

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Dissertação de Mestrado

VIOLAÇÃO DAS SIMETRIAS DE LORENTZ E *CPT* EM  
SISTEMAS DE CAMPOS ESCALARES

por

Marlon Nunes Barreto da Silva

João Pessoa - PB - Brasil

Julho, 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Marlon Nunes Barreto da Silva

VIOLAÇÃO DAS SIMETRIAS DE LORENTZ E *CPT* EM  
SISTEMAS DE CAMPOS ESCALARES

Dissertação de mestrado apresentada  
à Coordenação do Programa de Pós-  
graduação em Física da Universidade  
Federal da Paraíba como requisito parcial  
à obtenção do grau de mestre em Física

Orientador: Dionísio Bazeia Filho

João Pessoa - PB - Brasil

Julho, 2006

*Dedico este trabalho à minha família,  
meus amigos e ao Prof Zlatev. Aqueles,  
sem os quais, com certeza, não teria chegado até aqui.*

# Agradecimentos

Na minha opinião essa foi a parte mais difícil da confecção desse texto, afinal, tenho que agradecer corretamente a todos aqueles que me ajudaram durante esse período do mestrado. Primeiramente não poderia e nem devo negar toda honra e glória Àquele que me capacitou desde o início. Deus, muito obrigado por se importar comigo, tão pequeno e miserável que sou. Glórias a Ti.

Em seguida, devo dar meu 'muito obrigado' a minha família pelo apoio incondicional, paciência e carinho. Agradeço a Ele por ter me dado uma família tão maravilhosa. Devo agradecimento ao meu pai, Francisco, minha mãe, Eunice, ao "guri", Maykon e a Débora, minha namorada, pelas muitas orações que com certeza foram meus alicerces aqui em João Pessoa.

Agradeço ao meu orientador, Professor Dionísio Bazeia, pela orientação dedicada durante a execução do projeto de mestrado e pelos incentivos na busca pelo conhecimento.

Pela minha formação acadêmica aqui em João Pessoa, agradeço aos professores Valdir Bezerra, Maria Luiza Cescato, Carlos Pires, Dionísio Bazeia e Albert Petrov. Na minha vida acadêmica posso destacar quatro disciplinas como as melhores que já cursei. Na graduação cito Equações Diferenciais I, com a Professora (tia) Julieta,

Mecânica Quântica I, com meu ex-orientador e amigo Stoian Zlatev, cursos que me ajudaram muito e com certeza me ajudarão ainda. Aqui em João Pessoa agradeço ao professor Paulo Sérgio pela disciplina de Física de Partículas Elementares I, que além de ser um ótimo mestre se mostrou um ser humano incrível, sempre pronto a ajudar. Além dele, agradeço enormemente ao professor Carlos Galvão pelo excelente curso de Mecânica Quântica III que, sem desmerecer quaisquer das outras disciplinas que já tenha feito, foi o curso mais claro e excitante que já tive a oportunidade de fazer. À esses mestres sou muito grato.

Se há uma coisa que realmente posso me orgulhar de ter conquistado, durante esse período em João Pessoa, foi amizade de duas pessoas incríveis. Não pensei de descobrir aqui amigos tão verdadeiros. Aqueles que você pode parar para conversar seja de física, compartilhar suas vontades e sonhos ou mesmo desabafar nas horas em que a saudade da família e da namorada 'batem' com mais força. Muito obrigado Anibal e Carlos. Apesar de não tê-lo conquistado como amigo aqui em João Pessoa ele, com Carlos e Anibal, também escutou muito meus lamentos e dúvidas quanto ao futuro e por isso não poderia deixar de citá-lo e dar meu muito obrigado. Valeu mesmo negão, meu grande amigo Alyson. Agradeço também a Clélio que, com certeza, foi uma das pessoas que mais me ajudaram aqui em João Pessoa e que nunca cogitou em pedir nada em troca, realmente, um "cara" de caráter impecável.

Além desses grandes amigos que estavam comigo na luta na pós-graduação, aqui em João Pessoa, não posso deixar de lembrar e agradecer também aos meus grandes amigos da graduação e para sempre (Amém) Hilton e Tadeu. Mesmo não tendo contato direto sei que torceram muito por mim, além de me darem muito apoio nos momentos que precisei.

Gostaria de agradecer também aos alunos da 'Pós' que durante esse tempo aprendi a respeitar. Não posso citar todos, até mesmo porque não tive contato com todos eles, mas posso citar aqui alguns com os quais tive um contato mais

direto e que por pouco não se tornaram grandes amigos. São eles: o Drezão (André Lima), Clévim minerim (Cleverson Figueiras), o MIB (Grande Marcelo), o Óreia seca (Caio) e Alessandro.

Fica aqui também registrada a minha gratidão ao Prof. Dr. Cláudio Benedito Furtado, um exemplo de coordenador a ser seguido pois, em todas as oportunidades de encontros e na escola internacional que me interessei em participar, sempre procurou incentivar não só com o auxílio financeiro - que por se tratar de um estudante de mestrado é ainda mais admirável - mas também com palavras de "vá em frente".

Agradeço aos funcionários do Departamento de Física pelo auxílio nas várias que precisei. Também não poderia deixar de agradecer ao Sr. Mariano pela alegria com que recebe as pessoas que adentram sua cantina e pelas vezes que deixei alguns pastéis "no prego" quando a fome "apertava" depois das aulas do professor Paulo Sérgio.

E por último, agradeço ao CNPq pelo auxílio financeiro durante a execução do trabalho.

## RESUMO

Este trabalho trata do estudo da quebra da simetria de Lorentz (SL) e simetria  $CPT$  ( $SCPT$ ) em teorias de campos escalares que suportam estruturas de defeitos. Este estudo se torna relevante em virtude de que nos últimos anos a possibilidade das violações das SL e  $SCPT$  têm sido considerado real. Através de estudos teóricos, autores têm assumido tais simetrias como aproximações de outras simetrias em uma escala de energia maior. Primeiramente estudamos estruturas de defeitos num cenário sem a violações das SL e  $SCPT$ . Esse estudo preliminar compreende teorias com campos escalares reais e uma teoria tipo Wess-Zumino em que o campo escalar é complexo e composto por dois campos escalares reais. Realizamos este estudo afim de comparar os resultados entre a teoria sem a quebra das simetrias e a teoria com a violação. No caso de teorias com campos reais, primeiramente consideramos um modelo com um campo escalar e investigamos ondas viajantes que violam a invariância de Lorentz. Então generalizamos nosso resultado para um modelo com dois campos. Também introduzimos outra classe de modelos com dois campos que suportam estrutura de defeitos BPS embora exista a violação das SL e  $SCPT$ . A quebra das simetrias é realizada de uma forma explícita no setor de interação da teoria. Com as soluções das equações de Bogomol'nyi mostramos que ocorre a quebra da estrutura defeito $\leftrightarrow$ anti-defeito. Extendemos os resultados dos campos escalares reais para a teoria de Wess-Zumino.

**Palavras Chaves:** Estrutura de defeitos; Quebra das simetrias de Lorentz e  $CPT$ ; Assimetria Defeito $\leftrightarrow$ anti-defeito.



## ABSTRACT

This work deals with the Lorentz symmetry (LS) and CPT symmetry (*CPTS*) breaking in theories of scalar fields which supports defect structures. This study becomes relevant by virtue that in the last years the possibility of LS and *CPTS* breaking has been considered as a real one. Through the theoretical studies, authors have assumed these symmetries as approximations from other symmetries in a larger energy scale. First of all, we study defect structures in a scenario without violations of LS and *CPTS*. This preliminary study understands theories with real scalar fields and a theory like Wess-Zumino where the scalar field is complex and composed of two real scalar fields. We realize this study in order to compare the results between the theory without breaking of symmetries and theory with the violation. In case of theories with real fields, firstly we consider a model with a single scalar field and we investigate traveling waves which violate Lorentz invariance. Then we generalize our result for a model with two fields. We also introduce another class of models with two fields which supports BPS-defect structures although there are the violations of LS and *CPTS*. Breaking of symmetries is realized in an explicit form in the interaction sector of the theory. With the solutions of Bogomol'nyi equations we show that occur the breaking of the structure defect $\leftrightarrow$ anti-defect. We extend the results of the real scalar fields to the Wess-Zumino theory.

**Keywords:** Defect structures; Lorentz and *CPT* symmetries breaking; Defect $\leftrightarrow$  anti-defect asymmetry.

# Declaração

O trabalho compilado nessa dissertação é baseado na pesquisa realizada, durante os meses de agosto/05 e abril/06 no Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, Brasil. Nenhuma parte desse documento foi submetida em qualquer outro estabelecimento para obtenção de qualquer título e é fruto do trabalho do autor sob supervisão de seu orientador, exceto quando mencionado no texto.

Os capítulos 2 e 3 são revisões de conteúdos estudados durante o período citado como base para o conteúdo original da dissertação. O capítulo 4 é inteiramente original e foi realizado pelo autor sob orientação do Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho e com a colaboração do estudante de doutorado Roberto Menezes. Os resultados mostrados nesse capítulo foram publicados em:

M. N. Barreto, D. Bazeia, R. Menezes, Defect Structures in Lorentz and CPT Violating Scenarios, *Phys.Rev. D***73**, 065015 (2006).

O Capítulo 5 também é fruto de trabalho original do autor com colaboração do Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho e Roberto Menezes e a confecção de um artigo com os resultados contidos nesse capítulo está em elaboração.

**Copyright © 2006 por Marlon Nunes Barreto da Silva.**

”O autor detém os direitos desta dissertação. Nenhuma parte da mesma poderá ser publicada sem prévio conhecimento e autorização por escrito do autor e a mesma deverá ser citada pelo uso de qualquer informação nela contida.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Campos Escalares Reais</b>	<b>8</b>
2.1	Um campo escalar real . . . . .	8
2.2	Dois campos escalares reais . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Teoria de Wess-Zumino</b>	<b>28</b>
<b>4</b>	<b>Violação das simetrias em estruturas de Defeitos - Campos escalares reais</b>	<b>37</b>
4.1	Um campo escalar real . . . . .	37
4.2	Dois campos escalares reais . . . . .	42
4.3	Outro modelo com dois campos escalares reais . . . . .	44
4.4	Exemplo . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Violação das simetrias em estruturas de Defeitos - Teoria de Wess-Zumino</b>	<b>59</b>
5.1	Formalismo . . . . .	59
5.2	Exemplo . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>75</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Atualmente existem duas teorias que descrevem a física fundamental, porém em regimes diferentes: enquanto que a Relatividade Geral de Hilbert-Einstein descreve os efeitos gravitacionais de uma escala de alguns poucos milímetros até distâncias cosmológicas, a teoria quântica de campos descreve o microcosmos, onde os efeitos gravitacionais são desprezíveis. Entretanto, ambas as teorias se baseiam em duas simetrias que a natureza aparentemente possui: a  $SL$  e  $SCPT$ .

As transformações de Lorentz são formadas por dois conjuntos: rotações e *boosts*. Temos três rotações, uma em torno de cada eixo - com o uso da parametrização mais adequada. Um *boost* é uma mudança na velocidade do referencial estudado. Temos também três *boosts* um na direção de cada eixo, sendo que qualquer outro pode ser escrito como composição dos *boosts* canônicos, assim como ocorre no caso das rotações [1]. Sendo assim, dizemos que uma teoria é simétrica frente as transformações de Lorentz quando as leis físicas são inalteradas por rotações e *boosts*.

A transformação  $CPT$  na realidade é uma composição das transformações de conjugação de carga ( $C$ ), inversão de paridade ( $P$ ) e reversão temporal ( $T$ ). Quando essas transformações são aplicadas em um estado físico elas alteram o sistema de tal modo que:

$C$  : Leva estados de partícula em estados de anti-partícula;

$P$  : Transforma o "vetor posição" do estado no seu oposto, ou seja,  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ ;

$T$  : Inverte a direção do fluir do tempo,  $t \rightarrow -t$ .

Com as definições acima, dizemos que um sistema é invariante frente a transformação  $CPT$  se a "física" do sistema é inalterada quando aplicamos a transformação conjunta. Porém, a violação das simetrias separadamente pode ocorrer, mas de modo que a combinação dessas violações deixe o sistema inalterado quando a composição das três for feita. Até o momento, experimentos de alta precisão foram realizados, comprovando que as leis físicas da natureza são invariantes frente as transformações de Lorentz e a transformação  $CPT$ . Alguns desses resultados podem ser encontrados em [2].

As transformações de Lorentz e a transformação  $CPT$  são tão ligadas que existe um teorema, denominado *Teorema CPT*. Grosseiramente falando, ele nos diz que teorias quânticas de campo locais simétricas sob as transformações de Lorentz devam possuir invariância frente a transformação  $CPT$  [3]. Entre essas, podemos citar a eletrodinâmica quântica (QED) e o modelo-padrão.

Desta forma, com evidências experimentais fortes e a prova de um teorema mostrando a ligação entre as SL e  $SCPT$  poderiam perguntar sobre a importância da procura por uma teoria que as viole. Entretanto, caso tais violações fossem percebidas isso seria um claro sinal de uma física completamente não-usual. Além disso, a própria simetria de Lorentz surgiu como uma tentativa de explicar fenômenos em que as transformações de Galileu não eram mais válidas. Assim, numa escala de energia ainda maior, não seria surpreendente que a SL e conseqüentemente a  $SCPT$  fossem violadas. Deste modo é justificável o estudo das condições e os mecanismos pelos quais essas simetrias são quebradas. Também é interessante estudar o que acontece com teorias conhecidas quando essas são inseridas num ambiente em que há violação das SL e  $SCPT$ .

---

A primeira abordagem considerando a possível violação da simetria de Lorentz foi feita em [4] no limite de altas-energias de uma teoria de campo de corda covariante. Porém, no contexto de teoria de campos, somente em [5] foi considerada tal possibilidade. Neste último os autores inserem numa teoria de eletrodinâmica de Maxwell, em quatro dimensões, um termo tipo Chern-Simons que quebra a invariância de Lorentz porém deixa inalterada a estrutura de gauge da teoria.

Numa série de trabalhos, Kostelecky *et al*, descrevem uma generalização do Modelo-Padrão das interações fundamentais e da Relatividade Geral ao qual chamam de *Modelo-Padrão Estendido*. Esse modelo generalizado possui todas as características do modelo-padrão e da relatividade geral porém, agora suportando a violação das simetrias de Lorentz e CPT. Com base nesse modelo foi demonstrado em [6] que se a SCPT é violada então a SL também é violada, porém o contrário não ocorre necessariamente. Na Sec.[4.1], temos um resultado que confirma tal afirmação. Com isso as transformações de Lorentz e CPT continuam ligadas.

Desta forma, temos um novo panorama em que há sistemas na "natureza" que não são invariantes sob a transformação CPT. No modelo-padrão usual, violações das simetrias  $C$ ,  $P$ ,  $T$  e  $CP$  são previstas e há observação de tais, como por exemplo a violação de  $P$  no decaimento- $\beta$ . Porém, o que temos aqui são processos que violam CPT, ou seja, o modelo-padrão estendido comporta eventos que não ocorrem no modelo-padrão usual e na Relatividade Geral.

Mas, como dissemos, é justificável o estudo das maneiras pelas quais as simetrias são quebradas. Um mecanismo muito importante, em física, na qual um simetria do sistema é quebrada é a *Quebra espontânea da simetria*. Esse evento ocorre toda vez que uma simetria da teoria (da lagrangeana ou da hamiltoniana) não é respeitada pelos estados fundamentais - vácuos - dessa mesma teoria. Podemos citar por exemplo a quebra da simetria rotacional que ocorre no nosso sistema solar. A lei de Newton da gravitação apresenta uma invariância frente a rotações no espaço

---

enquanto que nosso sistema solar apresenta uma orientação específica dada por um plano que contém os planetas. Temos também o exemplo da quebra da simetria num ferromagneto. A Hamiltoniana que descreve o sistema é invariante por rotações, porém quando aplicamos um campo magnético nesse material todos os momentos magnéticos alinham-se na direção do campo aplicado quebrando a simetria que a teoria possuía. Da mesma maneira, temos a quebra espontânea da simetria de gauge da interação eletro-fracas no modelo-padrão. Com isso, um possível mecanismo teórico no qual as  $SL$  e  $SCPT$  poderiam ser quebradas era a quebra espontânea. Ou seja, a teoria poderia ser simétrica frente as transformações, contudo as soluções de vácuo desta violariam as simetrias. Essa é uma proposta interessante uma vez que a dinâmica da teoria permanece invariante.

Uma outra maneira de implementar a quebra de uma simetria em uma teoria é inserir termos que violem a simetria desde o início. Esse procedimento é o que chamamos de *Quebra Explícita da simetria*, uma vez que partimos de uma teoria que possui a violação da simetria em estudo já na lagrangeana - hamiltoniana - que descreve o sistema. Essa maneira parece não muito elegante já que inserimos os termos *ad hoc* na lagrangeana afim de que esses nos forneçam a assimetria desejada. Contudo, podemos interpretar uma quebra explícita de uma simetria com uma teoria efetiva que leva em conta as correções que virão da quebra proporcionada pelos vácuos. Esses termos que violam as simetrias podem ser obtidos por correções quânticas vindas de um acoplamento entre o setor onde queremos obter a violação e um outro setor que já possui a simetria violada, como por exemplo, o setor de fermiônico. Neste trabalho trataremos da violação das simetrias objeto através da quebra explícita de tais.

Quebra da simetria de Lorentz, ou seja, a não-invariância sob rotações e *boosts*, pode ser vista através de uma analogia. Se considerarmos um feixe de luz se propagando num material, como por exemplo a calcita, que exhibe birefringência.



---

Isso é similar a situação enfrentada pelos campos no vácuo de uma teoria que exhibe violação da invariância de Lorentz, como veremos mais a frente.

Contudo, apesar de todas as justificativas dadas a favor do estudo da violação das SL e SCPT temos que ter em mente que por mais bonita que uma teoria seja, um possível acesso experimental as afirmações feitas pela teoria deve ser dado. Com isso, poderiam perguntar se há experimentos em que as previsões dos efeitos causados pela violação das simetrias poderiam ser testados ou, pelo menos, se há limites para os termos de violação. Experimentos investigando a violação das SL e SCPT em oscilações de neutrinos e kaons, comparação de relógios, investigação no setor de múons, testes da QED em armadilhas de Penning são descritos em [7, 8, 9, 10, 11].

Defeitos Topológicos são configurações estáveis da matéria, resultantes da quebra espontânea de alguma simetria em uma transição de fase. Entre eles podemos citar alguns como as paredes de domínio e as cordas cósmicas. Esses diferem um do outro pelo tipo de simetria quebrada e a natureza da transição de fase. Eles vêm das soluções das equações diferenciais não-lineares - equações de movimento - que descrevem sua dinâmica.

As paredes de domínio são objetos bidimensionais resultado da imersão do *kink* no espaço tridimensional. Um *kink*<sup>1</sup> é a solução da equação de movimento do modelo  $\phi^4$  em uma dimensão espacial. Nesse modelo, temos um potencial com dois mínimos simétricos em relação a origem. Quando a simetria - discreta nesse caso - é quebrada espontaneamente ocorre o surgimento do *kink* que conecta esses mínimos. Da mesma maneira, a corda cósmica é gerada pela imersão, no espaço tridimensional, da solução tipo vórtice do modelo de Higgs em duas dimensões. Assim, os nomes dos defeitos topológicos se referem a diferença entre o número de dimensões espaciais - no nosso caso 3 - e a dimensão na qual a solução vive. Essa diferença é o que chamamos de co-dimensão.

---

<sup>1</sup>Corresponde a palavra "dobra" no inglês.

---

Os defeitos topológicos são usados na física tanto no contexto da física da matéria condensada quanto na física de altas-energias e cosmologia. Por exemplo, em matéria condensada, cordas cósmicas são usadas para modelar defeitos em materiais [12]. Na cosmologia [13], tanto as cordas cósmicas quanto as paredes de domínio e os monopolos eram usadas como possíveis sementes para a formação de estruturas no universo, sendo que os dois últimos possuem energias muito altas que entram em conflito com os dados observacionais.

É com este espírito que, neste trabalho, inserimos uma teoria de campos escalares num contexto de violação das SL e *SCPT*. Isso também se torna interessante no contexto de um espaço-tempo curvo, tipo mundo-brana, uma vez que, como dissemos, a violação da simetria de Lorentz foi primeiro considerada num contexto de teoria de cordas. Branas são soluções estáticas de uma teoria de cordas ou de super-gravidade - um dos limites de baixa energia da teoria das supercordas - quando são impostas certas condições de contorno as cordas. Com isso em mente, o estudo apresentado nesse texto pode ser útil nessa possível abordagem.

