

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

Tese de Doutorado

**TEORIA DE CAMPOS EM ESPAÇOS
COM EXTENSÃO NÃO-COMUTATIVA**

Por

Wytler Cordeiro dos Santos

Brasília-DF, Fevereiro de 2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Tese de Doutorado

**TEORIA DE CAMPOS EM ESPAÇOS
COM EXTENSÃO NÃO-COMUTATIVA**

Por

Wytler Cordeiro dos Santos

Orientador

Prof.Doutor Luiz Paulo Colatto

Tese submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília
como requisito para a obtenção do grau
de Doutor em Física

TEORIA DE CAMPOS EM ESPAÇOS COM EXTENSÃO NÃO-COMUTATIVA

Por

WYTLER CORDEIRO DOS SANTOS

Tese submetida ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos para obtenção do grau de Doutor em Física

Aprovada por:

Prof.Dr. Luiz Paulo Colatto
(**Orientador**) - DFI/UFES

Prof.Dr. Gustavo Dourado Barbosa
CBPF

Prof.Dr. Guy Grebot
MAT/UnB

Prof.Dr. Ademir Eugênio de Santana
IF/UnB

Prof.Dr. Fernando Albuquerque de Oliveira
IF/UnB

Prof.Dr. Sebastião William da Silva
Coordenador de Pós-Graduação
Instituto de Física

O que é bom? Tudo que
elege no homem
o sentimento de poder,
a vontade de poder,
o próprio poder

F. W. Nietzsche

Dedico ao meu jovem e nobre cavaleiro
Guilherme Miguel, meu filho.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Introdução	1
1 Coordenadas Não-Comutativas e o Operador de Weyl	7
1.1 Não-comutatividade do Espaço-tempo	7
1.2 Quantização de Weyl e o Produto de Groenewold-Moyal	10
1.2.1 Propriedades do Produto \star de Moyal	12
1.3 Campos Não-Comutativos e a Aplicação de Seiberg-Witten	14
2 Não-Comutatividade em Fenômenos de Baixa Energia	17
2.1 Uma Geometria Não-Comutativa devido ao Spin	20
2.2 Efeitos Não-comutativos na Energia Cinética	26
2.2.1 Quantização do Oscilador Harmônico Não-Comutativo	29
3 Extensão Não-Comutativa para o Campo Escalar	34
3.1 Campo Escalar Não-Comutativo	34
3.2 Diagramas Planares e Não-Planares	36
3.3 As Divergências Ultravioleta e Infravermelha	38
4 Aplicação ao Campo Vetorial de Matéria	43
4.1 O Lagrangiano do Campo de Matéria Vetorial-Tensorial	44
4.1.1 Funcional Gerador	45
4.1.2 Funções de dois pontos e a interação entre os setores veto- rial e tensorial	47
4.2 A Auto-interação	51
4.3 Extensão Não-Comutativa para o Campo Vetorial de Matéria	54
Conclusão	57
Apêndices	61

A	O Problema de Landau	61
B	Teoria de Gauge Não Comutativa	65
	B.1 Corrente de Noether	65
	B.2 Campo Escalar Carregado	67
C	Coordenadas Não Comutativas	72
	C.2 Notação	72
	C.3 O módulo do vetor não comutativo $\hat{\mathbf{r}}$	73
	C.4 Derivadas e comutadores	76
	C.5 $f(\hat{x})g(\hat{x}) = f(x) \star g(x)$	78
D	Campo Vetorial de Matéria Livre	80
	D.2 O Campo Livre	80
	D.3 Funcional Gerador	80
	Referências Bibliográficas	84

Agradecimentos

Ao estimado amigo e orientador Prof. Dr. Luiz Paulo Colatto, pela paciência, seriedade, segurança e criatividade com que conduziu este trabalho. Por tudo que contribuiu na minha formação, pelo companherismo e boas discussões.

Ao Professor José Abdalla Helayel-Neto, pela atenção e hospitalidade em Petrópolis.

Ao Prof. Dr. Sebastião William da Silva Coordenador de Pós-Graduação do Instituto de Física - UnB.

A minha querida esposa e amiga Marilza Valéria, por toda paciência do mundo, incentivo, amor e amizade.

A minha adorada mãe Edinália Paes, por tudo, tudo mesmo.

Ao amigo e companheiro André Luiz Almeida Penna, que desde os tempos de graduação é grande companheiro de discussões. Sou muitíssimo grato pela sua amizade e cooperação neste trabalho de tese.

Ao colega Gustavo Dourado Barbosa, pelas últimas discussões e sugestões.

Aos meus asseclas, os capangas do Conjunto 1, Washington (Óxiton), Caio, Frank, Ronan, Eberth, Eduardo (Dudu), tudo cabra bom. Bom de peia. E ao bom companherismo do André Naves, Luciano Barosi e Roberto Steiner.

Ao amigo e conterrâneo José Francisco Rocha Neto (somos filhos da Terra Sertão casada com o Deus Sol e afilhados de Luiz Gonzaga, o Lua, Rei do Sertão).

O CNPq pelo investimento que possibilitou este trabalho.

Resumo

Nesta tese, propomos uma abordagem para a Mecânica Quântica em coordenadas não-comutativas, a qual é baseada em sistemas ligados por potenciais em uma geometria não-comutativa, devido a uma extensão em momento linear do espaço. Propomos uma conexão entre o parâmetro não-comutativo θ e o spin S , de forma que o spin pode ser a fonte da deformação do espaço, originando assim, uma geometria não-comutativa. Observamos que, em sistemas ligados através de um potencial nesta geometria não-comutativa, tem como uma origem natural, o acoplamento tipo spin-órbita, e obtemos, também, que esta geometria dá origem a um fator de deformação na energia cinética, proporcional à razão entre energia fundamental e energia de repouso. O campo vetorial-tensorial, que pode ser utilizado como intermediador na verificação da violação das simetrias de Lorentz, é analisado perturbativamente até uma primeira ordem no termo de acoplamento topológico. Os procedimentos para a obtenção do campo escalar não comutativo, são aplicados ao caso do campo vetorial-tensorial de matéria, surgindo efeitos não-comutativos, diagramas de Feynman planares e não-planares, com a intrigante mistura de divergências ultravioleta e infravermelha (“UV/IR”).

Abstract

In this thesis, we propose an approach to bound state systems in Quantum Mechanics in a noncommutative space due to a linear momentum extension on the space. Our proposal is that there is a relationship between the noncommutative parameter θ and the spin operator S , such that spin can be a possible origin of the deformation of space, and so implying in a noncommutative geometry. We observe that in bound state systems in presence of noncommutative potential, one can derive naturally the spin-orbit coupling term as a general case. Furthermore, we show that the kinetic energy term of the Hamiltonian is also modified due to the presence of noncommutative potential. Kinetic term becomes a deformed one by an standard factor which is dependent on the ratio between the ground state of energy of confined system and rest energy of particle. The vector-tensor field, that can be used to verify violations of Lorentz invariance, is analysed to first order in perturbative dynamics of topological coupling term. Then we analyze the perturbative quantum aspects of this model with noncommutative effects on the fields, in fact it presents an intriguing ultraviolet (UV) and infrared (IR) mixing UV/IR divergence.

Introdução

O desenvolvimento das Teorias de Campo Não-comutativas teve início com uma observação de Heisenberg em uma carta que ele escreveu a Peierls em 1930 [1] da possibilidade de introduzir relações de incerteza também para as coordenadas, como forma de evitar singularidades presentes na auto-energia de partículas pontuais. Peierls finalmente fez uso destas idéias em trabalho relacionado ao “Problema de Landau”, que analisa o comportamento de uma partícula carregada restrita a um plano e na presença de um campo magnético perpendicular e constante. No regime em que o campo magnético é extremamente elevado as coordenadas das partículas passam a ser não-comutativas [2]. Heisenberg também comentou esta possibilidade a Pauli que, por sua vez, envolveu Oppenheimer na discussão [3]. O aluno de Oppenheimer Hartland Snyder foi o primeiro a formalizar as idéias de coordenadas não comutativas em dois artigos [4]. Imediatamente C.N. Yang publicou um artigo onde ele estendia o tratamento de Snyder ao caso de espaços curvos, em particular o espaço de *de Sitter* [5]. No entanto, a adoção dessas idéias para contornar as divergências da Eletrodinâmica Quântica (QED) foi abandonada devido ao eminente sucesso da teoria de renormalização na predição numérica de valores experimentais para observáveis físicos em QED. No entanto, a intenção de compreender a estrutura quântica do espaço-tempo, ou seja, uma teoria quântica da gravitação, fizeram ressurgir o interesse em teorias de campo em coordenadas não-comutativas na década de 90. A escala quântica

do espaço-tempo é próxima à do comprimento de Planck ($L_P \approx 10^{-33}\text{cm}$) na qual a física como conhecemos pode sofrer drásticas alterações. Nesta escala de comprimento, ou talvez antes, espera-se que efeitos da “Gravitação Quântica” sejam relevantes. Propriedades não-clássicas devem afetar processos envolvendo partículas (campos) de ultra-alta energia. Em princípio, existem dois caminhos para tratar as propriedades não clássicas do espaço-tempo e seus efeitos observáveis. Um primeiro caminho é a tentativa de construir uma teoria quântica do espaço-tempo em concordância com a Relatividade Geral e Mecânica Quântica para, então, observar suas previsões em baixas energias. As abordagens mais promissoras que seguem por esta rota são as Teorias de Cordas e a Gravitação Quântica com Laços (Loop Quantum Gravity), com previsões físicas numa escala de energia ($E_P \approx 10^{19}\text{GeV}$) muito além das escalas de energia exploradas nos atuais aceleradores de partículas ($E \approx 10^2\text{GeV}$). Esta dificuldade é similar à tentativa de observar detalhes da Interação Fraca ($E \approx 10^2\text{GeV}$) apenas analisando as propriedades de objetos macroscópicos. Um segundo caminho para abordar as propriedades não-clássicas do espaço-tempo é o das teorias efetivas, que consiste em tentar modelar efeitos não clássicos do espaço-tempo sem necessariamente assumir o completo conhecimento da estrutura do espaço-tempo em pequenas escalas de comprimento. Para esta proposta, existe a idéia de que é fundamentalmente impossível especificar a posição de uma partícula. Formalmente, infere-se relações de comutação para as coordenadas do espaço-tempo, que implicam em não-comutatividade do espaço-tempo,

$$[x_\mu, x_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, \quad (1)$$

onde $\theta_{\mu\nu}$ são componentes de um tensor antissimétrico, em analogia com a relação de incerteza de Heisenberg para o espaço de fase. Desta analogia, deve-se

considerar um princípio de incerteza para o espaço-tempo,

$$\Delta x_\mu \Delta x_\nu \geq \theta_{\mu\nu}. \quad (2)$$

A relação de comutação (1), denominada canônica, presentemente é a mais investigada na literatura. Outras formas de não-comutatividade podem ser introduzidas como, por exemplo, a da álgebra de Lie

$$[x_\mu, x_\nu] = iC_{\mu\nu}^\alpha x_\alpha, \quad (3)$$

e a deformação- q [6]. Nos últimos anos, coordenadas não-comutativas têm sido objeto de pesquisa por muitos físicos da área de física de alta energia e até mesmo da matéria condensada. Coordenadas não-comutativas emergem da descrição da teoria de cordas na presença de campos externos [7–9]. Tais coordenadas não-comutativas são também uma alternativa na descrição de sistemas eletrônicos na presença de campo magnético externo [10–12]. Em certas abordagens para a gravitação quântica, são propostas álgebras de Lie para coordenadas não-comutativas. Estas determinam a existência de um comprimento mínimo L_P . Tais álgebras relacionam um grupo de Poincaré deformado a um grupo quântico conhecido como grupo κ -Poincaré [13–17].

Relações de dispersão que violam a Simetria de Lorentz através de uma modificação da relação entre velocidade de grupo e momento podem trazer ou expor efeitos provenientes de uma gravitação quântica. Trabalhos como os das referências [18–23] explanam as relações de dispersão como provenientes da Gravitação Quântica com Laços (Loop Quantum Gravity) ou Teorias de Campo Efetivo. A invariância de Lorentz é uma boa simetria em baixas energias que pode ser violada na escala de altas energias. Este problema da violação de Lorentz tem recebido atenção. Em destaque estão os trabalhos de Kostelechy e colaboradores [24–30]. Efeitos quânticos da gravitação poderiam ser observados na geração e propagação

de partículas (ondas). Uma maneira de detectá-los seria através de alterações na relação de dispersão das partículas [31–35].

É possível fazer comparações da extensão não-comutativa do modelo padrão com certas extensões que violam simetrias de Lorentz e obter um certo valor limite para o módulo do parâmetro não-comutativo, $||\theta|| < (10TeV)^{-2}$ [30]. Em princípio seria possível medir experimentalmente a relação de dispersão com violação de Lorentz devido à não-comutatividade para fótons visíveis expostos a um campo magnéticos de 1 Tesla. Para esta experiência seria necessário um interferômetro de Michelson-Morley. Para ser possível a mudança de uma franja de interferência, a soma dos braços do interferômetro é igual 10^{18} cm, aproximadamente 1 parsec. Campos magnéticos galácticos não são fortes nem coerentes para tais distâncias [36, 37]. Porém é crescente o interesse em investigações experimentais de efeitos quânticos da gravidade na escala de Planck [18, 38–44]. O telescópio espacial GLAST (Gamma-ray Large Area Space Telescope), com lançamento previsto para agosto de 2007 [45] (veja: <http://glast.gsfc.nasa.gov/ssc/>) poderá detectar desvios entre velocidade de grupo e momento.

Outro aspecto importante em que os efeitos da não-comutatividade afetariam os campos é o intercâmbio de divergências ultravioleta e infravermelha, denotado por *UV/IR mixing*. Esta foi uma das primeiras propriedades das teorias quânticas de campos não-comutativas a ser descoberta [46]. Aspectos do *UV/IR mixing* são observados, por exemplo, no estudo de teorias de campo quântico não-comutativos à temperatura finita [47–50]. Em teoria de cordas, cálculos perturbativos também confirmam um explícito *UV/IR mixing* [51–54].

As coordenadas não comutativas trazem importantes consequências para as teorias de calibre. Uma transformação que deixa a ação invariante mistura as coordenadas do espaço-tempo com os graus de liberdade internos. Sendo assim,

as coordenadas das partículas não são invariantes de calibre. A única teoria com esta propriedade conhecida antes era a Relatividade Geral [55, 56]. Outra situação interessante ocorre no estudo da função β que investiga a existência de liberdade assintótica das teorias de calibre. A função β revela que uma teoria eletromagnética não-comutativa apresenta liberdade assintótica [57, 58]. Estes são alguns entre tantos tópicos em coordenadas não-comutativas que principalmente a partir da década de 90 vêm recebendo a atenção dos pesquisadores em teorias de campo.

A questão primária para um estudo em teoria de campos com coordenadas não-comutativas é qual formulação adotar na descrição de tais campos. Uma maneira simples e bastante difundida na literatura faz uso da correspondência de Weyl. A partir de tal correspondência é possível escrever a ação dos campos em coordenadas comutativas com o produto convencional substituído por um produto não comutativo, denominado Moyal. O Capítulo 1 desta tese destina-se a desenvolver esta idéia de estabelecer uma correspondência entre um campo em coordenadas usuais comutativas em seu respectivo campo não-comutativo. Este capítulo é uma revisão da literatura corrente sobre a formulação das teorias de campos, em especial as de campo escalar. A teoria de calibre $U(1)$ para o campo escalar é abordada com melhores detalhes no apêndice B. Ao final fazemos um breve comentário da aplicação de Seiberg-Witten [7].

O Capítulo 2 irá tratar de efeitos não-comutativos em baixas energias, no caso, a Mecânica Quântica em coordenadas não-comutativas. Vamos relacionar o spin de uma partícula fermiônica à área da superfície fechada que contém a partícula. Partimos do princípio de que o parâmetro não-comutativo θ tem dimensões de área, para então relacionarmos o parâmetro não-comutativo ao spin. Como consequências físicas, o termo de acoplamento spin-órbita é um resultado natural em

primeira ordem de um potencial quântico dado em coordenadas não-comutativas. Demonstramos que o termo de segunda ordem do potencial não comutativo afeta o termo cinético da Hamiltoniana do sistema, deslocando os níveis espectrais de energia. Mostraremos que existe um padrão para estes deslocamentos, tal que a forma mais perceptível de tal perturbação é proporcional à razão entre a energia de estado fundamental e a energia de repouso da partícula confinada ao potencial não-comutativo.

O Capítulo 3 é um estudo do campo escalar real não-comutativo. Veremos que os diagramas de Feynman são modificados pela não-comutatividade, sendo necessária a distinção entre os de tipo planar e não-planar. Estes últimos apresentam fatores de fase no espaço de momento, os quais são, em muitos casos, responsáveis por uma melhor convergência das teorias não-comutativas no regime ultravioleta. Em contrapartida, os mesmos fatores de fase acabam por promover o aparecimento de divergências no regime infravermelho, as quais são interpretadas como advindas do regime ultravioleta através de um processo conhecido como *IR/UV mixing*.

O Capítulo 4 descreve o campo vetorial-tensorial de matéria baseado no modelo *CSKR* [59]. Fazemos uma análise perturbativa em primeira ordem no termo topológico de massa, e uma análise de auto-interação no setor vetorial. Uma extensão não-comutativa no setor vetorial introduz os diagramas “não-planares” de Feynman, muito semelhantes aos diagramas não-planares do campo escalar, com efeito *UV/IR mixing*.

Capítulo 1

Coordenadas Não-Comutativas e o Operador de Weyl

Neste capítulo vamos introduzir os fundamentos do espaço-tempo não-comutativo. Vamos também apresentar as bases matemáticas, como a álgebra de Heisenberg para coordenadas e o operador de Weyl, utilizado amplamente para construir modelos de campo em espaços não-comutativos. Este operador permite introduzir certas estruturas no espaço-tempo não-comutativo em analogia com as correspondentes no espaço-tempo comutativo. O produto chamado Moyal será então formalizado no contexto da representação das teorias de campo não-comutativas.

1.1 Não-comutatividade do Espaço-tempo

Como já mencionado, os primeiros estudos de não-comutatividade do espaço-tempo foram motivados pela idéia de produzir um *cutoff* para evitar as divergências nas Teorias de Campo Quântico, em especial na Eletrodinâmica Quântica. Partindo do espaço de fase clássico, no qual um ponto pode ser localizado sem qualquer limite de precisão, define-se o espaço de fase quântico, onde as posições e momentos canônicos x_i e p_i são descritos por operadores Hermitianos que obedecem à álgebra de Heisenberg,

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}, \tag{1.1}$$

que implica a relação de incerteza

$$\Delta x_i \Delta p_j \geq \frac{\hbar}{2} \delta_{ij}. \quad (1.2)$$

Isto mostra que no espaço de fase quântico existe um limite na precisão tanto do momento como da localização de um objeto qualquer. Na verdade, sob o processo de quantização a própria noção de ponto se torna inadequada, sendo então o ponto substituído pela célula de Plank que tem tamanho da ordem da constante \hbar . Verifica-se facilmente a correspondência com o limite clássico quando $\hbar \rightarrow 0$.

Em analogia com a quantização do espaço de fase, acima descrita, podemos desenvolver um conceito geométrico para um espaço-tempo de forma quantizada. Para isto inferimos que as coordenadas do espaço-tempo ordinário x_μ possam ser promovidas a operadores Hermitianos \hat{x}_μ nesta nova geometria, agora, quântica. Os operadores \hat{x}_μ devem, então, satisfazer uma álgebra semelhante a de Heisenberg da Mecânica Quântica, porém, definida sobre a estrutura geométrica do espaço-tempo, ou seja,

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}. \quad (1.3)$$

Como as “coordenadas” do espaço-tempo não comutam mais, elas não podem ser simultaneamente diagonalizadas e, conseqüentemente, existirão relações de incerteza na forma

$$\Delta \hat{x}_\mu \Delta \hat{x}_\nu \geq \frac{1}{2} |\theta_{\mu\nu}|, \quad (1.4)$$

que podem ser apropriadas para a descrição das flutuações quânticas do espaço-tempo. Neste caso, a noção de ponto no espaço-tempo é perdida. Os pontos do espaço-tempo ordinário são substituídos por células de tamanho $|\theta_{\mu\nu}|$. As flutuações quânticas do espaço-tempo evitam a localização exata dos eventos dentro da área $|\theta_{\mu\nu}|$.

Em alguns trabalhos os modelos construídos partem de bases matemáticas em que a não comutatividade não é definida a priori, mas surge como consequência de certas análises, como a de vínculos. Um caso clássico de não-comutatividade das coordenadas na Mecânica Quântica é o problema de Landau [2], que consiste de uma partícula carregada com massa m movendo-se no plano $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$ na presença de um campo magnético B perpendicular e constante. Ao final de uma análise dos vínculos verificamos que, no regime em que o campo magnético é extremamente alto e o sistema é projetado no mais baixo nível de Landau, as coordenadas da partícula passam a ser não-comutativas. De fato, após a projeção no mais baixo nível de Landau o sistema original é equivalente ao caso em que não existe campo magnético externo, porém as coordenadas das partículas obedecem a relação de comutação (1.4) (veja os detalhes no Apêndice A).

Atualmente, o interesse maior na não-comutatividade do espaço-tempo advém da Teoria de Cordas, a principal candidata para descrever uma teoria quântica da gravidade. As cordas possuem uma escala de comprimento intrínseco l_s . Utilizando estados da corda como sonda, não é possível observar distâncias menores que l_s . Em certas teorias de corda [60–62] e também algumas abordagens da gravitação quântica [63, 64] a relação de incerteza de Heisenberg é generalizada para,

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{\Delta p} + \frac{l_s^2 \Delta p}{\hbar^2} \right). \quad (1.5)$$

Observe que quando $l_s = 0$ a relação acima se torna a relação usual da Mecânica Quântica. Minimizando a relação acima em relação a Δp ($\frac{d\Delta x}{d\Delta p} = 0$) obtém-se o limite absoluto mais baixo de medida de comprimento no espaço-tempo, $(\Delta x)_{min} = l_s$. A relação de incerteza do espaço-tempo em geral é postulada [65, 66] na forma

$$\Delta x_\mu \Delta x_\nu \geq l_p^2, \quad (1.6)$$

onde, agora, l_p é o comprimento de Planck. Logo, o conceito de ponto perde significado e a configuração do espaço-tempo deve ser reavaliada. Entretanto, para baixas energias, ou grandes distâncias, $l_p \rightarrow 0$, obtemos o espaço-tempo ordinário com coordenadas que comutam.

1.2 Quantização de Weyl e o Produto de Groenewold-Moyal

Em um cenário de quantização canônica, Weyl introduziu uma prescrição elegante para associar operadores quânticos a uma função clássica de variáveis no espaço de fase [67]. Esta técnica, que descrevemos a seguir, forneceu um caminho sistemático para descrever espaços não-comutativos em geral e para o estudo de teorias de campo.

