

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
ESCOLA DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS DE SÃO PAULO

JOSILMAR CORDENONSSI CIA

**SAVING-CAPM: UMA PROPOSTA DE SOLUÇÃO PARA O “*EQUITY PREMIUM
PUZZLE*” DO *CONSUMPTION-CAPM***

SÃO PAULO

2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

JOSILMAR CORDENONSSI CIA

SAVING-CAPM: UMA PROPOSTA DE SOLUÇÃO PARA O “*EQUITY PREMIUM PUZZLE*” DO *CONSUMPTION-CAPM*

Tese apresentada à Escola de Administração de Empresas de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas, como requisito para obtenção do título de Doutor em Administração de Empresas

Campo de Conhecimento: Administração de Sistemas de Informação

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Douat

SÃO PAULO

2006

Cia, Josilmar C.

Saving-CAPM: uma Proposta de Solução para o "Equity Premium Puzzle" do Consumption-CAPM / Josilmar Cordenonssi Cia. - 2006.

131 f.

Orientador: João Carlos Douat.

Tese (doutorado) - Escola de Administração de Empresas de São Paulo.

1. Avaliação de ativos – Modelo (CAPM). 2. Avaliação de ativos. 3. Finanças – Modelos matemáticos. I. Douat, João Carlos. II. Tese (doutorado) - Escola de Administração de Empresas de São Paulo. III. Título.

CDU 336.767

JOSILMAR CORDENONSSI CIA

SAVING-CAPM: UMA POSSÍVEL SOLUÇÃO PARA O “*EQUITY PREMIUM PUZZLE*” DO *CONSUMPTION-CAPM*

Tese apresentada à Escola de Administração de Empresas de São Paulo da Fundação Getulio Vargas, como requisito para obtenção do título de Doutor em Administração de Empresas

Campo de Conhecimento: Administração de Sistemas de Informação

Data da Aprovação

____/____/____

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Carlos Douat (Orientador)
FGV-EAESP

Prof. Dr. Rodrigo de Losso da Silveira Bueno
FGV-EAESP

Prof. Dr. Francisco Aranha
FGV-EAESP

Prof. Dr. Joe Akira Yoshino
FEA-USP

Prof. Dr. Diógenes Manoel Leiva Martin
UNIV. PRESB. MACKENZIE

RESUMO

Em 1985, Mehra e Prescott levantaram uma questão que até hoje não foi respondida de forma satisfatória: o prêmio de risco das ações americanas é muito maior do que poderia ser explicado pelo “paradigma neoclássico de finanças econômicas” (*financial economics*) representado pelo modelo C-CAPM. E, a partir de então, este problema não resolvido ficou conhecido como o “*Equity Premium Puzzle*” (EPP) ou o “Enigma do Prêmio (de risco) das Ações”. Este enigma estimulou a produção de uma série de artigos, dissertações e teses que tentaram ajustar os modelos intertemporais de utilidade esperada aos dados dos mercados financeiros. Dentro deste contexto, esta tese busca (i) revisar a evolução histórica da teoria dos modelos de maximização da utilidade intertemporal dos agentes, (ii) analisar os pressupostos e conceitos chaves desses modelos, (iii) propor um novo modelo que seja capaz de solucionar o EPP, (iv) aplicar este modelo proposto aos dados históricos anuais entre 1929 e 2004 e (v) validar a lógica deste modelo através das metodologias *Mehra-Prescott* e *Hansen-Jagannathan*.

Esta tese faz uma crítica de que os estudos até aqui desenvolvidos tentaram explicar a dinâmica de um mercado financeiro altamente sofisticado, através de um modelo de economia não-monetária e de subsistência. Assim, a sua contribuição consiste na alteração desse pressuposto de uma economia de subsistência, considerando que a renda disponível do setor privado não seja integralmente consumida, mas que também possa ser poupada. Assumindo que as pessoas obtêm satisfação (utilidade) tanto pelo consumo atual como pela poupança atual (que será o consumo futuro), será deduzido que a utilidade marginal de consumir é igual à de poupar, em todo e qualquer período. Com base nisso, a utilidade marginal a consumir é substituída pela utilidade marginal de poupar dentro do modelo básico do C-CAPM. Para reforçar a idéia de que o modelo desta tese usa dados de poupança em vez de consumo, ao longo do trabalho ele será chamado de *Saving-CAPM*, ou *S-CAPM*. Este novo modelo mostrou-se capaz de solucionar o EPP quando submetidas às abordagens *Mehra-Prescott* e *Hansen-Jagannathan*.

ABSTRACT

In 1985 Mehra and Prescott raised a question that has not been answered satisfactorily: the equity premium of American shares is much higher than it could be explained by the "neoclassical paradigm of financial economics" represented by C-CAPM models. And, since then, this non-solved issue is known as the Equity Premium Puzzle (EPP). This puzzle has stimulated the production of a series of articles, theses and dissertations that tried to adjust the intertemporal expected utility models to the financial markets' data.

In this context, this doctoral dissertation aims to (a) revise the historical evolution of model theory of maximization of intertemporal expected utility, (b) analyze the key assumptions and concepts of these models, (c) propose a new model that can solve the EPP, (d) apply the proposed model to the historical data between 1929 and 2004, and (e) validate the logic of this model through the *Mehra-Prescott* and *Hansen-Jagannathan* methodologies.

This doctoral dissertation criticizes that the studies so far formulated have tried to explain the dynamics of highly sophisticated financial markets through a model of non-monetary exchange economy. Hence, its contribution consists of the changing of this assumption of a exchange economy considering that the available income of the private sector is not fully consumed, but rather also saved. Taking into account that people can obtain satisfaction (utility) with the present consumption as well as with the present savings (that will be the future consumption), it will be deduced that the marginal utility of consuming is replaced by the marginal utility of saving within the basic C-CAPM model. To reinforce this idea that the model of this doctoral dissertation uses data of savings rather than consumption, throughout the study it will be called Saving-CAPM or S-CAPM. This new model has proved to be capable of solving the EPP when submitted to the *Mehra-Prescott* and *Hansen-Jagannathan* approaches.

SUMÁRIO

Lista de Gráficos 8
Lista de Tabelas 9
Lista das Principais Variáveis desta Tese 10

Introdução 10

I. Evolução histórica dos modelos intertemporais em finanças: do CAPM ao EPP 16

II. Fundamentação Teórica dos Atuais Modelos Intertemporais 25

II.1. Hipótese da Utilidade Esperada 25
II.2. Medidas de Grau de Aversão ao Risco (GAR) 28
II.3. Funções de Utilidade e Grau de Aversão ao Risco 33
II.4. Exemplo de Maximização da Utilidade Esperada em Um Único (e breve) Período 36
II.5. Fator Subjetivo de Substituição Intertemporal (FSSI) 41
II.6. Estruturação do Modelo de Maximização da Utilidade Intertemporal 43

III. Modelos Intertemporais e o EPP 49

III.1. Implicações do modelo intertemporal e o grau de aversão ao risco 49
III.2. “Qual é o problema de $R(W) = 46,69$?” 54
III.3. Fator de desconto estocástico e a determinação do seu limite inferior de volatilidade 58
III.4. Tentativas de Explicação e/ou Solução do EPP 65
III.5. Há EPP no Brasil? Uma breve revisão da literatura 75

IV. Saving-CAPM: uma Possível Solução para o EPP 78

IV.1. Revisão crítica dos pressupostos do C-CAPM e dedução do S-CAPM 78
IV.2. Implicações do S-CAPM na abordagem Mehra-Prescott 85
IV.3. Fontes dos dados usados nesta tese 88
IV.4. Resultados obtidos dentro da estrutura Mehra-Prescott 89
IV.5. Implicações do S-CAPM na abordagem Hansen-Jagannathan 96

V. Conclusão e sugestões de novos estudos 106

Referencial Bibliográfico 110

Apêndice A. Derivação da Taxa Equivalente à Certeza de um Ativo Com Risco 116

Apêndice B. Derivação da Função RRA quando $R(W)$ tende a 1 121

Apêndice C. Propriedade da distribuição lognormal 122

Apêndice D. Dados Coletados e Manipulados 125

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico I.1. Extraído de Grossman e Shiller (1981).....	22
Gráfico II.1. Hipótese da Utilidade Esperada.....	28
Gráfico II.2. Curvas de Indiferença de Risco x Retorno	32
Gráfico II.3. Otimização de Carteiras por um breve período [$R(W) = \gamma$].....	40
Gráfico III.1. Otimização de Carteiras por um breve período	56
Gráfico III.2. Disposição de pagar prêmio de seguro em função de $R(W)$ e probabilidade de perda (π)	58
Gráfico IV.1. <i>Trade-off</i> entre Consumo e Poupança Corrente	81
Gráfico IV.2. Regressão do consumo (C) em função da renda disponível (YD), dados anuais no período 1929-2004	83
Gráfico IV.3. Relações entre γ e δ através da equação (IV.30).....	93
Gráfico IV.4. Relação entre γ e δ através da equação (IV.32).....	95
Gráfico IV.5. Relação entre γ , δ , \bar{M} e $E\left[\left(S_{t+1}/S_t\right)^{-\gamma}\right]$	100
Gráfico IV.6. Relação entre \bar{M} , $\sigma(M_{t+1})$ e $\sigma(M_{t+1}^*)$	102
Gráfico IV.7. Relação entre \bar{M} e $\left[\sigma(M_{t+1}) - \sigma(M_{t+1}^*)\right]$	103
Gráfico IV.8. Relação entre γ , $\sigma(M_{t+1})$ e $\sigma(M_{t+1}^*)$	104
Gráfico IV.9. Relação entre γ , $\left[\sigma(M_{t+1}) - \sigma(M_{t+1}^*)\right]$	105
Gráfico V.1. Variação percentual anual da poupança (S), consumo (C) e a relação [(P/D)-1] do índice S&P500, P/D = 1 em 1929 (base).....	109

LISTA DE TABELAS

Tabela II.1. Momentos dos logaritmos da taxa de crescimento do consumo e da taxa de retorno dos ativos entre 1889 e 1994 [extraído de Campbell et al. (1997)].	33
Tabela III.1. Grau de aversão ao risco estimado para vários períodos.....	54
Tabela III.2. Evidências para o valor real de $R(W)$	55
Tabela III.3. Valor dos coeficientes α (grau de aversão ao risco) e β (fator de desconto subjetivo) e demais índices do mercado brasileiro.	75
Tabela III.4. Resumo dos Principais teses de C-CAPM no Brasil e os valores estimados dos coeficientes α (grau de aversão ao risco).	77
Tabela IV.1. Momentos do crescimento do consumo, poupança, renda e retornos de ativos	90
Tabela IV.2. Momentos do logaritmo do crescimento do consumo, poupança, renda e retornos de ativos.....	91
Tabela IV.3. Estimativas para o grau de aversão relativa ao risco (γ) pela equação (IV.29)	92
Tabela IV.4. Estimativas para o grau de aversão relativa ao risco (γ) pela equação (IV.30).....	94
Tabela D.1. Dados coletados e suas respectivas fontes.....	126
Tabela D.1. Dados coletados e suas respectivas fontes - CONTINUAÇÃO.....	127
Tabela D.2. Valores <i>per capita</i> e/ou em US\$ constantes do ano 2000 (as taxas de retorno são expressas em termos reais).....	128
Tabela D.2. Valores <i>per capita</i> e/ou em US\$ constantes do ano 2000 (as taxas de retorno são expressas em termos reais) - CONTINUAÇÃO	129

LISTA DAS PRINCIPAIS VARIÁVEIS DESTA TESE

$A(W)$.	função de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt,
β_i	beta, coeficiente que mede a sensibilidade da taxa de retorno da ação i
$\beta_{i,C}$	beta de consumo da ação. mede a sensibilidade da taxa de retorno da ação i com a carteira de máxima correlação com a taxa de crescimento do consumo <i>per capita</i>
$\beta_{\bar{M}}$	vetor dos coeficientes lineares, que é a covariância de m
C_t	consumo no período t . Pode ser <i>per capita</i> ou não dependendo da equação.
$D_{i,t}$	dividendos da ação i no tempo t
$E()$	operador da esperança incondicional
$E_t()$	operador da esperança condicionada às informações disponíveis no período t
G_t	consumo (ou gastos) do setor governo no período t .
L_t	remuneração advinda do trabalho no período t
M_{t+1}	fator de desconto estocástico
M_t	importações feitas no período t .
$P_{i,t}$	preço atual da ação i no tempo t
r	logaritmo natural de $1+R$
$R(W)$	função de aversão relativa ao risco ($= \gamma$)
r^*	taxa de desconto subjetiva
R_f	taxa livre de risco (títulos do governo americano)
R_M	taxa de retorno da carteira do mercado (S&P500)
R_i	taxa de retorno de um ativo i
$R_{i,t+1}$	taxa de retorno do ativo i no período $t+1$
R_C^*	taxa de retorno da carteira de máxima correlação com a taxa de crescimento do consumo
R_p	taxa de retorno de uma carteira p qualquer.
S_t	poupança bruta do setor privado. Pode ser <i>per capita</i> ou não dependendo da equação
T_t	tributos e contribuições recolhidos no período t .
TR_t	transferências feitas no período t .

$U(\dots)$	função de utilidade, que pode ter como argumento: C, S; W, etc.
W_t	estoque de riqueza no período t
w_i	proporção da riqueza alocada ao ativo i ,
X_t	exportação efetuadas no período t
Y_t	produto interno bruto = renda interna bruta gerada no período t
YD_t	renda disponível bruta no período t.
δ	fator subjetivo de substituição intertemporal
ε	componente de risco
γ	grau de aversão relativa ao risco [= $R(w)$]; coeficiente de aversão ao risco relativa.
ρ	taxa de retorno equivalente à certeza
σ_i^2	variância de i [= $Var(i)$]
σ_{ij}	covariância entre as variáveis i e j [= $Cov(i, j)$]
σ_i	desvio-padrão da variável i
Ω	matriz de covariância do vetor de taxas de retorno \mathbf{R}_{t+1}
ψ	elasticidade intertemporal do consumo

SAVING-CAPM: UMA POSSÍVEL SOLUÇÃO PARA O “EQUITY PREMIUM PUZZLE” DO CONSUMPTION-CAPM

Introdução

Segundo Campbell e Cochrane (2000), o desenvolvimento da teoria do C-CAPM (*Consumption-based Capital Asset Pricing Model*, ou Modelo de Apreçamento de Ativos de Capital baseado no Consumo) se situa entre os principais avanços de finanças econômicas (*financial economics*) das últimas décadas. Os artigos clássicos de Lucas (1978), Breeden (1979), Grossman e Shiller (1981), entre outros, deduziram relações simples mas que teoricamente teriam o poder de explicar complexas relações intertemporais entre a maximização da utilidade marginal esperada de consumir e a taxa de retorno esperada dos ativos financeiros. Entretanto, o C-CAPM quando confrontado com os dados reais apresentou resultados decepcionantes.

Ao longo da década de 80, vários estudos apontaram problemas com o C-CAPM em explicar a evolução do retorno dos ativos financeiros através do comportamento do consumo *per-capita*, tais como Hansen e Singleton (1983) e Mehra e Prescott (1985). De acordo com Mankiw e Shapiro (1986) e Breeden, Gibbons e Litzenberger (1989), o C-CAPM também não se mostrou mais eficiente do que o tradicional CAPM para prever taxas de retorno dos ativos financeiros. Devido a isto, o C-CAPM não aparece hoje nos manuais de Finanças, e não é de se surpreender que os profissionais de finanças não o utilizam na tomada de decisão de investimento.

Mehra e Prescott (1985), com base no C-CAPM, só conseguiriam explicar o prêmio de risco das ações se o grau de aversão ao risco dos investidores fosse muito mais alto do que estudos empíricos e teóricos indicam. Por causa desta inconsistência, o título deste artigo ficou “*Equity Premium: A Puzzle*” (Prêmio das Ações: Um Enigma). A literatura acabou “adotando” esta expressão com uma pequena modificação: “*Equity Premium Puzzle*” (EPP) para descrever essa inconsistência.

Hansen e Jagannathan (1991) argumentaram que a abordagem paramétrica das funções de utilidade, embora tenha proporcionado *insights*

interessantes do ponto de vista teórico, poderia estar restringindo a capacidade explicativa dos modelos C-CAPM no campo empírico. Desta forma, estes autores, ao invés de tentarem explicar séries de taxas de retorno dos ativos financeiros a partir de uma função de utilidade parametrizada, fizeram o oposto. A partir das séries de taxas de retorno dos ativos financeiros, eles deduziram quais deveriam ser as características gerais destas funções de utilidade, ou melhor, do fator de desconto estocástico. Entretanto, nenhuma função da utilidade de consumir, conhecida até então, mostrou-se capaz de preencher os requisitos impostos por esta metodologia. Este foi um estudo que ratificou a existência do *equity premium puzzle* do ponto de vista econométrico.

O trabalho de Hansen e Jagannathan (1991) será estudado detalhadamente na seção III.3 e será utilizado para validar as principais implicações do modelo proposto por esta tese: o S-CAPM.

Muitos estudos acadêmicos foram feitos na tentativa de solucionar este enigma, dentre os quais destacam-se: Epstein e Zin (1989, 1991) e Campbell e Cochrane (1995). Estes dois estudos chegaram a uma solução do EPP modificando basicamente a formulação da função da utilidade de consumir, de forma a permitir que o grau de aversão ao risco possa ser elevado e ter capacidade de explicar o prêmio de risco das ações. Porém, de acordo com Kocherlakota (1996), Mehra (2003), Mehra e Prescott (2003), Campbell et. al. (1997), entre outros, as soluções apresentadas até agora têm ajudado a aumentar o conhecimento da comunidade acadêmica. No entanto, elas ainda não são aceitas como definitivas.

Esta tese propõe uma solução ao EPP através de uma nova abordagem deste problema. Ela parte de um novo enfoque do pressuposto de que os agentes da economia obtêm satisfação (utilidade) não só em consumir, mas também em poupar, pois o que é poupado hoje será consumido no futuro. Este trabalho faz uma crítica de que os modelos até aqui desenvolvidos ignoram a influência da economia real, ou seja, do mundo fora dos mercados de capitais, na dinâmica dos ativos financeiros. A única variável da economia real contemplada pelos modelos é o consumo. Da forma como estes modelos foram construídos, está implícito o pressuposto de que toda renda está sendo consumida. Ou seja, nesta hipótese o modelo Mehra - Prescott é fiel ao arquétipo de economia de trocas de Lucas (1978),

mas, por outro lado, contraria frontalmente a realidade observável de uma economia moderna em que o consumo, exceto em raríssimas ocasiões, nunca é igual à renda.

Assim, esta tese busca (i) revisar a evolução histórica da teoria dos modelos de maximização da utilidade intertemporal dos agentes, (ii) analisar os pressupostos e conceitos chaves desses modelos, (iii) propor um novo modelo que seja capaz de solucionar o EPP, (iv) aplicar este modelo proposto aos dados históricos anuais entre 1929 e 2004 e (v) validar a lógica deste modelo através das metodologias *Mehra-Prescott* e *Hansen-Jagannathan*.

A relevância desta tese pode ser ilustrada pela posição dos seguintes autores:

- ✓ Segundo Kocherlakota (1996), apesar do C-CAPM não ser usado pelos profissionais de finanças do “mundo real”, do ponto de vista acadêmico o paradigma Lucas-Breenden é parte integrante da moderna teoria macroeconômica e economia internacional. E, portanto, se há problemas empíricos com este modelo, isto representa lacunas do nosso conhecimento sobre estes importantes campos.[Kocherlakota é membro do Departamento de Pesquisa do FED-Minneapolis]
- ✓ De acordo com Campbell e Conchrane (2000), o fato de que o C-CAPM é menos eficiente do que o CAPM não deve servir de motivo para abandonar o C-CAPM. Modelos baseados em carteiras não são derivados de pressupostos de fricções (imperfeições) explícitas de mercado que rompem a relação entre consumo e o retorno dos ativos. Ninguém pode acreditar que o CAPM tradicional possa ser válido mas o C-CAPM não, uma vez que as bases teóricas são as mesmas.

Na verdade, o que se está pesquisando é se os agentes econômicos (investidores, empresários, trabalhadores, estudantes, etc.) têm um comportamento (conjunto) racional ou não. O fato do EPP não ter sido “solucionado” de forma definitiva por modelos usando pressupostos de racionalidade dos agentes, contribui para o fortalecimento da corrente que defende que o conjunto dos agentes não age

de forma racional, como é o caso da Teoria Prospectiva de Kahneman e Tversky (1979). Para ilustrar este fato, Daniel Kahneman foi (o único) agraciado com o prêmio Nobel de Economia em 2002.

A solução proposta por esta tese não propõe de início nenhuma formulação nova da função de utilidade dos agentes, como fizeram Epstein e Zin (1991) e Campbell e Cochrane (1999). A forma funcional da utilidade marginal de consumir será deduzida partindo de um novo enfoque sobre a decisão dos agentes de quanto consumir e de quanto poupar a cada período.

Esta tese levanta a hipótese de que os modelos até aqui desenvolvidos ignoram, em grande parte, a influência da economia real, ou seja, do mundo fora dos mercados de capitais na dinâmica dos ativos financeiros. A única variável da economia real contemplada pelos modelos é o consumo. A “imagem mental” de economia de trocas de Lucas (1978), onde tudo o que é produzido é consumido, parece que trouxe uma “prisão mental” aos pesquisadores quanto à real influência de uma economia moderna no mercado de capitais. Da forma como os modelos foram construídos, eles pressupõem (implícita ou explicitamente) que toda a renda gerada está sendo consumida, contrariando frontalmente com a realidade observada.

A contribuição desta tese consiste na alteração desse pressuposto de uma economia de subsistência, fazendo com que a renda disponível (YD) do setor privado não seja integralmente consumida (C), mas que também ela possa ser poupada (S). Assumindo que as pessoas obtêm satisfação (utilidade) tanto pelo consumo atual como pela poupança atual (que será o consumo futuro), será deduzido que a utilidade marginal de consumir é igual à de poupar, em todo e qualquer período. Com base nisso, partindo do modelo apresentado por Mehra (2003), a utilidade marginal a consumir é substituída pela utilidade marginal de poupar. Para reforçar a idéia de que o modelo desta tese usa dados de poupança em vez de consumo, ao longo do trabalho ele será chamado de Saving-CAPM, ou S-CAPM. Entretanto, vale a pena frisar que, em sua essência, ele continua sendo o mesmo C-CAPM, com o relaxamento do pressuposto de que vive-se em uma economia de subsistência.

A abordagem do S-CAPM relaciona as taxas de retorno dos ativos financeiros com a demanda por estes ativos, que é a poupança privada. Os agentes não compram ações, títulos, com consumo e sim com poupança. Além disso, a poupança (em conjunto com o consumo) capta a influência de outras variáveis macroeconômicas que o consumo isoladamente não consegue captar, tais como superávit (ou déficit) do orçamento público, da balança de transações correntes e investimento. Estas relações serão descritas na seção IV.1. Tudo isso torna o modelo mais abrangente para captar as inter-relações entre a economia real e os mercados de capitais.

O S-CAPM mostrou-se capaz de solucionar o EPP tanto pela abordagem Mehra-Prescott, onde é assumido que as taxas de retorno dos ativos e a taxa de crescimento do consumo (e da poupança) seguem uma distribuição conjunta lognormal, como também pela abordagem Hansen-Jagannathan, onde não é feito nenhum pressuposto sobre a distribuição de probabilidade dessas variáveis e tampouco sobre a parametrização da função utilidade.

No primeiro capítulo desta tese será feito um breve histórico sobre os modelos de finanças que levaram ao desenvolvimento teórico do C-CAPM e ao surgimento do chamado “*Equity Premium Puzzle*”.

No Capítulo II serão analisados os fundamentos teóricos necessários para o desenvolvimento de modelos de otimização intertemporal de utilidade esperada, que são:

1. Hipótese da Utilidade Esperada
2. Medidas de Grau de Aversão ao Risco (GAR)
3. Funções Teóricas de Utilidade Esperada
4. Fator Subjetivo de Substituição Intertemporal (FSSI)

Ainda neste Capítulo II será deduzido um modelo básico de otimização intertemporal de utilidade esperada que servirá como base para o entendimento do EPP

No Capítulo III serão caracterizadas as implicações deste modelo básico com relação às suas variáveis (consumo agregado e taxa de retorno do mercado) e aos seus parâmetros (GAR e FSSI). Será mostrado que o EPP surge do fato dos parâmetros necessários para ajustar o modelo às variáveis observadas não serem compatíveis com outros estudos da literatura. Por exemplo, o GAR, segundo estudos empíricos, deveria variar entre 0 e 5. Porém, no estudo de Mehra e Prescott (1985), para explicar o diferencial da taxa de retorno das ações americanas com relação à taxa livre de risco é necessário um GAR próximo de 50!

Ainda no Capítulo III será feita uma breve revisão crítica das principais tentativas de explicação e/ou solução do EPP.

No Capítulo IV serão apresentadas críticas à formulação atual do problema. A partir dessas críticas será deduzido o modelo S-CAPM, na tentativa de propor uma solução viável e mais simples do que as apresentada por Epstein e Zin (1989, 1991) e Campbell e Cochrane (1999). As implicações teóricas e empíricas da mudança de pressupostos feita pelo S-CAPM serão analisadas dentro da estrutura *Mehra-Prescott* e pela abordagem econométrica de *Hansen-Jagannathan*.

Finalmente serão apresentadas as conclusões e as sugestões para futuras pesquisas.

I. EVOLUÇÃO HISTÓRICA DOS MODELOS INTERTEMPORAIS EM FINANÇAS: DO CAPM AO EPP

Neste capítulo é feito um breve histórico sobre os modelos de finanças que levaram ao desenvolvimento teórico do C-CAPM, e ao surgimento do chamado “*Equity Premium Puzzle*”.

O CAPM (*Capital Asset Pricing Model*, ou Modelo de Apreçamento de Ativos de Capital) foi desenvolvido, de forma independente, por Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966), a partir dos trabalhos de Markowitz (1959) e Tobin (1958). Até hoje ele é o principal modelo teórico em que acadêmicos e profissionais de finanças se baseiam para estimar a taxa de retorno esperada de um ativo em função de sua sensibilidade ao risco de mercado. De acordo com este modelo, a taxa esperada de retorno de qualquer ativo $[E(R_i)]$ estará em equilíbrio de acordo com esta função:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i [E(R_M) - R_f] \quad (1.1)$$

Onde, R_f é a taxa livre de risco, $E(R_M)$ é a taxa de retorno esperada da carteira do mercado e β_i é o coeficiente que mede a sensibilidade da taxa de retorno da ação i em relação aos riscos sistêmicos da economia, que é captado pelo chamado prêmio de risco ou retorno em excesso do mercado $[E(R_M) - R_f]$. Esta relação define a taxa esperada de retorno de equilíbrio de cada ativo no mercado de capitais. Uma das principais implicações do CAPM é que as ações que são mais sensíveis aos riscos de mercado (sistêmicos) tendem a ter um beta elevado e, conseqüentemente, os agentes descontam o fluxo de caixa futuro da empresa por uma taxa de retorno maior $[E(R_i)]$, fazendo com que os preços sejam menores do que os de ações com beta mais baixo.

Apesar de ser o modelo de carteira mais usado pelos profissionais de finanças em suas decisões de investimento, o CAPM assume que o objetivo do agente é de maximizar retorno para cada nível de risco que ele está assumindo. O CAPM não leva em consideração que este agente tem outras necessidades além de “ganhar dinheiro”, ele tem que sobreviver e, portanto, consumir! Ou seja, o CAPM

não contempla a decisão que cada agente faz de quanto irá consumir e quanto irá poupar. Esta decisão é ignorada pelo modelo, e só após o agente definir o total da sua riqueza que será destinada a investimento é que ele vai tomar a decisão de como irá distribuir a sua riqueza entre os ativos da economia (que será sempre igual a distribuição da carteira do mercado). Por isso o CAPM é chamado de modelo de um único período. Este período não está definido em nenhuma medida de tempo (anos, meses, etc), representa apenas o intervalo entre as decisões de quanto consumir e quanto poupar.

Merton (1973) expandiu o CAPM tradicional para um contexto de tempo contínuo, em que os agentes buscam maximizar a utilidade ao longo de toda a vida e não apenas em um curto período. Esta otimização da utilidade intertemporal é perseguida pelos agentes através de suas decisões de quanto consumir e poupar, e de como alocar a sua riqueza entre os ativos da economia em qualquer momento. Este modelo foi chamado de *Intertemporal Capital Asset Pricing Model* (I-CAPM, ou Modelo Intertemporal de Apreçamento de Ativos de Capital). Um dos pressupostos deste modelo é que a utilidade (satisfação) percebida pelos agentes é uma função do consumo corrente e do futuro. Sendo que a utilidade esperada do consumo futuro é uma função da riqueza atual e das expectativas das taxas de retorno e riscos futuros, que são formadas a partir do que Merton (1973) chama de “conjunto de oportunidades de investimento” (*investment opportunity set*).

O I-CAPM explica o retorno em excesso (acima da taxa livre de risco) de qualquer ativo através de “múltiplos betas”. No total, o modelo apresenta um beta para o retorno em excesso da carteira do mercado e mais um beta para cada variável de estado (*state-variables*) que, em conjunto, condicionam as oportunidades de investimento na economia. Matematicamente, o I-CAPM pode ser representado por esta fórmula:

$$E(R_i) - R_f = \beta_{i,M} [E(R_M) - R_f] + \beta_{i,S1} [E(R_{S1}) - R_f] + \beta_{i,S2} [E(R_{S2}) - R_f] + \dots \quad (1.2)$$

Onde R_{Sn} é a variação da variável de estado n , e $\beta_{i,Sn}$ mede a sensibilidade da ação a esta variável. Por exemplo, $S1$ poderia ser o preço do petróleo, e $E(R_{S1})$ seria a variação percentual esperada do preço deste bem. No caso de que surja a expectativa de um aumento do preço do petróleo, os agentes

procurarão se proteger (*hedge*) contra um cenário recessivo comprando hoje as ações de empresas petrolíferas que tenderão a render mais neste cenário. E ao mesmo tempo procurarão se desfazer de ações de empresas que perdem com um petróleo alto, como companhias de aviação. Desta forma, o preço das ações das petrolíferas sobem porque as suas taxas de retorno esperadas caem, uma vez que elas tendem a ter um beta baixo (ou até negativo) para esta variável-estado. E os preços das ações de companhias aéreas sobem porque elas tendem a ter um beta elevado. Assim, além do risco de mercado que está ligado às preocupações dos investidores em um único período, o I-CAPM incorpora outros fatores de risco que podem influenciar o nível de satisfação (utilidade) dos agentes.

Apesar de ter sido desenvolvido a partir de pontos distintos, o I-CAPM é muito semelhante ao APT (*Arbitrage Pricing Model*, ou Modelo de Apreçamento por Arbitragem), que foi desenvolvido por Ross (1976).

De acordo com Breeden (1979) e Merton (1973), o I-CAPM é um modelo teoricamente robusto, mas com um nível de generalidade muito elevado que torna difícil testá-lo empiricamente, ou mesmo usá-lo em decisões financeiras “práticas”. É muito difícil identificar quais seriam as variáveis de estado que deveriam ser incorporadas no modelo: petróleo? câmbio? risco político? segurança pública? risco de guerra? etc.

Lucas (1978), em um artigo eminentemente teórico, modela uma economia baseada em trocas (não-monetária), em que tudo que é produzido em um determinado período só pode ser consumido neste período, pois todos os produtos desta economia são perecíveis. Seu objetivo, em adotar o pressuposto de uma economia “simplificada”, era analisar teoricamente o impacto das flutuações da produtividade da economia “real” sobre os movimentos dos preços dos ativos. Este modelo foi construído em tempo discreto, e não contínuo como o I-CAPM.

Os agentes desta economia de Lucas (1978) negociam competitivamente as ações das empresas produtoras destes bens consumíveis, uma vez que os dividendos são pagos através destes bens. A única fonte de renda (e de sobrevivência) desta economia era proveniente desses dividendos. Neste artigo, Lucas deduz a condição de equilíbrio intertemporal entre a utilidade marginal de

consumir entre dois períodos e a taxa de retorno das ações desta economia. Esta tese reexamina esta condição de equilíbrio na seção II.6, onde ela é deduzida sem o pressuposto de que a economia seja de trocas, chegando-se ao mesmo resultado alcançado por Lucas (1978). A condição de equilíbrio intertemporal pode ser assim representada:

$$U'(C_t) = \delta E_t \left[(1 + R_{i,t+1}) U'(C_{t+1}) \right] \quad (1.3)$$

δ é o fator de substituição intertemporal subjetivo do agente, que o inverso da taxa de desconto subjetiva (r^*). Desta forma:

$$\delta = 1 / (1 + r^*)$$

C_t é o consumo do agente no período t

$U'(C_t)$ é a utilidade marginal do consumo em t

$R_{i,t+1}$ é a taxa de retorno do ativo i no período t+1

Esta relação é a base de toda a teoria voltada a explicar o retorno dos ativos através da utilidade do consumo, ou seja, do C-CAPM. Esta relação pode ser modificada para ilustrar como o valor presente (preço) dos ativos pode ser afetado por estas variáveis. Sabendo que $1 + R_{i,t+1} = (P_{i,t+1} + D_{i,t+1}) / P_{i,t}$, ou seja, que 1 mais a taxa de retorno do próximo período (t+1) é igual aos dividendos recebidos ($D_{i,t+1}$) mais o preço final em t+1 ($P_{i,t+1}$) em relação ao preço atual ($P_{i,t}$), e rearranjando alguns termos de (1.3), tem-se:

$$P_{i,t} = E_t \left\{ (P_{i,t+1} + D_{i,t+1}) \left[\delta \left(\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \right) \right] \right\} \quad (1.4)$$

A equação (1.4) mostra que o preço atual de qualquer ação é igual ao valor presente esperado do preço e dos dividendos do próximo período, onde o fator de desconto é a expressão que aparece dentro do colchete. Esta expressão é conhecida como fator de desconto estocástico (*stochastic discount factor*) ou “semente de apreçamento” (*pricing kernel*). Este fator será objeto de análise no capítulo III, seção III.3., tendo como base o trabalho de Hansen e Jagannathan (1991).

Breeden (1979), apoiado no trabalho de Lucas (1978) e de Merton (1973), simplifica o I-CAPM para um modelo de um único fator: a taxa de crescimento do consumo. Este modelo foi batizado de C-CAPM (*Consumption-based Capital Asset Pricing Model*) e, assim como o I-CAPM, ele é um modelo de tempo contínuo. Neste modelo, os agentes para maximizar a utilidade intertemporal de consumir não devem perseguir a “carteira de mercado” do CAPM de período único, mas sim a carteira que tenha correlação máxima com a taxa de crescimento do consumo. A relação de equilíbrio do C-CAPM pode ser assim representada:

$$E(R_i) - R_f = \beta_{i,C} [E(R_C^*) - R_f] \quad (1.5)$$

Ou seja, o prêmio de risco de qualquer ação $[E(R_i) - R_f]$, é uma função do prêmio de risco da carteira de máxima correlação com a taxa de crescimento do consumo $[E(R_C^*) - R_f]$ e o beta de consumo da ação $(\beta_{i,C})$.

Quando o nível de consumo aumenta, a utilidade marginal diminui do último R\$ 1,00 consumido diminui. Quanto mais saciado uma pessoa está de um determinado bem ou serviço, menor é o seu desejo de consumir uma unidade a mais. Desta forma, as ações que têm taxas de retorno altamente correlacionadas com a variação do consumo agregado ($\beta_{i,C}$ elevado), tenderão a proporcionar maiores ganhos aos agentes em estados da economia em que o consumo já está em nível elevado, e conseqüentemente, a utilidade marginal de consumir é baixa. Deste modo, este tipo de ação será negociada com um preço menor, pois eles irão descontar o fluxo de caixa por uma taxa de retorno esperada maior. Este é o caso da companhia aérea, cuja rentabilidade é pró-cíclica, e tende a aumentar ou a cair mais do que proporcional à variação do consumo agregado.