Como foi citado, defeitos topológicos são soluções das equações de movimento da teoria que além de serem equações diferenciais de segunda ordem, oferecem uma dificuldade a mais que é a não-linearidade. Se pode tentar encontrar as soluções dessas equações através de métodos numéricos, porém esse não é o enfoque desse trabalho. Para tentar amenizar o processo de obtenção de soluções analíticas para tais sistemas, recorreremos ao procedimento de Bogomol'nyi [14] em que as equações de movimento podem ser reduzidas à equações de primeira ordem que, em certos casos, possuem toda a física do sistema.

Nessa dissertação trabalhamos em um espaço-tempo  $(1, 1)$ -dimensional com tensor métrico dado por  $\text{diag}(g_{\mu\nu}) = (1, -1)$ . Além disso os campos e coordenadas são adimensionais. O texto está organizado da seguinte maneira: na primeira parte do Capítulo 1 revisamos os principais aspectos de uma teoria de um único campo

escalar real, tais como, equações de movimento para configurações estáticas e como obter equações de primeira ordem que são equivalentes as primeiras. Além disso, apresentamos quais as condições para que tal procedimento seja realizado. Também mostramos a estabilidade linear das soluções dessas equações de primeira ordem além de definirmos o que é caráter topológico de uma solução. Na segunda etapa desse primeiro capítulo, fazemos uma revisão da teoria de dois campos escalares e extendemos alguns dos resultados obtidos para um único campo real. No Capítulo 3 revisamos a teoria do setor bosônico da teoria de Wess-Zumino, com um campo escalar complexo, e obtemos, assim como no caso de um único campo escalar, as equações de primeira ordem que são equivalentes as equações de movimento da teoria. Além disso, mostramos a estabilidade linear das soluções.

No Capítulo 4 mostramos a influência da violação das SL e *SCPT* na teoria de campos escalares reais, para um e dois campos reais. Os dois primeiros modelos com a quebra das simetrias são guias de como introduzir a violação, porém, como estão apresentados, não apresentam uma violação verdadeira das simetrias, entretanto justificamos tal apresentação. No final do capítulo, introduzimos um outro modelo com dois campos escalares reais que apresenta uma violação verdadeira da simetria de Lorentz além de apresentarmos um exemplo. No último capítulo, colocamos a quebra das simetrias na teoria do setor bosônico da teoria de Wess-Zumino e da mesma maneira mostramos um exemplo da influência das violações.

# Capítulo 2

## Campos Escalares Reais

Neste capítulo iremos descrever a teoria usual de sistemas de campos escalares reais que suportem estrutura de defeitos. Uma vez que queremos que a estrutura de defeitos seja obtida somente por sistemas de campos escalares, vamos trabalhar em um espaço-tempo (1,1)–dimensional. Esse vínculo na dimensão do espaço-tempo é dado pelo teorema de Derrick. A demonstração desse teorema pode ser encontrada na Ref.[15]. Na próxima secção descreveremos a teoria de um campo escalar real e posteriormente a teoria de dois campos reais.

### 2.1 Um campo escalar real

A teoria usual de um campo escalar real é descrita pela densidade Lagrangeana.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.1)$$

em que  $V(\phi)$  é o potencial que especifica o modelo sob consideração. Associada à teoria acima, a equação de movimento para o campo escalar é

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.2)$$

Uma vez que queremos encontrar os setores topológicos que conectem mínimos do potencial, que determina a teoria, devemos estudar configurações estáticas –  $\phi = \phi(x)$  – do campo. As equações de movimento, para tais configurações do campo são dadas por

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.3)$$

Desta forma, percebemos que as soluções da teoria descrita acima, são invariantes sob a transformação *CPT*. Isso é percebido pois o campo escalar real não possui carga associada o que o mantém invariante frente a conjugação de carga. Além disso, se fizermos as transformações  $t \rightarrow -t$  e  $x \rightarrow -x$  nas equações (2.2) e (2.3) elas permaneceram invariantes. Desta forma, a teoria (2.1) não viola a *SCPT*, uma das simetrias objeto deste trabalho.

Como esse trabalho também trata da violação da SL no contexto de campos escalares, é apropriado indicar formas de perceber tal violação. Uma dessas maneiras é a investigação do caráter simétrico do tensor momento-energia. Sendo assim, para a teoria (2.1), temos

$$\theta^{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 + V, \quad (2.4a)$$

$$\theta^{01} = -\dot{\phi}\phi', \quad (2.4b)$$

$$\theta^{10} = -\dot{\phi}\phi', \quad (2.4c)$$

$$\theta^{11} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 - V, \quad (2.4d)$$

em que o ponto indica a derivação com relação ao tempo  $t$  e a linha a derivação em relação a coordenada espacial  $x$ . As componentes acima nos mostram que o tensor momento-energia é simétrico e conservado, uma vez que  $\partial_\mu\theta^{\mu\nu} = 0$  que pode ser verificado utilizando as equações de movimento.

Focaremos nossa atenção, em encontrar soluções de uma equação de primeira ordem, que resolve as equações de movimento (2.3). Podemos obter essa equação por dois métodos, através do método da quadratura ou utilizando como ponto

de partida a densidade de energia (2.4a). Esta última maneira é chamada de *Procedimento de Bogomol'nyi* [14]. O método da quadratura é dado da seguinte maneira. Primeiramente, multipliquemos a equação de movimento (2.3) por  $\phi'$ , afim de obter

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dx} \frac{d^2\phi}{dx^2} &= \frac{dV}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 &= \frac{dV}{dx},\end{aligned}$$

que pode ser escrita como

$$\left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = 2V(\phi) + B, \quad (2.6)$$

em que  $B$  é uma constante de integração. Da relação anterior, percebemos que o potencial deve ser uma quantidade limitada inferiormente e tal que,  $V(\phi) \geq -B/2$ , para todo valor de  $\phi$  afim de que a equação de movimento possa ser escrita como uma equação de primeira ordem. Isso nos diz que o potencial tem mínimos absolutos.

De modo geral, a energia do sistema é dada por

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right] dx.$$

Vamos denotar por  $\phi_m$  o mínimo do potencial na relação acima. Afim de que tenhamos configurações com energia finita as seguintes condições de contorno devem ser respeitadas

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d\phi}{dx} \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) \rightarrow \phi_m. \quad (2.8)$$

Além disso  $V(\phi_m) = 0$ . Essas condições são necessárias para que as partes gradiente<sup>1</sup> e potencial sejam finitas.

---

<sup>1</sup>Usamos o termo gradiente apesar de estarmos em apenas uma dimensão espacial.

Obtendo  $V$  de (2.6) e substituindo na energia da configuração, obtemos

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx - \frac{B}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx,$$

que claramente nos mostra o valor da constante de integração afim de que tenhamos uma configuração com energia finita, uma vez que a última integração no lado direito da equação acima diverge a não ser que façamos a constante de integração nula. Fazendo  $B = 0$ , percebemos, a partir de (2.4a), que a energia se divide em uma parte gradiente e uma parte potencial. Sendo assim a energia de um campo escalar estático é escrita como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx. \quad (2.9)$$

Como vimos, para que possamos resolver equações de primeira ordem em lugar da equação de movimento, o potencial deve ser uma quantidade não-negativa para todo valor do campo. Assim, é mais que natural que possamos escrevê-lo como o quadrado de uma outra função real. Sem perda de generalidade, podemos escrever o potencial como

$$V = \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \equiv \frac{1}{2} W_\phi^2, \quad (2.10)$$

em que o índice subscrito, nesse caso, indica derivação com relação ao campo  $\phi$ . Dizemos que não perdemos generalidade já que qualquer função de  $\phi$  pode ser escrita como uma derivada em relação a  $\phi$  de uma outra função, desde que esta seja suave. Com a relação acima, a equação de primeira ordem (2.6) pode ser reescrita como

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi, \quad (2.11)$$

desde que  $W$  seja uma função suave, como já dissemos. Esta função é batizada de superpotencial e a eq.(2.11) de Equação de Bogomol'nyi. As soluções da equação acima são chamadas de estados BPS [14].

Os sinais positivo e negativo em (2.11) nos dão justamente a simetria defeito $\leftrightarrow$ anti-defeito. Ou seja, quando achamos uma solução tipo defeito, basta

que invertamos o sinal dessa solução para obter o anti-defeito. Além disso, eles existem simultaneamente, coisa que não ocorrerá no caso com quebra da simetria de paridade.

A outra maneira de obtermos a mesma equação de primeira ordem é utilizando o Procedimento de Bogomol'nyi [14]. Para isso devemos partir da densidade de energia

$$\theta^{00} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V.$$

Utilizando a eq.(2.10), podemos reescrever a expressão acima como

$$\theta^{00} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi \right)^2 \pm \frac{dW}{dx}. \quad (2.12)$$

Como o termo entre parênteses é uma quantidade não-negativa, o sistema atinge o estado fundamental quando

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi,$$

com energia

$$E = |\Delta W| \equiv |W(\infty) - W(-\infty)|. \quad (2.13)$$

O módulo foi colocado uma vez que a densidade de energia deve ser positiva, como já mostrado.

Porém, como dissemos, o potencial deve ser uma quantidade não-negativa o que restringe muito as teorias que podemos resolver usando equações de primeira ordem. Entretanto, aquelas que podem ser tratadas dessa maneira são bem mais 'maleáveis', uma vez que devemos resolver equações de primeira ordem em detrimento a equações de movimento de segunda ordem que, em geral, são mais complicadas.

Mas pode-se desconfiar quanto a confiabilidade de tentar encontrar soluções para as equações de primeira ordem. Demonstraremos a seguir, que todas as soluções da equação de movimento são soluções das equações de primeira ordem e vice-versa. Primeiramente, vamos demonstrar que as equações de primeira-ordem resolvem a



equação de movimento. Derivando a eq.(2.11) com relação a  $x$ , obtemos

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \pm W_{\phi\phi} \frac{d\phi}{dx} = W_{\phi\phi} W_\phi,$$

em que usamos a equação de primeira ordem mais uma vez. Derivando o potencial (2.10) com relação ao campo  $\phi$ , a equação de movimento é reescrita como

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi}, \quad (2.14)$$

que demonstra a afirmação feita acima.

Devemos agora, demonstrar que a equação de movimento também resolve a equação de primeira ordem. Para isso, vamos definir a razão

$$R(\phi) = \left( \frac{d\phi}{dx} \right) / W_\phi. \quad (2.15)$$

Derivando-a com relação a  $x$ , obtemos

$$\frac{dR(\phi)}{dx} = \left( \frac{d^2\phi}{dx^2} \right) / W_\phi - \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 W_{\phi\phi} \right] / W_\phi^2$$

e substituindo (2.14) nela, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dR(\phi)}{dx} &= \left[ W_\phi^2 - \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] \frac{W_{\phi\phi}}{W_\phi^2} \\ &= A(\phi) \frac{W_{\phi\phi}}{W_\phi^2}. \end{aligned}$$

Notamos que

$$\frac{dW_\phi^2}{dx} = 2 \frac{d\phi}{dx} W_\phi W_{\phi\phi}$$

e que

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 = 2 \frac{d\phi}{dx} W_\phi W_{\phi\phi},$$

em que usamos as equações de movimento. Desta forma, quando  $\phi$  resolve a equação de movimento, a quantidade  $A(\phi)$  não depende de  $x$ . Estes campos são sujeitos as condições de contorno (2.7) e (2.8), além da condição

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} W_\phi \rightarrow 0, \quad (2.16)$$

uma vez que os mínimos do potencial são extremos do superpotencial. Com isso, a quantidade  $A(\phi)$  é nula e podemos escrever  $R(\phi) = \pm 1$  o que nos fornece as equações de primeira ordem de Bogomol'nyi.

Sendo assim, acabamos de demonstrar que a equação de movimento é equivalente às equações de primeira ordem, ou seja, todas as soluções físicas são estados BPS.

É importante verificarmos se essas soluções são linearmente estáveis. Para isso, seguiremos o procedimento descrito em [23]. Introduzimos flutuações para o campo descrita da seguinte forma  $\phi(x, t) = \phi(x) + \eta(x, t)$ . O campo  $\eta$  é interpretado como uma pequena perturbação da solução estática, por isso tomamos apenas o termo em primeira ordem, ou seja, o termo linear - de onde vem o nome *estabilidade linear*. Usando esse campo perturbado na equação de movimento (2.2), obtemos

$$\ddot{\eta}(x, t) - \eta''(x, t) - \phi''(x) + \left( \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi(x)} + \frac{d^2V}{d\phi^2} \Big|_{\phi(x)} \eta(x, t) \right) = 0.$$

Utilizando a equação para configurações estáticas

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi(x)},$$

chegamos a equação

$$\ddot{\eta}(x, t) - \eta''(x, t) + \frac{d^2V}{d\phi^2} \Big|_{\phi(x)} \eta(x, t) = 0. \quad (2.17)$$

Já que estamos procurando por soluções tipo 'onda viajante', que sejam estáveis, é natural que façamos a expansão

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos \omega_n t.$$

Normalizamos as funções  $\eta_n$  da seguinte maneira

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta_i^\dagger(x) \eta_j(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_i(x) \eta_j(x) dx = \delta_{ij}.$$

Substituindo a expansão de  $\eta(x, t)$  em (2.17), obtemos

$$-\frac{d^2}{dx^2} \eta_n(x) + \frac{d^2V}{d\phi^2} \Big|_{\phi(x)} \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x),$$

que pode ser escrita como

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + U \right] \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x), \quad (2.18)$$

em que

$$U = \frac{d^2 V}{d\phi^2} \Big|_{\phi(x)}.$$

Essa é um equação tipo Schrödinger, cujo 'Hamiltoniano' é dado por

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + U. \quad (2.19)$$

Usando  $V$  dado em (2.10), podemos reescrever

$$\begin{aligned} U &= W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi} \\ &= W_{\phi\phi}^2 + \left( \frac{d}{dx} W_{\phi\phi} \right), \end{aligned}$$

em que a equação de primeira ordem foi utilizada. Desta forma, a atuação do Hamiltoniano sobre sua auto-função pode ser escrita como

$$\begin{aligned} H\eta_n(x) &= -\frac{d^2}{dx^2} \eta_n(x) + W_{\phi\phi}^2 \eta_n(x) + \frac{d}{dx} [W_{\phi\phi} \eta_n(x)] - W_{\phi\phi} \frac{d}{dx} \eta_n(x), \\ &= \left[ \left( \frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} \right) \left( -\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} \right) \right] \eta_n(x), \end{aligned}$$

ou ainda, na forma mais compacta

$$H\eta_n(x) = S^\dagger S \eta_n(x) = \omega_n^2 \eta_n(x). \quad (2.20)$$

Essa é uma equação muito similar a equação do Oscilador Harmônico Quântico, sendo que o mínimo de energia do nosso sistema é zero, enquanto que para o oscilador harmônico temos  $(1/2)\omega$ , sendo  $\omega$  a frequência natural de oscilação. Com a eq(2.20), podemos demonstrar a estabilidade da teoria. A frequência da solução pode ser escrita como

$$\omega_n^2 = \int \eta_n(x) S^\dagger S \eta_n(x) dx = \int \eta_n(x) \left\{ \frac{d[S\eta_n(x)]}{dx} \right\} \eta_n(x) dx + \int \eta_n(x) W_{\phi\phi} S \eta_n(x) dx,$$

em que substituímos a definição do operador  $S^\dagger$ . A primeira integral pode ser escrita como a soma de dois termos, de forma que podemos escrever

$$\omega_n^2 = \int \frac{d}{dx} [\eta_n(x) S \eta_n(x)] dx - \int [S \eta_n(x)] \frac{d}{dx} \eta_n(x) dx + \int \eta_n(x) W_{\phi\phi} S \eta_n(x) dx.$$

A primeira integral acima, é um termo de superfície que podemos fazer igual a zero já que  $\eta_n(\pm\infty) \rightarrow 0$ , uma vez que ele é uma perturbação da solução estática que deve ir para os mínimos no infinito. Sendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= - \int [S \eta_n(x)] \frac{d}{dx} \eta_n(x) dx + \int \eta_n(x) W_{\phi\phi} S \eta_n(x) dx \\ &= \int \left( -\frac{d}{dx} + W_{\phi\phi} \right) \eta_n(x) S \eta_n(x) dx \\ &= \int [S \eta_n(x)]^2 dx, \end{aligned}$$

que nos mostra que os autovalores são quantidades não-negativas para todo intervalo  $x$ . O modo zero é obtido quando  $\omega_n^2 = 0$  e desta forma, temos  $H \eta_n(x) = 0$ , o que nos dá as equações

$$\left( \frac{d}{dx} \mp W_{\phi\phi} \right) \eta_0(x) = 0.$$

Podemos reescrevê-la como

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_0}{\eta_0} &= \pm W_{\phi\phi} dx = \pm \frac{dW_\phi}{d\phi} dx \\ &= \pm \frac{dW_\phi}{dx} \frac{dx}{d\phi} dx. \end{aligned}$$

Substituindo as equações de Bogomol'nyi (2.11) acima, obtemos

$$\frac{d\eta_0}{\eta_0} = \frac{dW_\phi}{W_\phi}.$$

Logo, o modo zero pode ser escrito como

$$\eta_0(x) = \lambda W_\phi = \pm \lambda \frac{d\phi}{dx}, \quad (2.21)$$

em que  $\lambda$  é uma constante de integração. O resultado para o modo zero do sistema não podia ser diferente do encontrado em (2.21). Isso se deve ao fato de que o que

calculamos é estado de menor energia do sistema, o estado fundamental. Vimos, a partir de (2.13) que o sistema vai para o estado de menor energia desde que a equação de Bogomol'nyi seja satisfeita, ou seja, que o sistema esteja num estado igual a primeira derivada do campo com relação a  $x$ .

No começo desta secção falamos sobre setores topológicos, por isso, que cabe aqui uma pequena apresentação sobre o caratér topológico de uma configuração de campos. Digamos que numa certa teoria temos que o campo se comporta da seguinte maneira: no limite  $x \rightarrow \infty$ , temos  $\phi(x \rightarrow \infty) \rightarrow \phi_i$ ; ou podemos ter  $\phi(x \rightarrow \infty) \rightarrow \phi_j$ , para  $\phi_j$  outra solução que obedece  $V'(\phi_j) = 0$ , com  $V(\phi_j) = 0$ . Estas duas situações podem ser levadas em conta quando consideramos

$$j_T^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (2.22)$$

em que  $\varepsilon$  é o tensor anti-simétrico de Levi-Civita em duas dimensões. A equação acima define a chamada corrente topológica que é conservada uma vez que

$$\partial_\mu j_T^\mu = 0. \quad (2.23)$$

A conservação de (2.22) pode ser obtida trivialmente, uma vez que o ocorre em (2.46) é a contração de dois tensores sendo um simétrico e outro anti-simétrico. Da definição da corrente topológica, podemos obter uma outra grandeza que é chamada de carga topológica. Para soluções estáticas ela é pode ser definida como

$$Q_T \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} j^0 dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{01} \frac{d\phi}{dx} dx$$

que pode ser escrita como

$$Q_T = \frac{1}{2} [\phi(x \rightarrow \infty) - \phi(x \rightarrow -\infty)]. \quad (2.24)$$

Ou seja, com a definição de carga topológica podemos definir o comportamento topológico da solução em função do comportamento assintótico das mesmas. Desta

forma, existem dois casos a serem considerados: Soluções topológicas são aquelas em que  $\phi(x \rightarrow -\infty) \neq \phi(x \rightarrow \infty)$  e as não-topológicas, soluções tais que  $\phi(x \rightarrow -\infty) = \phi(x \rightarrow \infty)$ . Por definição, damos o nome de defeito àquela solução com carga topológica positiva enquanto que a solução com carga negativa recebe o nome de anti-defeito.

Ainda podemos definir a carga topológica através da introdução da densidade de carga topológica  $\rho^2$  dada por

$$\rho^2 = \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2.$$

Sendo assim, a carga topológica, com essa nova definição, é dada por

$$Q_T = \int \rho^2 dx = \int \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx.$$

Utilizando a equação (2.9)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 dx$$

e a propriedade que das soluções BPS

$$E = |\Delta W|,$$

percebemos que a carga topológica, nessa nova definição, é identificada como

$$Q_T = |\Delta W|.$$

Como soluções BPS conectam mínimos distintos do potencial, temos que a carga topológica associada é sempre diferente de zero, o que garante o caráter topológico das mesmas.