Consideremos a álgebra comutativa de funções em um espaço Euclidiano \mathbb{R}^D com funções f que possam ser descritas por transformadas de Fourier,

$$\tilde{f}(k) = \int d^D x e^{-i k_i x_i} f(x), \quad (1.7)$$

onde o índice $i = 1, \dots, D$ corresponde às coordenadas espaciais de \mathbb{R}^D e $\tilde{f}(-k) = \tilde{f}(k)^*$ desde que $f(x)$ seja real. Construimos, então, um espaço não-comutativo substituindo as coordenadas locais x_i de \mathbb{R}^D por operadores Hermitianos \hat{x}_i , os quais obedecem a relação de comutação

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}. \quad (1.8)$$

A quantização de Weyl gera uma correspondência injetiva entre a álgebra das funções em \mathbb{R}^D e o anel de operadores (1.8). Então, dada uma função f e sua correspondente transformada de Fourier (1.7), o operador de Weyl é definido por

$$\widehat{\mathcal{W}} : f(x) \rightarrow \widehat{\mathcal{W}}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k) e^{i k_i \hat{x}_i}. \quad (1.9)$$

O operador de Weyl é Hermitiano se $f(x)$ é real. Se por exemplo, $f(x) = e^{ik_i x_i}$, temos que $\tilde{f}(k) = (2\pi)^D \delta(k' - k)$, e então,

$$\widehat{\mathcal{W}}[e^{ik_i x_i}] = \int \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k' - k) e^{ik'_i \hat{x}_i} = e^{ik_i \hat{x}_i}, \quad (1.10)$$

este é o operador de Weyl para uma função de onda plana no espaço não-comutativo.

Se agora considerarmos um produto de duas funções no espaço não comutativo,

$$\widehat{\mathcal{W}}[f(x)]\widehat{\mathcal{W}}[g(x)] = \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \tilde{f}(k_1) \tilde{g}(k_2) e^{ik_1 \cdot \hat{x}} e^{ik_2 \cdot \hat{x}} \quad (1.11)$$

onde

$$i k_1 \cdot \hat{x} \equiv i \sum_{a=1}^D k_{1a} \hat{x}_a,$$

ou seja, índices repetidos são somados. Utilizando a expanssão de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$e^{ik_1 \cdot \hat{x}} e^{ik_2 \cdot \hat{x}} = e^{-\frac{i}{2} k_{1i} \theta_{ij} k_{2j}} e^{i(k_1+k_2) \cdot \hat{x}} \quad (1.12)$$

na equação (1.11), obtemos,

$$\widehat{\mathcal{W}}[f(x)]\widehat{\mathcal{W}}[g(x)] = \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \tilde{f}(k_1) \tilde{g}(k_2) e^{-\frac{i}{2} k_{1i} \theta_{ij} k_{2j}} e^{i(k_1+k_2) \cdot \hat{x}}. \quad (1.13)$$

Podemos então definir o produto \star de Groenewold-Moyal [68, 69], o qual pode ser escrito como:

$$\widehat{\mathcal{W}}[f(x)]\widehat{\mathcal{W}}[g(x)] = \widehat{\mathcal{W}}[f(x) \star g(x)], \quad (1.14)$$

onde,

$$f(x) \star g(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \tilde{f}(k') \tilde{g}(k) e^{-\frac{i}{2} k'_i \theta_{ij} k_j} e^{ik \cdot x}, \quad (1.15)$$

a expressão (1.15) pode ser formulada na forma diferencial no espaço não-comutativo [70],

$$f(x) \star g(x) = f(x) \exp \left[\frac{i}{2} \theta_{ij} \overleftarrow{\partial}_i \overrightarrow{\partial}_j \right] g(x). \quad (1.16)$$

1.2.1 Propriedades do Produto \star de Moyal

Este produto \star (Moyal) é associativo, mas não é comutativo, ou

$$f(\hat{x})g(\hat{x}) \rightarrow f(x) \star g(x), \quad (1.17)$$

e expandindo este produto até segunda ordem em θ obtemos

$$\begin{aligned} f(x) \star g(x) &= f(x)g(x) + \frac{i}{2}\theta_{ij}\partial_i f(x)\partial_j g(x) + \\ &\quad - \frac{1}{8}\theta_{ik}\theta_{jl}\partial_i\partial_j f(x)\partial_k\partial_l g(x). \end{aligned} \quad (1.18)$$

O produto \star de Moyal é uma deformação do produto ordinário de funções em \mathbb{R}^D . Com isto temos que a definição do comutador em termos do produto \star de Moyal é dada por,

$$[f(x), g(x)]_\star = f(x) \star g(x) - g(x) \star f(x), \quad (1.19)$$

e verificamos que,

$$[f(x), g(x)]_\star = i\theta_{ij}\partial_i f(x)\partial_j g(x). \quad (1.20)$$

Logo, podemos redefinir a relação de comutação (1.3) usando o produto \star , de maneira que

$$[x_i, x_j]_\star = i\theta_{ij}. \quad (1.21)$$

Verificamos, também, que a derivada de uma função pode ser expressa em termos deste comutador,

$$[x_i, f(x)]_\star = i\theta_{ij}\partial_j f(x)$$

$$\partial_i f(x) = -i\theta_{ij}^{-1}[x_j, f(x)]_\star. \quad (1.22)$$

Uma consequência do comutador definido acima (1.22) é que translações em um campo escalar real ϕ , por exemplo, são equivalentes a transformações de calibre

[55]. Podemos definir um parâmetro de calibre $\hat{\lambda} = -\theta_{ij}^{-1}\xi_i x_j$ e verificar com a ajuda da expressão (1.22) que,

$$-i[\phi, \hat{\lambda}]_\star = -i[\phi, x_j]_\star(-\theta_{ij}^{-1}\xi_i) = \xi_i \partial_i \phi. \quad (1.23)$$

O comutador acima denota que: uma transformação de calibre não-comutativo para o campo escalar real é igual a uma transformação de coordenadas. A única teoria de campo com propriedade similar é a relatividade geral.

O produto de várias ondas planas resulta em,

$$e^{ik_1x} \star e^{ik_2x} \star \dots \star e^{ik_nx} = \exp \left[ix \sum_{i=1}^n k_i - \frac{i}{2} \sum_{i,j=1, i<j}^n k_i \theta k_j \right], \quad (1.24)$$

com $k_i \theta k_j = k_{ip} \theta_{pq} k_{jq}$, onde os índices p e q referem-se as componentes dos vetores k 's. O segundo termo na exponencial acima traz conseqüências não usuais na teoria ordinária de campos.

A ação referente a um campo não-comutativo é definida a partir de integrais, onde os produtos dos campos são expressos em termos do produto \star de Moyal, e onde a medida de integração é a do espaço ordinário. Verificamos três propriedades do produto \star de Moyal sob integrações:

$$\text{i)} \quad \int d^D x f(x) \star g(x) = \int d^D x f(x) g(x), \quad (1.25)$$

sob integração o produto \star de Moyal de duas funções é o mesmo que o produto ordinário das duas funções;

$$\text{ii)} \quad \int d^D x f_1(x) \star f_2(x) \star \dots \star f_n(x) = \int d^D x f_n(x) \star f_1(x) \star f_2(x) \star \dots \star f_{n-1}(x). \quad (1.26)$$

Sob integração o produto \star de Moyal é invariante por permutação cíclica;

$$\text{iii)} \quad \int d^D x f_1(x) \star f_2(x) \star \dots \star f_n(x) = \int \prod_{i=1}^n \frac{d^D p_i}{(2\pi)^n} \sum_{j=1}^n \tilde{f}_j(p_j) \delta^D(p_j) \exp \left[-\frac{i}{2} \sum_{i,j=1, i<j}^n k_i \theta k_j \right]. \quad (1.27)$$

Esta última propriedade relaciona o produto \star de Moyal de funções com suas respectivas transformações de Fourier. Estas propriedades são necessárias na determinação das funções de Green e das respectivas regras de Feynman para os campos não-comutativos. No Capítulo 3 veremos que o fator de fase na expressão (1.27) modifica os diagramas de Feynman do campo escalar, dando origem aos diagramas não-planares responsáveis pelo fenômeno *UV/IR Mixing*. Estamos, então, aptos para expressar uma ação de campo escalar em termos de coordenadas não-comutativas.

1.3 Campos Não-Comutativos e a Aplicação de Seiberg-Witten

O procedimento utilizado para a construção de teorias de campo em coordenadas não-comutativas consiste em escrever a ação do campo onde os produtos ordinários de campos são substituídos por produtos de Moyal. Assim, um campo escalar dado por

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2 \right), \quad (1.28)$$

tem sua respectiva ação de campo não-comutativo reescrita através do produto \star de Moyal sobre os campos, ou seja,

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi + \frac{m^2}{2} \phi \star \phi \right). \quad (1.29)$$

Onde observamos que da expressão (1.25), uma teoria de campo livre tem a ação do campo não-comutativo igual a ação do campo em coordenadas ordinárias. Por outro lado, na presença de interações, os efeitos da não-comutatividade são bastante expressivos.

Vejamos a construção de uma teoria de gauge $U(1)$ não-comutativa, a partir

do Lagrangiano escalar,

$$S = \int d^4x \left(\partial_\mu \phi^\dagger \star \partial^\mu \phi + m^2 \phi^\dagger \star \phi \right), \quad (1.30)$$

com uma lei de transformação local para os campos ϕ e ϕ^\dagger dado por,

$$\phi^g = \phi \star g(x), \quad (1.31)$$

tal que,

$$g(x) = e^{i\Lambda(x)}, \quad (1.32)$$

e as variações nos campos sejam,

$$\begin{cases} \delta\phi = i\phi \star \Lambda \\ \delta\phi^\dagger = -i\Lambda \star \phi^\dagger. \end{cases} \quad (1.33)$$

Tais transformações levam à construção de um Lagrangiano, de maneira que a ação

$$S = \int d^4x \left(D_\mu \phi^\dagger \star D^\mu \phi + m^2 \phi^\dagger \star \phi \right), \quad (1.34)$$

seja invariante por transformações locais (1.33), e a derivada covariante seja tal que,

$$\begin{cases} D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i\phi \star \hat{A}_\mu, \\ (D_\mu \phi)^\dagger = \partial_\mu \phi^\dagger + i\hat{A}_\mu \star \phi^\dagger. \end{cases} \quad (1.35)$$

A lei de transformação para o campo de gauge \hat{A}_μ é,

$$\hat{A}_\mu^g = g^\dagger \star A_\mu \star g + \frac{1}{i} g^\dagger \star \partial_\mu g, \quad (1.36)$$

tal que uma variação infinitesimal no campo de gauge seja,

$$\delta \hat{A}_\mu = \partial_\mu \Lambda + i[A_\mu, \Lambda]_\star. \quad (1.37)$$

E, por fim, o *field strength* é dado por,

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_\star. \quad (1.38)$$

Temos, então, os ingredientes básicos para a construção de um modelo de gauge em geometria não-comutativa ¹.

¹Detalhes dos cálculos estão no Apêndice B

Seiberg e Witten observaram que uma teoria de gauge não-comutativa pode ser descrita, de modo equivalente, por uma teoria de gauge comutativa, sendo esta formulada em termos dos produtos ordinários para o vetor potencial comutativo A_μ mas com uma dependência explícita em $\theta^{\alpha\beta}$ [7, 71]. Esta equivalência é estabelecida quando expressamos o vetor não comutativo \widehat{A}_μ como uma função de A_μ e $\theta^{\alpha\beta}$. Até a primeira ordem em θ , tal aplicação é dada por,

$$\widehat{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}A_\alpha(\partial_\beta A_\mu + F_{\beta\mu}), \quad (1.39)$$

onde $F_{\beta\mu}$ é o *field strength* ordinário comutativo.

Os procedimentos vistos neste capítulo são os conceitos fundamentais para abordar uma teoria de campos não-comutativa. No Capítulo 3 faremos uso destes conceitos para o campo escalar real. Em seguida, faremos uma aplicação ao campo vetorial-tensorial abordado no Capítulo 4, com resultados muito semelhantes ao do campo escalar.

Capítulo 2

Não-Comutatividade em Fenômenos de Baixa Energia

Através do mapeamento de Weyl, é possível construir Teorias de Campos Não-comutativas no espaço-tempo de Minkowski, $\mathcal{M}^{1,D}$, com as coordenadas satisfazendo a relação de comutação (1.3),

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

onde μ e ν são os índices do espaço $\mathcal{M}^{1,D}$. Porém, Teorias de Campo em coordenadas não-comutativas que obedecem a relação de comutação acima, e particularmente, com a coordenada tempo não-comutativa $\theta_{\mu 0} \neq 0$, exibem efeitos não-causais, problemas conceituais com a unitariedade e dificuldades na interpretação da evolução Hamiltoniana [72–76]. Vamos, então, assumir que as teorias de campo no espaço-tempo devem satisfazer as condições:

$$\theta_{0j} = 0 \quad \text{e} \quad \theta_{ij} \neq 0, \quad (2.2)$$

ou seja, o parâmetro não-comutativo é não nulo apenas para as coordenadas espaciais.

Vamos dar uma definição precisa e específica da extensão não-comutativa que vamos aplicar aos operadores Hermitianos x_μ e p_ν ordinários da Mecânica Quântica, que é o ponto de partida deste capítulo. De fato, uma particular

e muito interessante extensão das coordenadas no espaço-tempo de Minkowski pode ser escrita como [77–79]:

$$\hat{x}_\mu = x_\mu - \frac{\theta_{\mu\nu} p^\nu}{2\hbar}, \quad (2.3)$$

satisfazendo a relação de comutação

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Com os argumentos acima, temos então um forma geral para as coordenadas não comutativas destinadas aos tópicos abordados neste capítulo, ou seja, somente em termos das coordenadas espaciais, a partir da expressão (2.3) é:

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{\theta_{ij} p_j}{2\hbar}, \quad (2.5)$$

tal que os operadores Hermitianos ordinários satisfazem o comutador de Heisenberg $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$. Não há alterações para os momentos, ou seja, $\hat{p}_i = p_i$. Sendo assim, temos os comutadores,

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}, \quad (2.6)$$

não havendo alteração para os seguintes comutadores

$$\begin{aligned} [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0, \\ [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

A matriz θ_{ij} é anti-simétrica e no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 existem apenas 3 componentes não nulas independentes entre si, e podem ser definidas em termos do tensor de Levi-Civita ¹,

$$\theta_{ij} = -\epsilon_{ijk}\theta_k, \quad (2.8)$$

¹No Apêndice é explicitado várias operações envolvendo as coordenadas não comutativas definidas por (2.5).

onde θ_k são componentes do vetor $\boldsymbol{\theta}$. Então a equação das coordenadas não-comutativas (2.5) pode ser escrito na forma de um vetor,

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p} \times \boldsymbol{\theta}}{2\hbar}. \quad (2.9)$$

que é a definição de um vetor posição no espaço não-comutativo. Uma partícula imersa em tal espaço na posição $\hat{\mathbf{r}}$ é uma partícula não-localizada, com isto, tomaremos $\hat{\mathbf{r}}$ como uma posição no espaço Euclidiano sob flutuações quânticas. A localização da posição \mathbf{r} de uma partícula, no espaço \mathbb{R}^3 , terá pelo princípio de incerteza, uma imprecisão do momento desta partícula.

Como temos visto, o parâmetro de não-comutatividade θ implica deformação da estrutura do espaço. A álgebra das coordenadas do espaço é não-comutativo e assim novos elementos físicos podem agora ser especulados e outros revisados. Importantes trabalhos têm sido realizados na tentativa de entender as propriedades do espaço-tempo não-comutativo [36, 70, 76]. Cogita-se que as coordenadas do espaço sejam não-comutativas em escalas de comprimento próximas à escala de Planck, razão pela qual acredita-se que a geometria não-comutativa possa desempenhar um papel importante no estudo da Gravitação Quântica [80–86]. Um dos principais problemas em aberto do ponto de vista teórico nos modelos não-comutativos é a determinação do parâmetro θ . Na grande maioria dos modelos tal parâmetro é arbitrário. Uma questão de grande relevância para a aceitação de modelos não-comutativos como candidatos à descrição de fenômenos físicos é, portanto, a de como o parâmetro theta possa estar relacionado a quantidades físicas observáveis [87–93]. Neste capítulo vamos propor uma relação entre o parâmetro θ e o operador de spin \mathbf{S} , no espaço $3D$. Vamos mostrar que o spin \mathbf{S} pode ser a fonte da deformação da estrutura do espaço que origina uma geometria não-comutativa. Vamos mostrar que, com esta conjectura, o acoplamento de

spin-órbita em sistemas ligados pode ser deduzido naturalmente a partir de um potencial central arbitrário no espaço não-comutativo. Vamos analisar também a presença de uma possível deformação no termo de energia cinética para modelos Hamiltonianos, e obter um fator geral de deformação associado às partículas confinadas no espaço não-comutativo.

2.1 Uma Geometria Não-Comutativa devido ao Spin

É bem conhecido que em um espaço bidimensional as estruturas mais simples são as formas simpléticas, com as quais podemos associar o parâmetro θ_{ij} , do espaço não-comutativo, ao tensor de Levi-Civita $\theta\epsilon_{ij}$, onde θ é apenas um parâmetro escalar arbitrário com dimensão de área. Em um espaço $3D$, o tensor de Levi-Civita nos permite associar o tensor θ_{ij} com um vetor (dual), sendo este dado por $\theta_k\epsilon_{ijk}$. Podemos assumir agora que o vetor dual $\boldsymbol{\theta}$, em $3D$, é diretamente proporcional ao operador de spin \mathbf{S} , da seguinte forma [94, 95],

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\hbar\mathbf{S}}{m^2c^2}, \quad (2.10)$$

sendo $\boldsymbol{\theta}$ o vetor dual associado ao tensor θ_{ij} . De uma forma geral, o operador \mathbf{S} está relacionado às matrizes de Pauli $\boldsymbol{\sigma}$ através da equação,

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}, \quad (2.11)$$

Isto sugere que a não-comutatividade da posição \hat{x}_i está relacionada ao operador de spin \mathbf{S} , que satisfaz a seguinte álgebra,

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = -\frac{i\hbar}{m^2c^2}\epsilon_{ijk}S_k. \quad (2.12)$$

Esta álgebra combina duas estruturas, posição e spin, importantes no âmbito da geometria não-comutativa. Nesse caso, a relação acima revela também que a

coordenada espacial \hat{x}_i (e a própria estrutura do espaço) sofre uma deformação devido à presença do spin, como pode ser visto também no trabalho de Madore [96],

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{S}}{2m^2c^2}. \quad (2.13)$$

Como uma implicação natural, seria interessante investigar os efeitos da deformação das coordenadas devido ao spin para alguns sistemas físicos simples e de interesse. Vamos considerar, primeiramente, o exemplo do átomo de hidrogênio, onde a Hamiltoniana possui o termo de energia potencial Coulombiano. Se fizermos um tratamento em coordenadas não-comutativas, o potencial Coulombiano é o mesmo do Capítulo 2 e a Hamiltoniana em coordenadas não-comutativas do átomo de hidrogênio é dada por,

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{\hat{r}}. \quad (2.14)$$

Neste ponto estamos adotando unidades gaussianas. Na expressão acima, m representa a massa reduzida do sistema e a constante e a carga elementar. Assim usaremos a posição \mathbf{r} no espaço não-comutativo, e pode ser reescrita como,

$$\hat{r}^2 = r^2 + \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}}{m^2c^2} + \frac{\hbar^2}{16m^4c^4} |\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}|^2, \quad (2.15)$$

onde a expressão acima pode ser simplificada considerando a álgebra de Clifford para as matrizes σ_i ,

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad (2.16)$$

e isto resulta que,

$$|\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}|^2 = 2\mathbf{p}^2 \quad (2.17)$$

e então a equação (2.15) se torna,

$$\hat{r}^2 = r^2 + \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}}{m^2c^2} + \frac{\hbar^2 \mathbf{p}^2}{8m^4c^4}. \quad (2.18)$$

Podemos agora substituir o valor de \hat{r} na Hamiltoniana e expandir $\frac{1}{\hat{r}}$ até a primeira ordem². Considerando que $\frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}}{m^2 c^2} \gg \frac{\hbar^2 \mathbf{p}^2}{8m^4 c^4}$ para baixas energias (momento \mathbf{p} baixo), obtemos a seguinte expressão para a Hamiltoniana \hat{H} , do átomo de hidrogênio,

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{2m^2 c^2 r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} = H_0 + H_{\text{SO}}, \quad (2.19)$$

onde H_0 é a Hamiltoniana ordinária do átomo de Hidrogênio e H_{SO} é o termo de acoplamento spin-órbita,

$$H_{\text{SO}} = \frac{e^2}{2m^2 c^2 r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}. \quad (2.20)$$

Na Mecânica Quântica convencional, o termo de acoplamento spin-órbita H_{SO} é introduzido “*ad hoc*” na Hamiltoniana [97], dada pela expressão geral conhecida na literatura,

$$H_{\text{SO}} = \frac{1}{2m^2 c^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \right) \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}, \quad (2.21)$$

onde $V(r)$ é uma função arbitrária que denota a energia potencial em coordenadas (comutativas) ordinárias. É interessante observar aqui que a Hamiltoniana não-comutativa (2.19) fornece naturalmente o termo de spin-órbita, quando consideramos a expansão do potencial. Lembramos também que o termo de spin-órbita na Hamiltoniana (2.19) é idêntico ao termo previsto pela equação (2.21) da Mecânica Quântica. Esta possibilidade já tinha sido mencionada por Chaichian *et al* [98], sem ênfase nos cálculos, para o átomo de Hidrogênio no espaço não-comutativo. A proposta de Chaichian era verificar apenas os efeitos não-comutativos no *Lamb shift*.

Os resultados acima sugerem, de uma certa forma, que podemos aplicar com sucesso a idéia da deformação do espaço, devido ao spin, para outros sistemas ligados, com formas variadas para a energia potencial. Podemos, por exemplo,

²Efeitos não-comutativos devido ao termo $\frac{\hbar^2 \mathbf{p}^2}{8m^4 c^4}$ serão considerados mais adiante.

considerar o potencial para o oscilador harmônico simples no espaço não comutativo,

$$\widehat{V} = \frac{k\hat{r}^2}{2}, \quad (2.22)$$

e assumindo (2.18) até a primeira ordem, temos,

$$\widehat{V} = \frac{kr^2}{2} + \frac{k}{2} \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}}{m^2 c^2}, \quad (2.23)$$

onde também observamos a presença do termo de acoplamento spin-órbita H_{SO} para o oscilador. Lembramos que esse termo foi obtido naturalmente como resultado da expansão do potencial não-comutativo. Um cálculo simples mostra que este termo é idêntico ao previsto pela Mecânica Quântica através da equação (2.21).

