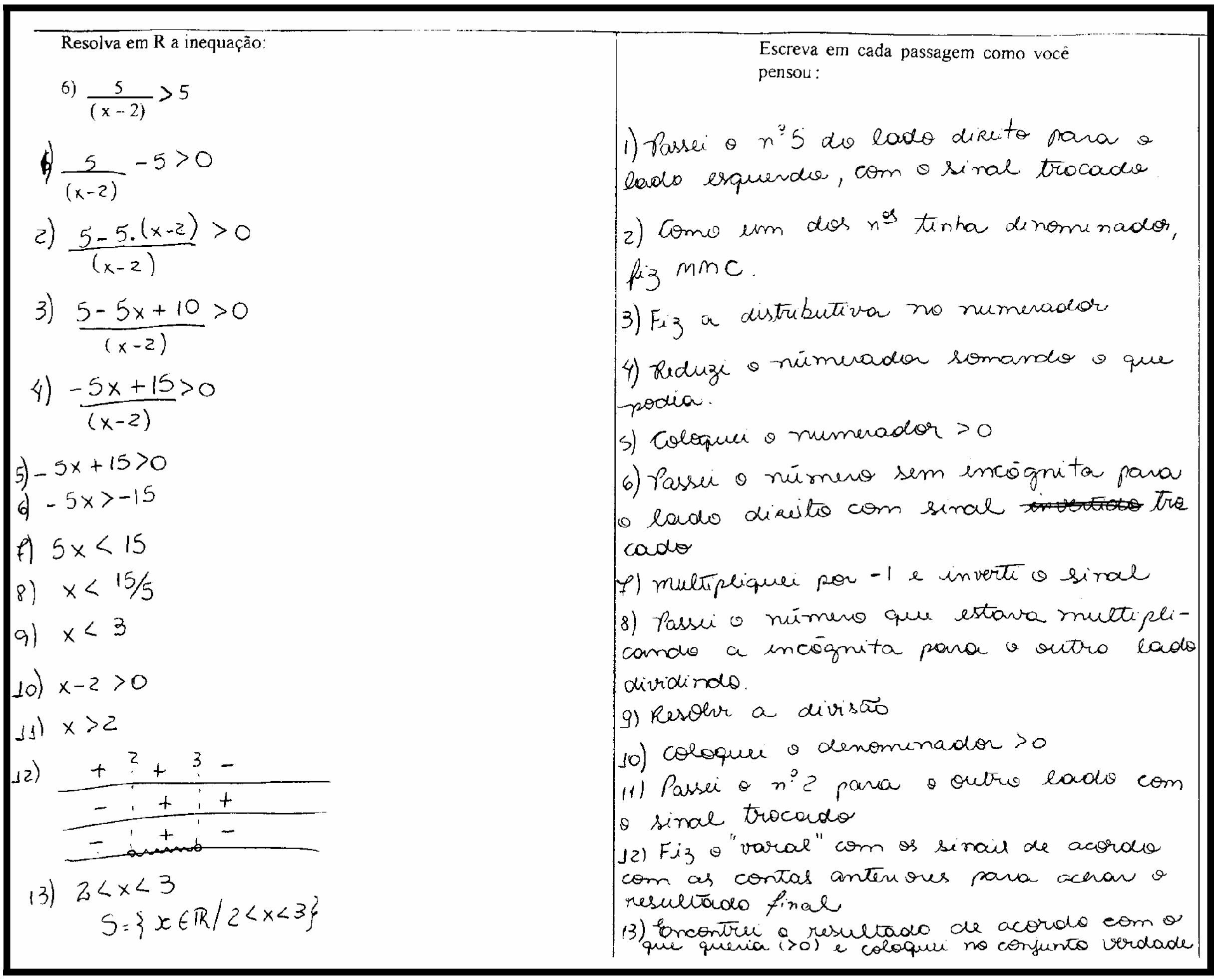
Figura 45 – Explicitação da impossibilidade da divisão por zero (CD).

O uso correto da condição sobre o conceito foi explicitado pelo aluno ao escrever.

"isolei a parte de baixo e coloquei como sendo diferente de 0 [zero], pois não existe divisão por 0 [zero]."

Assim como nesse protocolo, também nos outros 5, os alunos fizeram uso de técnicas no restante da resolução.