Sendo assim, conseguimos mostrar nesta secção que a teoria (2.1), dada uma forma especial para o potencial (2.10), é descrito por soluções de equações de primeira ordem, que em geral são mais 'maleáveis'. Vimos também que essa descrição é total pois, como provamos, todas as soluções da equação de movimento

são também soluções das equações de Bogomol'nyi. Além disso, mostramos que essas soluções são linearmente estáveis e que o modo zero (Estado fundamental), como esperávamos, é a primeira derivada do campo com relação a posição. E por último, foi mostrado que as soluções das equações de Bogomol'nyi são topológicas.

## 2.2 Dois campos escalares reais

Estudaremos aqui a teoria usual de dois campos escalares reais. Essa teoria é descrita pela Lagrangeana.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - V(\phi, \chi), \quad (2.25)$$

em que  $V(\phi, \chi)$  é o potencial que descreve a auto-interação dos campos e a interação entre os campos  $\phi$  e  $\chi$ . As equações de movimento para esses campos são

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0, \quad (2.26a)$$

$$\partial_\mu\partial^\mu\chi + \frac{\partial V}{\partial\chi} = 0. \quad (2.26b)$$

Para campos estáticos, as equações de movimento são dadas por

$$\phi'' = \frac{\partial V}{\partial\phi}, \quad (2.27a)$$

$$\chi'' = \frac{\partial V}{\partial\chi}. \quad (2.27b)$$

Como no modelo para um campo escalar real, percebemos que as soluções da teoria de dois campos escalares reais também são invariantes sob a transformação  $CPT$ . Da mesma forma, os campos não possuem carga o que os deixa invariante sob a transformação  $C$ . E como antes, se fizermos as transformações  $t \rightarrow -t$  e  $x \rightarrow -x$  nas equações (2.26) e (2.27) elas não são alteradas. Sendo assim, a teoria (2.25) não viola a  $SCPT$ .

Devemos verificar a invariância da teoria sob as transformações de Lorentz. Uma forma, como já dito, é verificar se o tensor momento-energia é simétrico. As

componentes deste são dadas por

$$\theta^{00} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + \dot{\chi}^2 + \phi'^2 + \chi'^2) + V, \quad (2.28a)$$

$$\theta^{10} = -\phi'\dot{\phi} - \chi'\dot{\chi}, \quad (2.28b)$$

$$\theta^{01} = -\phi'\dot{\phi} - \chi'\dot{\chi}, \quad (2.28c)$$

$$\theta^{11} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + \dot{\chi}^2 + \phi'^2 + \chi'^2) - V, \quad (2.28d)$$

que nos mostra a invariância de Lorentz e além disso que este tensor é conservado,  $\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0$ , em que usamos as eqs.(2.26).

Vamos agora, tentar obter equações de primeira ordem que contenham informações sobre as equações de movimento, ou seja, vamos obter equações de Bogomol'nyi para a teoria (2.25). Primeiramente, vamos obtê-las a partir do método da quadratura. Multipliquemos as equações (2.27a) e (2.27b) por  $\phi'$  e  $\chi'$ , respectivamente, afim de obter

$$\frac{d\phi}{dx} \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dx}$$

e

$$\frac{d\chi}{dx} \frac{d^2\chi}{dx^2} = \frac{\partial V}{\partial \chi} \frac{d\chi}{dx}.$$

Somando as relações encontradas acima, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dx} \right)^2 \right] = \frac{dV}{dx},$$

que pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dx} \right)^2 \right] = V(\phi), \quad (2.29)$$

em que a constante de integração foi feita igual a zero pelos mesmos motivos que para o caso de um campo exposto na secção anterior. Da mesma maneira como a que ocorreu para um campo escalar a parte potencial é igual a parte gradiente. A



partir de (2.29), mais uma vez, percebemos que o método da quadratura só levará a equações de primeira ordem desde que o potencial seja uma quantidade não-negativa para todos os valores dos campos  $\phi$  e  $\chi$ .

A energia dessa configuração é escrita como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{d\chi}{dx} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right] dx.$$

Consideremos o par  $(\phi_i, \chi_i)$  como mínimo do potencial acima. Afim de que tenhamos configurações com energia finita as seguintes condições de contorno devem ser respeitadas

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d\phi}{dx} \rightarrow 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) \rightarrow \phi_i \quad (2.30)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d\chi}{dx} \rightarrow 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \chi(x) \rightarrow \chi_i. \quad (2.31)$$

Além disso  $V(\phi_i, \chi_i) = 0$ . Com essas condições a parte gradiente e potencial são finitas.

Da eq.(2.29), podemos obter o valor do potencial em função de  $\phi'$  e  $\chi'$ . Substituindo essa expressão para o potencial na expressão para a energia da configuração, obtemos

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dx} \right)^2 \right] dx. \quad (2.32)$$

Uma vez que o potencial, para que o procedimento acima leve a equações de primeira ordem, é uma quantidade não-negativa, podemos escrever novamente, sem perda de generalidade

$$V = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial \chi} \right)^2 \right] \equiv \frac{1}{2} (W_\phi^2 + W_\chi^2), \quad (2.33)$$

em que os índices subscritos continuam indicando derivação com relação aos campos  $\phi$  e  $\chi$ . A função  $W$  é uma função suave dos campos e ainda é chamada

superpotencial. Da forma como escrevemos o potencial, a equação de primeira ordem (2.29) pode ser escrita como duas outras, como segue:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi, \quad (2.34a)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm W_\chi, \quad (2.34b)$$

em que fizemos uma escolha particular. Os sinais positivo e negativo nos dão, novamente, a simetria entre defeitos e anti-defeitos.

Outras escolhas para as equações de primeira ordem, tais como,

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} &= W_\chi, & \frac{d\phi}{dx} &= -W_\chi, \\ \frac{d\chi}{dx} &= W_\phi, & \frac{d\chi}{dx} &= W_\phi, \end{aligned}$$

foram consideradas em [16]. Por hora, a escolha feita nos ajudará a descrever o método da obtenção das equações de primeira ordem. As equações (2.34) são as equações de Bogomol'nyi para a teoria (2.25).

Usando agora o Procedimento de Bogomol'nyi, devemos obter as mesmas eqs.(2.34). Seja a densidade de energia (2.28a) para configurações estáticas

$$\theta^{00} = \frac{1}{2} (\phi'^2 + \chi'^2 + W_\phi^2 + W_\chi^2),$$

em que usamos a definição do potencial dada em (2.33). Com essa substituição, podemos escrever

$$\theta^{00} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dx} \mp W_\chi \right)^2 \right] \pm \frac{dW}{dx}.$$

Uma vez que a energia é uma quantidade não-negativa para todos os valores de  $\phi$  e  $\chi$ , eq.(2.32), o estado fundamental é atingido desde que tenhamos configurações tais que

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} &= \pm W_\phi, \\ \frac{d\chi}{dx} &= \pm W_\chi \end{aligned}$$

e com energia

$$E = |\Delta W| \equiv |W(\infty) - W(-\infty)|. \quad (2.37)$$

Agora, precisamos verificar se essas equações resolvem as equações de movimento (2.27), ou seja, se há física nas soluções das equações de Bogomol'nyi. Para isso, seguiremos os passos descritos na teoria para um campo escalar real. Derivando as equações de Bogomol'nyi, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dx^2} &= \pm W_{\phi\phi} \frac{d\phi}{dx} \pm W_{\chi\phi} \frac{d\chi}{dx} = W_{\phi\phi} W_\phi + W_{\chi\phi} W_\chi, \\ \frac{d^2\chi}{dx^2} &= \pm W_{\chi\chi} \frac{d\chi}{dx} \pm W_{\phi\chi} \frac{d\phi}{dx} = W_{\chi\chi} W_\chi + W_{\phi\chi} W_\phi, \end{aligned}$$

em que usamos as equações de primeira ordem para obter os termos a direita das segundas igualdades. Derivando o potencial (2.33) com relação aos campos, as equações de movimento podem ser reescritas como

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_{\phi\phi} W_\phi + W_\chi W_{\chi\phi}, \quad (2.39a)$$

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = W_\chi W_{\chi\chi} + W_\phi W_{\phi\chi}, \quad (2.39b)$$

demonstrando que as equações de Bogomol'nyi resolvem as equações de movimento. Contudo, para o caso de dois campos escalares reais não é possível demonstrar que as equações de movimento também resolvem as equações de Bogomol'nyi. Ou seja, o conjunto das soluções das equações de primeira ordem forma apenas um subconjunto de soluções das equações de movimento. Em outras palavras, nem todas as soluções físicas são soluções das equações de primeira ordem. Porém, como demonstramos, todas as soluções das equações de Bogomol'nyi são soluções das equações de movimento, logo, estados físicos.

Assim como para a teoria de um campo real, podemos estudar a estabilidade linear da teoria. Sejam  $\phi(x, t) = \phi(x) + \eta(x, t)$  e  $\chi(x, t) = \chi(x) + \epsilon(x, t)$  flutuações em primeira ordem das soluções estáticas. Substituindo esses campos perturbados

nas eqs.(2.26), obtemos

$$\ddot{\eta}(x, t) - \eta''(x, t) - \phi''(x) + \left( \frac{\partial V}{\partial \phi} \Big|_{\phi(x)} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi(x)} \eta(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \chi} \Big|_{\chi(x)} \epsilon(x, t) \right) = 0,$$

$$\ddot{\epsilon}(x, t) - \epsilon''(x, t) - \chi''(x) + \left( \frac{\partial V}{\partial \chi} \Big|_{\chi(x)} + \frac{\partial^2 V}{\partial \chi \partial \phi} \Big|_{\phi(x)} \eta(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} \Big|_{\chi(x)} \epsilon(x, t) \right) = 0.$$

Eliminando as equações estáticas para os campos  $\phi(x)$  e  $\chi(x)$ , chegamos a

$$\ddot{\eta}(x, t) - \eta''(x, t) + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi(x)} \eta(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \chi} \Big|_{\chi(x)} \epsilon(x, t) \right) = 0, \quad (2.41a)$$

$$\ddot{\epsilon}(x, t) - \epsilon''(x, t) + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \chi \partial \phi} \Big|_{\phi(x)} \eta(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} \Big|_{\chi(x)} \epsilon(x, t) \right) = 0. \quad (2.41b)$$

Façamos as expansões

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos \omega_n t, \quad \epsilon(x, t) = \sum_n \epsilon_n(x) \cos \omega_n t.$$

Fazendo a substituição das expressões acima em (2.41), obtemos

$$-\frac{d^2}{dx^2} \eta_n(x) + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi(x)} \eta_n(x) + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \chi} \Big|_{\chi(x)} \epsilon_n(x) \right) = \omega_n^2 \eta_n(x),$$

$$-\frac{d^2}{dx^2} \epsilon_n(x) + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \chi \partial \phi} \Big|_{\phi(x)} \eta_n(x) + \frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} \Big|_{\chi(x)} \epsilon_n(x) \right) = \omega_n^2 \epsilon_n(x),$$

que ainda podem ser colocadas na forma mais compacta

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + U \right) \Psi_n(x) = \omega_n^2 \Psi_n(x), \quad (2.42)$$

em que

$$\Psi_n(x) = \begin{pmatrix} \eta_n(x) \\ \epsilon_n(x) \end{pmatrix}$$

e

$$U = \begin{pmatrix} \partial^2 V / \partial \phi^2 & \partial^2 V / \partial \phi \partial \chi \\ \partial^2 V / \partial \chi \partial \phi & \partial^2 V / \partial \chi^2 \end{pmatrix}.$$

Definimos o seguinte produto interno no espaço dos vetores  $\Psi_n$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_i^\dagger(x) \Psi_j(x) dx = \delta_{ij}.$$

Uma vez que, exigimos que  $W$  fosse uma função suave dos campos  $\phi$  e  $\chi$ , temos a igualdade entre as derivadas mistas. Mais uma vez obtemos uma equação tipo Schrödinger, (2.42), com 'Hamiltoniano'

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + U. \quad (2.43)$$

Com a definição (2.33) para o potencial  $U$ , tem-se

$$U = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{C} \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= W_{\phi\phi}^2 + W_\phi W_{\phi\phi\phi} + W_{\chi\phi}^2 + W_\chi W_{\phi\phi\chi} \\ &= W_{\phi\phi}^2 + W_{\chi\phi}^2 + \frac{d}{dx} W_{\phi\phi}, \\ \mathcal{B} &= W_{\chi\phi} W_{\phi\phi} + W_\phi W_{\chi\phi\phi} + W_{\chi\chi} W_{\phi\chi} + W_\chi W_{\chi\phi\chi} \\ &= W_{\chi\phi} W_{\phi\phi} + W_{\chi\chi} W_{\phi\chi} + \frac{d}{dx} W_{\chi\phi}, \\ \mathcal{C} &= W_{\chi\phi}^2 + W_\phi W_{\chi\chi\phi} + W_{\chi\chi}^2 + W_\chi W_{\chi\chi\chi} \\ &= W_{\chi\phi}^2 + W_{\chi\chi}^2 + \frac{d}{dx} W_{\chi\chi}, \end{aligned}$$

em que usamos as equações de Bogomol'nyi para  $\phi$  e  $\chi$ . Com a forma explícita para o 'potencial'  $U$ , dada acima, a equação de Schrödinger pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} H\Psi_n(x) &= \left[ \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} W_{\phi\phi} & W_{\chi\phi} \\ W_{\phi\chi} & W_{\chi\chi} \end{pmatrix} \right] \left[ -\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} W_{\phi\phi} & W_{\chi\phi} \\ W_{\phi\chi} & W_{\chi\chi} \end{pmatrix} \right] \Psi_n(x) \\ &= \omega_n^2 \Psi_n(x), \end{aligned}$$

ou ainda

$$H\Psi_n(x) = S^\dagger S \Psi_n(x) = \omega_n^2 \Psi_n(x),$$

com  $S$  dado por

$$S = -\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} W_{\phi\phi} & W_{\chi\phi} \\ W_{\phi\chi} & W_{\chi\chi} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Foi mostrado para um campo real, que o Hamiltoniano tem autovalores  $w_n^2 \geq 0$  e com isso a teoria é linearmente estável. Devemos mostrar o mesmo para um sistema com dois campos, uma vez que o 'potencial'  $U$  tem uma estrutura mais rica em relação àquela encontrada na teoria com um único campo escalar. Porém, apesar de parecer mais complicada, a demonstração é simples. A frequência da solução pode ser escrita como

$$\omega_n^2 = \int \Psi_n^\dagger(x) S^\dagger S \Psi_n(x) dx = \int |S \Psi_n(x)|^2 dx$$

em que usamos a propriedade  $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ . Desta forma percebemos que os autovalores são não-negativos para todo intervalo  $x$ .

Vamos definir, assim como feito na secção passada, a corrente topológica do sistema afim de ter um guia no momento de classificar uma solução como topológica ou não-topológica. Definimos a corrente topológica para um sistema de dois campos escalares da seguinte maneira:

$$j_T^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

com  $\varepsilon$  sendo o tensor anti-simétrico de Levi-Civita. Com esta definição a corrente topológica continua conservada

$$\partial_\mu j_T^\mu = 0. \quad (2.46)$$

Vamos definir a densidade de corrente topológica

$$\rho = j^0 = \varepsilon^{01} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi'(x) \\ \chi'(x) \end{pmatrix}.$$

Com a definição acima, podemos escrever a corrente topológica como

$$Q_T = \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho^t \rho) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dx} \right)^2 \right] dx$$

Através da equação (2.32)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\chi}{dx} \right)^2 \right] dx$$

e da forma da energia para as configurações BPS

$$E = |\Delta W|,$$

identificamos

$$Q_T = |\Delta W|,$$

assim como obtido para o caso com somente um campo escalar real. Usando o mesmo argumento de que soluções BPS conectam mínimos distintos do potencial, temos que a carga topológica associada é sempre diferente de zero, e com isso que nossas soluções BPS são topológicas.

Nesta secção, mostramos como obter, dada a teoria (2.25), - e considerando potenciais não negativos, na forma (2.33) - equações de primeira ordem que resolvem as equações de movimento, ou seja, são soluções que possuem relevância física. Porém, o conjunto de soluções das equações de Bogomol'nyi não consegue cobrir todo o conjunto de soluções das equações de movimento. Mostramos ainda, que essas soluções são linearmente estáveis e que possuem caráter topológico associado.

## Capítulo 3

# Teoria de Wess-Zumino

Nesta secção vamos estudar o setor bosônico da teoria de Wess-Zumino. A teoria da qual partiremos é uma extensão daquela apresentada na Sec.[2.2]. Sendo assim, o modelo proposto é o seguinte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - V, \quad (3.1)$$

em que  $V = V(\bar{\varphi}\varphi)$  é o potencial de auto-interação dos campos e que também descreve a interação entre os campos. Os campos complexos  $\varphi$  e  $\bar{\varphi}$  são independentes e tais que

$$\varphi = \phi + i\chi, \quad \bar{\varphi} = \phi - i\chi,$$

em que  $\phi$  e  $\chi$  são campos escalares reais também independentes. É fácil verificar que, quando escrita em termos dos campos escalares reais, (3.1) tem a mesma forma da teoria (2.25), porém não há a equivalência total, como mencionaremos posteriormente.

As equações de movimento para a teoria são dadas por

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + 2 \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} = 0, \quad (3.2a)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \bar{\varphi} + 2 \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.2b)$$



Uma vez que os campos agora são complexos, a eles podemos associar uma carga que podemos identificar como a carga elétrica quando fazemos o acoplamento deste com um campo de *gauge*. Sendo assim, devemos ser cuidadosos quanto ao comportamento das equações de movimento frente a transformação por conjugação de carga. Uma vez que estamos trabalhando com campos escalares a transformação  $C$  é simples e leva o campo  $\varphi$  em  $\bar{\varphi}$ . Quando fazemos a conjugação de (3.2a), obtemos (3.2b) e vice-versa, o que nos mostra a invariância do modelo frente a simetria  $C$ . Aplicando, nas equações de movimento (3.2), as transformações  $C$  ( $x \rightarrow -x$ ) e  $T$  ( $t \rightarrow -t$ ), percebemos que elas são invariantes. Quando dizemos invariantes, nos referimos ao fato que a equação de movimento para  $\varphi$  é levada na equação para  $\bar{\varphi}$ . Logo, nossa teoria é invariante frente a transformação  $CPT$ , ou seja, é simétrica.

Para investigar a possível violação da SL, atentamos para as componentes do tensor momento-energia do sistema. Essas são dadas por

$$\theta^{00} = \frac{1}{2} |\dot{\varphi}|^2 + \frac{1}{2} |\varphi'|^2 + V, \quad (3.3a)$$

$$\theta^{01} = -\frac{1}{2} (\dot{\bar{\varphi}}\varphi' + \bar{\varphi}'\dot{\varphi}), \quad (3.3b)$$

$$\theta^{10} = -\frac{1}{2} (\dot{\varphi}\bar{\varphi}' + \dot{\bar{\varphi}}\varphi'), \quad (3.3c)$$

$$\theta^{11} = \frac{1}{2} |\dot{\varphi}|^2 + \frac{1}{2} |\varphi'|^2 - V, \quad (3.3d)$$

em que, utilizando as equações de movimento, podemos perceber que ele é conservado. Com as componentes acima, podemos concluir que a teoria de Wess-Zumino não viola a SL e, como vimos, tão pouco a  $SCPT$ .

Como dito nas seções anteriores, estamos procurando por soluções estáticas para os campos das teorias apresentadas. Sendo assim, podemos escrever as equações de movimento, para configurações estáticas dos campos, como

$$\varphi'' - 2\frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} = 0, \quad (3.4a)$$

$$\bar{\varphi}'' - 2\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.4b)$$

Já vez que a teoria com dois campos escalares reais possui uma estrutura BPS, ou seja, conseguimos encontrar equações de primeira ordem que resolvem as equações de movimento, podemos esperar encontrar o mesmo na teoria de Wess-Zumino, uma vez que as teorias para dois campos e a teoria de Wess-Zumino são semelhantes quando escrevemos a última em função dos campos escalares reais. Primeiramente vamos obter as equações de primeira ordem via o método da quadratura. Com este propósito, multipliquemos (3.4a) por  $\bar{\phi}'$  e (3.4b) por  $\phi'$ , o que nos fornece,

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dx} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2 \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} \frac{d\bar{\varphi}}{dx}$$

e

$$\frac{d\varphi}{dx} \frac{d^2\bar{\varphi}}{dx^2} = 2 \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dx}.$$

Somando-as, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 = \frac{dV}{dx},$$

que ainda pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 = V. \quad (3.5)$$

A constante de integração foi feita igual a zero pelos mesmos motivos apresentados para os modelos com campos reais. A equação anterior nos diz que a parte potencial é novamente igual a parte gradiente e além disso, que o potencial, como obtido para campos escalares reais, deve ser uma quantidade positiva, para todo valor de  $\varphi$  e  $\bar{\varphi}$ , se quisermos obter equações de primeira ordem. Assim, afim de estender o método de obtenção de equações de Bogomol'nyi para nossa teoria escrevemos o potencial da seguinte maneira:

$$V = \frac{1}{2} \left| \bar{W}'(\varphi) \right|^2, \quad (3.6)$$

em que  $W(\varphi)$  é uma função holomórfica. Devido a essa holomorficidade, a partir daqui escreveremos  $\bar{W}'(\varphi) = W'(\bar{\varphi})$ .