É interessante verificar também os efeitos não-comutativos produzidos em um potencial logarítmico, que é relevante em muitos estudos de física de partículas [99]. Assim, podemos escrever o potencial como,

$$\widehat{V} = V_0 \ln|a\hat{r}|. \quad (2.24)$$

Usando o mesmo procedimento dos exemplos anteriores, podemos expandir o logaritmo acima e tomar os primeiros termos, que resulta,

$$\widehat{V} = V_0 \ln|ar| + \frac{V_0}{2m^2 c^2 r^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}, \quad (2.25)$$

onde verificamos novamente a presença do termo de spin-órbita naturalmente. A expressão convencional (2.21) confirma esse resultado, que é dado por,

$$H_{\text{SO}} = \frac{V_0}{2m^2 c^2 r^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}. \quad (2.26)$$

Como um último exemplo, vamos considerar o potencial de Yukawa, no espaço não-comutativo, escrito como,

$$\widehat{V} = \frac{qe^{-\alpha\hat{r}}}{\hat{r}}. \quad (2.27)$$

Seguindo o mesmo procedimento anterior, podemos expandir a função (2.27) e tomar os primeiros termos, que resulta em,

$$\widehat{V} \approx V(r) - \frac{qe^{-\alpha r}}{2m^2c^2r^3} (1 + \alpha r) \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}, \quad (2.28)$$

onde notamos também a presença do termo de spin-órbita, que é idêntico ao termo convencional da Mecânica Quântica,

$$H_{\text{SO}} = -\frac{qe^{-\alpha r}}{2m^2c^2r^3} (1 + \alpha r) \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}. \quad (2.29)$$

Pelos exemplos apresentados, fica claro que podemos obter a expressão do termo de acoplamento spin-órbita (2.21) da Mecânica Quântica, considerando apenas uma função arbitrária (e bem comportada) da energia potencial \widehat{V} no espaço não-comutativo. Precisamos considerar também que esta função deve apresentar uma correspondência de Weyl bem definido, como exposto no Capítulo 1. Assim, obedecendo essas condições, é possível expandir analiticamente a função \widehat{V} e tomar os primeiros termos, que resultam,

$$\widehat{V} = V(\hat{r}) \approx V\left(\left(r^2 + \frac{\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \approx V\left(r + \frac{\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}}{2r\hbar}\right) = V(r + \xi). \quad (2.30)$$

e considerando também a expansão, temos que,

$$\begin{aligned} V(r + \xi) &\approx V(r) + \xi \left. \frac{dV}{d\xi} \right|_{\xi=r} \\ V(r + \xi) &\approx V(r) + \frac{\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}}{2r\hbar} \left(\frac{dV}{dr} \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

e usando $\boldsymbol{\theta} = \frac{\hbar \mathbf{S}}{m^2c^2}$, resulta que,

$$\widehat{V} \approx V(r) + \frac{1}{2m^2c^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \right) \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}. \quad (2.32)$$

Aqui podemos concluir que a expansão de um potencial arbitrário em coordenadas não-comutativas pode resultar no potencial ordinário e um termo de acoplamento

spin-órbita, a partir de um mecanismo simples, quando consideramos a relação entre o parâmetro não-comutativo θ e o spin.

Podemos também obter o termo de acoplamento spin-órbita quando considerarmos a equação de Schrödinger com uma extensão não-comutativa dada em termos do produto \star de Moyal, ou seja, uma Mecânica Quântica em coordenadas não-comutativas,

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\star\psi, \quad (2.33)$$

onde devemos observar que a deformação, devido às coordenadas não-comutativas, ocorre apenas no produto entre a função de energia potencial quântica e a função de onda, desde que os outros termos na equação de Schrödinger são apenas operações diferenciais na função de onda ψ . Este produto \star de Moyal até a primeira ordem em θ é dado pela equação (1.18),

$$V\star\psi \approx V\psi + \frac{i}{2}\theta_{ij}\partial_i V\partial_j\psi. \quad (2.34)$$

Podemos, então, fazer uso das equações (2.8) e (2.10) e reescrever a equação acima da seguinte forma,

$$V\star\psi \approx V\psi - \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\hbar S_k}{m^2 c^2}\partial_i V\partial_j\psi. \quad (2.35)$$

Para um potencial central V podemos reescrever $\partial_i V$ como,

$$\partial_i V = \frac{dV}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}\frac{dV}{dr}, \quad (2.36)$$

com $r = \sqrt{x_j^2}$. Também devemos fazer a troca $-i\hbar\partial_j\psi \rightarrow p_j\psi$, de forma que,

$$V\star\psi \approx V\psi + \frac{1}{2m^2 c^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\epsilon_{ijk}x_i p_j\psi S_k, \quad (2.37)$$

ou então,

$$V\star\psi \approx V\psi + \frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{L}}{2m^2 c^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\right)\psi. \quad (2.38)$$

E aqui concluímos que o termo de acoplamento spin-órbita é uma consequência natural de uma geometria não-comutativa, que teve o produto entre o potencial central V e a auto-função ψ deformado pelo produto \star de Moyal.

2.2 Efeitos Não-comutativos na Energia Cinética

Até aqui fizemos considerações a respeito do acoplamento spin-órbita que provém da geometria não-comutativa com o ansatz (2.10). Vamos analisar agora contribuições provindas do terceiro termo da equação (2.18) $\frac{\hbar^2 \mathbf{p}^2}{8m^4 c^4}$, que deve aparecer em potenciais centrais na Mecânica Quântica em coordenadas não-comutativas. Como dito antes este termo foi desprezado desde que o momento \mathbf{p} fosse baixo. Mas podemos ver o comportamento deste termo quando o momento é expressivo. Por exemplo, no caso do átomo de hidrogênio, onde a Hamiltoniana em coordenadas não-comutativas dada por (2.14) e expandida em série de Taylor é,

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \frac{e^2}{2m^2 c^2 r^3} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} + \frac{e^2 \hbar^2 p^2}{16m^4 c^4 r^3}, \quad (2.39)$$

o último termo na Hamiltoniana decai com r^3 e representa um termo de contribuição cinética. Este termo pode ser incorporado ao primeiro termo dando origem a uma Hamiltoniana deformada,

$$\hat{H} = \alpha(r) \frac{p^2}{2m} + V(r) + H_{\text{SO}}, \quad (2.40)$$

onde $\alpha(r)$ é o fator de deformação para a energia cinética. O potencial de Coulomb em coordenadas não-comutativas expandido traz o potencial eletrostático ordinário mais o termo de acoplamento spin-órbita e mais um termo de pequenas influências na energia cinética do sistema. Denotamos $\alpha(r)$ por,

$$\alpha(r) = 1 + \frac{e^2 \hbar^2}{8m^3 c^4 r^3}. \quad (2.41)$$

Pode-se observar facilmente que a contribuição máxima do fator α ocorre quando o sistema está no estado fundamental de energia. Considerando o átomo de

Hidrogênio, isto ocorre exatamente quando a distância r é o raio de Bohr $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$. Isto resulta que o fator $\alpha = \alpha(a_0)$ pode ser reescrito como,

$$\alpha(a_0) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{E_f}{E_r} \right)^2, \quad (2.42)$$

onde denotamos por $E_f = \frac{e^2}{2a_0}$ a energia de estado fundamental do átomo de hidrogênio e por $E_r = mc^2$ a energia de repouso do elétron. É interessante notar também que a deformação do termo cinético depende intrinsecamente da razão $\frac{E_f}{E_r}$ do sistema. Assim, uma estimativa simples de E_f e E_r revela que, para o átomo de Hidrogênio, temos que $\left(\frac{E_f}{E_r} \right)^2 \approx 10^{-20}$ e isto implica que os efeitos não-comutativos são imperceptíveis no termo cinético, pois $\alpha \approx 1$. Isto indica que não há modificação relevante para a energia cinética do elétron quando consideramos o átomo de Hidrogênio no estado fundamental. Vale ressaltar ainda que os efeitos da não-comutatividade do espaço tendem a diminuir para os estados excitados ($r \neq a_0$) e, conseqüentemente, isto induziria modificações bem menores que 10^{-20} no termo cinético.

É interessante observar que a razão $\frac{E_f}{E_r}$ indica que efeitos da não-comutatividade do espaço estão presentes no sistema e modificam o valor da energia cinética de partículas em estado ligado. Podemos inferir, então, que um oscilador harmônico, em um espaço não-comutativo, deve apresentar também um fator α de deformação. Então, partindo dessa motivação, vamos agora estudar o comportamento desse sistema considerando a seguinte Hamiltoniana no espaço não-comutativo,

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{r}^2. \quad (2.43)$$

Utilizando a equação (2.18), podemos escrever

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} r^2 + \frac{\omega^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}}{2mc^2} + \frac{\omega^2 \hbar^2 p^2}{16m^3 c^4}, \quad (2.44)$$

ou simplesmente,

$$\hat{H} = H_0 + H_{\text{SO}} + \frac{\omega^2 \hbar^2 p^2}{16m^3 c^4}. \quad (2.45)$$

Lembramos que o último termo é a contribuição extra para a energia cinética. Como no caso do átomo de hidrogênio, podemos escrever a Hamiltoniana do oscilador harmônico usando o termo de deformação α , na seguinte forma,

$$\hat{H} = \alpha(\omega) \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} r^2 + H_{\text{SO}}, \quad (2.46)$$

onde $\alpha(\omega)$ é agora uma função explícita da frequência angular ω . Podemos também expressar a equação (2.46) como,

$$\alpha(\omega) = 1 + \frac{1}{18} \left(\frac{E_f}{E_r} \right)^2, \quad (2.47)$$

onde denotamos por $E_f = \frac{3\omega\hbar}{2}$ a energia do estado fundamental do oscilador harmônico em $3D$ e por $E_r = mc^2$ a energia de repouso da partícula oscilante. Observamos então que para baixas frequências, a razão $\frac{E_f}{E_r}$ é insignificante. Podemos verificar também que o fator de deformação $\alpha(\omega)$ cresce quadraticamente com a frequência ω , e com isso podemos concluir que, para osciladores com alta frequência angular ω , haverá um incremento para a energia cinética da partícula. Este efeito pode estar correlacionado à violação da simetria de Lorentz. [24–30]. Podemos especular ainda que a deformação da energia cinética em consideração pode ser perceptível apenas na física de altas energias.

Vamos agora considerar novamente a expressão de α apenas como função de ω ,

$$\alpha(\omega) = 1 + \beta\omega^2, \quad (2.48)$$

onde β é um parâmetro que depende apenas da massa do oscilador harmônico. Nesse caso, podemos então idealizar um elétron confinado num espaço

não-comutativo, descrevendo um movimento harmônico. Assim, podemos estimar facilmente que $\beta = 1,9 \times 10^{-43} \text{rad}^{-2} \text{s}^{-2}$ e, em seguida, apresentar alguns valores de α , dispostos na tabela abaixo,

$\alpha(\omega)$	ω (rad/s)	
1,00	$\leq 1,0 \times 10^{18}$	\leq frequências ultravioleta
1,05	$5,0 \times 10^{20}$	raios X
1,20	$1,0 \times 10^{21}$	raios γ
6,00	$5,0 \times 10^{21}$	raios γ
20,00	$1,0 \times 10^{22}$	frequências mais altas

Observamos, então, que para frequências $\leq 10^{18} \text{rad/s}$ (limite do espectro ultravioleta), a energia cinética não é significativamente alterada. Todavia, um pequeno acréscimo de energia cinética poderia ser observado em confinamentos nucleares, bem como em Física de altas energias, onde os sistemas apresentam frequências da ordem $5 \times 10^{20} \text{rad/s}$, em geral. Devemos enfatizar ainda, que para $\alpha(\omega)$ muito alto, o oscilador harmônico pode perder a estabilidade. Além disso, observamos que o valor de $\alpha(\omega)$ depende crucialmente da massa do sistema. Isto implica que, para um próton em movimento harmônico, podemos estimar que $\beta = 5,7 \times 10^{-50} \text{rad}^{-2} \text{s}^{-2}$ e isto modifica significativamente o fator $\alpha(\omega)$. Em geral verifica-se, segundo as equações (2.47) (2.48), que para sistemas com grandes massas (ou seja, β pequeno), o fator $\alpha(\omega)$ é menos expressivo, o que implica em maior estabilidade do sistema. Isto é interessante porque poderíamos estimar violações da simetria de Lorentz a partir da razão $\frac{E_f}{E_r}$ no modelo padrão, bem como nas interações produzidas no confinamento de quarks.

2.2.1 Quantização do Oscilador Harmônico Não-Comutativo

Nesta seção vamos analisar brevemente o espaço de Fock relativo à Hamiltoniana (2.44), na ausência do termo de spin-órbita. Nesse caso, os operadores de criação e destruição apresentam o termo de deformação $\alpha(\omega)$ e o espaço de Fock modificado

é consistentemente definido como,

$$a_i = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_i + i\sqrt{\frac{\alpha(\omega)}{2m\hbar\omega}}p_i \quad a_i^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_i - i\sqrt{\frac{\alpha(\omega)}{2m\hbar\omega}}p_i, \quad (2.49)$$

onde x_i é o vetor posição ordinário. Assim, é possível construir o operador número de partícula \hat{N} de forma análoga ao caso ordinário, tal que,

$$\hat{N} = a_i^\dagger a_i = \frac{1}{\hbar\omega} \left(\frac{\alpha(\omega)p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} \right) - \frac{3}{2}\sqrt{\alpha(\omega)}. \quad (2.50)$$

Disso resulta que a Hamiltoniana (2.44) pode ser definida a partir de \hat{N} e da deformação $\alpha(\omega)$, como,

$$\hat{H} = \left(\hat{N} + \frac{3}{2}\sqrt{\alpha(\omega)} \right) \hbar\omega. \quad (2.51)$$

Assumindo esses resultados, podemos concluir que a energia fundamental \hat{E}_f do sistema, no espaço não comutativo, é dependente da razão $\frac{E_f}{E_r}$, onde E_f é a energia fundamental do oscilador harmônico. A energia \hat{E}_f é dada por,

$$\hat{E}_f = \frac{3}{2} \left[1 + \frac{1}{18} \left(\frac{E_f}{E_r} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \hbar\omega. \quad (2.52)$$

É interessante notar que quando a razão $\frac{E_f}{E_r}$ é insignificante (fora do regime não-comutativo) a equação (2.52) recupera o valor da energia fundamental E_f do oscilador harmônico convencional,

$$\hat{E}_f = E_f. \quad (2.53)$$

Por outro lado, no regime não-comutativo, o valor de \hat{E}_f é o resultado da correção da energia fundamental E_f quando o oscilador é definido em um espaço não-comutativo. Isto sugere que é possível conhecer o valor do estado fundamental de energia E_f se pudermos estimar, em um nível teórico, o grau de deformação da geometria. Como já mostramos, esta deformação, em certa medida, é diretamente proporcional ao spin \mathbf{S} . Isto indica um caminho para uma estimativa

teórica do valor de E_f . Além disso, é razoável afirmar que, mediante as equações (2.42) e (2.47), é possível generalizar o fator de deformação $\alpha(E_f)$ do termo cinético, para uma Hamiltoniana arbitrária no espaço não-comutativo, que inclui um potencial central \widehat{V} . Podemos assumir, genericamente que o fator $\alpha(E_f)$ é dado pela seguinte equação,

$$\alpha(E_f) = 1 + \kappa \left(\frac{E_f}{E_r} \right)^2, \quad (2.54)$$

onde κ é um valor numérico. Assim, podemos utilizar a expressão (2.54) para estimar diretamente o valor da energia fundamental E_f para um sistema físico arbitrário em estado ligado. Note que esta conjectura agarra-se ao fato de que a geometria é não-comutativa para pequenas distâncias do espaço.

Um exemplo interessante da estimativa teórica do estado E_f de um sistema físico, é considerar um sistema de Quarks pesados, que consiste basicamente de dois Quarks $\bar{Q}Q$ formando um Quarkonium. Vamos abordar aqui um tratamento não-relativístico nesse sistema, onde podemos descrever o Quarkonium $\bar{Q}Q$ através da equação de Schrödinger, onde prevalece o domínio de um espaço não-comutativo. A Hamiltoniana desse sistema pode ser, então, escrita como,

$$\widehat{H} = \frac{p^2}{2m} + \widehat{V}, \quad (2.55)$$

onde m é a massa reduzida do sistema $\bar{Q}Q$. A nossa intenção agora é obter uma expressão analítica para estimar teoricamente a energia fundamental do sistema $\bar{Q}Q$, através do fator geral α fornecido pela equação (2.54). Para isto, vamos assumir que o potencial de interação deste sistema no espaço não-comutativo é dado pela equação abaixo,

$$\widehat{V} = \varphi + \lambda \hat{r}^\nu, \quad (2.56)$$

onde φ , λ e ν são parâmetros arbitrários. Expandindo \widehat{V} e tomando os primeiros

termos, obtemos a seguinte Hamiltoniana,

$$\begin{aligned}\widehat{H} &= \frac{p^2}{2m} + \varphi + \lambda r^\nu + \frac{\nu \lambda r^{\nu-2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}}{2m^2 c^2} + \frac{\nu \lambda r^{\nu-2} \hbar^2 p^2}{16m^4 c^4} \\ &= H_0 + H_{\mathbf{SO}} + \frac{\nu \lambda r^{\nu-2} \hbar^2 p^2}{16m^4 c^4},\end{aligned}\tag{2.57}$$

onde H_0 é Hamiltoniana ordinária. Podemos reescrever a equação (2.57) com o fator de deformação α , na seguinte forma,

$$\widehat{H} = \alpha(r) \frac{p^2}{2m} + \varphi + \lambda r^\nu + H_{\mathbf{SO}},\tag{2.58}$$

onde $\alpha(r)$ é dado por,

$$\alpha(r) = 1 + \frac{\nu \lambda \hbar r^{\nu-2}}{8m^3 c^4}.\tag{2.59}$$

verifica-se, então, que o máximo valor de α deve ocorrer para algum $r = a_0$, onde a_0 denota o raio do estado fundamental do sistema $\bar{Q}Q$. Assim, comparando as equações (2.54) com a equação (2.59), temos que,

$$\frac{\nu \lambda \hbar a_0^{\nu-2}}{8m^3 c^4} = \kappa \left(\frac{E_f}{E_r} \right)^2,\tag{2.60}$$

Consequentemente, é possível obter a expressão analítica para o estado fundamental de energia do sistema $\bar{Q}Q$, que é dado por,

$$E_f = \frac{\eta \hbar \lambda^{\frac{1}{2}} a_0^{\frac{\nu-2}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}},\tag{2.61}$$

onde $\eta = \left(\frac{\nu}{8\kappa} \right)^{\frac{1}{2}}$ é um fator numérico. O raio fundamental a_0 para o sistema $\bar{Q}Q$, é dado por [99],

$$a_0 \sim (m\lambda)^{-\frac{1}{2+\nu}},\tag{2.62}$$

que resulta na expressão,

$$E_f = \frac{\eta \hbar (m\lambda)^{\frac{2}{2+\nu}}}{m}.\tag{2.63}$$

Este é um resultado analítico para o estado fundamental do Quarkonium obtido a partir do potencial \widehat{V} no espaço não-comutativo. A equação (2.63) ajusta-se

muito bem ao espaçamento de níveis de energia do sistema $\bar{Q}Q$ fornecido na literatura [99],

$$\Delta E \propto \frac{1}{m} (m\lambda)^{\frac{2}{2+\nu}}. \quad (2.64)$$

Devemos ainda mencionar que a interação do Quarkonium mediante o potencial \hat{V} fornecido pela equação geral (2.56) ajusta bem os modelos teóricos e experimentais para interações de quarks quando assume-se $\nu = 0, 1$.

Podemos admitir um raio de atuação para estes efeitos não-comutativos. Observamos que o módulo do vetor spin é da ordem de \hbar , de forma que $\theta \sim \lambda_C^2$. Como o parâmetro não-comutativo tem dimensão de área, podemos imaginar que, a região de atuação não-comutativa é uma esfera de raio $\sim \sqrt{\theta}$, implicando que, o raio de atuação dos efeitos não-comutativos são da ordem do comprimento de onda Compton da partícula.

Capítulo 3

Extensão Não-Comutativa para o Campo Escalar

Neste capítulo, vamos fazer um estudo da dinâmica do campo escalar não-comutativo, e encontrar uma intrigante mistura de divergências ultravioleta (UV) e infravermelha (IR), conhecida na literatura como UV/IR *Mixing*. Veremos que na teoria de campo escalar não-comutativa surgem diagramas de Feynman não-planares que tem uma melhor convergência no regime UV , para valores não nulos de momentos externos. Esta é uma consequência de um fator de fase que regula a integral para a convergência. Este fenômeno de mistura das divergências UV e IR foi muito bem abordado no artigo do Minwalla *et al* [46].

3.1 Campo Escalar Não-Comutativo

As funções de Green de N pontos, $G^{(N)}(x_1, \dots, x_N)$, são os objetos básicos da teoria de campos. Elas fornecem a matriz de espalhamento S e, em princípio, os elementos de matriz de qualquer observável. Estas funções de Green são definidas por,

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \exp(iS(\phi)), \quad (3.1)$$

Todas as informações não-comutativas estão contidas na ação S . Como já discutido no Capítulo 1, a ação do campo escalar ϕ em coordenadas não-comutativas é

obtida por substituir os produtos ordinários pelo produto \star de Moyal. De forma que, a ação S para a teoria $\lambda\phi^4$ é dada por,

$$S = \int dx \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi \star \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right]. \quad (3.2)$$

A análise dos diagramas de Feynman em teorias construídas no espaço não-comutativo é particularmente interessante desde que, diferenças importantes advêm da contraparte comutativa. Consideremos a interação escalar $\lambda\phi^4$ e a equação (1.27), então obteremos o vértice,

$$\begin{aligned} S_{int} &= \frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi \star \phi \star \phi \star \phi \\ &= \frac{\lambda}{4!} \int \frac{d^4p_1 \cdots d^4p_4}{(2\pi)^3} \tilde{\phi}(p_1) \cdots \tilde{\phi}(p_4) \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \exp \left[\frac{-i}{2} \sum_{i,j=1,i<j}^4 p_i \theta p_j \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

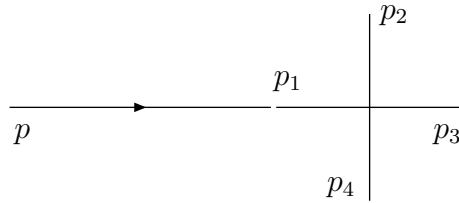
com $p_i \theta p_j = p_i^\mu \theta_{\mu\nu} p_j^\nu = -p_j \theta p_i$. Devemos observar que a função δ^4 da conservação de energia-momento continua presente, implicando que as regras de conservação da energia-momento, em cada vértice, continuam imutáveis. A diferença importante, com respeito às regras tradicionais de Feynman, é a presença de um fator de fase dado por,

$$V(p_1, p_2, p_3, p_4) = \exp \left[\frac{-i}{2} \sum_{i,j=1,i<j}^4 p_i \theta p_j \right]. \quad (3.4)$$

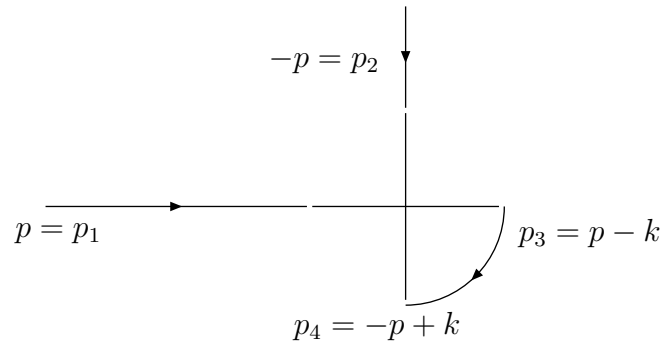
Este fator deve ser relevante, pois preserva a ordem das linhas conectadas em cada vértice. A ordem das linhas conectadas em cada vértice não é importante no caso comutativo ordinário, mas no caso não-comutativo é crucial. Este fator de fase (3.4) juntamente com a conservação da energia-momento é invariante por associação cíclica, mas não por permutação arbitrária dos momentos p_1, \dots, p_N . Devemos fixar as linhas de entrada e saída no vértice em sua ordem cíclica e considerar todos os possíveis diagramas. A influência deste fator de fase nos leva a distinção entre dois diagramas, “planares e “não-planares”.