Por outro lado, as ações de empresas petrolíferas tendem a dar bons resultados em situações não tão boas para o restante da economia. Ou seja, elas renderão mais quando o nível do consumo estará relativamente baixo e a utilidade marginal a consumir está alta. Desta forma, o beta de consumo ($\beta_{i,C}$) destas empresas tendem a ser mais baixo, conseqüentemente, os agentes descontarão o fluxo de caixa esperado por uma taxa de retorno menor, fazendo com que o preço das empresas sejam mais elevados.

Portanto, do ponto de vista teórico, o C-CAPM conseguiu manter a robustez do I-CAPM com uma estrutura bem mais simplificada. Ao mesmo tempo, testes empíricos se tornaram mais simples de serem feitos.

Grossman e Shiller (1981), ao acoplarem a função de utilidade de consumir do tipo CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*, ou Aversão Relativa Constante ao Risco) à condição de equilíbrio de Lucas (1978), deduziram a seguinte equação:

$$P_{i,t} = E_t \left[(P_{i,t+1} + D_{i,t+1}) \delta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \right] \quad (1.6)$$

Onde γ é o grau de aversão relativa ao risco. Grossman e Shiller (1981) generalizaram a equação (1.6) para que o preço terminal pudesse estar n períodos a no futuro em relação a hoje (neste caso: t). Assim, a equação fica:

$$P_{i,t} = E_t \left\{ \left[\sum_{j=1}^n D_{i,t+j} \delta^j \left(\frac{C_{t+j}}{C_t} \right)^{-\gamma} \right] + P_{i,t+n} \delta^n \left(\frac{C_{t+n}}{C_t} \right)^{-\gamma} \right\} \quad (1.7)$$

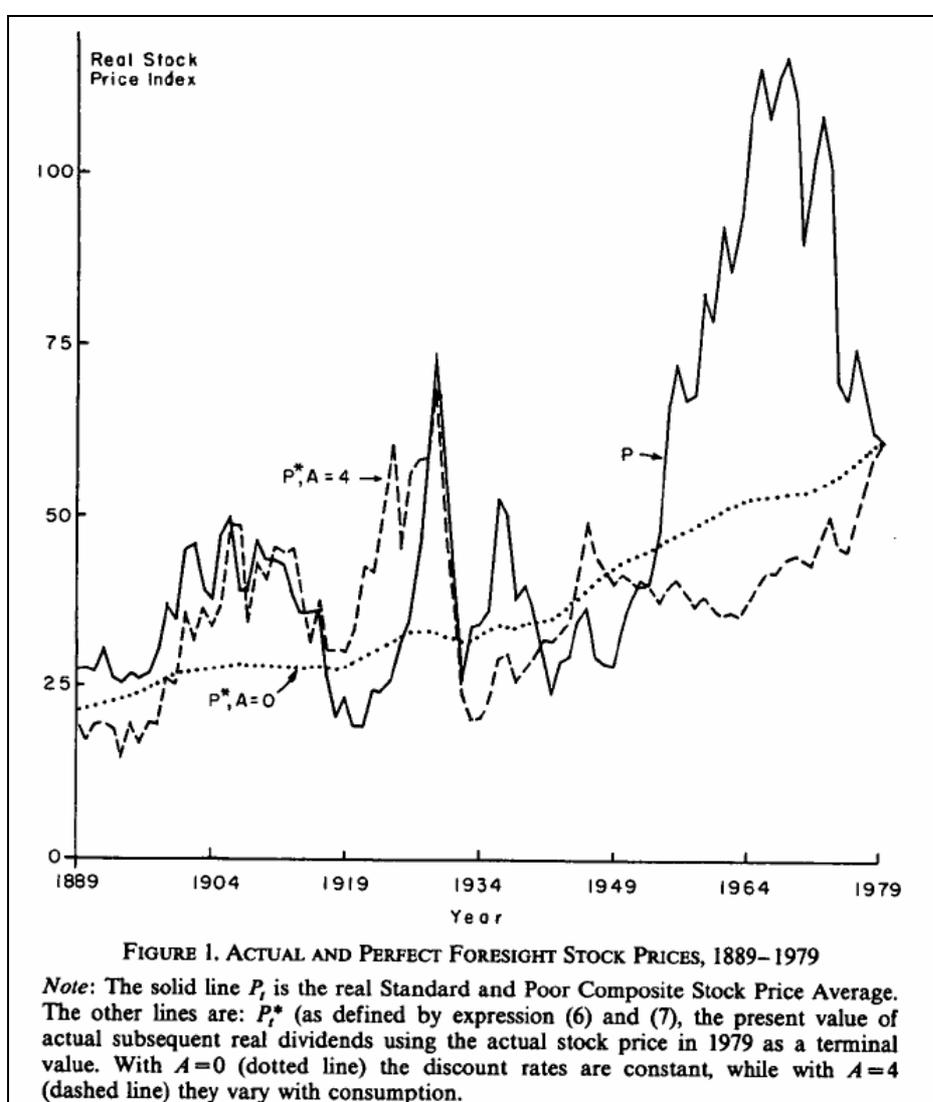
Como uma forma de averiguar a relação entre o crescimento do consumo e o preço dos ativos, Grossman e Shiller (1981) compararam o índice de ações S&P500 em termos reais, entre os anos 1889-1979, em relação a séries artificiais deste índice. Estas séries foram obtidas através de fórmulas de valor presente, assumindo que os agentes tinham expectativas perfeitas sobre o fluxo de dividendos futuros e o preço terminal (de 1979). Para se obter essas séries artificiais de valor presente com expectativas perfeitas, basta retirar o operador da esperança de (1.7), e usar os dividendos e preços efetivamente realizados. Assim, os índices S&P500 construídos nestas condições (P^*) podem ser calculados em cada momento t ($1889 \leq t \leq 1979$) da seguinte forma:

$$P_t^* = \left[\sum_{j=1}^{1979-t} D_{t+j} \delta^j \left(\frac{C_{t+j}}{C_t} \right)^{-\gamma} \right] + P_{1979} \delta^{1979-t} \left(\frac{C_{1979}}{C_t} \right)^{-\gamma} \quad (1.8)$$

O Gráfico I.1, que foi extraído de Grossman e Shiller (1981), mostra a série do S&P500 real (P) e duas séries . Quando é assumido que os agentes são

neutros ao risco ($\gamma=A=0$)¹, o fator de desconto fica constante ao longo de todo o período (igual a δ). Já com $A=4$ ($=\gamma$), a série artificial consegue captar boa parte da volatilidade apresentada pelo S&P500 real. Mas, como os agentes não têm expectativas perfeitas sobre o fluxo de caixa futuro, os autores argumentam que uma série de preços estimados através de expectativas *ex-ante*, tanto dos dividendos como da taxa de desconto, deve ter uma volatilidade maior de uma série de preços observados (*ex-post*). Portanto, eles levantam a hipótese de que o grau de aversão relativa ao risco deve ser de pelo menos $A=4$, ou seja $\gamma \geq 4$.

Gráfico I.1. Extraído de Grossman e Shiller (1981)



¹ Pela notação dos autores, "A" é o grau de aversão relativa ao risco. Nesta tese, $A(W)$ é usado para representar o grau de aversão absoluto ao risco. E $R(W)$, γ e α serão usados para representar o grau de aversão relativa.

Ao longo da década de 80, começaram a aparecer estudos que traziam evidências de que havia algo errado com o C-CAPM de Breeden (1979) e a condição de equilíbrio deduzida por Lucas (1978). Ou, pelo menos, poderia haver problemas de como estes modelos estavam sendo testados. Dentre esses estudos destaca-se o de Mehra e Prescott (1985), que, usando o ferramental do C-CAPM, não conseguiram explicar o prêmio de risco das ações americanas, entre 1898-1978, sem usar um grau de aversão ao risco muito mais elevado do que se previa pelo “paradigma neoclássico de finanças econômicas”. E, a partir de então, este problema não resolvido ficou conhecido como o “*Equity Premium Puzzle*” (EPP) ou o “Enigma do Prêmio (de risco) das Ações”. Este problema estimulou a produção de uma série de artigos, dissertações e teses² que tentaram ajustar os modelos intertemporais aos dados econômicos e financeiros do mercado americano.

Vale a pena notar que Mehra e Prescott (1985) não estavam interessados em prever a taxa de retorno de ativos, como seria uma “aplicação prática” do C-CAPM de Breeden (1979). Eles buscavam explicar o desempenho passado dos índices de mercado americano com base na condição de equilíbrio intertemporal deduzida por Lucas (1978). Mas mesmo nessa aplicação voltada para a previsão de taxas de retorno dos ativos, o C-CAPM não se mostrou eficaz em comparação ao CAPM tradicional.

Mankiw e Shapiro (1986) fizeram regressões lineares das taxas de retorno de 464 ações ativamente negociadas entre 1959 e 1982 na bolsa de Nova York usando o CAPM tradicional, o C-CAPM, e um híbrido usando tanto o beta do mercado como o beta do consumo. O resultado alcançado foi decepcionante. O CAPM tradicional, apesar de mais simples, apresentou melhores resultados na previsão da taxa de retorno do que o C-CAPM.

Breeden, Gibbons e Litzenberger (1989) após apontarem problemas com a medição dos dados agregados de consumo e fazendo alguns ajustes nestes dados, compararam o desempenho do CAPM tradicional e do C-CAPM, e ambos apresentaram resultados semelhantes. Entretanto, dado os problemas alegados com

² Para ilustrar a importância do tema, em 28/02/2006, ao fazer uma busca no Google da expressão “Genoma”, que é um tema que teve grande repercussão na mídia não especializada, foram encontrados 2.300.000 *links*. Enquanto que, ao buscar “*Equity Premium Puzzle*”, um tema exclusivamente acadêmico, apareceram 468.000 *links* (20% do “Genoma”).

as estatísticas divulgadas do consumo agregado e o complexo processo de ajuste, não é de se admirar que o C-CAPM não é usado pelos profissionais do mercado financeiro e nem pela imensa maioria de acadêmicos.

Tendo em vista a evolução teórica aqui descrita do C-CAPM e de sua não conformidade com a realidade observada, esta tese busca (i) revisar a evolução histórica da teoria dos modelos de maximização da utilidade intertemporal dos agentes, (ii) analisar os pressupostos e conceitos chave desses modelos, (iii) propor um novo modelo que seja capaz de solucionar o EPP levantado por Mehra e Prescott (1985), (iv) aplicar este modelo proposto aos dados históricos anuais entre 1929 e 2004 e (v) validar a solução alcançada através da metodologia *Hansen-Jagannathan*.

No próximo capítulo serão analisados os principais conceitos fundamentais sobre os quais o C-CAPM foi construído.

II. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DOS ATUAIS MODELOS INTERTEMPORAIS

Neste capítulo são analisados os fundamentos básicos de finanças econômicas necessários para o entendimento dos modelos de maximização da utilidade intertemporal, sobre os quais o C-CAPM foi desenvolvido. Os fundamentos abordados são:

1. Hipótese da Utilidade Esperada
2. Medidas do Grau de Aversão ao Risco (GAR)
3. Funções Teóricas de Utilidade e GAR
4. Fator de Substituição Intertemporal Subjetivo (FSIS)

Após abordar estes conceitos, será deduzido um modelo básico de otimização intertemporal de utilidade esperada que servirá como base para o entendimento do EPP, que será analisado no Capítulo III.

II.1. HIPÓTESE DA UTILIDADE ESPERADA

A função de utilidade esperada, também é conhecida como *função de utilidade Von Neumann-Morgenstern*, graças ao trabalho pioneiro em teoria das decisões [SILBERG e SUEN (2001)]. A hipótese da utilidade esperada parte do pressuposto que as pessoas não estão dispostas a apostarem nos “jogos justos” (*fair games*). Isso significa trocar uma riqueza sem risco por um prêmio esperado de mesmo valor, porém com risco, ou seja, “trocar o certo pelo duvidoso”.

A principal implicação da hipótese da utilidade esperada é que a satisfação (utilidade) dos agentes não é uma função do valor que eles esperam ter da riqueza (W) em um dado momento ($U[E(W)]$), mas sim do quanto eles esperam usufruir (utilidade) dessa riqueza ($E[U(W)]$).

Assumindo que uma pessoa é avessa ao risco, quanto maior for o risco incorrido pela sua riqueza menor é a sua satisfação, pois suas expectativas de

usufruir a sua riqueza diminuam ($E[U(W)]: \downarrow$), mesmo que o valor esperado (médio) da riqueza não se altere.

No caso de uma pessoa neutra ao risco, ela não se importa se a sua riqueza está em risco ou não, ela só se importa com o seu valor absoluto. Neste caso $E[U(W)] = U[E(W)]$ sempre.

Entretanto, em finanças e economia, assume-se que os agentes sejam avessos ao risco. Desta forma sempre se espera que:

$$E[U(W)] < U[E(W)] \quad (\text{II.1})$$

Esta relação é conhecida como *desigualdade de Jensen*³. Em outras palavras, uma pessoa avessa ao risco nunca estará disposta a trocar um nível de riqueza atual (W_0), sem risco, por um bilhete de um *jogo justo*, onde as probabilidades e os ganhos e perdas correspondentes fazem com que o valor esperado (média) seja igual ao valor atual sem risco (o mesmo W_0).

Para que a desigualdade de Jensen seja sempre verdadeira, para qualquer nível de riqueza, a função $U(W)$ deve ser “côncava”. Em outras palavras, a utilidade da riqueza deve ser sempre crescente, pois “quanto mais riqueza melhor”. Em linguagem matemática, isso significa que a utilidade marginal é sempre positiva [$U'(W) > 0$]. Entretanto, se a riqueza for aumentando constantemente em frações de R\$1,00, o aumento da satisfação (utilidade) do último real a mais é menor do que os anteriores. Ou seja, a utilidade cresce a taxas decrescentes na medida em que a riqueza aumenta, sendo a utilidade marginal uma função decrescente. Portanto, a implicação da desigualdade de Jensen é que $U'(W) > 0$ e $U''(W) < 0$.

Para ilustrar esses conceitos, imagine que uma pessoa tenha uma riqueza atual, sem risco, de R\$1 milhão e que lhe fosse oferecido um bilhete de loteria com esses possíveis resultados:

- ✓ Ganhar R\$ 1 milhão, com probabilidade de 50%
- ✓ Perder R\$ 1 milhão, com probabilidade de 50%

³ *Jensen's inequality*

Claramente o prêmio esperado é zero e, portanto, a riqueza esperada não mudará:

$$E(W_0 + b) = 0,5(W_0 + 5 - 1.000.000) + 0,5(W_0 - 1.000.000) = W_0$$

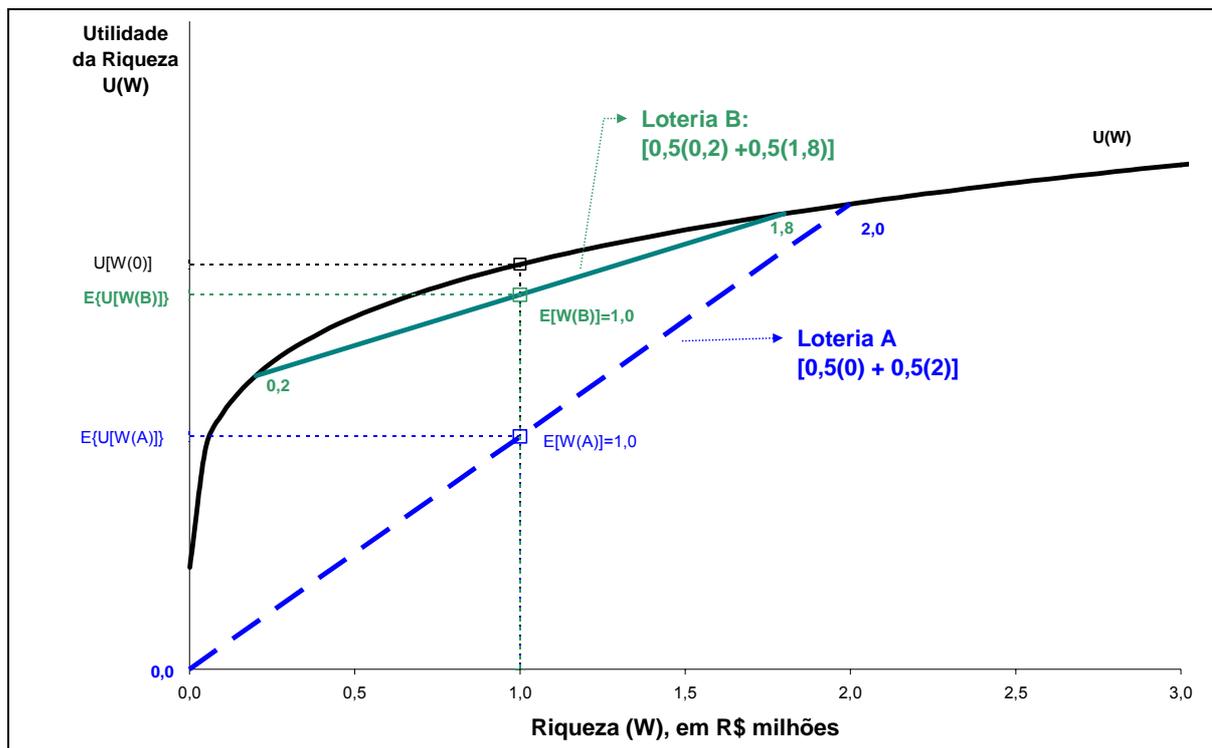
Se o valor a ser pago por este bilhete for zero, este seria um *jogo justo*, pois o seu preço é igual ao ganho esperado. Mas, pela desigualdade de Jensen uma pessoa não deveria comprar este bilhete a um custo zero, pois o que ela está fazendo é simplesmente trocar “o certo pelo duvidoso”. Reescrevendo desigualdade de Jensen nesse problema, onde b é o valor do resultado do bilhete, tem-se a seguinte relação (II.2),

$$E[U(W_0 + b)] < U[E(W_0 + b)] = U(W_0) \quad (\text{II.2})$$

O lado direito da inequação, $U[E(W_0 + b)]$, mostra a utilidade de uma pessoa que não compra o bilhete que é igual a utilidade inicial, $U(W_0)$, pois $U[E(W_0 + b)] = U[W_0 + E(b)] = U[W_0]$. Já o lado esquerdo, $E[U(W_0 + b)]$, mostra a utilidade de uma pessoa que comprou um bilhete mas o sorteio ainda não foi realizado.

O Gráfico II.1. ilustra esse exemplo através da linha tracejada (Loteria A). Nesta loteria a riqueza pode dobrar (aumento de 100%) ou “zerar” (perda de 100%). Como cada resultado tem 50% de chance de ocorrer, a riqueza esperada é a mesma da atual (W_0). Porém, devido à curvatura da função utilidade da riqueza, a utilidade esperada desta loteria ($U[W(A)]$) é bem mais baixa que a situação atual ($U[W(0)]$).

Gráfico II.1. Hipótese da Utilidade Esperada



Na loteria B (linha reta contínua), o apostador pode, com chances iguais, ganhar ou perder 80% da sua riqueza atual. Assim, da mesma forma, a riqueza esperada continua igual à atual, e a utilidade esperada da loteria continua inferior à utilidade de W_0 sem risco (sem loteria). Porém, pode-se verificar que a utilidade esperada da loteria B é superior à de A. Como ambas as loterias têm o mesmo valor esperado, mas A tem uma amplitude de resultados (risco) maior do que B, pode-se inferir que, dado o mesmo retorno esperado, quanto maior o risco menor é a utilidade esperada.

Enfim, conforme mostrado nessa seção, a teoria de finanças assume que a hipótese da utilidade esperada e suas implicações são verdadeiras, ou seja, na medida em que a riqueza aumenta a utilidade cresce a taxas decrescentes.

Na próxima seção será deduzida a relação entre utilidade e risco percebido pelos agentes, que é medida pelo grau de aversão ao risco (GAR).

II.2. MEDIDAS DE GRAU DE AVERSÃO AO RISCO (GAR)

Supondo que a riqueza de uma pessoa está distribuída em vários ativos: casa, carro, móveis, aplicações financeiras, entre outros; não se pode dizer que a

riqueza desta pessoa está “livre de risco”, pois um ativo pode ser roubado, ter algum outro sinistro, perder valor, etc. Levando em consideração toda a distribuição conjunta de probabilidades dos valores futuros de cada ativo, o valor esperado da riqueza será W . Assim, de acordo com a hipótese de utilidade esperada, a utilidade atual desta pessoa é $E[U(W+\varepsilon)]$, que representa a utilidade esperada de um nível de riqueza W mais um componente de risco ε , onde $E(\varepsilon)=0$ e $E(\varepsilon^2)=\text{Variância}(\varepsilon)$.

Se este risco ε pudesse ser eliminado através de uma apólice de seguro, quanto esta pessoa estaria disposta a pagar de prêmio (p)? Este problema pode ser estruturado na forma da seguinte equação:

$$E[U(W + \varepsilon)] = U(W - p) \quad (\text{II.3})$$

Usualmente assume-se que as funções utilidade são diferenciáveis. Desta forma, é possível aplicar a expansão de Taylor à essas funções ao redor da riqueza W . Isso permite que se possa ter um valor aproximado da função utilidade em um outro ponto, em $U(W+\Delta)$, onde o Δ é um número arbitrário. Quanto maior for o Δ , maior tem que ser a expansão de Taylor de forma a que a aproximação seja satisfatória. Assim, aplicando a expansão de Taylor em ambos os lados da equação (II.3), obtém-se:

$$E[U(W + \varepsilon)] = U(W - p)$$

$$E\left[U(W) + \varepsilon U'(W) + \frac{\varepsilon^2}{2} U''(W) + \dots\right] = U(W) - pU'(W) + \dots \quad (\text{II.4})$$

O lado direito foi expandido até a primeira derivada. Isso porque o prêmio (p) é um valor fixo e obter termos de maior grau só complicaria desnecessariamente a função a ser expandida, lembrando que isto é apenas uma aproximação. O lado esquerdo foi expandido até o segundo grau porque a volatilidade é um item importante a ser analisado. Aplicando o operador $E(\cdot)$, ou seja, esperança, em cada termo do lado esquerdo e assumindo que os termos de ordem superiores (representado por “...”) se anulem dos dois lados, tem-se:

$$\begin{aligned}
 U(W) + E(\varepsilon)U'(W) + \frac{E(\varepsilon^2)}{2}U''(W) &\cong U(W) - pU'(W) \\
 E(\varepsilon)U'(W) + \frac{E(\varepsilon^2)}{2}U''(W) &\cong -pU'(W)
 \end{aligned}
 \tag{II.5}$$

Como $E(\varepsilon) = 0$, chega-se a seguinte relação:

$$p \cong -\frac{Var(\varepsilon)}{2} \left(\frac{U''(W)}{U'(W)} \right)
 \tag{II.6}$$

O termo $(U''(W)/U'(W))$ é negativo, pois o denominador, por ser a utilidade marginal, é sempre positivo, e o numerador, pela forma côncava da função utilidade, é sempre negativo de acordo com a desigualdade de Jensen. Segundo Ingersoll (1987), esta razão é a principal medida de grau de aversão ao risco, conhecida como função de aversão ao risco absoluta de Arrow-Pratt, que será identificada nesse trabalho pelo símbolo $A(W)$.

Assim, reescrevendo (II.6) tem-se:

$$p \cong \frac{Var(\varepsilon)}{2} A(W)
 \tag{II.7}$$

Onde

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}
 \tag{II.8}$$

Portanto, quanto maior for $A(W)$ maior é o valor do prêmio que esta pessoa está disposta a pagar para se livrar do risco ε . De acordo com Nicholson (2005), como os prêmios pagos de seguros são observáveis no mundo real, é possível estimar o grau de aversão (absoluto) ao risco de indivíduos ou grupos de pessoas.

Esta medida de GAR está mais adequada aos problemas ligados à indústria de seguros do que às decisões financeiras. Isso porque nas decisões de comprar ou não uma apólice de seguro, as pessoas já estão correndo risco e querem se livrar dele. A solução dos problemas deste tipo visa a eliminação de risco e não maximização de riqueza. Já em finanças busca-se maximizar a utilidade

esperada através de ativos financeiros cuja taxa de retorno esperada raramente é zero.

Buscando adequar esse conceito de GAR aos problemas de finanças, no apêndice A é feita a dedução da taxa equivalente à certeza (ρ) de uma alocação da riqueza total em um ativo (ou carteira) cuja taxa de retorno segue uma distribuição *lognormal*. Assim, reescrevendo a equação (A.19):

$$\rho = E(k) - \frac{\sigma^2}{2} WA(W) \quad (\text{II.9})$$

Onde ρ é a taxa de retorno equivalente à certeza, $E(k)$ é a taxa de retorno esperada e σ^2 é a variância das taxas de retorno. Como a taxa de retorno é um percentual sobre a riqueza W , a função de aversão absoluta ao risco $A(W)$ vem multiplicada pela riqueza. Este produto fornece uma outra medida de aversão ao risco que é a função de aversão relativa ao risco $R(W)$, mostrada a seguir:

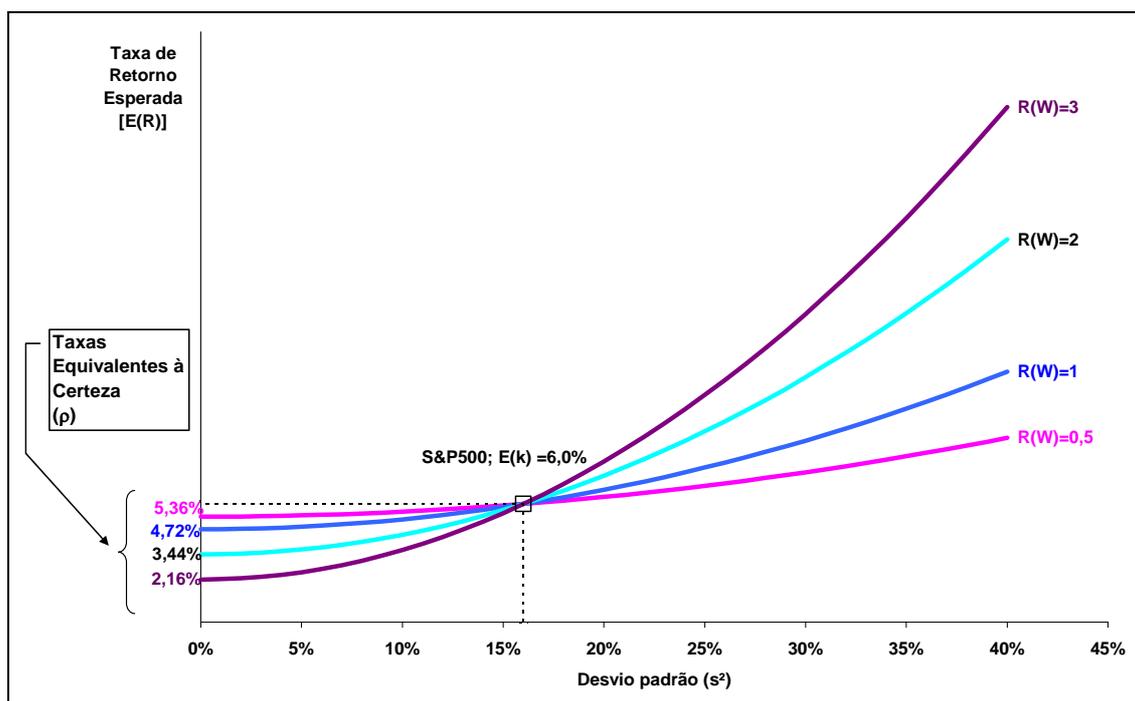
$$R(W) = WA(W) \quad (\text{II.10})$$

Reescrevendo (II.9), tem-se

$$\rho = E(k) - \frac{\sigma^2}{2} R(W) \quad (\text{II.11})$$

Assim, de acordo com (II.11), quanto maior o grau de aversão relativa ao risco [$R(W)$], dado um determinado nível de volatilidade (σ^2), exige-se uma taxa de retorno esperada [$E(k)$] maior, para se ter a mesma taxa equivalente à certeza (ρ). A representação gráfica de (II.11) são as curvas de indiferença que estão no Gráfico II.2.

Gráfico II.2. Curvas de Indiferença de Risco x Retorno



No Gráfico II.2, estão representadas algumas “curvas de indiferença” [equação (II.11)], onde em cada ponto de uma mesma curva a utilidade percebida pelo investidor é a mesma. Este gráfico levou em consideração 4 investidores que estejam investindo 100% de suas riquezas na carteira de ações S&P500, que em média tem apresentado uma taxa de retorno esperada de 6% ao ano e um desvio padrão ao redor de 16%. Estes dados estão de acordo com a tabela 8.1 do livro de Campbell et al. (1997), e é reproduzida na Tabela II.1.

Ao contrário do que comumente se define, a taxa livre de risco considerada na Tabela II.1 é a taxa de retorno de títulos privados, *commercial papers*. No exemplo acima, foram utilizados dados desta tabela apenas com a finalidade de ilustração, pois, vale notar que a Tabela II.1 apresenta a média e desvio-padrão do logaritmo de 1 mais a taxa de retorno dos ativos. E no exemplo não deveriam ser usados os momentos⁴ de logaritmos. Entretanto, a diferença seria muito pequena, não alterando a validade do exemplo.

⁴ Em estatística há dois tipos de momento, em relação à origem e à média. O momento de uma variável aleatória X em relação à origem é definido como a esperança da variável elevada por um número natural r , $E(X^r)$. Desta forma, quando $r=1$ (1º momento) obtém-se a esperança (média) desta variável. Já o momento em relação à média é definido desta forma: $E[(X - E[X])^r]$.

Tabela II.1. Momentos dos logaritmos da taxa de crescimento do consumo e da taxa de retorno dos ativos entre 1889 e 1994 [extraído de Campbell et al. (1997)].

Table 8.1. Moments of consumption growth and asset returns.

Variable	Mean	Standard deviation	Correlation with consumption growth	Covariance with consumption growth
Consumption growth	0.0172	0.0328	1.0000	0.0011
Stock return	0.0601	0.1674	0.4902	0.0027
CP return	0.0183	0.0544	-0.1157	-0.0002
Stock-CP return	0.0418	0.1774	0.4979	0.0029

Consumption growth is the change in log real consumption of nondurables and services. The stock return is the log real return on the S&P 500 index since 1926, and the return on a comparable index from Grossman and Shiller (1981) before 1926. CP is the real return on 6-month commercial paper, bought in January and rolled over in July. All data are annual, 1889 to 1994.

Fonte: Campbell et al. (1997, pág. 308)

Através do Gráfico II.2., pode-se observar que quanto maior o grau de aversão relativa ao risco de um investidor [$R(W)$], mais “íngreme” é a curva de indiferença. Ou seja, quanto maior é $R(W)$ mais custoso é para este investidor assumir riscos adicionais. Mas, por outro lado, o investidor de $R(W)=3$ está disposto a assumir posições menos arriscadas “cobrando” uma taxa de retorno esperada (ρ) menor que os demais.

Em suma, as medidas básicas de grau de aversão ao risco são do tipo absoluta [$A(W)$], onde se tem o nível de aversão risco levando em conta o valor que está em risco e o tipo relativo [$R(W)$], onde o risco é proporcional a riqueza. Em finanças o tipo mais usado é o relativo (RW)

Na seção seguinte são apresentadas algumas das funções da utilidade da riqueza mais usadas na literatura de finanças e suas implicações para o grau de aversão ao risco.

II.3. FUNÇÕES DE UTILIDADE E GRAU DE AVERSÃO AO RISCO

Quando $r=2$ (2º momento em relação à média) obtém-se a variância [$\text{Var}(X)$], se $r=3$ obtém-se a assimetria (skewness) e quando $r=4$ obtém-se a curtose.

Não há definição clara e precisa de como é a “verdadeira” função utilidade, o único consenso é que ela deve respeitar a desigualdade de Jensen. A maioria das funções de utilidade desenvolvidas pelos teóricos de finanças teve como objetivo maior facilitar a resolução matemática de alguns problemas.

Dentre as diversas funções de utilidade vamos apresentar duas classes. A primeira é caracterizada por usar $A(W)$, a medida de grau de aversão absoluta ao risco (ARA, *Constant Absolute Risk Aversion*), e a segunda usa o $R(W)$ (RRA, *Relative Risk Aversion*), a medida de grau de aversão relativa ao risco.

De acordo com Cuthbertson e Nitzsche (2004), as do primeiro tipo (ARA), também são conhecidas como funções exponenciais negativas de utilidade, pois elas têm a seguinte formulação:

$$U(W) = -e^{-aW} \quad (\text{II.12})$$

A razão da segunda derivada [$U''(W)$] e primeira derivada [$U'(W)$] desta função resulta no grau de aversão absoluta ao risco [$A(W)$]. Assim, tem-se:

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{-a^2 e^{-aW}}{a e^{-aW}} = a \quad (\text{II.13})$$

Assim, o grau de aversão absoluta ao risco é dado pelo coeficiente a . Dependendo do comportamento deste coeficiente em relação à riqueza a função de utilidade pode ser classificada em três subclasses:

- ✓ $A'(W) = \frac{\partial a}{\partial W} = 0 \Rightarrow$ CARA (*Constant Absolute Risk Aversion*, ou Aversão ao Risco Absoluto Constante)
- ✓ $A'(W) = \frac{\partial a}{\partial W} > 0 \Rightarrow$ IARA (*Increasing Absolute Risk Aversion*, ou Aversão ao Risco Absoluto Crescente)
- ✓ $A'(W) = \frac{\partial a}{\partial W} < 0 \Rightarrow$ DARA (*Decreasing Absolute Risk Aversion*, ou Aversão ao Risco Absoluto Decrescente)

Resumindo, uma pessoa com uma função de utilidade do tipo CARA, perceberá o mesmo risco de investir R\$ 1.000 independentemente se sua riqueza total for R\$ 2.000 ou R\$ 2.0000.000. Se ela tiver uma função IARA, perceberá um risco maior com um nível maior de riqueza, o que parece ser pouco provável. Por outro lado, se a pessoa seguir uma função DARA, sentirá um risco maior quanto menor for o seu nível de riqueza. Segundo Lengwiler (2004), dentro desta classe, a função DARA é a mais aceita.

A outra classe de funções de utilidade, de tipo RRA, são conhecidas também como funções potência, pois têm a seguinte forma:

$$U(W) = \frac{W^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \quad (\text{II.14})$$

Nesta classe a função $A(W)$ fica:

$$A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)} = -\frac{-\gamma(1-\gamma)W^{-\gamma-1}}{(1-\gamma)W^{-\gamma}} = \frac{\gamma}{W} \quad (\text{II.15})$$

E, assim, a relação entre a aversão relativa e a constante é a seguinte:

$$R(W) = WA(W) = \gamma \quad (\text{II.16})$$

Um problema aparente nesta função utilidade (II.14) é que ela não poderia ser definida quando $\gamma = 1$, pois levaria a um denominador igual a zero. Porém, de acordo com Ingersoll (1987), pela regra de L'Hôpital pode ser verificado que no limite de γ tender a 1, a função fica $U(W) = \ln(W)$. Esta dedução é apresentada no Apêndice B. Assim, quando se usa a função logarítmica da riqueza para descrever a função utilidade, implicitamente está se assumindo que $R(W) = 1$.

Assim, o grau de aversão relativa ao risco é dado pelo coeficiente γ . Dependendo do comportamento deste coeficiente em relação à riqueza, a função de utilidade pode ser classificada em três subclasses:

$$\checkmark \quad R'(W) = \frac{\partial \gamma}{\partial W} = 0 \Rightarrow \text{CRRA (Constant Relative Risk Aversion, ou}$$

Aversão ao Risco Relativo Constante)

✓ $R'(W) = \frac{\partial \gamma}{\partial W} > 0 \Rightarrow$ IRRA (*Increasing Relative Risk Aversion*, ou Aversão ao Risco Relativo Crescente)

✓ $R'(W) = \frac{\partial \gamma}{\partial W} < 0 \Rightarrow$ DRRA (*Decreasing Relative Risk Aversion*, ou Aversão ao Risco Relativo Decrescente)

Nesta classe de utilidade (RRA), se o grau de aversão relativa ao risco for constante em qualquer nível da riqueza (CRRRA), uma pessoa perceberá o mesmo risco de investir 10% da sua riqueza independentemente se sua riqueza total for R\$ 2.000 ou R\$ 2.0000.000. Se esta pessoa seguir uma função IRRA, quanto maior for sua riqueza maior será o seu grau de aversão relativa ao risco. Enquanto que uma outra pessoa com utilidade DRRA sentiria um risco relativo menor, na medida que sua riqueza fosse maior.

