

Ronni Geraldo Gomes de Amorim

*Formulação de teorias de campos via  
estruturas simpléticas e o produto de Weyl*

Dissertação apresentada ao Instituto de  
Física da Universidade de Brasília, para  
obtenção do título de mestre em Física

Orientador:

Ademir Eugênio de Santana

Co-orientador:

Marco Cezar Barbosa Fernandes

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
INSTITUTO DE FÍSICA

Brasília

março de 2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

## *Dedicatória*

Dedico os resultados desta pesquisa primeiramente a Deus, que iluminou meus pensamentos e tornou possível todas as conciliações que tive que fazer durante este período. A todos meus familiares, que sempre de forma ativa e compreensiva, me ajudaram e motivaram ao longo deste caminho. Também dedico aos meus colegas da pós-graduação, em especial ao Nanderson, Abraão e Fábio e aos inesquecíveis colegas da saudosa graduação, dentre eles o Tavares, o Juraci e a Samara. É claro que não poderia deixar de dedicar aos professores Ademir e Marco Cezar pelo belo trabalho de orientação voltado para mim ao longo desses dois anos. Aos professores Olavo e Paulo Logrado por me recomendarem à pós-graduação. À diretora da escola onde trabalho, a caríssima Quintina que me ajudou muito a superar algumas dificuldades.

# *Agradecimentos*

Ao professores Ademir E. Santana e Marco Cezar B. Fernandez, pela paciência, confiança, apoio e incentivo, fundamentais na realização desse trabalho.

A todos os meus amigos, em particular ao Nanderson, Abraão, Fábio, Fábio Mendes, Marcelo, Nelson Cho, Luciano, Roberto, Ricardo, Jonatas, Edson e Quintina.

Ao pessoal da secretaria da Física, em particular a Célia e o Severino. À amiga Quintina, que muito me ajudou ao longo desses dois anos.

Agradeço à Deus, meus pais e toda a minha família, que sempre estiveram presente em minha vida.

# *Resumo*

Neste trabalho, utiliza-se operadores-estrela definidos a partir do produto de Weyl em geometria não comutativa, para estudar representações unitárias para os grupos de Galilei e de Poincaré. Mediante o estudo da álgebra de Galilei-Lie, fica construído um formalismo auto-contido para a mecânica quântica no espaço de fase. Para testar a consistência do formalismo, alguns resultados são obtidos, tais como a equação de continuidade. E buscando a aplicabilidade, problemas de autovalores da equação de Schroedinger no espaço de fase são discutidos, como o oscilador harmônico e o potencial de Liouville. No contexto do estudo do grupo de Poincaré, escreve-se as equações de Klein-Gordon e de Dirac no espaço de fase, escrevendo também as lagrangianas e correntes conservadas para estes dois campos. Para os campos estudados aqui, as quantidades conservadas são deduzidas via o teorema de Noether no espaço de fase.

# *Abstract*

In this work, it is used star operators defined from the Weyl's product of the non-commutative geometry, to study unitary representations for the Galilei and Poincaré groups. By the study of the Galilei Lie algebra, a self-contained formalism is built for quantum mechanics in phase space. In order to test the consistency of the formalism, some results are obtained, such as the continuity equation. As applications problems of eigenvalues of the Schroedinger equation is discussed in phase space, as the harmonic oscillator and the Liouville potential. In this context of phase space, we study the Poincaré group, deriving the Klein Gordon and Dirac equation, as well as their respective lagrangian densities. For the fields studied here, the conservation law are derived by using the Noether theorem in phase space.

# *Sumário*

## **Lista de Figuras**

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 10
<b>2</b>	<b>Função de Wigner</b>	p. 13
2.1	A equação de Liouville - von Neumann . . . . .	p. 13
2.2	Definição da Função de Wigner . . . . .	p. 14
2.3	Propriedades da Função de Wigner . . . . .	p. 15
2.4	Equivalência dos Operadores na Representação de Wigner . . . . .	p. 21
2.5	Produtos de Operadores na Representação de Wigner . . . . .	p. 25
2.6	Evolução Temporal . . . . .	p. 27
2.7	Equação de $\star$ - valores envolvendo a Função de Wigner . . . . .	p. 30
2.8	Propriedades do Produto de Weyl (Produto Estrela) . . . . .	p. 32
<b>3</b>	<b>Grupo de Galilei e Mecânica Quântica Simplética</b>	p. 39
3.1	Espaço de Hilbert e Estrutura Simplética . . . . .	p. 39
3.2	O Grupo de Galilei em $H(\Gamma)$ . . . . .	p. 40
3.3	A Equação de Schroedinger no Espaço de Fase . . . . .	p. 49
3.4	Equação dinâmica para a Matriz Densidade . . . . .	p. 53
3.5	Teorema de Ehrenfest . . . . .	p. 54
3.6	Conexão com o Formalismo de Wigner . . . . .	p. 55
<b>4</b>	<b>Campo de Schroedinger</b>	p. 57

4.1	Lagrangiana para o campo de Schroedinger no espaço de fase e o teorema de Noether . . . . .	p. 57
4.2	Aplicações . . . . .	p. 61
4.2.1	Potencial Linear . . . . .	p. 61
4.2.2	Oscilador Harmônico . . . . .	p. 66
4.2.3	Potencial de Liouville . . . . .	p. 74
<b>5</b>	<b>Grupo de Poincaré e campos relativísticos no espaço de fase</b>	<b>p. 83</b>
5.1	Estrutura simplética e espaço de Hilbert . . . . .	p. 83
5.2	A álgebra de Lie do grupo de Poincaré . . . . .	p. 84
5.3	A Equação de Klein-Gordon no Espaço de Fase . . . . .	p. 89
5.4	Equação de Dirac no Espaço de Fase . . . . .	p. 90
5.5	Teorema de Noether e grandezas conservadas . . . . .	p. 91
5.6	Interação . . . . .	p. 98
<b>6</b>	<b>Conclusão e Perspectivas</b>	<b>p. 100</b>
	<b>Referências</b>	<b>p. 102</b>



## *Lista de Figuras*

1	Amplitude para o potencial linear, $E=5$ . . . . .	p. 63
2	Função de Wigner para o potencial linear, $E=5$ . . . . .	p. 63
3	Amplitude para o potencial linear, $E=1$ . . . . .	p. 64
4	Função de Wigner para o potencial linear, $E=1$ . . . . .	p. 64
5	Amplitude para o potencial linear, $E=3$ . . . . .	p. 65
6	Função de Wigner para o potencial linear, $E=3$ . . . . .	p. 65
7	Amplitude para o oscilador harmônico, ordem zero . . . . .	p. 69
8	Função de Wigner para o oscilador harmônico, ordem zero . . . . .	p. 69
9	Amplitude para o oscilador harmônico, ordem 1 . . . . .	p. 70
10	Função de Wigner para o oscilador harmônico, ordem 1 . . . . .	p. 70
11	Amplitude para o oscilador harmônico, ordem 2 . . . . .	p. 71
12	Função de Wigner para o oscilador harmônico, ordem 2 . . . . .	p. 71
13	Amplitude para o oscilador harmônico, ordem 3 . . . . .	p. 72
14	Função de Wigner para o oscilador harmônico, ordem 3 . . . . .	p. 72
15	Amplitude para o oscilador harmônico, ordem 4 . . . . .	p. 73
16	Função de Wigner para o oscilador harmônico, ordem 4 . . . . .	p. 73
17	Amplitude para o potencial de Liouville, $E=49$ . . . . .	p. 79
18	Função de Wigner para o potencial de Liouville, $E=49$ . . . . .	p. 79
19	Amplitude para o potencial de Liouville, $E=64$ . . . . .	p. 80
20	Função de Wigner para o potencial de Liouville, $E=64$ . . . . .	p. 80
21	Amplitude para o potencial de Liouville, $E=121$ . . . . .	p. 81
22	Função de Wigner para o potencial de Liouville, $E=121$ . . . . .	p. 81

23	Amplitude para o potencial de Liouville, $E=144$ . . . . .	p.82
24	Função de Wigner para o potencial de Liouville, $E=144$ . . . . .	p.82

# 1 Introdução

A noção de espaço de fase na mecânica quântica foi introduzida em 1932, em um trabalho de Wigner [1, 2], que foi motivado pelo problema de encontrar um caminho para desenvolver a mecânica quântica estatística a fim de tratar equações de transporte para super-fluidos. Como o conceito de espaço de fase [3] aparece como uma ferramenta natural para escrever a teoria cinética, Wigner introduziu seu formalismo usando uma espécie de transformada de Fourier da matriz densidade [4]  $\rho(q, q')$ , resultando na chamada função de Wigner,  $f_w(q, p)$ , onde  $q$  e  $p$  são as coordenadas de um espaço de fase  $\Gamma$ . A função de Wigner é identificada como uma quase-distribuição [5, 6] no sentido que  $f_w(q, p)$  é real, mas não é positiva definida, e não pode assim ser considerada como uma distribuição de probabilidade. Contudo, as integrais  $\int dq f_w(q, p) = \sigma(p)$  e  $\int dp f_w(q, p) = \sigma(q)$  são funções distribuição [6, 7]. No formalismo de Wigner, cada operador, que denotaremos por  $A$  definido no espaço de Hilbert,  $H$ , é associado com uma função denotada por  $a_w(q, p)$  no espaço de fase  $\Gamma$ . Então, esse fato pode ser visto como uma aplicação  $\Omega_w : A \rightarrow a_w(q, p)$ . Temos também uma álgebra associativa (mas não comutativa) induzida em  $\Gamma$ , é dada por  $\Omega_w : AB \rightarrow a_w(q, p) \star b_w(q, p)$ , onde o produto estrela é definido por<sup>1</sup> [4]

$$a_w(q, p) \star b_w(q, p) = a_w(q, p) e^{\frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)} b_w(q, p). \quad (1.1)$$

De um ponto de vista físico, o produto estrela (também chamado de produto de Weyl) é explorado no espaço de fase sob diferentes maneiras, em particular para estudar os diferentes aspectos das funções de Wigner independentes do tempo, propriedades de simetria de álgebras geométricas em  $\Gamma$ , e a associação do formalismo de Wigner com campos térmicos [1, 5]. Em todos esses desenvolvimentos, operadores unitários podem ser introduzidos pela definição [8]:

$$a_w(q, p) \star = a_w(q, p) e^{\frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)}, \quad (1.2)$$

---

<sup>1</sup>  $\partial_x$  representa  $\frac{\partial}{\partial x}$

onde o estado do sistema é descrito pela função de Wigner. Portanto, isto se mostra interessante para estudar representações unitárias de grupos cinemáticos considerando operadores do tipo  $a_w \star$ . Nesse sentido, Oliveira et al [8, 9], utilizando a noção de estrutura simplética e do produto de Weyl de uma geometria não comutativa, estudaram representações unitárias do grupo de Galilei e mostraram como se pode escrever a equação de Schroedinger no espaço de fase. Esse formalismo leva a um novo procedimento para obter as funções de Wigner sem o uso da equação de Liouville - von Neumann. Neste presente trabalho desenvolveremos esse método, estudando problemas de autovalores para potenciais do tipo linear, oscilador harmônico e de Liouville [4]. Além disso, à procura de resultados relativísticos, utilizamos novamente operadores do tipo  $a_w \star$  para estudar representações unitárias e irredutíveis do grupo de Poincaré e mostramos como escrever as equações de Klein-Gordon e de Dirac no espaço de fase.