3.2 Diagramas Planares e Não-Planares

Vamos considerar agora, os diagramas que contribuem para a auto energia da teoria escalar $\lambda\phi^4$. Vamos identificar a linha de entrada em um vértice pelos índices p_1, p_2, p_3, p_4 . Dado a primeira linha externa (de momento associativo) podemos conectar o vértice por uma das linhas p_1, p_2, p_3 ou p_4 . Em um vértice sem qualquer simetria sob troca dos momentos, diferentes escolhas correspondem a diferentes contribuições. Em nosso caso, devido a simetria sob trocas cíclicas, todas as escolhas resultam na mesma contribuição. Consideremos o caso em que o momento externo p está conectado à linha 1 no vértice,



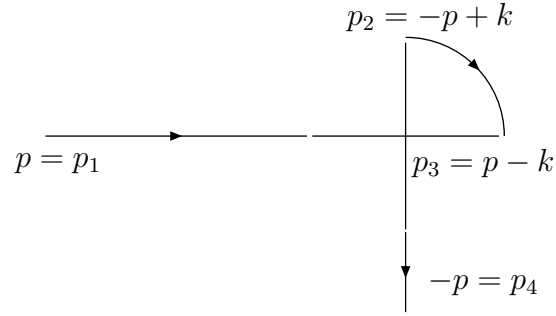
Evidentemente, existem três possíveis escolhas de conectar uma segunda linha (externa) de momento $-p$ ao vértice. Se escolhermos as linhas 2 ou 4, podemos conectar através de um propagador as linhas restantes, de forma a obter os seguintes diagramas planares,



O termo de fase (3.4) para o diagrama acima é então dado por,

$$V(p_1, p_2, p_3, p_4) = V(p, -p, p - k, -p + k) = 1, \quad (3.5)$$

também podemos ter

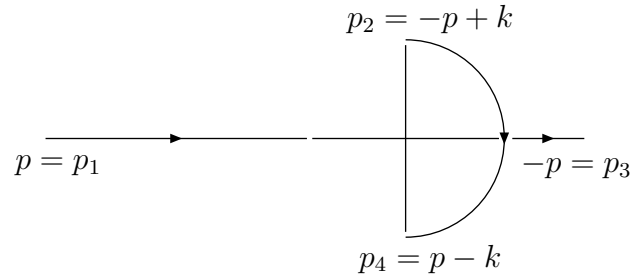


O termo de fase é então,

$$V(p_1, p_2, p_3, p_4) = V(p, -p + k, p - k, -p) = 1. \quad (3.6)$$

Os dois diagramas planares acima são exatamente os que seriam obtidos pela teoria ordinária. Como a linha de entrada com momento p pode ser conectada a qualquer um dos pontos p_1, p_2, p_3 ou p_4 , isto resulta em 8 diagramas planares para o vértice de auto-energia.

Agora se, conectarmos a segunda linha externa com momento $-p$ à linha p_3 , a única maneira que temos de conectar as linhas p_2 e p_4 do vértice é através de um propagador que “cruza” uma das linhas pelo menos uma vez,



Este é um diagrama não-planar com fator de fase dado por,

$$V(p, -p + k, -p, p - k) = \exp[-ip\theta k]. \quad (3.7)$$

Como podemos associar o momento p de entrada a qualquer uma das 4 linhas, temos que adicionar 4 diagramas não-planares ao termo de auto-energia com o termo de fase $\exp[-ip\theta k]$.

Podemos explicitar as considerações acima para as funções de Green de dois pontos no espaço dos momentos $\mathcal{G}^{(2)}(p, -p)$. Como vimos, existem 8 diagramas planares e 4 não-planares para a auto-energia, tal que,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1^{(2)}(p, -p) &= \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} - \left(\frac{\lambda}{6}\right) \frac{1}{(p^2 - \mu^2 + i\epsilon)^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)} \\ &- \left(\frac{\lambda}{3}\right) \frac{1}{(p^2 - \mu^2 + i\epsilon)^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik\theta p}}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Em termos de diagramas de Feynman, temos,

$$\mathcal{G}^{(2)}(p, -p) = i \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \left(\frac{\lambda}{6}\right) \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \left(\frac{\lambda}{3}\right) \begin{array}{c} \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

Os diagramas acima dão a renormalização da massa. Como veremos, o diagrama não-planar, melhora a convergência em relação ao diagrama planar. Vejamos agora como se relacionam os dois diagramas na renormalização da massa.

3.3 As Divergências Ultravioleta e Infravermelha

Com os resultados obtidos na seção anterior, podemos analisar o comportamento da renormalização dos campos a partir da função irreduzível a uma partícula (*one-particle-irreducible 1PI*),

$$\Gamma^{(2)}(p) = (p^2 - \mu^2) + \frac{\lambda}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \mu^2} + \frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik\theta p}}{k^2 - \mu^2}. \quad (3.9)$$

A função 1PI (3.9) é formada por três termos definidos da seguinte forma,

$$\Gamma^{(2)}(p) = \Gamma_0^{(2)}(p) + \Gamma_p^{(2)}(p) + \Gamma_{np}^{(2)}(p). \quad (3.10)$$

O diagrama planar $\Gamma_p^{(2)}(p)$ é exatamente o mesmo encontrado na teoria convencional do campo escalar com auto-interação. Por outro lado, o diagrama não-planar

$\Gamma_{np}^{(2)}$ é um diagrama típico da teoria de campo escalar não-comutativa [46, 70]. Observamos que, quando não existe não-comutatividade ($\theta = 0$), as duas integrais em (3.9) se igualam e obtemos o mesmo valor numérico ($\frac{\lambda}{2}$) do diagrama planar da teoria ordinária. Temos então que, regularizar os diagramas abaixo,

$$\begin{aligned}\Gamma_p^{(2)}(p) &= \frac{\lambda}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \mu^2)} \\ \Gamma_{np}^{(2)}(p) &= \frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik\theta p}}{(k^2 - \mu^2)}.\end{aligned}\quad (3.11)$$

O diagrama planar $\Gamma_p^{(2)}$ é a correção da massa a um loop da teoria ordinária de campo escalar ϕ^4 . Por outro lado, o diagrama não planar $\Gamma_{np}^{(2)}$ tem uma melhor convergência devido ao fator oscilatório no integrando. Podemos calcular as integrais de Feynman (3.11), usando a parametrização de Schwinger,

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2} = \int_0^\infty e^{-\beta(k^2 - \mu^2)} d\beta, \quad (3.12)$$

de forma que o diagrama planar de (3.11) se torne,

$$\Gamma_p^{(2)} = \frac{\lambda}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \mu^2} = -\frac{\lambda}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-\beta(k^2 - \mu^2)} d\beta. \quad (3.13)$$

Considerando as integrais gaussianas, temos,

$$\begin{aligned}\Gamma_p^{(2)} &= \frac{\lambda}{3} \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk_0 dk_1 dk_2 dk_3 e^{\beta\mu^2} e^{-\beta(k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)} d\beta \\ &= \frac{\lambda}{3} \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk_0 e^{\beta\mu^2} e^{\beta k_0^2} d\beta \left(\frac{2\pi}{2\beta}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\lambda}{48\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{\beta\mu^2}}{\beta^2} d\beta.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Podemos realizar o mesmo procedimento para o diagrama não-planar, tal que,

$$\Gamma_{np}^{(2)} = \frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik\theta p}}{(k^2 - \mu^2)}$$

$$= \frac{\lambda}{6} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{\beta\mu^2} e^{-\beta k_\mu k^\mu} e^{-ik_\mu \theta^{\mu\nu} k_\nu}, \quad (3.15)$$

onde usamos a integral,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{k}^T \mathbf{A} \mathbf{k} + \mathbf{v}^T \mathbf{k}\right] = (2\pi)^2 (\det \mathbf{A})^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}\mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v}\right], \quad (3.16)$$

com as seguintes identificações : $\mathbf{A} = 2\beta\eta_{\mu\nu}$ e $\mathbf{v}^T = -i\theta^{\mu\nu} p_\nu$. Assim,

$$\begin{aligned} \Gamma_{np}^{(2)} &= \frac{\lambda}{6} \int_0^\infty e^{\beta\mu^2} (2\pi)^2 (\det [2\beta\eta_{\mu\nu}])^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{1}{2}(-i\theta^{\mu\nu} p_\nu) \frac{\eta_{\mu\rho}}{2\beta} (-i\theta^{\sigma\rho} p_\sigma)\right] d\beta \\ &= \frac{\lambda}{6} \cdot \frac{4\pi^2}{16\pi^4} \int_0^\infty \frac{e^{i\beta\mu^2}}{4\beta^2} \exp\left[-\frac{\theta^{\nu\mu} p_\nu \theta_{\mu\sigma} p^\sigma}{4\beta}\right] d\beta \\ &= -\frac{\lambda}{96\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{\beta\mu^2} e^{-\frac{p\theta^2 p}{4\beta}}}{\beta^2} d\beta, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde $p\theta^2 p = p_\nu \theta^{\nu\mu} \theta_{\mu\sigma} p^\sigma$. Então, os dois diagramas reparametrizados por (3.12) se tornam,

$$\begin{aligned} \Gamma_p^{(2)}(p) &= \frac{\lambda}{48\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{\beta\mu^2}}{\beta^2} d\beta \\ \Gamma_{np}^{(2)}(p) &= \frac{\lambda}{96\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{\beta\mu^2 - \frac{p\theta^2 p}{4\beta}}}{\beta^2} d\beta \end{aligned} \quad (3.18)$$

O diagrama $\Gamma_p^{(2)}$ é divergente, enquanto que o diagrama $\Gamma_{np}^{(2)}$ possui um termo de amortecimento, fazendo a integral convergir. Para que $\Gamma_p^{(2)}$ possa ser analisado no regime ultravioleta faremos uso de um *cut-off* Λ , de forma que a integral possa ter convergência. Então, resulta que,

$$\begin{aligned} \Gamma_p^{(2)}(p) &= \frac{\lambda}{48\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{\beta\mu^2 - \frac{1}{\beta\Lambda^2}}}{\beta^2} d\beta \\ \Gamma_{np}^{(2)}(p) &= \frac{\lambda}{96\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{\beta\mu^2 - \frac{p\theta^2 p}{4\beta} - \frac{1}{\beta\Lambda^2}}}{\beta^2} d\beta. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Assim, após o cálculo das integrais, podemos tomar o limite $\Lambda \rightarrow \infty$. A expressão do diagrama não planar pode ser dada em termos de um *cut-off* efetivo Λ_{ef} , dado por,

$$\Lambda_{ef} = \frac{1}{\frac{1}{\Lambda^2} + \frac{p\theta^2 p}{4}}, \quad (3.20)$$

de forma que,

$$\Gamma_{np}^{(2)} = -\frac{\alpha\lambda}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{\beta\mu^2 - \frac{1}{\beta\Lambda_{ef}^2}}}{\beta^2} d\beta. \quad (3.21)$$

Temos então que, as soluções para estas integrais são,

$$\int_0^\infty \frac{e^{\beta\mu^2 - \frac{1}{\beta\Lambda^2}}}{\beta^2} d\beta = 2\mu\Lambda K_1\left(\frac{2\mu}{\Lambda}\right), \quad (3.22)$$

onde $K_1(x)$ é a função de Bessel modificada. Para $\Lambda \rightarrow \infty$, a variável x se torna pequena, e podemos fazer uma expansão,

$$K_1(x) \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right), \quad (3.23)$$

de forma que a integral se torna,

$$\int_0^\infty \frac{e^{\beta\mu^2 - \frac{1}{\beta\Lambda^2}}}{\beta^2} d\beta = \Lambda^2 - \mu^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right). \quad (3.24)$$

Finalmente, os diagramas são dados por,

$$\begin{aligned} \Gamma_p^{(2)} &= \frac{\lambda}{48\pi^2} \left[\Lambda^2 - \mu^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) \right] \\ \Gamma_{np}^{(2)} &= \frac{\lambda}{96\pi^2} \left[\Lambda_{ef}^2 - \mu^2 \ln\left(\frac{\Lambda_{ef}^2}{\mu^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

O diagrama planar ordinário $\Gamma_p^{(2)}$, da teoria de campo escalar, diverge no regime ultravioleta (UV), quando $\Lambda \rightarrow \infty$. Entretanto, o diagrama não-planar $\Gamma_{np}^{(2)}$ apresenta *cut-off* efetivo dado por (3.20),

$$\Lambda_{ef} = \frac{1}{\frac{1}{\Lambda^2} + \frac{p\theta^2 p}{4}}, \quad (3.26)$$

e não diverge para $\Lambda \rightarrow \infty$, porém, assume o valor $\Lambda_{ef}^2 = \frac{4}{p\theta^2 p}$ nesse limite. Surpreendentemente teremos divergência (*UV*) se $p \rightarrow 0$ ($\Lambda_{ef} = \Lambda$). No regime de baixas energias, ou $p \rightarrow 0$, definida como região infravermelha (*IR*), temos que o diagrama não-planar $\Gamma_{np}^{(2)}$ diverge quando $\Lambda \rightarrow \infty$, com $p \rightarrow 0$. Esta situação é conhecida como *UV/IR mixing* [46, 70]. Consequentemente, a massa renormalizada para esta teoria é dada por,

$$\begin{aligned} \mu_{ren}^2 &= \mu^2 + \Gamma_p^{(2)} + \Gamma_{np}^{(2)} \\ &= \mu^2 + \frac{\lambda}{48\pi^2} \left[\Lambda^2 - \mu^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) \right] + \frac{\lambda}{96\pi^2} \left[\Lambda_{ef}^2 - \mu^2 \ln \left(\frac{\Lambda_{ef}^2}{\mu^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Observe que na expressão da massa renormalizada (3.27) μ_{ren} , quando $\Lambda \rightarrow \infty$ (na região *UV*), temos $\Lambda_{ef} \approx \frac{4}{p\theta^2 p}$ com uma singularidade em $p = 0$. Conclui-se que uma teoria de campo não-comutativa exibe uma intrigante mistura de divergência ultravioleta ($\Lambda \rightarrow \infty$) com divergência infravermelha ($p \rightarrow 0$). Este é um efeito próprio da teoria de campos não-comutativa e não tem análogo com a teoria ordinária do campo escalar.

Capítulo 4

Aplicação ao Campo Vetorial de Matéria

Neste capítulo, faremos um estudo perturbativo do campo vetorial-tensorial de matéria carregado baseado no modelo de Cremmer-Scherk-Kalb-Ramond (*CSKR*) [100, 101]. Vamos considerar o Lagrangiano do trabalho [59], que é um modelo de campo de matéria que introduz um termo de massa topológica no espaço de Minkowski $\mathcal{M}^{1,3}$, que pode ser visto como uma extensão dos bem conhecidos modelos topológicos de Chern-Simons em $\mathcal{M}^{1,2}$ [102]. No Lagrangiano em consideração, o termo topológico *CSKR* é um acoplamento direto entre um campo vetorial B_μ (1-forma) e outro tensorial $H_{\mu\nu}$ (2-forma), sem qualquer contribuição efetiva para o tensor de energia-momento, porém, gera uma contribuição massiva para o espectro do modelo. Já abordamos no trabalho [59] que um campo de matéria vetorial-tensorial, baseado na extensão complexa do *CSKR*, é invariante por transformação de calibre local $U(1)$, e se acopla ao campo eletromagnético A_μ , sem violações da unitariedade e causalidade. Nesse trabalho, foi verificado também que, a presença de um termo de auto-interação do tipo $(B_\mu^* B^\mu)^2$, pode quebrar a simetria $U(1)$ do vácuo. Verificou-se que essa quebra é espontânea e introduz naturalmente um vetor de polarização do vácuo b_μ que pode ser a causa da anisotropia observada no estado de vácuo de alguns modelos cosmológi-

cos [103–106]. Estudos recentes [24–30] mostram que esses efeitos de anisotropia estão relacionados à violação da simetria de Lorentz.

O objetivo deste capítulo é estudar o comportamento perturbativo do modelo do Lagrangiano derivado em [59]. Assim, vamos analisar com detalhes, a contribuição da primeira ordem perturbativa no termo de acoplamento topológico “ m ” para esse modelo vetorial-tensorial de matéria. Analisaremos, também, a contribuição perturbativa, até a primeira ordem, do termo de auto-interação $(B_\mu^* B^\mu)^2$ no modelo. Em seguida, realizaremos um estudo preliminar do comportamento perturbativo desse modelo no espaço com extensão não-comutativa, onde iremos obter os gráficos não-planares que podem resultar desse modelo. No cálculo da parte não-comutativa, iremos aplicar os conceitos abordados no Capítulo 4, e obteremos a extensão não-comutativa para o campo B_μ .

4.1 O Lagrangiano do Campo de Matéria Vetorial-Tensorial

Como foi proposto no trabalho [59], o Lagrangiano mais geral que descreve campos de matéria Vetorial-Tensorial, com acoplamento topológico, é dado pela expressão,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{3} G_{\mu\nu\kappa}^* G^{\mu\nu\kappa} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} - (\partial_\mu B^\mu)^* (\partial_\nu B^\nu) + 2(\partial_\mu H^{\mu\nu})^* (\partial^\rho H_{\rho\nu}) \\ & + \alpha^2 B_\mu^* B^\mu - \beta^2 H_{\mu\nu}^* H^{\mu\nu} + m\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_\mu^* \partial_\nu H_{\rho\sigma} + m\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_\mu \partial_\nu H_{\rho\sigma}^*, \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde B_μ e $H_{\mu\nu}$ são os campos de matéria vetorial e tensorial, respectivamente. Os parâmetros α e β são as massas dos respectivos campos. O parâmetro m é um termo de massa topológica. Assim, os *field strengths* dos campos carregados são definidos da seguinte forma,

$$G_{\mu\nu\kappa} = \partial_\mu H_{\nu\kappa} + \partial_\nu H_{\kappa\mu} + \partial_\kappa H_{\mu\nu},$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (4.2)$$

O campo tensorial $H_{\mu\nu}$ é antissimétrico nos seus índices. Com essas expressões, podemos construir o gerador funcional para os campos de matéria que permite a análise perturbativa do modelo.

4.1.1 Funcional Gerador

Para construir o funcional gerador para a Lagrangiana (4.1), vamos separá-la em três partes: uma Lagrangiana para cada campo livre $\mathcal{L}_H^{(0)}$ e $\mathcal{L}_B^{(0)}$ e outra para os termos de acoplamentos de massa topológica \mathcal{L}_{top} .

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_H^{(0)} + \mathcal{L}_B^{(0)} + \mathcal{L}_{top}, \quad (4.3)$$

tal que,

$$\mathcal{L}_H^{(0)} = \frac{1}{3} G_{\mu\nu\kappa}^* G^{\mu\nu\kappa} + 2(\partial_\mu H^{\mu\nu})^* (\partial^\rho H_{\rho\nu}) - \beta^2 H_{\mu\nu}^* H^{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_B^{(0)} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} - (\partial_\mu B^\mu)^* (\partial_\nu B^\nu) + \alpha^2 B_\mu^* B^\mu$$

$$\mathcal{L}_{top} = m\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_\mu^* \partial_\nu H_{\rho\sigma} + m\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_\mu \partial_\nu H_{\rho\sigma}^*. \quad (4.4)$$

O funcional gerador [107–109] é dado por,

$$Z[\mathcal{J}_{\mu\nu}^*, \mathcal{J}_{\mu\nu}, J_\mu^*, J_\mu] \equiv N \int \mathcal{D}H_{\mu\nu}^* \mathcal{D}H_{\mu\nu} \mathcal{D}B_\mu^* \mathcal{D}B_\mu \exp \left\{ i \int [\mathcal{L}_H^{(0)} + \mathcal{L}_B^{(0)} + \mathcal{L}_{top}] d^4x \right\}, \quad (4.5)$$

onde podemos escrever a expressão acima como,

$$Z[\mathcal{J}_{\mu\nu}^*, \mathcal{J}_{\mu\nu}, J_\mu^*, J_\mu] \equiv \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{top} \right\} Z_0[\mathcal{J}_{\mu\nu}^*, \mathcal{J}_{\mu\nu}] Z_0[J_\mu^*, J_\mu]. \quad (4.6)$$

Aqui, podemos simplificar a notação, e substituir $Z[\mathcal{J}_{\mu\nu}^*, \mathcal{J}_{\mu\nu}, J_\mu^*, J_\mu] \equiv Z_{HB}$, $Z_0[\mathcal{J}_{\mu\nu}^*, \mathcal{J}_{\mu\nu}] = Z_{0H}$ e $Z_0[J_\mu^*, J_\mu] = Z_{0B}$ tal que a expressão (4.6) é dada por,

$$Z_{HB} \equiv \exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{top} \right\} Z_{0H} Z_{0B}. \quad (4.7)$$

Assim, podemos definir os funcionais geradores dos campos livres, tensorial e vetorial, respectivamente,

$$\begin{aligned} Z_{0H} &= Z_0[0] \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \mathcal{J}_{\mu\nu}^*(x) \Delta_{FH}(x-y) \mathcal{J}^{\mu\nu}(y) \right\} \\ Z_{0B} &= Z_0[0] \exp \left\{ i \int d^4x d^4y J_\mu^*(x) \Delta_{FB}(x-y) J^\mu(y) \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Neste caso, necessitamos dos propagadores¹ de campos livres H e B , dados por,

$$\begin{aligned} \Delta_{FH}(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - \beta^2 - i\epsilon} \\ \Delta_{FB}(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - \alpha^2 - i\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Observamos que o termo $\exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{top} \right\}$, na equação (4.6), pode ser reescrito² como,

$$\exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{top} \right\} = \exp \left\{ i \int d^4x \left(m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_\mu^* \partial_\nu H_{\rho\sigma} + \text{c.c.} \right) \right\}, \quad (4.10)$$

que em termo das derivadas funcionais, é dado por,

$$\exp \left\{ i \int d^4x \mathcal{L}_{top} \right\} = \exp \left\{ i m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4x \left[\left(\frac{-i\delta}{\delta J^\mu(x)} \right) \left(\partial_\nu \frac{-i\delta}{\delta \mathcal{J}^{\rho\sigma^*}(x)} \right) + \text{c.c.} \right] \right\}. \quad (4.11)$$

Então, partindo das expressões (4.7) e (4.11), podemos expandir a exponencial, e tomar a primeira ordem em “ m ”, que resulta em,

$$Z_{HB} = Z_{0H} Z_{0B} + i^3 m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4x \left[\left(\frac{\delta Z_{0B}}{\delta J^\mu(x)} \right) \left(\partial_\nu \frac{\delta Z_{0H}}{\delta \mathcal{J}^{\rho\sigma^*}(x)} \right) + \text{c.c.} \right]. \quad (4.12)$$

Assim, omitindo a apresentação de alguns cálculos, achamos³ como resultado,

$$Z_{HB} = Z_{0H} Z_{0B} \left[1 + i m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4x d^4y d^4z J_\mu^*(y) \mathcal{J}_{\rho\sigma}(z) \Delta_{FB}(y-x) \partial_\nu \Delta_{FH}(x-z) + \text{c.c.} \right]. \quad (4.13)$$

¹Detalhes do cálculo de propagadores no Apêndice D.

²Onde denotamos “c.c” por complexo conjugado.

³ $\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$

Na próxima seção, vamos calcular as funções de Green de dois pontos que representam as propagações dos campos livres B e H , bem como, a interação em primeira ordem no termo de acoplamento de massa topológica entre tais campos.

4.1.2 Funções de dois pontos e a interação entre os setores vetorial e tensorial

Obtivemos o funcional gerador para os campos B e H dado por (4.13). Vamos analisar como esses campos se interagem, considerando apenas até a primeira ordem no termo topológico “ m ”. Vamos realizar este estudo através da função τ de dois pontos. Primeiramente, vamos obter as funções τ para os campos vetorial B_μ e tensorial $H_{\mu\nu}$ livres.