Seja

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left| \frac{d\phi}{dx} \right|^2 + V(\phi, \chi) \right]$$

a energia do sistema. Com a relação (3.5), podemos escrever

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d\phi}{dx} \right|^2 dx.$$

Seja agora  $(\varphi_i, \bar{\varphi}_i)$  um mínimo do potencial. Uma vez que queremos configurações com energia finita, devemos impor as seguintes condições de contorno

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d\phi}{dx} \rightarrow 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) \rightarrow \varphi_i, \quad (3.7a)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d\bar{\varphi}}{dx} \rightarrow 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \chi(x) \rightarrow \bar{\varphi}_i \quad (3.7b)$$

e que  $V(\varphi_i, \bar{\varphi}_i) = 0$ .

Substituindo a relação (3.6) na equação de primeira ordem (3.5), escrevemos

$$\frac{d\phi}{dx} = W'(\bar{\varphi})e^{-i\xi},$$

em que  $\xi$  é uma constante real arbitrária. Essa é a equação de Bogomol'nyi para o campo  $\phi$ . Para obter a equação de primeira ordem para o campo  $\bar{\varphi}$ , basta fazer a conjugação da equação anterior para obter

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dx} = W'(\varphi)e^{i\xi}.$$

Da mesma forma, como no caso com dois campos escalares, outras escolhas podem ser feitas, mas escolhemos esta para ilustrar o método.

Vamos agora, seguir o procedimento de Bogomol'nyi para obtenção das equações de primeira ordem. Com a definição do potencial, (3.6), a densidade de energia (3.3a) pode ser reescrita como

$$\theta^{00} = \left| \frac{d\phi}{dx} - W'(\bar{\varphi})e^{-i\xi} \right|^2 + \frac{dW}{dx}, \quad (3.8)$$

o que novamente nos fornece um limite de Bogomol'nyi para a teoria. A energia é minimizada para  $\Delta W$  desde que os campos estáticos satisfaçam as equações de primeira ordem

$$\frac{d\varphi}{dx} = W'(\bar{\varphi})e^{-i\xi}, \quad (3.9a)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dx} = W'(\varphi)e^{i\xi}, \quad (3.9b)$$

que são as equações de Bogomol'nyi obtidas pelo método da quadratura. Através da comparação das equações (3.9a) e (3.9b) com (2.34a) e (2.34b), podemos interpretar o fator de fase  $\xi$  como um seletor de defeitos e anti-defeitos, assim como acontecia com os sinais positivo e negativo no caso para dois campos reais. Sendo assim, a simetria  $\xi \leftrightarrow \xi + \pi$  pode ser vista como a uma simetria defeito $\leftrightarrow$ anti-defeito.

Uma vez obtidas, devemos provar que as equações de Bogomol'nyi, assim como nos casos anteriores, resolvem as equações de movimento. Desde que para obtermos a equação para o campo  $\bar{\varphi}$  basta fazer a conjugação da equação para o campo associado, faremos a demonstração somente para a equação do campo  $\varphi$ . Derivando (3.9a), obtemos

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = W''(\bar{\varphi})e^{-i\xi}\varphi',$$

que após a substituição de (3.9b) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = W'(\varphi)W''(\bar{\varphi}). \quad (3.10)$$

Usando a relação para o potencial, eq(3.6), temos

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} = \frac{1}{2}W'(\varphi)W''(\bar{\varphi}).$$

Logo, podemos reescrever a eq(3.10) como

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2\frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}}.$$

Assim, demonstramos que as equações de Bogomol'nyi resolvem as equações de movimento. Entretanto, existe uma outra propriedade interessante da teoria

de Wezz-Zumino: as equações de movimento também resolvem as equações de Bogomol'nyi assim como acontecia no caso de um único campo escalar real. Isso mostra a diferença entre a teoria de Wezz-Zumino e a teoria para dois campos escalares que até o momento não era sentida, pois, como descrito acima, a teoria de Wess-Zumino parecia apenas uma forma equivalente de escrever a teoria para dois campos. Sendo assim, definindo a razão

$$R(\varphi) = \frac{1}{W'(\bar{\varphi})} \frac{d\varphi}{dx} \quad (3.11)$$

e derivando-a com relação a  $x$ , obtemos

$$\frac{dR(\varphi)}{dx} = \frac{1}{W'(\bar{\varphi})} \frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{1}{(W'(\bar{\varphi}))^2} W''(\bar{\varphi}) \frac{d\bar{\varphi}}{dx}.$$

Utilizando a equação de movimento (3.10) na relação acima, escrevemos

$$\frac{dR(\varphi)}{dx} = \frac{1}{W'(\bar{\varphi})} W'(\varphi) W''(\bar{\varphi}) - \frac{d\varphi}{dx} \frac{1}{(W'(\bar{\varphi}))^2} W''(\bar{\varphi}) \frac{d\bar{\varphi}}{dx},$$

ou ainda como

$$\begin{aligned} \frac{dR(\varphi)}{dx} &= \left( \frac{1}{W'(\bar{\varphi})} \right)^2 \left[ |W'(\bar{\varphi})|^2 - \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 \right] W''(\bar{\varphi}) \\ &= A(\varphi, \bar{\varphi}) \frac{W''(\bar{\varphi})}{(W'(\bar{\varphi}))^2}, \end{aligned}$$

em que

$$A(\varphi, \bar{\varphi}) = |W'(\bar{\varphi})|^2 - \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2.$$

Derivando  $A$  com relação a  $x$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{dA(\varphi, \bar{\varphi})}{dx} &= W'(\varphi) W''(\bar{\varphi}) \frac{d\bar{\varphi}}{dx} + W'(\bar{\varphi}) W''(\varphi) \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d}{dx} \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 \\ &= \frac{d}{dx} \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 - \frac{d}{dx} \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 = 0, \end{aligned}$$

em que usamos as equações de movimento (3.10) e sua conjugada. Sendo assim, quando os campos  $\varphi$  e  $\bar{\varphi}$  resolvem as equações de movimento a quantidade  $A$

é independente de  $x$ . Já vez que os mínimos do potencial são pontos extremos do superpotencial  $W$ , temos a condição de contorno

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} W'(\varphi) \rightarrow 0.$$

Com isso, o termo  $A$  é nulo e podemos mostrar que  $R(\varphi)$  tem módulo 1. Para obter o módulo de (3.11), façamos

$$|R(\varphi)|^2 = \overline{R(\varphi)}R(\varphi) = \frac{1}{|W'(\bar{\varphi})|^2} \left| \frac{d\varphi}{dx} \right|^2 = 1,$$

que nos permite escrever  $R = e^{-i\xi}$ , com  $\xi$  um fator de fase arbitrário.

Vamos, agora, mostrar a estabilidade linear das soluções da teoria de Wess-Zumino. Vamos introduzir as flutuações  $\varphi(x, t) = \varphi(x) + \eta(x, t)$  e  $\bar{\varphi}(x, t) = \bar{\varphi}(x) + \bar{\eta}(x, t)$  para os campos. Os campos  $\eta$  e seu conjugado são novamente interpretados como perturbações em primeira ordem da soluções estáticas. Usando esses campos nas equações de movimento (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}(x, t) - \eta''(x, t) - \varphi''(x) + 2 \left( \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} + \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\varphi}^2} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \bar{\eta}(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\varphi} \partial \varphi} \Big|_{\varphi(x)} \eta(x, t) \right) &= 0, \\ \ddot{\bar{\eta}}(x, t) - \bar{\eta}''(x, t) - \bar{\varphi}''(x) + 2 \left( \frac{\partial V}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi(x)} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \bar{\varphi}} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \bar{\eta}(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi(x)} \eta(x, t) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Usando as equações para os campos estáticos  $\varphi(x)$  e  $\bar{\varphi}(x)$ , chegamos a

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}(x, t) - \eta''(x, t) + 2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\varphi}^2} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \bar{\eta}(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\varphi} \partial \varphi} \Big|_{\varphi(x)} \eta(x, t) \right) &= 0, \\ \ddot{\bar{\eta}}(x, t) - \bar{\eta}''(x, t) + 2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \bar{\varphi}} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \bar{\eta}(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi(x)} \eta(x, t) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Com as expansões

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos \omega_n t, \quad \bar{\eta}(x, t) = \sum_n \bar{\eta}_n(x) \cos \omega_n t.$$

as equações (3.13a), obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2}\eta_n(x) + 2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\bar{\varphi}^2}\Big|_{\bar{\varphi}(x)}\bar{\eta}_n(x,t) + \frac{\partial^2 V}{\partial\bar{\varphi}\partial\varphi}\Big|_{\varphi(x)}\eta_n(x)\right) &= \omega_n^2\eta_n(x), \\ -\frac{d^2}{dx^2}\bar{\eta}_n(x) + 2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial\bar{\varphi}}\Big|_{\bar{\varphi}(x)}\bar{\eta}_n(x,t) + \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\Big|_{\varphi(x)}\eta_n(x)\right) &= \omega_n^2\bar{\eta}_n(x), \end{aligned}$$

que ainda podem ser colocadas na forma mais compacta

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + 2U\right]\Psi_n(x) = \omega_n^2\Psi_n(x), \quad (3.14)$$

que possui a mesma forma da que foi obtida para um campo escalar real. Na equação acima, fizemos as identificações

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &= \begin{pmatrix} \eta_n(x) \\ \bar{\eta}_n(x) \end{pmatrix}, \\ U &= \begin{pmatrix} \partial^2 V/\partial\bar{\varphi}\partial\varphi & \partial^2 V/\partial\bar{\varphi}^2 \\ \partial^2 V/\partial\varphi^2 & \partial^2 V/\partial\varphi\partial\bar{\varphi} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Novamente, obtemos uma equação tipo Schrödinger. Dado o potencial, na forma (3.6), temos

$$2U = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \bar{\mathcal{B}} & \mathcal{A} \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= W''(\varphi)W''(\bar{\varphi}), \\ \mathcal{B} &= W'(\varphi)W'''(\bar{\varphi}) = e^{-i\xi}\frac{d}{dx}W''(\bar{\varphi}). \end{aligned}$$

em que usamos a equação de primeira ordem  $\bar{\varphi}$ . Com a forma de  $U$  dada acima,

podemos escrever a equação de Schrödinger como

$$\begin{aligned} H\Psi_n(x) &= \left[ \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & W''(\bar{\varphi})e^{-i\xi} \\ W''(\varphi)e^{i\xi} & 0 \end{pmatrix} \right] \times \\ &\quad \left[ -\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & W''(\bar{\varphi})e^{-i\xi} \\ W''(\varphi)e^{i\xi} & 0 \end{pmatrix} \right] \Psi_n(x) \\ &= \omega_n^2 \Psi_n(x), \end{aligned}$$

ou ainda como

$$H\Psi_n(x) = S^\dagger S \Psi_n(x) = \omega_n^2 \Psi_n(x)$$

com  $S$  dado por

$$S = -\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & W''(\bar{\varphi})e^{-i\xi} \\ W''(\varphi)e^{i\xi} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

A prova que o Hamiltoniano possui autovalores não-negativos segue a demonstração feita para dois campos escalares reais, mostrada na Sec.[2.2], com a definição

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_i^\dagger(x) \Psi_j(x) dx = \delta_{ij},$$

para o produto interno no espaço dos vetores  $\Psi_n(x)$ .



## Capítulo 4

# Violação das simetrias em estruturas de Defeitos - Campos escalares reais

Agora trataremos do comportamento das estruturas de defeitos, descritas por campos escalares reais, num ambiente com a quebra explícita das  $SL$  e  $SCPT$ . Primeiramente vamos estudar uma teoria de um campo escalar real. Como veremos, esse sistema quebra somente a simetria de Lorentz mas, posteriormente, trataremos de uma teoria com dois campos escalares reais que viola as  $SL$  e  $SCPT$  e que comporta uma estrutura de defeitos.

### 4.1 Um campo escalar real

O modelo é descrito por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \kappa^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V, \quad (4.1)$$

em que  $V$  é potencial de auto-interação do campo e  $\kappa^{\mu\nu}$  é um tensor constante dado por

$$\kappa^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

em que  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes reais. Este modelo foi introduzido em [18] para estudar a violação das SL e SCPT no setor taquiônico de uma teoria campo da corda. A partir daqui faremos  $\beta = 0$  por simplicidade. A equação de movimento é

$$\ddot{\phi} - \phi'' + 2\alpha\dot{\phi}' + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (4.3)$$

Para configurações de campos estáticos a equação anterior é escrita como

$$\phi'' = \frac{dV}{d\phi}. \quad (4.4)$$

Ou seja, campos estáticos não violam a SL nem tão pouco SCPT, pois vemos que a forma da equação de movimento é idêntica à obtida no caso sem a violação das simetrias (2.3). No entanto, se procurarmos por configurações de ondas viajantes, veremos que essas violarão a invariância de Lorentz. Porém, mesmo violando a SL podemos tentar achar soluções que possam ser escritas como  $\phi = \phi(u)$ , em que

$$u = \gamma_\alpha(x - vt), \quad (4.5)$$

porém  $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha(v, \alpha)$  pode ter uma forma diferente da usual, por isso o denotamos com o índice subscrito. A partir da eq.(4.5), temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma_\alpha v, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_\alpha. \quad (4.6)$$

Assim as derivadas envolvidas na equação de movimento, no referencial em movimento, são dadas por

$$\ddot{\phi} = \frac{d}{du} \frac{\partial u}{\partial t} \left( \frac{d\phi}{du} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \gamma_\alpha^2 v^2 \frac{d^2\phi}{du^2}, \quad (4.7a)$$

$$\phi'' = \frac{d}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{d\phi}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \gamma_\alpha^2 \frac{d^2\phi}{du^2}, \quad (4.7b)$$

$$\dot{\phi}' = \frac{d}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{d\phi}{du} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = -\gamma_\alpha^2 v \frac{d^2\phi}{du^2}. \quad (4.7c)$$

Substituindo as expressões anteriores na eq.(4.3), obtemos a equação

$$\gamma_\alpha^2 (1 - v^2 + 2\alpha v) \frac{d^2\phi}{du^2} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (4.8)$$

Devido a covariância da equação de movimento frente à *boosts*, esperamos que ela tenha a mesma forma no referencial em repouso, eq.(4.4). Logo, devemos ter

$$\gamma_\alpha = 1/\sqrt{1 - v^2 + 2\alpha v} \quad (4.9)$$

e conseqüentemente

$$\frac{d^2\phi}{du^2} = \frac{dV}{d\phi}, \quad (4.10)$$

Através da equação de movimento no referencial em repouso, percebemos que para qualquer campo estático  $\phi_s(x)$  que resolve (4.4), existe uma solução tipo onda viajante

$$\phi(u) = \phi_s(u), \quad (4.11)$$

que resolve (4.10). Assim, a solução dependente do tempo (onda viajante),  $\phi(u)$ , tem a mesma forma da solução estática  $\phi_s(x)$  e viaja com velocidade constante  $v$  com largura dada por  $w = w_0/\gamma_\alpha$ , em que  $w_0$  é a largura da solução estática. Assim, para  $\alpha v > 0$  o valor de  $\gamma_\alpha$  será menor e conseqüentemente a largura da solução irá aumentar.

Na ausência de potencial - este caso foi considerado em [20] - a equação de movimento se torna

$$\ddot{\phi} - \phi'' + 2\alpha\dot{\phi}' = 0.$$

Com a solução em ondas planas para o campo  $\phi$ , obtemos a relação de dispersão

$$\omega^2 - k_x^2 - 2\alpha\omega k_x = 0. \quad (4.12)$$

Resolvendo essa equação em  $\omega$ , obtemos

$$\omega = \left( \alpha \pm \sqrt{1 + \alpha^2} \right) k_x.$$

Logo, podemos obter a velocidade das excitações sem massa, pois

$$v = \frac{\partial \omega}{\partial k_x}.$$

Ou seja, a velocidade do sistema é limitada ao intervalo  $v \in (-\sqrt{1+\alpha^2} + \alpha, \sqrt{1+\alpha^2} + \alpha)$ . Quando fazemos  $\alpha$  tender a zero, voltamos a situação usual com  $\gamma_\alpha$  dado por  $\gamma_\alpha(v, 0) = \gamma(v) = 1/\sqrt{1-v^2}$ . No limite de  $\alpha$  pequeno, podemos aproximar o intervalo de limitação de  $v$  a  $(-1 + \alpha, 1 + \alpha)$ . Ou seja, há uma assimetria no intervalo das velocidades alcançadas. Vale ressaltar que estamos descrevendo uma teoria no vácuo em que há uma direção preferencial no movimento dada pelo sinal da constante  $\alpha$ . Ou seja, a teoria descreve uma birefringência do vácuo. Isso é uma característica da quebra da invariância de Lorentz provocada pela presença de um termo constante na lagrangiana. Também percebemos que há uma violação da simetria de paridade e inversão temporal, porém há a conservação da *SCPT* uma vez que o campo escalar real é invariante sobre a conjugação de carga. Existe ainda uma outra maneira de comprovar a violação da invariância de Lorentz desse modelo. Podemos mostrar que o tensor momento energia do sistema não é simétrico. Suas componentes são dadas por

$$\theta^{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 + V, \quad (4.13a)$$

$$\theta^{01} = -\dot{\phi}\phi' - \alpha\phi'^2, \quad (4.13b)$$

$$\theta^{10} = -\dot{\phi}\phi' + \alpha\dot{\phi}^2, \quad (4.13c)$$

$$\theta^{11} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\phi'^2 - V. \quad (4.13d)$$

Devido a  $\theta^{01} \neq \theta^{10}$ , percebemos a violação da simetria de Lorentz. Apesar dessa violação, o tensor energia-momento é conservado, já que  $\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0$  pela equação de movimento.

Assim, a teoria (4.1) viola a invariância de Lorentz porém preserva a simetria sob a transformação *CPT* o que não contradiz o teorema em [6].

É interessante estudar o que acontece com a energia dessas configurações de campos nesse ambiente de violação da SL. A energia da onda viajante é dada por

$$E_v = \int \theta^{00} dx = \int \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + V \right) dx,$$

que, usando as relações (4.7),

$$\dot{\phi} = -\gamma_\alpha v \frac{d\phi}{du}, \quad \phi' = \gamma_\alpha \frac{d\phi}{du},$$

pode ser escrita como

$$E_v = \int \left[ \frac{1}{2} (\gamma_\alpha^2 v^2 + \gamma_\alpha^2) \left( \frac{d\phi}{du} \right)^2 + V \right] dx$$

Podemos usar agora o método da quadratura afim de escrevermos a expressão anterior de uma forma mais simples. Procedendo da mesma forma, como descrita no Capítulo 2, com equação de movimento no referencial em movimento (4.10), obtemos

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{du} \right)^2 = V$$

em que, novamente, fizemos a constante de integração igual a zero devido a finitude da energia. Desta forma, a energia da onda viajante é dada por

$$E_v = \frac{\gamma_\alpha}{2} \left( v^2 + 1 + \frac{1}{\gamma_\alpha^2} \right) \int \left( \frac{d\phi}{du} \right)^2 \gamma_\alpha dx.$$

Como  $u = \gamma_\alpha (x - vt)$ , temos

$$E_v = \frac{\gamma_\alpha}{2} \left( v^2 + 1 + \frac{1}{\gamma_\alpha^2} \right) \int \left( \frac{d\phi}{du} \right)^2 du.$$

Substituindo a relação (4.9) no termo  $1/\gamma_\alpha^2$  e a expressão para a energia de uma configuração estática (2.9) na relação anterior, obtemos

$$\frac{E_v}{E} = \gamma_\alpha (1 + \alpha v), \quad (4.14)$$

em que  $E$  é a energia da solução estática. Para a onda que viaja no sentido oposto à descrita anteriormente, basta que invertamos o sinal da velocidade – ou o sinal de  $\alpha$  – e assim

$$\frac{E_v}{E_{-v}} = \frac{1 + \alpha v}{1 - \alpha v} \sqrt{\frac{1 - v^2 - 2\alpha v}{1 - v^2 + 2\alpha v}}, \quad (4.15)$$

que mais uma vez mostra a violação da simetria de Lorentz, uma vez que essa razão só é unitária no caso  $\alpha = 0$ . Notamos também que, no caso  $\alpha v > 0$ ,  $E_v < E_{-v}$ .