Para tais propósitos, primeiro revisamos alguns aspectos das referências [8, 9] explorando o produto estrela, para a construção de representações unitárias do grupo de Galilei no espaço de fase. Isto possibilita incorporar à descrição da mecânica quântica no espaço de fase a noção de espaço de Hilbert. Nessa situação, nosso interesse é duplo. Por um lado estudamos a equação de Schroedinger como uma teoria de campo simplética, introduzindo o formalismo lagrangiano e analisando alguns aspectos preliminares do teorema de Noether. Na sequência, fazemos duas aplicações. Uma, o conhecido problema do oscilador, onde explicitamente deduzimos a função de Wigner neste contexto. Como outra aplicação tratamos com o (não trivial) problema do potencial de Liouville. Neste caso, além de deduzir algumas soluções que levam à funções de Wigner já conhecidas da literatura, obtemos novas outras, evidenciando a potencialidade do método. Uma generalização do formalismo é feita mediante o estudo de representações unitárias do grupo de Poincaré [10], também explorando o produto estrela. Neste contexto as equações de Klein-Gordon e de Dirac são obtidas. Também escrevemos as lagrangianas e as correntes conservadas para estes dois campos e discutimos brevemente o problema da equação de Klein-Gordon com interação via funções de Green.

A apresentação deste trabalho está disposta da seguinte maneira. No capítulo 2 discutimos o método da função de Wigner, onde demonstramos as suas principais propriedades. Ainda neste capítulo, definimos o produto estrela e tratamos das suas características, que serão úteis no desenvolvimento dos capítulos posteriores. No capítulo 3, utilizando as propriedades do produto estrela e definindo alguns operadores, contruimos uma representação unitária do grupo de Galilei. E ainda, discutimos as regras de interpretação física para a representação construída, resultando num formalismo para a mecânica

quântica inteiramente baseado nos operadores estrela. Mostramos que o espaço de representação é um espaço de Hilbert definido no espaço de fase, escrevemos a equação de Schroedinger no espaço de fase e estabelecemos uma conexão com o formalismo de Wigner. No capítulo 2 e 3 seguimos as referências [1, 4, 8, 9]. No capítulo 4 tratamos do campo de Schroedinger, escrevendo uma lagrangiana e calculando os invariantes de Noether a partir da mesma. Como aplicação, resolvemos problemas de autovalores para a equação de Schroedinger no espaço de fase. No capítulo 5, construímos representações unitárias e irredutíveis do grupo de Poincaré via o produto de Weyl, e chegamos às equações de Klein-Gordon e de Dirac escritas no espaço de fase. No capítulo 6 apresentamos nossas conclusões finais e perspectivas.

## 2 *Função de Wigner*

Wigner propôs em 1932 [2, 3] o primeiro formalismo da mecânica quântica no espaço de fase, objetivando fazer correções quânticas à mecânica estatística, sem abandonar o conceito de espaço de fase [11], que é a variedade natural onde teorias cinéticas (clássicas ou quânticas) são escritas. O formalismo proposto por Wigner tem sido utilizado desde então em aplicações em diversas áreas, tais como óptica quântica e física da matéria condensada. Embora o formalismo de Wigner tenha surgido no contexto da mecânica estatística, o mesmo é também útil a sistemas compostos por uma única partícula submetida a potenciais específicos, como os harmônicos e de Liouville. Nesse capítulo nosso propósito é fazer uma revisão desse método, retendo-nos em particular em alguns aspectos algébricos. Baseamos esta revisão nas referências [2–4, 12].

### 2.1 A equação de Liouville - von Neumann

O problema de muitos corpos na mecânica quântica usual pode ser estudado via um tratamento estatístico, sendo que o estado macroscópico de um sistema pode ser representado mediante o operador densidade,

$$\rho = \sum_i \omega_i |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)|,$$

onde  $\{|\psi_i\rangle\}$  são os estados microscópicos do ensemble estatístico e  $\omega_i = \frac{N_i}{N}$  é o peso estatístico para o estado quântico  $|\psi_i\rangle$ . A matriz densidade  $\rho$  contém todas as informações sobre o sistema. O valor esperado de um operador  $A$  na formulação da mecânica quântica estatística usual é dado por

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A).$$

A matriz densidade,  $\rho$ , apresenta as seguintes propriedades,

(i) hermiticidade:  $\rho^\dagger = \rho$ ;

(ii) traço:  $\text{tr} \rho = 1$ .

Agora será mostrado como obter uma equação que governa a evolução temporal do operador  $\rho$ . Essa equação pode ser deduzida a partir da equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle,$$

onde  $H(t) = K + V$ .

Dado que  $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  (por simplicidade consideramos o estado puro), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} &= \left( \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \right) \langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle \left( \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi(t)| \right) \\ &= \frac{1}{i\hbar} H(t) |\psi(t)\rangle \langle\psi(t)| + \frac{1}{-i\hbar} |\psi(t)\rangle \langle\psi(t)| H(t). \end{aligned}$$

O que nos fornece,

$$i\hbar \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = [H(t), \rho(t)], \quad (2.1)$$

que é a equação de Liouville-von Neumann.

Será mostrado a seguir que a partir de  $\rho$  é possível introduzir uma formulação da mecânica quântica no espaço de fase, conhecida como método da função de Wigner.

## 2.2 Definição da Função de Wigner

O conhecido princípio da incerteza torna o conceito de espaço de fase na mecânica quântica bastante problemático. Devido ao princípio da incerteza de Heisenberg que atesta que uma partícula não poder ter simultaneamente posição e momentum bem definidos, também não é possível definir uma verdadeira distribuição de probabilidades no espaço de fase. No entanto, funções que possuem um certo conteúdo de espaço de fase, "funções distribuição de quaseprobabilidades", tem demonstrado grande utilidade no estudo de sistemas quânticos. Elas não são úteis somente como ferramentas de cálculos, mas também nos fornecem informações nas conexões entre a mecânica clássica e a mecânica quântica.

A função de Wigner  $f_w(q, p)$  é definida como uma transformada de Fourier dos elementos da matriz densidade, ou seja,

$$f_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-3} \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle, \quad (2.2)$$

ou

$$f_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-3} \int dk \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \langle p - \frac{k}{2} | \rho | p + \frac{k}{2} \rangle. \quad (2.3)$$

Até aqui a exposição envolve o operador densidade, que pode descrever estados puros e impuros. Contudo o principal foco deste trabalho não está na mecânica estatística. Assim, podemos considerar o sistema quântico descrito por um estado puro, por  $|\psi\rangle$ , e o correspondente operador densidade fica dado por  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ . Deste modo, a definição da função de Wigner se reduz a,

$$f_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-3} \int e^{\frac{ipz}{\hbar}} \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right) \psi\left(q - \frac{z}{2}\right) dz \quad (2.4)$$

A função de Wigner não representa uma distribuição de probabilidade, pois ela pode assumir valores positivos e negativos, como pode ser mostrado a partir da seguinte argumentação. Se  $f_\alpha$  e  $f_\beta$  são duas funções de Wigner associadas, respectivamente, aos estados  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$ , então

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = (2\pi\hbar)^{-3} \int f_\alpha(q, p; t) f_\beta(q, p; t) dq dp. \quad (2.5)$$

O lado esquerdo desta equação é positivo ou nulo (se os kets forem ortogonais). No último caso, ocorre como consequência que a integral de  $f_\alpha f_\beta$  é nula. Como  $f_\alpha$  e  $f_\beta$  não são necessariamente nulas, resulta que  $f_\alpha$  e  $f_\beta$  podem assumir valores negativos e positivos, de tal modo a anular a referida integral. Considerando que qualquer probabilidade deve ser positiva, fica justificada a afirmação que a função de Wigner não representa uma distribuição de probabilidade no espaço de fase.

## 2.3 Propriedades da Função de Wigner

Apresentaremos algumas propriedades importantes que podem ser deduzidas a partir da função de Wigner.

- Propriedade 2.3.1

$$|\psi(q)|^2 = \int f_w(q, p) dp = \langle q | \rho | q \rangle. \quad (2.6)$$

Apesar da função de Wigner não representar uma distribuição de probabilidade no espaço de fase, densidades são conseguidas a partir da função de Wigner por meio da integração. Por exemplo, a densidade de probabilidade para se encontrar uma partícula entre  $q$  e  $q + dq$  será



### Demonstração

Para demonstrar esta propriedade, o ponto de partida será a definição da função de Wigner, substituindo (2.2) em (2.6); o que leva a

$$\int dp f_w(q, p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int dp dz \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle e^{\frac{ipz}{\hbar}}.$$

Se for realizada a integração em  $p$ , tem-se

$$\int dp f_w(q, p) = \int dz \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \left( \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int dp e^{\frac{ipz}{\hbar}} \right),$$

onde o termo entre parenteses é a função delta de Dirac,  $\delta(z)$ . Assim

$$\int dp f_w(q, p) = \int dz \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \delta(z).$$

Utilizando a propriedade da função delta,  $\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$ , tem-se

$$\int dp f_w(q, p) = \langle q | \rho | q \rangle,$$

como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.3.2

Outra propriedade, que é simétrica a anterior, é dada por,

$$|\tilde{\psi}(p)|^2 = \int f_w(q, p) dq = \langle p | \rho | p \rangle. \quad (2.7)$$

que expressa a densidade de probabilidade para se encontrar uma partícula entre  $p$  e  $p + dp$ .