Vamos denotar por τ_B a função de Green para o campo vetorial B , que é obtida do cálculo funcional abaixo,

$$\tau_B^{\alpha\beta}(x_1, x_2) = -\frac{\delta^2}{\delta J_\alpha^*(x_1)\delta J_\beta(x_2)} Z_{HB} \Big|_{J_\alpha^*=J_\beta=0}. \quad (4.14)$$

que resulta apenas no propagador livre do campo vetorial B_μ ,

$$\tau_B^{\alpha\beta}(x_1, x_2) = -i\Delta_{F_B}(x_1, x_2)\eta^{\alpha\beta}. \quad (4.15)$$

Denotamos que não foram apenas as fontes do campo B_μ que foram colocadas iguais a zero na expressão (4.14), mas também as fontes do campo $H_{\mu\nu}$.

Vamos definir τ_H como a função de Green de dois pontos para o campo tensorial $H_{\mu\nu}$, dada por,

$$\tau_H^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}(x_1, x_2) = -i\Delta_{F_H}(x_1, x_2)\eta^{\alpha\beta}\eta_{\gamma\delta}, \quad (4.16)$$

sendo que ambas as funções Δ_{F_B} e Δ_{F_H} são dadas pelas equações (4.9). As funções de dois pontos τ_B e τ_H , obtidas acima, são os propagadores dos campos livres vetorial e tensorial.

O nosso objetivo é verificar a função de Green de dois pontos para o termo misto, ou seja, que resulta na interação do campo B_μ e $H_{\mu\nu}$, dada pela derivada funcional abaixo,

$$\frac{\delta^2 Z_{HB}}{\delta \mathcal{J}_{\beta\gamma}(x_2) \delta J_\alpha^*(x_1)} = Z_{0H} Z_{0B} \left\{ (i)^2 \int dy dz \Delta_{FB}(x_1 - y) J^\alpha(y) \Delta_{FH}(z - x_2) \mathcal{J}^{\beta\gamma*}(z) \times \right. \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[1 + im\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int dx dy dz J_\mu^*(y) \mathcal{J}_{\rho\sigma}(z) \Delta_{FB}(y - x) \partial_\nu \Delta_{FH}(x - z) \right] \\ & + (i)^2 \int dy \Delta_{FB}(x_1 - y) J^\alpha(y) m\epsilon^{\mu\nu\beta\gamma} \int dx dy J_\mu^*(y) \Delta_{FB}(y - x) \partial_\nu \Delta_{FH}(x - x_2) \\ & + (i)^2 \int dz \Delta_{FH}(z - x_2) \mathcal{J}^{\beta\gamma*}(z) m\epsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} \int dx dz \mathcal{J}_{\rho\sigma}(z) \Delta_{FB}(x_1 - x) \partial_\nu \Delta_{FH}(x - z) \\ & + im\epsilon^{\alpha\nu\beta\gamma} \int dx \Delta_{FB}(x_1 - x) \partial_\nu \Delta_{FH}(x - x_2) \left. \right\}. \quad (4.18) \end{aligned}$$

Assim, quando impomos as fontes iguais a zero, $J_\alpha = \mathcal{J}_{\beta\gamma} = 0$, obtemos que

$$\tau_{HB}^{\alpha\beta\gamma}(x_1, x_2) = -im\epsilon^{\alpha\nu\beta\gamma} \int d^4x \Delta_{FB}(x_1 - x) \partial_\nu \Delta_{FH}(x - x_2), \quad (4.19)$$

e reescrevendo os propagadores na equação acima em termos de (4.9), obtemos que ⁴,

$$\tau_{HB}^{\mu\rho\sigma}(x_1, x_2) = -im\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int d^4x (i^3) \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_1(x_1-x)}}{k_1^2 - \alpha^2 + i\epsilon} \cdot ik_{2\nu} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_2(x-x_2)}}{k_2^2 - \beta^2 + i\epsilon}. \quad (4.20)$$

Onde podemos reagrupar alguns termos,

$$\tau_{HB}^{\mu\rho\sigma}(x_1, x_2) = m\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_1 d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ix(k_1-k_2)} e^{ik_1x_1} e^{-ik_2x_2}}{(k_1^2 - \alpha^2 + i\epsilon)(k_2^2 - \beta^2 + i\epsilon)} \cdot k_{2\nu}, \quad (4.21)$$

e efetuar a integral em x para obter uma função delta de Dirac. Em seguida, efetuamos a integral na variável k_2 , que resulta finalmente em,

$$\tau_{HB}^{\mu\rho\sigma}(x_1, x_2) = m\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x_1-x_2)} k_\nu}{(k^2 - \alpha^2 + i\epsilon)(k^2 - \beta^2 + i\epsilon)}. \quad (4.22)$$

⁴trocamos os índices $\alpha \rightarrow \mu$, $\beta \rightarrow \rho$ e $\gamma \rightarrow \sigma$.

Podemos também calcular a respectiva função de Green de dois pontos no espaço dos momentos, onde obtemos (fazendo o limite $\epsilon \rightarrow 0$),

$$\mathcal{G}^{(2)\mu\rho\sigma}(p, -p) = \frac{1}{p^2 - \alpha^2} \cdot m\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \cdot \frac{1}{p^2 - \beta^2}. \quad (4.23)$$

Temos uma interação entre o campo vetorial B com massa α e o campo tensorial H com massa β , através do termo de massa topológico. Em termos de diagrama,

$$\mathcal{G}^{(2)}(p, -p)^{\mu\rho\sigma} = \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad\quad\quad m\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\nu \quad\quad\quad} \\ B \quad \longrightarrow \quad \bullet \quad \longrightarrow \quad H \end{array}$$

Devemos denotar que a massa α do campo vetorial B (entrada) deve ser igual a massa β do campo tensorial H (saída).

Este resultado está em concordância exata com o valor obtido na equação (9) do trabalho [59], considerando até a primeira ordem no termo de massa topológica. Podemos observar, então, os propagadores obtidos em [59],

$$\begin{aligned} \langle B_\mu^*, B_\nu \rangle &= \frac{i}{(k^2 - \alpha^2)} \omega_{\mu\nu} + \frac{i(k^2 - \beta^2)}{(k^2 - \mu_+^2)(k^2 - \mu_-^2)} \theta_{\mu\nu}, \\ \langle B_\mu^*, H_{\nu\lambda} \rangle &= \langle H_{\mu\nu}^*, B_\lambda \rangle = \frac{im}{(k^2 - \mu_+^2)(k^2 - \mu_-^2)} s_{\mu\nu\lambda}, \\ \langle H_{\mu\nu}^*, H_{\lambda\rho} \rangle &= \frac{i}{(k^2 - \beta^2)} \omega_{\mu\nu,\lambda\rho} + \frac{i(k^2 - \alpha^2)}{(k^2 - \mu_+^2)(k^2 - \mu_-^2)} \theta_{\mu\nu,\lambda\rho}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde tem-se que $s_{\mu\nu\lambda} = \epsilon^\gamma{}_{\mu\nu\lambda} \partial_\gamma$. Os termos $\omega_{\mu\nu}$ e $\theta_{\mu\nu}$ são, respectivamente, os operadores de projeção longitudinal e transversal do campo vetorial B_μ tal que,

$$B_\mu = \omega_{\mu\nu} B^\nu + \theta_{\mu\nu} B^\nu. \quad (4.25)$$

Os projetores são dados por,

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}, \quad \theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}, \quad \text{onde } \square = \partial_\mu \partial^\mu, \quad (4.26)$$

satisfazendo a álgebra,

$$\omega_{\mu\nu} + \theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad (\omega_{\mu\nu})^2 = \omega_{\mu\nu}, \quad (\theta_{\mu\nu})^2 = \theta_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\nu}\theta^{\mu\nu} = 0. \quad (4.27)$$

Para o campo tensorial $H_{\mu\nu}$, podemos definir os seguintes operadores de projeções,

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu,\lambda\rho} &= \frac{1}{2}(\theta_{\mu\lambda}\theta_{\nu\rho} - \theta_{\mu\rho}\theta_{\nu\lambda}), \\ \omega_{\mu\nu,\lambda\rho} &= \frac{1}{2}(\eta_{\mu\lambda}\omega_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}\omega_{\nu\lambda}), \\ \eta_{\mu\nu,\lambda\rho} &= \frac{1}{2}(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda}), \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde os dois primeiros operadores acima são definidos como transversal e longitudinal do respectivo campo, e o terceiro é um termo métrico. Os termos entre parêntesis que formam os projetores do campo tensorial, são dados em termos dos projetores do campo vetorial (4.26) e fecham uma álgebra,

	$\theta^{\alpha\beta}_{,\lambda\rho}$	$\omega^{\alpha\beta}_{,\lambda\rho}$	$s^{\alpha\beta}_{\lambda}$
$\theta_{\mu\nu,\alpha\beta}$	$\theta_{\mu\nu,\lambda\rho}$	0	$s_{\mu\nu\lambda}$
$\omega_{\mu\nu,\alpha\beta}$	0	$\omega_{\mu\nu,\lambda\rho}$	0
$s_{\mu\alpha\beta}$	$s_{\mu\lambda\rho}$	0	$-\square\theta_{\mu\lambda}$

onde verifica-se que $\eta_{\mu\nu,\lambda\rho} = \omega_{\mu\nu,\lambda\rho} + \theta_{\mu\nu,\lambda\rho}$. Os termos μ_+ , μ_- são dados pela expressão,

$$\mu_{\pm}^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2m^2 \pm \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + 2m^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2}}{2}. \quad (4.29)$$

Observamos que, até a primeira ordem em “ m ”, temos que,

$$\mu_{\pm}^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 \pm (\alpha^2 - \beta^2)}{2}, \quad (4.30)$$

tal que $\mu_+^2 = \alpha^2$ e $\mu_-^2 = \beta^2$. Observamos então que, o segundo propagador da equação (4.24) resulta em,

$$\langle B_{\mu}^*, H_{\nu\lambda} \rangle = \langle H_{\mu\nu}^*, B_{\lambda} \rangle = \frac{1}{(k^2 - \alpha^2)} \cdot im s_{\mu\nu\lambda} \cdot \frac{1}{(k^2 - \beta^2)}, \quad (4.31)$$

com $s_{\mu\nu\lambda} = \epsilon^{\gamma}_{\mu\nu\lambda} \partial_{\gamma}$. A equação acima é exatamente o mesmo propagador (4.23) calculado perturbativamente. Nota-se, entretanto, que até uma primeira ordem em “ m ”, para haver conservação de energia, temos que $\alpha \approx \beta$. Isto resulta que as massas dos campos vetorial e tensorial devem ser iguais para que possam se acoplar com o termo de massa topológica. Deve-se destacar aqui que, até uma primeira ordem em “ m ” (4.30), os outros dois propagadores da equação (4.24) se tornam os respectivos propagadores dos campos livres da equação (4.9). É interessante mencionar que não há funções de Green de três pontos. Observe que mais uma derivada funcional em relação a J^{μ} ou $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, na equação (4.17), implicaria em resultado nulo. Por outro lado, As funções de quatro pontos existem e são desconexas, formadas por pares de funções de dois pontos.

4.2 A Auto-interação

Como mencionamos anteriormente, uma análise dos estados de vácuo do campo vetorial B_{μ} no Lagrangiano (4.1) com acréscimo de um termo de auto interação $(B_{\mu}^* B^{\mu})^2$, quebra a simetria de Lorentz se verificarmos uma quebra espontânea de simetria [59]. Nesta seção vamos verificar o comportamento perturbativo apenas do setor vetorial do modelo (4.1), o que resulta em um Lagrangiano do tipo Proca. O campo vetorial de matéria com auto-interação é então dado pela Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} - (\partial_{\mu} B^{\mu*})(\partial_{\nu} B^{\nu}) + \alpha^2 B_{\mu}^* B^{\mu} - \frac{\lambda}{4!} (B_{\mu}^* B^{\mu})^2, \quad (4.32)$$

de forma que o termo de auto-interação no funcional gerador seja escrito da seguinte maneira,

$$Z[J_{\mu}, J_{\mu}^*] = \exp \left\{ i \int d^4 x \mathcal{L}_I \left(-i \frac{\delta}{\delta J_{\mu}}, -i \frac{\delta}{\delta J_{\mu}^*} \right) \right\} Z_{0B}[J_{\mu}, J_{\mu}^*], \quad (4.33)$$

tal que Z_{0B} é dado por (4.8) e $\mathcal{L}_I = -\frac{\lambda}{4!}(B_\mu^* B^\mu)^2$. Até a primeira ordem em λ teremos o seguinte funcional,

$$Z[J_\mu, J_\mu^*] \simeq \left[1 - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 z \left((-i)^2 \frac{\delta^2}{\delta J^\mu(z) \delta J_\mu^*(z)} \right)^2 \right] Z_{0B}[J_\mu, J_\mu^*]. \quad (4.34)$$

Efetuando as derivadas funcionais em Z_0 teremos como resultado para o gerador $Z[J_\mu, J_\mu^*]$ até a primeira ordem em λ ,

$$\begin{aligned} Z[J_\mu, J_\mu^*] &= \left[1 - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 z \left(2[i\Delta_{F_B}(0)]^2 - i4\Delta_F(0) \times \right. \right. \\ &\times \int d^4 x d^4 y J^\mu(x) \Delta_{F_B}(x-z) \Delta_{F_B}(z-y) J_\mu^*(y) \\ &+ \int d^4 x_1 d^4 y_1 d^4 x_2 d^4 y_2 J^\mu(x_1) \Delta_{F_B}(x_1-z) \Delta_{F_B}(z-y_1) J_\mu^*(y_1) \times \\ &\left. \left. \times J^\nu(x_2) \Delta_{F_B}(x_2-z) \Delta_{F_B}(z-y_2) J_\nu^*(y_2) \right) \right] Z_{0B}[J_\mu, J_\mu^*]. \quad (4.35) \end{aligned}$$

Também podemos expressar o funcional gerador de funções de Green conexas, dado por,

$$iW[J^\mu, J_\mu^*] = \ln Z[J^\mu, J_\mu^*], \quad (4.36)$$

de forma que tenhamos,

$$\begin{aligned} iW[J^\mu, J_\mu^*] &= i \int d^4 x d^4 y J^\mu(x) \Delta_{F_B}(x-y) J_\mu^*(y) - i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 z \left[2[i\Delta_{F_B}(0)]^2 \right. \\ &- i4\Delta_{F_B}(0) \int d^4 x d^4 y J^\mu(x) \Delta_{F_B}(x-z) \Delta_{F_B}(z-y) J_\mu^*(y) \\ &+ \int d^4 x_1 d^4 y_1 d^4 x_2 d^4 y_2 J^\mu(x_1) \Delta_{F_B}(x_1-z) \Delta_{F_B}(z-y_1) J_\mu^*(y_1) \times \\ &\left. \times J^\nu(x_2) \Delta_{F_B}(x_2-z) \Delta_{F_B}(z-y_2) J_\nu^*(y_2) \right]. \quad (4.37) \end{aligned}$$

Podemos observar que este funcional é muito semelhante ao funcional do campo escalar. E da mesma maneira podemos encontrar as funções de Green de dois e quatro pontos definidas a seguir.

Funções de dois e quatro pontos

As funções de Green abaixo, são componentes de uma matriz diagonal,

$$\mathcal{G}^{(2)}(x_1, x_2)^{\alpha\beta} = \tau(x_1, x_2)^{\alpha\beta} = -\frac{\delta^2 W[J_\mu^*, J^\mu]}{\delta J_\alpha^*(x_2) \delta J_\beta(x_1)} \Bigg|_{J^*=J=0}, \quad (4.38)$$

obtemos,

$$\mathcal{G}^{(2)}(x_1, x_2)^{\alpha\beta} = \left(-i\Delta_{F_B}(x_1 - x_2) + \frac{\lambda}{6}\Delta_{F_B}(0) \int d^4x \Delta_{F_B}(x_1 - x) \Delta_{F_B}(x - x_2) \right) \eta^{\alpha\beta}. \quad (4.39)$$

Em termos de diagramas de Feynman a expressão é dada por,

$$\mathcal{G}^{(2)}(x_1, x_2)^{\alpha\beta} = -i\eta^{\alpha\beta} \longrightarrow \longrightarrow + \frac{\lambda}{6}\eta^{\alpha\beta} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}$$

E a função de quatro pontos dada por,

$$\mathcal{G}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\alpha\beta\gamma\delta} = \tau(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{\delta^4 W[J_\mu^*, J^\mu]}{\delta J_\delta^*(x_4) \delta J_\gamma(x_3) \delta J_\beta^*(x_2) \delta J_\alpha(x_1)} \Bigg|_{J^*=J=0} \quad (4.40)$$

de forma que,

$$\mathcal{G}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{i\lambda}{6} \int d^4x \Delta_{F_B}(x_1 - x) \Delta_{F_B}(x_2 - x) \Delta_{F_B}(x_3 - x) \Delta_{F_B}(x_4 - x) \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta}, \quad (4.41)$$

que em termo de diagrama de Feynman é

$$\mathcal{G}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{i\lambda}{6} \eta^{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} \begin{array}{c} x_1 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ x_2 \end{array} \begin{array}{c} x_3 \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ x_4 \end{array}$$

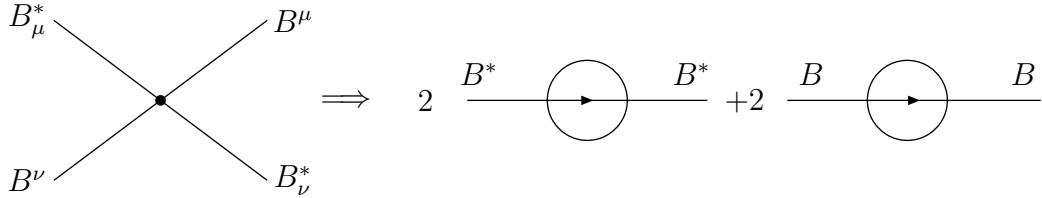
O segundo termo de $\mathcal{G}^{(2)}(x_1, x_2)$ (4.39) é matematicamente igual ao termo divergente da teoria ϕ^4 do campo escalar, porém é renormalizável da mesma maneira.

4.3 Extensão Não-Comutativa para o Campo Vetorial de Matéria

Na seção anterior vimos que os resultados obtidos para o termo de auto-interação $\frac{\lambda}{4!}(B_\mu^* B^\mu)^2$, são muito semelhantes ao do campo escalar. Desta forma podemos obter com facilidade a extensão não comutativa para o setor vetorial dos campos (4.1). Devemos escrever o termo de auto interação em termos do produto \star de Moyal (1.27). Também vamos levar em consideração as permutações cíclicas, tais que os vértices sejam dados por,

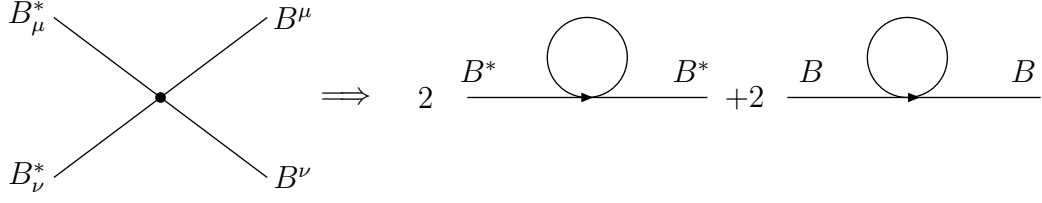
$$\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \frac{1}{4} \left[(B_\mu^* \star B^\mu \star B_\nu^* \star B^\nu) + (B_\mu^* \star B^\mu \star B^\nu \star B_\nu^*) + (B^\nu \star B_\nu^* \star B_\mu^* \star B^\mu) + (B^\nu \star B_\nu^* \star B^\mu \star B_\mu^*) \right]. \quad (4.42)$$

Cada termo entre parêntesis dá origem a digramas planares ou não-planares. Por exemplo, o primeiro termo,



Se consideramos o momento de entrada na ponta B_μ^* , o momento de saída deve ser na ponta B_ν^* para que haja conservação da carga, de forma que um propagador de Feynman que conecte as pontas B^μ e B^ν cruza pelo menos uma vez as linhas do vértice. De forma que temos quatro contribuições não-planares vistas no diagrama acima. Devemos ter duas contribuições para cada campo, pois podemos conectar o momento de entrada em qualquer uma das quatro pontas do vértice, desde que a entrada e a saída sejam para o mesmo campo.

O segundo termo na expressão (4.42) é o vértice abaixo,



No vértice acima, podemos ver que é possível conectar através de um propagador de Feynman as pontas B^μ e B^ν sem cruzar qualquer linha do vértice. O mesmo ocorre se conectarmos as pontas B_μ^* e B_ν^* . De forma que os quatro diagramas possíveis são planares.

Uma análise no terceiro termo da expressão (4.42) revela mais quatro contribuições planares, ao passo que o quarto termo contribui com mais quatro diagramas não-planares. No total teremos então 8 diagramas planares e 8 não-planares.

A função irreduzível a uma partícula (*one-particle-irreducible 1PI*) é então dada por,

$$\Gamma^{(2)}(p) = (p^2 - \alpha^2) + \frac{\lambda}{12} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \alpha^2)} + \frac{\lambda}{12} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik\theta p}}{(k^2 - \alpha^2)}. \quad (4.43)$$

Observamos que quando não existir não-comutatividade ($\theta = 0$), os segundo e terceiro termos na expressão acima se somam, de forma que temos a contribuição $\frac{\lambda}{6}$ como é esperado no caso ordinário (4.39)

Os cálculos então, para a renormalização da massa coincidem com os mesmos cálculos da teoria escalar do capítulo anterior, a menos de fatores constantes próprios de cada modelo, obtemos,

$$\alpha_{ren}^2 = \alpha^2 + \frac{\lambda}{192\pi^2} \left[\Lambda^2 - \alpha^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2}{\alpha^2} \right) \right] + \frac{\lambda}{192\pi^2} \left[\Lambda_{ef}^2 - \alpha^2 \ln \left(\frac{\Lambda_{ef}^2}{\alpha^2} \right) \right], \quad (4.44)$$

onde o termo Λ_{ef} é dado pela equação (3.26),

$$\Lambda_{ef} = \frac{1}{\frac{1}{\Lambda^2} + \frac{p\theta^2 p}{4}}. \quad (4.45)$$

Quando $\Lambda \rightarrow \infty$, regime ultravioleta, resulta em $\Lambda_{ef}^2 = \frac{4}{p\theta^2 p}$, com divergência no setor infravermelho, $p \rightarrow 0$. Esta situação como já referida anteriormente, é conhecida como *UV/IR mixing* [46, 70], própria das teorias de campo não-comutativas.

Conclusão

A introdução da não-comutatividade como parte da estrutura física dos fenômenos foi inferida já em 1930 por Heisenberg, que além da sua famosa relação de incerteza sugeriu a introdução de relações de comutações para as coordenadas do espaço-tempo, surgia então, a proposta das coordenadas não-comutativas [1]. Atualmente a presença da não-comutatividade é cada vez mais marcante para o desenvolvimento das teorias das cordas [7–9], no estudo mais profundo do próprio espaço-tempo [30, 96], nas propostas de violações das simetrias de Lorentz [24–30, 59], e em fenômenos em matéria condensada, como a supercondutividade e efeito Hall quântico [10–12]

Nesta tese, estudamos alguns aspectos e consequências, em particular em Mecânica Quântica, de uma específica possibilidade de não-comutatividade, que introduzimos como uma extensão em momento linear do espaço-tempo. Esta extensão foi sugerida em vários trabalhos [96]. Neste ponto de vista, no Capítulo 1, abordamos, primeiramente, alguns dos principais pontos de uma geometria não-comutativa que provêm do Mapeamento de Weyl, que é uma das principais ferramentas que relacionam uma função no espaço comutativo ao espaço não-comutativo. Vimos que o produto de duas funções em coordenadas não-comutativas é deformado pelo produto \star de Moyal e com o mapeamento de Seiberg-Witten. Com estes ingredientes foi possível construir ações para campos não-comutativos. Da proposta da extensão, verificamos que a noção de localiza-

ção da partícula se perde, dando uma origem de geometria não-comutativa para a quantização.