Quanto à inequação 6, dos 25 alunos que resolveram, cerca de 5 alunos (20,0%) explicitaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (PDMA), tal como mostrado no seguinte protocolo:


Resolva em R a inequação:

6) $\frac{5}{(x-2)} > 5$

1) $\frac{5}{(x-2)} - 5 > 0$

2) $\frac{5 - 5.(x-2)}{(x-2)} > 0$

3) $\frac{5 - 5x + 10}{(x-2)} > 0$

4) $\frac{-5x + 15}{(x-2)} > 0$

5) $-5x + 15 > 0$

6) $-5x > -15$

7) $5x < 15$

8) $x < 15/5$

9) $x < 3$

10) $x - 2 > 0$

11) $x > 2$

12) + 2 + 3 −
− + +
− + −

13) $2 < x < 3$
$S = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

1) Passei o nº 5 do lado direito para o lado esquerdo, com o sinal trocado
2) Como um dos nºs tinha denominador, fiz MMC.
3) Fiz a distributiva no numerador
4) Reduzi o numerador somando o que podia.
5) Coloquei o numerador > 0
6) Passei o número sem incógnita para o lado direito com sinal ~~invertido~~ trocado
7) multipliquei por -1 e inverti o sinal
8) Passei o número que estava multiplicando a incógnita para o outro lado dividindo.
9) Resolvi a divisão
10) Coloquei o denominador > 0
11) Passei o nº 2 para o outro lado com o sinal trocado
12) Fiz o "varal" com os sinais de acordo com as contas anteriores para achar o resultado final
13) Encontrei o resultado de acordo com o que queria (>0) e coloquei no conjunto verdade

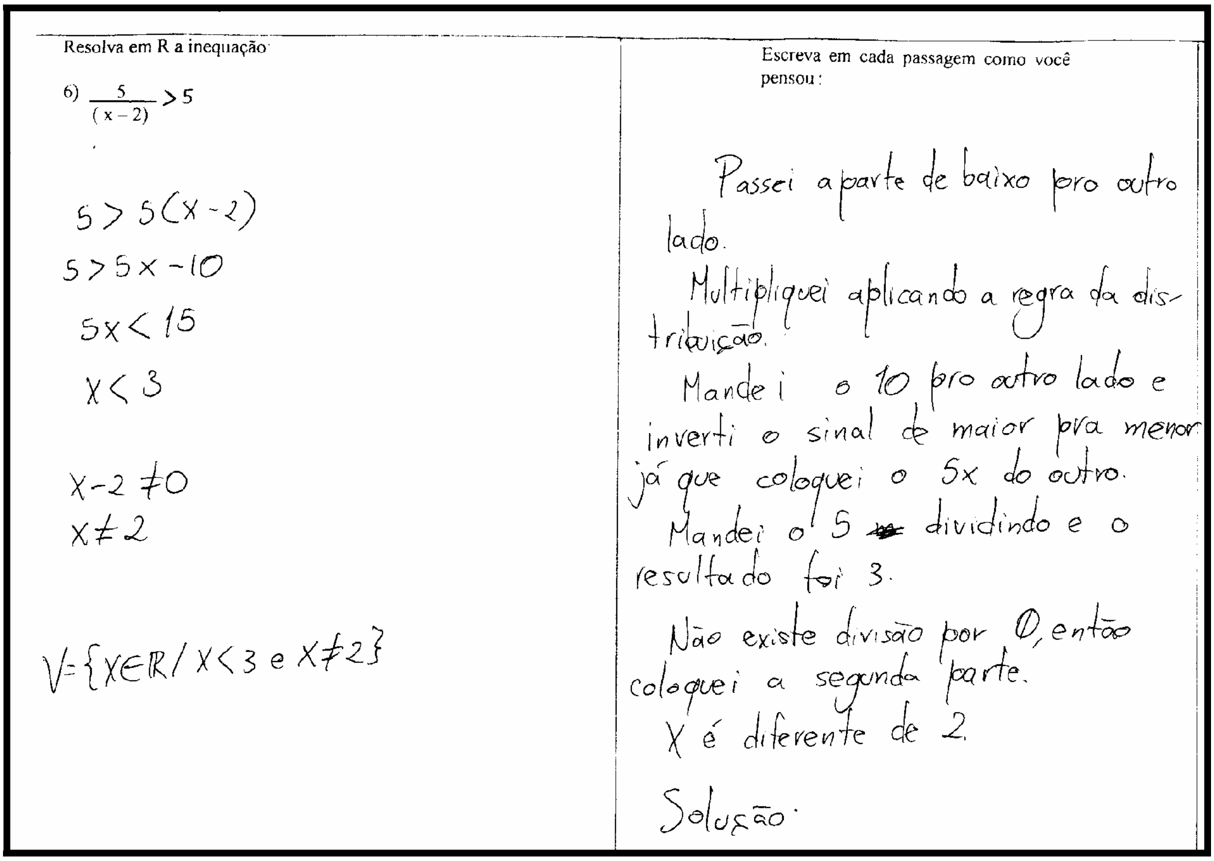
Figura 46 – Explicitação da propriedade (PDMA).