### Demonstração

Substituindo a equação (2.3) em (2.7), temos

$$\int dq f_w(q, p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int dp dk \langle p - \frac{k}{2} | \rho | p + \frac{k}{2} \rangle e^{\frac{-iqk}{\hbar}}.$$

Se for feita a integração primeiro em  $q$ , segue que

$$\int dq f_w(q, p) = \int dk \langle p - \frac{k}{2} | \rho | p + \frac{k}{2} \rangle \left( \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int dq e^{\frac{-iqk}{\hbar}} \right),$$

onde o termo entre parenteses é a função delta de Dirac,  $\delta(k)$ , e assim

$$\int dq f_w(q, p) = \int dk \langle p - \frac{k}{2} | \rho | p + \frac{k}{2} \rangle \delta(k).$$

Utilizando a propriedade da delta:  $\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$ , tem-se

$$\int dq f_w(q, p) = \langle p | \rho | p \rangle,$$

como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.3.3

Será mostrada agora a normalização da função de Wigner, isto é,

$$\int f_w(q, p) dq dp = \text{Tr} \rho = 1. \quad (2.8)$$

### Demonstração

Substituindo a equação (2.2) na equação (2.8), obtem-se

$$\int f_w(q, p) dq dp = (2\pi\hbar)^{-3} \int dz dq dp \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

Se for calculada a integral na variável  $p$ , tem-se

$$\int f_w(q, p) dq dp = \int dz dq \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle ((2\pi\hbar)^{-3} \int dp e^{\frac{ipz}{\hbar}}).$$

Onde o termo entre parenteses é a função delta de Dirac. Com isso, temos

$$\begin{aligned} \int f_w(q, p) dq dp &= \int dz dq \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle \delta(z) \\ &= \int dq \langle q | \rho | q \rangle = \text{Tr} \rho = 1, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

A questão agora é a seguinte: será que é possível encontrar para qualquer operador quântico  $A(Q, P)$  uma função correspondente na representação de Wigner  $A_w(q, p)$ ? A resposta é positiva. Analogamente ao que foi feito na definição da função de Wigner, será feito agora para definir as funções c-number dadas por<sup>1</sup>,

$$A_w(q, p) = \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle, \quad (2.9)$$

ou

$$A_w(q, p) = \int dk \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \langle p - \frac{k}{2} | A(Q, P) | p + \frac{k}{2} \rangle. \quad (2.10)$$

---

<sup>1</sup>Os operadores quânticos referentes a posição e ao momentum serão representados pelas letras maiúsculas Q e P, respectivamente, com  $Q|q\rangle = q|q\rangle$  e  $P|p\rangle = p|p\rangle$ .

Chamaremos estas funções de equivalentes de Wigner dos operadores  $A(Q, P)$ . Assim também podemos escrever a função de Wigner relacionada ao operador  $\rho$ ,

$$f_w = (2\pi\hbar)^{-3}\rho_w.$$

Com a definição dos equivalentes a quaisquer operadores quânticos na representação de Wigner, pode-se escrever o valor esperado de um observável, num estado  $|\psi\rangle$  como

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \int dq dp A_w(q, p) f_w(q, p) = \text{Tr} \rho A. \quad (2.11)$$

### Demonstração

Vamos primeiro calcular

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \int dq dp A_w(q, p) f_w(q, p).$$

Substituindo as equações (2.2) e (2.9) na equação (2.11) tem-se

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int dq dp dz' dz'' \exp\left(\frac{ipz'}{\hbar}\right) \\ &\quad \times \left\langle q - \frac{z'}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z'}{2} \right\rangle \exp\left(\frac{ipz''}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z''}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z''}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Integrando na variável  $p$ , obtem-se

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int dp \exp\left(\frac{ip(z' + z'')}{\hbar}\right) \\ &\quad \times \int dq dz' dz'' \left\langle q - \frac{z'}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z'}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{z''}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z''}{2} \right\rangle, \end{aligned}$$

onde o termo entre parenteses é a função delta de Dirac. Com isso,

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \int dq dz' dz'' \left\langle q - \frac{z'}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z'}{2} \right\rangle \left\langle q - \frac{z''}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z''}{2} \right\rangle \delta(z' + z'') \\ &= \int dq dz' \left\langle q - \frac{z'}{2} \left| A(Q, P) \right| q + \frac{z'}{2} \right\rangle \left\langle q + \frac{z'}{2} \left| \rho \right| q - \frac{z'}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \frac{1}{2}\left(q - \frac{z}{2}\right) \\ \bar{z} &= \frac{1}{2}\left(q + \frac{z}{2}\right), \end{aligned}$$

tem-se,

$$\langle A \rangle = \int d\bar{q} d\bar{z} \langle \bar{q} | A(Q, P) | \bar{z} \rangle \langle \bar{z} | \rho | \bar{q} \rangle$$

$$= \text{Tr} \rho A = \langle A \rangle.$$

Como queríamos demonstrar.

O problema agora consiste em mostrar a correspondência unívoca entre um operador quântico  $A(Q, P)$  e o recíproco na representação de Wigner  $A_w(q, p)$ . Isso pode ser feito via a regra de quantização de Weyl que é definida da seguinte forma. Dada uma função no espaço de fase,  $\alpha(\tau, \sigma)$ , então existe um operador quântico no espaço de Hilbert,  $A(Q, P)$ , associado a  $\alpha(\tau, \sigma)$  tal que

$$A(Q, P) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\sigma d\tau e^{\frac{i(\sigma Q + \tau P)}{\hbar}} \alpha(\tau, \sigma), \quad (2.12)$$

onde  $\tau$  está associada à coordenada de posição e  $\sigma$  à coordenada de momentum no espaço de fase. Se escrevermos  $A(Q, P)$  em termos de  $A_w(q, p)$  tem-se o seguinte resultado

$$\alpha(\tau, \sigma) = \int dq dp e^{\frac{i(\sigma q + \tau p)}{\hbar}} A_w(q, p). \quad (2.13)$$

Para verificar essa equivalência, deve ser mostrado que o operador definido por  $W(Q, P) = e^{\frac{i(\sigma Q + \tau P)}{\hbar}}$  satisfaz uma espécie de ortogonalidade e completeza no espaço dos operadores do tipo  $A(Q, P)$ . Primeiro, utilizando a fórmula de Glauber, dada por  $e^{A+B} = e^A e^B e^{\frac{1}{2}[A, B]}$ , reescrevemos então  $W(Q, P)$ , encontrando,

$$W(Q, P) = e^{\frac{i\sigma Q}{\hbar}} e^{\frac{i\tau P}{\hbar}} e^{\frac{i\sigma\tau}{2\hbar}},$$

onde usamos o fato de que  $[Q, P] = i\hbar$ . Calculemos então o valor da expressão,

$$\langle q' | e^{\frac{\pm i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)} | q \rangle = \langle q' | e^{\frac{\pm i\sigma Q}{\hbar}} e^{\frac{\pm i\tau P}{\hbar}} e^{\frac{\pm i\sigma\tau}{2\hbar}} | q \rangle,$$

utilizando também a propriedade do operador translação  $e^{\frac{i\tau P}{\hbar}} | q \rangle = | q - \tau \rangle$ . O primeiro fator  $e^{\frac{\pm i\sigma Q}{\hbar}}$  atuando no ket  $| q \rangle$  dá origem ao fator  $e^{\frac{\pm i\sigma q}{\hbar}}$ , pois  $e^{\frac{\pm i\sigma Q}{\hbar}}$  pode ser escrito em série de potências e a atuação fica da seguinte forma;  $\frac{\pm i\sigma Q}{\hbar} | q \rangle + (\frac{\pm i\sigma Q}{\hbar})^2 | q \rangle + \dots$ . Sabe-se também que  $Q | q \rangle = q | q \rangle$ , logo  $e^{\frac{\pm i\sigma Q}{\hbar}} | q \rangle = e^{\frac{\pm i\sigma q}{\hbar}} | q \rangle$ . O último fator não contém operadores no expoente, logo pode sair dos kets. Assim, a expressão fica

$$\langle q' | e^{\frac{\pm i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)} | q \rangle = e^{\frac{\pm i\sigma q}{\hbar}} e^{\pm \frac{i\sigma\tau}{2\hbar}} \langle q' | e^{\frac{\pm i\tau P}{\hbar}} | q \rangle.$$

Usando a propriedade do operador translação, chega-se a

$$\langle q' | e^{\frac{\pm i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)} | q \rangle = e^{\frac{\pm i\sigma}{\hbar}(q \pm \frac{q}{2})} \delta(q' - q \pm \tau).$$

O que implica em

$$Tr e^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma Q - \tau P)} = (2\pi\hbar)^3 \delta(\sigma)\delta(\tau),$$

pois, por definição  $Tr A = \int dqdp \langle q' | A | q \rangle = (2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} Tr e^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma Q - \tau P)} &= (2\pi)^{-3} \int dqdp \int dz \exp(ipz) \langle q - \frac{z}{2} | e^{\frac{i(\sigma Q - \tau P)}{\hbar}} | q + \frac{z}{2} \rangle \\ &= (2\pi)^{-3} \int dqdp \int dz \exp(ipz) \exp(i\sigma(q - z - \tau)) \delta(z + \tau). \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade da função delta de Dirac e integrando em  $z$ , tem-se

$$Tr e^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma Q - \tau P)} = (2\pi)^{-3} \int dqdp e^{\frac{ip\tau}{\hbar}} e^{\frac{iq\sigma}{\hbar}}.$$

Identificando duas deltas na forma integral, ou seja,

$$Tr e^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma Q - \tau P)} = (2\pi\hbar)^3 \delta(\sigma)\delta(\tau).$$

Isso nos leva imediatamente às relações de ortogonalidade,

$$Tr e^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma' Q + \tau' P)} e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)} = (2\pi\hbar)^3 \delta(\sigma' - \sigma) \delta(\tau' - \tau). \quad (2.14)$$

Para provar a completeza, podemos assumir que a expansão

$$A(Q, P) = \int d\sigma d\tau \alpha(\sigma, \tau) e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)} \quad (2.15)$$

existe, e usando a relação de ortogonalidade mostrada anteriormente, facilmente nota-se que

$$\alpha(\sigma, \tau) = \frac{1}{2\pi\hbar} Tr \{ A(Q, P) e^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma Q' + \tau P')} \}.$$

Para provar a existência da equação (2.15) para  $A(Q, P)$ , isto é, para provar a completeza, substitui-se a equação,

$$\alpha(\sigma, \tau) = \int dqdp e^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma q + \tau p)} A_w(q, p), \quad (2.16)$$

na própria equação (2.15). Calculando os elementos de matriz na representação de posição chega-se a

$$\begin{aligned} \langle q|A(Q, P)|q'\rangle &= (2\pi\hbar)^{-3} \int d\sigma d\tau dq'' dq''' \langle q''|A(Q, P)|q'''\rangle \\ &\times \langle q''|e^{\frac{-i}{\hbar}(\sigma Q' + \tau P')}|q'''\rangle \langle q|e^{\frac{i}{\hbar}(\sigma Q + \tau P)}|q'\rangle. \end{aligned}$$

Se for feito uso da equação (2.14), chega-se a seguinte identidade

$$\langle q|A(Q, P)|q'\rangle \equiv \langle q|A(Q, P)|q'\rangle. \quad (2.17)$$

O que prova a completeza. Isso prova também que é possível usar as equações (2.15) e (2.16) para trabalhar em ambas direções, dado  $A(Q, P)$  podemos determinar  $A_w(q, p)$  unívocamente, e vice-versa.