Vale notar que as funções do tipo CRRRA e DRRA são compatíveis com a função do tipo DARA. E mesmo a função IRRA também pode ser compatível com DARA. Por conta disso, segundo Lengwiler (2004), não há um consenso sobre qual função da classe RRA retrata melhor o mundo real. Entretanto, o modelo CRRRA é o mais utilizado em finanças econômicas (inclusive por Mehra e Prescott (1985) e pela grande produção acadêmica que os seguiram) dada a sua simplificação de parametrização.

Na próxima seção será apresentado um exemplo da aplicação dos conceitos até aqui apresentados em um problema de maximização da utilidade esperada em um horizonte de tempo de um único período.

II.4. EXEMPLO DE MAXIMIZAÇÃO DA UTILIDADE ESPERADA EM UM ÚNICO (E BREVE) PERÍODO

Nesta seção é explorado um exemplo de como um agente irá maximizar a sua utilidade esperada da riqueza, através da alocação da sua carteira entre um ativo com risco (M, carteira do Mercado) e um livre de risco (f), em um horizonte de investimento de apenas um período. A partir da riqueza atual (W_0) o agente tenta maximizar a seguinte função objetivo:

$$\text{Max}_{\{w_i\}} E \left\{ U \left[W_o \left(1 + \sum_{i=1}^n w_i R_i \right) \right] \right\} \quad (\text{II.17})$$

Onde w_i é a proporção da riqueza alocada ao ativo i , cujo retorno esperado para o próximo intervalo de tempo é R_i . Dos manuais de finanças, como BODIE et al. (1996), sabe-se que:

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i R_i \quad (\text{II.18})$$

A taxa de retorno da carteira (R_p) é a média das taxas de retorno dos ativos isolados ponderadas pela participação de cada ativo na carteira total. Desta forma (II.17) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\text{Max}_{\{w_i\}} E \left\{ U \left[W_o (1 + R_p) \right] \right\} \quad (\text{II.19})$$

Assumindo que a taxa de retorno da carteira (R_p) segue um movimento geométrico Browniano, sabe-se do Apêndice A que:

$$U \left[W_o (1 + \rho) \right] = E \left\{ U \left[W_o (1 + R_p) \right] \right\} \quad (\text{II.20})$$

Analisando (II.20) pode-se verificar que maximizar a utilidade esperada de $W_o (1 + R_p)$ é o mesmo que maximizar a taxa de retorno equivalente à certeza (ρ) desta carteira, o que gera a seguinte equação:

$$\text{Max}_{\{w_i\}} E \left\{ U \left[W_o (1 + R_p) \right] \right\} \Rightarrow \text{Max} U \left[W_o (1 + \rho_p) \right] \quad (\text{II.21})$$

Desta forma, como W_o é um valor já conhecido e é uma constante, para maximizar esta função basta maximizar a taxa de retorno equivalente à certeza da carteira (ρ_p). Assumindo os mesmos pressupostos do apêndice A, que a taxa de retorno da carteira (R_p) segue um movimento geométrico Browniano, e após fazer a expansão de Taylor, chega-se a seguinte equação [que é igual à (A.18)]:

$$\text{Max } \rho_p = E(R_p) + \frac{\sigma_p^2}{2} W_0 \left(\frac{U''(W_0)}{U'(W_0)} \right) \quad (\text{II.22})$$

A taxa de retorno da carteira é dada pela equação (II.18), e sabe-se também dos manuais de finanças, que a variância da taxa de retorno de uma carteira com n ativos é:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} \quad (\text{II.23})$$

Onde σ_{ij} é a covariância entre as taxas de retorno do ativo i e do j . Se $i=j$ então σ_{ij} indica a variância. Analisando o caso de apenas dois ativos (M e f)) tem-se:

$$\text{Max}_{\{w_M, w_f\}} \rho_p = E[w_M R_M + w_f R_f] - \frac{\left[(w_M \sigma_M)^2 + (w_f \sigma_B)^2 + 2w_M w_f \sigma_{M,f} \right]}{2} W_0 \left(\frac{U''(W_0)}{U'(W_0)} \right) \quad (\text{II.24})$$

Mas como f é livre de risco ($\sigma_f = 0$) e lembrando que $w_f = 1 - w_M$, (II.24) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\text{Max}_{\{w_M\}} \rho_p = E[w_M R_M + (1 - w_M) R_f] - \frac{\left[(w_M \sigma_M)^2 \right]}{2} W_0 \left(\frac{U''(W_0)}{U'(W_0)} \right) \quad (\text{II.25})$$

Utilizando a função utilidade CRRA ($R'(W) = \partial \gamma / \partial W = 0$), e aplicando o operador $E(\cdot)$ em cada termo de (II.25), tem-se

$$\text{Max}_{\{w_M\}} \rho_p = w_M E(R_M) + (1 - w_M) R_f - \frac{\left[(w_M \sigma_M)^2 \right]}{2} \gamma \quad (\text{II.26})$$

Agora, dadas as taxas esperadas de retorno dos ativos e o desvio padrão do ativo A, o investidor irá escolher a proporção do ativo A em sua carteira em função de seu nível de aversão relativa ao risco $[R(W) = \gamma]$, que supostamente é constante em todo o nível de riqueza.

Em outras palavras, para maximizar a utilidade do retorno esperado, o agente irá maximizar a taxa de retorno equivalente à certeza (TEC) a partir da Linha

de Mercado de Capitais (CML: *Capital Market Line*), através do seguinte sistema de equações:

$$E(R_p) = \rho_p + \frac{\gamma(\sigma_p)^2}{2} \quad [\text{TEC} = \rho_p] \quad (\text{II.27})$$

$$E(R_p) = k_f + \frac{[E(R_M) - R_f]}{\sigma_M} \sigma_p \quad [\text{CML}] \quad (\text{II.28})$$

Antes de igualar as duas equações é melhor encontrar qual é o nível de risco ótimo para um agente com risco relativo $R(W_0) = \gamma$. Para isso é necessário igualar a primeira derivada de (II.27) e (II.28). Assim, derivando estas equações em relação a σ_p , tem-se:

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p} = \gamma(\sigma_p) \quad (\text{II.29})$$

$$\frac{\partial E(R_p)}{\partial \sigma_p} = \frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} \quad (\text{II.30})$$

E igualando (II.29) a (II.30) e rearranjando os termos, tem-se

$$\sigma_p = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} \right) \quad (\text{II.31})$$

Igualando (II.27) a (II.28) e rearranjando termos, obtém-se:

$$\rho_p = R_f + \left(\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} \right) \sigma_p - \frac{\gamma(\sigma_p)^2}{2} \quad (\text{II.32})$$

Substituindo (II.31) em (II.32), tem-se:

$$\rho_p = R_f + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} \right)^2 - \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} \right)^2 \quad (\text{II.33})$$

E, finalmente, rearranjando os termos, tem-se:

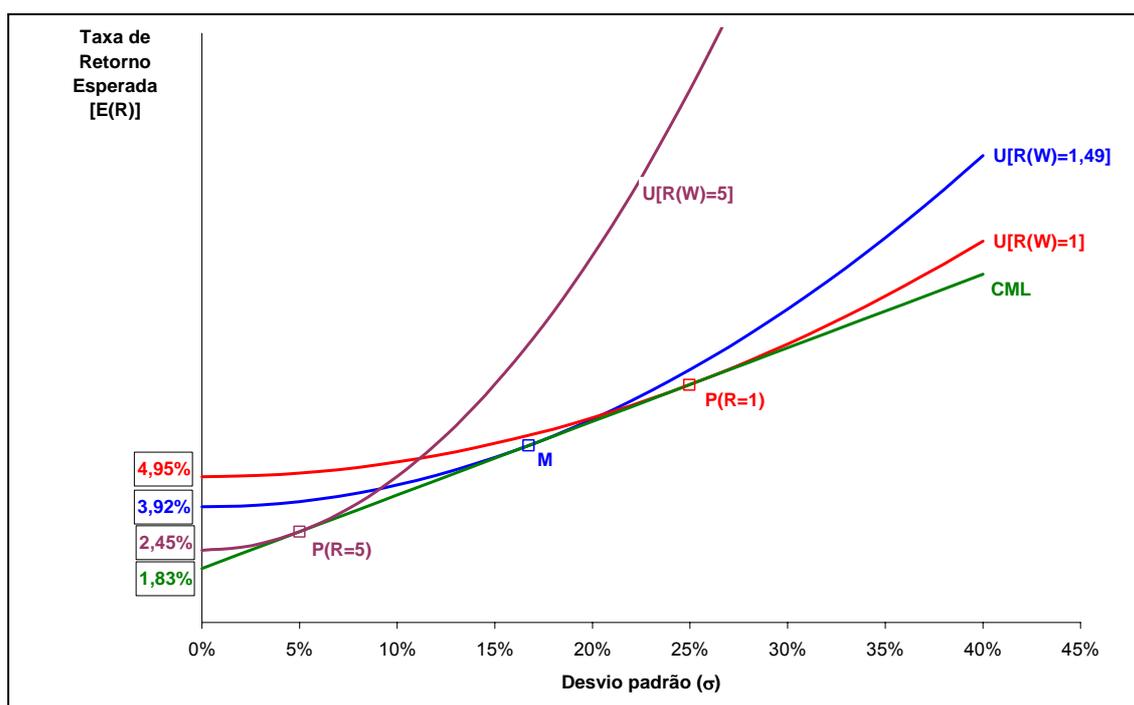
$$\rho_p = R_f + \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} \right)^2 \quad (\text{II.34})$$

Desta forma, a taxa de retorno equivalente à certeza da carteira só será igual à taxa livre de risco se o prêmio esperado de risco do mercado for igual a zero. Tomando alguns valores da Tabela II.1., extraída de Campbell et al. (1997), para as variáveis da curva de indiferença dos agentes (II.34) e da equação da CML (II.28), obtém-se os seguintes resultados:

$$R_f = 1,83\% \quad E(R_M) = 6,01\% \quad \sigma_M = 16,74\%$$

O Gráfico II.3 apresenta as curvas de indiferença no nível em que os agentes maximizam a utilidade esperada da riqueza a partir da CML obtida com os valores acima.

Gráfico II.3. Otimização de Carteiras por um breve período [R(W) = γ]



No Gráfico II.3 são apresentadas três curvas de indiferença representando três agentes com R(W) distintos. O primeiro tem R(W)=1, o segundo 1,49 e o terceiro 5. Se cada agente tivesse que determinar em qual ponto da CML ele obteria a maior utilidade, os que têm um R(W)>1,49 prefeririam ter carteiras com uma participação da carteira de mercado (ativos com risco) e da carteira de ativos

livre de risco. Já os que tivessem $R(W) < 1,49$ iriam preferir ter participação negativa em ativos livre de risco (tomar empréstimo a k_f) e aplicar na carteira do mercado.

Este valor de $R(W)=1,49$ foi obtido para um agente que prefere ter 100% de sua carteira aplicado na carteira do mercado. Tendo 2 ativos, um com risco e outro sem, o desvio padrão da carteira fica igual ao desvio padrão da carteira do mercado vezes a sua participação na carteira do agente, $\sigma_p = w_M \sigma_M$. Da equação (II.31), para que o agente prefira ter 100% de M é necessário que o $R(W)$ seja de:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= w_M \sigma_M \xrightarrow{w_M=1} \sigma_p = \sigma_M \\ \sigma_M &= \frac{1}{\gamma} \left(\frac{E(R_M) - R_f}{\sigma_M} \right) \\ \gamma &= \frac{[E(R_M) - R_f]}{\sigma_M^2} = \frac{0,0601 - 0,0183}{0,028} = 1,49 = R(W_0) \end{aligned}$$

Assim, esse exemplo mostrou que os problemas de otimização de utilidade esperada de um único período se restringem a selecionar ativos cujos parâmetros (retorno esperado e desvio padrão) sejam dados. Até este ponto foram analisados somente a utilidade e o grau de aversão ao risco relacionado a decisões instantâneas ou de apenas um período para outro. A seguir será apresentado um outro conceito importante para o entendimento dos modelos de maximização intertemporal da utilidade esperada, que é o fator subjetivo de substituição intertemporal (FSSI).

II.5. FATOR SUBJETIVO DE SUBSTITUIÇÃO INTERTEMPORAL (FSSI)

Até agora foi visto a função utilidade, como caracterizar o grau de aversão ao risco e como os agentes maximizam utilidade esperada da riqueza (em um breve período) através da escolha em distribuir a sua carteira em diferentes ativos.

Entretanto, os agentes dificilmente vivem somente durante um breve período de tempo. Também não vão consumir toda a riqueza ao final do primeiro e breve período. Na verdade, os investidores terão que adequar o seu nível de consumo dentro de suas restrições orçamentárias que são dadas tanto pela renda do seu capital como de outras fontes (especialmente trabalho). Desta forma, os modelos definem duas formas de renda total: (i) unicamente proveniente da

remuneração da riqueza e (ii) proveniente também de outras fontes, especialmente trabalho. Estas definições distintas não trazem nenhum impacto sobre a condição de primeira ordem do problema de maximização da utilidade intertemporal.

Desta forma, os agentes buscam maximizar a utilidade ao longo de toda a vida. E a fonte da satisfação (utilidade) é o consumo. A riqueza só tem utilidade por ser consumo em potencial. Portanto, o objetivo de cada agente é maximizar a seguinte função utilidade:

$$\text{Max}[U(C_0) + J(W_0)] = \text{Max}\{E[U(C_0; C_1; \dots; C_{T-1}; W_T; t)]\} \quad (\text{II.35})$$

Ou seja, ao maximizar a soma da utilidade de consumir hoje e da utilidade da riqueza atual os agentes estão maximizando a utilidade esperada do consumo ao longo de toda a vida que lhes resta (T períodos). A riqueza ao final do período T , W_T , é a herança a ser deixada por cada agente.

Geralmente assume-se que a utilidade do consumo em um determinado período é independente do consumo passado ou futuro. Matematicamente este fato é representado pela seguinte equação:

$$E[U(C_0; C_1; \dots; C_{T-1}; W_T; t)] = \sum_{t=0}^T E[U(C_t; t)] = \sum_{t=0}^T \delta^t E[U(C_t)] \quad (\text{II.36})$$

Onde $\delta = 1/(1+r^*)$, ou seja, δ seria um fator de desconto a valor presente cuja taxa de retorno subjetiva seria r^* . Assim, a variável tempo (t), dentro da função utilidade, serve para trazer as utilidades esperadas futuras ao valor presente através do fator δ , que os teóricos definem $0 < \delta < 1$. Este parâmetro seria um fator subjetivo pelo qual os agentes decidem substituir R\$1,00 do consumo de hoje por R\$($1/\delta$) para consumir daqui a um período, ou R\$($1/\delta^t$) em t períodos. Este parâmetro δ é conhecido como o grau de “impaciência” dos agentes e também como fator subjetivo de substituição intertemporal (FSSI). Geralmente, assume-se que este fator é constante ao longo do tempo.

Ainda analisando a equação (II.36), assume-se que $C_T = W_T$, ou seja, o consumo final seria a herança a ser deixada.

Na seção seguinte será deduzido o modelo de maximização da utilidade intertemporal através da metodologia do multiplicador de Lagrange.

II.6. ESTRUTURAÇÃO DO MODELO DE MAXIMIZAÇÃO DA UTILIDADE INTERTEMPORAL

Nesta seção serão deduzidas as condições de primeira ordem para a maximização da utilidade intertemporal. Primeiramente será analisado o caso em que a renda auferida pelo agente é proveniente apenas da remuneração de sua riqueza. E em seguida é demonstrado quando o agente também recebe periodicamente remuneração pelo seu trabalho e pelo seu capital (riqueza).

De uma maneira geral, para se maximizar uma função (diferenciável) é necessário encontrar a 1ª derivada desta função e igualá-la a zero (condição de primeira ordem). O ponto encontrado é um ponto extremo, que pode ser o máximo ou o mínimo. Se, neste ponto extremo, a 2ª derivada desta função apresentar um valor negativo, então este ponto é de máximo; esta seria a condição de 2ª para um ponto máximo.

Para funções “côncavas”, como é o caso da função utilidade de consumir (veja a seção II.1), não há um ponto máximo (tampouco mínimo), porque ela é sempre crescente na medida que o nível do consumo aumenta. Assume-se que os agentes são seres insaciáveis, mais consumo é sempre preferido do que menos. Mas, os agentes não podem consumir o que quiserem, pois eles precisam ter dinheiro (riqueza) para poder comprar aquilo que querem consumir. Portanto, será buscada nesta seção a maximização da utilidade dos agentes condicionada à restrição orçamentária.

Vale lembrar que o modelo que é deduzido a seguir utiliza somente taxas de retorno da carteira de um “agente representativo”, cujo consumo é igual ao consumo privado *per capita*. Preferiu-se utilizar a taxa de retorno da carteira agregada de ativos para tornar a dedução matemática da condição de primeira ordem mais simples e acessível do que a de Lucas (1978).

RENDA PROVENIENTE EXCLUSIVAMENTE DO CAPITAL

Independentemente se o agente tem sua renda proveniente exclusivamente da remuneração do seu capital ou não, de acordo com a seção passada, a sua função objetivo a ser maximizada é a seguinte:

$$\text{Max} \left\{ \sum_{t=0}^T \delta^t E[U(C_t)] \right\} \quad (\text{II.37})$$

Assim, ele maximizará a utilidade esperada do consumo ao longo de toda a vida. E sua restrição orçamentária intertemporal é a seguinte:

$$W_T = W_0 \prod_{t=0}^{T-1} [1 + R_{t+1}] - \sum_{t=0}^{T-1} C_t \prod_{s=t}^{T-1} [1 + R_{s+1}] \quad (\text{II.38})$$

A riqueza no final da vida do agente é igual à riqueza inicial acumulando todos os rendimentos esperados de hoje até T , menos o consumo esperado de cada período corrigido até T . Vale lembrar que k_t é a taxa de retorno da carteira do agente entre o período $t-1$ e t .

Desta forma, combinando a função objetivo (II.37) com a restrição orçamentária (II.38), obtém-se a função de Lagrange (otimização condicionada):

$$L = \sum_{t=0}^T \delta^t E[U(C_t)] + \lambda \left\{ W_T - W_0 \prod_{t=0}^{T-1} [1 + R_{t+1}] + \sum_{t=0}^{T-1} C_t \prod_{s=t}^{T-1} [1 + R_{s+1}] \right\} \quad (\text{II.39})$$

E as condições de primeira ordem para a maximização são:

$$\frac{\partial L}{\partial C_0} = \delta^0 E[U'(C_0)] + \lambda \prod_{s=0}^{T-1} [1 + R_{s+1}] = 0 \Rightarrow U'(C_0) = -\lambda \prod_{s=0}^{T-1} [1 + R_{s+1}] \quad (\text{II.40})$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = \delta^1 E[U'(C_1)] + \lambda \prod_{s=1}^{T-1} [1 + R_{s+1}] = 0 \Rightarrow \delta E[U'(C_1)] = -\lambda \prod_{s=1}^{T-1} [1 + R_{s+1}] \quad (\text{II.41})$$

Em $t = 0$ (equivalente a hoje), o operador $E(\cdot)$ foi omitido porque se assume que não há incerteza sobre o nível e a utilidade do consumo corrente. Porém, o operador da esperança não é dispensado quando $t > 0$, pois há incerteza quanto ao nível e à utilidade do consumo futuro. Em termos gerais, a condição de primeira ordem pode ser assim representada:

$$\frac{\partial L}{\partial C_t} = \delta' E[U'(C_t)] + \lambda \prod_{s=t}^{T-1} [1 + R_{s+1}] = 0 \Rightarrow \delta' E[U'(C_t)] = -\lambda \prod_{s=t}^{T-1} [1 + R_{s+1}] \quad (\text{II.42})$$

Reescrevendo a equação (II.40), tem-se:

$$U'(C_0) = -[1 + R_1] \lambda \prod_{s=1}^{T-1} [1 + R_{s+1}] \quad (\text{II.43})$$

Substituindo (II.41) em (II.43):

$$U'(C_0) = [1 + R_1] \delta E[U'(C_1)] \quad (\text{II.44})$$

Assim, a equação (II.44) representa a condição de equilíbrio entre o consumo corrente ($t=0$) e o do próximo período. A utilidade marginal de deixar de consumir (poupar) R\$ 1,00 hoje tem que ser igual à utilidade marginal esperada, descontada a valor presente, de consumir R\$ $[1 + R_1]$ no período seguinte ($t=1$). Entretanto, a taxa de retorno R_1 remunera todo o capital não consumido hoje ($t=0$) até o próximo período ($t=1$). Portanto, só em $t=1$ é que R_1 será uma taxa conhecida. Como a taxa de retorno R_1 vai afetar a riqueza consumível em $t=1$, ela irá afetar a decisão de quanto consumir no próximo período.

Esse fato pode ser exemplificado se, por conveniência, for assumido que a riqueza a ser deixada de herança (W_T) é constante ao longo do tempo. Desta forma, a derivada total da restrição orçamentária (II.38), onde só variam o consumo e a taxa de retorno do primeiro período, fica:

$$dW_T = \frac{\partial W_T}{\partial (1 + R_1)} d(1 + R_1) + \frac{\partial W_T}{\partial C_1} dC_1 = 0 \quad (\text{II.45})$$

E estas derivadas parciais de (II.45) são as seguintes:

$$\frac{\partial W_T}{\partial (1 + R_1)} = (W_0 - C_0) \prod_{t=1}^{T-1} [1 + R_{t+1}] \quad (\text{II.46})$$

$$\frac{\partial W_T}{\partial C_1} = \prod_{t=1}^{T-1} [1 + R_{t+1}] \quad (\text{II.47})$$

Substituindo (II.46) e (II.47) em (II.45), tem-se:

$$dC_1 = -[W_0 - C_0]d(1 + R_1) \quad (II.48)$$

Assim, o consumo em $t=1$ é uma função da taxa de retorno k_1 , ou seja, $C_1 = f(1 + R_1)$. Desta forma, na equação (II.44), o fator $(1 + R_1)$ deve ser incorporado dentro do operador da esperança, pois como há uma dependência do nível de consumo em $t=1$ com a taxa R_1 , tem que se levar em consideração a esperança da distribuição conjunta de probabilidade de C_1 e R_1 , e não as distribuições independentes como (II.44) parece sugerir. Desta forma a equação (II.44) deve ser reescrita desta forma:

$$U'(C_0) = \delta E[U'(C_1)(1 + R_1)] \quad (II.49)$$

Esta condição de equilíbrio é análoga à deduzida por Lucas (1978). A equação (II.49) pode ser facilmente estendida para condição de equilíbrio da substituição de consumo entre quaisquer dois períodos:

$$E[U'(C_{t1})] = \delta^{t2-t1} E\left[U'(C_{t2}) \prod_{s=t1}^{t2} [1 + R_{s+1}]\right], \quad \text{sendo que } T \geq t2 > t1 \quad (II.50)$$

Agora será analisado o caso do agente que tem tanto uma renda proveniente do trabalho como, também, a remuneração do capital.

RENDA PROVENIENTE DO CAPITAL E DO TRABALHO

Se o agente receber remuneração pela sua riqueza e pelo seu trabalho (L), a sua restrição orçamentária passa a ser:

$$W_T = W_0 \prod_{t=0}^{T-1} [1 + R_{t+1}] + \sum_{t=0}^{T-1} (L_t - C_t) \prod_{s=t}^{T-1} [1 + R_{s+1}] \quad (II.51)$$

A diferença da equação (II.51) em relação à (II.38) é a remuneração advinda do trabalho (L_t). Assim, a função de Lagrange é a seguinte:

$$L = \sum_{t=0}^T \delta^t E[U(C_t)] + \lambda \left\{ W_T - W_0 \prod_{t=0}^{T-1} [1 + R_{t+1}] - \sum_{t=0}^{T-1} (L_t - C_t) \prod_{s=t}^{T-1} [1 + R_{s+1}] \right\} \quad (II.52)$$

E as condições de primeira ordem são idênticas as de quando não havia renda do trabalho:

$$\frac{\partial L}{\partial C_0} = \delta^0 E[U'(C_0)] + \lambda \prod_{s=0}^{T-1} [1 + R_{s+1}] = 0 \Rightarrow U'(C_0) = -\lambda \prod_{s=0}^{T-1} [1 + R_{s+1}] \quad (\text{II.53})$$

$$\frac{\partial L}{\partial C_1} = \delta^1 E[U'(C_1)] + \lambda \prod_{s=1}^{T-1} [1 + E(R_{s+1})] = 0 \Rightarrow \delta E[U'(C_1)] = -\lambda \prod_{s=1}^{T-1} [1 + R_{s+1}] \quad (\text{II.54})$$

Como as derivadas parciais (II.53) e (II.54) são iguais às equações (II.40) e (II.41) a condição de equilíbrio entre a substituição intertemporal do consumo não é alterada caso seja incorporado a remuneração do trabalho na restrição orçamentária.

Neste capítulo foi visto a fundamentação teórica dos principais conceitos em se baseiam os modelos intertemporais de apreçamento de capital baseados no consumo. Resumidamente, foi visto que:

- ✓ A teoria de finanças assume que a hipótese da utilidade esperada e suas implicações são verdadeiras, ou seja, na medida que a riqueza aumenta a utilidade cresce a taxas decrescentes.
- ✓ As medidas básicas de grau de aversão ao risco são do tipo absoluta $[A(W)]$, onde se tem o nível de aversão risco levando em conta o valor que está em risco e o tipo relativo $[R(W)]$, onde o nível de aversão é proporcional a riqueza. Em finanças o tipo mais usado é o relativo $[R(W)]$.
- ✓ Dentre as diversas funções de utilidade foram apresentadas duas classes: (i) ARA, que considera o grau de aversão absoluta ao risco e (ii) RRA, que considera o grau de aversão relativa ao risco. Nos estudos do C-CAPM utiliza-se a CRRA que é um tipo de RRA, cuja aversão relativa ao risco é constante em relação à riqueza e ao consumo. Esta é a função mais utilizada em Finanças, inclusive por Mehra e Prescott (1985), que originou o EPP, e pela maioria que os seguiu.

- ✓ A maximização da utilidade esperada de um agente, em um único período, é uma função das expectativas de taxa de retorno dos ativos neste período e do seu nível de aversão relativa ao risco [R(W)]
- ✓ Os agentes conseguem comparar se vale mais a pena consumir R\$1,00 a mais hoje, ou aplicá-lo a uma taxa k_1 e consumir R\$ $(1 + k_1)$ no próximo período, através do fator subjetivo de desconto intertemporal δ , ou pela taxa subjetiva de desconto r^* . Modificando a equação (II.49) ter-se-ia a seguinte relação:

$$\delta = \frac{1}{1+r^*} = \frac{U'(C_0)}{E[U'(C_1)(1+R_1)]}$$

A partir desses elementos e da restrição orçamentária intertemporal chegou-se à condição de primeira ordem para a maximização da utilidade intertemporal dos agentes. No capítulo III serão analisadas as implicações teóricas dos conceitos fundamentais estudados neste capítulo em relação ao comportamento conjunto esperado do consumo agregado e da taxa de retorno dos ativos. E, a partir disso, estas deduções teóricas serão confrontadas com os dados históricos, caracterizando o *Equity Premium Puzzle*.

III. MODELOS INTERTEMPORAIS E O EPP

Neste capítulo são analisadas as implicações teóricas dos conceitos fundamentais estudados no Capítulo II, em relação ao comportamento do consumo agregado e da taxa de retorno dos ativos. E, a partir disso, estas deduções teóricas serão confrontadas com os dados históricos, caracterizando o *Equity Premium Puzzle*.

Em seguida, será analisado o porquê o grau de aversão relativa ao risco [R(W)], necessário para solucionar o enigma (EPP), não pode ser aceito, tendo em conta outras evidências existentes na literatura.

E, finalmente, serão discutidas as várias tentativas de explicação e/ou de solução para o EPP.

III.1. IMPLICAÇÕES DO MODELO INTERTEMPORAL E O GRAU DE AVERSÃO AO RISCO

Conforme já mencionado anteriormente, Lucas (1978) desenvolveu um modelo de apreçamento intertemporal de ativos em uma economia de trocas (não monetária) onde há várias empresas que produzem um único tipo de produto. Os agentes desta economia recebem renda apenas dos dividendos pagos pelas ações, na forma desses bens produzidos. As ações são transacionadas entre os agentes de forma competitiva, ninguém tem poder de influenciar o preço destas ações. Os bens produzidos são todos perecíveis e os agentes, de forma agregada, não podem poupar, pois se não consumirem esses produtos neste período eles simplesmente serão perdidos. Desta forma, assumindo que a proporção de pessoas morrendo e deixando herança na forma de ações seja muito pouco representativo, serão analisadas as decisões do “agente representativo” desta economia, que nada mais é do que o comportamento médio dos membros desta economia. Neste caso, pode-se assumir que ele é um imortal, ele “viverá” enquanto esta sociedade existir. Desta forma, a função objetivo dos agentes é a seguinte:

$$MaxE_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} \delta^j U(C_{t+j}) \right] \quad (III.1)$$

Onde,

δ é o fator subjetivo de substituição intertemporal do agente

C_{t+j} é o consumo do agente no período t+j

$U(C_{t+j})$ é a utilidade do consumo em t+j.

Mehra e Prescott (1985) se basearam neste modelo simplificado de Lucas (1978) e nas contribuições de Grossman e Shiller (1981), entre outros, para deduzir as implicações teóricas do modelo intertemporal e contrastá-las com os dados reais de mercado. Esta discrepância entre os dados reais de mercado e as implicações teóricas do modelo consiste o *Equity Premium Puzzle* (EPP)

Conforme visto no capítulo anterior, a condição de equilíbrio para a equação (III.1) é a seguinte:⁵

$$U'(C_t) = \delta E_t \left[(1 + R_{i,t+1}) U'(C_{t+1}) \right] \quad (\text{III.2})$$

Entretanto, há uma diferença entre (III.2) e (II.49). Enquanto em (III.2) $R_{i,t+1}$ é a taxa de retorno de qualquer ativo (ou carteira) i no período t+1, R_t em (II.49) foi definida como a taxa de retorno de toda a carteira do agente representativo. De qualquer forma, fica claro que a dedução do modelo da seção anterior poderia ser generalizada para qualquer ativo.

A equação (III.2) representa o equilíbrio intertemporal do consumo, onde o custo da utilidade marginal de poupar (deixar de consumir) R\$ 1,00 a mais hoje deve ser igual ao “valor presente” da satisfação marginal de consumir R\$ $(1 + R_{i,t+1})$ em t+1.

Dividindo ambos os lados de (III.2) por $U'(C_t)$ tem-se:

$$1 = \delta E_t \left[(1 + R_{i,t+1}) \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \right] \quad (\text{III.3})$$

Conforme já dito anteriormente, a maior parte dos estudos ligados ao C-CAPM, presume-se que os agentes têm uma função utilidade de aversão relativa ao risco constante (CRRA), que é também conhecida por função potência da utilidade.

⁵ A derivação e a notação do modelo segue Campbell *et al.* (1997).

Só que esta versão da utilidade CRRA difere da equação (II.14) por usar o consumo no lugar da riqueza:

$$U(C_t) = \frac{C_t^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \quad (\text{III.4})$$

Onde,

γ é o coeficiente de aversão ao risco relativa. É um parâmetro de aversão ao risco que independente do nível de riqueza do agente.

O benefício (utilidade) marginal do último centavo de real (R\$0,01) consumido é obtido através da derivada de (III.4) em função de C:

$$U'(C_t) = C_t^{-\gamma} \quad (\text{III.5})$$

Assim, pode-se reescrever (III.3) da seguinte forma:

$$1 = \delta E_t \left[\left(1 + R_{i,t+1} \right) \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \right] \quad (\text{III.6})$$

Esta equação foi deduzida pela primeira vez por Grossman e Shiller (1981). Hansen e Singleton (1983) expandiram este modelo, ao assumir que a taxa de retorno dos ativos e a taxa de crescimento do consumo seguissem um processo estocástico com uma distribuição lognormal. No Apêndice C, desta tese, é demonstrado que se X tem uma distribuição lognormal, então

$\ln E[X] = E[\ln X] + \frac{1}{2} \text{Var}[\ln X]$. Se X for igual à $\left[\left(1 + R_{i,t+1} \right) \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \right]$ esta relação

poderia ser reescrita desta forma:

$$\begin{aligned} \ln E_t \left[\left(1 + R_{i,t+1} \right) \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \right] &= E_t \left\{ \ln \left[\left(1 + R_{i,t+1} \right) \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \right] \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \text{Var}_t \left\{ \ln \left[\left(1 + R_{i,t+1} \right) \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Portanto, aplicando \ln (logaritmo natural) em ambos os lados de (III.6), vem:

$$0 = \ln \delta + E_t(r_{i,t+1}) - \gamma E_t(\Delta c_{t+1}) + \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \gamma^2 \sigma_c^2 - 2\gamma \sigma_{ic}) \quad (\text{III.8})$$

E rearranjando os termos, vem:

$$E_t(r_{i,t+1}) = \gamma E_t(\Delta c_{t+1}) - \ln \delta - \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \gamma^2 \sigma_c^2 - 2\gamma \sigma_{ic}) \quad (\text{III.9})$$

Onde,

$$r_{i,t+1} = \ln(1 + R_{i,t+1})$$

$$\Delta c_{t+1} = c_{t+1} - c_t = \ln C_{t+1} - \ln C_t = \ln\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)$$

σ_i^2 variância de $r_{i,t+1}$ (logaritmo natural de um mais taxa de retorno do ativo i)

σ_c^2 variância de Δc_{t+1} (logaritmo natural de um mais taxa de crescimento do consumo)

σ_{ic} covariância entre $r_{i,t+1}$ e Δc_{t+1}

No caso de um ativo livre de risco, tanto a variância dos retornos como a sua covariância com o crescimento do consumo seriam iguais a zero:

$$r_{f,t+1} = \gamma E_t(\Delta c_{t+1}) - \ln \delta - \frac{1}{2}(\gamma^2 \sigma_c^2) \quad (\text{III.10})$$

Desta forma, o prêmio pelo risco pode ser obtido subtraindo (III.10) de (III.9), obtendo-se:

$$E_t(r_{i,t+1} - r_{f,t+1}) + \frac{\sigma_i^2}{2} = \gamma \sigma_{ic} \quad (\text{III.11})$$

Como σ_i^2 é a variância de $(r_{i,t+1} - r_{f,t+1})$, pois a variância do ativo livre de risco é zero, e pelo mesmo princípio usado para deduzir a equação (III.7), pode-se reescrever (III.11) desta forma:

$$\ln E_t\left[\frac{1 + R_{i,t+1}}{1 + R_{f,t+1}}\right] = \gamma \sigma_{ic} \quad (\text{III.12})$$

Assim, a equação (III.12) mostra que, segundo este modelo, o prêmio de risco de um ativo i é uma função do grau de aversão ao risco vezes a covariância entre os retornos do ativo i e o crescimento do consumo.

Vale lembrar que, neste modelo, assume-se que a economia é de trocas, não há acumulação de riqueza, onde tudo que é produzido é entregue aos acionistas na forma de dividendos. Desta forma, Mehra (2003) “impõe” a condição de equilíbrio em que a volatilidade do da taxa de retorno de qualquer ativo tem que ser igual à volatilidade do consumo. Assim, $\sigma_i^2 = \sigma_{ic} = \sigma_c^2$. Em princípio, nesta ótica, qualquer uma das variâncias ou a covariância poderia ser usada. A escolha de Mehra (2003) é pela variância da taxa de crescimento do consumo. Desta forma, (III.12) é reescrita assim:

$$\ln E_t \left[\frac{1 + R_{i,t+1}}{1 + R_{f,t+1}} \right] = \gamma \sigma_c^2 \quad (\text{III.13})$$

Segundo Mehra e Prescott (1985), o parâmetro γ , que mede o desejo em assumir risco, é um indicador importante em muitos campos da economia. Os autores relataram inúmeros estudos que serviriam como uma “justificativa *a priori*” em que γ varia entre zero e dois (veja Tabela III.2). Com base nisso, estes autores estabeleceram que qualquer valor acima de 10 não deveria ser aceito sem novas evidências empíricas e teóricas. O problema é que com os dados disponíveis na época (e ainda hoje) o γ necessário para explicar o prêmio de risco das ações é muito elevado. Inserindo os valores contidos neste trabalho na equação (III.13):

$$\ln E_t \left[\frac{1 + R_{i,t+1}}{1 + R_{f,t+1}} \right] = \gamma \sigma_c^2 \Rightarrow \ln \left[\frac{1,0698}{1,0080} \right] = \gamma (0,001274)$$

$$\boxed{\gamma = 46,69}$$

A Tabela III.1 amplia os cálculos para vários subperíodos, utilizando os próprios dados de Mehra e Prescott (1985, Tabela 1). Pode-se verificar que em apenas dois subperíodos γ foi menor do que 10.