Em sua justificativa 3:

“Fiz a distributiva no numerador”

Ele explicita a referida propriedade. Entretanto, em inúmeras oportunidades, o aluno se apóia no uso de técnicas, o mesmo ocorreu com os outros 4 protocolos.

Dos 25 alunos que resolveram, 3 deles explicitaram a condição sobre o conceito da divisão (CD) referente à impossibilidade da divisão por zero, conforme o protocolo seguinte:



Resolva em R a inequação

6) $\frac{5}{(x-2)} > 5$

$5 > 5(x-2)$

$5 > 5x - 10$

$5x < 15$

$x < 3$

$x - 2 \neq 0$

$x \neq 2$

$V = \{x \in \mathbb{R} / x < 3 \text{ e } x \neq 2\}$

Escreva em cada passagem como você pensou:

Passei a parte de baixo pro outro lado.

Multipliquei aplicando a regra da dis-tribuição.

Mandei o 10 pro outro lado e inverti o sinal de maior pra menor já que coloquei o 5x do outro.

Mandei o 5 dividindo e o resultado foi 3.

Não existe divisão por 0, então coloquei a segunda parte.

X é diferente de 2.

Solução:

Figura 47 – Explicitação da impossibilidade da divisão por zero (CD).

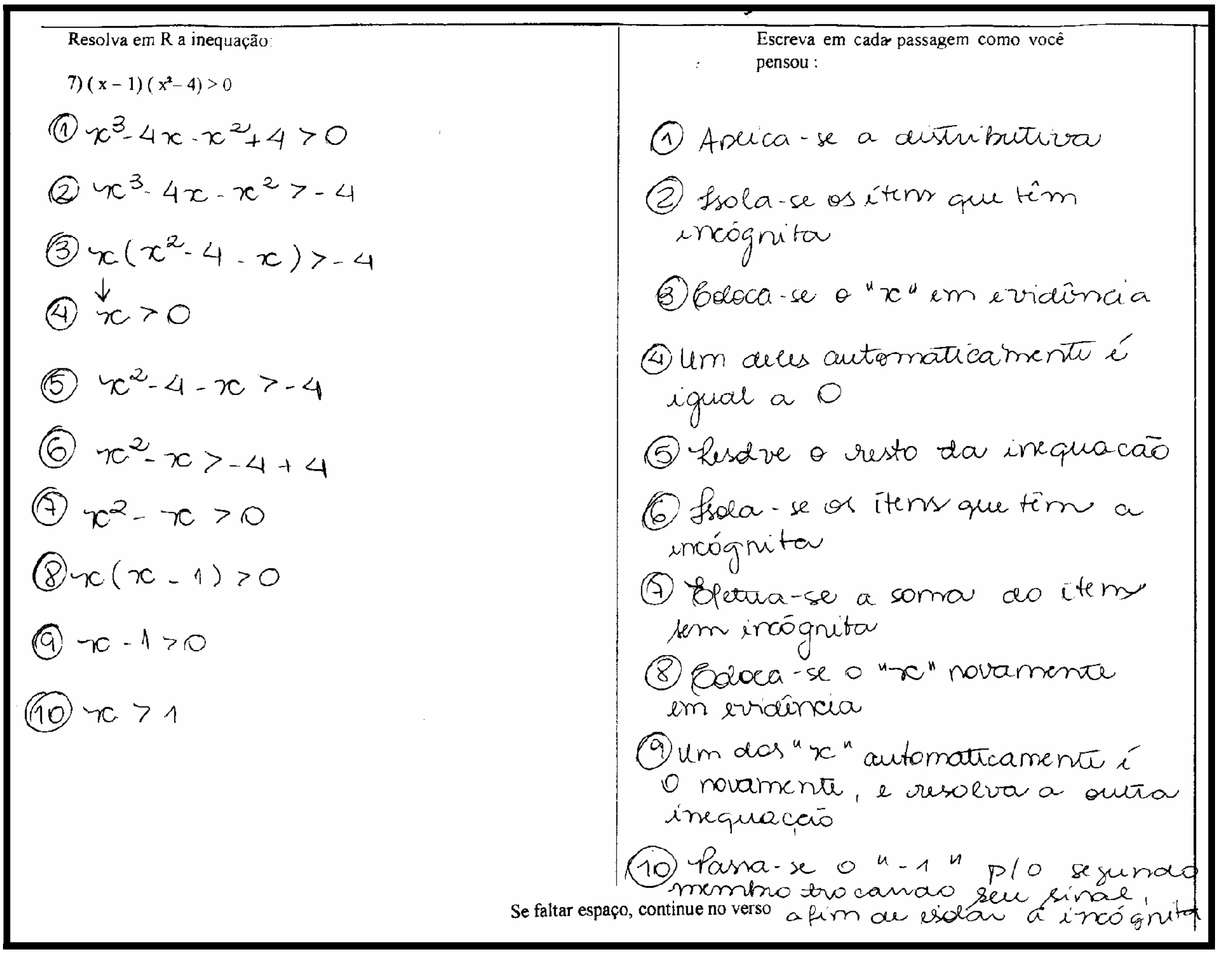
O aluno explicita a citada condição sobre o conceito em suas justificativas ao escrever :