## 2.4 Equivalência dos Operadores na Representação de Wigner

Como percebemos, uma das principais características desse formalismo é que as variáveis dinâmicas são representadas por funções sobre o espaço de fase, e não por operadores. O próximo passo será demonstrar algumas propriedades, que podem ser deduzidas a partir dos resultados já obtidos. Tais propriedades são referentes a equivalência entre os operadores escritos na representação usual e seus recíprocos na representação de Wigner.

- Propriedade 2.4.1

Se  $A = A(P)$  (isto é, independente de  $Q$ ), então  $A_w = A(p)$ . Ou seja, eles terão a mesma forma, com a ressalva que os operadores  $P$  serão substituídos pelas variáveis  $p$ .

### Demonstração

Um operador  $A(P)$  pode ser expandido em uma série de  $P$ , como

$$A(P) = A(0) + PA'(0) + \frac{P^2}{2!}A''(0) + \dots$$

Utilizando agora a equação (2.9), já substituindo  $A(Q, P)$  pela sua expansão, tem-se

$$A_w(q, p) = \int dk \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \langle p - \frac{k}{2} | A(0) + PA'(0) + \frac{P^2}{2!}A''(0) + \dots | p + \frac{k}{2} \rangle.$$

Utilizando o fato que  $P|p\rangle = p|p\rangle$  obtem-se

$$\begin{aligned} A_w(q, p) = & A(0) \int dk \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \langle p - \frac{k}{2} | p + \frac{k}{2} \rangle \\ & + A'(0) \int dk \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) (p + \frac{k}{2}) \langle p - \frac{k}{2} | p + \frac{k}{2} \rangle \\ & + A''(0) \int dk \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \frac{(p + \frac{k}{2})^2}{2!} \langle p - \frac{k}{2} | p + \frac{k}{2} \rangle + \dots \end{aligned}$$

Observando também que  $\langle p - \frac{k}{2} | p + \frac{k}{2} \rangle = \delta(k)$  e utilizando a propriedade da delta para calcular a integral em  $k$ , chega-se a

$$A_w(p) = A(0) + pA'(0) + \frac{p^2}{2!}A''(0) + \dots = A(p).$$

Como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.4.2

Se  $A = A(Q)$  (isto é, independente de  $P$ ), então  $A_w(p, q) = A(q)$ . Ou seja, eles terão a mesma forma, com a ressalva que os operadores  $Q$  serão substituídos pelas variáveis  $q$ .

### Demonstração

Um operador  $A(Q)$  pode ser expandido em uma série de  $Q$ , como

$$A(Q) = 1A(0) + QA'(0) + \frac{Q^2}{2!}A''(0) + \dots$$

Utilizando agora a equação (2.10), já substituindo  $A(Q, P)$  pela sua expansão, tem-se

$$A_w(q, p) = \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \langle q - \frac{z}{2} | 1A(0) + QA'(0) + \frac{Q^2}{2!}A''(0) + \dots | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

Utilizando o fato que  $Q|q\rangle = q|q\rangle$  obtem-se

$$\begin{aligned} A_w(q, p) = & 1A(0) \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \langle q - \frac{z}{2} | q + \frac{z}{2} \rangle \\ & + A'(0) \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) (q + \frac{z}{2}) \langle q - \frac{z}{2} | q + \frac{z}{2} \rangle \\ & + A''(0) \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \frac{(q + \frac{z}{2})^2}{2!} \langle q - \frac{z}{2} | q + \frac{z}{2} \rangle + \dots \end{aligned}$$

Observando também que  $\langle q - \frac{z}{2} | q + \frac{z}{2} \rangle = \delta(z)$  e utilizando a propriedade da delta para calcular a integral em  $z$ , chegamos a

$$A_w(q) = 1A(0) + qA'(0) + \frac{q^2}{2!}A''(0) + \dots = A(q).$$

Como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.4.3

Se  $A(Q, P) = c$  onde  $c$  é uma constante, então  $A_w(q, p) = A(Q, P)$ .

### Demonstração

Esta propriedade é demonstrada de forma imediata. Basta tomar a equação (2.9), e no lugar de  $A(Q, P)$  colocar a constante  $c$ . Como uma constante, obviamente, não age nos kets, tem-se

$$A_w(q, p) = \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \langle q - \frac{z}{2} | c | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

E então se for utilizado  $\langle q - \frac{z}{2} | q + \frac{z}{2} \rangle = \delta(z)$  e for integrado em  $z$ , obtem-se

$$A_w(q, p) = c \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \langle q - \frac{z}{2} | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

O que leva a

$$A_w(q, p) = c = A(Q, P).$$

Como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.4.4

$$\text{Tr} A = (2\pi\hbar)^{-3} \int dq dp A_w(q, p).$$

### Demonstração

Utilizando  $(2\pi\hbar)^{-3} \int dq dp A_w(q, p)$  e substituindo nela a equação (2.9), tem-se

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int dq dp A_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-3} \int dq dp \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

Se for feita a integração em  $p$ , é identificada a função delta de Dirac na forma integral,

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int dq dp A_w(q, p) = \int dq dz \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle \left( (2\pi\hbar)^{-3} \int dp \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \right).$$

Utilizando a delta para integrar em  $z$ , temos

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int dq dp A_w(q, p) = \int dq dz \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle \delta(z).$$

Ficamos com



$$(2\pi\hbar)^{-3} \int dqdp A_w(q, p) = \int dq \langle q | A(Q, P) | q \rangle = \text{Tr} A.$$

Como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.4.5

$$\int dp A_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-3} \langle q | A | q \rangle.$$

### Demonstração

Para mostrar essa propriedade, basta substituir a equação (2.2) em  $\int dp A_w(q, p)$ ,

$$\int dp A_w(q, p) = \int dp \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

Se a integração for feita em  $p$ , temos

$$\int dp A_w(q, p) = \int dz \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle \left( \int dp \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \right).$$

Assim, fica identificada a forma integral da delta de Dirac,

$$\int dp A_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-3} \int dz \langle q - \frac{z}{2} | A(Q, P) | q + \frac{z}{2} \rangle \delta(z).$$

Obtemos então,

$$\int dp A_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-3} \langle q | A(Q, P) | q \rangle,$$

como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.4.6

$$\int dq A_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-3} \langle p | A | p \rangle.$$

### Demonstração

Para mostrar essa propriedade, basta substituir a equação (2.10) em  $\int dq A_w(q, p)$ ,

$$\int dq A_w(q, p) = \int dq \int dk \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \langle p - \frac{k}{2} | A(Q, P) | p + \frac{k}{2} \rangle.$$

Se a integração for calculada em  $q$ ,

$$\int dq A_w(q, p) = \int dk \langle p - \frac{k}{2} | A(Q, P) | p + \frac{k}{2} \rangle \left( \int dq \exp\left(\frac{-iqk}{\hbar}\right) \right),$$

identifica-se a forma integral da delta de Dirac,

$$\int dq A_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-3} \int dk \langle p - \frac{k}{2} | A(Q, P) | p + \frac{k}{2} \rangle \delta(-k).$$

Obtem-se então,

$$\int dq A_w(q, p) = (2\pi\hbar)^{-3} \langle p | A(Q, P) | p \rangle.$$

Como queríamos demonstrar.

- Propriedade 2.4.7

$\langle q | A(Q, P) | q' \rangle = (2\pi\hbar)^{-6N} \int d\sigma e^{i\sigma \frac{(q+q')}{2\hbar}} \alpha(\sigma, q - q')$  onde  $\alpha(\sigma, \tau)$  é a transformada de Fourier de  $A_w(q, p)$ .

### Demonstração

Utilizando a expressão  $A(Q, P) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int d\sigma d\tau e^{\frac{i(\sigma Q + \tau P)}{\hbar}} \alpha(\tau, \sigma)$ , tem-se,

$$\langle q | A(Q, P) | q' \rangle = \int d\sigma d\tau \alpha(\sigma, \tau) \langle q | e^{\frac{i(\sigma Q + \tau P)}{\hbar}} | q' \rangle,$$

e usando a equação (2.14), tem-se

$$\langle q | A(Q, P) | q' \rangle = (2\pi\hbar)^{-6N} \int d\sigma e^{i\sigma \frac{(q+q')}{2\hbar}} \alpha(\sigma, q - q').$$

Como queríamos demonstrar.

Já sabemos como se dá a equivalência de operadores na representação de Wigner, em seguida a nossa preocupação será com a equivalência de produtos de operadores na representação de Wigner, pois isto é fundamental na descrição da dinâmica.