Desta maneira descrevemos a teoria de defeitos topológicos em uma dimensão que são invariantes pela *SCPT* mas que violam a invariância de Lorentz. Por exemplo, usando um potencial tipo  $\phi^4$ , iremos descrever *kinks* que se comportam frente à quebra da SL. Sabemos, por exemplo, que a solução estática para esse modelo é dada por  $\phi_s(x) = \tanh x$ , em que tomamos o centro da solução na origem e cuja largura é unitária. Desse modo, a onda viajante será dada por  $\phi(u) = \tanh \gamma_\alpha(x - vt)$  com largura  $1/\gamma_\alpha$ .

Porém, a teoria dada por(4.1) descreve uma falsa quebra da SL uma vez que podemos, com uma redefinição dos campos e das coordenadas [21], ou seja, com uma métrica efetiva, absorver o termo que viola a SL, o que poderia ser sentido, por exemplo, na simetrização do tensor momento-energia. Mas isso só acontece pois descrevemos uma teoria em que ocorre somente a auto-interação do campo  $\phi$ . Entretanto, podemos acoplar o campo escalar com outros campos, como o campo fermiônico, de modo que essa redefinição da métrica não absorva o termo de violação. Dessa maneira, esse estudo possui sua relevância.

## 4.2 Dois campos escalares reais

Nesta seção, descreveremos as implicações da extensão natural, do modelo descrito anteriormente, para dois campos escalares reais. Começamos com a teoria

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \kappa^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \frac{1}{2} \kappa^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - V(\phi, \chi). \quad (4.16)$$

em que, temos o mesmo tensor constante  $\kappa^{\mu\nu}$  dado na eq.(4.2) e tomaremos  $\beta = 0$ , novamente por simplicidade. Esse modelo, como o descrito na secção anterior, também descreverá uma falsa violação da SL pois, como anteriormente, é possível redefinir campos e coordenadas [21] afim de absorver o termo que nos fornece a violação. Porém, como já dito, um acoplamento dos campos  $\phi$  e  $\chi$  com outros campos poderá não permitir tal redefinição, de modo que o estudo desse tipo de violação da SL, no contexto de uma teoria com dois campos escalares reais, se torna justificável.

As equações de movimento para essa teoria são

$$\ddot{\phi} - \phi'' + 2\alpha\dot{\phi}' + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (4.17a)$$

$$\ddot{\chi} - \chi'' + 2\alpha\dot{\chi}' + \frac{\partial V}{\partial \chi} = 0 \quad (4.17b)$$

e conseqüentemente as equações de movimento para configurações estáticas são dadas por

$$\phi'' = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (4.18a)$$

$$\chi'' = \frac{\partial V}{\partial \chi} \quad (4.18b)$$

e como esperávamos, configurações estáticas não violam a SL nem tão pouco a *SCPT*.

Vamos examinar agora o que acontece com ondas viajantes nessa teoria. Ou seja, vamos procurar por soluções  $\phi = \phi(u)$  e  $\chi = \chi(u)$  com  $u$  dado em (4.5). Procedendo de modo análogo a secção anterior, na obtenção das derivadas e a subseqüente substituição nas equações de movimento (4.17) obtemos

$$\frac{d^2\phi}{du^2} = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (4.19a)$$

$$\frac{d^2\chi}{du^2} = \frac{\partial V}{\partial \chi}, \quad (4.19b)$$

desde que, novamente, tenhamos  $\gamma_\alpha$  dado pela eq.(4.9). Assim, características como intervalo de limitação da velocidade, largura da solução e etc. serão dadas da mesma maneira como no modelo para um campo. Essa conclusão é lógica pois os campos  $\phi$  e  $\chi$  não interagem, ou seja, o que estamos fazendo na realidade é estudar a presença de dois campos  $\phi$  no espaço. Assim a extensão para  $N$  campos escalares reais é trivial e todos esses campos terão as mesmas propriedades daquele descrito na secção anterior. Por isso que se torna interessante a questão da interação entre o campos  $\phi$  e  $\chi$  e como ela é alterada neste cenário da quebra das SL e SCPT. Esse é o foco da próxima secção.

### 4.3 Outro modelo com dois campos escalares reais

Como já dito, como a violação das SL e SCPT poderia alterar a interação entre os campos escalares é uma questão interessante. Com este propósito, propomos a seguinte teoria

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi + \kappa^\mu\phi\partial_\mu\chi - V(\phi, \chi). \quad (4.20)$$

em que o vetor

$$\kappa^\mu = (a, b), \quad (4.21)$$

com  $a$  e  $b$  constantes reais, irá implementar a violação das simetrias. Essa teoria é baseada em [17] em que o vetor  $\kappa^\mu$  é introduzido no setor de Higgs do Modelo-Padrão Estendido.

Como dissemos na Sec.[4.1], o modelo descrito lá não representa uma violação verdadeira da SL pois existe somente a auto-interação do campo escalar de modo que podemos redefinir campos e coordenadas [21], de modo a absorver essa aparente violação. Porém, também dissemos que caso houvesse o acoplamento dos campos escalares com um outro campo, talvez não houvesse a possibilidade de tal redefinição.



É isso que ocorre com a teoria (4.3), pois devido a interação entre os campos  $\phi$  e  $\chi$  a redefinição não é possível, o que levará à uma verdadeira quebra da simetria de Lorentz.

Para a teoria (4.20) as equações de movimento são dadas por

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - \kappa^\mu \partial_\mu \chi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (4.22a)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi + \kappa^\mu \partial_\mu \phi + \frac{\partial V}{\partial \chi} = 0. \quad (4.22b)$$

Como vimos na Sec.[4.1], uma forma de verificarmos a violação da SL é através do exame das componentes do tensor momento-energia do sistema. As componentes desse tensor para a teoria considerada é

$$\theta^{00} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + \dot{\chi}^2 + \phi'^2 + \chi'^2) - b\phi\chi' + V, \quad (4.23a)$$

$$\theta^{10} = -\phi'\dot{\phi} - \chi'\dot{\chi} + b\phi\dot{\chi}, \quad (4.23b)$$

$$\theta^{01} = -\phi'\dot{\phi} - \chi'\dot{\chi} - a\phi\chi', \quad (4.23c)$$

$$\theta^{11} = \frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 + \dot{\chi}^2 + \phi'^2 + \chi'^2) + a\phi\dot{\chi} - V. \quad (4.23d)$$

Como no caso para um campo,  $\theta$  é conservado, já que  $\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0$  pelas equações de movimento. Novamente, percebemos a diferença  $\theta^{01} \neq \theta^{10}$ , entretanto, dessa vez, como já dito, não há uma esquema de redefinições de modo a simetrizar o tensor momento energia, o que indica uma violação verdadeira da simetria de Lorentz.

Já dissemos na introdução desse capítulo que essa teoria comportaria uma estrutura de defeitos. Para isso, vamos estudar soluções estáticas dos campos. As equações de movimento para esse caso são dadas por

$$\phi'' + b\chi' = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (4.24a)$$

$$\chi'' - b\phi' = \frac{\partial V}{\partial \chi}. \quad (4.24b)$$

As equações anteriores não dependem da constante  $a$  e caso façamos  $b = 0$ , chegaremos as equações para dois campos escalares (2.27). Da mesma forma,

podemos procurar por ondas viajantes que tenham uma direção privilegiada no movimento, violando assim a simetria de Lorentz, porém essa predileção por um sentido no movimento ficará clara na discussão a seguir.

Nesse estágio já aparece uma diferença em relação aos casos considerados anteriormente. Nas Sec.[4.1] e [4.2] as soluções estáticas não violavam a SL nem mesmo a *SCPT*, porém o cenário agora nos fornece uma violação tanto da SL quando da *SCPT* uma vez que, apesar da invariância frente à transformação *CT*, as equações de movimento para campos estáticos violam a simetria de paridade (*P*) justamente através do termo vindo do setor de interação entre os campos  $\phi$  e  $\chi$ . Isso acontece justamente porque o vetor  $\kappa$  preferencia uma direção no eixo  $x$ . Essa violação da simetria de paridade vai ser justamente a responsável pela quebra da estrutura defeito $\leftrightarrow$  anti-defeito que ocorria na teoria usual. Porém, percebemos que as equações de movimento são simétricas frente as inversões  $x \rightarrow -x$  e  $b \rightarrow -b$ , caso o potencial seja invariante sob a transformação  $b \rightarrow -b$ . Assim, existe uma 'nova simetria de paridade',  $P'$ , em que defeitos são levados em anti-defeitos.

Procuraremos neste trabalho por defeitos topológicos BPS, logo, devemos encontrar equações de Bogomol'nyi [14] para a teoria. Afim de manter o limite de Bogomol'nyi introduzimos o seguinte potencial

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} (W_\phi + s_1 \chi)^2 + \frac{1}{2} (W_\chi + s_2 \phi)^2, \quad (4.25)$$

em que o superpotencial  $W = W(\phi, \chi)$  é uma função suave dos dois campos, com  $s_1$  e  $s_2$  constantes reais vinculadas pela relação,

$$s_2 - s_1 = b. \quad (4.26)$$

Essa é uma extensão do potencial considerado em [22]. Com esse novo potencial, podemos obter as equações de Bogomol'nyi mas sob o preço de que agora, a forma do potencial de interação entre os campos é alterado diretamente pelo parâmetro de violação das SL e *SCPT*,  $b$ . Seguindo o procedimento de Bogomol'nyi na obtenção

das equações de primeira ordem, precisamos da densidade de energia do sistema, que usando (4.23) pode ser escrita como

$$\theta^{00} = \frac{1}{2} (\phi' - W_\phi - s_1 \chi)^2 + \frac{1}{2} (\chi' - W_\chi - s_2 \phi)^2 + \frac{dW}{dx}. \quad (4.27)$$

O limite de Bogomol'nyi é alcançado quando a energia chega ao seu valor mínimo. A tensão entre os mínimos  $E_{ij} = \Delta W_{ij}$ , com  $\Delta W_{ij} = W_i - W_j$ , para  $W_i = W(\bar{\phi}_i, \bar{\chi}_i)$  e  $v_i = (\bar{\phi}_i, \bar{\chi}_i)$  sendo os mínimos do potencial,  $V(\bar{\phi}_i, \bar{\chi}_i) = 0$ . Quando o limite é alcançado e a energia do sistema é minimizada os campos são descritos pelas equações de primeira ordem

$$\phi' = W_\phi + s_1 \chi, \quad (4.28a)$$

$$\chi' = W_\chi + s_2 \phi, \quad (4.28b)$$

desde que sejam respeitadas as condições de contorno  $(\phi, \chi) \rightarrow (\bar{\phi}_i, \bar{\chi}_i)$  quando  $x \rightarrow \infty$ , e  $(\phi, \chi) \rightarrow (\bar{\phi}_j, \bar{\chi}_j)$  quando  $x \rightarrow -\infty$ . Desta forma, extendemos o procedimento de Bogomol'nyi para obtenção de equações de primeira ordem agora no caso de uma violação das SL e SCPT.

Vamos provar que as equações (4.28) resolvem as equações de movimento (4.24). Derivando as equações de Bogomol'nyi com relação a  $x$ , temos

$$\phi'' = W_{\phi\phi}\phi' + W_{\phi\chi}\chi' + s_1\chi',$$

$$\chi'' = W_{\chi\chi}\chi' + W_{\phi\chi}\phi' + s_2\phi',$$

em que fizemos  $W_{\phi\chi} = W_{\chi\phi}$  uma vez que assumimos  $W$  como uma função suave dos campos  $\phi$  e  $\chi$ . Substituindo (4.28) nas relações acima, chegamos a

$$\phi'' = W_\phi W_{\phi\phi} + s_1 \chi W_{\phi\phi} + W_\chi W_{\phi\chi} + s_2 \phi W_{\phi\chi} + s_1 \chi',$$

$$\chi'' = W_\chi W_{\chi\chi} + s_2 \phi W_{\chi\chi} + W_\phi W_{\phi\chi} + s_1 \chi W_{\phi\chi} + s_2 \phi',$$

Usando agora a expressão (4.25), temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \phi} &= (W_\phi + s_1 \chi) W_{\phi\phi} + (W_\chi + s_2 \phi) (W_{\phi\chi} + s_2) . \\ \frac{\partial V}{\partial \chi} &= (W_\phi + s_1 \chi) (W_{\phi\chi} + s_1) + (W_\chi + s_2 \phi) W_{\chi\chi}\end{aligned}$$

e assim, obteremos

$$\begin{aligned}\phi'' &= \frac{\partial V}{\partial \phi} - s_2 (\phi W_\chi + s_2 \phi) + s_1 \chi' = \frac{\partial V}{\partial \phi} - s_2 \chi' + s_1 \chi' \\ &= \frac{\partial V}{\partial \phi} - b \chi', \\ \chi'' &= \frac{\partial V}{\partial \chi} - s_1 (\phi W_\phi + s_1 \chi) + s_2 \phi' = \frac{\partial V}{\partial \chi} - s_1 \chi' + s_2 \phi' \\ &= \frac{\partial V}{\partial \chi} + b \phi',\end{aligned}$$

o que nos mostra que as equações de Bogomol'nyi resolvem as equações de movimento (4.24). Na obtenção das relações acima, usamos (4.26).

Outra característica, mostrada no cap.2, de configurações estáticas de campos escalares é que a energia é dividida igualmente entre as partes gradiente e potencial. Podemos mostrar que isso também acontece para configurações estáticas nesse ambiente com violação das SL e SCPT. Primeiramente, multipliquemos a primeira das equações (4.24) por  $\phi'$  e a segunda por  $\chi'$  e em seguida façamos a soma das expressões resultantes. Obteremos assim

$$\begin{aligned}\phi' \phi'' + \chi' \chi'' &= \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi' + \frac{\partial V}{\partial \chi} \chi' \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\phi'^2 + \chi'^2) &= \frac{dV}{dx},\end{aligned}$$

que pode ser escrita na forma já obtida, eq.(2.29),

$$\frac{1}{2} (\phi'^2 + \chi'^2) = V,$$

em que a constante foi feita igual a zero para que tivéssemos energia finita. Desta forma, a a densidade de energia (4.23a), para configurações estáticas dos campos,

pode ser escrita

$$\theta^{00} = \phi'^2 + \chi'^2 - b\phi\chi'. \quad (4.34)$$

Desde que o parâmetro de violação das SL e *SCPT* muda a forma da densidade de energia (4.34), poderíamos supor que isso desestabilizasse as soluções estáticas do modelo, porém, como mostraremos a seguir, isso não acontece. Seguiremos o procedimento padrão [23], porém aqui daremos apenas uma descrição superficial enquanto que uma investigação mais geral está em andamento. Essa investigação é importante uma vez que mostrará que mesmo defeitos de uma forma não-usual são estáveis linearmente mesmo com a modificação causada pela quebra das SL e *SCPT*. Sejam  $\phi(x, t) = \phi(x) + \eta(x, t)$  e  $\chi(x, t) = \chi(x) + \xi(x, t)$  flutuações em primeira ordem nos campos estáticos. Usando as equações de movimento (4.22) e as flutuações dos campos, obtemos

$$\begin{aligned} & \ddot{\eta}(x, t) - \eta''(x, t) - \phi''(x) - a\dot{\xi}(x, t) - b\xi'(x, t) - b\chi'(x) \\ & + \left( \frac{\partial V}{\partial \phi} \Big|_{\phi(x)} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi(x)} \eta(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \chi} \Big|_{\chi(x)} \xi(x, t) \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\xi}(x, t) - \xi''(x, t) - \chi''(x) + a\dot{\eta}(x, t) + b\eta'(x, t) + b\phi'(x) \\ & + \left( \frac{\partial V}{\partial \chi} \Big|_{\chi(x)} + \frac{\partial^2 V}{\partial \chi \partial \phi} \Big|_{\phi(x)} \eta(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} \Big|_{\chi(x)} \xi(x, t) \right) = 0. \end{aligned}$$

Usando as equações para os campos estáticos (4.24), chegamos a

$$\ddot{\eta}(x, t) - \eta''(x, t) - a\dot{\xi}(x, t) - b\xi'(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \Big|_{\phi(x)} \eta(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \chi} \Big|_{\chi(x)} \xi(x, t) = 0, \quad (4.36a)$$

$$\ddot{\xi}(x, t) - \xi''(x, t) + a\dot{\eta}(x, t) + b\eta'(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \chi \partial \phi} \Big|_{\phi(x)} \eta(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} \Big|_{\chi(x)} \xi(x, t) = 0. \quad (4.36b)$$

Novamente, temos que considerar um vetor tipo espaço para que possamos fazer as

expansões dos campos  $\eta$  e  $\chi$  em termo de cossenos. Fazendo  $a = 0$  e fazendo

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos \omega_n t, \quad \chi(x, t) = \sum_n \xi_n(x) \cos \omega_n t,$$

podemos escrever as equações(4.36) como

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2} \eta_n(x) - b \frac{d}{dx} \xi_n(x) + \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{\phi(x)} \eta_n(x) + \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \chi} \right|_{\chi(x)} \xi_n(x) &= \omega_n^2 \eta_n(x), \\ -\frac{d^2}{dx^2} \xi_n(x) + b \frac{d}{dx} \eta_n(x) + \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \chi \partial \phi} \right|_{\phi(x)} \eta_n(x) + \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} \right|_{\chi(x)} \xi_n(x) &= \omega_n^2 \xi_n(x), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} - ib\sigma_2 \frac{d}{dx} + U \right] \Psi_n(x) = \omega_n^2 \Psi_n(x), \quad (4.37)$$

em que  $\sigma_2$  é uma matriz de Pauli,

$$\Psi_n(x) = \begin{pmatrix} \eta_n(x) \\ \xi_n(x) \end{pmatrix}$$

e

$$U = \begin{pmatrix} \partial^2 V / \partial \phi^2 & \partial^2 V / \partial \phi \partial \chi \\ \partial^2 V / \partial \chi \partial \phi & \partial^2 V / \partial \chi^2 \end{pmatrix}.$$

Temos novamente uma equação tipo Schrödinger com Hamiltoniano

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} - ib\sigma_2 \frac{d}{dx} + U. \quad (4.38)$$

Com a definição (4.25) para o potencial  $V$ , temos

$$U = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{C} \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= W_{\phi\phi}^2 + (W_{\chi\phi} + s_2)^2 + \frac{d}{dx} W_{\phi\phi}, \\ \mathcal{B} &= (W_{\phi\chi} + s_1) W_{\phi\phi} + (W_{\phi\chi} + s_2) W_{\chi\chi} + \frac{d}{dx} W_{\phi\chi}, \\ \mathcal{C} &= W_{\chi\chi}^2 + (W_{\phi\chi} + s_1)^2 + \frac{d}{dx} W_{\chi\chi}, \end{aligned}$$

em que usamos as equações de primeira ordem para os campos  $\phi$  e  $\chi$ . Deste modo, podemos escrever a equação de Schrödinger como

$$\begin{aligned} H\Psi_n(x) &= \left[ \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} W_{\phi\phi} & W_{\phi\chi} + s_2 \\ W_{\chi\phi} + s_1 & W_{\chi\chi} \end{pmatrix} \right] \times \\ &\quad \left[ -\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} W_{\phi\phi} & W_{\phi\chi} + s_1 \\ W_{\chi\phi} + s_2 & W_{\chi\chi} \end{pmatrix} \right] \Psi_n(x) \\ &= \omega_n^2 \Psi_n(x), \end{aligned} \quad (4.39)$$

de modo que podemos escrever

$$H\Psi_n(x) = S^\dagger S\Psi_n(x) = \omega_n^2 \Psi_n(x)$$

com

$$S = -\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} W_{\phi\phi} & W_{\phi\chi} + s_1 \\ W_{\chi\phi} + s_2 & W_{\chi\chi} \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Da mesma forma, seguindo a discussão feita na Cap.[3], pode-se mostrar que os autovalores  $w_n^2 \geq 0$  e com isso, que a teoria é linearmente estável. Novamente, o resultado é geral desde que assumamos  $a = 0$ .