“Não existe divisão por 0[zero]”

Porém, na maior parte, predomina o uso de técnicas, assim como ocorreu nos 2 outros protocolos dessa categoria.

Finalmente, em relação à inequação 7, dos 24 alunos que resolveram, apenas 3 deles (12,5%) explicitaram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (PDMA).

Apresentamos a seguir um protocolo como exemplo dessa categoria.



Resolva em R a inequação:

7) $(x-1)(x^2-4) > 0$

(1) $x^3 - 4x - x^2 + 4 > 0$

(2) $x^3 - 4x - x^2 > -4$

(3) $x(x^2 - 4 - x) > -4$

(4) $x > 0$

(5) $x^2 - 4 - x > -4$

(6) $x^2 - x > -4 + 4$

(7) $x^2 - x > 0$

(8) $x(x - 1) > 0$

(9) $x - 1 > 0$

(10) $x > 1$

Escreva em cada passagem como você pensou:

(1) Aplica-se a distributiva

(2) Isola-se os itens que têm incógnita

(3) Coloca-se o "x" em evidência

(4) Um deles automaticamente é igual a 0

(5) Resolve o resto da inequação

(6) Isola-se os itens que têm a incógnita

(7) Efetua-se a soma dos itens sem incógnita

(8) Coloca-se o "x" novamente em evidência

(9) Um dos "x" automaticamente é 0 novamente, e resolve a outra inequação

(10) Passa-se o "-1" p/ o segundo membro trocando seu sinal, a fim de isolar a incógnita

Se faltar espaço, continue no verso

Figura 48 – Explicitação da propriedade (PDMA).

Observando o protocolo, notamos que o aluno explicita a referida propriedade, porém, no restante da resolução, existe o predomínio de técnicas. Em relação aos outros 2 protocolos da categoria ocorreu o mesmo fato.

Em síntese, ocorreram durante a pesquisa 80 oportunidades nas quais os alunos explicitaram propriedades e conceitos e isso corresponde a 80 protocolos. Sendo 183 o total de protocolos em que os alunos resolveram as inequações, constatamos que em termos percentuais ocorreram explicitações de usos de conceitos e propriedades em 43,7% dos protocolos válidos (nos quais os alunos resolveram as inequações, não as deixando em branco).

Conforme nossas constatações, em todos os 80 protocolos houve predominância do uso de técnicas em detrimento da referência a conceitos e propriedades por parte dos alunos.