## 2.5 Produtos de Operadores na Representação de Wigner

Consideraremos agora a equivalência em Wigner de um produto de operadores  $AB$ , e encontraremos a expressão que expressa  $(AB)_w$  em termos de  $A_w$  e  $B_w$ . Temos que,

$$(AB)_w = \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | AB | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

Utilizando a relação de completudeza  $\int dq |q\rangle \langle q| = 1$  pode-se escrever

$$(AB)_w = \int dz dq' e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | A | q' \rangle \langle q' | B | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

Usando a propriedade (2.4.7), tem-se

$$(AB)_w = (2\pi\hbar)^{-12} \int dz dq' e^{\frac{ipz}{\hbar}} \int d\sigma d\sigma' e^{\frac{i\sigma}{2\hbar}(q+q'-\frac{z}{2})} \alpha(\sigma, q' - q + \frac{z}{2}) \\ \times e^{\frac{i\sigma'}{2\hbar}(q+q'+\frac{z}{2})} \beta(\sigma', q - q' + \frac{z}{2}).$$

Em seguida, fazendo as mudanças de variáveis;  $\tau = q' - q + \frac{z}{2}$  e  $\tau' = q - q' + \frac{z}{2}$ , chega-se a

$$(AB)_w = (2\pi\hbar)^{-12} \int d\sigma d\sigma' d\tau d\tau' e^{\frac{i(\sigma q + \tau p)}{\hbar}} \alpha(\sigma, \tau) e^{\frac{i(\sigma' \tau + \sigma \tau')}{2\hbar}} \beta(\sigma', \tau') e^{\frac{i(\sigma' q + \tau' p)}{\hbar}}.$$

Vemos que o fator  $e^{\frac{i(\sigma' \tau + \sigma \tau')}{2\hbar}}$  no integrando pode ser trocado, de modo equivalente por  $e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}}$ , onde  $\Lambda$  é o operador parentesis de Poisson,

$$\Lambda = \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q - \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p.$$

Escrevendo ainda  $A_w(q, p) = \int dq dp e^{\frac{i(\sigma q + \tau p)}{\hbar}} \alpha(\tau, \sigma)$  e  $B_w(q, p) = \int dq dp e^{\frac{i(\sigma' q + \tau' p)}{\hbar}} \beta(\tau', \sigma')$ , pode-se escrever então

$$(AB)_w = A_w(q, p) e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} B_w(q, p),$$

ou

$$(AB)_w = B_w(q, p) e^{\frac{-i\hbar\Lambda}{2}} A_w(q, p).$$

E ainda

$$(AB)_w = A_w(q - \frac{\hbar\partial_p}{2i}, p + \frac{\hbar\partial_q}{2i}) B_w(q, p),$$

onde foi utilizado nesta última relação o fato que  $f(q) e^{a\overleftarrow{\partial}_q} = f(q+a)$ ; mas aqui ainda tem-se  $a = c\overrightarrow{\partial}_p$ .

Define-se a operação denominada produto-estrela como

$$(AB)_w = A_w(q, p) e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} B_w(q, p) = A_w(q, p) \star B_w(q, p). \quad (2.18)$$

Note que o produto-estrela não é comutativo.

Agora que já se conhece como é implementada a representação do produto de operadores na representação de Wigner, a procura será por equações que nos dêem a evolução temporal de tais operadores. Para isso, serão utilizadas as propriedades que já conhecemos a cerca da função de Wigner, bem como o produto estrela que foi definido anteriormente.

## 2.6 Evolução Temporal

Suponha que é conhecida a função de Wigner ou qualquer operador na representação de Wigner num dado instante, e deseja-se determinar os correspondentes operadores num instante posterior. Para isso, é preciso conhecer uma equação que dê a evolução temporal da função de Wigner. Esta equação existe, e é uma equação diferencial de primeira ordem no tempo, que pode ser obtida a partir da equação de Liouville - von Neumann, representada no espaço de fase.

Tomando então a equação (2.1), e aplicando nela o operador,

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \cdot \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle,$$

em ambos os lados, temos que

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (2\pi\hbar)^{-3} \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle \right\} &= (2\pi\hbar)^{-3} \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| H \rho \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle \\ &\quad - (2\pi\hbar)^{-3} \int dz \exp\left(\frac{ipz}{\hbar}\right) \left\langle q - \frac{z}{2} \left| \rho H \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

O que leva a

$$i\hbar \frac{\partial f_w(q, p, t)}{\partial t} = H_w(q, p, t) \star f_w(q, p, t) - f_w(q, p, t) \star H_w(q, p, t).$$

Definindo o parêntese de Moyal,  $\{a, b\}_M = a \star b - b \star a$  tem-se

$$i\hbar \frac{\partial f_w(q, p, t)}{\partial t} = \{H_w, f_w\}_M, \quad (2.19)$$

onde observa-se que essa equação dinâmica é muito parecida com a equação de Liouville-von Neumann habitual, notando que o estado do sistema é descrito pela função de Wigner e o comutador foi substituído pelo parêntese de Moyal.

Pode-se ainda notar que o parentese de Moyal pode ser escrito da seguinte forma,

$$\{a(q, p), b(q, p)\} = \frac{2}{\hbar} a(q, p) \sin\left[\frac{\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q - \overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p)\right] b(q, p), \quad (2.20)$$

onde foi utilizado  $e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} - e^{-\frac{i\hbar\Lambda}{2}} = 2i \sin(\frac{\hbar\Lambda}{2})$ .

Obtém-se um resultado interessante se for expandido em série de potências o seno da última expressão que define o parêntese de Moyal,

$$\sin\left(\frac{\hbar\Lambda}{2}\right) = \frac{\hbar\Lambda}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\hbar\Lambda}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\hbar\Lambda}{2}\right)^5 + \dots$$

No limite em que  $\hbar \rightarrow 0$ , obtemos como resultado que a função de Wigner obedece a equação de Liouville clássica, com  $H_w$  no lugar da função hamiltoniana, isto é

$$\frac{\partial f_w}{\partial t} = \frac{\partial H_w}{\partial q} \frac{\partial f_w}{\partial p} - \frac{\partial H_w}{\partial p} \frac{\partial f_w}{\partial q} = \{H_w, f_w\}, \quad (2.21)$$

e ainda,

$$\frac{\partial H_w}{\partial q} = \dot{p} \quad e \quad \frac{\partial H_w}{\partial p} = \dot{q}. \quad (2.22)$$

Um ponto que vale a pena ressaltar, são os casos em que  $H_w$  coincide com a função hamiltoniana clássica. Entre esses casos, podemos tomar como exemplo, a situação em que o sistema é conservativo e está sujeito a um potencial que depende somente da posição,

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q).$$

Para provar este fato, consideraremos que a hamiltoniana clássica possa ser escrita como uma soma de uma função de  $q$  com uma função de  $p$ , isto é,

$$H(q, p) = g(q) + h(p);$$

e além disso, que a função  $g(q)$  possa ser escrita como uma série de potências,

$$g(q) = \sum a_n q^n.$$

E o correspondente operador quântico seja escrito como,

$$g(Q) = \sum a_n Q^n,$$

e dado na representação de Wigner como,

$$g_w(q) = \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \left\langle q - \frac{z}{2} \left| g(Q) \right| q + \frac{z}{2} \right\rangle,$$

e também,

$$g_w(q) = \sum a_n \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \langle q - \frac{z}{2} | Q | q + \frac{z}{2} \rangle.$$

Usando o fato que  $Q^n |q\rangle = q^n |q\rangle$ , chegamos a

$$g_w(q) = \sum a_n \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} (q + \frac{z}{2})^n \delta(z),$$

$$g_w(q) = g(q).$$

Procedendo de forma análoga para  $h(p)$ , chega-se a  $h_w(p) = h(p)$ , concluindo que<sup>2</sup>,

$$H_w(q, p) = H(q, p).$$

Portanto, chega-se a equação

$$i\hbar \frac{\partial f_w}{\partial t} = \{H(q, p), f_w\}_M;$$

e, no limite clássico ( $\hbar \rightarrow 0$ ),

$$\frac{\partial f_w}{\partial t} = \{H(q, p), f_w\}. \quad (2.23)$$

Isto explica a importância da descrição de Wigner na mecânica quântica no estudo do limite clássico e no desenvolvimento de métodos semi-clássicos [4].

O estudo apresentado sobre o método de Wigner, até o momento, foi baseado na descrição de Schroedinger da mecânica quântica, ou seja, considerando que apenas os estados ( e não os operadores) evoluem com o tempo. No entanto, é possível desenvolver um tratamento em termos de operadores expressos na descrição de Heisenberg (onde os operadores evoluem com o tempo, e os estados ficam estáticos). Assim, a equação de Heisenberg é escrita como,

$$i\hbar \frac{\partial A(t)}{\partial t} = [A(t), H(t)]. \quad (2.24)$$

Se for aplicado um procedimento análogo ao que levou a equação de Liouville na representação de Wigner, ou seja, aplicando o operador  $\int dz \exp(\frac{ipz}{\hbar}) \langle q - \frac{z}{2} | \cdot | q + \frac{z}{2} \rangle$  em ambos os lados da equação, chega-se a

---

<sup>2</sup>Aqui  $H(q, p)$  é a hamiltoniana clássica.

$$i\hbar \frac{\partial A(t)}{\partial t} = A_w(t) \star H_w - H_w \star A_w(t),$$

e então,

$$i\hbar \frac{\partial A(t)}{\partial t} = \{A_w, H_w\}_M, \quad (2.25)$$

ou ainda,

$$i\hbar \frac{\partial A(t)}{\partial t} = \frac{2}{\hbar} H_w \sin\left(\frac{\hbar\Lambda}{2}\right) A_w. \quad (2.26)$$

A integração desta última equação fornece

$$A_w(q, p, t) = \exp\left[\left(\frac{2}{\hbar}\right) H_w \sin\left(\frac{\hbar\Lambda}{2}\right)\right] A_w(0),$$

que é a solução para a equação dada.

## 2.7 Equação de $\star$ - valores envolvendo a Função de Wigner

Estudaremos agora uma das propriedades mais importantes que envolve tanto a função de Wigner quanto o produto estrela, que está enunciada a seguir. Para o caso de estados correspondentes às autofunções do hamiltoniano, no formalismo de Wigner, existe uma função de Wigner associada a alguma equação de autovalores, na qual esteja envolvido o produto estrela. Ou seja, dada a equação de autovalores, para o formalismo usual,

$$H(Q, P)\psi(q) = E\psi(q), \quad (2.27)$$

procuramos a equação estrela,

$$H_w(q, p) \star f_w(q, p) = E f_w(q, p), \quad (2.28)$$

onde E é um autovalor do hamiltoniano. De fato [9], esta equivalência é verdadeira.