## 4.4 Exemplo

Para ilustrar as principais características do modelo descrito na Sec.4.3, usaremos uma exemplo. Seja superpotencial [22]

$$W(\phi, \chi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\chi^2, \quad (4.41)$$

em que  $r$  é um parâmetro real. Esse superpotencial para  $r = -1$  leva a uma teoria que possui uma solução ligando os mínimos, para o campo  $\phi$ , tipo *kink* enquanto que o campo  $\chi$  é nulo. Assim, o superpotencial acima descreve um modelo  $\phi^4$  modificado.

O potencial associado a (4.41) é dado por

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2 - r\chi^2)^2 + \frac{1}{2}(2r\phi\chi - b\phi)^2, \quad (4.42)$$

em que fizemos a escolha particular  $s_1 = 0$  e  $s_2 = b$ . Logo, dependendo dos valores dos parâmetros  $r$  e  $b$ , podemos encontrar vários mínimos para o potencial. Tomamos  $r$  e  $b$  positivos e  $b^2/4r \in (0, 1)$  para escrever

$$v_{h\pm} = (\pm Q, b/2r), \quad v_{v\pm} = \left(0, \pm\sqrt{1/r}\right), \quad (4.43)$$

em que  $Q = \sqrt{1 - b^2/4r}$ . Assim, para essa escolha, temos quatro mínimos para o potencial, dois deles sobre uma linha horizontal e os outros numa linha vertical, como indicamos pelos índices subscritos. O limite  $b \rightarrow 0$  implica em  $Q \rightarrow 1$ , fazendo com que o mínimo  $v_{h\pm}$  volte a  $(\pm 1, 0)$ , como havíamos dito acima.

Os mínimos e os cinco setores topológicos BPS são mostrados na figura abaixo.

As tensões entre os mínimos é  $t_1 = (4/3)Q^3$  para os mínimos sobre a linha horizontal e  $t_2 = (2/3)Q^3$  para a diferença de energia entre um mínimo numa linha horizontal e outro numa linha vertical. Como vimos no Cap.2, na ausência de violação das SL e SCPT, a teoria acima comporta defeito e anti-defeito, o que não é preservado no modelo sob estudo, uma vez que a quebra da simetria  $P$  preferencia um setor de acordo com a escolha do valor do parâmetro de violação  $b$ . Na Fig.4.1, vemos que no setor mais energético, existe somente a solução ligando  $v_{h-} \rightarrow v_{h+}$ , já que foi feita a escolha particular de um valor positivo para a constante  $b$ . O mesmo acontece para as soluções sobre os setores  $v_{h-} \rightarrow v_{v+}$ ,  $v_{v+} \rightarrow v_{h+}$ ,  $v_{h-} \rightarrow v_{v-}$ , e  $v_{v-} \rightarrow v_{h+}$ . O modelo proposto ainda pode admitir outro setor ligando os mínimos  $v_{v\pm}$ , porém este não é um setor BPS, ou seja, que é solução das equações de Bogomol'nyi de primeira ordem.

Para o superpotencial (4.41) as equações de Bogomol'nyi são

$$\phi' = 1 - \phi^2 - r\chi^2, \quad (4.44a)$$

$$\chi' = b\phi - 2r\chi\phi. \quad (4.44b)$$



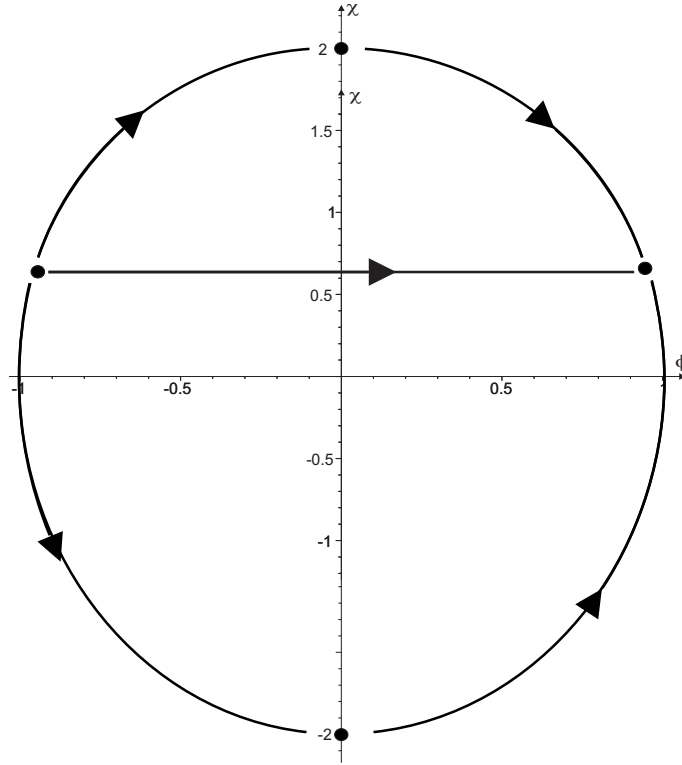


Figura 4.1: Os mínimos e algumas órbitas possíveis para a escolha  $r = 1/4$  and  $b = 1/3$ . As flechas ilustram como os mínimos são conectados para  $x$  variando de  $-\infty$  para  $\infty$ . A violação de  $P$  quebra a estrutura defeito $\leftrightarrow$ anti-defeito.

Usando o método do fator integrante descrito no Cap.2, podemos verificar que, para o sistema de equações acima, ele é dado por  $f(\chi) = 1/(\chi - b/2r)^{1+1/r}$ . Logo, usamos  $\tilde{\chi} = \chi - b/2r$  para escrever a órbita, com  $r \neq 1/2$  e  $r \neq 1$ ,

$$\phi^2 = \frac{r}{2r-1}\tilde{\chi}^2 + \frac{b}{r-1}\tilde{\chi} + C\tilde{\chi}^{\frac{1}{r}} + Q^2, \quad (4.45)$$

em que  $C$  é uma constante de integração. Para  $b \rightarrow 0$ , o resultado é alterado para as órbitas obtidas em [24].

Para os casos específicos  $r = 1$  e  $r = 1/2$  as órbitas são dadas, respectivamente,

por

$$\phi^2 = \tilde{\chi}^2 + \frac{b}{r}\tilde{\chi} \ln \tilde{\chi} + C\tilde{\chi} + Q^2, \quad (4.46a)$$

$$\phi^2 = C\tilde{\chi}^2 + \tilde{\chi}^2 \ln \tilde{\chi} - \frac{b}{r}\tilde{\chi} + Q^2. \quad (4.46b)$$

Não conseguimos resolver as equações de movimento analiticamente para quaisquer que sejam as constantes  $r$  e  $C$ , por isso, estudamos alguns valores específicos para a  $C$ . Primeiramente, examinamos a condição  $C \rightarrow \infty$ . Neste limite para que tenhamos finitude na eq.(4.45), temos que fazer  $\tilde{\chi} = 0$  o que implica em ter como órbita uma linha horizontal reta ligando  $v_{h+}$  e  $v_{h-}$  com  $\chi = b/2r$ , Fig.4.1. Neste limite, as equações de Bogomol'nyi (4.44) se reduzem a

$$\phi' = Q^2 - \phi^2 \quad (4.47)$$

e uma identidade. A solução de (4.47) é

$$\phi(x) = Q \tanh(Qx), \quad (4.48)$$

em que, escolhemos  $x = 0$  como centro da solução. Podemos ver facilmente que a densidade de energia, (4.27), para essa solução é dada por  $\epsilon = Q^4 \operatorname{sech}^4(Qx)$  que é uma quantidade positiva para qualquer  $x$ . A forma da solução (4.48) é a de um *kink* em que a largura é influenciada diretamente pelo parâmetro  $b$ , assim como ocorria no modelo descrito na Sec.4.1, porém, lá essa influência só é percebida para as ondas viajantes. Aqui, quanto maior a violação das SL e SCPT menor será a largura do *kink*. Ou seja, quanto maior a violação das simetrias, a solução 'migra' entre os mínimos num espaço mais curto.

Uma outra possibilidade interessante para ser estudada é fazermos  $C = 0$ . Esta escolha leva as soluções

$$\phi_{\pm}(x) = \frac{Q \sinh(2rQx)}{\pm B + \cosh(2rQx)}, \quad (4.49a)$$

$$\chi_{\pm}(x) = \frac{b}{2r} \pm \frac{A}{\pm B + \cosh(2rQx)}, \quad (4.49b)$$

em que  $A = (1 - r)Q^2K$ ,  $B = bK/4$ ,

$$K = \sqrt{\frac{1 - 2r}{r(1 - 2r + r^2Q^2)}} \quad (4.50)$$

e  $r \in (0, 1/2)$ .

Mostramos abaixo, para  $C = 0$ , a órbita e a forma das soluções conectando os mínimos.

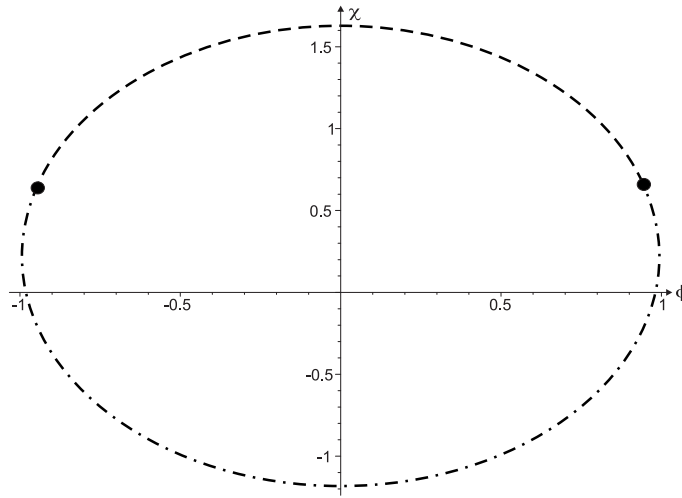


Figura 4.2: Órbitas conectando os mínimos  $v_{h\pm} = (\pm Q, s)$  for  $C = 0$ . As órbitas superiores e inferiores são descritas pelas linhas tracejada e ponto-tracejada, com a escolha  $r = 1/4$  e  $b = 1/3$ .

Se nas eq.(4.49) fizermos  $b \rightarrow 0$ , percebemos que as soluções se reduzem a

$$\phi^0(x) = \tanh(2rx), \quad (4.51a)$$

$$\chi_{\pm}^0(x) = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{r} - 2\right)} \operatorname{sech}(2rx), \quad (4.51b)$$

que são as soluções obtidas em [22]. Se tomarmos agora o mesmo limite na a eq.(4.45) verificamos que ela se torna

$$\phi^2 + \frac{r}{1 - 2r} \chi^2 = 1, \quad (4.52)$$

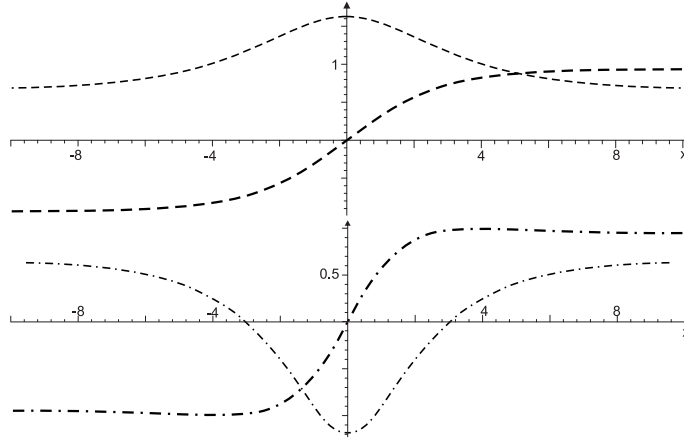


Figura 4.3: Forma das soluções de defeitos correspondentes as linhas superiores e inferiores mostradas na Fig.4.2, espectivamente. O campo  $\phi$  é descrito pela linha cheia enquanto  $\chi$  pela linha fina, para a escolha  $r = 1/4$  e  $b = 1/3$ .

que é justamente a órbita para [22].

Vimos que a densidade de energia para a solução do modelo era uma quantidade positiva para todo o espaço, no caso  $C \rightarrow \infty$ . Tomando  $C$  nula, a densidade de energia para as soluções é dada por

$$\begin{aligned} \theta_{\pm}^{00}(x) = & \frac{4r^2Q^4}{[B \pm \cosh(2rQx)]^4} \left[ 1 + B^2 \pm \right. \\ & \cosh(2rQx) \left( 2B + \frac{bA}{2rQ^2} \sinh^2(2rQx) \right) + \\ & \left. \left( \frac{A^2}{Q^2} + \frac{bAB}{2rQ^2} + B^2 \right) \sinh^2(2rQx) \right]. \end{aligned} \quad (4.53)$$

A forma da densidade de energia é mostrada abaixo.

Podemos perceber que as soluções correspondentes a órbita inferior, Fig4.2, possuem energia positiva porém há duas regiões em que a densidade de energia é negativa. Isso poderia ser um motivo para a desconfiança sobre a estabilidade das soluções, porém mostramos na Sec.4.3, por um método geral, que o modelo admite soluções linearmente estáveis. Isso ocorre pois se repararmos para a expressão

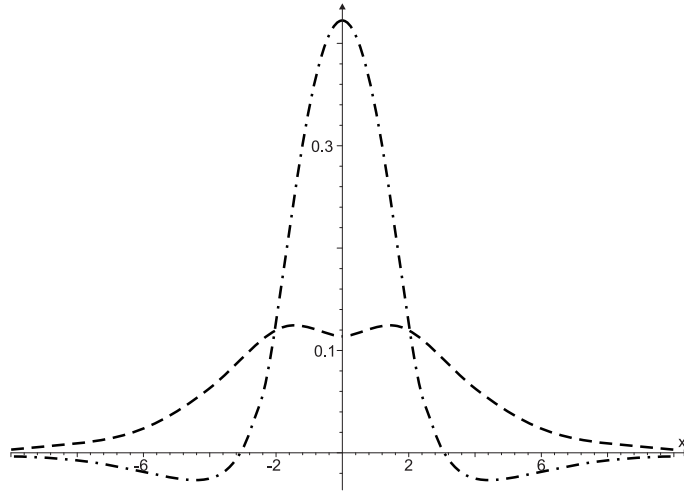


Figura 4.4: Densidade de energia para  $C = 0$ , com  $r = 1/4$  and  $b = 1/3$ . As linhas tracejada de ponto-tracejada correspondem às soluções das órbitas superior e inferior, na Fig.4.2, respectivamente.

(4.23a), perceberemos que há, além dos termos não-negativos, um termo com sinal negativo que faz com que, no caso de  $\phi$  e  $\chi'$  com sinais iguais, a densidade de energia seja diminuída ou até mesmo que se torne negativa, como é caso da região mostrado no gráfico.

Porém, poderiam perguntar sobre o valor do parâmetro  $b$  para o qual plotamos os gráficos acima. Esse parâmetro mede o quanto a SL e SCPT é violada, assim esperamos que ele seja pequeno. Os limites para ele são muito fortes [25] e dão conta de uma valor muito pequeno. Porém, nas figuras, usamos um valor alto,  $b = 1/3$ , quando comparado com os limites, afim de destacar a sua influência na estrutura de defeitos. Entretanto, as discussões acima podem ser relevantes no contexto de matéria condensada – [26, 27] – tomando o cuidado que a violação da simetria de Lorentz nesse novo contexto deve ser interpretada de uma outra maneira. Sabemos, por exemplo, que alguns materiais, tipo a calcita, possuem birefringência o que poderia ser usada para simular uma possível violação da simetria

---

de Lorentz. Nesse caso, esses materiais são descritos pela versão contínua do modelo de Dzyaloshinskii-Moriya [28]. Existem ainda, matéria condensada, estudos [29] que dão soluções muito similares à *kinks*, entretanto com uma valor de  $b$  não muito pequeno, mostrando a relevância do nosso modelo, numa possível aplicação em matéria condensada.

# Capítulo 5

## Violação das simetrias em estruturas de Defeitos - Teoria de Wess-Zumino

Neste capítulo, estudaremos a influência da violação das  $SL$  e  $SCPT$  em estruturas de defeitos, descritas por uma teoria tipo Wess-Zumino. Apresentamos a extensão do modelo descrito no capítulo anterior para o caso de um campo complexo e estudamos um exemplo afim de comparar os resultados com aqueles já conhecidos para a teoria usual.

### 5.1 Formalismo

Nesta secção, vamos estudar o setor bosônico de uma teoria tipo Wess-Zumino num ambiente em que a  $SL$  e  $SCPT$  são violadas explicitamente. Com esse intuito, fazemos uma extensão do modelo (4.20) para o caso de um campo escalar complexo. O termo adicionado, novamente, é do tipo Chern-Simons [5]. Assim, o modelo

proposto é dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - \frac{i}{2} \kappa^\mu \bar{\varphi} \partial_\mu \varphi - V, \quad (5.1)$$

em que  $V = V(\bar{\varphi}\varphi)$  é o potencial e  $\kappa^\mu$  é dado por (4.21), com as componentes reais, novamente. Assim como definidos no Cap.[3], os campos complexos  $\varphi$  e  $\bar{\varphi}$  são independentes e tais que

$$\varphi = \phi + i\chi, \quad \bar{\varphi} = \phi - i\chi,$$

em que  $\phi$  e  $\chi$  são campos escalares reais também independentes. O termo extra acrescentado foi introduzido de tal maneira que, quando escrita em termos dos campos reais  $\phi$  e  $\chi$  tenhamos a teoria (4.20).

Para este modelo as equações de movimento são dadas por

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + i\kappa^\mu \partial_\mu \varphi + 2 \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} = 0, \quad (5.2a)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \bar{\varphi} - i\kappa^\mu \partial_\mu \bar{\varphi} + 2 \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \quad (5.2b)$$

Quando fazemos a conjugação de (5.2a), obtemos (5.2b) e vice-versa, o que nos mostra a invariância do modelo frente a simetria  $C$ . Quando as transformações  $x \rightarrow -x$  e  $t \rightarrow -t$  são aplicadas nas equações de movimento, percebemos que a equação para  $\varphi$  não é levada na equação para  $\bar{\varphi}$ , quebrando a invariância  $CPT$ .

Olhando para as componentes do tensor momento-energia do sistema, investigaremos a possível violação da SL. Para essa teoria, as componentes são

$$\theta^{00} = \frac{1}{2} |\dot{\varphi}|^2 + \frac{1}{2} |\varphi'|^2 + \frac{ib}{2} \bar{\varphi} \varphi' + V, \quad (5.3a)$$

$$\theta^{01} = -\frac{1}{2} (\dot{\varphi} \varphi' + \bar{\varphi}' \dot{\varphi}) + \frac{ia}{2} \bar{\varphi} \varphi', \quad (5.3b)$$

$$\theta^{10} = -\frac{1}{2} (\dot{\bar{\varphi}} \varphi' + \bar{\varphi}' \dot{\varphi}) - \frac{ib}{2} \bar{\varphi} \dot{\varphi}, \quad (5.3c)$$

$$\theta^{11} = \frac{1}{2} |\dot{\varphi}|^2 + \frac{1}{2} |\varphi'|^2 - \frac{ia}{2} \bar{\varphi} \dot{\varphi} - V. \quad (5.3d)$$

Como nos modelos abordados anteriormente, o modelo introduzido aqui apresenta uma assimetria entre as componentes  $\theta^{01}$  e  $\theta^{10}$ , o que indica a violação da invariância



de Lorentz, uma vez que, assim como no modelo (4.20), não podemos simetrizá-lo. Logo, estamos prontos para estudar um modelo que manifesta uma violação verdadeira da SL. Entretanto, mesmo não-simétrico o tensor momento-energia continua conservado.

Considerando configurações estáticas dos campos,  $\varphi = \varphi(x)$  e  $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(x)$ , as equações (5.2) se tornam

$$\varphi'' - ib\varphi' - 2\frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} = 0, \quad (5.4a)$$

$$\bar{\varphi}'' + ib\bar{\varphi}' - 2\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0. \quad (5.4b)$$

Para as configurações estáticas, acima, há a invariância por reflexões temporais. Então falta que analisemos o comportamento da teoria sob a transformação  $P$ . Quando fazemos  $x \rightarrow -x$  as equações (5.4) não se mantêm invariantes, o que nos mostra a quebra da simetria por paridade, assim como no modelo descrito na Sec.[4.3]. Deste modo, a estrutura de defeitos que uma teoria tipo Wess-Zumino comportava antes, com defeitos e anti-defeitos vivendo simultaneamente no espaço-tempo, é quebrada nesta nova teoria. Entretanto, como já discutido na mesma secção, uma 'nova' simetria  $P'$ , em que  $x \rightarrow -x$  e  $b \rightarrow -b$ , leva defeitos em anti-defeitos. Ou seja, o vetor constante  $\kappa^\mu$  é o responsável pelas quebras das SL e SCPT, como já esperávamos.