V – CONCLUSÕES FINAIS

Após analisarmos os resultados obtidos em nosso diagnóstico, pudemos chegar a algumas conclusões a respeito de nossas questões de pesquisa.

Focalizando nossa atenção nas justificativas fornecidas pelos alunos durante as resoluções das inequações, verificamos que em geral elas se fundamentam em técnicas, apesar de surgirem, em pequena proporção, menções relativas a conceitos e propriedades matemáticas.

Constatamos uma fraca tendência à explicitação de conceitos e propriedades, pois poucos deles são mencionados e em apenas 43,7% dos protocolos válidos. Verificamos, entretanto, que, apesar de esses alunos explicitarem conceitos e propriedades, no restante das respectivas resoluções eles se apoiaram quase que exclusivamente em técnicas.

Podemos então concluir que entre os estudantes do Ensino Médio investigados, existe forte tendência à fundamentação em técnicas de resolução de inequações, em comparação à de conceitos e propriedades matemáticas, podendo isto indicar que, para esses alunos, o processo ensino-aprendizagem de inequações privilegiou o aspecto algorítmico em detrimento do aspecto conceitual.

O tipo de técnica, mencionada ou descrita pelo aluno durante o processo resolutivo dependeu da inequação proposta.

Em inequações como as de números 1, 2 e 5, que são passíveis de serem resolvidas pelo emprego de técnica algébrica (TA), a quantidade de protocolos que confirmava seu uso, em suas justificativas, representou cerca de 96,7%, 96,7% e 81,0%, respectivamente, de seus protocolos válidos. Pouco espaço ficou reservado ao uso de outra técnica; entretanto, 19,0% dos protocolos válidos da inequação 5 continham a técnica algébrica com tabela de sinais (TAS).

As inequações 3, 4 e 6 não foram predominantemente resolvidas com o uso da técnica algébrica (TA) pelos sujeitos investigados em nível de Ensino Médio, sendo que a quantidade de protocolos nos quais os alunos explicitaram em suas justificativas o emprego da referida técnica, foi relativamente alta, cerca de 58,6%, 54,2% e 64,0%, respectivamente. Em relação a essas inequações, uma escolha mais econômica para se obter soluções corretas seria o uso da técnica algébrica com tabela de sinais (TAS). Entretanto, apenas 41,4%, 29,2% e 32,0%, respectivamente, dos alunos referiram em suas justificativas o emprego dessa técnica.

Interessa observar, em relação à inequação 4, que cerca de 16,7% dos alunos mencionaram em suas justificativas o emprego de outras técnicas como algumas que mesclavam uso de (TAS) com traços de esboços de gráficos de funções não descritas por Assude (2000).

Em relação à inequação 7, o percentual de protocolos referendando emprego da técnica algébrica (TA) em suas justificativas foi menor em comparação com as outras inequações. No caso foi de apenas 29,2%, o que provavelmente se deveu ao fato de o aluno, ao tentar usar a técnica algébrica (TA), se deparar com uma inequação do 3º grau, que não tinha tido contato na escola. Cerca de 45,8% dos protocolos válidos continham a técnica algébrica com tabela de sinais (TAS) confirmada em suas justificativas. Cerca de 25,0% dos protocolos válidos continham em suas justificativas um outro tipo de técnica, como ocorrera com a inequação 4, não especificado em Assude (2000).

Em linhas gerais, notamos uma forte tendência dos alunos mencionarem em suas justificativas o uso da técnica algébrica (TA) em comparação com outro tipo de técnica, mesmo nos casos em que seu uso não é o mais econômico.

Em relação a conceitos e propriedades matemáticas mencionados nas justificativas, pudemos observar que o emprego explícito de uma dada propriedade ou conceito relacionou-se também à forma na qual a inequação foi proposta. Inequações propostas na forma fatorada levaram os alunos mencionarem a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (PDMA) em suas justificativas. Inequações racionais (como a 5 e 6) levaram os alunos a mencionarem a condição de existência da divisão de números reais. Na inequação 2, o fato do coeficiente da variável “x” ser diferente de um (1) levou os alunos a mencionarem a propriedade OM (ou OM’) descritas em nossa análise *a priori*.