Tabela III.1. Grau de aversão ao risco estimado para vários períodos

Período	Crescimento do consumo real per capita (%)		Taxa de retorno em ativo relativamente livre de risco (%)		Taxa do S&P500 (%)		E(γ)
	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão	
1889 - 1978	1,83%	3,57%	0,80%	5,67%	6,98%	16,54%	46,69
1889 - 1898	2,30%	4,90%	5,80%	3,23%	7,58%	10,02%	6,95
1899 - 1908	2,55%	5,31%	2,62%	2,59%	7,71%	17,21%	17,17
1909 - 1918	44,00%	3,07%	-1,63%	9,02%	-0,14%	12,81%	15,95
1919 - 1928	3,00%	3,97%	4,30%	6,61%	18,94%	16,18%	83,34
1929 - 1938	-25,00%	5,28%	2,39%	6,50%	2,65%	27,90%	0,91
1939 - 1948	2,19%	2,52%	-5,82%	4,05%	3,07%	14,67%	142,04
1949 - 1958	1,48%	1,00%	-0,81%	1,89%	17,49%	13,08%	1693,16
1959 - 1968	2,37%	1,00%	1,07%	0,64%	5,58%	10,59%	436,56
1969 - 1978	2,41%	1,40%	-0,72%	2,06%	0,03%	13,11%	38,40

Fonte: Mehra e Prescott (1985) e o autor desta tese

Na próxima seção será analisado o porquê um grau de aversão ao risco desta magnitude [$R(W) = \gamma = 46,69$] representa um enigma para a teoria de finanças.

III.2. “QUAL É O PROBLEMA DE $R(W) = 46,69$?”

Esta seção procura trazer um apelo mais intuitivo da razão pela qual o grau de aversão relativa ao risco [$R(W)$] estimado para maximizar a utilidade intertemporal não condiz com a literatura e tampouco com o bom senso.

De acordo com Mehra e Prescott (1985), há na literatura evidências de que $R(W)$ deve se situar entre 0 e 2, conforme os estudos listados na Tabela III.2. Ainda segundo estes autores, estes estudos podem ser questionados em muitos aspectos, porém, em conjunto constituem uma “justificativa *a priori*” em restringir o valor de $R(W)$ para ser no máximo 10.

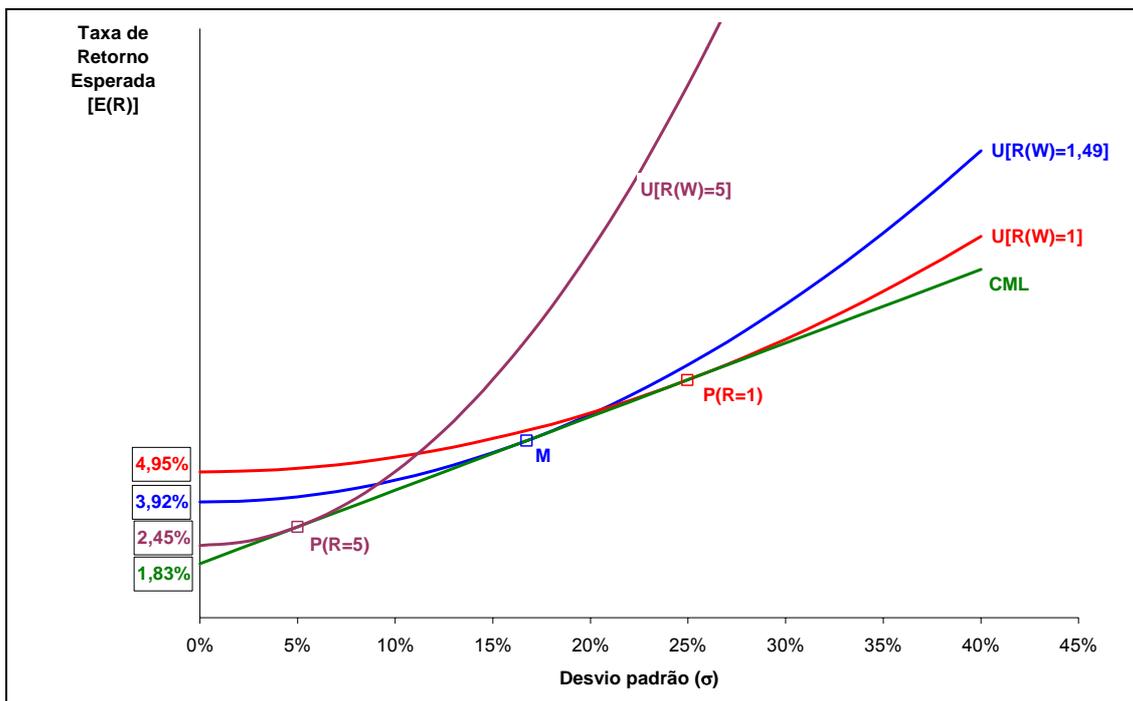
Tabela III.2. Evidências para o valor real de $R(W)$

Estudo	Como foi obtido	$R(W)$
Arrow (1971)	estudo teórico	$R(W) \cong 1$
Friend e Blume (1975)	observando carteiras de investimento de indivíduos	$R(W) \cong 2$
Kydland e Prescott (1982)	$R(W)$ necessário para fazer com que uma série de flutuações entre consumo e investimento agregados fosse parecida com a série observada	$1 < R(W) < 2$
Altug (1983)	utilizando técnicas econométricas sofisticadas para o mesmo problema de Kydland e Prescott (1975)	$R(W) \cong 0$
Kehoe (1984)	estudo das respostas do balanço de pagamentos de países de economia pequena a choques em seus termos de troca	$R(W) \cong 1$
Hildreth e Knowles (1982)	estudo do comportamento de fazendeiros	$1 < R(W) < 2$
Tobin e Dolde (1971)	estudo do comportamento da poupança ao longo do ciclo de vida, quando há restrições para tomar crédito. $R(W)$ necessário para ajustar à série observada.	$R(W) \cong 1,5$

Fonte: Elaborado pelo autor

No Gráfico II.3 (reproduzido a seguir como III.1), foi apresentado uma curva da linha do mercado de capitais (CML) com taxas reais de retorno e desvio padrão históricos do mercado americano, junto com curvas de indiferença de agentes com diferentes níveis de grau de aversão relativa ao risco [$R(W)$]. Se for assumido que a carteira agregada de ativos da economia deve ser próxima do S&P500, o $R(W)$ estimado seria de 1,49! Este resultado está em linha com as evidências apresentadas por Mehra e Prescott (1985).

Gráfico III.1. Otimização de Carteiras por um breve período



Ainda nesta seção é analisado um exemplo, mais intuitivo, para mostrar porque um grau de aversão relativa ao risco $[R(W)]$ de 46,69 não deve acontecer em um mercado sem “fricções” (imperfeições) e onde só haja agentes racionais. Para isso será retomada a equação (II.7) que relaciona a disposição de um agente em pagar o prêmio de acordo com a variância da sua riqueza $[Var(\varepsilon)]$ e com o grau de aversão absoluta ao risco $[A(W)]$ com uma riqueza esperada W_0 :

$$p \cong \frac{Var(\varepsilon)}{2} A(W_0) \quad (III.14)$$

Dividindo e multiplicando o lado direito pela riqueza W , e sabendo que $R(W) = A(W)W$, tem-se:

$$p \cong \frac{Var(\varepsilon)}{2} \frac{R(W_0)}{W_0} \quad (III.15)$$

Suponha que o agente tem uma riqueza total (W), com risco, de R\$100 mil, contendo um único ativo com risco que é um carro (C), que vale R\$20 mil. Assumindo que só possam haver dois estados futuros, a riqueza com o carro e a

riqueza sem o carro (perda total) o valor esperado, e conseqüentemente, a variância da riqueza do agente depende de qual é a probabilidade dessa perda.

Neste exemplo a probabilidade π é de que haja perda total do veículo e $(1-\pi)$ de que não haja nenhum sinistro. Desta forma, a riqueza esperada é assim determinada:

$$\begin{aligned} E(W) &= \pi(W_0 - C) + (1-\pi)W_0 = W_0 - \pi C \\ E(W) &= 100.000 - 20.000\pi \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Se for definido que $\varepsilon = W - E(W)$, pode-se afirmar que $E(\varepsilon) = 0$ e $E(\varepsilon^2) = 1$.

Desta forma, tem-se a variância da riqueza:

$$\begin{aligned} \text{Var}(W) &= \text{Var}(\varepsilon) = E\left[(W - E(W))^2\right] = E\left[(W)^2\right] - [E(W)]^2 \\ \text{Var}(\varepsilon) &= \left[\pi(W^2 - 2CW + C^2) + (1-\pi)W^2\right] - [W^2 - 2\pi CW + \pi^2 C^2] \\ \text{Var}(\varepsilon) &= [W^2 - 2\pi CW + \pi C^2] - W^2 + 2\pi CW - \pi^2 C^2 \\ \text{Var}(\varepsilon) &= \pi(1-\pi)C^2 \\ \text{Var}(\varepsilon) &= \pi(1-\pi)(20.000)^2 \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Assim, substituindo (III.16) e (III.17) em (III.15), tem-se:

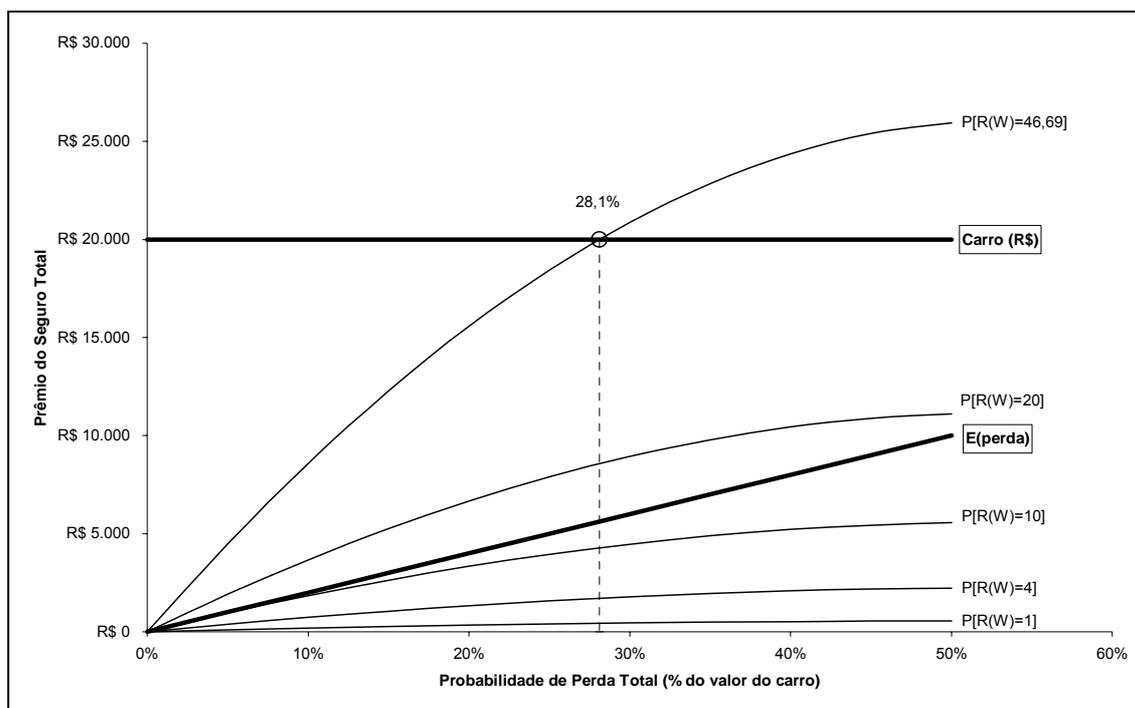
$$p \cong \frac{\pi(1-\pi)(20.000)^2}{2(100.000 - \pi 20.000)} R(W_0) \quad (\text{III.18})$$

O Gráfico III.2 mostra a disposição de pagar o prêmio do seguro de acordo com o grau de aversão a risco $[R(W_0)]$ e da probabilidade de perda π . Neste gráfico são representados agentes com $R(W)$ igual a 1, 4, 10, 20 e 46,69. A linha horizontal “Carro (R\$)” representa o valor integral do carro, e a reta “E(perda)” representa a perda esperada, que é $\pi(20.000)$.

Vale notar que o agente cujo grau de aversão $R(W)=46,69$ tem uma disposição de pagar todo o valor do carro (R\$ 20 mil) como prêmio de um seguro para resguardar um ativo de mesmo valor quando a probabilidade de perda é de apenas 28,1%! Em outras palavras, este agente prefere “dar como perdido” de imediato o valor integral do carro, através do pagamento do prêmio, a conviver com

o desconforto de poder perder o carro com 28,1% de probabilidade. Este comportamento excêntrico não pode ser fruto de uma decisão racional.

Gráfico III.2. Disposição de pagar prêmio de seguro em função de $R(W)$ e probabilidade de perda (π)



É esta irracionalidade, pelo menos aparente, que consiste o enigma do prêmio de risco das ações. Na próxima seção é apresentado o estudo de Hansen e Jagannathan (1991), onde eles formalizam as condições mínimas para a aceitação de uma possível “solução” do EPP. É importante revisar este estudo, pois ele será usado para validar as implicações teóricas da abordagem do S-CAPM.

III.3. FATOR DE DESCONTO ESTOCÁSTICO E A DETERMINAÇÃO DO SEU LIMITE INFERIOR DE VOLATILIDADE

Hansen e Jagannathan (1991) argumentaram que a abordagem paramétrica das funções de utilidade, como é o caso da função CRRA, embora tenha proporcionado *insights* interessantes do ponto de vista teórico, pode estar restringindo a capacidade explicativa dos modelos C-CAPM no campo empírico. Desta forma, estes autores, ao invés de tentarem explicar séries de taxas de retorno

dos ativos financeiros a partir de uma função de utilidade parametrizada, fizeram o oposto. A partir das séries de taxas de retorno dos ativos financeiros, eles deduziram quais deveriam ser as características gerais destas funções de utilidade, ou melhor, do fator de desconto estocástico.

Vale salientar que a dedução aqui apresentada segue Campbell et al. (1997) cuja notação está mais próxima dos capítulos anteriores (e dos próximos) desta tese. Rearranjando os termos da equação (III.3), que retrata a condição de primeira ordem de Lucas (1978), tem-se:

$$1 = E_t \left[(1 + R_{i,t+1}) \left(\delta \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \right) \right] \quad (\text{III.19})$$

Como os autores optaram por não definir a formulação (ou parametrização) exata da função de utilidade, foi definido o fator de desconto estocástico (M) desta forma:

$$M_{t+1} = \left(\delta \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \right) \quad (\text{III.20})$$

E, desta forma, (III.19) pode ser reescrita assim:

$$1 = E_t \left[(1 + R_{i,t+1}) M_{t+1} \right] \quad (\text{III.21})$$

O operador $E_t(\cdot)$ de (III.21) é a expectativa condicionada ao conjunto de informações disponíveis no final do período t . Dada a dificuldade de se estimar os momentos (média, variância, etc) das expectativas condicionadas, Hansen e Jagannathan (1991) preferiram trabalhar com expectativas incondicionadas. Assim, (III.21) pode ser reescrito desta forma:

$$1 = E \left[(1 + R_{i,t+1}) M_{t+1} \right] \quad (\text{III.22})$$

Da estatística, sabe-se que a esperança do produto de duas variáveis estocásticas X e Y se dá assim $E(XY) = E(X)E(Y) + Cov(X, Y)$. Aplicando esta relação à equação (III.22) e rearranjando os termos tem-se:

$$E[1 + R_{i,t+1}] = \frac{1 - Cov[R_{i,t+1}; M_{t+1}]}{E[M_{t+1}]} \quad (\text{III.23})$$

Se a covariância entre M_{t+1} e $R_{i,t+1}$ for positiva, os agentes tenderão a pagar um preço maior por este ativo e, conseqüentemente, exigirão uma taxa de retorno esperada menor. Isso acontece, porque, em geral, quando $R_{i,t+1}$ aumenta M_{t+1} também aumenta, fazendo com que os ganhos tenham ganhos maiores quando a utilidade marginal de consumir aumenta. E, quando a utilidade marginal de consumir aumenta, é porque o consumo é menor [reveja equação (III.20)]. Desta forma, os agentes preferem ter uma taxa de retorno menor com este ativo porque ele funciona como *hedge* (proteção) amenizando a queda do consumo.

No caso de um ativo com covariância negativa com M_{t+1} , os agentes irão exigir um $R_{i,t+1}$ maior, pois ele geralmente irá pagar um rendimento maior quando a utilidade marginal a consumir é mais baixa (consumo é maior). E quando o retorno for baixo, em geral, será em um contexto onde mais se necessitaria: utilidade marginal de consumir maior e, conseqüentemente, nível de consumo menor.

Assumindo que há um ativo na economia que é livre de risco, ou seja, cuja covariância do seu retorno com o fator de desconto estocástico seja zero, a sua taxa de retorno esperada poderia ser estimada pela seguinte equação:

$$E[1 + R_{0,t+1}] = \frac{1}{E[M_{t+1}]} \quad (\text{III.24})$$

Subtraindo (III.24) de (III.23), obtém-se a equação do prêmio de risco de um ativo:

$$E[R_{i,t+1} - R_{0,t+1}] = -E[1 + R_{0,t+1}] \text{Cov}[R_{i,t+1}; M_{t+1}] \quad (\text{III.25})$$

Se M_{t+1} fosse um valor observável, ou ao menos estimável, teoricamente poder-se-ia estimar a taxa de retorno de ações assim como se faz com o CAPM tradicional. Entretanto, enquanto o EPP não é resolvido, não se pode saber se esta equação (III.25) teria um desempenho melhor do que o CAPM de um único período.

A principal contribuição de Hansen e Jagannathan (1991) é a derivação do limite inferior para a volatilidade do fator de desconto estocástico (M_{t+1}). Eles partem da equação (III.21) adaptada para álgebra linear (notação matricial):

$$\mathbf{1} = E[(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1})M_{t+1}] \quad (\text{III.26})$$

Onde:

$\mathbf{1}$ é um vetor de tamanho N contendo somente números 1,

$$\mathbf{1} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]'$$

\mathbf{R}_{t+1} é um vetor contendo taxas de retorno de N ativos,

$$\mathbf{R}_{t+1} = [R_{1,t+1} \quad R_{2,t+1} \quad \dots \quad R_{N,t+1}]'$$

Hansen e Jagannathan (1991) assumem que \mathbf{R}_{t+1} tem uma matriz de covariância não-singular Ω , Desta forma é afastada a possibilidade de arbitragem, ou seja, nenhum ativo ou combinação de ativos tem retorno positivo livre de risco incondicionalmente. Eles demonstram ainda que o fator de desconto estocástico de mínima volatilidade (M_{t+1}^*) deve ser uma função linear dos retornos dos ativos, conforme a seguinte equação:

$$M_{t+1}^* = \bar{M} + (\mathbf{R}_{t+1} - E[\mathbf{R}_{t+1}])' \boldsymbol{\beta}_{\bar{M}} \quad (\text{III.27})$$

Onde, \bar{M} é a esperança de todo candidato a fator de desconto estocástico, inclusivo o de mínima volatilidade, portanto: $E(M_{t+1}^*) = \bar{M} = E(M_{t+1})$. O $\boldsymbol{\beta}_{\bar{M}}$ é o vetor de N coeficientes lineares β , relacionando os desvios de retorno de cada ativo com M_{t+1}^* .

Vale ressaltar que, para ser o fator de desconto estocástico de mínima volatilidade, M_{t+1}^* precisa respeitar a equação (III.26):

$$\mathbf{1} = E[(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1})M_{t+1}^*] \quad (\text{III.28})$$

Lembrando que $E(XY) = E(X)E(Y) + Cov(X, Y)$, a equação (III.28) pode ser expandida desta forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &= \bar{M}E(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1}) + Cov[\mathbf{R}_{t+1}; M_{t+1}^*] \\ &= \bar{M}E(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1}) + E[(\mathbf{R}_{t+1} - E[\mathbf{R}_{t+1}])(M_{t+1}^* - \bar{M})] \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

Substituindo (III.27) em (III.29), tem-se:

$$\mathbf{v} = \bar{M}E(1 + \mathbf{R}_{t+1}) + E\left[(\mathbf{R}_{t+1} - E[\mathbf{R}_{t+1}])(\mathbf{R}_{t+1} - E[\mathbf{R}_{t+1}])' \boldsymbol{\beta}_{\bar{M}}\right] \quad (\text{III.30})$$

E lembrando que foi definido que $\boldsymbol{\Omega}$ é a matriz de covariância (não-singular) de \mathbf{R}_{t+1} , (III.30) pode ser simplificado:

$$\mathbf{v} = \bar{M}E(1 + \mathbf{R}_{t+1}) + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\beta}_{\bar{M}} \quad (\text{III.31})$$

Desta forma, rearranjando os termos de (III.31) e introduzindo a primeira igualdade de (III.29), tem-se a definição de $\boldsymbol{\beta}_{\bar{M}}$:

$$\boldsymbol{\beta}_{\bar{M}} = \boldsymbol{\Omega}^{-1} [\mathbf{v} - \bar{M}E(1 + \mathbf{R}_{t+1})] = \boldsymbol{\Omega}^{-1} \text{Cov}(\mathbf{R}_{t+1}; M_{t+1}^*) \quad (\text{III.32})$$

Ou seja, $\boldsymbol{\beta}_{\bar{M}}$ é o vetor dos coeficientes lineares. Para transformar (III.32) para uma equação escalar, primeiramente deveria se ter a versão escalar de (III.27) que seria $M_{t+1}^* = \bar{M} + [R_{i,t+1} - E(R_{i,t+1})]\beta_{i,\bar{M}}$, onde M_{t+1}^* é função apenas dos desvios dos retorno do ativo i . E a versão escalar de (III.32) é a seguinte:

$$\beta_{i,\bar{M}} = \frac{\text{Cov}(R_{i,t+1}; M_{t+1}^*)}{\text{Var}(R_{i,t+1})} \quad (\text{III.33})$$

Neste ponto, já se tem todos os elementos para se calcular o limite inferior de volatilidade do fator de desconto estocástico. Assim, a variância de M_{t+1}^* , pode ser calculada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Var}(M_{t+1}^*) &= \boldsymbol{\beta}_{\bar{M}}' \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\beta}_{\bar{M}} \\ &= \left\{ \boldsymbol{\Omega}^{-1} [\mathbf{v} - \bar{M}E(1 + \mathbf{R}_{t+1})] \right\}' \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}^{-1} [\mathbf{v} - \bar{M}E(1 + \mathbf{R}_{t+1})] \\ &= \left\{ \boldsymbol{\Omega}^{-1} [\mathbf{v} - \bar{M}E(1 + \mathbf{R}_{t+1})] \right\}' [\mathbf{v} - \bar{M}E(1 + \mathbf{R}_{t+1})] \\ &= [\mathbf{v} - \bar{M}E(1 + \mathbf{R}_{t+1})]' \boldsymbol{\Omega}^{-1} [\mathbf{v} - \bar{M}E(1 + \mathbf{R}_{t+1})] \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

A equação (III.34) representa o limite inferior da volatilidade de qualquer “candidato” a fator de desconto estocástico. Qualquer outro M_{t+1} que não seja M_{t+1}^* , terá uma volatilidade maior. Para que isto seja verificado, qualquer M_{t+1} necessariamente tem que satisfazer a condição de primeira ordem de Lucas (1978), que em notação de álgebra linear é representada por (III.26). Igualando esta equação com (III.28), tem-se:

$$\begin{aligned}
E\left[(1 + \mathbf{R}_{t+1})M_{t+1}\right] &= E\left[(1 + \mathbf{R}_{t+1})M_{t+1}^*\right] \\
E\left[(1 + \mathbf{R}_{t+1})M_{t+1}\right] - E\left[(1 + \mathbf{R}_{t+1})M_{t+1}^*\right] &= 0 \\
E\left[(1 + \mathbf{R}_{t+1})M_{t+1} - (1 + \mathbf{R}_{t+1})M_{t+1}^*\right] &= 0 \\
E\left[(1 + \mathbf{R}_{t+1})(M_{t+1} - M_{t+1}^*)\right] &= 0
\end{aligned} \tag{III.35}$$

Lembrando que $E(XY) = E(X)E(Y) + Cov(X, Y)$, a equação (III.35) pode ser assim desenvolvida:

$$\begin{aligned}
E(1 + \mathbf{R}_{t+1})E(M_{t+1} - M_{t+1}^*) + Cov\left[\mathbf{R}_{t+1}; (M_{t+1} - M_{t+1}^*)\right] &= 0 \\
E(1 + \mathbf{R}_{t+1})(\bar{M} - \bar{M}) + Cov\left[\mathbf{R}_{t+1}; (M_{t+1} - M_{t+1}^*)\right] &= 0 \\
Cov\left[\mathbf{R}_{t+1}; (M_{t+1} - M_{t+1}^*)\right] &= 0
\end{aligned} \tag{III.36}$$

O resultado (III.36) mostra que a diferença entre M_{t+1} e M_{t+1}^* é ortogonal ao vetor de taxas de retorno aleatório; em outras palavras, a covariância (e a correlação) é zero entre $(M_{t+1} - M_{t+1}^*)$ e \mathbf{R}_{t+1} . Entretanto, como M_{t+1}^* é uma combinação linear de \mathbf{R}_{t+1} , a correlação entre essas variáveis é máxima 1. Em um contexto de análise de regressão de mínimos quadrados, M_{t+1} pode ser entendido como a variável dependente do seguinte modelo:

$$M_{t+1} = \bar{M} + (\mathbf{R}_{t+1} - E[\mathbf{R}_{t+1}])' \boldsymbol{\beta}_{\bar{M}} + \varepsilon \tag{III.37}$$

Lembrando que o fator estocástico de mínima volatilidade foi definido como $M_{t+1}^* = \bar{M} + (\mathbf{R}_{t+1} - E[\mathbf{R}_{t+1}])' \boldsymbol{\beta}_{\bar{M}}$ e, portanto, o erro de (III.37) é $\varepsilon = M_{t+1} - M_{t+1}^*$. De acordo com Greene (1997), em uma regressão $y = \alpha + \beta x + \varepsilon$, temos a seguinte relação $Var(y) = Var(\alpha + \beta x) + Var(\varepsilon)$. Assim, aplicando este conceito à equação (III.37) tem-se:

$$Var(M_{t+1}) = Var(M_{t+1}^*) + Var(M_{t+1} - M_{t+1}^*) \tag{III.38}$$

Como, a variância sempre é um número positivo, fica claro $Var(M_{t+1}) \geq Var(M_{t+1}^*)$ sempre.

Campbell et al. (1997) mostraram uma importante relação entre os M_{t+1} e M_{t+1}^* , que é deduzida a seguir a partir de $Var(M_{t+1} - M_{t+1}^*)$:

$$\begin{aligned}
 Var(M_{t+1} - M_{t+1}^*) &= E\left\{(M_{t+1} - M_{t+1}^*)(M_{t+1} - M_{t+1}^*) - [E(M_{t+1} - M_{t+1}^*)]^2\right\} \\
 &= E\left\{M_{t+1}^2 - 2M_{t+1}M_{t+1}^* + M_{t+1}^{*2} - [E(M_{t+1})]^2 + 2E(M_{t+1})E(M_{t+1}^*) - [E(M_{t+1}^*)]^2\right\} \\
 &= E\left\{M_{t+1}^2 - [E(M_{t+1})]^2\right\} + E\left\{M_{t+1}^{*2} - [E(M_{t+1}^*)]^2\right\} - 2E\left\{M_{t+1}M_{t+1}^* + E(M_{t+1})E(M_{t+1}^*)\right\} \\
 \\
 Var(M_{t+1} - M_{t+1}^*) &= Var(M_{t+1}) + Var(M_{t+1}^*) - 2Cov(M_{t+1}; M_{t+1}^*)
 \end{aligned} \tag{III.39}$$

Se (III.38) for inserida em (III.39), tem-se:

$$Var(M_{t+1}^*) = Cov(M_{t+1}; M_{t+1}^*) \tag{III.40}$$

Mudando a notação, $Var(M_{t+1}^*) = \sigma^2(M_{t+1}^*)$, e lembrando que $Cov(M_{t+1}; M_{t+1}^*) = (\sigma[M_{t+1}])(\sigma[M_{t+1}^*])Correl(M_{t+1}; M_{t+1}^*)$, onde σ é o desvio padrão e ρ é a correlação entre M_{t+1} e M_{t+1}^* , e introduzindo estas expressões em (III.40), obtém-se:

$$\sigma(M_{t+1}) = \frac{\sigma(M_{t+1}^*)}{Correl(M_{t+1}; M_{t+1}^*)} \Rightarrow Var(M_{t+1}) = \frac{Var(M_{t+1}^*)}{(\rho_{M_{t+1}; M_{t+1}^*})^2} \tag{III.41}$$

Ou seja, um fator de desconto estocástico só estará perto do limite inferior de volatilidade quando ele for altamente correlacionado com M_{t+1}^* , e conseqüentemente dos retornos dos ativos financeiros. Esta é uma importante implicação do trabalho “desbravador” de Hansen e Jagannathan (1991). A partir de (III.41) pode-se concluir que:

$$Var(M_{t+1}) \geq Var(M_{t+1}^*) \tag{III.42}$$

Esta relação será usada na seção IV.5 para validar os resultados alcançados com o desenvolvimento e implementação do S-CAPM, que é apresentado no Capítulo IV.

Na próxima seção serão apresentadas as principais linhas de investigação que tentam explicar e/ou resolver o EPP.

III.4. TENTATIVAS DE EXPLICAÇÃO E/OU SOLUÇÃO DO EPP

Os acadêmicos têm tratado estes resultados enigmáticos a partir de quatro possibilidades:

- 1) Problemas metodológicos com dados de consumo agregado
- 2) Expectativas *ex-ante* de taxas de retorno foram diferentes das realizadas (*ex-post*)
- 3) Os mercados não são eficientes e/ou não são racionais
- 4) A função de utilidade real dos agentes é mais complexa do que o modelo CRRA

A seguir, será analisada cada uma destas linhas de explicação e/ou de tentativa de solução do EPP.

1) PROBLEMAS COM DADOS DE CONSUMO AGREGADO

Segundo Breeden et al. (1989), os dados disponibilizados pelo Departamento de Comércio (nos EUA, análogo ao IBGE daqui do Brasil) sobre o consumo possuem quatro problemas de mensuração:

- (1) os dados se referem a gastos (compras), ao invés de consumo.
- (2) os dados fornecidos seriam uma “integral de taxas de consumo”, ao invés da taxa de consumo em um dado ponto no tempo.
- (3) a frequência com que os dados sobre consumo são divulgados e relatados é bem menor do que a dos dados sobre ações.
- (4) os dados sobre consumo podem conter erros de amostragem, uma vez que somente um subconjunto da população total de transações de consumo são medidas.

Do ponto de vista estritamente econômico, ao se consumir um bem uma pessoa está satisfazendo uma necessidade sua, mas, ao mesmo tempo, está “destruindo” total ou parcialmente este bem. Se este bem for um sorvete (“bem de consumo”), ela irá consumi-lo integralmente em pouco tempo. Por outro lado, se for um televisor (“bem durável”), o seu consumo pode durar anos, o de uma casa

décadas. Assim, é bastante difícil quantificar o quanto que está sendo consumido de um bem durável a cada intervalo de tempo.

Deste modo, tentando evitar estes problemas, os principais estudos do C-CAPM utilizam somente séries de consumo de bens não duráveis e de serviços, ou seja, produtos de consumo imediato. Uma vez que não podem ser estocados, os serviços são consumidos na medida em que são produzidos instantaneamente. Este consumo que os testes tentam medir será chamado neste trabalho de “consumo efetivo”.

O pressuposto implícito para se usar o consumo “efetivo”, e não os gastos com compras de produtos e serviços por parte das pessoas, está baseado em uma visão “purista” de que a satisfação (utilidade) das pessoas é proporcionada única e exclusivamente do ato de consumir. Nesta lógica, o fato de uma pessoa ter a conveniência de ter uma cama (“bem durável”) em seu quarto à disposição para dormir, na hora que ela quiser, não traz nenhum benefício enquanto não se está dormindo nela (“consumindo”).

Uma vez que não há mercado de aluguel para a grande maioria dos bens duráveis, pode-se assumir que a conveniência de se ter um bem durável em casa, à disposição 24 horas por dia tem valor para as pessoas que irão usufruí-lo. Mesmo para os bens em que há um mercado de aluguel desenvolvido como o de carros e casas, as pessoas parecem preferir ser proprietários a ser inquilino (“o sonho da casa própria”). Este aspecto importante da função utilidade pode não ter sendo captado pelos testes dos modelos C-CAPM.

Além disso, como previsto pela teoria econômica, a utilidade marginal do consumo tende a cair na medida que a quantidade ou o tempo de consumo aumenta. Desta forma, logo após a compra de um “bem durável” é o momento em que utilidade marginal é máxima, e a partir daí esta utilidade tende a baixar. Assim, mesmo que o consumo de um bem durável tende a ser constante ao longo do tempo, a sua utilidade marginal não o será. Como a função objetivo dos agentes, em todos os modelos intertemporais, busca maximizar utilidade, este pode ser um importante fator que não está sendo captado pelos testes do C-CAPM.

Em todos os modelos intertemporais há uma função objetivo, onde se quer maximizar utilidade esperada, e uma função de restrição orçamentária. O consumo é uma variável que participa das duas funções. De um lado, pode haver dúvida de qual consumo (“efetivo” ou a gastos com compra de bens e serviços) deve entrar na função objetivo; mas, por outro lado, na restrição orçamentária, o que importa são os gastos com consumo. Pois, o consumo “efetivo” de uma televisão já paga, não irá afetar a restrição orçamentária, uma vez que o orçamento já foi afetado no passado na compra ou no pagamento.

Supondo uma compra à vista de um bem durável, o comprador se desfaz de bens financeiros no mesmo montante do valor do bem. Assim, a compra foi financiada com uma diminuição da riqueza. Por outro lado, supondo que o bem durável foi comprado a prazo, a pessoa não precisou se desfazer de nenhum ativo financeiro de imediato para comprar o bem. Esta compra, na verdade, está sendo financiada por terceiros, pela própria loja, pelo cartão de crédito, etc. Ou seja, a pessoa não se desfez de seu patrimônio inicial, porém seu “patrimônio líquido” diminuiu, pois contraiu uma dívida, que, em termos de administração de carteiras, seria um “ativo com peso negativo”.

Os demais problemas econométricos apontados por Breeden et al. (1989) são derivados desta busca detalhista do “verdadeiro” consumo e da alegada utilidade de consumir.

Esta tese, ao invés de filtrar os dados originais para obter o consumo “efetivo”, como foi feito nos principais estudos do C-CAPM, trabalhará com os próprios dados originais de gastos de consumo. Pois, eles retratam melhor a restrição orçamentária e ainda podem apresentar um conteúdo informacional útil à análise do comportamento dos agentes, que não está sendo captado pelos estudos atuais.

2) EXPECTATIVAS *EX-ANTE* DE TAXAS DE RETORNO FORAM DIFERENTES DAS REALIZADAS (*EX-POST*)

Rietz (1988) apresentou uma possível solução ao EPP, incorporando ao modelo que a expectativa *ex-ante* dos agentes poderia ter incorporado uma probabilidade pequena, mas positiva, de que ocorresse uma situação catastrófica,

como uma guerra nuclear. Segundo seu modelo, quando há um aumento na probabilidade de uma catástrofe os agentes diminuiriam o consumo drasticamente, fazendo com que a taxa de retorno livre de risco caísse para um nível muito abaixo dos demais ativos com risco.