Afim de estender o método de obtenção de equações de Bogomol'nyi para nossa teoria, temos que modificar o potencial. Assim, seja o potencial

$$V = \frac{1}{2} \left| \overline{W}'(\varphi)e^{-i\xi} + \frac{ib}{2}\varphi \right|^2, \quad (5.5)$$

em que  $W(\varphi)$  é uma função holomórfica e  $\xi$  é um fator de fase que agora desempenha um papel diferente daquele que tínhamos para a teoria sem a violação das simetrias. Antes, esse fator de fase era totalmente arbitrário, e nos dava a simetria defeito $\leftrightarrow$ anti-defeito quando fazíamos  $\xi \rightarrow \xi + \pi$ . Agora porém, ele define

a física da teoria, uma vez que para cada valor de  $\xi$  temos um potencial diferente o que nos dá um outro cenário. Devido a holomorficidade de  $W$ , como dito no Cap.[3], escreveremos  $\overline{W}'(\varphi) = W'(\bar{\varphi})$

Usando a relação(5.5) podemos reescrever (5.3a) como

$$\theta^{00} = \left| \frac{d\varphi}{dx} - W'(\bar{\varphi})e^{-i\xi} - \frac{ib}{2}\varphi \right|^2 + \frac{dW}{dx}, \quad (5.6)$$

o que novamente nos fornece um limite de Bogomol'nyi para a teoria. A energia é minimizada para  $\Delta W$  quando as nossas configurações de campo obedecem as equações de primeira ordem

$$\frac{d\varphi}{dx} = W'(\bar{\varphi})e^{-i\xi} + \frac{ib}{2}\varphi, \quad (5.7a)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dx} = W'(\varphi)e^{i\xi} - \frac{ib}{2}\bar{\varphi}. \quad (5.7b)$$

Fazendo o parâmetro  $b = 0$ , obtemos as equações de Bogomol'nyi usuais (3.9). Podemos provar, mais uma vez, que a equações de primeira ordem resolvem as equações de movimento (5.4). Faremos a demonstração para a equação do campo  $\varphi$ , que pode ser trivialmente estendida para a equação do campo conjugado. Primeiramente, derivando a primeira das eqs.(5.7), obtemos

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = W''(\bar{\varphi})e^{-i\xi}\varphi' + \frac{ib}{2}\varphi'.$$

Substituindo a equação de Bogomol'nyi para  $\bar{\varphi}$  na equação anterior, podemos escrever

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = W'(\varphi)W''(\bar{\varphi}) - \frac{ib}{2}\bar{\varphi}W''(\bar{\varphi})e^{-i\xi} + \frac{ib}{2}\bar{\varphi}. \quad (5.8)$$

Utilizando a expressão do potencial, eq(5.5), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} &= \frac{1}{2} \left[ W'(\varphi)W''(\bar{\varphi}) - \frac{ib}{2}\bar{\varphi}W''(\bar{\varphi})e^{-i\xi} - \frac{ib}{2}W'(\bar{\varphi})e^{-i\xi} + \frac{b^2}{4}\varphi \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ W'(\varphi)W''(\bar{\varphi}) - \frac{ib}{2}\bar{\varphi}W''(\bar{\varphi})e^{-i\xi} - \frac{ib}{2}\varphi' \right], \end{aligned}$$

em que usamos a equação de Bogomol'nyi para o campo  $\varphi$ . Desta maneira, podemos reescrever a eq(5.8) como

$$\varphi'' = 2\frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} + ib\varphi',$$

que é a equação de movimento para  $\varphi$ . Ou seja, as soluções das equações de Bogomol'nyi são também soluções das equações de movimento. Na teoria de Wess-Zumino usual, temos a característica que todas as soluções das equações de movimento também são soluções das equações de Bogomol'nyi, como foi demonstrado através de um teorema no Cap.[3]. Entretanto, nesta nova teoria não temos essa característica, ou seja, aquele teorema não é válido na situação estudada no momento. Na demonstração do teorema, fizemos a exigência que o superpotencial fosse holomórfico e conseqüentemente sua derivada também seria uma função holomórfica. No entanto, se repararmos na eq(5.5), perceberemos que a derivada do superpotencial efetivo

$$\widetilde{W}'(\varphi, \bar{\varphi}) = W'(\bar{\varphi})e^{-i\xi} + \frac{ib}{2}\varphi,$$

não é mais holomórfica devida a presença do termo vindo do setor de violação das simetrias. Deste modo, não é possível demonstrar o teorema para o caso em questão.

Assim como mostrado no Cap.[3], a energia das configurações estáticas continua dividindo-se igualmente entre uma parte gradiente e outra potencial. Seguindo o que foi feito no capítulo anterior, multipliquemos a primeira das equações (5.4) por  $\bar{\varphi}'$  e a segunda por  $\varphi'$  e em seguida, somemos soma as expressões resultantes. Deste modo, teremos

$$\begin{aligned} \varphi'\bar{\varphi}'' + \bar{\varphi}'\varphi'' &= 2\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\varphi' + \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}}\bar{\varphi}'\right) \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dx}|\phi'|^2 &= \frac{dV}{dx}, \end{aligned}$$

que pode ser escrita na forma já obtida (3.5)

$$\frac{1}{2} |\phi'|^2 = V,$$

com a constante de integração nula para que tenhamos energia finita. Desta forma, a densidade de energia (5.3a), para configurações estáticas, pode ser reescrita como

$$\theta^{00} = |\varphi'|^2 + \frac{ib}{2} \bar{\varphi} \varphi'. \quad (5.11)$$

Novamente provaremos que, apesar da mudança na densidade de energia devida à violação das SL e SCPT, as soluções estáticas continuam linearmente estáveis. Introduzimos flutuações para os campos descritas por  $\varphi(x, t) = \varphi(x) + \eta(x, t)$  e  $\bar{\varphi}(x, t) = \bar{\varphi}(x) + \bar{\eta}(x, t)$ . Os campos  $\eta$  e seu conjugado são novamente interpretados como perturbações em primeira ordem da soluções estáticas. Usando esses campos nas equações de movimento (5.2), obtemos

$$\begin{aligned} & \ddot{\eta}(x, t) - \eta''(x, t) - \varphi''(x) + ia\dot{\eta}(x, t) + ib\eta'(x, t) + ib\varphi'(x) \\ & + 2 \left( \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} + \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\varphi}^2} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \bar{\eta}(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\varphi} \partial \varphi} \Big|_{\varphi(x)} \eta(x, t) \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\bar{\eta}}(x, t) - \bar{\eta}''(x, t) - \bar{\varphi}''(x) - ia\dot{\bar{\eta}}(x, t) - ib\bar{\eta}'(x, t) - ib\bar{\varphi}'(x) \\ & + 2 \left( \frac{\partial V}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi(x)} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \bar{\varphi}} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \bar{\eta}(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi(x)} \eta(x, t) \right) = 0. \end{aligned}$$

Usando as equações para os campos estáticos  $\varphi(x)$  e  $\bar{\varphi}(x)$ , chegamos a

$$\ddot{\eta}(x, t) - \eta''(x, t) + ia\dot{\eta}(x, t) + ib\eta'(x, t) + 2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\varphi}^2} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \bar{\eta}(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\varphi} \partial \varphi} \Big|_{\varphi(x)} \eta(x, t) \right) = 0, \quad (5.13a)$$

$$\ddot{\bar{\eta}}(x, t) - \bar{\eta}''(x, t) - ia\dot{\bar{\eta}}(x, t) - ib\bar{\eta}'(x, t) + 2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \bar{\varphi}} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \bar{\eta}(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi(x)} \eta(x, t) \right) = 0. \quad (5.13b)$$

Logo, como houve no modelo com campos escalares reais, o termo  $a$  impede a expansão dos campos  $\eta$  e  $\bar{\eta}$  em termo de cossenos. Fazendo  $a = 0$ , podemos usar as expansões

$$\eta(x, t) = \sum_n \eta_n(x) \cos \omega_n t, \quad \bar{\eta}(x, t) = \sum_n \bar{\eta}_n(x) \cos \omega_n t.$$

Substituindo as expressões anteriores em (5.13a), obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2} \eta_n(x) + ib \frac{d}{dx} \eta_n(x) + 2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\varphi}^2} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \bar{\eta}_n(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\varphi} \partial \varphi} \Big|_{\varphi(x)} \eta_n(x) \right) &= \omega_n^2 \eta_n(x), \\ -\frac{d^2}{dx^2} \bar{\eta}_n(x) - ib \frac{d}{dx} \bar{\eta}_n(x) + 2 \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \bar{\varphi}} \Big|_{\bar{\varphi}(x)} \bar{\eta}_n(x, t) + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi(x)} \eta_n(x) \right) &= \omega_n^2 \bar{\eta}_n(x), \end{aligned}$$

que ainda podem ser colocadas na forma mais compacta

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + ib\sigma_3 \frac{d}{dx} + 2U \right] \Psi_n(x) = \omega_n^2 \Psi_n(x), \quad (5.14)$$

em que  $\sigma_3$  é uma matriz de Pauli,

$$\Psi_n(x) = \begin{pmatrix} \eta_n(x) \\ \bar{\eta}_n(x) \end{pmatrix}$$

e

$$U = \begin{pmatrix} \partial^2 V / \partial \bar{\varphi} \partial \varphi & \partial^2 V / \partial \bar{\varphi}^2 \\ \partial^2 V / \partial \varphi^2 & \partial^2 V / \partial \varphi \partial \bar{\varphi} \end{pmatrix}.$$

A eq.(5.14) é uma equação tipo Schrödinger, cujo 'Hamiltoniano' é dado por

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + ib\sigma_3 \frac{d}{dx} + 2U. \quad (5.15)$$

Usando  $V$  dado em (5.5), tem-se

$$2U = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \bar{\mathcal{B}} & \mathcal{A} \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= W''(\varphi)W''(\bar{\varphi}) + \left(-\frac{ib}{2}\right)\left(-\frac{ib}{2}\right), \\ \mathcal{B} &= -ibW''(\bar{\varphi})e^{-i\xi} + W'''(\bar{\varphi})e^{-i\xi} \left(W'(\varphi)e^{i\xi} - \frac{ib}{2}\bar{\varphi}\right).\end{aligned}$$

Deste modo, podemos escrever

$$\begin{aligned}2U &= \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} 0 & W''(\bar{\varphi})e^{-i\xi} \\ W''(\varphi)e^{i\xi} & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} W''(\varphi)W''(\bar{\varphi}) + \left(-\frac{ib}{2}\right)\left(\frac{ib}{2}\right) & -ibW''(\bar{\varphi})e^{-i\xi} \\ ibW''(\varphi)e^{i\xi} & W''(\varphi)W''(\bar{\varphi}) + \left(\frac{ib}{2}\right)\left(-\frac{ib}{2}\right) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

de modo que podemos reescrever (5.15) como  $H = S^\dagger S$ , com  $S$  o operador diferencial de primeira ordem

$$S = \frac{d}{dx} - \begin{pmatrix} \frac{ib}{2} & W''(\bar{\varphi})e^{-i\xi} \\ W''(\varphi)e^{i\xi} & -\frac{ib}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Assim, mostramos que  $H$  é não negativo que seus autovalores  $w_n^2 \geq 0$  e com isso, que a teoria é linearmente estável. O resultado é geral, desde que assumamos  $a = 0$ .

Vamos nos concentrar agora na obtenção de soluções para as equações de primeira ordem quando é dado um superpotencial  $W(\varphi)$ . Devido a holomorphicidade desse superpotencial - e não do superpotencial efetivo - sabemos que ele é harmônico nos campos  $\phi$  e  $\chi$ . Assim o superpotencial efetivo é composto de uma parte harmônica e de uma parte que é linear nos campos  $\phi$  e  $\chi$  o que não quebra a harmonicidade do novo superpotencial.

Vamos separar o superpotencial da seguinte forma

$$W(\varphi) = W(\phi, \chi) \equiv U(\phi, \chi) + iV(\phi, \chi). \quad (5.17)$$

Devido ao seu caráter holomórfico, podemos escrever a derivada

$$W'(\varphi) = U_\phi + iV_\phi = V_\chi - iU_\chi,$$

uma vez que,

$$U_\phi = V_\chi, \quad U_\chi = -V_\phi. \quad (5.18)$$

Assim, pode-se reescrever (5.7) como

$$\frac{d\phi}{dx} = U_\phi \cos \xi + V_\phi \sin \xi - \frac{b}{2}\chi \quad (5.19a)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = -V_\phi \cos \xi - U_\phi \sin \xi - \frac{b}{2}\phi. \quad (5.19b)$$

Com as equações acima, dado um superpotencial, separamos as suas partes real e imaginária e com isso obtemos as equações de Bogomol'nyi para os campos constituintes. Não foi demonstrado no Cap.[3] mas para uma teoria tipo Wess-Zumino, podemos encontrar uma órbita geral conectando os mínimos para um dado superpotencial, desde que esse seja harmônico. Não fizemos a demonstração pois a órbita que demonstraremos a seguir é geral e basta que façamos  $b = 0$  para que obtenhamos a órbita usual. Devido a linearidade do termo de violação das simetrias, nos campos  $\phi$  e  $\chi$ , o superpotencial efetivo continua harmônico, logo, podemos tentar achar uma órbita geral para a nossa teoria com violação das simetrias.

As equações (5.19) podem ser escritas na seguinte forma

$$\begin{aligned} dF(\phi, \chi) &= \frac{\partial F}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial F}{\partial \chi} d\chi \\ &= M(\phi, \chi) d\phi + N(\phi, \chi) d\chi = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

com

$$M(\phi, \chi) = -V_\phi \cos \xi - U_\phi \sin \xi + \frac{b}{2}\phi$$

e

$$N(\phi, \chi) = -U_\phi \cos \xi + V_\phi \sin \xi + \frac{b}{2}\chi.$$

Como  $F(\phi, \chi)$  é a solução da equação diferencial (5.20) ela nos fornece a relação entre os campos  $\phi$  e  $\chi$ , ou seja, é justamente a órbita que conecta os mínimos

do potencial, caso a diferencial (5.20) seja exata. A condição de exatidão de uma diferencial de primeira ordem é que

$$\frac{\partial M}{\partial \chi} = \frac{\partial N}{\partial \phi},$$

que vem do fato de que a órbita que liga os mínimos é suave, ou seja,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \phi \partial \chi} = \frac{\partial^2 F}{\partial \chi \partial \phi}.$$

Para o nosso caso, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \chi} &= -V_{\phi\chi} \cos \xi - U_{\phi\chi} \sin \xi \\ &= -U_{\phi\phi} \cos \xi + V_{\phi\phi} \sin \xi, \end{aligned} \quad (5.21)$$

em que usamos as propriedades das derivadas advindas da harmonicidade de  $\widetilde{W}$ , (5.18). Também temos

$$\frac{\partial N}{\partial \phi} = -U_{\phi\phi} \cos \xi + V_{\phi\phi} \sin \xi,$$

que nos mostra que a diferencial (5.20) é exata.

Agora, podemos obter a forma da órbita conectando os mínimos. Integrando as equações

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = M(\phi, \chi) = -V_{\phi} \cos \xi - U_{\phi} \sin \xi + \frac{b}{2}\phi,$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = N(\phi, \chi) = -U_{\phi} \cos \xi + V_{\phi} \sin \xi + \frac{b}{2}\chi,$$

obtemos a órbita

$$F(\phi, \chi) = V \cos \xi + U \sin \xi - \frac{b}{4}(\phi^2 + \chi^2) = \Omega, \quad (5.22)$$

em que  $\Omega$  é uma constante de integração que é ajustada de modo que a curva  $F$  ligue os mínimos do potencial quando dado um superpotencial para a teoria. Os resultados dispostos acima são gerais e basta que façamos o parâmetro de violação das simetrias



ir a zero para obter os resultados para a teoria sem as referidas violações. A última relação, em especial, nos fornece uma órbita geral conectando os mínimos para a teoria que nos for fornecida. Ou seja, dado um superpotencial decomposto na forma (5.17) e um valor para o fator de fase  $\xi$ , podemos encontrar a órbita que conecta os mínimos do potencial correspondente. Na secção a seguir, ilustramos os procedimentos descritos acima com um exemplo.

## 5.2 Exemplo

Como dissemos na secção anterior, o superpotencial  $W$  é uma função holomórfica e com isso conseguimos extrair várias propriedades interessantes para o modelo, como por exemplo, uma órbita geral conectando mínimos do potencial associado. Para ilustrar tais propriedades usamos o potencial [19]

$$W(\varphi) = \frac{1}{n+1}\varphi^{n+1} - \frac{1}{N+n+1}\varphi^{N+n+1}. \quad (5.23)$$

Por simplicidade, faremos  $n = 0$  e  $N = 2$  na expressão anterior para obter

$$W(\varphi) = \varphi - \frac{1}{3}\varphi^3.$$

Essa escolha particular, nos fornece o modelo  $\varphi^4$ , cujo potencial associado é

$$V = \frac{1}{2} \left| (1 - \varphi^2) e^{-i\xi} + \frac{ib}{2}\varphi \right|^2. \quad (5.24)$$

Em termos dos campos constituintes,  $\phi$  e  $\chi$ , as equações que nos fornecem os vácuos são

$$(1 - \phi^2 + \chi^2) \cos \xi + 2\phi\chi \sin \xi - \frac{b}{2}\chi = 0, \quad (5.25a)$$

$$2\phi\chi \cos \xi - (1 - \phi^2 + \chi^2) \sin \xi + \frac{b}{2}\phi = 0, \quad (5.25b)$$

e as equações de movimento são dadas por

$$\frac{d\phi}{dx} = (1 - \phi^2 + \chi^2) \cos \xi + 2\phi\chi \sin \xi - \frac{b}{2}\chi, \quad (5.26a)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = 2\phi\chi \cos \xi - (1 - \phi^2 + \chi^2) \sin \xi + \frac{b}{2}\phi. \quad (5.26b)$$

Neste ponto, devido ao termo de violação das SL e SCPT, como já dissemos, o fator de fase  $\xi$ , que era totalmente arbitrário na teoria de Wess-Zumino sem as violações, agora determina a forma do potencial e conseqüentemente determina os vácuos. Antes, a simetria  $\xi \rightarrow \xi + \pi$  no potencial nos fornecia a estrutura defeito $\leftrightarrow$ anti-defeito, o que agora não é verdade pois para  $\xi$  e  $\xi + \pi$  temos dois potenciais diferentes e conseqüentemente dois conjuntos de mínimos distintos. Para a teoria  $\varphi^4$ , sem violação das simetrias, só existem os mínimos  $v = (\pm 1, 0)$  e caso escolhêssemos  $\xi = 0$  estaríamos escolhendo como solução um *kink* ligando os mínimos. Assim, como tentativa, façamos  $\xi = 0$ . Deste modo, obtemos os vácuos

$$v_{\pm} = (\pm\zeta, -b/4), \quad (5.27)$$

em que  $\zeta = \sqrt{1 + \frac{3b^2}{16}}$ .

Para conectar esses mínimos do potencial a órbita geral é

$$F(\phi, \chi) = \left( \chi + \frac{1}{3}\chi^3 - \phi^2\chi \right) - \frac{b}{4}(\phi^2 + \chi^2) = -\frac{b}{4} \left( 1 + \frac{b^2}{12} \right),$$

em que, a constante de integração  $\Omega$  já foi ajustada de modo que  $F$  conecte os mínimos. Uma possível órbita que resolve a órbita acima e possui uma forma mais simples é

$$\chi = -b/4. \quad (5.28)$$

Com a órbita determinada, a equação de Bogomol'nyi para  $\phi$  é dada por

$$\frac{d\phi}{dx} = \left( 1 + \frac{3b^2}{16} \right) - \phi^2 = \zeta^2 - \phi^2 \quad (5.29)$$

e a equação para  $\chi$  é reduzida à uma identidade.

Para as escolhas feitas anteriormente, a solução conectando os mínimos é

$$\phi(x) = \zeta \tan(\zeta x), \quad (5.30)$$

que é um *kink* assim como no caso sem a violação das SL e SCPT, diferindo pelo fato que agora a amplitude da solução e sua largura são influenciadas diretamente

pelo parâmetro de violação  $b$ . Abaixo mostramos a forma da solução para alguns valores de  $b$ .