Tomemos o hamiltoniano como

$$H(Q, P) = \frac{P^2}{2m} + V(Q),$$

e suponha que  $f_w(q, p)$  seja a função de Wigner correspondente à autofunção  $\psi(q)$  do hamiltoniano ( conforme a equação (2.27)). A função de Wigner, como vimos, é dada por

$$f_w(q, p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right) \psi\left(q - \frac{z}{2}\right).$$

Aplicando o produto estrela da função de Wigner com o hamiltoniano na representação de Wigner, tem-se

$$H_w(q, p) \star f_w(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dz \frac{1}{2m} \left[ \left( p - \frac{i\hbar\partial_q}{2} \right)^2 + V\left(q - \frac{z}{2}\right) \right] e^{\frac{ipz}{\hbar}} \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right) \psi\left(q - \frac{z}{2}\right),$$

após duas integrações por partes, chega-se a

$$H_w(q, p) \star f_w(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dz \left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \left( \partial_z - \frac{\partial_q}{2} \right)^2 + V\left(q - \frac{z}{2}\right) \right] e^{\frac{ipz}{\hbar}} \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right) \psi\left(q - \frac{z}{2}\right).$$

Note que os operadores diferenciais nesta equação se anulam, quando aplicados a  $\psi^\dagger$ , pois

$$\left( \partial_z - \frac{\partial_q}{2} \right) \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2} \dot{\psi}^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right) - \frac{1}{2} \dot{\psi}^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right) = 0,$$

onde o ponto sobre  $\psi^\dagger$  indica a derivada com relação ao argumento; isto nos diz que  $\psi^\dagger$  pode passar para o lado esquerdo dos operadores diferenciais. E assim, ainda é possível escrever a equação de Schroedinger independente do tempo na forma,

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2m} \left( \partial_z - \frac{\partial_q}{2} \right)^2 + V\left(q - \frac{z}{2}\right) \right] \psi\left(q - \frac{z}{2}\right) = E \psi\left(q - \frac{z}{2}\right),$$

(onde fizemos uma mudança de variáveis na equação  $H(Q, P)\psi(q) = E\psi(q): q \rightarrow q - \frac{z}{2}$ ).

Com isso finalmente temos,

$$H_w(q, p) \star f_w(q, p) = E \left\{ \frac{1}{2\pi\hbar} \int dz e^{\frac{ipz}{\hbar}} \psi^\dagger\left(q + \frac{z}{2}\right) \psi\left(q - \frac{z}{2}\right) \right\} = E f_w(q, p), \quad (2.29)$$

logo,

$$H_w(q, p) \star f_w(q, p) = E f_w(q, p).$$

Se função de Wigner,  $f_w(q, p)$ , corresponde a uma autofunção do hamiltoniano, então satisfará à equação-estrela de autovalor, equação(2.28).

O próximo passo será estudar o produto estrela e suas propriedades, pois é a partir dele que definiremos operadores que ajudarão a estabelecer uma representação simplética da álgebra de Galilei e obter um formalismo para a mecânica quântica no espaço de fase.



## 2.8 Propriedades do Produto de Weyl (Produto Estrela)

O enfoque nesta seção será no estudo do produto estrela explorando e demonstrando suas propriedades. Já foi visto anteriormente que o produto envolvendo dois operadores quânticos na representação de Wigner é igual ao produto estrela dos respectivos equivalentes em Wigner. Também foi estudado que em toda equação dinâmica envolvendo a função de Wigner, o produto estrela sempre está envolvido. Além disso, será importante o estudo do produto-estrela para se realizar a definição do operador-estrela, que será explorado para a construção de representações unitárias do grupo de Galilei no espaço de fase.

Primeiro apresentaremos duas formas de definir o produto estrela, que são equivalentes e se reduzem uma na outra e cada uma tem suas vantagens em diferentes situações. Como já foi mencionado no capítulo anterior, o produto estrela (também denominado produto de Weyl), entre duas funções  $f(q, p)$  e  $g(q, p)$  é definido por

$$f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p) \exp\left[\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)\right]g(q, p), \quad (2.30)$$

onde as setas sobre os operadores diferenciais indicam o sentido em que eles se aplicam. A equação (2.30) pode ser reescrita como

$$f(q, p) \star g(q, p) = \exp\left[\frac{i\hbar}{2}(\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})\right]f(q, p)g(q', p').$$

Expandindo a exponencial numa série de potências, temos

$$\exp\left[\frac{i\hbar}{2}(\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n (\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n,$$

e também escrevendo  $(\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n$  usando o binômio de Newton, isto é,

$$(\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q \partial_{p'}]^{n-m} [\partial_p \partial_{q'}]^m,$$

pode-se finalmente escrever o produto estrela numa forma operacional muito útil,

$$f(q, p) \star g(q, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g(q, p)]. \quad (2.31)$$

Iremos discutir algumas propriedades envolvendo o produto estrela que serão muito úteis nos desenvolvimentos posteriores.

- Propriedade 2.8.1

Produto estrela onde um dos fatores é uma constante

Seja  $c \in C$ . Então

$$c \star f(q, p) = f(q, p) \star c = cf(q, p). \quad (2.32)$$

### Demonstração

Considerando a expressão em série para o produto estrela, tem-se

$$c \star f(q, p) = c \left\{ 1 + \frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q) + \frac{1}{2!} \frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)^2 + \dots \right\} f(q, p).$$

Observe que todos os operadores diferenciais que atuam à esquerda se anulam, restando apenas a primeira parcela:  $cf(q, p)$ . A discussão para o produto estrela por  $c$  aplicado do lado direito é a mesma.

- Propriedade 2.8.2

O Operador-estrela

O produto estrela entre duas funções no espaço de fase eleva uma delas a categoria de operador,

$$\begin{aligned} f(q, p) \star g(q, p) &= f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p\right) g(q, p) \\ &= f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p) g\left(q - \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_p, p + \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q\right). \end{aligned}$$

### Demonstração

Definindo  $a = \overrightarrow{\partial}_p$  e  $b = \overrightarrow{\partial}_q$ , tem-se

$$f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p) e^{\frac{i\hbar}{2} (a \overleftarrow{\partial}_q - b \overleftarrow{\partial}_p)} g(q, p).$$

Usando o fato que  $e^{a \partial_x} f(x) = f(x + a)$ , chega-se a

$$f(q, p) \star g(q, p) = f\left(q + \frac{i\hbar}{2} a, p - \frac{i\hbar}{2} b\right) g(q, p);$$

substituindo  $a$  e  $b$ , temos

$$f(q, p) \star g(q, p) = f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p\right) g(q, p).$$

Definimos

$$\widehat{f}(q, p) = f(q, p) \star,$$

que será chamado operador-estrela.

- Propriedade 2.8.3

O Produto estrela é associativo

Seja  $f$ ,  $g$  e  $h$  funções no espaço de fase. Então,

$$(f(q, p) \star g(q, p)) \star h(q, p) = f(q, p) \star (g(q, p) \star h(q, p)). \quad (2.33)$$

### Demonstração

Utilizando as equações (2.33) e (2.34), tem-se

$$(f(q, p) \star g(q, p)) \star h(q, p) = \left\{ f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p\right) g(q, p) \right\} h\left(q - \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_p, p + \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q\right),$$

e por outro lado,

$$f(q, p) \star (g(q, p) \star h(q, p)) = f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p\right) \left\{ g(q, p) h\left(q - \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_p, p + \frac{i\hbar}{2} \overleftarrow{\partial}_q\right) \right\}.$$

Como os operadores diferenciais envolvidos aqui são associativos, segue que o produto estrela é associativo.

- Propriedade 2.8.4

O Produto estrela não é Comutativo

O produto estrela não é comutativo, isso significa que

$$f(q, p) \star g(q, p) \neq g(q, p) \star f(q, p).$$

Ou seja,  $f(q, p) e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} g(q, p) \neq g(q, p) e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} f(q, p)$ . Pois na verdade,

$$f(q, p) e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} g(q, p) = g(q, p) e^{-\frac{i\hbar\Lambda}{2}} f(q, p). \quad (2.34)$$

Por exemplo, tomemos dois casos de interesse,

$$q \star p = \left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p\right) p = qp + \frac{i\hbar}{2},$$

e

$$p \star q = \left(p - \frac{i\hbar}{2} \partial_q\right) q = pq - \frac{i\hbar}{2},$$

este é um resultado básico em geometrias não-comutativas [5].

- Propriedade 2.8.5

O Produto estrela e a Conjugação Complexa

A conjugação complexa inverte a ordem do produto estrela. Um fato análogo ao conjugado complexo de dois operadores usuais.

$$(f \star g)^\dagger = g^\dagger \star f^\dagger. \quad (2.35)$$

### Demonstração

Para mostrar essa propriedade, será utilizada a equação (2.31), tomando seu complexo conjugado, isto é

$$(f(q, p) \star g(q, p))^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n \left\{ (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f^\dagger(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g^\dagger(q, p)] \right\}, \quad (2.36)$$

onde o fator  $(-1)^n$  é proveniente da conjugação complexa do fator  $(\frac{i\hbar}{2})^n$ . Observe agora o seguinte,

$$(-1)^n (\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n = (\partial_p \partial_{q'} - \partial_q \partial_{p'})^n = (\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_p \partial_{q'}]^{n-m} [\partial_q \partial_{p'}]^m.$$

Utilizando as duas últimas equações, encontramos

$$(\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n f(q, p) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g(q, p)],$$

e

$$(-1)^n (\partial_q \partial_{p'} - \partial_p \partial_{q'})^n f(q, p) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m g(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} f(q, p)].$$

Comparando essas duas últimas equações, chega-se a

$$(-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m [\partial_q^{n-m} \partial_p^m f(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} g(q, p)]$$

$$= \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m g(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} f(q, p)]. \quad (2.37)$$

Se substituirmos a equação (2.37) na equação (2.36), tem-se

$$(f(q, p) \star g(q, p))^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^n \left\{ (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n}{m} [\partial_q^{n-m} \partial_p^m g^\dagger(q, p)] [\partial_q^m \partial_p^{n-m} f^\dagger(q, p)] \right\} = g^\dagger \star f^\dagger.$$

- Propriedade 2.8.6

A Forma Integral do Produto estrela

$$f \star g = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 \int dq' dq'' dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i}{\hbar}[p(q'-q'')+p'(q''-q)+p''(q-q')]}.$$

### Demonstração

Será apresentado como representar o produto estrela utilizando a forma integral. Primeiramente escrevemos a expressão

$$f(q, p) = \int dq' dp' f(q', p') \delta(q' - q) \delta(p' - p). \quad (2.38)$$

Considerando as representações das deltas de Dirac na forma integral, temos

$$\delta(q' - q) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{-iu(q'-q)}{\hbar}} du, \quad (2.39)$$

e

$$\delta(p' - p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{-iv(p'-p)}{\hbar}} dv. \quad (2.40)$$

Substituindo as equações (2.39) e (2.40) na equação (2.38), tem-se

$$f(q, p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int dudvdq'dp' f(q', p') e^{\frac{-i}{\hbar}[v(p'-p)+u(q'-q)]}.$$

Utilizando a propriedade (2.8.2), e a última equação, chegamos a

$$\begin{aligned} f(q, p) \star g(q, p) &= f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p\right) g(q, p) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int dudvdq'dp' f(q', p') e^{\frac{-i}{\hbar}[v(p'-p)+u(q'-q)]} e^{\frac{-i}{\hbar^2}[-iu\partial_p + iv\partial_q]} g(q, p). \end{aligned}$$

Se for feita uma pequena manipulação algébrica e também a transformação de variáveis,

$$q'' = q + \frac{v}{2} \quad e \quad p'' = p - \frac{u}{2},$$

obtemos o resultado,

$$f(q, p) \star g(q, p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int dudvdq'dp' f(q', p') e^{\frac{-2i}{\hbar}[(p'-p)(p-p'')+(q''-q')(q'-q)]} g(q'', p'').$$

De onde segue que,

$$f \star g = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 \int dq' dq'' dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i}{\hbar}[p'(q'-q'')+p'(q''-q)+p''(q-q')]}, \quad (2.41)$$

que é a forma integral do produto estrela.