Focalizamos agora nossa atenção sobre os recursos que os alunos lançaram mão nas resoluções. Tínhamos previsto que os domínios que provavelmente seriam empregados com recursos eram o algébrico (DA), o das representações gráficas (DRG) e o numérico (DN). Após a aplicação da pesquisa, constatamos, contudo, que em 69,4% dos protocolos válidos, os alunos usaram como recurso apenas o domínio algébrico (DA).

De acordo com a entrevista concedida pelo professor que ministrou o tópico inequações aos alunos investigados, poderíamos esperar que ocorresse em alguns casos a interação entre domínios, particularmente a interação entre o domínio algébrico e o das representações gráficas (DA+DRG), o que de fato ocorreu, pois em 28,4% dos protocolos válidos os alunos usaram como recurso a citada interação.A interação entre domínios onde comparece o domínio numérico (DN) surge apenas em 2,2% dos protocolos válidos, conforme era previsto na entrevista com o professor.

Em relação aos erros mais freqüentes cometidos pelos alunos durante as resoluções, verificamos inicialmente que o percentual de respostas incorretas varia de inequação para inequação, o que nos leva a considerar as inequações como tendo graus de dificuldade diferentes para os alunos.

Os erros mais freqüentes também variam conforme a inequação proposta. Praticamente não se cometeu erro na inequação 1, porém na inequação 2 o erro mais freqüente (77,8% dos erros cometidos), foi não utilizar corretamente a propriedade OM' (descrita em nossa análise *a priori*), podendo isso revelar que os alunos desconhecem a citada propriedade ou que eles atribuem o mesmo significado aos símbolos $\geq$ e $=$, provavelmente devido ao processo ensino-aprendizagem centrado em técnicas e não em conceitos e propriedades matemáticas, levando muitas vezes a resolver uma inequação com os mesmos procedimentos usados para equações.

Na inequação 3 (que é do 2º grau) o erro mais freqüente (68,2% dos erros cometidos) foi gerado por "conexões sem sentido com raízes quadradas" conforme Tsamir, Almog e Tirosh (1998, p.135), podendo isso revelar conhecimentos insuficientes relativos à função quadrática ou ainda que os alunos atribuem o mesmo significado aos símbolos $\leq$ e $=$, pois o erro citado é do tipo: $x^2 \leq 4 \;\Rightarrow\; x \leq \pm 2$.

Em relação à inequação 4, a maioria dos alunos que erraram (64,7% dos erros cometidos) o fizeram semelhantemente ao caso da inequação 3 , as "Conexões sem sentido com raízes quadradas", conforme Tsamir, Almog e Tirosh (1998, p.135). Inicialmente, os alunos confundiram procedimentos de resolução de inequações do 2º grau com os de inequações do 1º grau e, assim, vale para a inequação 4 o mesmo comentário relativo à inequação 3.

Tanto na inequação 5 como na inequação 6, o tipo de erro mais freqüente (75,0% dos erros na inequação 5 e 88,2% dos erros na inequação 6) foi "multiplicar ou dividir por fatores que não são necessariamente positivos", conforme Tsamir, Almog e Tirosh (1998, p.134), em cujas resoluções eles multiplicaram por (x-2) , sem se importar com seu sinal e não alteraram o sentido da desigualdade (<). Esse procedimento dos alunos pode ser decorrente de desconhecimento da propriedade OM ou OM', descritas em nossa análise a priori, ou revelar que atribuem o mesmo significado aos símbolos < e = , ou ainda ser conseqüência de confusões a respeito da relação "menor que" o que inclusive tem sido objeto de outras pesquisas em andamento no grupo Educação Algébrica da PUC-SP.

Consideramos que essas deficiências sejam geradas provavelmente por um ensino centrado em técnicas e não em conceitos. Um outro fato, relativo às inequações 5 e 6 que indica isso, foi que a maioria dos alunos não se preocupou com o fato do denominador não poder ser nulo, o que é um erro do tipo "dificuldades com valores excluidos", conforme Tsamir, Almog e Tirosh (1998, p.134). Apesar dessa negligência não ter produzido soluções incorretas, consideramos que isso poderia ter ocorrido se tivéssemos proposto outras inequações apropriadas para confirmar nossa suposição e isso deverá ser feito em outras pesquisas de nosso grupo.