Um caminho simples e direto de induzir a deformação não-comutativa no espaço foi considerar que o parâmetro não-comutativo θ é proporcional à estrutura intrínseca de spin. Esta foi a conclusão a que chegamos no Capítulo 2, no qual a medida de área não-comutativa θ é proporcional ao módulo do vetor spin pela relação $\theta = \frac{\hbar\mathbf{S}}{m^2c^2}$. Então, a nossa principal argumentação neste capítulo, é que a estrutura de spin deforma o espaço em nível quântico, implicando efeitos na Mecânica Quântica. Com esta argumentação, o acoplamento spin-órbita se tornou uma consequência natural em primeira ordem da expansão da energia potencial não-comutativa. O produto entre o potencial central V e a auto-função ψ , na equação de Schrödinger, deformado pelo produto \star de Moyal até a primeira ordem, também mostra que o acoplamento spin-órbita é uma consequência de uma Mecânica Quântica com extensão não-comutativa. Ou seja, uma energia potencial no espaço não-comutativo incluirá à Hamiltoniana do sistema, o acoplamento spin-órbita que pode ser interpretado como efeito não-comutativo do espaço com origem na estrutura de spin. Também obtemos que uma contribuição em segunda ordem na expansão do potencial não-comutativo, gera um termo cinético extra na Hamiltoniana em consideração. Verificamos que este termo cinético extra pode ser relevante à estrutura dinâmica de partículas confinadas ao potencial não-comutativo, pois este termo deforma o fator cinético original por um fator α que é dependente da razão entre energia de estado fundamental do sistema confinado e energia de repouso da partícula. Uma boa aplicação foi a possibilidade de se obter com boa estimativa a energia de estado fundamental do sistema quântico quarkonium, sem a necessidade em princípio de se resolver a equação de Schrödinger. Concluímos que este modelo, pode informar a energia de estado

fundamental de um sistema quântico complexo, quando assumimos um potencial não-comutativo com uma estrutura de spin [110].

Podemos admitir um raio de atuação para estes efeitos não-comutativos. Observamos que o módulo do vetor spin é da ordem de \hbar , de forma que $\theta \sim \lambda_C^2$. Como o parâmetro não-comutativo tem dimensão de área, podemos imaginar que, a região de atuação não-comutativa é uma esfera de raio $\sim \sqrt{\theta}$. Então, o raio de atuação dos efeitos não-comutativos são da ordem do comprimento de onda Compton da partícula. Enfatizamos que, efeitos não-comutativos podem ser observados em uma escala de energia baixa para os padrões propostos na literatura. Esta observação é nova no sentido de que as propostas existentes esperam observações na escala de comprimento menor que $10^{-20}m$ [30].

Os resultados obtidos no Capítulo 3, são bem conhecidos na literatura. Abordamos a não-comutatividade do campo escalar, com a intrigante mistura de divergências ultravioleta e infravermelha (UV/IR mixing). O surgimento de um termo de fase nas funções geradores de vértices, devido a não-comutatividade das coordenadas, tem como consequências, diagramas de Feynman com linhas cruzadas, denominados diagramas não-planares. Tais diagramas além de terem a conhecida divergência ultravioleta, trazem a divergência infravermelha.

No Capítulo 4, foi feita uma análise perturbativa através de integrais de caminho ao campo vetorial-tensorial de matéria baseado no modelo ($CSKR^*$). Foi verificado uma perturbação até a primeira ordem no termo de acoplamento topológico (massa topológica) entre os respectivos campos vetoriais e tensoriais, onde concluímos que os dois campos propagam a mesma massa. Concluímos que um termo de auto-interação no setor vetorial, que quebra a simetria do vácuo resultando em violação das simetria de Lorentz [59], resulta em diagramas de Feynman muito semelhantes aos do campo escalar. Então foi possível fazer uso

dos conceitos abordados no Capítulo 3 aplicando-os ao campo vetorial-tensorial de matéria. A aplicação do produto \star de Moyal no setor vetorial, que acopla o termo de auto-interação, resultou em diagramas de Feynman planares e não-planares, muito semelhantes ao do campo escalar. Então, o resultado da renormalização da massa é matematicamente o mesmo do campo escalar, com o mesmo efeito (UV/IR mixing).

Como perspectivas devemos fazer uma análise em ordens superiores do termo de acoplamento topológico do campo vetorial-tensorial, e verificar se para tais ordens superiores, os campos vetorial e tensorial propagam a mesma massa. Devemos fazer uma análise da interação de calibre $U(1)$ no contexto do produto \star de Moyal com os respectivos diagramas provenientes da extensão não-comutativa. Outra perspectiva, é construir um modelo eletromagnético com extensão não-comutativa. Uma fenomenologia particular deve surgir ao associar o parâmetro não-comutativo ao operador spin.

Apêndice A

O Problema de Landau

Este apêndice tem por objetivo abordar o problema de Landau citado no Capítulo 1.

Existem exemplos físicos em que a não-comutatividade tem papel importante em estruturas teóricas em que a não comutatividade não é definida a priori, mas que surge a partir de certas análises. O exemplo clássico de não-comutatividade das coordenadas na Mecânica Quântica é o problema de Landau [2]. Considere uma partícula carregada de massa m se movendo no plano $\mathbf{r} = (x_1, x_2)$ e na presença de um campo magnético B perpendicular e constante. A Lagrangeana é,

$$L = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}, \quad (\text{A.1})$$

onde,

$$A_i = \frac{B}{2} \epsilon_{ij} x_j \quad (\text{A.2})$$

é o potencial vetor. A Hamiltoneana será dada por,

$$H = \frac{1}{2m} \vec{\pi}^2, \quad (\text{A.3})$$

onde

$$\pi_i = p_i + \frac{B}{2} \epsilon_{ij} x_j, \quad (\text{A.4})$$

$\vec{\pi}$ é o momento invariante de gauge, enquanto \mathbf{p} é o momento canônico. Das relações de comutações, teremos o comutador $[\pi_i, \pi_j]$ diferente de zero, como segue,

$$[\pi_i, \pi_k] = \frac{B}{2}\epsilon_{kl}(p_i x_l - x_l p_i) + \frac{B}{2}\epsilon_{ij}(x_j p_k - p_k x_j), \quad (\text{A.5})$$

o comutador de Heisenberg para posição e momento resulta em,

$$[\pi_i, \pi_k] = iB\epsilon_{ik}, \quad (\text{A.6})$$

então vemos aqui, que o espaço dos momentos na presença de um campo magnético B forte torna-se não-comutativo.

A não comutatividade das coordenadas espaciais vem do limite $m \rightarrow 0$, tal que a Lagrangeana (A.1) torna-se,

$$L_0 = \frac{B}{2}\dot{x}_i \epsilon_{ij} x_j. \quad (\text{A.7})$$

Esta Lagrangeana é singular,

$$\det\left(\frac{\partial^2 L_0}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j}\right) = 0,$$

por ter o determinante da matriz Hessiana acima nulo. Isto implica numa Hamiltoniana canônica H_0 igual a zero.

É necessário então a construção de uma Hamiltoniana efetiva,

$$H_{ef} = H_0 + \alpha_i \phi_i, \quad (\text{A.8})$$

onde α_i são constantes e ϕ_i são vínculos do sistema. Estes vínculos são obtidos da seguinte maneira,

$$p_i = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_i} = \frac{B}{2}\epsilon_{ij} x_j, \quad (\text{A.9})$$

e definindo os vínculos,

$$\phi_i = \frac{B}{2}\epsilon_{ij} x_j - P_i \approx 0, \quad (\text{A.10})$$

onde $\phi_i \approx 0$ significa fracamente igual a zero. Agora, devemos observar que o comutador,

$$[\phi_i, \phi_j] = -iB\epsilon_{ij} = C_{ij} \quad (\text{A.11})$$

é uma matriz não singular, $C_{ij}C_{ik}^{-1} = \delta_{ij}$. Isto classifica ϕ_i como vínculos de segunda classe. Da identidade $\epsilon_{ij}\epsilon_{kj} = \delta_{ik}$ podemos facilmente encontrar a matriz C_{ik}^{-1} como,

$$C_{ik}^{-1} = \frac{i}{B}\epsilon_{ij}. \quad (\text{A.12})$$

A partir de qualquer variável dinâmica A , procede-se a construção de uma nova variável dinâmica \hat{A} que tem parêntesis nulos com todos os vínculos de segunda classe ϕ_i [111].

$$\hat{A} = A - [A, \phi_i]C_{ij}^{-1}\phi_j, \quad (\text{A.13})$$

tal que $[\hat{A}, \phi_i] = 0$.

Com estes procedimentos podemos definir novas coordenadas para este sistema utilizando (A.13) tal que,

$$\hat{x}_i = x_i - [x_i, \phi_j]C_{ij}^{-1}\phi_j. \quad (\text{A.14})$$

Substituindo (A.12) e $[x_i, \phi_j] = -i\delta_{ij}$ na definição acima, obtemos que,

$$\hat{x}_i = x_i + \frac{\epsilon_{ij}}{B}\phi_j. \quad (\text{A.15})$$

A definição (A.15) pode ser vista de outra forma. Substituindo (A.10) em (A.15) obteremos,

$$\hat{x}_i = \frac{x_i}{2} - \frac{\epsilon_{ij}p_j}{B}.$$

Uma verificação rápida mostra que as novas coordenadas (A.15) não comutam,

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = \frac{i\epsilon_{ij}}{B}. \quad (\text{A.16})$$

Este é um resultado que se obtém quando no Lagrangiano (A.1), fazemos o limite $m \rightarrow 0$. Isto é equivalente a fixar a massa m e fazer o limite $B \rightarrow \infty$ (campo magnético forte). Concluimos então que o sistema original é equivalente a um outro sistema no qual não existe campo magnético, mas é um sistema de coordenadas não-comutativas.

Apêndice B

Teoria de Gauge Não Comutativa

B.1 Corrente de Noether

O Lagrangiano

$$\hat{\mathcal{L}}_0 = \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi^\dagger - m^2 \phi \star \phi^\dagger, \quad (\text{B.1})$$

escrito até a primeira ordem em θ é

$$\hat{\mathcal{L}}_0 = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger - m^2 \phi \phi^\dagger + \frac{i}{4} \theta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\mu \phi \partial_\sigma \partial^\mu \phi^\dagger - \frac{im^2}{4} \theta^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi^\dagger. \quad (\text{B.2})$$

Vamos então reescrever este Lagrangiano da seguinte forma,

$$\hat{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{L}_0 + \frac{i}{4} \theta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\mu \phi \partial_\sigma \partial^\mu \phi^\dagger - \frac{im^2}{4} \theta^{\rho\sigma} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi^\dagger. \quad (\text{B.3})$$

Temos aqui que a segunda parte do Lagrangiano depende das derivadas segundas dos campos, e a equação da corrente conservada de Noether será,

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} \delta \Phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \Phi_i)} \delta(\partial_\nu \Phi_i) - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \partial_\nu \Phi_i)} \right) \delta \Phi_i. \quad (\text{B.4})$$

Os campos Φ_i são os campos do Lagrangiano $\hat{\mathcal{L}}$. Vamos então fazer uma transformação de grupo $U(1)$ global. As variações funcionais para um parâmetro Λ constante são,

$$\begin{aligned} \delta \phi &= -i\Lambda \phi & , & & \delta \phi^\dagger &= i\Lambda \phi^\dagger \\ \delta(\partial_\nu \phi) &= -i\Lambda \partial_\nu \phi & , & & \delta(\partial_\nu \phi^\dagger) &= i\Lambda \partial_\nu \phi^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Inicialmente vamos calcular a corrente para o segundo termo do Lagrangiano (B.4),

$$\begin{aligned}
J_1^\mu &= \frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma}\delta_\rho^\mu\delta_\alpha^\nu\partial_\sigma\partial^\alpha\phi^\dagger\delta(\partial_\nu\phi) + \frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\alpha\phi\delta_\sigma^\mu\eta^{\alpha\nu}\delta(\partial_\nu\phi^\dagger) \\
&\quad - \partial_\nu\left(\frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma}\delta_\rho^\mu\delta_\alpha^\nu\partial_\sigma\partial^\alpha\phi^\dagger\right)\delta\phi - \partial_\nu\left(\frac{i}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\partial_\alpha\phi\delta_\sigma^\mu\eta^{\alpha\nu}\right)\delta\phi^\dagger \\
&= \frac{i}{4}\theta^{\mu\sigma}\partial_\sigma\partial^\nu\phi^\dagger(-i\Lambda\partial_\nu\phi) + \frac{i}{4}\theta^{\rho\mu}\partial_\rho\partial^\nu\phi(i\Lambda\partial_\nu\phi^\dagger) \\
&\quad - \partial_\nu\left(\frac{i}{4}\theta^{\mu\sigma}\partial_\sigma\partial^\nu\phi^\dagger(-i\Lambda\phi) + \frac{i}{4}\theta^{\rho\mu}\partial_\rho\partial^\nu\phi(i\Lambda\phi^\dagger)\right) \\
&= \frac{\Lambda}{4}\theta^{\mu\sigma}\left(\partial_\sigma\partial^\nu\phi^\dagger\partial_\nu\phi + \partial_\sigma\partial^\nu\phi\partial_\nu\phi^\dagger\right) \\
&\quad - \frac{\Lambda}{4}\theta^{\mu\sigma}\partial_\nu\left(\phi\partial_\sigma\partial^\nu\phi^\dagger + \phi^\dagger\partial_\sigma\partial^\nu\phi\right)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

vamos operar a deriva no segundo termo e então,

$$\begin{aligned}
J_1^\mu &= \frac{\Lambda}{4}\theta^{\mu\sigma}\left(\partial_\sigma\partial^\nu\phi^\dagger\partial_\nu\phi + \partial_\sigma\partial^\nu\phi\partial_\nu\phi^\dagger\right) - \frac{\Lambda}{4}\theta^{\mu\sigma}\left(\partial_\nu\phi\partial_\sigma\partial^\nu\phi^\dagger + \partial_\nu\phi^\dagger\partial_\sigma\partial^\nu\phi\right) \\
&\quad - \frac{\Lambda}{4}\theta^{\mu\sigma}\left(\phi\partial_\sigma\Box\phi^\dagger + \phi^\dagger\partial_\sigma\Box\phi\right) \\
&= -\frac{\Lambda}{4}\theta^{\mu\sigma}\left(\phi\partial_\sigma\Box\phi^\dagger + \phi^\dagger\partial_\sigma\Box\phi\right),
\end{aligned} \tag{B.7}$$

e utilizando as equações de movimento, a equação acima para J_1^μ é

$$J_1^\mu = \frac{\Lambda m^2}{4}\theta^{\mu\sigma}\left(\phi\partial_\sigma\phi^\dagger + \phi^\dagger\partial_\sigma\phi\right). \tag{B.8}$$

Agora vamos calcular a corrente J_2^μ devido ao terceiro termo do Lagrangiano (B.3), utilizando a equação (B.4), teremos

$$\begin{aligned}
J_2^\mu &= \frac{\partial\left(-\frac{im^2}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi^\dagger\right)}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi + \frac{\partial\left(-\frac{im^2}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi\partial_\sigma\phi^\dagger\right)}{\partial(\partial_\mu\phi^\dagger)}\delta\phi^\dagger \\
&= \frac{-im^2}{4}\theta^{\rho\sigma}\delta_\rho^\mu\partial_\sigma\phi^\dagger(-i\Lambda\phi) - \frac{im^2}{4}\theta^{\rho\sigma}\partial_\rho\phi\delta_\sigma^\mu(i\Lambda\phi^\dagger) \\
&= \frac{-\Lambda m^2}{4}\theta^{\mu\sigma}\phi\partial_\sigma\phi^\dagger + \frac{\Lambda m^2}{4}\theta^{\rho\mu}\phi^\dagger\partial_\rho\phi \\
&= \frac{-\Lambda m^2}{4}\theta^{\mu\sigma}\left(\phi\partial_\sigma\phi^\dagger + \phi^\dagger\partial_\sigma\phi\right).
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Daqui verificamos que, a soma das correntes,

$$J^\mu = J_0^\mu + J_1^\mu + J_2^\mu,$$

resulta em apenas no termo J_0^μ que é devido ao Lagrangiano ordinário,

$$\mathcal{L}_0 = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^\dagger - m^2 \phi \phi^\dagger.$$

Os termos que dependem do parâmetro θ não oferecem nenhuma contribuição à corrente de Noether.

B.2 Campo Escalar Carregado

Seja o Lagrangiano de campo escalar complexo,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*. \quad (\text{B.10})$$

Vamos reescrever os campos em termos de coordenadas não-comutativas. Isto implica em reescrever o Lagrangiano em termos do produto de Moyal,

$$\hat{\mathcal{L}}_0 = \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi^\dagger - m^2 \phi \star \phi^\dagger. \quad (\text{B.11})$$

O objetivo agora é descrever a teoria de gauge não comutativa para este Lagrangiano, e para isto será necessário definir variações de fase locais. Então vamos definir uma transformação no campo ϕ em coordenadas não comutativas dada por,

$$\phi(x)^g = \phi(x) \star g(x), \quad (\text{B.12})$$

e seu conjugado complexo dado por,

$$\phi(x)^{g^\dagger} = g(x)^\dagger \star \phi^\dagger. \quad (\text{B.13})$$

A função $g(x)$ será dada por,

$$g(x) = e^{i\Lambda(x)}, \quad (\text{B.14})$$

onde Λ é uma função real. Considerando $|\Lambda| \ll 1$, podemos escrever,

$$g(x) = 1 + i\Lambda(x), \quad (\text{B.15})$$

o que nos dá como resultado uma variação nos campos (B.12) e (B.13), dado por

$$\phi(x)^g = \phi(x) \star (1 + i\Lambda(x)) = \phi(x) + i\phi \star \Lambda(x), \quad (\text{B.16})$$

resultando em,

$$\delta\phi = +i\phi \star \Lambda(x), \quad (\text{B.17})$$

e respectivamente teremos a variação do campo conjugado complexo,

$$\delta\phi^\dagger = -i\Lambda(x) \star \phi^\dagger. \quad (\text{B.18})$$

Agora podemos verificar como ficarão as variações no \mathcal{L} agrangiano (B.11). Vamos verificar primeiro a variação no termo massivo, utilizando as variações das equações acima (B.17) e (B.18),

$$\begin{aligned} \delta(m^2\phi \star \phi^\dagger) &= m^2\delta\phi \star \phi^\dagger + m^2\phi \star \delta\phi^\dagger \\ &= im^2\phi \star \Lambda \star \phi^\dagger - im^2\phi \star \Lambda \star \phi^\dagger \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Para verificar as variações no termo cinético do \mathcal{L} agrangiano (B.11), vamos calcular a derivada no termo (B.16), que resulta em,

$$\partial_\mu\phi^g = \partial_\mu\phi + i\partial_\mu\phi \star \Lambda + i\phi \star \partial_\mu\Lambda. \quad (\text{B.20})$$

Isto leva em uma variação funcional para o termo cinético em ϕ dada por,

$$\delta(\partial_\mu\phi) = i\partial_\mu\phi \star \Lambda + i\phi \star \partial_\mu\Lambda, \quad (\text{B.21})$$

e conseqüentemente o conjugado complexo,

$$\delta(\partial_\mu\phi^\dagger) = -i\partial_\mu\Lambda \star \phi^\dagger - i\Lambda \star \partial_\mu\phi^\dagger. \quad (\text{B.22})$$

Então a variação no termo cinético do Lagrangiano (B.11) é

$$\delta(\partial_\mu\phi \star \partial^\mu\phi^\dagger) = (\delta\partial_\mu) \star \partial^\mu\phi^\dagger + \partial_\mu\phi \star (\delta\partial^\mu\phi^\dagger)$$

$$\begin{aligned}
&= [i\partial_\mu\phi \star \Lambda + i\phi \star \partial_\mu\Lambda]\partial^\mu\phi^\dagger \\
&\quad + \partial_\mu[-i\partial_\mu\Lambda \star \phi^\dagger - i\Lambda \star \partial_\mu\phi^\dagger] \\
&= i\phi \star \partial_\mu\Lambda \star \partial^\mu\phi^\dagger - i\partial^\mu\phi \star \partial_\mu\Lambda \star \phi^\dagger.
\end{aligned} \tag{B.23}$$

A variação funcional total no Lagrangiano $\hat{\mathcal{L}}_0$ da equação (B.11) será,

$$\delta\hat{\mathcal{L}}_0 = i\phi \star \partial_\mu\Lambda \star \partial^\mu\phi^\dagger - i\partial^\mu\phi \star \partial_\mu\Lambda \star \phi^\dagger. \tag{B.24}$$

O Lagrangiano, então, não é mais invariante por uma transformação local. É neste ponto que devemos calibrar o Lagrangeano por acrescentar termos que o deixem invariante,

$$\hat{\mathcal{L}}_I = i\partial^\mu\phi \star A_\mu \star \phi^\dagger - i\phi \star A_\mu \star \partial^\mu\phi^\dagger + \phi \star A^\mu \star A_\mu \star \phi^\dagger. \tag{B.25}$$

O vetor A_μ é o campo de gauge, e vamos escolher uma variação funcional apropriada neste campo em termos da função (B.15),

$$A_\mu^g = g(x)^\dagger \star A_\mu \star g(x) - ig^\dagger \star \partial_\mu g(x), \tag{B.26}$$

tal que a variação para o vetor até a primeira ordem em Λ seja,

$$\delta A_\mu = \partial_\mu\Lambda + i[A_\mu, \Lambda]_\star \tag{B.27}$$

Com estes valores será possível verificar as variações nos termos de (B.25). Vamos começar com o primeiro termo, que resulta em,

$$\delta(i\partial^\mu\phi \star A_\mu \star \phi^\dagger) = i\partial^\mu\phi \star \partial_\mu\Lambda \star \phi^\dagger - \phi \star \partial^\mu\Lambda \star A_\mu \star \phi^\dagger. \tag{B.28}$$

A variação no segundo termo do Lagrangiano (B.25), resultará em,

$$\delta(-i\phi \star A_\mu \star \partial^\mu\phi^\dagger) = -i\phi \star \partial_\mu\Lambda \star \partial^\mu\phi^\dagger - \phi \star A^\mu \star \partial_\mu\Lambda \star \phi^\dagger. \tag{B.29}$$

E por fim teremos a variação no terceiro termo de (B.25),

$$\delta(\phi \star A^\mu \star A_\mu \star \phi^\dagger) = \phi \star \partial^\mu \star A_\mu \star \phi^\dagger + \phi \star A^\mu \star \partial_\mu \star \phi^\dagger. \tag{B.30}$$

Somando estes resultados acima (B.28), (B.29) e (B.30), obtemos a variação funcional total do Lagrangiano (B.25), dado por,

$$\begin{aligned}
\delta \hat{\mathcal{L}} &= \delta(i\partial^\mu \phi \star A_\mu \star \phi^\dagger) + \delta(-i\phi \star A_\mu \star \partial^\mu \phi^\dagger) + \delta(\phi \star A^\mu \star A_\mu \star \phi^\dagger) \\
&= i\partial^\mu \phi \star \partial_\mu \Lambda \star \phi^\dagger - \phi \star \partial^\mu \Lambda \star A_\mu \star \phi^\dagger - i\phi \star \partial_\mu \Lambda \star \partial^\mu \phi^\dagger - \phi \star A^\mu \star \partial_\mu \Lambda \star \phi^\dagger \\
&\quad + \phi \star \partial^\mu \star A_\mu \star \phi^\dagger + \phi \star A^\mu \star \partial_\mu \star \phi^\dagger,
\end{aligned} \tag{B.31}$$

cancelando os termos semelhantes obtemos,

$$\delta \hat{\mathcal{L}} = i\partial^\mu \phi \star \partial_\mu \Lambda \star \phi^\dagger - i\phi \star \partial_\mu \Lambda \star \partial^\mu \phi^\dagger. \tag{B.32}$$