Mehra (2003), porém, argumenta que as chances de uma guerra nuclear deveriam ser muito baixas antes de 1945, quando a primeira bomba atômica foi usada. E na crise dos mísseis de Cuba, em 1963, ela deveria ter aumentado significativamente. Entretanto, o movimento observado nas taxas de juros neste período não está de acordo com o modelo de Rietz (1988).

Brown et al. (1995) apontam para o fato de que as medidas usadas de taxas de retorno são *ex-post* e que, no caso americano pelo menos, isto pode ser muito diferente da taxa esperada *ex-ante*. Segundo estes autores nem todos os mercados acionários tiveram um desempenho tão bom quanto o americano no século XX. Analisando os colapsos econômicos que houve na Rússia (Revolução 1917), na Alemanha (hiperinflação, anos 20 e 30) e outros países, os investidores muito provavelmente também poderiam incorporar a possibilidade disto vir a ocorrer nos EUA. Assim, ao investir em ações no início do século, o prêmio de risco esperado (*ex-ante*) deveria ser menor do que o obtido (*ex-post*), pois este tipo de colapso não ocorreu. Este tipo de explicação é conhecido com “viés da sobrevivência”.

Segundo Mehra (2003), para que esta explicação fosse válida o mercado acionário e o de títulos de renda fixa deveriam ser afetados de forma distinta. Ou seja, para que haja um prêmio de risco mais elevado do que o previsto, os detentores de ações deveriam ter sofrido mais perdas do que aqueles que tinham títulos de renda fixa. Entretanto, nestas crises econômicas os detentores de títulos de renda fixa sofreram pelo menos tanto quanto os acionistas. Na revolução russa a dívida pública czarista simplesmente não foi paga. Nas crises de hiperinflação o valor real dos títulos foi fortemente corroído. Apesar do “viés da sobrevivência” poder explicar pelo menos em parte o valor da taxa de retorno tanto das ações como dos títulos de renda fixa, não há evidências empíricas de que isso pode afetar o prêmio de risco das ações [MEHRA(2003)].

3) CUSTOS DE TRANSAÇÃO (“FRICÇÕES”) IMPEDEM QUE OS MERCADOS SEJAM EFICIENTES

Alguns estudos apontam que os custos de transação impedem que os mercados funcionem de forma eficiente. E, desta forma, a sua dinâmica se afasta da previsão dos modelos que assumem que os mercados são eficientes e/ou os agentes agem racionalmente.

Um dos principais custos de transação é a restrição à venda de ativos a descoberto (*short sale*). Dada esta restrição, imaginando que metade dos agentes do mercado acha que o preço de um determinado ativo está barato, e portanto ele tende a subir, e a outra metade acha que está caro e ele tende a cair, o preço irá permanecer inalterado? Assumindo que as pessoas que detêm o ativo tem uma expectativa igual à média do mercado, o preço irá subir! Isto irá acontecer não porque alguém esteja “manipulando” o mercado, mas sim porque o custo de comprar o ativo é menor do que vender a descoberto. Portanto, os que acham que o ativo está barato irão fazer com que o preço suba. E desta forma, o preço deixa de refletir as expectativas (média) dos agentes em relação ao valor deste ativo.

He e Modest (1995) retratam esta imperfeição (fricção) de mercado através da transformação da equação da condição de equilíbrio intertemporal de Lucas (1978) para uma inequação:

$$U'(C_t)P_{i,t} \geq \delta E[(P_{i,t+1} + D_{i,t+1})U'(C_{t+1})] \quad (\text{III.43})$$

Assumindo que o preço atual $P_{i,t} = R\$1,00$, a utilidade marginal de consumir este valor hoje [lado esquerdo da inequação (III.43)] seria maior ou igual ao valor presente da expectativa da utilidade marginal de se consumir $R\$(P_{i,t+1} + D_{i,t+1})$ no próximo período. Se esta relação for estritamente uma inequação ($>$), então os agentes procurarão vender os ativos. Porém, dada a restrição de venda a descoberto, eles não irão fazê-lo na quantidade que gostariam, deixando a relação “desequilibrada”.

He e Modest (1995) mostram que a restrição à venda de ativos a descoberto, combinada com restrições à tomada de empréstimos e outras “fricções”, podem fazer com que o limite inferior de volatilidade do fator de desconto estocástico

[(re)veja seção III.3] pode ser reduzido substancialmente, aumentando as chances de solucionar o *equity premium puzzle*.

Entretanto, Campbell et al. (1997) argumentam que estas restrições de venda a descoberto não devem ter um impacto significativo ao longo do tempo. Pois os agentes não compram os ativos financeiros “uma vez só na vida”. Os agentes, na verdade, recebem renda periodicamente e compram e vendem ativos, em termos líquidos, dependendo se querem aumentar ou diminuir o consumo corrente em troca de consumo futuro. Assim, as ações que são percebidas pela média dos agentes como baratas [$E(R)$ elevado, dado o seu risco] terão uma demanda maior do que as consideradas mais caras [$E(R)$ baixo, dado o seu risco]. Por outro lado, os agentes, que precisam se desfazer de ativos para financiar o consumo corrente, procurarão vender as mais caras, primeiramente, e depois as mais baratas. Ou seja, para as ações baratas a demanda é grande e a oferta é pequena, e para as ações consideradas caras ocorre o inverso. Entretanto, na medida que este mecanismo se repete continuamente, deixarão de existir ações caras e baratas. E quando se tem uma perspectiva de um prazo mais longo, (III.43) deixa de ser uma inequação, e volta a ser uma equação.

Assim, o trabalho de He e Modest (1995) é considerado como um estudo exploratório que demonstra que o limite inferior da volatilidade do fator de desconto estocástico (M_{t+1}^*) pode ser reduzido quando se leva em consideração fricções de mercado.

Outra fricção importante no mercado financeiro é a restrição à tomada de empréstimos. Segundo Constantinides, Donaldson e Mehra (2002), os jovens sentem esta restrição mais fortemente do que as pessoas de meia idade. Partindo deste ponto de vista, estes autores saem do modelo padrão de agente representativo da economia e passam a adotar um modelo de economia OLG (*Overlapping Generation*, ou Gerações Sobrepostas).

Nesta economia OLG, a grande massa de consumidores jovens tem uma expectativa de renda futura baseado em quanto irão ganhar na fase “madura” (meia idade). Já as pessoas de meia idade têm as suas expectativas de renda futura

baseadas em sua riqueza atual de ativos financeiros, basicamente títulos de renda fixa e ações, que garantirão as suas rendas na aposentadoria.

Esses autores assumem que os jovens, na busca por minimizar a volatilidade do consumo ao longo de suas vidas, gostariam de tomar recursos emprestados, parte para financiar o consumo corrente (como um complemento do reduzido nível de suas rendas) e investindo o resíduo em ações. No entanto, como não tem ativos e tampouco renda para garantir o pagamento do empréstimo, eles simplesmente não conseguem obter crédito.

Por outro lado, as pessoas de meia-idade têm renda suficiente para financiar o consumo corrente e, ainda, mantêm portfólios diversificados, que incluem posições positivas líquidas de títulos de renda fixa (governamentais e privados). Ou seja, as pessoas de meia idade, em média, não tomam empréstimo, mas aplicam (pelo menos parte de) seus recursos em títulos de dívida do governo e de instituições privadas.

Como os jovens não conseguem tomar empréstimos, há um desequilíbrio entre a oferta de crédito, que é proporcionado pelos mais velhos, e a demanda “reprimida”, pois os jovens não conseguem se endividar no nível desejado. Este desequilíbrio torna a taxa de juros dos títulos de dívida muito baixos em relação ao que seria se não houvesse a restrição ao endividamento por parte dos jovens.

Com a existência da restrição de crédito aos jovens, as ações serão apreçadas exclusivamente pela população mais velha. Dado o seu caráter volátil, o preço das ações não seria afetado de modo significativo pela existência ou não da restrição de crédito. Este resultado quando combinado com a pressão “baixista” das taxas de juros, fazem com que o prêmio de risco de equilíbrio tenha que ser elevado.

Mehra (2003), que é um dos co-autores deste estudo, classifica esta abordagem como “promissora”. Isso porque, as simulações feitas com este modelo ainda não conseguiram explicar a volatilidade observada dos ativos. Constantinides et al. (2002) terminam o artigo dizendo que irão aumentar o número de gerações simultâneas dentro da economia, de 3 (jovem, meia idade e aposentado) para 60. E também pretendem implementar outras modificações.

4) A FUNÇÃO DE UTILIDADE REAL DOS AGENTES É MAIS COMPLEXA DO QUE O CRRA

Alguns estudos apresentam soluções ao EPP fazendo mudanças na formulação da função utilidade. As principais abordagens são (i) a separação do grau de aversão da elasticidade da substituição intertemporal do consumo [Epstein e Zin (1989, 1991)] e (ii) a formação de hábitos de consumo [Campbell e Cochrane (1999)].

Epstein e Zin (1989, 1991) desenvolveram uma função de utilidade bastante flexível e complexa, onde o grau de aversão relativo ao risco (γ) não tem relação direta com a elasticidade de substituição intertemporal do consumo (ψ). Nas funções de utilidade CRRA estes parâmetros estão muito interligados. Para ilustrar este ponto será revisto a equação (III.9):

$$E_t(r_{i,t+1}) = \gamma E_t(\Delta c_{t+1}) - \ln \delta - \frac{1}{2}(\sigma_i^2 + \gamma^2 \sigma_c^2 - 2\gamma \sigma_{ic}) \quad (\text{III.44})$$

Esta equação relaciona a expectativa racional da taxa de retorno de um ativo $E_t(r_{i,t+1})$ e a expectativa da taxa de crescimento do consumo $E_t(\Delta c_{t+1})$, onde a taxa de retorno esperada varia γ para cada de variação de 1 ponto percentual da taxa de crescimento da poupança. Rearranjando os termos de (III.44), tem-se:

$$E_t(\Delta c_{t+1}) = \frac{1}{\gamma} E_t(r_{i,t+1}) + \frac{1}{\gamma} \ln \delta + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\gamma} \sigma_i^2 + \gamma \sigma_c^2 - 2\sigma_{ic} \right)$$

definindo $\psi = \frac{1}{\gamma}$

(III.45)

$$E_t(\Delta c_{t+1}) = \psi E_t(r_{i,t+1}) + \psi \ln \delta + \frac{1}{2} \left(\psi \sigma_i^2 + \frac{1}{\psi} \sigma_c^2 - 2\sigma_{ic} \right)$$

Deste modo, ψ mede o quanto a taxa esperada de crescimento varia em função da variação de 1 ponto percentual da taxa de retorno esperada de um ativo. Portanto, se γ é elevado como estimado pelo estudo de Mehra e Prescott (1985), próximo de 50, ψ é baixo, neste caso $\psi = 1/\gamma = 0,02$. Ou seja, o crescimento do consumo é praticamente insensível às variações da taxa de retorno esperada dos ativos.

Neste caso, se um agente tem um grau de aversão relativo elevado, ele não estará disposto a trocar consumo corrente por consumo futuro e vice-versa. Segundo Mehra (2003) ele seria avesso a variações do consumo de um período para outro. Como na realidade o consumo *per capita* tem crescido ao longo do tempo, este agente com γ elevado teria muito pouco incentivo a poupar. E, neste contexto, a demanda por títulos do governo seria baixa e, conseqüentemente, a taxa livre de risco tenderia a ser (muito) elevada, contrariando a realidade do mercado americano (*risk-free rate puzzle*, ou enigma da taxa livre de risco).

A formulação da função utilidade proposta por Epstein e Zin (1989) tenta “driblar” esta rigidez das funções do tipo CRRA, através do desenvolvimento de uma função onde γ e ψ são independentes um do outro, proporcionando, portanto, maior flexibilidade à função utilidade.

De acordo com Campbell et al. (1997) não está claro se γ e ψ devam ser independentes ou não. A aversão ao risco (γ) está ligado ao medo (ou desejo) em colocar em risco a sua riqueza e seu consumo futuro e é um fator importante também em um horizonte de investimento de apenas um período. Já a elasticidade de substituição intertemporal do consumo (ψ) descreve se o agente está disposto a trocar consumo corrente com consumo futuro.

Segundo Mehra (2003), a maior vantagem desta formulação é que um grau de aversão elevado não implica necessariamente que os agentes irão querer minimizar a variabilidade do consumo ao longo do tempo. Portanto, esta abordagem tem o potencial de solucionar, ao menos quantitativamente, o chamado *risk-free rate puzzle*.

Epstein e Zin (1991) estimaram o grau de aversão relativa ao risco (γ) em torno de 1. Entretanto, a solução obtida por este modelo é sensível à definição da medida de consumo que é usada (não duráveis, não duráveis excluindo gastos com roupas e sapatos ou somente gastos com serviços) e das variáveis instrumentais para se fazer o teste de GMM (*Generalized Method of Moments*, ou Método de Momentos Generalizados). Usando dados de consumo de bens não duráveis (com ou sem gastos com vestuário), a taxa subjetiva de desconto

intertemporal (r^*) ficou negativa, fazendo com que o fator subjetivo de substituição intertemporal (δ) tivesse um valor acima de 1. Portanto, a formulação dada por Epstein e Zin (1991) não está completamente livre do *risk-free rate puzzle*.

A função de utilidade esperada do tipo *Von Neumann-Morgenstern* tem a característica que a utilidade do consumo corrente é independente do consumo passado. Porém, a abordagem da formação de hábitos de consumo modifica esta característica. De acordo com Campbell e Cochrane (1999), os agentes buscam maximizar a seguinte a função objetivo:

$$\text{Max } U_t = E_t \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \frac{(C_{t+j} - X_{t+j})^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \quad (\text{III.46})$$

Onde X_t é o nível do hábito de consumo, que serve como referência para o agente, e cuja determinação é exógena ao modelo. Com esta parametrização, Campbell e Cochrane (1999) deduzem que os agentes têm medo de investir em ações, pois elas tendem a dar um menor retorno quando mais eles precisam: em uma recessão. Então neste modelo o grau de aversão ao risco muda na medida que muda o estado da economia.

Quanto maior for C_t em relação a X_t menor será o grau de aversão ao risco, porque a diferença entre C_t e X_t é alta quando se está em um período de expansão econômica. E quando esta diferença diminui, há uma recessão fazendo com que os agentes se tornem mais avessos ao risco.

Assumindo que as ações tendem a dar retornos elevados em períodos de expansão econômica e baixos retornos quando a economia estiver em recessão, os agentes evitam comprar ações, pois, elas não servem como *hedge* para cenários desfavoráveis, dada a dinâmica de seus retornos serem pró-cíclica.

Por outro lado, os agentes encontram alguma proteção contra possíveis tempos ruins nos títulos de renda fixa, especialmente da dívida do governo americano.

Desta forma, o prêmio de risco de equilíbrio da economia é elevado, pois, a demanda por ações é baixa, aumentando as taxas requeridas de retorno. E como a demanda por títulos governamentais é elevada, as suas taxas de retorno ficam deprimidas.

Segundo Mehra (2003), este modelo é consistente com os dados históricos, porém, não se sabe se o grau de aversão ao risco por parte dos agentes é tão volátil, na realidade, como sugerem Campbell e Cochrane (1999, 2000). Mehra diz ainda que a abordagem da formação de hábito de consumo obteve sucesso em explicar o *risk-free rate puzzle*, mas teve um sucesso apenas relativo em resolver o EPP.

III.5. HÁ EPP NO BRASIL? UMA BREVE REVISÃO DA LITERATURA

No Brasil, os modelos foram aplicados aos dados do mercado local e não foi detectada a existência desta “anomalia” no mercado local, pois, pelos estudos de Sampaio (2002), Soriano (2002), Bonomo e Domingues (2002), Issler e Piqueira (2002) e Catalão e Yoshino (2004), este grau de aversão ficou dentro da faixa considerada “normal”.

Sampaio (2002) fez um estudo do mercado financeiro brasileiro entre 1980 a 1998, aplicando a mesma metodologia de Mehra e Prescott (1985). Resumidamente os resultados obtidos foram:

Tabela III.3. Valor dos coeficientes α (grau de aversão ao risco) e β (fator de desconto subjetivo) e demais índices do mercado brasileiro.

Consumo (bens não duráveis e serviços)	α	β	Ibovespa	Selic	Prêmio
Sem ajustamento	6,1	0,91	6,60%	1,90%	4,70%
Ajustados sazonalmente	33,2	0,84	6,60%	1,90%	4,70%

Fonte: elaborado pelo autor a partir de Sampaio (2002)

Dados os parâmetros comportamentais determinados por Mehra e Prescott (1985), pode-se verificar que, quando confrontado com dados de consumo não ajustados sazonalmente, não há nenhum “enigma”, no mercado brasileiro. Já

com os dados de consumo ajustados sazonalmente, o enigma aparece ($\alpha = 33,2$). Entretanto, este resultado não é relatado com freqüência na literatura nacional.

Bonomo e Domingues (2002) seguem uma metodologia de Epstein e Zin (1989), que usam uma formulação teórica distinta da de Mehra e Prescott (1985), em relação ao tipo da função utilidade dos agentes [do tipo KREPS e PORTEUS (1978)]. Apesar desta abordagem não ter solucionado o enigma no mercado americano, ela não detectou nenhuma anomalia no mercado nacional, como pode ser visto na Tabela III.4.

Soriano (2002) usou a mesma abordagem de Hansen e Jagannathan (1991) para determinar as fronteiras das combinações entre o fator de desconto subjetivo e do grau de aversão ao risco. Este estudo não conseguiu fazer com que os dados de mercado ficassem dentro dos parâmetros previstos pelo modelo, quando aplicado ao mercado americano. Em compensação, no Brasil, o grau de aversão ao risco não apresentou problemas para se enquadrar na região esperada (acima da fronteira mínima).

Issler e Piqueira (2002) utilizaram formas alternativas da função utilidade: (i) modelo de hábito externo, quando o consumo passado tem um efeito positivo sobre o consumo futuro e (ii) modelo com utilidade Kreps e Porteus (1978), onde há uma maior separação entre o grau de aversão e o fator de substituição intertemporal dos agentes. Nos testes deste estudo também não se verificou o “enigma” no Brasil.

Catalão e Yoshino (2004) aplicaram a metodologia tradicional de Mehra e Prescott (1985) e chegaram a encontrar coeficientes de grau de aversão inclusive negativo no mercado brasileiro.

A Tabela III.4. resume os principais testes de C-CAPM no mercado brasileiro.

Tabela III.4. Resumo dos Principais teses de C-CAPM no Brasil e os valores estimados dos coeficientes α (grau de aversão ao risco).

Estudo	Período	Ibovespa (% ao ano)	Selic (% ao ano)	Consumo (ajustado sazonalmente?)	γ (Grau de aversão ao risco)
Sampaio (2002)	1980 a 1998	6,60%	1,90%	Não ajustado	6,1
				Ajustado	33,2
Bonomo e Domingues (2002)	1986 a 1998	5,57%	3,32%	Não ajustado	2,7 a 3,2
Soriano (2002)	1980 a 1998	6,50%	1,80%	Ajustado	5,7 a 15,5
Issler e Piqueira (2002)	1975 a 1998	ND	ND	Não ajustado	1,10 a 4,89
				Ajustado	0,46 a 0,75
Catalão e Yoshino (2004)	1991 a 2003	—	—		-5,23 a 0,64

Fonte: Elaborado pelo autor

Através desta análise sobre a literatura nacional sobre o C-CAPM pode-se notar que a grande maioria dos resultados classifica o coeficiente de grau de aversão ao risco dentro da faixa considerada normal, entre zero e dez. Nos casos onde o grau de aversão ultrapassou o limite superior ($\gamma=10$) podem ser creditados a especificações alternativas do modelo, onde se queria analisar algumas hipóteses específicas.

A princípio, não se verifica a existência do *Equity Premium Puzzle* no Brasil. Na verdade, conforme foi visto, muitos estudos apontam que o investidor brasileiro médio está no limite de ser considerado um “amante do risco” ($\gamma < 0$). Como esse padrão parece ser um caso específico deste mercado, e não geral, optou-se por se estudar apenas os dados do mercado americano, que é a referência mundial em relação ao EPP.

No próximo capítulo será apresentado o desenvolvimento do S-CAPM. Partindo de uma revisão crítica da literatura, os pressupostos serão questionados e modificados para que se possa explicar o comportamento de um mercado de capitais

IV. SAVING-CAPM: UMA POSSÍVEL SOLUÇÃO PARA O EPP

Neste capítulo serão apresentadas críticas à formulação do C-CAPM (seção IV.1). A partir dessas críticas será deduzido o modelo S-CAPM, na tentativa de propor uma solução viável e mais simples do que as apresentada por Epstein e Zin (1989, 1991) e Campbell e Cochrane (1999).

Os impactos das mudanças de pressupostos feitas pelo S-CAPM serão analisados dentro da estrutura Mehra-Prescott (seções IV.2 e IV.4), e pela abordagem econométrica de Hansen-Jagannathan (seção IV.5). Na seção IV.3 são apresentadas as fontes de dados utilizadas nesta tese.

IV.1. REVISÃO CRÍTICA DOS PRESSUPOTOS DO C-CAPM E DEDUÇÃO DO S-CAPM

Os estudos envolvendo modelos intertemporais, do tipo C-CAPM, invariavelmente têm assumido os mesmos pressupostos de Lucas (1978). Entretanto, Lucas fez um modelo de uma economia fechada, sem governo e não monetária, na qual era produzido e consumido um único tipo de produto perecível, ou seja, que não podia ser estocado. Assim, a identidade das contas nacionais desta economia ficaria assim:

$$Y_t = C_t \quad (= W_t) \quad (IV.1)$$

Ou seja, tudo o que é produzido (Y) em um determinado período, necessariamente deveria ser consumido (C). Uma vez que todos os bens são perecíveis, a riqueza (W) do início do período (*endowment*) era integralmente consumida até o final deste período, ou simplesmente apodrecia. Com este artifício da “economia de trocas”, muda-se a natureza econômica da variável riqueza (W), que na “vida real” é uma variável estoque, e passa a ser uma variável fluxo.

Esta formulação é atraente aos olhos dos economistas, porque é difícil estimar o estoque de riqueza (*per capita*) em uma economia. E nesta economia artificial pode-se assumir que os agentes estão sempre no equilíbrio, onde a utilidade marginal de consumir é igual à utilidade marginal da riqueza:

$$U'(W_t) = U'(C_t) \quad (IV.2)$$

Com isso é possível aplicar todos os tipos de funções de utilidade aplicada à riqueza para o consumo. Assumindo uma função do tipo CRRA, tem-se:

$$W_t^{-\gamma} = C_t^{-\gamma} \quad (IV.3)$$

Entretanto, de acordo com os manuais de macroeconomia, tal como Dornbusch et. al. (1998), em uma economia moderna e aberta há governo e há uma ampla gama de mercadorias sendo produzida, consumida e estocada (investida). Desta forma, a riqueza gerada em um período pode ser despendida da seguinte forma:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t + (X_t - M_t) \quad (IV.4)$$

Toda a riqueza produzida em um período (Y, Produto Interno Bruto) pode ser consumida tanto pelos indivíduos (C) ou pelo setor governo (G) e pelos não residentes (X, exportação) e uma parte é estocada na forma de máquinas, instalações ou mesmo mercadorias que ainda não foram consumidas (I, investimento). Por outro lado, parte do dispêndio feito pelos residentes e governo (C+I+G) é em mercadorias e serviços produzidos fora dessa economia. E para evitar dupla contagem, as importações (M) entram na equação com sinal negativo. Em uma economia moderna e aberta será que é possível explicar as taxas de retorno dos ativos com base apenas no consumo de um “agente representativo”?

Além da ótica do dispêndio (IV.4), a renda pode ser analisada sob a ótica da alocação:

$$Y_t = C_t + S_t + T_t - TR_t \quad (IV.5)$$

Toda a renda (Y) gerada pela economia ou é consumida (C), ou é poupada (S) ou é recolhida pelo governo na forma de tributos e contribuições (T). Porém, parte do que é recolhido pelo governo volta ao setor privado sob a forma de transferências (TR), que são pensões para aposentados, programas sociais e subsídios a alguns produtores. E para evitar dupla contagem as transferências entram na equação (IV.5) com sinal negativo. Do ponto de vista do setor privado, a renda disponível (YD) para consumir ou poupar é somente:

$$YD_t = Y_t - T_t + TR_t \quad (IV.6)$$

E, portanto, a alocação da renda disponível fica delimita somente ao consumo e à poupança:

$$YD_t = C_t + S_t \quad (IV.7)$$

Igualando as equações (IV.4) e (IV.5) é possível perceber o rol de informações contido pela poupança privada bruta:

$$S_t = I_t + (G_t + TR_t - T_t) + (X_t - M_t) \quad (IV.8)$$

A poupança bruta do setor privado (S), em qualquer período, é sempre igual ao investimento bruto (I), mais o déficit nominal do governo (G+TR-T) e mais o superávit em transações correntes (X – M). Desta forma, pode-se notar que a poupança bruta do setor privado (S), além de refletir a relação entre renda bruta e consumo privado (YD – C), também sofre o impacto das flutuações do investimento bruto (I), do déficit nominal do governo (G+TR-T) e também do superávit em transações correntes (X – M). Estas inter-relações não são contempladas nos modelos C-CAPM desenvolvidos até agora.

Assumindo que os agentes sentem satisfação (utilidade) pelo consumo corrente e futuro, sendo este último representado pela poupança corrente, é possível fazer algumas deduções sobre a relação entre a utilidade marginal de consumir e a utilidade marginal de poupar partindo da equação (IV.5). Para isso basta otimizar a utilidade como função do consumo e poupança correntes, sujeita à restrição orçamentária representada pela própria equação (IV.5). Assim, tem-se:

Maximizar $U(C_t; S_t)$ sujeito a $YD_t = C_t + S_t$. Aplicando a metodologia do multiplicador de Lagrange, tem-se:

$$L = U(C_t; S_t) + \lambda(YD_t - C_t - S_t) \quad (IV.9)$$

Cujas condições de primeira ordem são:

$$L_C = U_C(C_t; S_t) - \lambda = 0 \Rightarrow U_C = \lambda \quad (IV.10)$$

$$L_S = U_S(C_t; S_t) - \lambda = 0 \Rightarrow U_S = \lambda \quad (IV.11)$$

$$L_\lambda = YD_t - C_t - S_t = 0 \quad (\text{IV.12})$$

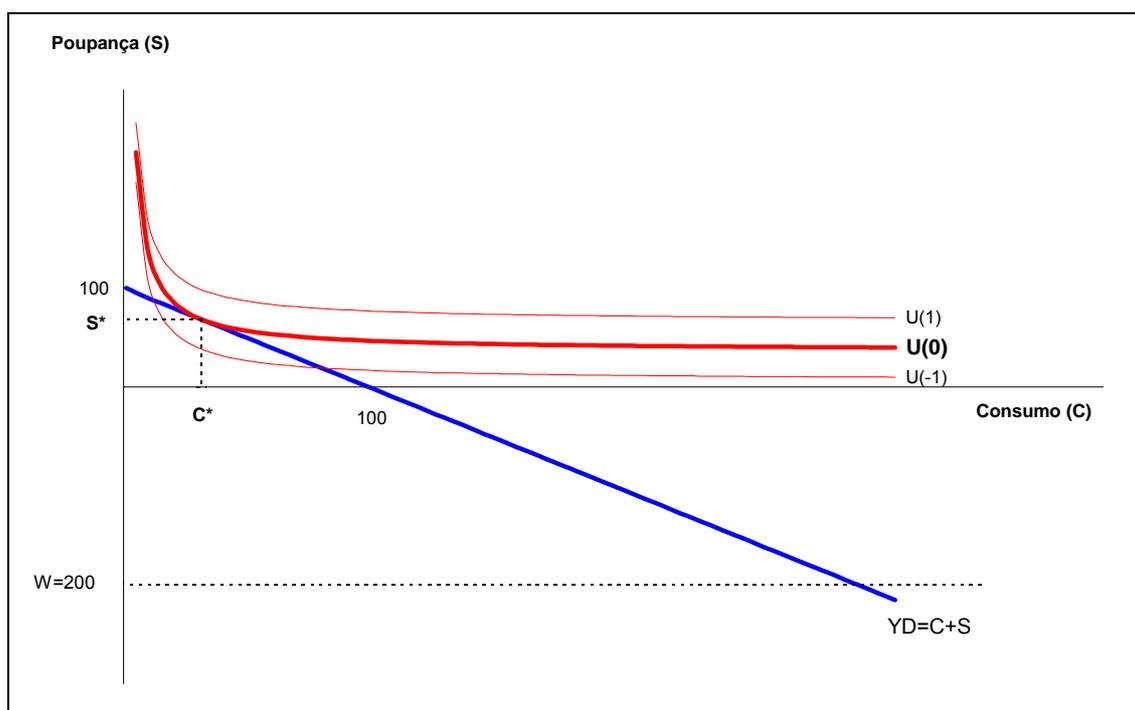
Desta forma, igualando (IV.10) e (IV.11), obtém-se:

$$U_C = U_S \quad (\text{IV.13})$$

Ou seja, em cada instante do tempo, o agente que busca maximizar a sua utilidade da riqueza irá consumir até o montante em que a utilidade marginal de consumir seja igual à de poupar. Se acaso ele consumir além (ou aquém) deste nível ele não estará em seu ponto ótimo, mesmo respeitando a restrição orçamentária.

O Gráfico IV.1. retrata a situação de um agente que tem uma riqueza atual de (W_0) de \$200 e uma renda disponível de (YD) de \$100. Dentre as ilimitadas curvas de indiferença, a curva $U(0)$ é aquela em que a utilidade do agente é maximizada dada a restrição orçamentária.

Gráfico IV.1. Trade-off entre Consumo e Poupança Corrente



Vale a pena notar que, neste enfoque, a riqueza atual não representa nenhuma restrição. Os agentes de uma economia fechada (e sem governo) não poderão ter poupança bruta negativa em termos agregados, a não ser que consumam a riqueza (W) acumulada. Porém, o consumo em um dado período

estaria restrito a $C_t = YD_t - S_t \leq YD_t + W_t$. E, como não há consumo negativo, a poupança estaria restrita ao intervalo $YD_t \geq S_t \geq -W_t$.

Por outro lado, em uma economia aberta, o consumo em um dado período não estaria limitado, pois poder-se-ia financiar o consumo através de um déficit em transações correntes, $(X_t - M_t) < 0$. E, portanto, a poupança também não teria um limite inferior.

À luz da formulação da função utilidade de consumir do tipo CRRA, o modelo C-CAPM usado por Mehra e Prescott (1985) estavam assumindo implicitamente a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} U'(C_t) &= U_S(S_t; YD_t) \\ C_t^{-\gamma} &= (YD_t - S_t)^{-\gamma} \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Em princípio a renda disponível poderia ser argumento tanto da função de utilidade marginal de consumir como também da de poupar. Então uma formulação alternativa à (IV.14) é a seguinte:

$$\begin{aligned} U'(S_t) &= U_C(C_t; YD_t) \\ S_t^{-\gamma} &= (YD_t - C_t)^{-\gamma} \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

Nesta tese optou-se pela formulação da equação (IV.15) na parametrização da função da utilidade marginal de consumir, e de poupar, pelos seguintes motivos:

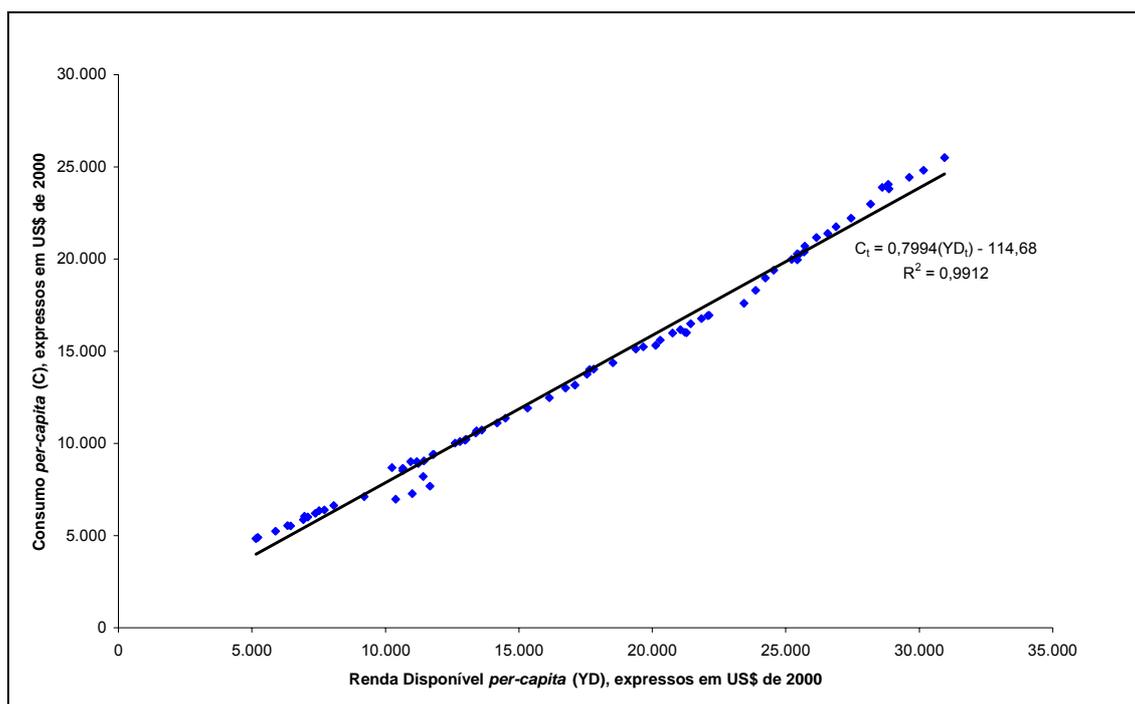
- 1) A poupança, e não o consumo, é que determina a demanda por ativos financeiros
- 2) Em macroeconomia, as principais teorias sobre o consumo privado estabelecem um forte vínculo com a renda
- 3) A poupança é o elo de ligação entre o consumo e a riqueza, pois ela é a riqueza incremental.

Em relação ao primeiro motivo, a oferta de ativos financeiros é determinada por investimento (I), déficit orçamentário (G+TR-T) ou consumo privado (C). Entretanto, a demanda por ativos financeiros é dada apenas pela poupança (S).

Deste ponto de vista, a parametrização da utilidade marginal sob a ótica da poupança [equação (IV.15)] parece ter um melhor potencial para explicar o comportamento dos retornos (e preços) dos ativos financeiros.

No segundo motivo, de acordo com os principais manuais de macroeconomia⁶, todas as principais teorias definem o consumo corrente como uma função da renda permanente [FRIEDMAN (1957)] ou tanto da renda permanente como também da corrente [CAMPBELL e MANKIWI (1989)]. De qualquer forma, pode-se simplificar assumindo que o consumo corrente é uma função da renda corrente $C_t = f(YD_t)$. O Gráfico IV.2 compara as observações da Tabela D.2, relacionando consumo e renda disponível (*per capita*) com o consumo estimado pela regressão.

Gráfico IV.2. Regressão do consumo (C) em função da renda disponível (YD), dados anuais no período 1929-2004



O coeficiente de determinação (R^2) desta regressão é 0,9912. Isto significa que o modelo estimado consegue explicar 99,12% da variância do consumo (C). Portanto, nesta tese será usado o pressuposto comum em macroeconomia de que o consumo é determinado pela renda disponível. Como o intercepto da

⁶ tais como DORNBUSCH et al. (1998) e BRANSON (1989)

estimação não é estatisticamente diferente de zero, pode-se assumir que $C_t = YD_t \bar{c}$, onde \bar{c} é a propensão marginal a consumir, que é uma constante. Desta forma, a equação (IV.15) pode ser reescrita desta forma:

$$\begin{aligned} U'(S_t) &= U_c(YD_t) \\ S_t^{-\gamma} &= [YD_t(1-\bar{c})]^{-\gamma} \end{aligned} \quad (IV.16)$$

Desta forma, o consumo (C) deixa de ser argumento da função de utilidade marginal do consumo (e da poupança). Vale a pena notar que, se não fosse feito esta suposição de que o consumo corrente é determinado pela renda, a utilidade marginal de consumir poderia ser uma função crescente [$U_{cc}(C_t; YD_t) > 0$] com o aumento do consumo. Isto iria contra o pressuposto de que a função de utilidade é côncava, ou seja, $U_c[C_t(YD_t); YD_t] > 0$ e $U_{cc}[C_t(YD_t); YD_t] < 0$.