Finalmente, na inequação 7 o erro mais freqüente (70,0% do total de erros) trata-se na verdade de uma seqüência de dois erros. O primeiro é classificado em Tsamir, Almog e Tirosh (1998, p.135) como "dedução incorreta de sinais de fatores a partir do sinal do produto/quociente" e, na seqüência, o segundo erro é classificado em Tsamir, Almog e Tirosh (1998, p.135) como “conexões sem sentido com raízes quadradas”. Os erros descritos para a inequação 7, provavelmente devem ter sido gerados por conhecimentos insuficientes em relação à função quadrática , por confusões relativas à resolução de equações e inequações (resolverem inequações como se fossem equações), entre outros fatores a serem investigados.

A instituição que nos serviu de campo de pesquisa, durante o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, tem por tradição a tendência de trabalhar com tarefas na forma de exercícios propostos, similares às apresentadas por Gallo e Battù (2000), e por isso propusemos o mesmo tipo de tarefa.

Nessa instituição, constatamos em nossa pesquisa diagnóstica uma tendência acentuada ao uso e explicitação de técnicas, em vez de propriedades e conceitos matemáticos, durante as resoluções das inequações, bem como uma tendência ao uso de procedimentos de resolução válidos para equações, como se fossem sempre válidos para inequações. Restou-nos então uma questão: “Será que a realização de uma seqüência didática, fundamentada na dialética ferramenta-objeto de Douady, priorizando compreensão de conceitos e propriedades matemáticas em vez de técnicas, durante o processo ensino-aprendizagem de inequações, poderia reverter as duas tendências citadas?”. Três pesquisas de nosso grupo investigam seqüências didáticas com esse propósito.

Nossa pesquisa foi desenvolvida num contexto escolar em que a prioridade é em relação a técnicas e não em relação a conceitos e propriedades matemáticas e, após colhermos e analisarmos os dados, concluímos que provavelmente uma das origens das dificuldades dos alunos, no trato com inequações, é que o processo ensino-aprendizagem dos tópicos equações e inequações privilegiou o aspecto algorítmico (técnicas) em detrimento do aspecto conceitual (conceitos, propriedades, princípios,...)

Como contribuição de nossa pesquisa para o ensino, gostaríamos de sugerir, em relação à abordagem do tópico “inequações”, que se trabalhe com equações e inequações simultaneamente (mesmo que antes disso tenha trabalhado seqüencialmente com equações e depois com inequações), fazendo um paralelo na tentativa de evitar analogias inapropriadas entre os procedimentos de resolução desses dois tópicos matemáticos.

Não menos importante é nossa sugestão no sentido de priorizar a abordagem das inequações, durante o processo ensino-aprendizagem, de modo a envolver dois ou mais domínios (Douady) durante a sua resolução e, também, a utilização de problemas referenciados em áreas como: Administração, Economia, Física, Química, Matemática Financeira, Biologia, Geometria, etc. em que o uso das inequações se faz necessário.

Nesse sentido sugerimos também novas pesquisas sobre o tema, nas quais se formulem tarefas de modo a envolver outros domínios, além daqueles constantes em nossa investigação, tais como o domínio das grandezas (usando problemas de Física, por exemplo), domínio dos valores (usando problemas de Matemática Financeira, por exemplo), domínio geométrico (usando problemas de Geometria, por exemplo), etc.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Informação e documentação:** Apresentação de citações em documentos, NBR-10520. Rio de Janeiro, 2002.7p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Informação e documentação:** Apresentação de trabalhos acadêmicos, NBR-14724. Rio de Janeiro, 2002. 10p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Informação e documentação:** Referências-Elaboração, NBR-6023. Rios de Janeiro, 2002.25p.

ASSUDE, T. De l'usage de "techniques faibles" et "techniques fortes" dans l'organisation du curriculum. In: SÉMINAIRE FRANCO-ITALIEN DE DIDACTIQUE DE L'ALGÈBRE-SFIDA, 9-12.,2000, Nice. **Actes des séminaires.** Nice: IREM DE NICE, 2000. v.3, p.9-14.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

______________. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio. Brasília: ME/SEMT, 1999. 364p.

COELHO, S.P.; MACHADO, S.D.A.; MARANHÃO, M.C.S.A..Qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática ? In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2., 2003, Santos.**Anais eletrônicos...** Santos: SBEM, 2003.Grupo de Trabalho: Formação de professores que ensinam matemática. CD-ROM.