Então para que o Lagrangiano (B.11) seja invariante por transformações locais devemos somar a este, o termo \mathcal{L} agrangiano $\hat{\mathcal{L}}_I$ da equação (B.25),

$$\hat{\mathcal{L}}_{inv} = \hat{\mathcal{L}}_0 + \hat{\mathcal{L}}_I, \tag{B.33}$$

sendo que a variação funcional neste novo Lagrangiano $\hat{\mathcal{L}}_{inv}$ seja zero,

$$\begin{aligned}
\delta \hat{\mathcal{L}}_{inv} &= \delta \hat{\mathcal{L}}_0 + \delta \hat{\mathcal{L}}_I \\
&= i\phi \star \partial_\mu \Lambda \star \partial^\mu \phi^\dagger - i\partial^\mu \phi \star \partial_\mu \Lambda \star \phi^\dagger \\
&\quad + i\partial^\mu \phi \star \partial_\mu \Lambda \star \phi^\dagger - i\phi \star \partial_\mu \Lambda \star \partial^\mu \phi^\dagger \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.34}$$

Temos então um Lagrangiano $\hat{\mathcal{L}}_{inv}$ invariante por transformações locais de gauge que é uma interação do campo escalar complexo com um campo vetorial de gauge todos eles em coordenadas não comutativas,

$$\hat{\mathcal{L}}_{inv} = \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi^\dagger - m^2 \phi \star \phi^\dagger + i\partial^\mu \phi \star A_\mu \star \phi^\dagger - i\phi \star A_\mu \star \partial^\mu \phi^\dagger + \phi \star A^\mu \star A_\mu \star \phi^\dagger. \tag{B.35}$$

E exatamente como nas tradicionais teorias de gauge, é possível definir a derivada covariante, agora em termos das coordenadas não comutativas,

$$D_\mu^f[A]\phi = \partial_\mu \phi - i\phi \star A_\mu, \tag{B.36}$$

$$D_{\mu}^{\bar{f}}[A]\phi^{\dagger} = \partial_{\mu}\phi^{\dagger} + iA_{\mu} \star \phi^{\dagger}. \quad (\text{B.37})$$

O Lagrangiano $\hat{\mathcal{L}}_{inv}$ (B.35), escrito em termos das derivadas covariantes é:

$$\hat{\mathcal{L}}_{inv} = D_{\mu}^f[A]\phi \star D^{\mu\bar{f}}[A]\phi^{\dagger} - m^2\phi \star \phi^{\dagger}. \quad (\text{B.38})$$

Neste ponto então, nos resta acrescentar o termo que resulta na dinâmica do campo de gauge em coordenadas não comutativas,

$$F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu}$$

dado por [112],

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\hat{A}_{\nu} - \partial_{\nu}\hat{A}_{\mu} - i[\hat{A}_{\mu}, \hat{A}_{\nu}]_{\star}. \quad (\text{B.39})$$

Apêndice C

Coordenadas Não Comutativas

Este apêndice tem por objetivo, abordar os conceitos matemáticos que foram utilizados no desenvolvimento teórico desta tese. É descrito a notação para em seguida ser desenvolvido as técnicas envolvendo as coordenadas não-comutativas. Por último, é descrever o Produto de Moyal, numa forma simples, mas coerente com as definições iniciais.

C.2 Notação

Uma coordenada não-comutativa será denotada por \hat{x}_i , onde o índice $i = 1, 2, 3$ denota as coordenadas espaciais.

Vamos, então, descrever as coordenadas não-comutativas, da seguinte forma,

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{\theta_{ij} p_j}{2\hbar}, \quad (\text{C.1})$$

sendo o comutador das coordenadas dado por,

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}, \quad (\text{C.2})$$

este resultado é facilmente obtido fazendo uso do comutador de Heisenberg $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$.

Utilizaremos a seguinte terminologia,

- 1) \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} coordenadas retangulares não comutativas;

- 2) $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{i}\hat{x} + \mathbf{j}\hat{y} + \mathbf{k}\hat{z}$ vetor em coordenadas retangulares não comutativas;
- 3) $\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i}$ derivadas parcial na coordenada não comutativa x_i ;
- 4) $\hat{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial \hat{x}} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial \hat{y}} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial \hat{z}}$ operador nabla em coordenadas retangulares não comutativas
- 5) $f(\hat{\mathbf{r}}) = \hat{f}$ é uma função escalar em coordenadas não comutativas;
- 6) $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) = \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{i}F_x(\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{j}F_y(\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{k}F_z(\hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{i}\hat{F}_x + \mathbf{j}\hat{F}_y + \mathbf{k}\hat{F}_z$ é uma função vetorial das coordenadas retangulares não comutativas;

Para que não haja dúvidas entre $\hat{\mathbf{r}}$ vetor não comutativo e o vetor unitário radial, utilizamos a notação \mathbf{e}_r , para o vetor unitário radial das coordenadas esféricas, sendo esta base canônica dada por $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$.

C.3 O módulo do vetor não comutativo $\hat{\mathbf{r}}$

Vamos analisar situações onde se faz necessário o $|\hat{\mathbf{r}}|$. Da definição de coordenada não comutativa dada em (C.1), este resultado pode ser verificado utilizando a forma de índices, observe que a coordenada não comutativa da equação (C.1) nos dá o módulo ao quadrado igual a

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{r}}|^2 &= \hat{x}_i \hat{x}_i = \left(x_i - \frac{\theta_{ij} p_j}{2\hbar}\right) \left(x_i - \frac{\theta_{ik} p_k}{2\hbar}\right) \\ &= x_i x_i - \frac{\theta_{ik} x_i p_k}{2\hbar} - \frac{\theta_{ij} p_j x_i}{2\hbar} + \frac{\theta_{ij} p_j \theta_{ik} p_k}{4\hbar^2}. \end{aligned}$$

Observe que os índices do termo θ são antissimétricos e se cancelam para $i = j$ temos então que $x_i p_j = p_j x_i$ para quaisquer $i \neq j$ nos segundo e terceiro termos, resultando em,

$$|\hat{\mathbf{r}}|^2 = x_i x_i - \frac{\theta_{ik} x_i p_k}{\hbar} + \frac{\theta_{ij} p_j \theta_{ik} p_k}{4\hbar^2}, \quad (\text{C.3})$$

contabilizando os índices na equação acima apenas até a primeira ordem em θ ,

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{r}}|^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &- \frac{1}{\hbar} \left[\theta_{12} x p_y + \theta_{13} x p_z + \theta_{21} y p_x + \theta_{23} y p_z + \theta_{31} z p_x + \theta_{32} z p_y \right] + \mathcal{O}(\theta^2). \end{aligned}$$

Vamos definir $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e a matriz antissimétrica $[\theta_{ij}]$ como,

$$[\theta_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

de forma que $|\hat{\mathbf{r}}|^2$ seja,

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{r}}|^2 &= r^2 - \frac{1}{\hbar} \left[-\theta_3 x p_y + \theta_2 x p_z + \theta_3 y p_x - \theta_1 y p_z - \theta_2 z p_x + \theta_1 z p_y \right] + \mathcal{O}(\theta^2) \\ &= r^2 - \frac{1}{\hbar} \left[-\theta_1 (y p_z - z p_y) - \theta_2 (z p_x - x p_z) - \theta_3 (x p_y - y p_x) \right] + \mathcal{O}(\theta^2), \end{aligned}$$

os termos entre parênteses formam o vetor momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, também vamos definir o vetor $\vec{\theta}$ como,

$$\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3), \quad (\text{C.5})$$

de forma que resultado final para $|\hat{\mathbf{r}}|^2$ até a primeira ordem em θ seja,

$$|\hat{\mathbf{r}}|^2 = r^2 + \frac{\vec{\theta} \cdot \mathbf{L}}{\hbar} + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (\text{C.6})$$

Utilizando-se da matriz antissimétrica $[\theta_{ij}]$, definida em (C.4), e do vetor que resulta das componentes desta matriz definido em (C.5), obtemos que o vetor

$\hat{x}_i = x_i - \frac{\theta_{ij} p_j}{2\hbar}$ pode agora ser escrito da seguinte forma vetorial,

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p} \times \vec{\theta}}{2\hbar}. \quad (\text{C.7})$$

Vamos calcular o módulo ao quadrado do vetor $\hat{\mathbf{r}}$, agora utilizando a forma vetorial acima (C.7) até a segunda ordem em θ ,

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{r}}|^2 &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p} \times \vec{\theta}}{2\hbar} \right) \cdot \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p} \times \vec{\theta}}{2\hbar} \right) \\ |\hat{\mathbf{r}}|^2 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{p} \times \vec{\theta}}{2\hbar} + \frac{\mathbf{p} \times \vec{\theta}}{2\hbar} \cdot \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p} \times \vec{\theta}}{2\hbar} \cdot \frac{\mathbf{p} \times \vec{\theta}}{2\hbar} \\ |\hat{\mathbf{r}}|^2 &= |\mathbf{r}|^2 + \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{p} \cdot \vec{\theta}}{\hbar} + \frac{|\mathbf{p} \times \vec{\theta}|^2}{4\hbar^2} \end{aligned}$$

Isto resulta, por fim, em um resultado até a segunda ordem em θ que é de muita utilidade para alguns problemas que iremos abordar mais adiante,

$$|\hat{\mathbf{r}}|^2 = |\mathbf{r}|^2 + \frac{\mathbf{L} \cdot \vec{\theta}}{\hbar} + \frac{|\mathbf{p} \times \vec{\theta}|^2}{4\hbar^2}. \quad (\text{C.8})$$

C.4 Derivadas e comutadores

Vejamos agora que o comutador de uma função em coordenadas não-comutativas e a coordenada, resulta na derivada da função. O nosso ponto de apoio aqui será o comutador (C.2) $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}$. Primeiro demonstraremos um resultado importante do comutador entre \hat{x}_i^n e \hat{x}_j , como segue,

$$\begin{aligned}
[\hat{x}_i^n, \hat{x}_j] &= \hat{x}_i^{n-1}\hat{x}_i\hat{x}_j - \hat{x}_j\hat{x}_i^n \\
[\hat{x}_i^n, \hat{x}_j] &= \hat{x}_i^{n-2}\hat{x}_i\hat{x}_j\hat{x}_i + i\theta_{ij}\hat{x}_i^{n-1} - \hat{x}_j\hat{x}_i^n \\
[\hat{x}_i^n, \hat{x}_j] &= \hat{x}_i^{n-3}\hat{x}_i\hat{x}_j\hat{x}_i^2 + i2\theta_{ij}\hat{x}_i^{n-1} - \hat{x}_j\hat{x}_i^n \\
[\hat{x}_i^n, \hat{x}_j] &= \hat{x}_i^{n-4}\hat{x}_i\hat{x}_j\hat{x}_i^3 + i3\theta_{ij}\hat{x}_i^{n-1} - \hat{x}_j\hat{x}_i^n \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
[\hat{x}_i^n, \hat{x}_j] &= \hat{x}_i\hat{x}_j\hat{x}_i^{n-1} + i(n-1)\theta_{ij}\hat{x}_i^{n-1} - \hat{x}_j\hat{x}_i^n \\
[\hat{x}_i^n, \hat{x}_j] &= \hat{x}_j\hat{x}_i^n + in\theta_{ij}\hat{x}_i^{n-1} - \hat{x}_j\hat{x}_i^n
\end{aligned}$$

resultando por fim,

$$[\hat{x}_i^n, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}n\hat{x}_i^{n-1} \quad (\text{C.9})$$

este resultado pode ser escrito como uma derivada parcial em \hat{x}_i ,

$$[\hat{x}_i^n, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}\frac{\partial \hat{x}_i^n}{\partial \hat{x}_i}. \quad (\text{C.10})$$

Uma função $f(\hat{\mathbf{r}}) = f(\hat{x}_i)$ escalar analítica que pode ser escrita como uma série de potências das coordenadas não comutativas retangulares, será dada por,

$$f(\hat{\mathbf{r}}) = \sum C_{lmn}\hat{x}^l\hat{y}^m\hat{z}^n. \quad (\text{C.11})$$

Podemos então obter a derivada parcial em uma coordenada não comutativa utilizando o comutador,

$$[f(\hat{\mathbf{r}}), \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \frac{\partial f(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \hat{x}_i}. \quad (\text{C.12})$$

Seja a função acima $f(\hat{\mathbf{r}})$, e verifiquemos agora os comutadores,

$$[f(\hat{\mathbf{r}}), \hat{x}] = i\theta_z \frac{\partial f(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \hat{y}} - i\theta_y \frac{\partial f(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \hat{z}}, \quad (\text{C.13})$$

$$[f(\hat{\mathbf{r}}), \hat{y}] = i\theta_x \frac{\partial f(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \hat{z}} - i\theta_z \frac{\partial f(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \hat{x}}, \quad (\text{C.14})$$

$$[f(\hat{\mathbf{r}}), \hat{z}] = i\theta_y \frac{\partial f(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \hat{x}} - i\theta_x \frac{\partial f(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \hat{y}}. \quad (\text{C.15})$$

Estes comutadores podem ser reunidos em um só comutador tal que

$$[f(\hat{\mathbf{r}}), \hat{\mathbf{r}}] = i\hat{\nabla} f(\hat{\mathbf{r}}) \times \vec{\theta}, \quad (\text{C.16})$$

onde $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{i}\hat{x} + \mathbf{j}\hat{y} + \mathbf{k}\hat{z}$ em coordenadas retangulares.

Proposição:

Dada uma função vetorial $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{i}F_x(\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{j}F_y(\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{k}F_z(\hat{\mathbf{r}})$, a soma dos comutadores resulta em,

$$[F_x(\hat{\mathbf{r}}), \hat{x}] + [F_y(\hat{\mathbf{r}}), \hat{y}] + [F_z(\hat{\mathbf{r}}), \hat{z}] = -i(\hat{\nabla} \times \hat{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\theta} \quad (\text{C.17})$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} [\hat{F}_x(\hat{\mathbf{r}}), \hat{x}] + [\hat{F}_y(\hat{\mathbf{r}}), \hat{y}] + [\hat{F}_z(\hat{\mathbf{r}}), \hat{z}] &= i(\theta_z \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial \hat{y}} - \theta_y \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial \hat{z}}) + i(\theta_x \frac{\partial \hat{F}_y}{\partial \hat{z}} - \theta_z \frac{\partial \hat{F}_y}{\partial \hat{x}}) + \\ &+ i(\theta_y \frac{\partial \hat{F}_z}{\partial \hat{x}} - \theta_x \frac{\partial \hat{F}_z}{\partial \hat{y}}) \end{aligned}$$

podemos então reagrupar os termos em θ ,

$$\begin{aligned} &[F_x(\hat{\mathbf{r}}), \hat{x}] + [F_y(\hat{\mathbf{r}}), \hat{y}] + [F_z(\hat{\mathbf{r}}), \hat{z}] = \\ &= i \left[\theta_x \left(\frac{\partial \hat{F}_y}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial \hat{F}_z}{\partial \hat{y}} \right) + \theta_y \left(\frac{\partial \hat{F}_z}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{F}_x}{\partial \hat{z}} \right) + \theta_z \left(\frac{\partial \hat{F}_x}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial \hat{F}_y}{\partial \hat{x}} \right) \right] \quad (\text{C.18}) \end{aligned}$$

resultando em,

$$[F_x(\hat{\mathbf{r}}), \hat{x}] + [F_y(\hat{\mathbf{r}}), \hat{y}] + [F_z(\hat{\mathbf{r}}), \hat{y}] = -i(\hat{\nabla} \times \hat{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\theta}. \quad (\text{C.19})$$

C.5 $f(\hat{x})g(\hat{x}) = f(x) \star g(x)$

Para provarmos a identidade acima (produto de Moyal), vamos escrever um função em coordenadas não comutativas em termos de uma expansão até a segunda ordem em θ ,

$$f(\hat{\mathbf{r}}) = f\hat{x}_i = f\left(x_i - \frac{\theta_{ij}p_j}{2\hbar}\right)$$

$$f\left(x_i - \frac{\theta_{ij}p_j}{2\hbar}\right) = f(x_i) - \frac{\theta_{ij}}{2\hbar}p_j\partial_i f(x) + \frac{1}{2}\frac{\theta_{ij}\theta_{kl}}{4\hbar^2}p_jp_l\partial_i\partial_k f(x) + \dots$$

Vejamos o produto de duas funções $f(\hat{\mathbf{r}})g(\hat{\mathbf{r}})$ em termos de suas respectivas expansões até a segunda ordem em θ ,

$$f(\hat{\mathbf{r}})g(\hat{\mathbf{r}}) = f\left(x_i - \frac{\theta_{ij}p_j}{2\hbar}\right)g\left(x_k - \frac{\theta_{kl}p_l}{2\hbar}\right)$$

$$f(\hat{\mathbf{r}})g(\hat{\mathbf{r}}) = \left(f - \frac{\theta_{ij}}{2\hbar}p_j\partial_i f + \frac{1}{2}\frac{\theta_{ij}\theta_{kl}}{4\hbar^2}p_jp_l\partial_i\partial_k f\right)\left(g - \frac{\theta_{mn}}{2\hbar}p_m\partial_n g + \frac{1}{2}\frac{\theta_{mn}\theta_{rs}}{4\hbar^2}p_n p_s\partial_m\partial_r g\right)$$

$$\begin{aligned} f(\hat{\mathbf{r}})g(\hat{\mathbf{r}}) &= f(\mathbf{r})g(\mathbf{r}) - \frac{\theta_{kl}}{2\hbar}f p_l\partial_k g - \left(\frac{\theta_{ij}}{2\hbar}p_j\partial_i f\right)g + \frac{\theta_{ij}}{2\hbar}p_j\partial_i f\frac{\theta_{mn}}{2\hbar}p_n\partial_m g + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\theta_{mn}\theta_{rs}}{4\hbar^2}f p_n p_s\partial_m\partial_r g + \frac{1}{2}\frac{\theta_{ij}\theta_{kl}}{4\hbar^2}p_jp_l\partial_i\partial_k f g + \mathcal{O}(\theta^3), \end{aligned}$$

agora quando fizermos a transformação do operador quântico $p_i \rightarrow -i\hbar\partial_i$, veremos que no segundo membro da expressão acima se cancela pois os índices de θ_{kl} são antissimétricos e os termos $\partial_l\partial_k$ são simétricos, este mesmo argumento vale para os quarto e quinto termos. No terceiro termo a derivada ∂_j quando atua em f se cancela pelo mesmo motivo citado acima, mas não se cancela quando

atua em g , o mesmo ocorre no sexto termo quando atuamos as derivadas $\partial_j \partial_l$ em $\partial_i \partial_k f g$ restando apenas neste termo $-\frac{1}{8} \theta_{ij} \theta_{kl} \partial_i \partial_k f \partial_j \partial_l g$, então temos

$$f(\hat{\mathbf{r}})g(\hat{\mathbf{r}}) = f(\mathbf{r})g(\mathbf{r}) + \frac{i}{2} \theta_{ij} \partial_i f \partial_j g - \frac{1}{8} \theta_{ij} \theta_{kl} \partial_i \partial_k f \partial_j \partial_l g + \mathcal{O}(\theta^3), \quad (\text{C.20})$$

este termo pode ainda se escrito de uma forma exponencial como segue,

$$f(\hat{\mathbf{r}})g(\hat{\mathbf{r}}) = f(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{i}{2} \theta_{ij} \overleftarrow{\partial}_i \overrightarrow{\partial}_j\right) g(\mathbf{r}), \quad (\text{C.21})$$

este produto de duas funções de coordenadas não comutativas define-se como produto de Moyal e pode ser definido como,

$$f(\hat{\mathbf{r}})g(\hat{\mathbf{r}}) = f(\mathbf{r}) \star g(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{i}{2} \theta_{ij} \overleftarrow{\partial}_i \overrightarrow{\partial}_j\right) g(\mathbf{r}). \quad (\text{C.22})$$

Sendo necessário trabalhar com coordenadas não comutativas no espaço de Minkowski, basta fazer as devidas modificações de índices, de forma a manter a covariância de Lorentz,

$$f(\mathbf{r}) \star g(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \exp\left(\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(\mathbf{r}). \quad (\text{C.23})$$

Apêndice D

Campo Vetorial de Matéria Livre

D.2 O Campo Livre

A lagrangeana do campo vetorial de matéria livre é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^*F^{\mu\nu} - (\partial_\mu B^{\mu*})(\partial_\nu B^\nu) + \alpha^2 B_\mu^* B^\mu, \quad (\text{D.1})$$

tal que as equações de movimento para o campo acima são,

$$\begin{cases} (\square + \alpha^2)B_\mu = 0 \\ (\square + \alpha^2)B_\mu^* = 0 \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

D.3 Funcional Gerador

O funcional gerador para o Lagrangiano (D.1) é dado por,

$$\begin{aligned} Z_0[J_\mu, J_\mu^*] \equiv & N \int \mathcal{D}B_\mu \mathcal{D}B_\mu^* \exp \left\{ i \int \left[-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^*F^{\mu\nu} - (\partial_\mu B^{\mu*})(\partial_\nu B^\nu) + \alpha^2 B_\mu^* B^\mu \right. \right. \\ & \left. \left. + i\epsilon B_\mu^* B^\mu + J_\mu^* B^\mu + J^\mu B_\mu^* \right] d^4x \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Podemos melhor expressar este funcional, e encontrar o propagador de Feynman através das transformadas de Fourier dos campos e fontes externas, dados por,

$$\tilde{B}_\mu(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4x}{(2\pi^2)} e^{-ipx} B_\mu(x) \quad (\text{D.4})$$

com a transformada inversa

$$B_\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi^2)} e^{ipx} \tilde{B}_\mu(p) \quad \text{e} \quad B_\mu^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi^2)} e^{-ipx} \tilde{B}_\mu^*(p) \quad (\text{D.5})$$

o mesmo é válido para as funções densidade de corrente J_μ^* e J_μ . A função delta de Dirac é então dada por,

$$\delta^4(x - x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi^4)} e^{i(x-x')p}. \quad (\text{D.6})$$

Os termos no funcional gerador (D.3) que são proporcionais a $B_\mu^* B^\mu$, são então calculados em termos das respectivas transformadas de Fourier, da seguinte forma,

$$\begin{aligned} (\alpha^2 + i\epsilon) \int d^4 B_\mu^* B^\mu &= (\alpha^2 + i\epsilon) \int \frac{d^4p}{(2\pi^2)} e^{-ipx} \tilde{B}_\mu^*(p) \frac{d^4p'}{(2\pi^2)} e^{ip'x} \tilde{B}_\mu(p') d^4x \\ &= (\alpha^2 + i\epsilon) \int d^4p d^4p' \frac{d^4x}{(2\pi^4)} e^{ix(p'-p)} \tilde{B}_\mu^*(p) \tilde{B}_\mu(p') \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

integrando em x obtemos uma delta de Dirac, e em seguida integrando na variável p' , obtemos o seguinte resultado,

$$(\alpha^2 + i\epsilon) \int d^4 B_\mu^* B^\mu = (\alpha^2 + i\epsilon) \int d^4p \tilde{B}_\mu^*(p) \tilde{B}_\mu(p). \quad (\text{D.8})$$