O terceiro motivo apontado para se adotar a parametrização da função da utilidade marginal conforme a visão da poupança [equação (IV.15)] é devido á relação entre poupança e riqueza. Ao mesmo tempo em que a poupança é uma variável fluxo, se relacionando com todas as variáveis macroeconômicas [(re)veja a equação (IV.8)], ela também representa um incremento da riqueza, que é uma variável estoque:

$$W_{t-1} [1 + E(R_{i,t})] + S_t = W_t \quad (IV.17)$$

Ou seja, a poupança do período t representaria o quanto o estoque de riqueza iria variar para que, no final deste período, a riqueza chegasse ao montante de W_t . Um investidor racional, iria consumir (poupar) até onde a utilidade marginal de consumir (poupar) seria igual a utilidade marginal da riqueza. Usando o modelo CRRA tanto para o consumo (poupança) como para a riqueza, tem-se:

$$\begin{aligned} U'(W_t) &= U'(S_t) \\ W_t^{-\alpha} &= S_t^{-\gamma} \end{aligned} \quad (IV.18)$$

Entretanto, como foi quebrado os pressupostos da economia de trocas, onde o consumo (do período) e a riqueza (inicial de cada período) eram sempre

iguais, não se pode assumir que $S_t = W_t$, sempre. Definindo que $w_t = \ln W_t$ e $s_t = \ln S_t$, a equação (IV.18) pode ser reescrita:

$$\alpha = \gamma \left(\frac{s_t}{w_t} \right) \quad \text{ou} \quad \gamma = \alpha \left(\frac{w_t}{s_t} \right) \quad (\text{IV.19})$$

Assim, α só seria igual a γ se $s_t = w_t$. Se a relação s_t/w_t não for constante, não se pode assumir que tanto a utilidade de poupar (e consumir) como utilidade da riqueza sigam simultaneamente uma função CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*).

Um outro problema da relação s_t/w_t é que ela é sujeita à escolha da unidade de medida. Assumindo uma taxa de câmbio de US\$ 1,70/£, se a poupança e a riqueza forem medidas em libras esterlinas (£), a razão s_t/w_t teria um valor menor do que se essas variáveis estivessem expressas em US\$, por exemplo. Como se está trabalhando com dados deflacionados, a escolha da data base, pela qual os preços da série são expressos também pode afetar esta relação. Além disso, não se tem uma estimativa clara de qual é a riqueza *per capita* (W) dos agentes. Desta forma, o que se pode assumir dessa relação é que $0 < \frac{s_t}{w_t} < 1$, e conseqüentemente $\alpha < \gamma$.

Dada a dificuldade de se “traduzir” o grau de risco relativo da utilidade marginal de poupar (γ) para o da função da utilidade marginal da riqueza (α), na próxima seção será desenvolvido o modelo através da utilidade de poupar. E, de acordo com os modelos C-CAPM clássicos, serão usados a função de utilidade do tipo CRRA.

Os impactos destas mudanças de pressupostos serão analisadas pela abordagem tradicional do C-CAPM (Mehra-Prescott), nas seções IV.2 e IV.4, e pela abordagem econométrica de Hansen-Jagannathan, na seção IV.5. Na seção IV.3 são apresentadas as fontes de dados utilizadas nesta tese.

IV.2. IMPLICAÇÕES DO S-CAPM NA ABORDAGEM MEHRA-PRESCOTT

Partindo da condição de primeira ordem de Lucas (1978), $U'(C_t) = \delta E_t \left[(1 + R_{i,t+1}) U'(C_{t+1}) \right]$, e da equação (IV.13), tem-se:

$$U'(S_t) = \delta E_t \left[(1 + R_{i,t+1}) U'(S_{t+1}) \right] \quad (\text{IV.20})$$

Esta equação indica que a utilidade marginal de poupar um real no período t , $U'(S_t)$, é igual ao valor presente da utilidade marginal esperada de consumir (que é igual a de poupar) $(1 + R_{i,t+1})$ reais no período $t+1$. O valor presente é obtido aplicando um fator de desconto intemporal δ . E $R_{i,t+1}$ é a taxa de retorno de um ativo financeiro qualquer (título de renda fixa ou uma ação) entre os períodos t e $t+1$.

Dividindo ambos os lados de (IV.20) por $U'(S_t)$, tem-se:

$$1 = \delta E_t \left[(1 + R_{i,t+1}) \frac{U'(S_{t+1})}{U'(S_t)} \right] \quad (\text{IV.21})$$

A seqüência desta seção é uma consequência desta alteração do modelo clássico de Mehra e Prescott (1985) e da discussão sobre a parametrização da função de utilidade de poupar. Conforme discutido na seção anterior, é assumido que a utilidade da poupança é do tipo RRA (*Relative Risk Aversion*, ou Aversão Relativa ao Risco):

$$U(S_t) = \frac{(S_t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (\text{IV.22})$$

E, por conseguinte, a utilidade marginal da poupança é:

$$U'(S_t) = (S_t)^{-\gamma} \quad (\text{IV.23})$$

Desta forma, reescrevendo a equação (IV.21) com base em (IV.23), tem-se:

$$1 = \delta E_t \left[(1 + R_{i,t+1}) \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right)^{-\gamma} \right] \quad (\text{IV.24})$$

A derivação do modelo, a partir deste ponto, segue muito de perto o modelo analisado no capítulo anterior. Assumir que tanto a taxa de retorno como a taxa de crescimento da poupança privada seguem uma distribuição conjunta lognormal e homoscedástica, facilita a análise da equação (IV.24) através de uma transformação logarítmica. De acordo com o Apêndice C, se for aplicado a transformação logarítmica nos dois lados da equação (IV.24), e lembrando que as variáveis em letra minúscula representam logaritmo natural (ln) tem-se:

$$E_t[r_{i,t+1}] = -\ln \delta + \gamma E_t[\Delta s_{t+1}] - \frac{1}{2} [\sigma_i^2 + \gamma^2 \sigma_s^2 - 2\gamma \sigma_{is}] \quad (IV.25)$$

Onde σ_i^2 significa a variância de $\ln(1 + R_{i,t+1}) = r_{i,t+1}$, σ_s^2 é a variância de $\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$ e σ_{is} é a covariância destes logaritmos.

No caso de uma taxa livre de risco, cuja variância e covariância (com qualquer outra variável) são iguais a zero, a equação análoga a (IV.25) ficaria assim:

$$r_{f,t+1} = -\ln \delta + \gamma E_t[\Delta s_{t+1}] - \frac{1}{2} [\gamma^2 \sigma_s^2] \quad (IV.26)$$

Desta forma, se (IV.26) for subtraído de (IV.25) obtém-se a estimativa do prêmio de risco de qualquer ativo (assumindo que as taxas de retorno e o crescimento da poupança sigam distribuições lognormais):

$$E_t[r_{i,t+1} - r_{f,t+1}] + \frac{\sigma_i^2}{2} = \gamma \sigma_{is} \quad (IV.27)$$

O termo da variância do lado esquerdo da equação (IV.27) é devido ao fato de que se está trabalhando com esperanças de logaritmos de $(1+R)$. Lembrando

que $\left\{ \ln E[X] = E[\ln X] + \frac{1}{2} \text{Var}[\ln X] \right\}$ e igualando X à $\left[\frac{1 + R_{i,t+1}}{1 + R_{f,t+1}} \right]$, a equação (IV.27)

pode ser reescrita desta forma:

$$\ln E_t \left[\frac{1 + R_{i,t+1}}{1 + R_{f,t+1}} \right] = \gamma \sigma_{is} \quad (IV.28)$$

Assim, segundo a equação (IV.28), o prêmio de risco de qualquer ativo é obtido através do produto entre o grau de aversão ao risco e a covariância entre as taxas de retorno deste ativo e a poupança agregada.

As equações (IV.27) e (IV.28) serão usadas para se estimar o grau de aversão ao risco relativo (γ) pelo S-CAPM. Na próxima seção será apresentado como os dados foram obtidos e manipulados para que se chegasse nas estimativas que são apresentadas na seção IV.4.

IV.3. FONTES DOS DADOS USADOS NESTA TESE

Os dados usados neste trabalho foram os seguintes:

- ✓ Dados anuais macroeconômicos dos EUA (1929-2004): (i) Poupança Privada, (ii) Consumo Privado e (iii) Renda Disponível
- ✓ Índice de Preços ao Consumidor (CPI)
- ✓ População
- ✓ Dados de taxas de retorno do mercado americano: (i) S&P 500 e (ii) rendimentos dos títulos do Tesouro americano de 1 ano.

Os dados macroeconômicos foram extraídos do *Bureau of Economic Analysis* (BEA, <http://www.bea.gov/>). Os dados usados neste estudo foram obtidos nas seguintes tabelas NIPA (*National Income and Product Accounts Tables*):

Série	Tabela NIPA	Linhas
Poupança Privada Bruta (S)	5.1	+ 3 (<i>Net private saving</i>) +14 (<i>Private consumption of capital goods</i>)
Consumo Privado (C)	1.1.5. Anual	+ 2 (<i>Personal consumption expenditure</i>)
Renda Disponível Bruta (YD)		Soma das linhas acima (YD=C+S)

Todas estas séries são nominais, ou seja, expressas em moeda corrente a cada ano entre 1929 e 2004. Neste trabalho optou-se por trabalhar com todos os dados nominais macroeconômicos e financeiros e depois convertê-los por um mesmo índice de preço ao consumidor (CPI) e não pelo deflator implícito do PIB (ou de outra subconta) americano. O índice de preços ao consumidor (CPI, *Consumer Price Index – All Urban Areas*) foi obtido no sítio eletrônico do *Bureau of Labor Statistics* (BLS, <http://www.bls.gov/>).

A população usada para calcular os valores *per capita* foi a estimada para o dia 1º de julho de cada ano pelo *US Census Bureau* (<http://www.census.gov/>).

E, finalmente, os dados sobre as taxas de retorno históricas do S&P Composite ajustados a dividendos foram obtidos no site do Prof. Robert Shiller (<http://www.econ.yale.edu/~shiller/data.htm>), onde ele disponibiliza dados da economia americana desde 1871 e que é freqüentemente atualizado e revisado. O nome do arquivo MS-Excel que contém estes dados é “chapt26.xls”. Neste arquivo também são fornecidas as taxas de juros de curto (1 ano) e longo prazo (10 anos). Para estimar a taxa livre de risco para computar o prêmio de risco do mercado, neste trabalho, é usada a de curto prazo.

Todos os dados coletados estão dispostos na Tabela D.1, no Apêndice D desta tese.

IV.4. RESULTADOS OBTIDOS DENTRO DA ESTRUTURA MEHRA-PRESCOTT

Dos dados coletados foram feitos os cálculos necessários para transformar as séries das variáveis macroeconômicas em termos *per capita* e expressas em dólar de poder aquisitivo constante. Além disso, foram obtidas as taxas reais de retorno, eliminado a influência da inflação. A Tabela D.2., no Apêndice D, apresenta todas as variáveis em termos reais expressas em dólar americano do ano 2000, e as variáveis macroeconômicas também estão em termos *per capita*.

A partir da Tabela D.2. foram calculados os momentos de cada variável, as covariâncias e correlações entre cada par de variáveis, cujos resultados são resumidos na Tabela IV.1.

Tabela IV.1. Momentos do crescimento do consumo, poupança, renda e retornos de ativos

	Taxa de crescimento do consumo <i>per capita</i>	Taxa de crescimento da poupança <i>per capita</i>	Taxa de crescimento da renda disponível <i>per capita</i>	Taxa de retorno anual do S&P500	Taxa de retorno anual de títulos do governo EUA	Prêmio de risco do S&P500 em relação aos títulos do governo EUA
	$\Delta C/C$	$\Delta S/S$	$\Delta YD/YD$	R_M	R_f	$\frac{1 + R_M}{1 + R_f} - 1$
Média	1,92%	3,79%	1,99%	7,88%	1,36%	6,62%
Desvio padrão	3,54%	20,46%	4,84%	18,91%	4,05%	19,22%
Variância	12,55% ²	418,66% ²	23,44% ²	357,73% ²	16,36% ²	369,29% ²
Covariância						
$\Delta C/C$	12,55% ²	29,37% ²	12,75% ²	42,57% ²	-4,16% ²	45,18% ²
$\Delta S/S$	29,37% ²	418,66% ²	84,13% ²	86,70% ²	-33,08% ²	111,80% ²
$\Delta YD/YD$	12,75% ²	84,13% ²	23,44% ²	38,58% ²	-7,80% ²	43,60% ²
R_M	42,57% ²	86,70% ²	38,58% ²	357,73% ²	-4,51% ²	356,12% ²
R_f	-4,16% ²	-33,08% ²	-7,80% ²	-4,51% ²	16,36% ²	-19,50% ²
$[(1+R_M)/(1+R_f)]-1$	45,18% ²	111,80% ²	43,60% ²	356,12% ²	-19,50% ²	369,29% ²
Correlação						
$\Delta C/C$	1	0,47	0,76	0,64	-0,27	0,68
$\Delta S/S$	0,47	1	0,89	0,28	-0,40	0,36
$\Delta YD/YD$	0,76	0,89	1	0,45	-0,38	0,51
R_M	0,64	0,28	0,45	1	-0,05	0,98
R_f	-0,27	-0,40	-0,38	-0,05	1	-0,26
$[(1+R_M)/(1+R_f)]-1$	0,68	0,36	0,51	0,98	-0,26	1,00

Legenda: $5\% = \frac{5}{100} = 0,05$, entretanto $5\%^2 = \frac{5}{100^2} = \frac{5}{10.000} = 0,0005$

Vale a pena notar que, na Tabela IV.1, a taxa de crescimento do consumo ($\Delta C/C$) tem uma correlação com o prêmio de risco das ações ($[(1+R_M)/(1+R_f)]-1$) de 0,68, que é maior do que a correlação entre o prêmio e a taxa de crescimento da poupança ($\Delta S/S$), que é de 0,36. Entretanto, a covariância entre ($[(1+R_M)/(1+R_f)]-1$) e $\Delta C/C$ é de 45,18%², que é menos da metade do que a covariância entre o prêmio e $\Delta S/S$, que é de 111,80%².

Este fato indica que o caminho traçado pelo S-CAPM é promissor, pelo menos como tentativa de solucionar o EPP, uma vez, que muitas vezes a baixa volatilidade histórica do consumo é apontada como a “causa quantitativa” da existência do *Equity Premium Puzzle*.

Vale lembrar que, para deduzir o S-CAPM na seção IV.2, foi assumido que as taxas de retorno e de crescimento da poupança seguem uma distribuição conjunta lognormal. Portanto, é preciso obter os momentos dos logaritmos das taxas de retorno e crescimento da poupança (acrescidos por 1). Estes resultados são apresentados na Tabela IV.2.

Tabela IV.2. Momentos do logaritmo do crescimento do consumo, poupança, renda e retornos de ativos

	Logaritmo natural de 1 + as seguintes taxas					
	Taxa de crescimento do consumo <i>per capita</i>	Taxa de crescimento da poupança <i>per capita</i>	Taxa de crescimento da renda disponível <i>per capita</i>	Taxa de retorno anual do S&P500	Taxa de retorno anual de títulos do governo EUA	Prêmio de risco do S&P500 em relação aos títulos do governo EUA
	ΔC	ΔS	Δyd	r_M	r_f	$r_M - r_f$
Média	1,84%	1,90%	1,85%	5,99%	1,27%	4,72%
Desvio padrão	3,54%	19,49%	4,86%	18,30%	4,01%	18,93%
Variância	12,52% ²	379,77% ²	23,57% ²	335,06% ²	16,12% ²	358,19% ²
Covariância						
ΔC	12,52% ²	32,46% ²	13,08% ²	41,73% ²	-3,88% ²	45,61% ²
ΔS	32,46% ²	379,77% ²	84,49% ²	100,76% ²	-31,19% ²	131,95% ²
Δyd	13,08% ²	84,49% ²	23,57% ²	39,71% ²	-7,47% ²	47,17% ²
r_M	41,73% ²	100,76% ²	39,71% ²	335,06% ²	-3,51% ²	338,57% ²
r_f	-3,88% ²	-31,19% ²	-7,47% ²	-3,51% ²	16,12% ²	-19,62% ²
$r_M - r_f$	45,61% ²	131,95% ²	47,17% ²	338,57% ²	-19,62% ²	358,19% ²
Correlação						
ΔC	1	0,47	0,76	0,64	-0,27	0,68
ΔS	0,47	1	0,89	0,28	-0,40	0,36
Δyd	0,76	0,89	1	0,45	-0,38	0,51
r_M	0,64	0,28	0,45	1	-0,05	0,98
r_f	-0,27	-0,40	-0,38	-0,05	1	-0,26
$r_M - r_f$	0,68	0,36	0,51	0,98	-0,26	1,00

Legenda: $5\% = \frac{5}{100} = 0,05$, entretanto $5\%^2 = \frac{5}{100^2} = \frac{5}{10.000} = 0,0005$

Comparando as Tabelas IV.1 e IV.2 pode-se verificar que as correlações entre as variáveis são praticamente iguais. Entretanto, as variâncias e covariâncias são maiores na Tabela IV.2 (logaritmos), com a exceção da variância da taxa de crescimento do consumo que é ligeiramente menor.

A covariância do prêmio de risco e a taxa de crescimento do consumo ficou praticamente igual à Tabela IV.1, de 45,18%² para 45,61%². Enquanto isso, a covariância da taxa de crescimento da poupança com o prêmio das ações ficou ainda maior, foi para 131,95%², quase três vezes maior do que a covariância com o consumo.

Conforme visto na seção IV.2, o grau de aversão relativa ao risco (γ) compatível para o prêmio de risco histórico das ações pode ser obtido através das equações (IV.27) e (IV.28). Primeiramente será estimado γ através do rearranjo da equação (IV.27):

$$\gamma = \frac{1}{\sigma_{Ms}} \left[E_t (r_{M,t+1} - r_{f,t+1}) + \frac{\sigma_M^2}{2} \right] \quad (IV.29)$$

O problema para se fazer este cálculo é que a “taxa livre de risco”, que teoricamente deveria ter desvio-padrão próximo de zero, tem um valor praticamente 4 vezes maior que a sua média. Assim, γ será estimado usando tanto a covariância do mercado (S&P500) com o logaritmo do crescimento da poupança (σ_{Ms}), como a covariância do prêmio de risco com o logaritmo do crescimento da poupança ($\sigma_{(M-f)s}$). Conseqüentemente, a variância da taxa de retorno do mercado da equação (IV.29) será substituída tanto pelo próprio valor obtido de σ_M^2 como também pela variância do prêmio de risco $\sigma_{(M-f)}^2$.

A Tabela IV.3 mostra o valor estimado para cada combinação entre o valor da covariância (σ_{Ms}) e da variância (σ_M^2) utilizada na equação (IV.29).

Tabela IV.3. Estimativas para o grau de aversão relativa ao risco (γ) pela equação (IV.29)

γ		σ_M^2	
		σ_M^2	$\sigma_{(M-f)}^2$
σ_{Ms}	σ_{Ms}	6,343	6,458
	$\sigma_{(M-f)s}$	4,843	4,931

Os valores em negrito e grifados são aqueles que devem ser aceitos, pois apresentam coerência entre a variância e covariância a ser utilizada na equação IV.29. Mesmo assim, em nenhuma das combinações o grau de aversão relativa ao

risco (γ) se situa fora da faixa em que Mehra e Prescott (1985) estabeleceram como minimamente aceitável, que é entre zero e 10.

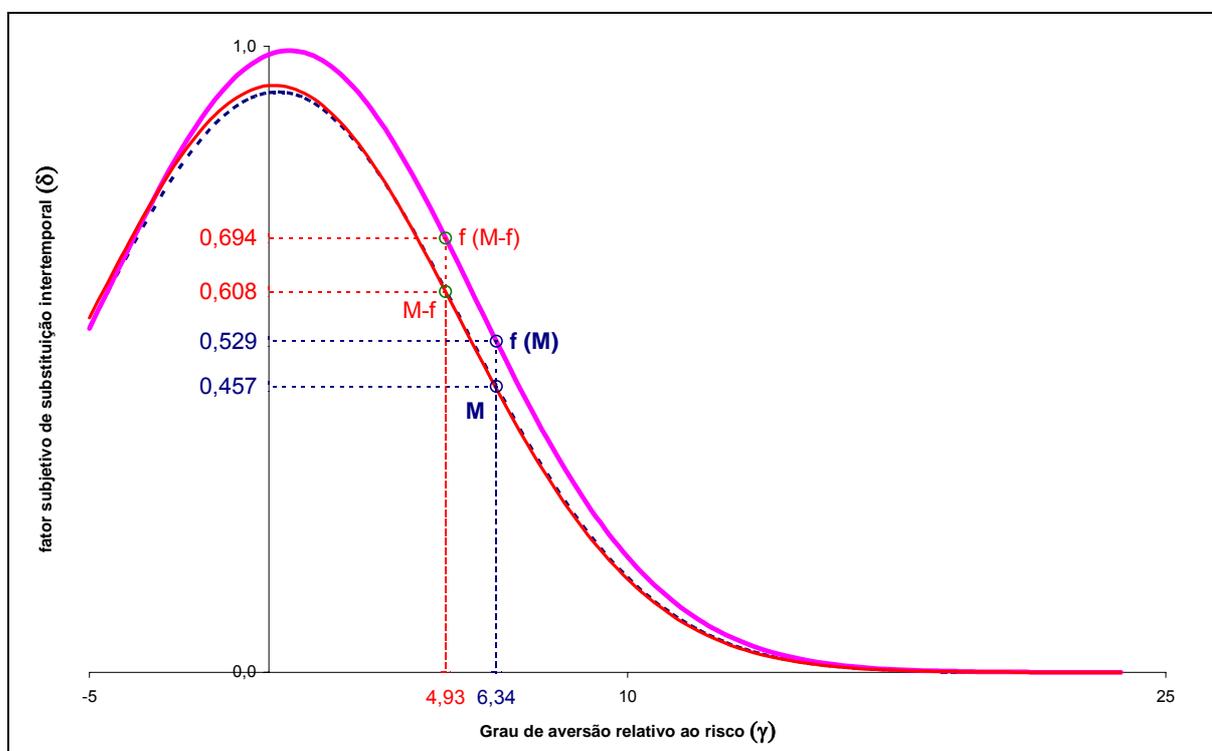
Porém, ainda é necessário verificar se o fator subjetivo de substituição intertemporal (δ) estimado pelas equações (IV.25) e (IV.26) é positivo e menor do que 1. Rearranjando os termos da equação (IV.25), tem-se:

$$\ln \delta = -\frac{\sigma_s^2}{2} \gamma^2 + [E_t(\Delta s_{t+1}) + \sigma_{is}] \gamma - E_t[r_{i,t+1}] - \frac{\sigma_i^2}{2} \quad (IV.30)$$

$$\delta = e^{-\frac{\sigma_s^2}{2} \gamma^2 + [E_t(\Delta s_{t+1}) + \sigma_{is}] \gamma - E_t[r_{i,t+1}] - \frac{\sigma_i^2}{2}}$$

Através da Tabela IV.2, são conhecidas todas as variáveis com exceção de δ e γ . Assim, no Gráfico IV.3 são traçadas as funções $[\delta=f(\gamma)]$ levando em consideração três carteiras de ativos: a carteira do S&P500 (M, linha tracejada em azul escuro), a carteira cujo retorno persegue o prêmio de risco do S&P500 (M-f, em vermelho) e a carteira de ativos “livre de risco” (f, em rosa). A curva do prêmio de risco e do S&P500 estão muito próximas, abaixo da curva da carteira “livre de risco”.

Gráfico IV.3. Relações entre γ e δ através da equação (IV.30)



Inserindo os valores de γ , da Tabela IV.3., na equação (IV.30) obtém-se os valores de δ , conforme mostrados no Gráfico IV.3.

Vale notar que, em todo o espectro possível do grau de aversão relativa ao risco (γ) e em todas as carteiras analisadas, o fator subjetivo de substituição intertemporal (δ) não é maior do que 1. Este fato, praticamente, elimina a possibilidade de haver o chamado *Riskfree Rate Puzzle* (Enigma da Taxa Livre de Risco) no modelo S-CAPM. Este “novo” enigma surge quando $\delta > 1$, que é um paradoxo, pois subjetivamente os agentes estariam descontando as utilidades esperadas futuras com uma taxa negativa. Ou seja, o valor presente da utilidade esperada de consumir R\$1,00 no futuro seria maior do que R\$1,00! O Gráfico IV.3 é uma evidência de que, dada a amostra utilizada nesta tese, não foi detectado nenhum problema relacionado ao *Riskfree Rate Puzzle*.

Agora serão obtidos os valores de γ a partir da equação (IV.28). Rearranjando esta equação tem-se:

$$\gamma = \frac{1}{\sigma_{Ms}} \ln E_t \left[\frac{1 + R_{M,t+1}}{1 + R_{f,t+1}} \right] \quad (IV.31)$$

Consultando a Tabela IV.1 pode-se ver que o valor estimado para $E_t \left[\frac{1 + R_{M,t+1}}{1 + R_{f,t+1}} \right]$ é de 1,0602. Usando as mesmas definições da covariância da Tabela IV.3, chega-se à Tabela IV.4:

Tabela IV.4. Estimativas para o grau de aversão relativa ao risco (γ) pela equação (IV.30)

		γ
σ_{Ms}	σ_{Ms}	6,187
	$\sigma_{(M-f)s}$	4,725

Os valores estimados para γ continuam dentro da faixa estabelecida de zero a dez.

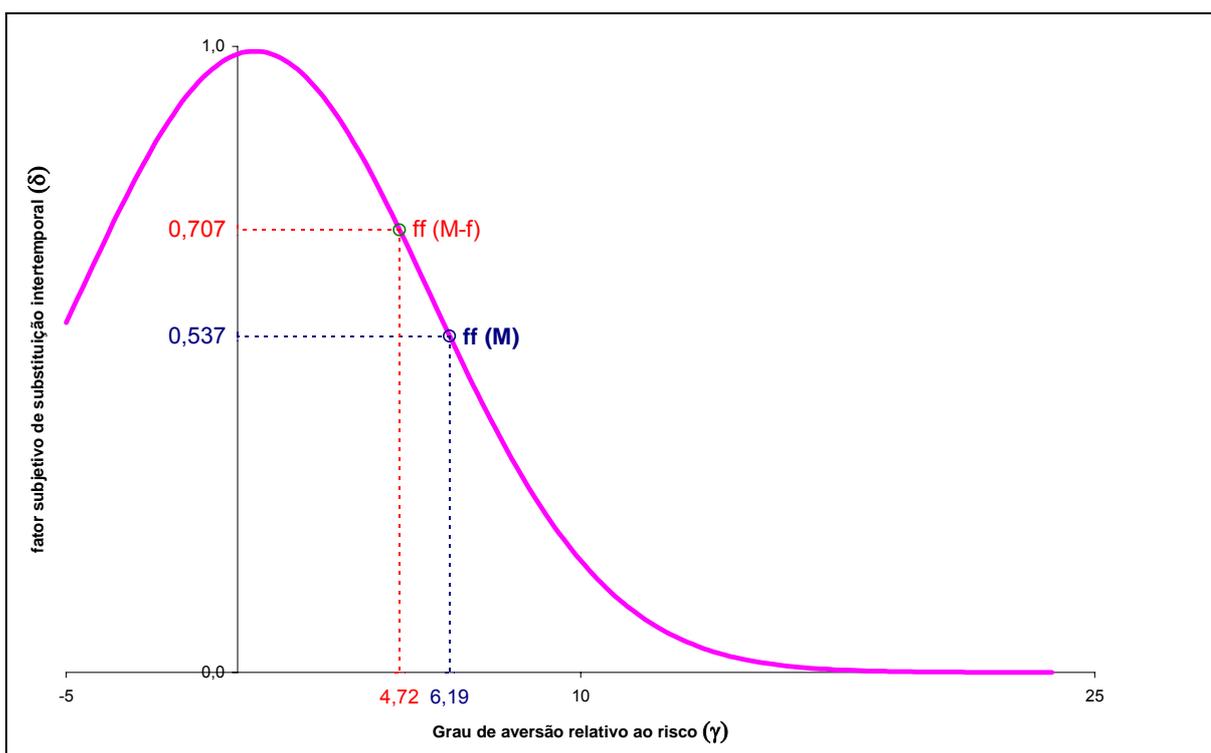
Agora serão estimados os fatores subjetivos de substituição intertemporal através da equação (IV.26), que despreza os termos de variância e covariância envolvendo a carteira livre de risco. Rearranjando (IV.26), tem-se:

$$\ln \delta = -\frac{\sigma_s^2}{2} \gamma^2 + E_t[\Delta s_{t+1}] \gamma - r_{f,t+1} \quad (\text{IV.32})$$

$$\delta = e^{-\frac{\sigma_s^2}{2} \gamma^2 + E_t[\Delta s_{t+1}] \gamma - r_{f,t+1}}$$

O Gráfico IV.4 mostra os possíveis valores de δ a em função de γ através da equação (IV.32). E, além disso, são mostrados os valores de δ correspondentes aos valores de γ obtidos da Tabela IV.4. Usando-se o γ obtido com a carteira S&P500 ($\gamma = 6,187$), obtém-se um valor de δ igual a 0,537. E se for usado o γ obtido com a carteira que persegue o prêmio de risco ($\gamma = 4,725$), obtém-se $\delta = 0,707$.

Gráfico IV.4. Relação entre γ e δ através da equação (IV.32)



Da mesma forma que o Gráfico IV.3, o Gráfico IV.4 mostra que δ é sempre menor do que 1. Portanto, o *Riskfree Rate Puzzle* tampouco surge pela equação (IV.32) e pelos dados amostrais.

Nesta seção, obtiveram-se estimativas para o grau de aversão relativa ao risco (γ) da função utilidade de poupar, que variam de 4,72 a 6,34. Portanto, os valores obtidos estão dentro da faixa $0 < \gamma < 10$ estabelecida por Mehra e Prescott (1985). Vale salientar que os valores estimados para o fator subjetivo de substituição intertemporal (δ) também se situaram na faixa “racional” ($0 < \delta < 1$), mais precisamente entre 0,457 e 0,707.

Vale a pena lembrar que, o grau de aversão relativa ao risco da função de utilidade da riqueza (α) deve ser menor do que γ , dada a equação (IV.19), que diz que $\alpha = \gamma(s_t/w_t)$, e desde que $0 < (s_t/w_t) < 1$. Assim, se os agentes são avessos ao risco e se a equação (IV.19) e o pressuposto de que $0 < (s_t/w_t) < 1$ são verdadeiros, então pode-se afirmar que $0 < \alpha < \gamma$, ou mais precisamente: $0 < \alpha < 6,34$

Apesar do aparente sucesso do S-CAPM em solucionar o *equity premium puzzle*, ainda é necessário validá-lo. Esta validação é feita na próxima seção baseada no trabalho de Hansen e Jagannathan (1991), que foi estudado na seção III.3.

Vale a pena lembrar que os resultados obtidos nesta seção estão condicionados ao pressuposto de que as taxas de retorno dos ativos e as taxas de crescimento da poupança sigam uma distribuição conjunta lognormal. Como a metodologia Hansen-Jagannathan não faz uso de nenhum pressuposto a respeito de parametrização da função de utilidade, e tampouco de sua distribuição de probabilidade, ela pode ser considerada como um bom teste para validar não só os valores obtidos nesta seção, mas, principalmente, os pressupostos do S-CAPM.

IV.5. IMPLICAÇÕES DO S-CAPM NA ABORDAGEM HANSEN-JAGANNATHAN

Nesta seção busca-se validar os pressupostos do S-CAPM dentro da estrutura metodológica desenvolvida por Hansen e Jagannathan (1991). A validação será feita através da confrontação das implicações do S-CAPM em relação ao limite inferior de volatilidade do fator de desconto estocástico (M_{t+1}^*), que foi desenvolvido pelos autores citados e foi revisado nesta tese na seção III.3.

Conforme visto na seção III.3, o fator de desconto estocástico intertemporal (M) foi definido como:

$$M_{t+1} = \left(\delta \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \right) \quad (\text{IV.33})$$

No contexto do S-CAPM ele deve ser redefinido da seguinte forma:

$$M_{t+1} = \left(\delta \frac{U'(S_{t+1})}{U'(S_t)} \right) \quad (\text{IV.34})$$

E a condição de primeira ordem para a maximização da utilidade intertemporal de Lucas (1978) pode ser representada desta forma:

$$1 = E_t \left[(1 + R_{t,t+1}) M_{t+1} \right] \quad (\text{IV.35})$$

Entretanto, o fator de desconto estocástico de mínima variância (M_{t+1}^*), além de respeitar estas duas relações acima, é definido pela equação (III.27), que é reescrita aqui:

$$M_{t+1}^* = \bar{M} + (\mathbf{R}_{t+1} - E[\mathbf{R}_{t+1}])' \boldsymbol{\beta}_{\bar{M}} \quad (\text{IV.36})$$

Com exceção de \bar{M} todos os argumentos de M_{t+1}^* , conforme definidos na seção III.3, podem ser calculados com base em dados históricos do mercado de capitais. Portanto, antes de estimar M_{t+1}^* é necessário estimar \bar{M} .

Vale lembrar que $E(M_{t+1}^*) = \bar{M} = E(M_{t+1})$. Desta forma, é possível estimar \bar{M} a partir de “qualquer” candidato a fator de desconto estocástico M_{t+1} que respeite as equações (IV.34) e (IV.35). Assumindo que $U(S_t)$ seja do tipo CRRA, a equação (IV.34) fica:

$$M_{t+1} = \left[\delta \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right)^{-\gamma} \right] \quad (\text{IV.37})$$

E como é assumido que δ é constante, tem-se:

$$E(M_{t+1}) = \delta E \left[\left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right)^{-\gamma} \right] \quad (\text{IV.38})$$

Para cada valor do grau de aversão relativa ao risco de poupar (γ), é calculado uma série histórica da taxa de crescimento da poupança elevado a $-\gamma$ e, finalmente, se obtém o valor esperado desta série: $E \left[(S_{t+1}/S_t)^{-\gamma} \right]$. Porém, resta ainda o problema de como determinar δ .

Poderia ter sido obtido um fator subjetivo de substituição intertemporal (δ) para cada ativo i , através do rearranjo da condição de primeira ordem (IV.35) e da equação (IV.37):

$$\delta = \frac{1}{E_t \left[(1 + R_{i,t+1}) \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right)^{-\gamma} \right]} \quad (\text{IV.39})$$

Neste caso se obteria três δ e três \bar{M} , pois para cada ativo se obteria uma equação onde δ (e conseqüentemente \bar{M}) é uma função de γ .

Nesta tese, optou-se por usar uma função matricial para se obter tanto as séries de M_{t+1}^* como de M_{t+1} , levando em consideração as taxas de retorno do índice S&P500 e dos títulos do governo e a matriz de covariância (Ω) entre elas. A carteira que procura ter um retorno idêntico ao prêmio de risco não será incluída, pois caso o fosse, a matriz de covariância (Ω) seria singular, ou seja, ela não poderia ser invertida (Ω^{-1}). Esta impossibilidade de se inverter uma matriz, na álgebra linear, é semelhante à impossibilidade de se dividir qualquer número por zero, na álgebra escalar.