- Propriedade 2.8.7

A Integral do Produto estrela no Espaço de Fase

$$\int f(q, p) \star g(q, p) dq dp = \int f(q, p) g(q, p) dq dp. \quad (2.42)$$

Com certeza em cálculos posteriores, será necessário fazer a integração de um produto estrela, o que parece ser uma tarefa difícil. Contudo, há uma propriedade que permite efetuar essa integração de forma muito prática; ao se efetuar uma integração de um produto estrela entre duas funções,  $f(q, p) \star g(q, p)$ , no espaço de fase, dentro da integral esse produto se trivializa. Como vimos na equação (2.44). É evidente que para essa propriedade fazer sentido é necessário a convergência da integral. A condição necessária para que a convergência ocorra é a anulação das funções  $f(q, p)$  e  $g(q, p)$  no infinito.

### Demonstração

Para demonstrar essa propriedade, o ponto de partida será a equação (2.42) e a forma integral do produto estrela, dada pela equação (2.41), o que leva a,

$$\int f \star g dq dp = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 \int dq dq' dq'' dp dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i}{\hbar}[p'(q'-q'')+p'(q''-q)+p''(q-q')]}.$$

Notemos agora que a exponencial do primeiro fator dentro dos colchetes, juntamente com a integração em  $p$ , é identificada como a delta de Dirac, isto é,

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{\frac{-2ip(q'-q'')}{\hbar}} = \delta(q' - q'').$$

Neste caso,

$$\int f \star g dq dp = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 \int dq dq' dq'' dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i}{\hbar}[p'(q''-q)+p''(q-q')]} \delta(q' - q''),$$

o que conduz a

$$\int f \star g dq dp = \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^2 \int dq dq'' dp' dp'' f(q', p') g(q'', p'') e^{\frac{-2i[p'(q''-q)+p''(q-q')]}{\hbar}}.$$

Rearranjando os termos e raciocinando novamente em termos da delta de Dirac chega-se ao resultado,

$$\int f \star g dq dp = \int dq'' dp' f(q'', p') g(q'', p').$$

As variáveis na segunda integral são mudas, podendo ser feita a mudança;  $q'' \rightarrow q$  e  $p' \rightarrow p$ , o que nos fornece

$$\int f \star g dq dp = \int dq dp f(q, p) g(q, p).$$

No próximo capítulo, serão definidos alguns operadores-estrela para construirmos uma representação unitária do grupo de Galilei. Isto permite a construção da mecânica quântica compatível com o formalismo de Wigner, mas empregando a noção de amplitudes no espaço de fase.

## 3 *Grupo de Galilei e Mecânica Quântica Simplética*

Neste capítulo será utilizada a noção de estrutura simplética e do produto de Weyl de uma geometria não comutativa, para construir representações unitárias <sup>1</sup> para o grupo de Galilei e mostrar como escrever a equação de Schroedinger no espaço de fase [8, 9]. Espera-se assim incorporar à descrição da mecânica quântica no espaço de fase a noção de espaço de Hilbert  $H(\Gamma)$ . Sabe-se também que com a representação da mecânica quântica no espaço de fase via uma teoria de representação, o formalismo passa a ser autocontido, e poderá ser generalizado para outros contextos, como a teoria quântica de campos, por exemplo. A revisão apresentada neste capítulo baseia-se principalmente nas referências [8, 9].

### 3.1 Espaço de Hilbert e Estrutura Simplética

Considere uma variedade diferencial,  $M$ ,  $n$ -dimensional onde cada ponto é especificado pelas coordenadas  $q = (q^1, \dots, q^n)$ , tais que as coordenadas de cada ponto em  $T^*M$  podem ser denotadas por  $(q, p) = (q^1, \dots, q^n, p^1, \dots, p^n)$ . O espaço  $T^*M$  é equipado com uma estrutura simplética pela introdução da 2-forma

$$\omega = dq \wedge dp, \quad (3.1)$$

chamada de forma simplética. Esta forma simplética, em conjunto com o operador

$$\Lambda = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q}, \quad (3.2)$$

induz o parentesis de Poisson ( $f = f(q, p)$  e  $g = g(q, p)$ ),

$$\{f, g\} = \omega(f\Lambda, g\Lambda) = f\Lambda g, \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>representações unitárias são representações em termos de operadores unitários, os quais atuam em espaços de Hilbert



onde

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q}. \quad (3.4)$$

Na equação (3.3) usamos o fato que os operadores,

$$X_f = f\Lambda = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q}, \quad (3.5)$$

e

$$X_g = g\Lambda = \frac{\partial g}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q}, \quad (3.6)$$

determinam campos vetoriais sobre  $\Gamma$ . O espaço das funções  $f(q, p) \in C^\infty$  é chamado de espaço de fase, e será denotado por  $\Gamma$ .

A introdução da noção de espaço de Hilbert associado ao espaço de fase  $\Gamma$ , pode ser feita considerando o conjunto das funções complexas de quadrado integrável,  $\phi(q, p)$  em  $\Gamma$ , tal que

$$\int dpdq \phi^*(q, p) \phi(q, p) < \infty, \quad (3.7)$$

é uma forma bilinear real. Neste caso podemos escrever  $\phi(q, p) = \langle q, p | \phi \rangle$ , com

$$\int dpdq |q, p\rangle \langle q, p| = 1, \quad (3.8)$$

sendo  $\langle \phi |$  o vetor dual de  $|\phi\rangle$ . Vamos denominar este espaço de Hilbert por  $H(\Gamma)$ .

## 3.2 O Grupo de Galilei em $H(\Gamma)$

Nesta seção, serão estudadas as representações do grupo de Galilei no espaço de Hilbert  $H(\Gamma)$ . Para essa proposta serão consideradas transformações unitárias  $U : H(\Gamma) \rightarrow H(\Gamma)$  tais que  $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$  seja invariante. Iniciando com o operador  $\Lambda$  definindo um mapeamento  $e^{\frac{i\hbar\Lambda}{2}} = \star : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ , chamado produto-estrela ou produto de Weyl, definido por meio da expressão,

$$f(q, p) \star g(q, p) = f(q, p) \exp\left[\frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)\right] g(q, p), \quad (3.9)$$

onde  $f$  e  $g$  estão em  $H(\Gamma)$ . A constante de Planck é utilizada aqui para fixar as unidades.

Já foi estudado que no formalismo de Wigner as variáveis dinâmicas são representadas por funções, ao invés de operadores, e os produtos envolvendo as variáveis dinâmicas são deformados segundo as regras do produto estrela já estudadas no capítulo anterior.

Para se fazer a construção da álgebra de Galilei-Lie no espaço de fase serão

definidos um conjunto de operadores que a princípio não terão interpretação física. Para iniciar, serão definidos os seguintes operadores,

$$\widehat{Q} = q\star = q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p, \quad (3.10)$$

e

$$\widehat{P} = p\star = p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q, \quad (3.11)$$

e os demais operadores serão definidos a seguir.

Definindo as funções  $k_i$ ,

$$k_i = mq_i - tp_i, \quad (3.12)$$

onde  $m$  e  $t$  representam parâmetros, tem-se que o operador estrela correspondente a esta função é

$$\widehat{K} = k_i\star = mq_i\star - tp_i\star = m\widehat{Q}_i - t\widehat{P}_i. \quad (3.13)$$

E da mesma forma, correspondendo as funções

$$l_i = \epsilon_{ijk}q_j p_k, \quad (3.14)$$

tem-se o operador estrela,

$$\widehat{L}_i = \epsilon_{ijk}\widehat{Q}_j\widehat{P}_k = \epsilon_{ijk}q_j p_k - \frac{i\hbar}{2}\epsilon_{ijk}q_j\frac{\partial}{\partial p_k} + \frac{i\hbar}{2}\epsilon_{ijk}p_k\frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{\hbar^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial q_j\partial p_k}. \quad (3.15)$$

E correspondendo a função

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2), \quad (3.16)$$

tem-se o operador estrela

$$\begin{aligned} \widehat{H} = \frac{\widehat{P}^2}{2m} &= \frac{1}{2m}(\widehat{P}_1^2 + \widehat{P}_2^2 + \widehat{P}_3^2) = \frac{1}{2m}[(p_1 - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_1})^2 \\ &+ (p_2 - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_2})^2 + (p_3 - \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial q_3})^2]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Esses operadores satisfazem a álgebra de Galilei-Lie dada pelas seguintes relações de comutação,

$$[\widehat{L}_i, \widehat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{L}_k, \quad (3.18)$$

$$[\widehat{L}_i, \widehat{K}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{K}_k, \quad (3.19)$$

$$[\widehat{L}_i, \widehat{P}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{P}_k, \quad (3.20)$$

$$[\widehat{K}_i, \widehat{K}_j] = 0, \quad (3.21)$$

$$[\widehat{K}_i, \widehat{P}_j] = i\hbar m \delta_{ij} \mathbf{1}, \quad (3.22)$$

$$[\widehat{K}_i, \widehat{H}] = i\hbar \widehat{P}_i, \quad (3.23)$$

$$[\widehat{P}_i, \widehat{P}_j] = 0, \quad (3.24)$$

$$[\widehat{P}_i, \widehat{H}] = 0, \quad (3.25)$$

$$[\widehat{L}_i, \widehat{H}] = 0. \quad (3.26)$$

Portanto, resta-nos agora demonstrar tais relações de comutação.