Vamos então verificar o termo $(\partial_\mu B^{\mu*})(\partial_\nu B^\nu)$,

$$\begin{aligned} \int d^4x (\partial_\mu B^{\mu*})(\partial_\nu B^\nu) &= \int d^4x \partial_\mu \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi^2)} e^{-ipx} \tilde{B}^{\mu*}(p) \right] \partial_\nu \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p'}{(2\pi^2)} e^{ip'x} \tilde{B}^\nu(p') \right] \\ &= \int \frac{d^4x}{2\pi^4} d^4p d^4p' e^{ix(p'-p)} \left[(-ip_\mu \tilde{B}^{\mu*}(p)) (ip'_\nu \tilde{B}^\nu(p')) \right], \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

integrando em x e depois na variável p' , obtemos então,

$$\int d^4x (\partial_\mu B^{\mu*})(\partial_\nu B^\nu) = \int d^4p p_\mu \tilde{B}^{\mu*}(p) p_\nu \tilde{B}^\nu(p). \quad (\text{D.10})$$

Este mesmo procedimento deve ser adotado para transformar a integral do termo $F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu}$ que resulta em,

$$\int d^4x F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} = \int d^4p \left[p_\mu \tilde{B}_\nu^* - p_\nu \tilde{B}_\mu^* \right] \left[p^\mu \tilde{B}^{\nu*} - p^\nu \tilde{B}^{\mu*} \right]. \quad (\text{D.11})$$

No Lagrangiano do funcional (D.3), existe a combinação dos termos cinéticos (D.10) e (D.11), de forma que,

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} - (\partial_\mu B^{\mu*})(\partial_\nu B^\nu) \right) = - \int d^4p p^2 \tilde{B}_\nu^* \tilde{B}^\nu. \quad (\text{D.12})$$

Os termos que acoplam a corrente J_μ e o campo vetorial de matéria são dados por,

$$\int d^4x (J_\mu^* B^\mu + J^\mu B_\mu^*) = \int d^4p (\tilde{J}_\mu^* \tilde{B}^\mu + \tilde{J}^\mu \tilde{B}_\mu^*). \quad (\text{D.13})$$

Agora combinando os termos (D.8), (D.12) e (D.13) no fator exponencial do funcional gerador (D.3), obtemos assim,

$$\begin{aligned} & \int d^4p \left[-p^2 \tilde{B}_\mu^* \tilde{B}^\mu + (\alpha^2 + i\epsilon) \tilde{B}_\mu^* \tilde{B}^\mu + \tilde{J}_\mu^* \tilde{B}^\mu + \tilde{J}^\mu \tilde{B}_\mu^* \right] \\ &= \int d^4p \left[\tilde{B}_\mu^* (p^2 - \alpha^2 - i\epsilon) \tilde{B}^\mu - \tilde{J}_\mu^* \tilde{B}^\mu - \tilde{J}^\mu \tilde{B}_\mu^* \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Se fizermos a seguinte mudança de variável,

$$\tilde{B}'_\mu(p) = \tilde{B}_\mu(p) - \frac{\tilde{J}_\mu(p)}{p^2 - \alpha^2 - i\epsilon}, \quad (\text{D.15})$$

e substituindo na expressão (D.14), e admitindo que $\mathcal{D}B'_\mu = \mathcal{D}B_\mu$ temos como resultado para o gerador funcional (D.3),

$$Z_0[J_\mu, J_\mu^*] \equiv N \int \mathcal{D}B_\mu \mathcal{D}B_\mu^* \exp \left\{ -i \int d^4p \left[\tilde{B}_\mu^*(p) (p^2 - \alpha^2 - i\epsilon) \tilde{B}^\mu(p) + \frac{\tilde{J}^\mu(p) \tilde{J}_\mu^*(p)}{(p^2 - \alpha^2 - i\epsilon)} \right] \right\}.$$

Temos que,

$$Z_0[0] = N \int \mathcal{D}B_\mu \mathcal{D}B_\mu^* \exp \left\{ i \int d^4p \left[\tilde{B}_\mu^*(p) (p^2 - \alpha^2 - i\epsilon) \tilde{B}^\mu(p) \right] \right\}, \quad (\text{D.16})$$

de forma que,

$$Z_0[J_\mu, J_\mu^*] \equiv Z_0[0] \exp \left\{ i \int d^4p \left[\frac{\tilde{J}^\mu(p) \tilde{J}_\mu^*(p)}{(p^2 - \alpha^2 - i\epsilon)} \right] \right\}. \quad (\text{D.17})$$

Fazendo uso das transformadas de Fourier,

$$\tilde{J}^\mu(p) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^2} e^{-ipx} J(x) \quad \text{e} \quad \tilde{J}^{\mu*}(p) = \int \frac{d^4y}{(2\pi)^2} e^{ipy} J^*(y), \quad (\text{D.18})$$

e efetuando o cálculo no funcional (D.17), que resulta em,

$$Z_0[J_\mu, J_\mu^*] \equiv Z_0[0] \exp \left\{ i \int d^4x d^4y J^\mu(x) \Delta_F(x-y) J_\mu^*(y) \right\}, \quad (\text{D.19})$$

que pode ainda ser simplificado com a condição de normalização $Z_0[0] = 1$. Temos ainda que o propagador de Feynman Δ_F é dado por,

$$\Delta_F = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - \alpha^2 - i\epsilon} . \quad (\text{D.20})$$

Este propagador é igual ao da teoria de campo escalar. O que indica que as funções vértices do campo vetorial de matéria são idênticas às do campo escalar.

Referências Bibliográficas

- [1] Wolfgang Pauli, *Scientific Correspondence*, Vol II, p.15, Ed. Karl von Meyenn, Spring-Verlag, (1985);
- [2] L.D. Landau & L.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* Pergamon Press, Oxford (1977);
- [3] Wolfgang Pauli, *Scientific Correspondence*, Vol III, p.380, ed. Karl von Meyenn, Spring-Verlag, (1993);
- [4] H.S. Snyder, *Quantized Spacetime*, Phys. Rev. **71**(1947) 38; *The Electromagnetic Field in Quantized Spacetime*, Phys. Rev. **72** (1947) 68;
- [5] C.N. Yang, *On Quantized Space-Time*, Phys.Rev **72** (1947) 874;
- [6] J. Madore, S. Schraml, P. Schupp & J. Wess, *Gauge Theory on Noncommutative Spaces*, Eur.Phys.J. **C 16** (2000) 161;
- [7] N. Seiberg & E. Witten, *String Theory and Noncommutative Geometry*, JHEP 09, 032 (1999) [hep-th 9908142];
- [8] A. Connes, M.R. Douglas, A. Schwarz, *Noncommutative Geometry and Matrix Theory: Compactification on Tori*, JHEP, **02** (1998), [hep-th 9711162];
- [9] A. Abouelsaood, C.G. Callan, C.R. Nappi & S.A. Yost, *Open Strings in Background Gauge Fields*, Nucl.Phys. **B280** (1987) 599;

- [10] R. Peierls, *Z. Phys.*, **80** (1933), 763;
- [11] R. Jackiw, *Lochlainn O’Raifeartaigh, Fluids, and Noncommuting Fields*, physics 0209108 ;
- [12] R.J.G. Dunne, ‘*Peierls Substitution’ and Chern-Simons Quantum Mechanics*’, *Nucl. Phys. B. (Proc. Suppl.)*, **33C** (1933), 114;
- [13] J. Lukierski, A. Novicki, H. Ruegg & V. Tolstoy, *q-Deformation of Poincaré Algebra*, *Phys. Lett.*, **B268** (1991), 331.
- [14] J. Lukierski, H. Ruegg & W.J. Zakrzewski, *Classical Quantum Mechanics of Free kappa relativistic Systems*, *Ann. Phys.*, **243** (1994) 90, [hep-th 9312153];
- [15] S. Majid & H. Ruegg, *Bicrossproduct Structure of kappa-Poincare Group and Non-commutative Geometry*, *Phys.Lett.* **B334** (1994) 348, [hep-th 9405107];
- [16] J. Lukierski & A. Nowicki, *Heisenberg Double Description of kappa-Poincaré Algebra and kappa Deformed phase space*, q-alg 9702003;
- [17] G. Amelino-Camelia & S. Majid, *Waves on Noncommutative Spacetime and gamma-ray Bursts*, *Int. J. Mod. Phys.*, **A15** (2000), 4301, [hep-th 9907110];
- [18] G. Amelino-Camelia, J. Ellis, N.E. Mavromatos, D.V. Nanopoulos & S. Sarkar *Potential Sensitivity of Gamma-Ray Burster Observations to Wave Dispersion in Vacuo*, *Nature* **393** (1998) 763-765, [astro-ph 9712103];
- [19] Gambini & J. Pullin, *Phys.Rev.* **59** (1999) 124021;
- [20] J. Alfaro, H.A. Morales-Técolt & L.F. Urrutia, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 2318;

- [21] J. Alfaro, H.A. Morales-Técolt & L.F. Urrutia, Phys. Rev. D **65** (2002) 103509;
- [22] J. Alfaro & G. Palma, Phys. Rev. D. **65** (2002) 103516;
- [23] T. Jacobson, S. Liberati & D. Mattingly, hep-ph 0112207;
- [24] D. Colladay & V.A. Kostelecky, Phys. Lett. **B511** (2001) 209;
- [25] V.A. Kostelecky & R. Lehnert, Phys. Rev. D **63** (2001) 065008;
- [26] R. Bluhm & V.A. Kostelecky, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 1381;
- [27] V.A. Kostelecky & C.D. Lane, Phys. Rev. D **60** (1999) 116010;
- [28] R. Jackiw & V.A. Kostelecky, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 3572;
- [29] D. Colladay & V.A. Kostelecky, Phys. Rev. D **58** (1998) 116002;
- [30] S.M. Carrol, J.A. Harvey, V.A. Kostelecky, C.D. Lane & T. Okamoto, *Non-commutative Field Theory and Lorentz Violation*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 141601 [hep-th 0105082];
- [31] G. Amelino-Camelia, *Are we at the dawn of quantum-gravity phenomenology?*, Lect. Notes Phys., **541** (2000), [gr-qc 9910089];
- [32] N.E. Mavromatos, *The quest for quantum gravity: Testing times for theories?*, astro-ph 0004225;
- [33] G. Amelino-Camelia, *Quantum-gravity phenomenology: Status and prospects*, Mod. Phys. Lett., **A17** (2002), 899, [gr-qc 0204051];
- [34] S. Sarkar, *Possible astrophysical probes of quantum gravity*, Mod. Phys. Lett. **A17**, (2002), 1025 [gr-qc 0204092];

- [35] D.V. Ahluwalia, *Interface of gravitational and quantum realms*, Mod. Phys. Lett. **A17**, (2002), 1135 [gr-qc 0205121];
- [36] R. Jackiw *Physical Instances of Noncommutating Coordinates* Nucl. Phys. Proc. Suppl. B 108, 30 (2002) hep-th 0110057;
- [37] Z. Guralnik; R. Jackiw, S-Y. Pi & A.P. Polychronakos, Phys. Lett. **B517**, 450 (2001) [hep-th/ 0106044];
- [38] S.D. Biller *et al.*, *Limits to Quantum Gravity Effects from Observations of TeV Flares in Active Galaxies* Phys.Rev.Lett. **83** (1999) 2108 [gr-qc 9810044];
- [39] G. Amelino-Camelia, *An interferometric gravitational wave detector as a quantum-gravity apparatus* Nature **398** (1999) 216 [gr-qc 9808029];
- [40] T. Kifune, *Invariance Violation Extends the Cosmic Ray Horizon ?*, Astrophys.J. **518** (1999) L21-L24, [astro-ph/9904164];
- [41] G. Amelino-Camelia & T. Piran, *Planck-scale deformation of Lorentz symmetry as a solution to the UHECR and the TeV-gamma paradoxes*, Phys.Rev. **D64** (2001) 036005, [astro-ph 0008107];
- [42] G. Amelino-Camelia, *Space-time quantum solves three experimental paradoxes*, Phys.Lett. **B528** (2002), 181, [gr-qc 0107086];
- [43] C. Rovelli, *Notes for a Brief History of Quantum Gravity*, [gr-qc 0006061];
- [44] T. Thiemann, *Introduction to Modern Canonical quantum general relativity*, [gr-qc 0110034];
- [45] A. De Angelis, *GLAST, the gamma-ray large area space telescope*, [astro-ph 0009271];

- [46] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk & N. Seiberg, *Noncommutative Perturbative Dynamics*, J. High Energy Phys. **0002** (2000) 020 [hep-th 9912072];
- [47] G. Arcioni & M.A. Vázquez-Monzo, *Thermal Effects in Perturbative Noncommutative Gauge Theories*, J. High Energy Phys. **0001**, (2000) 028 [hep-th 9912140];
- [48] W. Fischler, E. Gorbatov, A. Kashani-Poor, S. Paban, P.Pouliot & J. Gomis, *Evidence for Winding States in Noncommutative Quantum Field Theory*, J.High Energy Phys. **0005**; (2000) 024 [hep-th 0002067];
- [49] W. Fischler, E. Gorbatov, A. Kashani-Poor, R. Mcnees, S. Paban & P.Pouliot. *The Interplay between θ and T* , J. High Energy Phys. **0006**, (2000) 032 [hep-th 0003216];
- [50] G. Arcioni, J.L. Barbón, J. Gomis & M.A. Vazquez-Mozo, *On the Stringy Nature of Winding in Noncommutative Thermal Field Theories*, J. High Energy Phys. **0006**, (2000) 038, [hep th 0004080];
- [51] O.D. Andreev & H. Dorn, *Diagrams of Noncommutative ϕ^3 Theory from String Theory*, Nucl. Phys **B583** (2000) 145 [hep-th 0003113];
- [52] Y. Kiem & S. Lee, *UV/IR Mixing in Noncommutative Field Theory via Open String Loops*, Nucl. Phys. **B586** (2000) 303 [hep-th 0003145];
- [53] A. Bilal, C.-S. Chu & R. Russo, *String Theory & Noncommutative Field Theories at One Loop*, Nucl. Phys. **B582** (2000) 65 [hep-th 0003180];
- [54] J. Gomis, M. Kleban, T. Mehen, M. Rangamani & S. H. Shenker, *Noncommutative Gauge Dynamics from the String Worldsheet*, J.High Energy Phys.**0008**, (2000) 011, [hep-th 0003215];

- [55] D.J. Gross & N. A. Nekrasov, *Dynamics of String in Noncommutative Gauge Theory*, J. High Energy Phys. **10**, (2000) 021,[hep-th 0007204];
- [56] F. Lizzi, R. J. Szabo & A. Zampini, *Geometry of the Gauge Algebra in Noncommutative Yang-Mills Theory*, J. High Energy Phys. **08**, (2001) 032, [hep-th 0107115];
- [57] M. Sheikh- Jabbari, *One Loop Renormalizability of Supersymmetric Yang-Mills Theories on Noncommutative Torus*, [hep-th 9903107] JHEP **06** (1999) 015;
- [58] C.P. Martin, D. Sanchez- Ruiz, *The One-Loop UV Divergent Structure of $U(1)$ Yang-Mills Theory on Noncommutative \mathbb{R}^4* , [hep-th/ 9903077] Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 476;
- [59] L.P. Colatto, A.L.A. Penna & W.C. Santos *Charged Tensor Matter Fields and Lorentz Symmetry Violation via Spontaneous Symmetry Breaking*, Eur.Phys.J.**C36**:79-87,2004 [hep-th/0310220]
- [60] G. Veneziano, *A Stringy Nature Needs Just Two Constants*, Europhys. Lett. **2** (1986) 199;
- [61] D.J. Gross & P.F. Mende, *String Theory Beyond the Planck Scale*, Nucl. Phys. **B303** (1988) 407;
- [62] D. Amati, M. Ciafaloni & G. Veneziano, *Can Spacetime be probed Below the String Size?*, Phys. Lett. **B216** (1989) 41;
- [63] L.J. Garay, *Quantum Gravity and Minimum Length*, Int. J. Mod. Phys. **A10** (1995), 145-166, [gr-qc 9403008];

- [64] M. Maggiore, *A Generalized Uncertainty Principle in Quantum Gravity*, Phys. Lett. **B304** (1993), 65-69, [hep-th 9301067]
- [65] S. Doplicher, K. Fredenhagen & J.E. Roberts, *Spacetime Quantization Induced by Classical Gravity*, Phys. Lett. **B331** (1994) 39;
The Quantum Structure of Spacetime at the Planck Scale and Quantum Fields, Commun. Math. Phys. **172** (1995) 187;
- [66] T. Yoneya, *String Theory and Spacetime Uncertainty Principle*, Progr. Theor. Phys. **103** (2000) 1081 [hep-th/0004074]
- [67] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (Dover, New York, 1931)
- [68] H.J. Groenewold, *On the principles of Elementary Quantum Mechanics*, Physica **12**(1946) 405;
- [69] J.E. Moyal, *Quantum Mechanics as a Statistical Theory* Proc, Cambridge Phil. Soc. **45** (1949) 99;
- [70] R.J. Szabo, *Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces*, hep-th/0109162;
- [71] A.A. Bichl, J.M. Grimstrup, L. Popp, M. Schweda & R. Wulkenhaar *Deformed QED via Seiberg-Witten Map*, [hep-th 0102103].
- [72] N. Seiberg, L. Susskind & N. Toumbas, *Space/Time Noncommutativity and Causality*, J. High Energy Phys. **0006** (2000) 044 [hep-th 0005015];
- [73] J. Gomis & T. Mehen, *Space-Time Noncommutative Field Theories and Unitarity*, Nucl. Phys. B **591**, 265 (2000) [hep-th 0005129];

- [74] L. Alvarez-Gaumé, J.L.F. Barbón & R. Zwicky, *Remarks on Time-Space Noncommutative Field Theories*, J. High Energy Phys. **0105** (2001) 057 [hep-th 0103069];
- [75] R. G. Cai & N. Ohta, *Lorentz Transformation and Light-Like Noncommutative SYM*, J. High Phys. **0010** (2000) 036 [hep-th 0008119];
- [76] Richard J. Szabo *Magnetic Backgrounds and Noncommutative Field Theory*, physics 0401142;
- [77] T. Curtright, D. Fairlie & C. Zachos, Phys. Rev **D58**, 025002 (1998);
- [78] D. Bigatti & L. Susskind, Phys. Rev. **D62**, 066004 (2000), [hep-th/9908056];
- [79] J. Gamboa, M. Loewe & J.C. Rojas, Phys. Rev. **D64**, 067901 (2001);
- [80] C. Rovelli & L. Smolin, *Discreteness of the area and volume in quantum gravity*, Nucl. Phys. B 456, 593 (1995);
- [81] J. C. Baez, *Spin Foam Models* , Class. Quant. Grav. **15**, 1827-1858 (1998)[gr-qc/9709052] ;
An Introduction to Spin Foam Models of Quantum Gravity and BF Theory, Lect. Notes Phys. **543** , (2000), 25 [gr-qc/9905087];
- [82] L. Crane, A. Perez & C. Rovelli, , Phys. Rev. Lett. **87**, (2001), 181301;
- [83] R. Gambini & J. Pullin, , Phys. Rev. D **66** , (2002), 024020;
- [84] L. Susskind, *The World as a hologram*, J. M. P **36**, (1995), 6377;
- [85] R. Bousso, *A Covariant Entropy Conjecture*, J. H. E. P. **9907:004**, (1999) [hep-th/9905177];

- [86] V.O. Rivelles, *Noncommutative Theories, Seiberg-Witten Map and Gravity*, Proceedings of the II International Conference on Fundamental Interactions, Editora RiMa, São Paulo, 2005;
- [87] X. Calmet, *What are the Bounds on Space-Time Noncommutativity?*, Eur.Phys.J. **C41**, (2005), 269, [hep-th 0401097];
- [88] A. H. Fatollahi & A.Jafari, *On the Bound States of Photons in Noncommutative Quantum Electrodynamics*, hep-th 0503078;
- [89] A. Kijanka & Piotr Kosinski, *On noncommutative isotropic harmonic oscillator*, hep-th 0407246;
- [90] A. Kokado, T. Okamura & T. Saito *Noncommutative quantum Mechanics and Seiberg-Witten Map*, Phys.Rev. **D69** (2004), 125007, [hep-th 0401180];
- [91] C.E. Carlson, C.D. Carone & R.F. Lebed *Bounding Noncommutative QCD*, Phys.Lett. **B518**, (2001), 201, [hep-ph 0107291];
- [92] A. Jellal, *Orbital Magnetism of Two-Dimensions Noncommutative Confined System*, J.Phys. **A34** (2001) 10159, [hep-th 0105303];
- [93] A. Jellal, E.H.E Kimani & M. Schreiber, *Two Couple Harmonic Oscillator on Noncommutative Plane*, Int.J.Mod.Phys. **A20** (2005) 1515, [hep-th 0309105];
- [94] C. Duval, P.A. Horvathy, *Spin and Exotic and Galilean Symmetry* Phys.Lett. **B547**, 306 (2002);
- [95] P.A. Horvathy, M.S. Plyschchay, *Anyon Wave Equations and the Noncommutative Plane* Phys.Lett. **B595**, 547 (2004);
- [96] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, 2nd. Ed., Cambridge University Press, 1999;

- [97] J.J. Sakurai *Modern Quantum Mechanics* (San Fu Tuan, Editor), University of Hawaii, Manoa, Addison Wesley Publishing Company, (1994);
- [98] M. Chaichian, M.M. Sheikh-Jabbari & A. Tureanu *Hydrogen Atom Spectrum and the Lamb Shift in Noncommutative QED* [hep-th 0010175];
- [99] Fayyazuddin, Riazuddin, *A Modern introduction to particle physics*, **World Scientific**(1994).
- [100] E. Cremmer & J Scherk, Nuclear Phys. **B72**, 117 (1974);
- [101] M. Kalb & P. Ramond, Phys. Rev. **D9**, 227 (1974);
- [102] S. Deser & R. Jackiw *Topologically Massive Gauge Theories*, Ann. Phys. **140**, 372, 1982;
Selfduality of Topologically Massive Gauge Theories, Phys. Lett. **B139**, 371, 1984;
- [103] A.A. Andrianov & R. Soldati, Phys. Rev **D51**, 5961 (1995);
- [104] S. Coleman & E. Weimberg, Phys, Rev **D7**, 1888 (1973);
- [105] D. Hutsemekers & H. Lamy, Astron. Astrphys **367**, 381 (2001);
D. Hutsemekers & H. Lamy, Astron. Astrphys **332**, 410 (1998);
- [106] M. Goldhaber & V. Trimble, J. Astrophys. Astron. **17**, 17 (1996);
- [107] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1985 2nd ed;
- [108] D. Bailin & A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory*, Graduate Student Series in Physics, IOP 1993, Reprinted 1996;

- [109] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Addison-Wesley Publishing Company, 1989 Revised Printing;
- [110] L.P. Colatto, A.L.A. Penna & W.C. Santos, *Noncommutative geometry induced by spin effects* hep-th 0512266.
- [111] A. Hanson, T. Regge & C. Teitelboin, *Constrained Hamiltonian Systems*, Academia Nazionale dei Lincei, (1976);
- [112] F.A. Schaposnik, *Three Lectures on Noncommutative Field Theories*, Proceedings of the II International Conference on Fundamental Interactions, Editora RiMa, São Paulo, 2005;



Thor

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)