A seguir será estimado o parâmetro δ , que será único para toda a economia, em cada nível de γ . Da seção III.3, sabe-se que a versão matricial da equação (IV.35), que é a condição de primeira ordem de Lucas (1978), é a seguinte:

$$\mathbf{v} = E \left[(\mathbf{v} + \mathbf{R}_{t+1}) M_{t+1} \right] \quad (\text{IV.40})$$

Entretanto, a média amostral muito provavelmente apresenta erros. Desta forma, ε representa o vetor (2x1) de erros das médias amostrais:

$$\mathbf{v} = E\left[(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1})M_{t+1}\right] + \varepsilon \quad (\text{IV.41})$$

Substituindo (IV.37) em (IV.41), tem-se:

$$\mathbf{v} = \delta E\left[(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1})\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)^{-\gamma}\right] + \varepsilon \quad (\text{IV.42})$$

Outra forma de representar (IV.42) seria:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} E\left[(t + R_{S\&P,t+1})(S_{t+1}/S_t)^{-\gamma}\right] \\ E\left[(t + R_{T\text{-}bill,t+1})(S_{t+1}/S_t)^{-\gamma}\right] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{S\&P} \\ \varepsilon_{T\text{-}bill} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.43})$$

Isolando o vetor de erros de (IV.42), e em seguida elevando ao quadrado ambos os lados da equação tem-se:

$$\varepsilon'\varepsilon = \left(\mathbf{v} - \delta E\left[(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1})\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)^{-\gamma}\right]\right)' \left(\mathbf{v} - \delta E\left[(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1})\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)^{-\gamma}\right]\right) \quad (\text{IV.44})$$

Desenvolvendo o lado direito de (IV.44), chega-se a:

$$\varepsilon'\varepsilon = \mathbf{v}'\mathbf{v} - 2\delta \left(E\left[(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1})\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)^{-\gamma}\right]\right)' \mathbf{v} + \delta^2 \left(E\left[(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1})\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)^{-\gamma}\right]\right)' \left(E\left[(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1})\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)^{-\gamma}\right]\right) \quad (\text{IV.45})$$

Assumindo que o valor de δ é um parâmetro que minimiza os erros das médias amostrais, este parâmetro será estimado de forma análoga ao vetor de coeficientes em um regressão de mínimos quadrados. Assim, derivando a variância dos erros (IV.45) em função de δ e igualando a zero, tem-se:

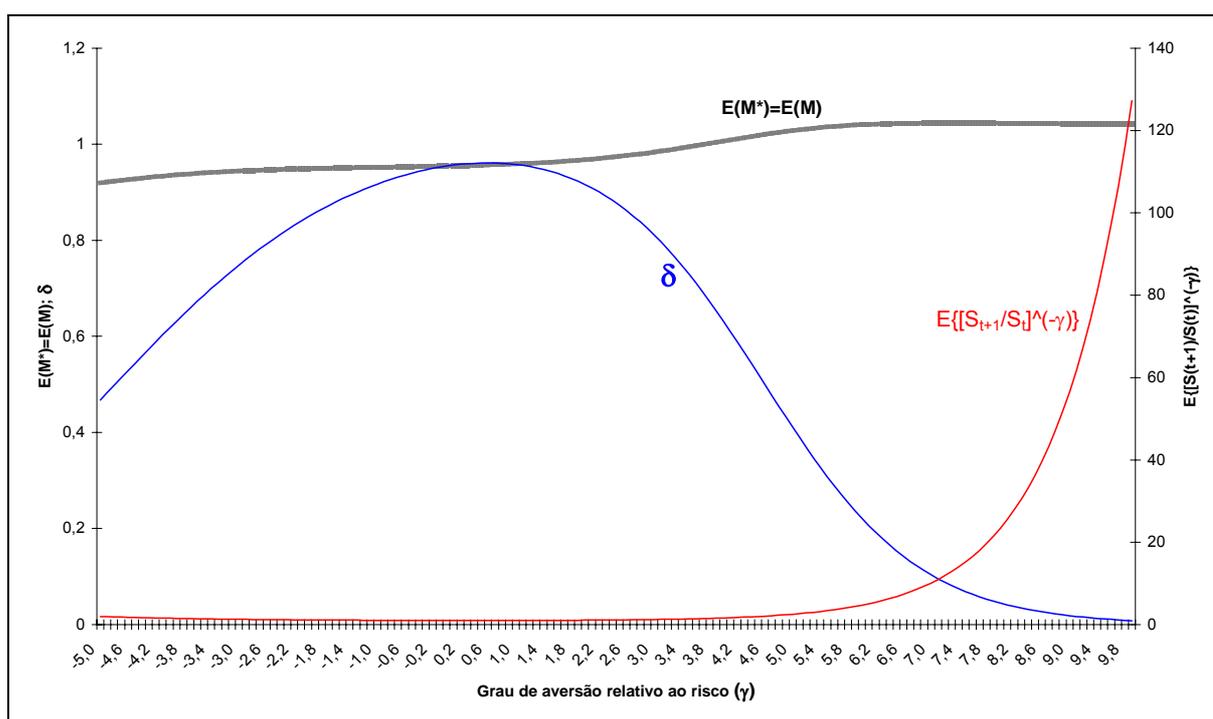
$$\frac{\partial(\varepsilon'\varepsilon)}{\partial\delta} = -2 \left(E\left[(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1})\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)^{-\gamma}\right]\right)' \mathbf{v} + 2\delta \left(E\left[(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1})\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)^{-\gamma}\right]\right)' \left(E\left[(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1})\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)^{-\gamma}\right]\right) = 0 \quad (\text{IV.46})$$

E, desta forma, δ é estimado através desta equação:

$$\delta = \frac{\left(E \left[(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1}) \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right)^{-\gamma} \right] \right)' \mathbf{1}}{\left(E \left[(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1}) \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right)^{-\gamma} \right] \right)' \left(E \left[(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1}) \left(\frac{S_{t+1}}{S_t} \right)^{-\gamma} \right] \right)} \quad (\text{IV.47})$$

Assim, o valor de δ é uma função de γ condicionado aos dados históricos amostrais das taxas de retorno e do crescimento da poupança. Uma vez estimado δ , ele é inserido na equação (IV.38) obtendo-se $\bar{M} = E(M_{t+1}^*) = E(M_{t+1})$. O Gráfico IV.5 retrata a relação entre γ , δ , $E \left[(S_{t+1}/S_t)^{-\gamma} \right]$ e \bar{M} .

Gráfico IV.5. Relação entre γ , δ , \bar{M} e $E \left[(S_{t+1}/S_t)^{-\gamma} \right]$



Vale notar que, no Gráfico IV.5, o eixo Y (“normal”, da esquerda) se refere aos valores de δ e \bar{M} . E o segundo eixo Y (do lado direito) se refere aos valores de $E \left[(S_{t+1}/S_t)^{-\gamma} \right]$. É interessante observar neste gráfico que, apesar de haver uma forte

oscilação de δ e de $E\left[(S_{t+1}/S_t)^{-\gamma}\right]$, \bar{M} se mostra relativamente pouco sensível às variações de γ .

A partir destes parâmetros também é possível obter toda a série histórica do fator de desconto estocástico (M_{t+1}), através da equação (IV.37), e, conseqüentemente, todos os seus momentos em função do nível de aversão relativa ao risco (γ).

Uma vez determinado a metodologia de se “construir” séries históricas e os momentos de M_{t+1} em função de γ , ainda é necessário obter a série do fator de desconto estocástico de mínima volatilidade (M_{t+1}^*). Este fator M_{t+1}^* é obtido através dos dados históricos do mercado e será usado como parâmetro de validação da série de M_{t+1} , que foi obtida pela abordagem do S-CAPM.

Substituindo a equação (III.32) em (IV.36), tem-se:

$$M_{t+1}^* = \bar{M} + (\mathbf{R}_{t+1} - E[\mathbf{R}_{t+1}])' \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\mathbf{1} - \bar{M}E[\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1}]) \quad (\text{IV.48})$$

A partir dos dados da Tabela IV.1, ou seja, de dados históricos do mercado, pode-se mostrar qual é a matriz de covariância ($\boldsymbol{\Omega}$) usada na estimação das séries de M_{t+1}^* :

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0,0358 & -0,0005 \\ -0,005 & 0,0016 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\Omega}^{-1} = \begin{pmatrix} 28,05 & 7,73 \\ 7,73 & 613,22 \end{pmatrix}$$

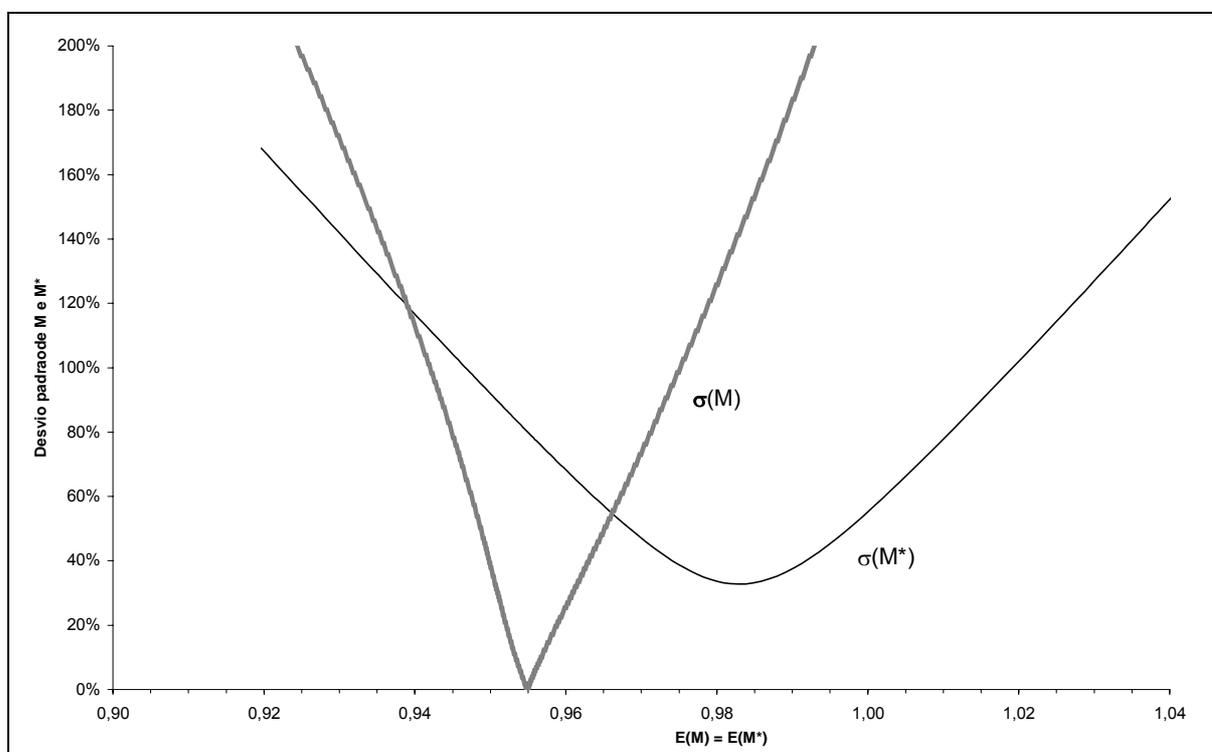
E o vetor dos retornos esperados é:

$$E(\mathbf{R}_{t+1}) = \begin{pmatrix} 0,0788 \\ 0,0136 \end{pmatrix} \rightarrow E(\mathbf{1} + \mathbf{R}_{t+1}) = \begin{pmatrix} 1,0788 \\ 1,0136 \end{pmatrix}$$

Desta forma, com os dados históricos do mercado e a estimação de \bar{M} (em função de γ) é possível estimar as séries “históricas” de M_{t+1} e M_{t+1}^* , e seus respectivos momentos em função do grau de aversão relativa ao risco (γ).

No Gráfico IV.6. é mostrada a relação entre o fator de desconto estocástico médio $\left[\bar{M} = E(M_{t+1}^*) = E(M_{t+1}) \right]$ e os desvios padrões de M_{t+1} e M_{t+1}^* .

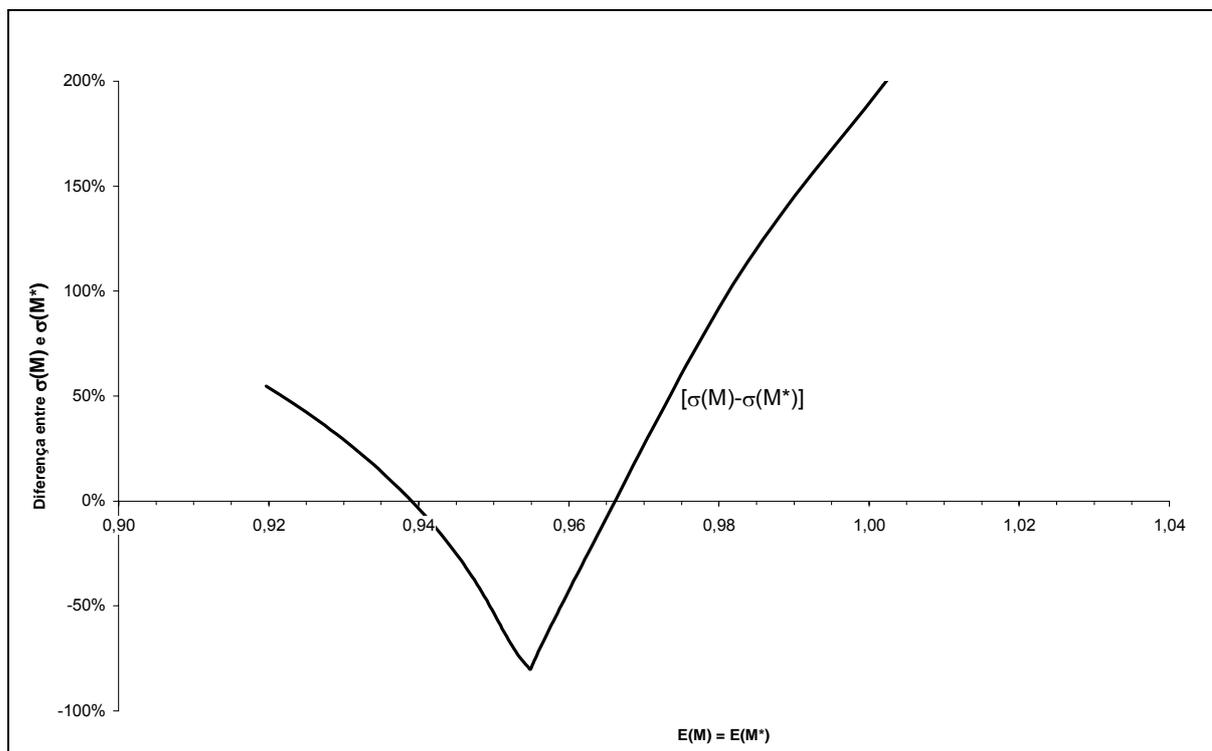
Gráfico IV.6. Relação entre \bar{M} , $\sigma(M_{t+1})$ e $\sigma(M_{t+1}^*)$



Ao se analisar o Gráfico IV.6 pode-se verificar que o valor de \bar{M} não deve se situar dentro do intervalo de aproximadamente 0,94 e 0,97. Pois, nesta faixa, $\sigma(M_{t+1})$ é menor do que $\sigma(M_{t+1}^*)$, que por definição é o limite inferior de volatilidade.

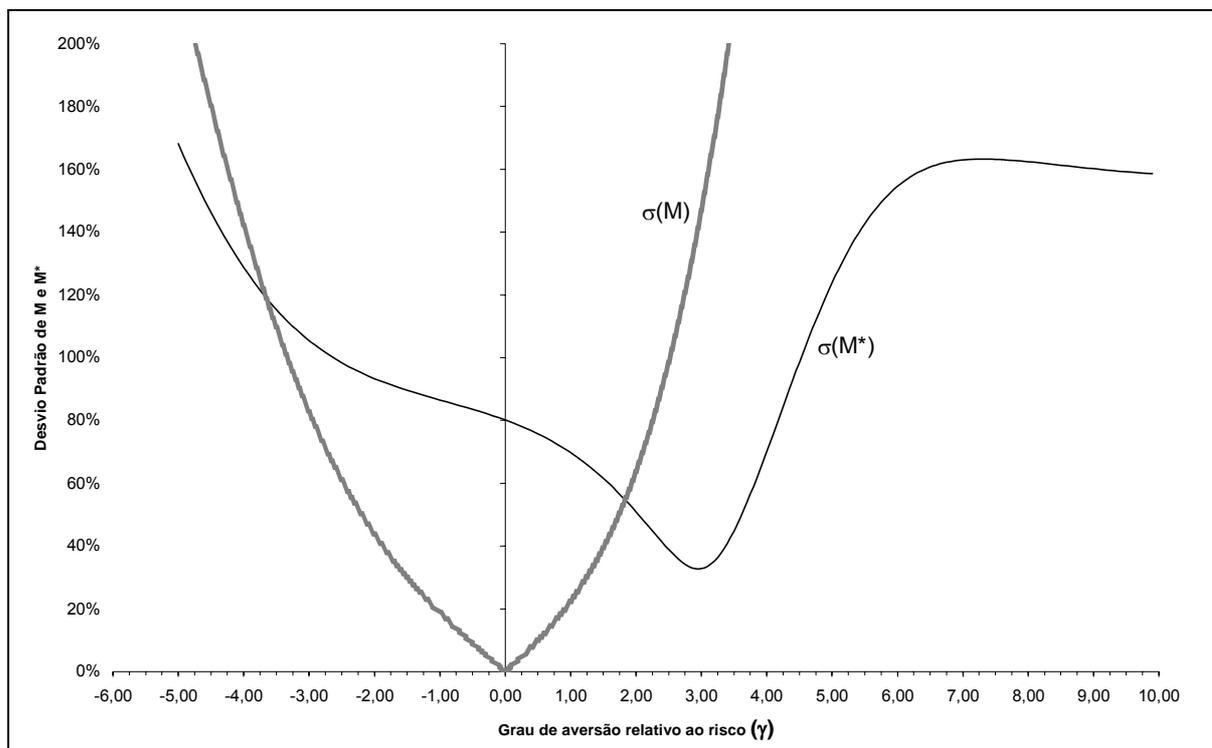
Para que se possa verificar estes valores de modo mais fácil, o Gráfico IV.7 relaciona \bar{M} e a diferença entre $\sigma(M_{t+1})$ e $\sigma(M_{t+1}^*)$. Somente na região onde $\left[\sigma(M_{t+1}) - \sigma(M_{t+1}^*) \right]$ seja positiva é que \bar{M} pode se situar em uma região possível. Portanto, interpretando o Gráfico IV.7, não se pode esperar que \bar{M} se situe entre 0,94 e 0,965.

Gráfico IV.7. Relação entre \bar{M} e $[\sigma(M_{t+1}) - \sigma(M_{t+1}^*)]$



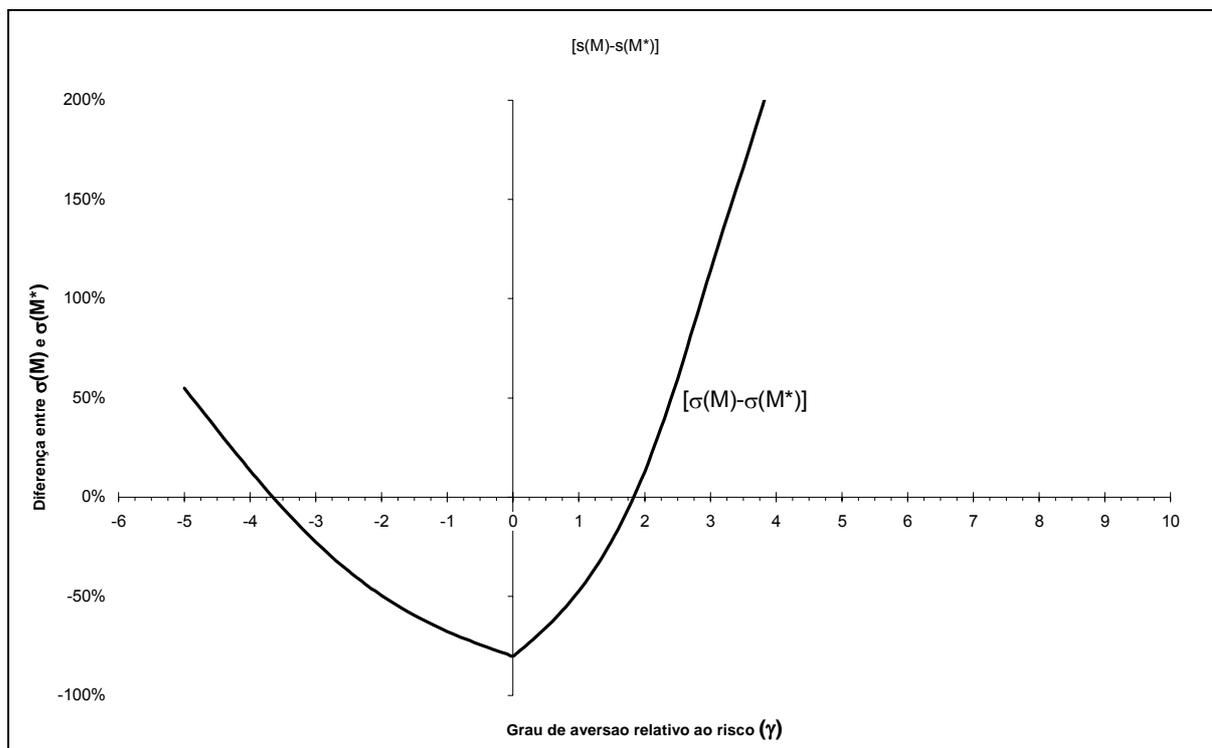
Agora serão apresentados gráficos que mostram a relação entre o grau de aversão relativa ao risco (γ) e os desvios padrões de M_{t+1} e M_{t+1}^* . No Gráfico IV.8 pode-se verificar que há intervalos onde γ não se situa em uma região possível. Os intervalos possíveis para γ são estabelecidos quando os desvios padrões correspondentes M_{t+1} são menores do que os desvios padrões correspondentes de M_{t+1}^* .

Gráfico IV.8. Relação entre γ , $\sigma(M_{t+1})$ e $\sigma(M_{t+1}^*)$



O Gráfico IV.9 foi feito para facilitar a identificação dos intervalos possíveis de γ . Neste gráfico é mostrada a relação entre γ e a diferença dos desvios padrões de M_{t+1} e M_{t+1}^* .

Gráfico IV.9. Relação entre γ , $[\sigma(M_{t+1}) - \sigma(M_{t+1}^*)]$



Neste gráfico pode-se constatar que γ não pode ser válido dentro do intervalo entre -3,75 e +1,80. Assumindo que os agentes são avessos ao risco, $\gamma=1,80$ é o limite inferior do grau de aversão relativa ao risco da função da utilidade da poupança.

Portanto, a metodologia de validação desenvolvida nesta seção, a partir do trabalho de Hansen e Jagannathan (1991), não invalidou os resultados obtidos na seção IV.4.

V. CONCLUSÃO E SUGESTÕES DE NOVOS ESTUDOS

Os principais estudos baseados no modelo C-CAPM partem de pressupostos conflitantes. Assumiam que a economia era não-monetária, só havia trocas de bens perecíveis, e que os mercados financeiros e de mercadorias chegavam simultaneamente a um equilíbrio. A partir destes pressupostos, o C-CAPM tentava explicar o comportamento do mercado financeiro altamente sofisticado, que está inserido em uma economia aberta, com governo e que produz uma gama de produtos e serviços ilimitada, a partir do paradigma da economia não monetária idealizado por Lucas (1978).

O modelo proposto por esta tese, o S-CAPM, deixou de assumir o pressuposto de uma economia não-monetária de subsistência, onde não havia possibilidade de poupar e conseqüentemente de acumular riqueza. E, conseqüentemente, passou a analisar as principais mudanças no problema de maximização da utilidade intertemporal dos agentes quando se considera uma economia moderna. Partindo do ponto de vista de um agente privado, que tem que decidir em cada momento o quanto irá consumir e poupar da sua renda disponível, verificou-se que a utilidade marginal a consumir era igual a de poupar. Com esta nova abordagem, a utilidade (total e marginal) da riqueza deixa de ser igual á utilidade (total e marginal) de consumir.

As implicações do S-CAPM são derivadas desta mudança dos pressupostos. De um modo geral, o S-CAPM mostrou-se uma abordagem promissora para solucionar o *equity premium puzzle*. Entretanto, não se pode afirmar desde já que seja “a solução” ou até mesmo que seja “uma solução”, pois, ainda são necessários muitos estudos confirmando os resultados apresentados aqui. Os estudos futuros devem ampliar as características da amostra, tais como:

- ✓ Taxas trimestrais de retorno e de crescimento da poupança privada bruta
- ✓ Aplicar o S-CAPM em outras economias além dos EUA

- ✓ Ampliar a gama de ativos financeiros dentro da amostra
- ✓ Incluir ativos não financeiros, como imóveis residenciais

Além disso, seria muito interessante estudar como a crescente integração dos mercados financeiros internacionais pode estar influenciando a capacidade do S-CAPM em retratar os dados históricos dos mercados. Possivelmente, será necessário construir o S-CAPM a partir de contas sociais não de um país isolado, mas sim de um bloco de países, devido a facilidade de transferência de riqueza, e conseqüentemente de poupança entre seus cidadãos.

Entretanto, há uma questão levantada por esta tese de que há uma inter-relação entre o grau de aversão relativa ao risco da poupança (γ) e o da riqueza (α), que merece ser estudado mais profundamente.

Olhando para os Gráficos IV.3 e IV.4, uma pergunta pode surgir: *por que os valores de γ e δ podem ser tão diferentes dependendo de qual ativo ou carteira se está utilizando na estimação?* Possivelmente porque γ (e/ou δ) não deve ser constante ao longo do tempo, contrariando o pressuposto do C-CAPM de que a utilidade de poupar é do tipo CRRA. A relação entre o logaritmo da riqueza e o logaritmo da poupança deve provocar alguma variação em γ [reveja a equação (IV.19)]. Se isto for verdade, em determinados níveis de riqueza, pode haver uma preferência maior por uma carteira menos (ou mais) arriscada do que a chamada “carteira do mercado”, cuja *proxy* mais utilizada para o mercado americano é o índice S&P500.

Mesmo que a função utilidade da poupança não siga CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*), a função utilidade da riqueza pode. Neste caso, o grau de aversão relativa ao risco da função utilidade da riqueza (α) é uma função tanto do grau de aversão relativa ao risco da utilidade de poupar (γ) assim como da razão entre os logaritmos da poupança (s) e da riqueza (w). Conforme a equação (IV.19):

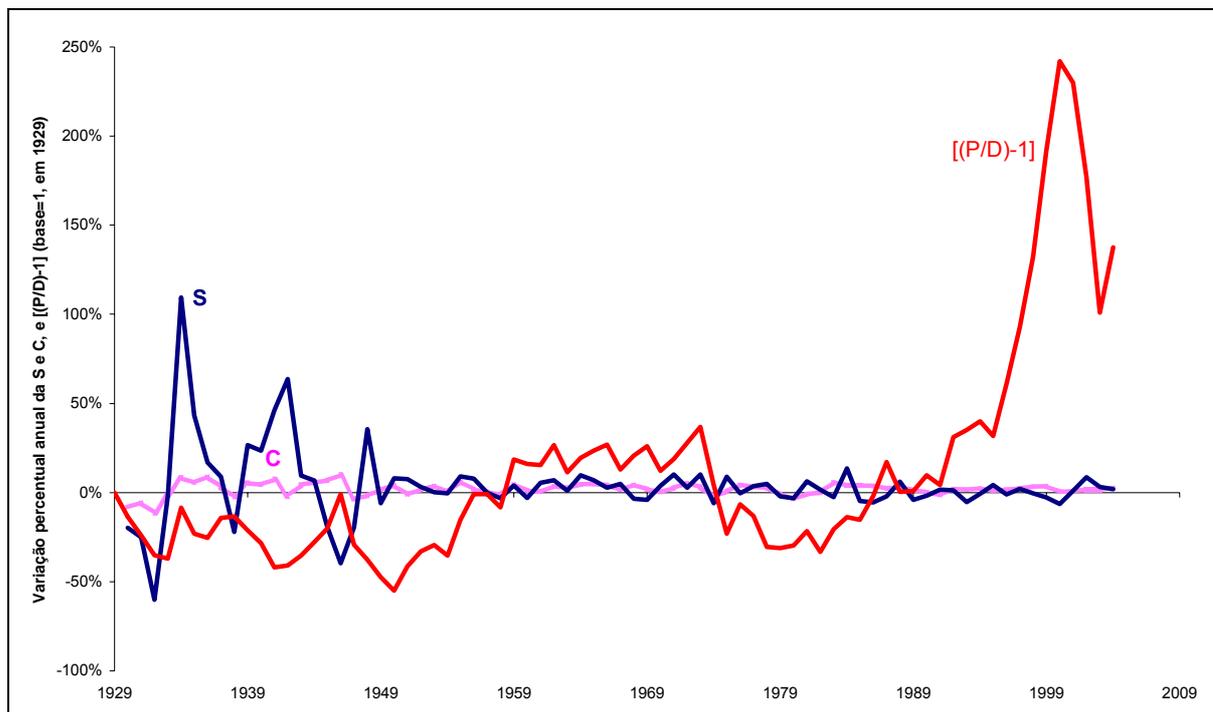
$$\alpha = \gamma \left(\frac{s_t}{w_t} \right) \quad (\text{V.1})$$

Ou seja, se α é para ser mais estável do que γ , tem que haver uma compensação entre este último parâmetro e a razão entre s e w .

A “causa quantitativa” do S-CAPM se mostrar como potencialmente capaz de solucionar o *equity premium puzzle* está no fato da taxa de crescimento da poupança (S) ter apresentado, historicamente, uma volatilidade maior do que a série de crescimento do consumo (C). Entretanto, dentro da amostra analisada nesta tese, a volatilidade da poupança foi significativamente maior do que o consumo entre 1929 e 1950. De 1950 até 2004, a volatilidade da poupança pode não ter sido suficiente para explicar, sozinha, o comportamento do mercado acionário americano. Com a diminuição da volatilidade da taxa de crescimento da poupança, γ deve ter aumentado o seu valor neste período pós II guerra mundial, e ao mesmo tempo a riqueza deve ter aumentado em relação ao nível corrente de poupança *per capita*. Esta tese não foi capaz de estabelecer esta relação de forma inequívoca, mas o Gráfico V.1 é uma tentativa de ilustrar esta intuição.

O Gráfico V.1. foi construído partindo do pressuposto de que a relação entre o nível de riqueza e de poupança se dá de uma forma semelhante da relação entre o valor de mercado do índice S&P500 (P), ao final de cada ano, e os dividendos pagos pelas ações que compõem este índice, ao longo desses anos. A partir daí, é possível intuir que pode haver um mecanismo de compensação entre volatilidade da taxa de crescimento da poupança e o nível de riqueza relativo à poupança.

Gráfico V.1. Variação percentual anual da poupança (S), consumo (C) e a relação [(P/D)-1] do índice S&P500, P/D = 1 em 1929 (base).



A razão entre o valor de mercado do índice S&P500 (P) no final de 1929 (ano base) e os dividendos pagos (D) pelas ações que compunham o índice neste ano foi estabelecido com o valor de 1. A partir daí, o aumento (ou diminuição) percentual anual era incorporado neste número índice (P/D). De modo a facilitar a comparação visual entre esta série e as variações percentuais anuais da poupança e do consumo, foi subtraído 1 (ou 100%) de todos os valores da série histórica P/D. É por isso que, em 1929, o índice P/D apresenta o valor 0%.

Vale lembrar que nem toda a riqueza (*per capita*) da economia americana pode ser representada por um índice de ações. Talvez a riqueza mantida sob a forma de imóveis residenciais e outros bens duráveis, não tão líquidos e padronizados como os ativos financeiros, possam responder por grande parte da riqueza *per capita* americana.

Enfim, o S-CAPM pode representar um avanço no estudo do comportamento dos agentes e suas implicações sobre a dinâmica dos mercados financeiros, mas ainda há muito a ser estudado.

REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

- ALTUG, S.J. (1983). *Gestation lags and the business cycle: An empirical analysis*. Carnegie-Mellon working paper, Presented at the Econometric Society meeting, Stanford University (Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA) apud MEHRA e PRESCOTT (1985). *The Equity Premium: A Puzzle*. Journal of Monetary Economics, vol.15, 145-161.
- ARROW, K.J. (1971). *Essays in the theory of risk-bearing* (North-Holland, Amsterdam) apud MEHRA e PRESCOTT (1985). *The Equity Premium: A Puzzle*. Journal of Monetary Economics, vol.15, 145-161.
- BODIE, Zvi; KANE, Alex e MARCUS, Alan J. (1996). *Investments*. (3rd Edition) Irwin.
- BONOMO, Marco e DOMINGUES, Gabriela Bertol (2002). *Os puzzles invertidos no mercado brasileiro de ativos*. Capítulo 5 do livro: BONOMO, Marco (Org.) *Finanças Aplicadas ao Brasil*. Rio de Janeiro, Editora FGV (2002).
- BRANSON, William H. (1989). *Macroeconomic Theory and Policy*. Addison Wesley Longman 3rd.edition.
- BREEDEN, Douglas (1979). *An Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment Opportunities*. Journal of Financial Economics vol. 7, p. 265-296
- BREEDEN, Douglas T.; GIBBONS, Michael R. e LITZENBERGEN, Robert H. (1989). *Empirical Tests of the Consumption-Oriented CAPM*. Journal of Finance. (June, 1989).
- BREEDEN, Douglas (1989). *Intertemporal Portfolio Theory and Asset Pricing*, Capítulo do Livro *The New Palgrave Finance*, The Macmillan Press Limited, 1989
- BROWN, S. GOETZMANN e ROSS, S. (1995). *Survival*. Journal of Finance, vol 50, no. 2 (Junho)
- CAMPBELL, John Y.; COCHRANE, John H. (1995). *By Force of Habit: A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior*. Unpublished paper, Harvard University and University of Chicago.

- CAMPBELL, John Y.; COCHRANE, John H. (1999). *By Force of Habit: A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior*. Journal of Political Economy, vol 107, nº. 2.
- CAMPBELL, John Y.; COCHRANE, John H. (2000). *Explaining the Poor Performance of Consumption-Based Asset Pricing*. Journal of Finance, vol 55, nº. 6 (Dec.2000).
- CAMPBELL, John Y.; LO, Andrew W. e MACKINLAY, A. Craig (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.
- CAMPBELL John Y.;e MANKIW, N. Gregory (1989). Consumption, Income, and Interest Rates: Reinterpreting the Time Series Evidence. NBER Macroeconomics Annual, 1989, apud DORNBUSCH, Rudiger, FISCHER, Stanley e STARZ, Richard (1998). *Macroeconomics*. Irwin McGraw-Hill, 7th. edition.
- CATALÃO, André Borges e YOSHINO, Joe A. (2004). *The Equity Premium Puzzle: Brasil e Estados Unidos*. Universidade de São Paulo, FEA - Economia e FEA-IME, Mestrado Profissionalizante: Modelagem Matemática em Finanças (Abril 2004).
- CONSTANTINIDES, George M.; DONALDSON, John B. e MEHRA, Rajnish (2002). *Junior Can't Borrow: A New Perspective on the Equity Premium Puzzle*. The Quarterly Journal of Economics, February 2002
- CUTHBERTSON, Keith e NITZSCHE, Dirk (2004). *Quantitative Financial Economics*. John Wiley & Sons, Ltd – 2nd Edition.
- DORNBUSCH, Rudiger, FISCHER, Stanley e STARZ, Richard (1998). *Macroeconomics*. Irwin McGraw-Hill, 7th. edition.
- EPSTEIN, Larry G. e ZIN, Stanley E. (1989). *Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework*. Econometrica, vol. 57, No. 4, (Jul. 1989) p. 937-969

- EPSTEIN, Larry G. e ZIN, Stanley E. (1991). *Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: An Empirical Analysis*. Journal of Political Economy, vol. 99, No. 2, (1991) p. 937-969
- FRIEDMAN, Milton (1957). *A Theory of the Consumption Function*. Princeton University Press apud BRANSON, William H. (1989). *Macroeconomic Theory and Policy*. Addison Wesley Longman 3rd.edition.
- FRIEND, I. e BLUME, M. E. (1975) *The demand for risky assets*. American Economic Review 65, 900-922, apud MEHRA e PRESCOTT (1985). *The Equity Premium: A Puzzle*. Journal of Monetary Economics, vol.15, 145-161.
- GREENE, William H. (1997). *Econometric Analysis*. Prentice Hall, 3rd.edition
- GROSSMAN, Sanford J. e SHILLER, Robert J. (1981). *The Determinants of Variability of Stock Market Prices*. AEA Papers and Proceedings (May 1981).
- HANSEN, Lars Peter e JAGANNATHAN, Ravi (1991). *Implications of Security Market Data for Models of Dynamic Economies*. Journal of Political Economy, vol 99, no. 2.
- HANSEN, Lars Peter e SINGLETON, Kenneth J. (1983). *Stochastic Consumption, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Asset Returns*. Journal of Political Economy, vol 91, no. 2 (April 1983).
- HE, Hua e MODEST, David M. (1995). *Market Frictions and Consumption-Based Asset Pricing* Journal of Political Economy, vol. 103, No. 1 (Feb 1995) 94-117
- HILDRETH, C. e KNOWLES, G.J. (1982). *Some estimates of Farmers' utility functions*. Technical bulletin 335 (Agricultural Experimental Station, University of Minnesota, Minneapolis, M'N) apud MEHRA e PRESCOTT (1985). *The Equity Premium: A Puzzle*. Journal of Monetary Economics, vol.15, 145-161.
- INGERSOLL, Jonathan E., Jr. (1987). *Theory of Financial Decision Making*. Rowman & Littlefield.
- ISSLER, João V. e PIQUEIRA, Natália Scotto (2002). *Aversão ao risco, taxa de desconto intertemporal e substitubilidade intertemporal no consumo no Brasil*.