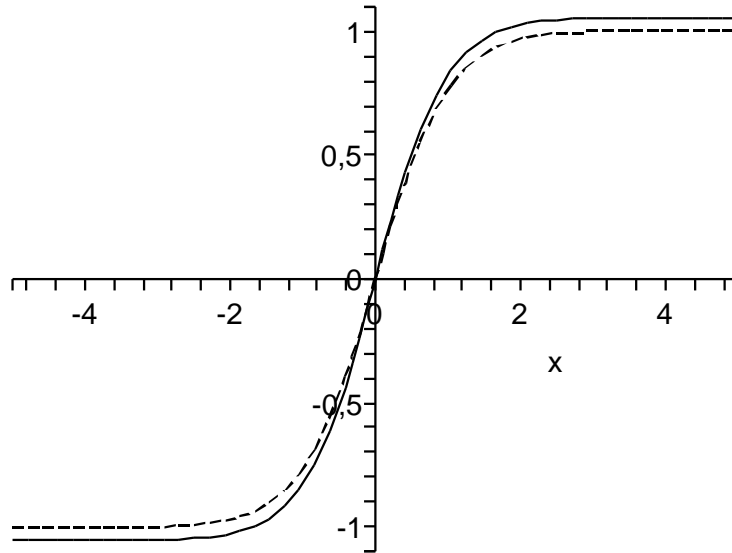


Figura 5.1: Forma da solução conectando os mínimos para o caso especial  $\xi = 0$ . A linha cheia e a tracejada correspondem aos valores  $b = 4/5$  e  $b = 1/4$ , respectivamente.

Afim de verificarmos a quebra da estrutura defeito $\leftrightarrow$ anti-defeito fazemos  $\xi = \pi$ . Quando esse caso era considerado na teoria sem violação das SL e SCPT, tínhamos os mesmos mínimos para o caso  $\xi = 0$  porém a solução era um anti-*kink*. Ou seja, para valores diferentes do fator de fase tínhamos os mesmos mínimos e a estrutura *kink* $\leftrightarrow$ anti-*kink*. Além disso, *kink* e anti-*kink* têm a mesma órbita  $\chi = 0$ , como pode ser visto quando  $b = 0$  em (5.28). Vamos verificar se essa estrutura realmente é quebrada, agora com a violação das simetrias. Quando, em (5.25a) e (5.25a), fazemos  $\xi = \pi$  os mínimos são dados por

$$v_{\pm} = (\pm\zeta, b/4), \quad (5.31)$$

com  $\zeta$  dado da mesma maneira que antes. A órbita é praticamente a mesma, porém a constante de integração para este caso é  $-\Omega$ . Da mesma forma, uma órbita que resolve a órbita mais geral, porém bem mais simples é  $\chi = b/4$ . Assim, temos a equação de primeira ordem para  $\phi$

$$\frac{d\phi}{dx} = - \left[ \left( 1 + \frac{3b^2}{16} \right) - \phi^2 \right] = - (\zeta^2 - \phi^2) \quad (5.32)$$

e a equação para  $\chi$ , novamente, uma identidade. Para essas novas escolhas, a solução conectando os mínimos é dada por

$$\phi(x) = -\zeta \tan(\zeta x). \quad (5.33)$$

O exemplo estudado acima, nos mostra a quebra da estrutura defeito  $\leftrightarrow$  anti-defeito. Isso pode ser percebido, uma vez que *kink* e anti-*kink* que antes eram soluções de um mesmo potencial, dada a escolha do fator de fase arbitrário, agora são soluções conectando mínimos diferentes de dois potenciais distintos. As órbitas também nos mostram a quebra da estrutura, uma vez que enquanto o *kink* 'flui' sobre a órbita  $\chi = -b/4$  o anti-*kink* 'flui' sobre a órbita  $\chi = b/4$ , como pode ser visto na Fig[5.3]. Outra característica interessante é que o parâmetro de violação das simetrias muda tanto a amplitude quanto a largura das soluções.

O gráfico abaixo mostra os mínimos e as órbitas que os conectam para os casos distintos  $\xi = 0$  e  $\xi = -\pi$ .

Vamos ver o que acontece com a densidade de energia para as soluções da teoria (5.24). Utilizando a eq.(5.11), a solução (5.30) e  $\chi = -b/4$ , obtemos

$$\theta^{00} = \zeta^4 \operatorname{sech}^4(\zeta x),$$

que é uma quantidade positiva para todo valor de  $x$ . Nesse caso o que ocorre é que o termo  $\chi'$  em (5.11) é nulo, fazendo com que a densidade de energia seja igual a quantidades positivas, o que não acontece no exemplo estudado com dois campos quando fazemos a constante de integração  $C = 0$ . A soluções, (5.33) e  $\chi = -b/4$ ,

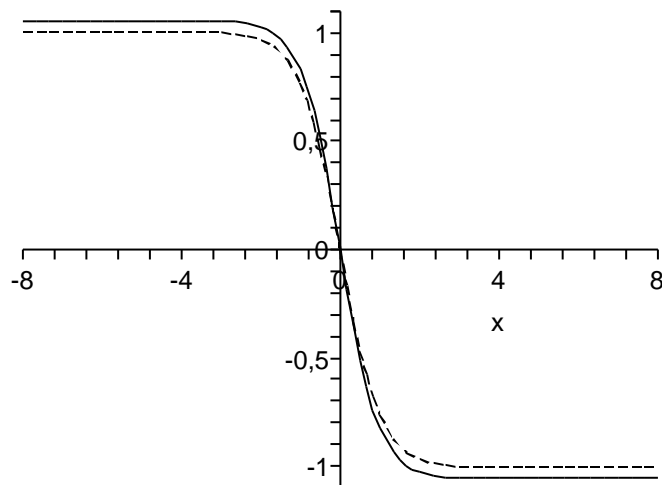


Figura 5.2: Forma da solução conectando os mínimos para  $\xi = \pi$ . A linha cheia e a tracejada correspondem aos valores  $b = 4/5$  e  $b = 1/4$ .

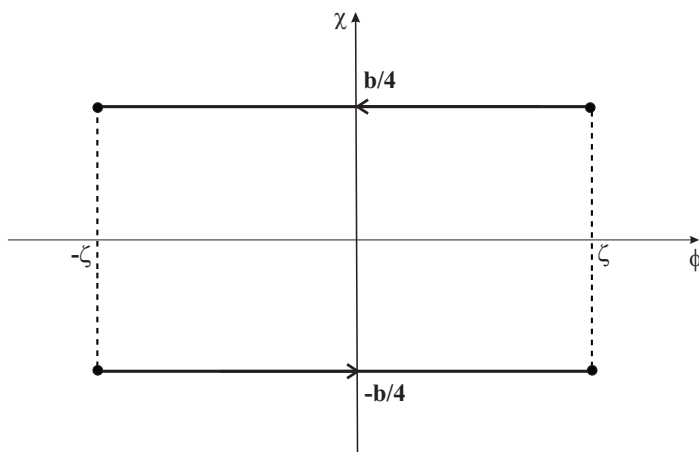


Figura 5.3: Mínimos e as órbitas que os conectam. A órbita inferior corresponde ao caso  $\xi = 0$ , enquanto que a órbita superior é obtida para  $\xi = \pi$ .

possuem a mesma densidade de energia que o *kink* e  $\chi = b/4$  uma vez que a tensão entre os mínimos é a mesma quando tomadas as órbitas retas. No caso exposto na

Fig.[4.2], apesar da tensão ser a mesma, as trajetórias são diferentes e não apenas por um sinal como no caso exposto acima.

# Capítulo 6

## Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação investigamos a influência da violação das simetrias de Lorentz e *CPT* em teorias de campos escalares, tanto para um e dois campos reais quando para o setor bosônico da teoria de Wess-Zumino.

Na primeira parte do Capítulo 4 tratamos de modelos com um único campo escalar real e mostramos que o termo de violação não muda a forma das soluções estáticas, ou seja, em uma teoria de um campo escalar como na eq.(4.1), configurações estáticas não violam a SL nem tão pouco a *SCPT*. Porém, quando examinamos ondas viajantes percebemos que elas quebram a invariância de Lorentz o que reflete numa birefringência do vácuo. O mesmo não acontece com a transformação *CPT*; a teoria descrita nessa primeira parte é completamente simétrica o que não entra em desacordo como uma espécie de *Teorema CPT extensivo* [6]. Nesse trabalho, o autor mostra que ao considerarmos o Modelo-Padrão Extendido, como a teoria das interações fundamentais, a violação da simetria *CPT* implica diretamente na quebra da invariância de Lorentz, entretanto o contrário não acontece necessariamente, o que é reforçado pelo nosso resultado. Na segunda parte deste capítulo, extendemos a teoria para dois campos e os mesmos resultados são encontrados uma vez que os campos são completamente desacoplados o que

---

não passa de dois sistemas livres descritos na primeira etapa do capítulo. Esses modelos, como dissemos, não apresentam uma violação verdadeira da simetria de Lorentz uma vez que podemos redefinir campos e coordenadas - [21] - afim de tornar o tensor momento-energia simétrico. Entretanto, como justificamos, os modelos apresentados podem ser acoplados com outros tipos de campos, como por exemplo, campos fermiônicos de forma que tal simetrização não possa ser realizada. É nesse contexto que os primeiros modelos de campos escalares reais apresentados se tornam relevantes.

Na segunda parte do mesmo capítulo, apresentamos um outro modelo de dois campos escalares reais que apresenta a violação das simetrias. Nesse novo modelo, mesmo as configurações estáticas dos campos apresentam violação de ambas as simetrias e desta vez a violação da simetria de Lorentz é feita de uma maneira verdadeira uma vez que, mesmo sem o acoplamento com outros campos, não é possível simetrizar o tensor momento-energia. Mostramos também que devida a violação da simetria de paridade a estrutura padrão entre defeito e anti-defeito é quebrada. Isso é visto pois defeito e anti-defeito não podem viver simultaneamente na teoria, o que acontece na teoria usual. Examinamos um modelo particular [22] agora no contexto da violação. O comportamento das soluções nesse novo ambiente é não-usual uma vez que ao encontramos a densidade de energia do sistema, percebemos que ela possui valor negativo em certas regiões do espaço. Entretanto as soluções são linearmente estáveis, desde que façamos o vetor, que dá a assimetria, do tipo espaço.

No capítulo 5 inserimos a teoria do setor bosônico da teoria de Wezz-Zumino nesse ambiente de quebra das simetrias de uma maneira similar a feita no modelo com dois campos. Da mesma forma, mesmo as configurações estáticas violam as simetrias de Lorentz e *CPT* o que se reflete na não-manutenção da estrutura defeito $\leftrightarrow$ anti-defeito. Outra característica realizada pelo termo de violação das



---

simetrias é a não equivalência entre as equações de movimento e as equações BPS para o modelo. Isso nos mostra que, devido ao parâmetro de violação nem toda física está contida nas equações de primeira ordem, coisa que acontece na teoria sem violações.

Os modelos apresentados aqui podem servir como um modelo-brinquedo para estudar estruturas mais realísticas. Por exemplo, eles poderiam ser usados com ponto de partida para se estudar quais os efeitos da violação da simetria  $CPT$  no contexto de branas, uma vez que sabemos que certas cordas abertas têm seus extremos terminando em um par brana-anti-brana. Assim, se nosso modelo pudesse ser realizado nesse novo contexto, tal evento não aconteceria uma vez que defeitos e anti-defeitos não poderiam existir simultaneamente. Em teoria-M, por exemplo, caso nosso modelo fosse implementável lá, seguindo [30], poderia se estudar a colisão entre *kinks* e as paredes de um ambiente com condições de contorno periódicas. Esse estudo se torna relevante no contexto da teoria-M heterótica em um espaço-tempo (1,4)-dimensional.

Esse trabalho leva a algumas outras possibilidades de trabalhos futuros, como por exemplo, um estudo mais detalhado da estabilidade das soluções. Ou seja, poderia-se mostrar como obter estruturas de defeitos que violem as simetrias de Lorentz e  $CPT$  e que mesmo assim continuariam estáveis. Tal estudo é necessário uma vez que o procedimento de Bogomol'nyi está intrinsicamente ligado ao caráter supersimétrico da teoria - razão pela qual chamamos a função geradora do potencial de superpotencial. Sabemos que teorias supersimétricas possuem densidade de energia não-negativa. Como nosso modelo possui uma estrutura BPS esperaríamos que a densidade de energia fosse positiva, motivados por essa ligação entre as equações de Bogomol'nyi e o caráter supersimétrico. Desta forma, um estudo da extensão supersimétrica - [31, 32, 33] - para o modelo, ou mesmo a investigação do mecanismo de como a supersimetria (se ela existe) é possivelmente quebrada, é

interessante.

Já que no capítulo 4 apresentamos um modelo com dois campos com violação das simetrias, outras investigações poderiam ser destinadas a influência da não-invariância sob as transformações por junções de defeitos [34]. Também poderia ser investigada influência das violações das simetrias em *kinks* taquiônicos, seguindo [35, 36, 37, 38].

Poderia-se ainda estudar o comportamento de vórtices e monopolos sob a violação das simetrias, uma vez que a teoria com campo escalar carregado - campo de Wess-Zumino - já foi desenvolvida.

Outra linha de continuação desse trabalho seria o acoplamento dessas teorias de campos escalares violando as SL e SCPT com geometria. Por exemplo, estudar a influência desses *kinks* violando as simetrias tendo como plano de fundo um cenário de branas [39] com uma única dimensão-extra. Possibilidades práticas já foram consideradas em [40], sem a violação das simetrias. Contudo, tomando como base [41], poderia-se estudar as características da teoria sob a violação das simetrias. Posteriormente, com os trabalhos sobre os vórtices e monopolos violantes, estudar a provável extensão do número de dimensões-extras.

Ainda como forma de trabalhos vindos dessa dissertação, podemos ter aqueles destinados a obtenção do termo que viola as simetrias, utilizando correções radiativas de uma teoria que acoplasse o setor dos campos escalares com um outro setor que possui a violação [42].

# Bibliografia

- [1] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison-Wesley, 1980.
- [2] Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov>.
- [3] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Volume I, Cambridge University Press, 1995.
- [4] A. Kostelecky, Stuart Samuel, Phys. Rev. D **39**, 683 (1989).
- [5] S. Carroll, G. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [6] O.W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002).
- [7] L.B. Auerbach et al., Phys. Rev. D **72**, 076004 (2005).
- [8] H. Nguyen et al., <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0112046>; Y.B. Hsiung et al., Nucl. Phys. Proc. Suppl. **86**, 312 (2000).
- [9] P. Wolf, F. Chapelet, S. Bize, A. Clairon, Phys. Rev. Lett. **96**, 060801 (2006); P. Wolf, F. Chapelet, S. Bize, A. Clairon, <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0509329>; P. Wolf et al., <http://arxiv.org/abs/physics/0506168>; F. Cane et al., Phys. Rev. Lett. **93**, 230801 (2004); D.F. Phillips et al., Phys. Rev. D **63**, 111101 (2001); M.A. Humphrey et al., Phys. Rev. A **68**, 063807 (2004); D. Bear et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 5038 (2000).

- 
- [10] V.W. Hughes et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 111804 (2001).
- [11] H. Dehmelt et al., Phys. Rev. Lett. **83**, 4694 (1999); R. Mittleman et al., Phys. Rev. Lett. **83**, 2166 (1999); G. Gabrielse et al., Phys. Rev. Lett. **82**, 3198 (1999).
- [12] D. Walgraef, *Spatio-Temporal Pattern Formation*, Springer-Verlag, New York, (1997); G. Bertotti, *Hysteresis in Magnetism*, Academic, San Diego, CA, 1998).
- [13] A. Vilenkin and E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, (Cambridge, Cambridge, UK, 1994)
- [14] E.B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976); M.K. Prasad, C.M. Sommerfield, Phys. Rev. Lett. **35**, 760 (1975).
- [15] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [16] D. Bazeia, F.A. Brito, Phys. Rev. D **61**, 105019 (2000).
- [17] D. Colladay, V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997); Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).
- [18] V. A. Kostelecky, R. Lehnert, Phys. Rev. D **63**, 065008 (2001).
- [19] D. Bazeia, J. Menezes, M.M. Santos, Phys. Lett. B **521**, 418 (2001).
- [20] E.M.C. Abreu, R. Menezes, C. Wotzasek, Phys. Rev. D **71**, 065004 (2005).
- [21] V.A. Kostelecky, M. Mewes, Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002); R. Lehnert, Phys. Rev. D **68**, 085003 (2003).
- [22] D. Bazeia, M.J. dos Santos, R.F. Ribeiro, Phys. Lett. A **208**, 84 (1995).
- [23] D. Bazeia, M.M. Santos, Phys. Lett. A **217**, 28 (1996).

- 
- [24] A. Alonzo Izquierdo, M.A. Gonzalez Leon, J. Mateos Guilarte, Phys. Rev. D **65**, 085012 (2002).
- [25] D.L. Anderson, M. Sher, I. Turan, Phys. Rev. D **70**, 016001 (2004).
- [26] D. Walgraef, *Spatio-Temporal Pattern Formation* (Springer-Verlag, New York, 1997); G. Bertotti, *Hysteresis in Magnetism* (Academic, San Diego, CA, 1998).
- [27] D. Bazeia, R.F. Ribeiro, M.M. Santos, Phys. Rev. E **54**, 2943 (1996); D. Bazeia E. Ventura, Chem. Phys. Lett. **303**, 341 (1999); E. Ventura, A.M. Simas, D. Bazeia, Chem. Phys. Lett. **320**, 587 (2000); D. Bazeia, V.B.P. Leite, B.H.B. Lima, F. Moraes, Chem. Phys. Lett. **340**, 205 (2001).
- [28] I. Dzyaloshinskii, J. Phys. Chem. Solids **4**, 241 (1958); T. Moriya, Phys. Ver. **120**, 91 (1960); Z. Yang, Z. Wang, H. Chen, J. Phys. Condens. Matter **14**, 199 (2002).
- [29] D.V. Skryabin, Opt. Exp. **12**, 4841 (2004); I.M. Merhasin, B. Malomed, *Gap solitons in a model of a hollow optical fiber*, nlin.PS/0410011.
- [30] N.D. Antunes, E.J. Copeland, M. Hindmarsh, A. Lukas, Phys. Rev. D **69**, 065016 (2004).
- [31] M.S. Berger, V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D **65**, 091701(R) (2002).
- [32] H. Belich et al. Phys. Rev. D **68**, 065030 (2003).
- [33] S.G. Nibbelink, M. Pospelov, Phys. Rev. Lett. **94**, 081601 (2005).
- [34] G.W. Gibbons, P.K. Townsend, Phys. Rev. Lett. **83**, 1727 (1999); P.M. Saffin, Phys. Rev. Lett. **83**, 4249 (1999); H. Oda, K. Ito, M. Naganuma, N. Sakai, Phys. Lett. B **471**, 140 (1999); D. Bazeia, F.A. Brito, Phys. Rev. Lett. **84**,

- 1094 (2000); Phys. Rev. D **61**, 105019 (2000); D. Bazeia, J. Menezes, M.M. Santos, Phys. Lett. B **521**, 418 (2001); Nucl. Phys. B **636**, 132 (2002).
- [35] K. Dasgupta, S. Mukhi, and G. Rajesh, JHEP **06**, 022 (2000); J.A. Harvey, P. Kraus, F. Larsen, and E.J. Martinec, JHEP **07**, 042 (2000); E. Witten, *Noncommutative Tachyons and String Field Theory*, hep-th/0006071; M. Mihailescu, I.Y. Park, and T.A. Tran, Phys. Rev. D **64**, 046006 (2001).
- [36] Y. Kim, O-K. Kwon, C.O. Lee, JHEP **01**, 032 (2005).
- [37] A. Sen, Int. J. Mod. Phys. A **20**, 5513 (2005).
- [38] D. Bazeia, R. Menezes, J.G. Ramos, Mod. Phys. Lett. A **20**, 467 (2005).
- [39] L. Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999); W.D. Goldberger, M.B. Wise, Phys. Rev. Lett. **83**, 4922 (1999); O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser, A. Karch, Phys. Rev. D **62**, 046008 (2000).
- [40] D. Bazeia, C. Furtado, A.R. Gomes, JCAP **02**, 002 (2004); D. Bazeia, A.R. Gomes, JHEP **05**, 032 (2004).
- [41] R. Jackiw, S.-Y. Pi, Phys. Rev. D **68**, 104012 (2003).
- [42] R. Jackiw, V. A. Kostelecky, Phys. Rev. Lett. **82**, 3572 (1999).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)