DOUADY, R**.** Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en didactique des mathématiques**, Paris, v.7, n.2, p.5-31, 1986.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M.J..Aires de surfaces planes. **Petit X**, Paris, n.6, p.5-33, 1984.

FIORENTINI, D. Relação de teses e dissertações de mestrado, doutorado ou livre docência produzidas e defendidas no Brasil e que tratam de Educação Matemática no período de 1971 a 1990. **Zetetiké**, Campinas: CEMPEM-FE/UNICAMP, v.1, n.1, março, 1993.

_______________. Teses e dissertações de Mestrado ou Doutorado, relativas à Educação Matemática, produzidas e defendidas no Brasil no período de 1991 a 1995. **Zetetiké**, Campinas: CEMPEM-FE/UNICAMP, n.4, 1995a.

_______________.Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas: CEMPEM-FE/UNICAMP, ano 3, p.1-38, 1995b.

_______________. Teses e dissertações de Mestrado e Doutorado em Educação Matemática, produzidas no Brasil nos anos de 1996 e 1997. **Zetetiké**, Campinas: CEMPEM-FE/UNICAMP, n.8, 1997.

____________.Relação de Teses e Dissertações de Mestrado e Doutorado em Educação Matemática Produzidas no Brasil nos Anos de 1998 a 2001. **Zetetiké,** Campinas: CEMPEM-FE/UNICAMP, v.9, n. 15-16, Jan-Dez, 2001.

GALLO, E; BATTÚ, M.. Quali modelli e controlli intervengono lavorando su disequazioni ?. In: SEMINARIO FRANCO-ITALIANO DIDATTICA DELL'ALGEBRA-SFIDA, 9-12., 2000, Nice. **Actes des séminaires**. Nice: IREM DE NICE, 2000, v.3, p.25-35.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra.** Rio de Janeiro : IMPA, 1993, 226p, V.1.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em educação :** abordagens qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986. 99p.

MACHADO, A.S. **Matemática na escola do segundo grau**. São Paulo: Atual Editora, 1996, 332p, V.1.

MARANHÃO, M. C. S. A. **Uma engenharia didática para aprendizagem das concepções de tempo**. 1996. 426f. Tese (Doutorado em Psicologia da Educação)- Programa de Estudos Pós-graduados em Psicologia da Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1996.

___________. Dialética ferramenta-objeto. In: MACHADO, S. D. A . **Educação Matemática:** Uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999. p.115-134.

MARANHÃO, M. C. S. A.; MACHADO, S.D.A.; COELHO, S.P. Projeto: O que se entende por Álgebra? In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, Recife. **Anais eletrônicos**... Recife: UFPe, 2004. Mesa Redonda: Investigações da Educação Matemática e Ensino Fundamental. CD-ROM.

TRALDI JR, A. **Sistema de inequações do 1º grau:** uma abordagem do processo ensino-aprendizagem focando os registros de representações. 2002. 112f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

TSAMIR, P.; ALMOG, N.; TIROSH, D. Students' solutions of inequalities. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATEMATICS EDUCATION-PME, 22, 1998, Stellenbosch-South Africa. **Proceedings...**Stellenbosch: University of Stellenbosch, 1998. v.4, p.129-136.

ANEXOS

Resolva em R a inequação	Escreva em cada passagem como você pensou:	Código: Observação
1) $4(x-2) \leq 0$		

Resolva em R a inequação 2) $-4x + 8 \geq 0$	Escreva em cada passagem como você pensou:	Código: Observação

Resolva em R a inequação	Escreva em cada passagem como você pensou:	Código: Observação
3) $(x-2)\ (2x + 4) \leq 0$		

Resolva em R a inequação 4) $(x-2)(2x+4) \leq 2$	Escreva em cada passagem como você pensou:	Código: Observação

Resolva em R a inequação	Escreva em cada passagem como você pensou:	Código: Observação
5) $\dfrac{5}{(x-2)} > 0$		

Resolva em R a inequação	Escreva em cada passagem como você pensou:	Código: Observação
6) $\dfrac{5}{x-2} > 5$		

Resolva em R a inequação 7) $(x-1)\,(x^2-4) > 0$	Escreva em cada passagem como você pensou:	Código: Observação