Capítulo 7 do livro: BONOMO, Marco (Org.) *Finanças Aplicadas ao Brasil*. Rio de Janeiro, Editora FGV (2002).

KAHNEMAN, Daniel e TVERSKY, Amos (1979). *Prospect Theory: an Analysis of Decision under Risk*. *Econometrica*, vol. 47, nº 2 (March 1979).

KEHOE, P.J. (1984). *Dynamics of the current account: Theoretical and empirical analysis*. Working paper (Harvard University, Cambridge, MA) apud MEHRA e PRESCOTT (1985). *The Equity Premium: A Puzzle*. *Journal of Monetary Economics*, vol.15, 145-161.

KYDLAND, F.E. e PRESCOTT, E.C. 1982, *Time to build and aggregate fluctuations*. *Econometrica* 50, 1345-1370, apud MEHRA e PRESCOTT (1985). *The Equity Premium: A Puzzle*. *Journal of Monetary Economics*, vol.15, 145-161.

KOCHERLAKOTA, Narayana R. (1996). *The Equity Premium: It's Still a Puzzle*. *Journal of Economic Literature*, vol. XXXIV (March 1996).

KREPS, D. M. e PORTEUS, E.L. (1978). *Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory*. *Econometrica* vol 46, 185-200; apud EPSTEIN, Larry G. e ZIN, Stanley E. (1991). *Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: An Empirical Analysis*. *Journal of Political Economy*, vol. 99, No. 2, (1991) p. 937-969

LENGWILER, Yvan (2004). *Microfoundations of Financial Economics: An Introduction to General Equilibrium Asset Pricing*. Princeton University Press.

LINTNER, John (1965). *Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification*. *Journal of Finance*, vol. XX, nº 4 (December 1965).

LUCAS, Robert E., Jr. (1978). *Asset Prices in an Exchange Economy*. *Econometrica* (November, 1978).

MARKOWITZ, Harry (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. John Wiley & Sons.

- MANKIWI, Gregory e SHAPIRO, Matthew D. (1986): *Risk and Return: Consumption Beta Versus Market Beta*. The Review of Economics and Statistics. Vol. 68, No. 3 (Aug. 1986) p. 452-459.
- MEHRA e PRESCOTT (1985). *The Equity Premium: A Puzzle*. Journal of Monetary Economics, vol.15, 145-161.
- MEHRA e PRESCOTT (2003). *The Equity Premium in Retrospect*. NBER Working Paper vol. 15, No. 9525, p. 145-161
- MEHRA, Rajnish (2003). *The Equity Premium: Why Is it a Puzzle?* Financial Analyst Journal, Jan-Feb 2003
- MERTON, Robert C. (1993). An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. Econometrica, vol. 41 nº 5 (September, 1973).
- MERTON, Robert C. (1992). *Continuous-Time Finance*. Blackwell.
- MOSSIN, Jan (1966). *Equilibrium in a Capital Asset Market*. Econometrica, vol 35, nº 4 (October 1966).
- NICHOLSON, Walter (2005). *Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions*. Thompson / South-Western, 9th. ed.
- RIETZ, T.A. (1988). *The Equity Risk Premium Puzzle: A Solution*. Journal of Monetary Economics, vol. 22 No. 1.(July)
- ROSS, Stephen A. (1976). *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*. Journal of Economic Theory, Vol. 13 Issue 3 (December. 1976).
- SAMPAIO, Frederico Santana (2002). *Existe Equity Premium Puzzle no Brasil?*. Capítulo 4 do livro: BONOMO, Marco (Org.) *Finanças Aplicadas ao Brasil*. Rio de Janeiro, Editora FGV (2002).
- SHARPE, William (1964). *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. Journal of Finance, 19.
- SILBERG, Eugene e SUEN, Wing (2001). *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, International Edition, 3rd. edition.

- SORIANO, Alexandre (2002). *Testando o CCPAM através das fronteiras de volatilidade e da equação de Euler*. Capítulo 6 do livro: BONOMO, Marco (Org.) *Finanças Aplicadas ao Brasil*. Rio de Janeiro, Editora FGV (2002).
- TOBIN, James (1958). *Liquidity Preference as Behavior Towards Risk*. Review of Economic Studies 25 (February 1958)
- TOBIN, J. e DOLDE, W. (1971). *Wealth, liquidity and consumption*, em: *Consumer spending and monetary policy: The linkage*. Federal Reserve Bank of Boston, Boston, MA, 99-146, apud MEHRA e PRESCOTT (1985). *The Equity Premium: A Puzzle*. Journal of Monetary Economics, vol.15, 145-161.
- VON NEUMANN, J. e MORGERSTERN, Oskar (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press apud SILBERG, Eugene e SUEN, Wing (2001). *The Structure of Economics: A Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, International Edition, 3rd. edition.

APÊNDICE A. DERIVAÇÃO DA TAXA EQUIVALENTE À CERTEZA DE UM ATIVO COM RISCO

Neste apêndice é feita a dedução da taxa equivalente à certeza de um ativo, ou de uma carteira, em função do grau de aversão ao risco do agente.

Supondo que um indivíduo possa investir toda a sua riqueza em um ativo (ou uma carteira de ativos) de risco com uma taxa de retorno aleatória R , pela teoria da utilidade esperada tem-se:

$$U[W_0(1+\rho)] = E\{U[W_0(1+R)]\} \quad (\text{A.1})$$

ρ é a taxa de retorno equivalente à certeza referente à aplicação arriscada. Para analisar como ρ se relaciona com as características do ativo título e do grau de aversão ao risco do investidor será usada a técnica de expansão de Taylor e o resto de Lagrange em relação ao nível de riqueza atual (W_0). Assim, em relação ao lado esquerdo da equação (A.1) tem-se:

$$U[W_0(1+\rho)] = \left(\sum_{n=0}^N \frac{(\rho W_0)^n U^{(n)}(W_0)}{n!} \right) + \frac{(\rho W_0)^{N+1} U^{(N+1)}(P)}{(N+1)!} \quad (\text{A.2})$$

O nível de riqueza P fica entre o nível anterior W_0 e o posterior $W_0(1+\rho)$. Este ponto não é especificado, mas ele é obtido da seguinte forma:

$$U^{(N+1)}(P) = \frac{U^{(N)}[W_0(1+\rho)] - U^{(N)}(W_0)}{\pi W_0} \quad (\text{A.3})$$

Ou seja, P é o nível de riqueza que apresenta a derivada da utilidade que é igual a variação média da “eNésima” (N) derivada da utilidade dada a variação de riqueza ρW_0 . Inserindo a equação (A.3) na (A.2) tem-se:

$$U[W_0(1+\rho)] = \left(\sum_{n=0}^N \frac{(\rho W_0)^n U^{(n)}(W_0)}{n!} \right) + \frac{(\rho W_0)^N}{(N+1)!} \{U^{(N)}[W_0(1+\rho)] - U^{(N)}(W_0)\} \quad (\text{A.4})$$

Expandindo a série de Taylor com resto de Lagrange até $N=1$, tem-se:

$$U[W_0(1+\rho)] = U(W_0) + \rho W_0 U'(W_0) + \frac{(\rho W_0)\{U''[W_0(1+\rho)] - U''(W_0)\}}{2} \quad (\text{A.5})$$

Expandindo agora o lado direito da equação (A.1) até o segundo nível, tem-se:

$$E\{U[W_0(1+R)]\} = E\left\{U(W_0) + RW_0 U'(W_0) + \frac{(RW_0)^2}{2} U''(W_0) + \frac{(RW_0)^3}{6} U'''(Q)\right\} \quad (\text{A.6})$$

O nível de riqueza Q é análogo ao ponto P que usamos anteriormente, assim:

$$U'''(Q) = \frac{U''[W_0(1+R)] - U''(W_0)}{RW_0} \quad (\text{A.7})$$

Substituindo a equação (A.7) em (A.6), tem-se:

$$E\{U[W_0(1+R)]\} = E\left\{U(W_0) + RW_0 U'(W_0) + \frac{(RW_0)^2}{2} U''(W_0) + \frac{(RW_0)^3}{6} \left(\frac{U''[W_0(1+R)] - U''(W_0)}{RW_0}\right)\right\} \quad (\text{A.8})$$

Assumindo que o nível atual de riqueza (W_0) e a utilidade desta riqueza já são conhecidas, elas podem ser consideradas como constantes. Lembrando que a esperança de uma constante é ela mesma, ao aplicar o operador de expectativa a cada termo de (A.8) tem-se:

$$E\{U[W_0(1+R)]\} = \left\{ \begin{aligned} &U(W_0) + E(R)W_0 U'(W_0) + \frac{E(R^2)W_0^2}{2} U''(W_0) \\ &+ \frac{E(R^2)W_0^2}{6} \{E[U''(W_0[1+R])] - U''(W_0)\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

Igualando as equações (A.5) e (A.9), e assumindo que os últimos termos de cada uma das equações (resto de Lagrange) têm valores muito pequenos e tendem a se anular, tem-se

$$\begin{aligned}
U[W_0(1+\rho)] &= E\{U[W_0(1+k)]\} \\
U(W_0) + \rho W_0 U'(W_0) &= U(W_0) + E(k)W_0 U'(W_0) + \frac{E(k^2)W_0^2}{2} U''(W_0) \\
\rho W_0 U'(W_0) &= E(k)W_0 U'(W_0) + \frac{E(k^2)W_0^2}{2} U''(W_0)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Dividindo ambos os lados por $W_0 U'(W_0)$ obtém-se:

$$\rho = E(R) + \frac{E(R^2)W_0}{2} \left(\frac{U''(W_0)}{U'(W_0)} \right) \tag{A.11}$$

A forma mais usada para se modelar a taxa de retorno de um ativo com risco é assumindo que ela segue um *movimento geométrico Browniano*. Em outras palavras, a taxa de retorno R segue a distribuição lognormal com média $E(R)$ e desvio padrão σ , em notação estatística: $\log N[E(R), \sigma]$. A representação algébrica da taxa de retorno k em cada instante do tempo é a seguinte:

$$\frac{dW}{W} = \frac{WR}{W} = R = \mu dt + \sigma \varepsilon \sqrt{dt} \tag{A.12}$$

Esta equação diz que a taxa de crescimento (instantâneo) da riqueza (W) é igual a R que segue um movimento geométrico Browniano, onde dt é a variação infinitesimal do tempo, ε é uma variável cujo valor esperado é zero e variância é 1 [$E(\varepsilon) = 0$ e $E(\varepsilon^2) = 1$] e não é correlacionada com nenhuma outra variável.

Desta forma o valor esperado de R é:

$$\begin{aligned}
E(R) &= E\{\mu dt + \sigma \varepsilon \sqrt{dt}\} \\
E(R) &= E\{\mu dt\} + E\{\sigma \varepsilon \sqrt{dt}\} \\
E(R) &= E\{\mu dt\} + \sigma E\{\varepsilon\} \sqrt{dt} \\
E(R) &= E\{\mu dt\}
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Sabendo que $E(ab) = E(a)E(b) - Cov(a,b)$, que $E(dt) = dt$ e que a covariância entre $E(R)$ e dt é zero tem-se:

$$\begin{aligned}
E(R) &= E(\mu)E(dt) - Cov(\mu, dt) \\
E(R) &= \mu dt
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Portanto, se a riqueza de um indivíduo está alocada em uma carteira que rende uma taxa de retorno R , a taxa esperada é μ a cada intervalo infinitesimal de tempo. Vale lembrar que μ é igual a $E(R)$, que é a média aritmética das taxas de retorno:

$$\mu dt = E(R) = \frac{\sum_{t=0}^T R_t}{T} \quad (\text{A.15})$$

Ou seja, μ segue uma lógica análoga à formação da taxa de juros simples. A taxa de retorno esperada é obtida por uma média aritmética. E com relação a $E(R^2)$:

$$\begin{aligned} E(R^2) &= E\left\{\left[\mu dt + \sigma \varepsilon \sqrt{dt}\right]^2\right\} \\ E(R^2) &= E\left\{\left[\mu dt\right]^2 + 2\mu\sigma\varepsilon\left[(dt)^{3/2}\right] + \sigma^2\varepsilon^2 dt\right\} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Desprezando todos os termos que contenham um termo dt elevado a uma potência maior do que um, por conveniência e por ser um número muito pequeno, tem-se:

$$\begin{aligned} E(R^2) dt &= E\{\sigma^2 \varepsilon^2 dt\} \\ E(R^2) dt &= \sigma^2 E(\varepsilon^2) dt \\ E(R^2) dt &= \sigma^2 dt \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

E, portanto, a equação (A.11) fica:

$$\rho = E(R) + \frac{\sigma^2 W_0}{2} \left(\frac{U''(W_0)}{U'(W_0)} \right) \quad (\text{A.18})$$

Sabendo que um dos principais pressupostos sobre a função utilidade da riqueza é côncava, ou seja, ela é uma função crescente [$U'(W) > 0$, utilidade marginal crescente], porém na medida em que a riqueza de um indivíduo cresce a utilidade da riqueza cresce a taxas cada vez menores [$U''(W) < 0$]. Assim, a razão entre parêntesis na equação (A.18) é negativa, fazendo com que $\rho < E(R)$. Lembrando que $A(W) = -(U''(W)/U'(W))$, que é a função Arrow-Pratt de aversão absoluta ao risco, (A.18) pode ser reescrita assim:

$$\rho = E(R) - \frac{\sigma^2}{2} W_0 A(W_0) \quad (\text{A.19})$$

Ou, conforme a definição de grau de aversão relativa ao risco $[R(W)]$:

$$\rho = E(R) - \frac{\sigma^2}{2} R(W_0) \quad (\text{A.20})$$

APÊNDICE B. DERIVAÇÃO DA FUNÇÃO RRA QUANDO $R(W)$ TENDE A 1

Este apêndice apresenta a dedução de que se em uma função utilidade do tipo RRA (*Relative Risk Aversion*, ou Aversão Relativa ao Risco) apresentar $\gamma = 1$, esta função deixa de ser uma função potência e passa a ser logarítmica. Aparentemente a função de utilidade do tipo RRA, equação (B.1), não poderia ser definida quando γ tendesse a 1.

$$U(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (\text{B.1})$$

Porém, aplicando a regra de l'Hôpital chega-se a uma solução. Segundo esta regra quando há um quociente $f(x)/g(x)$ e que tanto f quanto g tendem a zero ou quando o numerador e/ou o denominador tendem ao infinito, o seu limite é igual ao limite do quociente das funções derivadas, ou seja, $f'(x)/g'(x)$. Ou seja,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} [U(W)] = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \left[\frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right] = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \left[\frac{f(\gamma)}{g(\gamma)} \right] = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \left[\frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} \right] \quad (\text{B.2})$$

Onde,

$$\begin{aligned} f(\gamma) &= W^{1-\gamma} \\ g(\gamma) &= 1-\gamma \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Vale lembrar que as derivadas são em função de γ e não de W . Sabendo que a derivada de uma função exponencial é $\frac{d}{dx} [a^{kx+h}] = ka^{kx+h} \ln a$, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(\gamma) &= -W^{1-\gamma} \ln W \\ g'(\gamma) &= -1 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Assim,

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} [U(W)] = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \left[\frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} \right] = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \left[\frac{-W^{1-\gamma} \ln W}{-1} \right] = W^0 \ln W = \ln W \quad (\text{B.5})$$

APÊNDICE C. PROPRIEDADE DA DISTRIBUIÇÃO LOGNORMAL

Esta seção procura demonstrar a relação que foi usada para deduzir a passagem da equação (III.6) para (III.7) e da (IV.24) para (IV.25). Esta relação é a seguinte:

$$\ln E[X] = E[\ln X] + \frac{1}{2} \text{Var}[\ln X] \quad (\text{C.1})$$

Ou seja, se X tem uma distribuição lognormal (ou que $\ln(X)$ tenha uma distribuição normal) o logaritmo da sua esperança é igual à esperança do seu logaritmo mais metade da variância de seu logaritmo. Suponha que X seja uma razão entre o nível de consumo (ou poupança) do próximo período e o atual, C_T/C_0 , ou que seja a variação do índice de ações, $\frac{P_T}{P_0} = (1 + R_T)$. E que:

$$dP = \mu P dt + \sigma P \varepsilon \sqrt{dt} \quad (\text{C.2})$$

Onde a variação infinitesimal de P é uma função de uma taxa de crescimento instantânea constante (μdt) e um componente aleatório com um desvio-padrão constante ($\sigma \sqrt{dt}$). A variável ε representa a aleatoriedade, cuja esperança é zero e sua variância é igual à 1 [$E(\varepsilon) = 0$ e $E(\varepsilon^2) = 1$].

Assim, se for definido que $G = \ln X = \ln(1 + R_{t+1})$, pelo lema de Ito, tem-se:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial X} \mu X + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial X^2} \sigma^2 X^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial X} \sigma X \varepsilon \sqrt{dt} \quad (\text{C.3})$$

As derivadas parciais são as seguintes:

$$\frac{\partial G}{\partial X} = \frac{\partial(\ln X)}{\partial X} = \frac{1}{X} \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial X^2} = \frac{\partial^2(\ln X)}{\partial X^2} = \frac{\partial(1/X)}{\partial X} = -\frac{1}{X^2} \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial(\ln X)}{\partial t} = 0 \quad (\text{C.6})$$

Substituindo as derivadas parciais em (C.3), se obtém:

$$dG = \left(\frac{1}{X} \mu X - \frac{1}{2X^2} \sigma^2 X^2 \right) dt + \frac{1}{X} X (\sigma \sqrt{dt}) \varepsilon \quad (\text{C.7})$$

Rearranjando os termos:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + (\sigma \sqrt{dt}) \varepsilon \quad (\text{C.8})$$

Desta forma a variação esperada de G é:

$$\begin{aligned} E(dG) &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + (\sigma \sqrt{dt}) E[\varepsilon] \\ E(dG) &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

E a variância de dG pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Var}(dG) &= E\left\{[(dG) - E(dG)]^2\right\} = E\left[(dG)^2\right] - [E(dG)]^2 \\ &= E\left\{\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + (\sigma \sqrt{dt}) \varepsilon\right]^2\right\} - \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt\right]^2 \\ &= E\left\{\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt\right]^2 + 2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt (\sigma \sqrt{dt}) \varepsilon + (\sigma \sqrt{dt})^2 \varepsilon^2\right\} - \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt\right]^2 \\ \text{Var}(dG) &= \sigma^2 dt \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Assim, se for calculado o valor acumulado de G entre t=0 e t=T, o valor esperado de G é o seguinte:

$$E(G_T) = \int_{t=0}^T \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \quad (\text{C.11})$$

E a variância esperada de G_T é obtida da seguinte forma:

$$\text{Var}(G) = \int_{t=0}^T \sigma^2 dt = \sigma^2 T \quad (\text{C.12})$$

Para completar a equação (C.1) basta agora achar $E(X)$, que é obtida através de (C.2):

$$\begin{aligned} E(dP) &= E[\mu P dt + P(\sigma\sqrt{dt})\varepsilon] \\ E(dP) &= \mu P dt + P(\sigma\sqrt{dt})E(\varepsilon) \\ E(dP) &= \mu P dt \end{aligned} \tag{C.13}$$

Rearranjando (C.13) tem-se:

$$E\left(\frac{dP}{P}\right) = \mu dt \tag{C.14}$$

Integrando (C.14) tem-se:

$$E\left(\frac{P_T}{P_0}\right) = e^{\mu T} \tag{C.15}$$

Desta forma substituindo (C.11), (C.12) e (C.15) em (C.1) tem-se:

$$\begin{aligned} \ln E[X] &= E(\ln X) + \frac{1}{2} \text{Var}[\ln X] \\ \ln\left(\frac{P_T}{P_0}\right) &= E(G_T) + \frac{1}{2} \text{Var}[G_T] \\ \ln\left(\frac{P_T}{P_0}\right) &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \frac{\sigma^2 T}{2} = \mu T \end{aligned} \tag{C.16}$$

APÊNDICE D. DADOS COLETADOS E MANIPULADOS

A Tabela D.1. relaciona os dados coletados de cada fonte da informação e que serviram de base para os resultados apresentados na seção IV.4.

A Tabela D.2 apresenta os valores já trabalhados antes da confecção da Tabela IV.1.

Tabela D.1. Dados coletados e suas respectivas fontes

Fonte	US Census Bureau	Bureau of Labor Statistics	Bureau of Economic Anylis		Prof. Robert Shiller (Yale)		
Obs.	dados estimados para 1º de julho de cada ano	índice médio do ano	NIPA Table 1.1.5 Line 2 nominal	NIPA Table 5.2 L3 + L14 nominal	S&P500 nominal	S&P500 nominal	Títulos do governo americano de 1 ano
Descr.	Pop.	CPI	C	S	P	D	R_f
unid.	população milhares		Consumo US\$ bi	Poupança US\$ bi	Índice	Dividendo	
1929	121.767	17,10	77,4	15,8	24,86	0,97	6,01%
1930	123.077	16,70	70,1	12,5	21,71	0,98	4,15%
1931	124.040	15,20	60,7	8,6	15,98	0,82	2,43%
1932	124.840	13,70	48,7	3,1	8,3	0,5	3,36%
1933	125.579	13,00	45,9	2,9	7,09	0,44	1,46%
1934	126.374	13,40	51,5	6,3	10,54	0,45	1,01%
1935	127.250	13,70	55,9	9,3	9,26	0,47	0,75%
1936	128.053	13,90	62,2	11,1	13,76	0,72	0,75%
1937	128.825	14,40	66,8	12,6	17,59	0,8	0,88%
1938	129.825	14,10	64,3	9,7	11,31	0,51	0,88%
1939	130.880	13,90	67,2	12,2	12,5	0,62	0,56%
1940	132.122	14,00	71,3	15,3	12,3	0,67	0,56%
1941	133.402	14,70	81,1	23,7	10,55	0,71	0,53%
1942	134.860	16,30	89,0	43,5	8,93	0,59	0,63%
1943	136.739	17,30	99,9	51,2	10,09	0,61	0,69%
1944	138.397	17,60	108,7	56,3	11,85	0,64	0,72%
1945	139.928	18,00	120,0	47,0	13,49	0,66	0,75%
1946	141.389	19,50	144,3	31,1	18,02	0,71	0,76%
1947	144.126	22,30	162,0	29,2	15,21	0,84	1,01%
1948	146.631	24,10	175,0	43,5	14,83	0,93	1,35%
1949	149.188	23,80	178,5	41,1	15,36	1,14	1,58%
1950	152.271	24,10	192,2	45,9	16,88	1,47	1,32%
1951	154.878	26,00	208,5	54,2	21,21	1,41	2,12%
1952	157.553	26,50	219,5	57,9	24,19	1,41	2,39%
1953	160.184	26,70	233,1	59,4	26,18	1,45	2,58%
1954	163.026	26,90	240,0	60,6	25,46	1,54	1,80%
1955	165.931	26,80	258,8	67,0	35,6	1,64	1,81%
1956	168.903	27,20	271,7	74,6	44,15	1,74	3,21%
1957	171.984	28,10	286,9	78,5	45,43	1,79	3,86%
1958	174.882	28,90	296,2	79,4	41,12	1,75	2,54%
1959	177.830	29,10	317,6	84,6	55,62	1,83	3,74%
1960	180.671	29,60	331,7	84,8	58,03	1,95	4,28%
1961	183.691	29,90	342,1	91,8	59,72	2,02	2,91%
1962	186.538	30,20	363,3	100,7	69,07	2,13	3,39%
1963	189.242	30,60	382,7	104,6	65,06	2,28	3,50%
1964	191.889	31,00	411,4	117,9	76,45	2,5	4,09%
1965	194.303	31,50	443,8	129,7	86,12	2,72	4,46%
1966	196.560	32,40	480,9	138,6	93,32	2,87	5,44%
1967	198.712	33,40	507,8	151,3	84,45	2,92	5,55%
1968	200.706	34,80	558,0	153,6	95,04	3,07	6,17%

Tabela D.1. Dados coletados e suas respectivas fontes - CONTINUAÇÃO

Descr.	Pop.	CPI	C	S	P	D	R_f
unid.	população		Consumo	Poupança	Índice	Dividendo	
	milhares		US\$ bi	US\$ bi			
1969	202.677	36,70	605,2	156,8	102,04	3,16	8,05%
1970	205.052	38,80	648,5	174,0	90,31	3,14	9,11%
1971	207.661	40,50	701,9	202,5	93,49	3,07	5,66%
1972	209.896	41,80	770,6	216,9	103,3	3,15	4,62%
1973	211.909	44,40	852,4	256,2	118,42	3,38	7,93%
1974	213.854	49,30	933,4	270,0	96,11	3,6	11,03%
1975	215.973	53,80	1.034,4	323,6	72,56	3,68	7,24%
1976	218.035	56,90	1.151,9	343,8	96,86	4,05	5,70%
1977	220.239	60,60	1.278,6	382,8	103,81	4,67	5,28%
1978	222.585	65,20	1.428,5	436,3	90,25	5,07	7,78%
1979	225.055	72,60	1.592,2	480,6	99,71	5,65	10,88%
1980	227.225	82,40	1.757,1	532,4	110,87	6,16	11,37%
1981	229.466	90,90	1.941,1	630,2	132,97	6,63	17,63%
1982	231.664	96,50	2.077,3	686,0	117,28	6,87	14,60%
1983	233.792	99,60	2.290,6	695,8	144,27	7,09	9,37%
1984	235.825	103,90	2.503,3	830,6	166,39	7,53	11,11%
1985	237.924	107,60	2.720,3	827,4	171,61	7,9	8,35%
1986	240.133	109,60	2.899,7	803,8	208,19	8,28	7,31%
1987	242.289	113,60	3.100,2	822,7	264,51	8,81	6,25%
1988	244.499	118,30	3.353,6	917,5	250,48	9,73	7,63%
1989	246.819	124,00	3.598,5	931,8	285,41	11,05	9,29%
1990	249.464	130,70	3.839,9	974,3	339,97	12,1	8,43%
1991	252.153	136,20	3.986,1	1.043,0	325,5	12,2	6,92%
1992	255.030	140,30	4.235,3	1.100,3	416,08	12,38	3,91%
1993	257.783	144,50	4.477,9	1.083,3	435,23	12,58	3,44%
1994	260.327	148,20	4.743,3	1.114,0	472,99	13,18	4,35%
1995	262.803	152,40	4.975,8	1.204,5	465,25	13,79	6,45%
1996	265.229	156,90	5.256,8	1.237,8	614,42	14,9	5,68%
1997	267.784	160,50	5.547,4	1.303,6	766,22	15,5	5,78%
1998	270.248	163,00	5.879,5	1.329,0	963,36	16,2	5,68%
1999	272.691	166,60	6.282,5	1.333,3	1248,77	16,69	5,31%
2000	282.192	172,20	6.739,4	1.334,1	1425,59	16,27	6,61%
2001	285.102	177,10	7.055,0	1.400,1	1330,93	15,74	4,63%
2002	287.941	179,90	7.350,7	1.559,5	1140,21	16,07	1,85%
2003	290.789	184,00	7.709,9	1.662,1	895,84	17,39	1,18%
2004	293.655	188,90	8.214,3	1.755,3	1.132,5	18,6	1,49%

Tabela D.2. Valores *per capita* e/ou em US\$ constantes do ano 2000 (as taxas de retorno são expressas em termos reais).

	C	S	YD	P	D	R_M	R_f	$\frac{1+R_M}{1+R_f} - 1$
unid.	US\$	US\$	US\$	Índice	Dividendo			
1929	6.401	1.307	7.707,7	250,34	9,77			
1930	5.873	1.047	6.920,2	223,86	10,11	-6,54%	6,64%	-12,37%
1931	5.544	785	6.329,4	181,04	9,29	-14,98%	12,54%	-24,45%
1932	4.903	312	5.215,4	104,33	6,28	-38,90%	14,68%	-46,72%
1933	4.842	306	5.147,5	93,92	5,83	-4,39%	6,92%	-10,58%
1934	5.237	641	5.877,6	135,45	5,78	50,38%	-2,01%	53,46%
1935	5.522	919	6.440,2	116,39	5,91	-9,71%	-1,46%	-8,37%
1936	6.018	1.074	7.091,4	170,47	8,92	54,12%	-0,70%	55,21%
1937	6.201	1.170	7.370,4	210,35	9,57	29,01%	-2,62%	32,48%
1938	6.049	912	6.961,3	138,13	6,23	-31,37%	3,03%	-33,39%
1939	6.361	1.155	7.515,6	154,86	7,68	17,67%	2,01%	15,36%
1940	6.638	1.424	8.062,1	151,29	8,24	3,02%	-0,16%	3,18%
1941	7.122	2.081	9.202,7	123,59	8,32	-12,81%	-4,26%	-8,94%
1942	6.972	3.408	10.379,6	94,34	6,23	-18,62%	-9,25%	-10,33%
1943	7.272	3.727	10.999,1	100,43	6,07	12,89%	-5,13%	19,00%
1944	7.685	3.980	11.664,8	115,94	6,26	21,68%	-1,00%	22,90%
1945	8.204	3.213	11.417,5	129,05	6,31	16,76%	-1,49%	18,52%
1946	9.013	1.942	10.955,0	159,13	6,27	28,16%	-6,99%	37,80%
1947	8.680	1.564	10.244,1	117,45	6,49	-22,12%	-11,67%	-11,82%
1948	8.528	2.120	10.647,3	105,96	6,65	-4,12%	-6,22%	2,24%
1949	8.657	1.993	10.650,1	111,13	8,25	12,66%	2,86%	9,53%
1950	9.019	2.154	11.172,7	120,61	10,50	17,98%	0,06%	17,91%
1951	8.916	2.318	11.233,9	140,48	9,34	24,21%	-5,34%	31,22%
1952	9.053	2.388	11.441,1	157,19	9,16	18,42%	0,46%	17,88%
1953	9.385	2.392	11.776,8	168,85	9,35	13,37%	1,81%	11,35%
1954	9.424	2.380	11.803,6	162,98	9,86	2,37%	1,04%	1,31%
1955	10.022	2.594	12.616,0	228,74	10,54	46,81%	2,19%	43,67%
1956	10.184	2.796	12.980,1	279,51	11,02	27,01%	1,69%	24,90%
1957	10.223	2.797	13.019,9	278,40	10,97	3,53%	0,53%	2,98%
1958	10.092	2.705	12.797,2	245,01	10,43	-8,25%	-0,30%	-7,97%
1959	10.569	2.815	13.383,8	329,13	10,83	38,75%	3,03%	34,68%
1960	10.681	2.731	13.411,2	337,59	11,34	6,02%	2,52%	3,41%
1961	10.726	2.878	13.603,9	343,94	11,63	5,33%	1,88%	3,38%
1962	11.105	3.078	14.183,3	393,84	12,15	18,04%	2,36%	15,31%
1963	11.380	3.110	14.490,8	366,12	12,83	-3,78%	2,15%	-5,80%
1964	11.909	3.413	15.322,3	424,67	13,89	19,78%	2,75%	16,58%
1965	12.486	3.649	16.135,3	470,79	14,87	14,36%	2,80%	11,25%
1966	13.003	3.748	16.750,7	495,98	15,25	8,59%	2,51%	5,93%
1967	13.175	3.926	17.100,7	435,40	15,05	-9,18%	2,39%	-11,30%
1968	13.757	3.787	17.544,0	470,28	15,19	11,50%	1,90%	9,42%
1969	14.011	3.630	17.640,8	478,78	14,83	4,96%	2,46%	2,44%
1970	14.036	3.766	17.802,2	400,81	13,94	-13,38%	3,20%	-16,06%
1971	14.371	4.146	18.517,6	397,51	13,05	2,43%	1,22%	1,19%
1972	15.125	4.257	19.381,6	425,56	12,98	10,32%	1,37%	8,83%
1973	15.601	4.689	20.289,7	459,28	13,11	11,00%	1,61%	9,25%
1974	15.245	4.410	19.655,3	335,70	12,57	-24,17%	-0,01%	-24,16%

Tabela D.2. Valores *per capita* e/ou em US\$ constantes do ano 2000 (as taxas de retorno são expressas em termos reais) - CONTINUAÇÃO

	C	S	YD	P	D	R_M	R_f	$\frac{1+R_M}{1+R_f} - 1$
1975	15.330	4.796	20.125,7	232,25	11,78	-27,31%	-1,73%	-26,03%
1976	15.989	4.772	20.760,5	293,13	12,26	31,49%	-0,06%	31,57%
1977	16.497	4.939	21.435,8	294,98	13,27	5,16%	-1,15%	6,38%
1978	16.950	5.177	22.127,0	238,36	13,39	-14,66%	0,18%	-14,81%
1979	16.780	5.065	21.845,6	236,50	13,40	4,84%	-0,42%	5,29%
1980	16.160	4.897	21.056,7	231,70	12,87	3,41%	-1,88%	5,39%
1981	16.025	5.203	21.227,8	251,90	12,56	14,14%	6,63%	7,04%
1982	16.001	5.284	21.285,0	209,28	12,26	-12,05%	7,95%	-18,53%
1983	16.939	5.146	22.084,7	249,43	12,26	25,04%	5,97%	18,00%
1984	17.593	5.837	23.430,4	275,77	12,48	15,56%	6,51%	8,50%
1985	18.298	5.565	23.863,3	274,64	12,64	4,18%	4,62%	-0,43%
1986	18.972	5.259	24.231,7	327,10	13,01	23,84%	5,35%	17,55%
1987	19.396	5.147	24.543,0	400,96	13,35	26,66%	2,51%	23,56%
1988	19.966	5.462	25.427,9	364,60	14,16	-5,53%	3,35%	-8,60%
1989	20.247	5.243	25.489,4	396,35	15,35	12,92%	4,27%	8,30%
1990	20.280	5.146	25.425,7	447,92	15,94	17,03%	2,87%	13,77%
1991	19.987	5.230	25.216,3	411,54	15,42	-4,68%	2,60%	-7,10%
1992	20.383	5.295	25.678,4	510,68	15,19	27,78%	0,87%	26,68%
1993	20.701	5.008	25.708,7	518,66	14,99	4,50%	0,43%	4,05%
1994	21.171	4.972	26.143,5	549,59	15,31	8,92%	1,74%	7,05%
1995	21.393	5.179	26.572,2	525,70	15,58	-1,51%	3,52%	-4,86%
1996	21.753	5.122	26.874,6	674,33	16,35	31,39%	2,65%	27,99%
1997	22.226	5.223	27.449,1	822,08	16,63	24,38%	3,41%	20,28%
1998	22.984	5.195	28.179,2	1.017,73	17,11	25,88%	4,06%	20,97%
1999	23.813	5.054	28.867,1	1.290,75	17,25	28,52%	3,03%	24,74%
2000	23.882	4.728	28.609,9	1.425,59	16,27	11,71%	3,14%	8,30%
2001	24.061	4.775	28.835,9	1.294,11	15,30	-8,15%	1,74%	-9,72%
2002	24.436	5.184	29.620,0	1.091,41	15,38	-14,47%	0,26%	-14,70%
2003	24.813	5.349	30.162,7	838,39	16,27	-21,69%	-1,07%	-20,84%
2004	25.500	5.449	30.948,6	1.032,38	16,96	25,16%	-1,14%	26,61%

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)