- Equação (3.24)

$$[\widehat{P}_i, \widehat{P}_j] = 0.$$

### Demonstração

Substituindo  $\widehat{P}_i = p_i - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q_i}$ , e aplicando o comutador numa função  $f = f(q, p)$ , tem-se,

$$\begin{aligned} \left[ p_i - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q_i}, p_j - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} \right] f = & (p_i p_j - p_j p_i) f + \frac{\hbar^2}{4} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} \right) \\ & + \frac{i\hbar}{2} p_i \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{i\hbar}{2} p_j \frac{\partial f}{\partial q_i} + \frac{i\hbar}{2} p_j \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{i\hbar}{2} p_i \frac{\partial f}{\partial q_j} = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$[\widehat{P}_i, \widehat{P}_j] = 0,$$

como queríamos demonstrar.

- Equação (3.18)

$$[\widehat{L}_i, \widehat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \widehat{L}_k.$$

### Demonstração

Antes de demonstrar esta relação de comutação, definamos os operadores  $\widetilde{Q} = i\hbar \partial_p$  e  $\widetilde{P} = -i\hbar \partial_q$ . Tem-se ainda que o seguinte conjunto de relações é válido,

$$[q_i q_j, q_m p_k] = [\widetilde{Q}_i \widetilde{P}_j, \widetilde{Q}_m \widetilde{P}_k] = [\widetilde{Q}_i p_j, q_m \widetilde{P}_k] = 0,$$

$$[q_i q_j, \widetilde{Q}_m p_k] = -i\hbar q_i p_k \delta_{jm},$$

$$[q_i q_j, q_m \tilde{P}_k] = i\hbar q_m p_j \delta_{ik},$$

$$[\tilde{Q}_i p_j, \tilde{Q}_m \tilde{P}_k] = -i\hbar \tilde{Q}_j \tilde{P}_k \delta_{jm},$$

$$[q_i \tilde{P}_j, \tilde{Q}_m \tilde{P}_k] = i\hbar \tilde{Q}_m \tilde{P}_j \delta_{ik},$$

$$[q_i p_j, \tilde{Q}_m \tilde{P}_k] = i\hbar p_j \tilde{Q}_m \delta_{ik} - i\hbar q_i \tilde{P}_k \delta_{jm},$$

$$[\tilde{Q}_i p_j, \tilde{Q}_m p_k] = i\hbar p_j \tilde{Q}_m \delta_{ik} - i\hbar p_k \tilde{Q}_i \delta_{jm},$$

$$[q_i \tilde{P}_j, q_m \tilde{P}_k] = -i\hbar q_m \tilde{P}_j \delta_{ik} - i\hbar q_i \tilde{P}_k \delta_{jm}.$$

No conjunto de relações acima, não há somatório subentendido com relação aos índices repetidos.

Utilizando a definição  $\tilde{Q} = i\hbar \partial_p$  e  $\tilde{P} = -i\hbar \partial_q$ , a equação (3.15) pode ser escrita como,

$$\widehat{L}_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} q_i p_k - \frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} q_j \tilde{P}_k + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} p_k \tilde{Q}_j + \frac{1}{4} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \tilde{Q}_j \tilde{P}_k.$$

Ao substituir a última equação em  $[\widehat{L}_i, \widehat{L}_j]$  e utilizar o conjunto de relações para  $\tilde{Q}$  e  $\tilde{P}$ , chega-se finalmente a

$$[\widehat{L}_i, \widehat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \widehat{L}_k.$$

Como queríamos demonstrar.

- Equação (3.21)

$$[\widehat{K}_i, \widehat{K}_j] = 0.$$

### Demonstração

Vimos da equação (3.13) que  $\widehat{K}_i = m\widehat{Q}_i - t\widehat{P}_i$ , ou melhor,  $\widehat{K}_i = m q_i + \frac{1}{2} m \tilde{Q}_i - t p_i + \frac{1}{2} t \tilde{P}_i$ . Substituindo na relação de comutação,  $[\widehat{K}_i, \widehat{K}_j]$ , temos

$$\begin{aligned} [\widehat{K}_i, \widehat{K}_j] &= [m\widehat{Q}_i - t\widehat{P}_i, m\widehat{Q}_j - t\widehat{P}_j] \\ &= [m\widehat{Q}_i, m\widehat{Q}_j] - [m\widehat{Q}_i, t\widehat{P}_j] - [t\widehat{P}_i, m\widehat{Q}_j] + [t\widehat{P}_i, t\widehat{P}_j] \end{aligned}$$

$$= m^2[\widehat{Q}_i, \widehat{Q}_j] - mt[\widehat{Q}_i, \widehat{P}_j] - mt[\widehat{P}_i, \widehat{Q}_j] + t^2[\widehat{P}_i, \widehat{P}_j],$$

onde o primeiro e o último comutador são identicamente nulos, enquanto o segundo e o terceiro anulam-se para  $i \neq j$  e cancelam-se para  $i = j$ . Assim temos,

$$[\widehat{K}_i, \widehat{K}_j] = 0,$$

como queríamos demonstrar.

- Equação (3.19)

$$[\widehat{L}_i, \widehat{K}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{K}_k.$$

### Demonstração

Para demonstrar este resultado vamos tratar inicialmente com alguns casos particulares. Usando as equações (3.13) e (3.15) temos,  $\widehat{L}_1 = \widehat{Q}_2\widehat{P}_3 - \widehat{Q}_3\widehat{P}_2$  e  $\widehat{K}_2 = m\widehat{Q}_2 - t\widehat{P}_2$ , logo,

$$\begin{aligned} [\widehat{L}_1, \widehat{K}_2] &= [\widehat{Q}_2\widehat{P}_3 - \widehat{Q}_3\widehat{P}_2, m\widehat{Q}_2 - t\widehat{P}_2] \\ &= m[\widehat{Q}_2\widehat{P}_3, \widehat{Q}_2] - t[\widehat{Q}_2\widehat{P}_3, \widehat{P}_2] - m[\widehat{Q}_3\widehat{P}_2, \widehat{Q}_2] - t[\widehat{Q}_3\widehat{P}_2, \widehat{P}_2]. \end{aligned}$$

A primeira e a última relações de comutação se anulam, enquanto que as duas restantes resultam em  $[\widehat{Q}_2\widehat{P}_3, \widehat{P}_2] = i\hbar\widehat{P}_3$  e  $[\widehat{Q}_3\widehat{P}_2, \widehat{P}_2] = -i\hbar\widehat{P}_3$ . Logo,

$$[\widehat{L}_1, \widehat{K}_2] = i\hbar(m\widehat{Q}_3 - t\widehat{P}_3) = i\hbar\widehat{K}_3.$$

Procedendo da mesma maneira para os demais operadores  $\widehat{K}_i$  e  $\widehat{L}_i$ , obtemos

$$[\widehat{L}_i, \widehat{K}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{K}_k.$$

Como queríamos demonstrar.

- Equação (3.20)

$$[\widehat{L}_i, \widehat{P}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{P}_k.$$

### Demonstração

Para demonstrar esta relação, pode-se utilizar  $\widehat{L}_i = \epsilon_{ijk}(\widehat{Q}_j\widehat{P}_k - \widehat{Q}_k\widehat{P}_j)$  e o fato dos operadores  $\widehat{P}_j$  comutarem entre si, assim,

$$[\widehat{L}_i, \widehat{P}_n] = \epsilon_{ijk} [\widehat{Q}_j, \widehat{P}_n] \widehat{P}_k = i\hbar \epsilon_{ijk} \delta_{j,n} \widehat{P}_k,$$

onde utilizamos a relação  $[\widehat{Q}_j, \widehat{P}_n] = i\hbar \delta_{jn} \mathbf{1}$ . Como queríamos demonstrar.

- Equação (3.22)

$$[\widehat{K}_i, \widehat{P}_j] = i\hbar m \delta_{ij} \mathbf{1}.$$

### Demonstração

Usando a equação (3.13), temos

$$[\widehat{K}_i, \widehat{P}_j] = m[\widehat{Q}_i, \widehat{P}_j] - t[\widehat{P}_i, \widehat{P}_j] = i\hbar m \delta_{ij} \mathbf{1},$$

onde utilizou-se o fato que  $[\widehat{Q}_i, \widehat{P}_j] = i\hbar \delta_{ij}$  e  $[\widehat{P}_i, \widehat{P}_j] = 0$ .

Como queríamos demonstrar.

- Equação (3.23)

$$[\widehat{K}_i, \widehat{H}] = i\hbar \widehat{P}_i.$$

### Demonstração

Se reescrevermos a equação (3.23) da seguinte forma,

$$[\widehat{K}_i, \widehat{H}] = \sum_{n=1}^3 \frac{1}{2m} ([m\widehat{Q}_i, \widehat{P}_n^2] - t[\widehat{P}_i, \widehat{P}_n^2]),$$

chegamos a

$$[\widehat{K}_i, \widehat{H}] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 [\widehat{Q}_i, \widehat{P}_n^2],$$

e sabendo que  $[\widehat{Q}_i, \widehat{P}_n^2] = 2i\hbar \delta_{in} \widehat{P}_n$ , temos

$$[\widehat{K}_i, \widehat{H}] = i\hbar \widehat{P}_i.$$

Como queríamos demonstrar.

- Equação (3.26)

$$[\widehat{L}_i, \widehat{H}] = 0.$$

Utilizando  $\widehat{L}_i = \epsilon_{ijk} (\widehat{Q}_j \widehat{P}_k - \widehat{Q}_k \widehat{P}_j)$ , temos

$$[\widehat{L}_i, \widehat{H}] = \frac{i\hbar}{2m} \epsilon_{ijk} \sum_{n=1}^3 [\widehat{Q}_j \widehat{P}_k, \widehat{P}_n^2] = \frac{i\hbar}{2m} \epsilon_{ijk} \sum_{n=1}^3 [\widehat{Q}_j, \widehat{P}_n^2] \widehat{P}_k,$$

pois  $[\widehat{P}_j, \widehat{P}_n^2] = 0$ . Com o uso de  $[\widehat{Q}_j, \widehat{P}_n^2] = 2i\hbar\delta_{jn}\widehat{P}_n$ , chega-se a

$$[\widehat{L}_i, \widehat{H}] = \frac{-\hbar^2}{2m} \epsilon_{ijk} \widehat{P}_j \widehat{P}_k,$$

onde  $\epsilon_{ijk} \widehat{P}_j \widehat{P}_k = \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} \widehat{P}_j \widehat{P}_k + \epsilon_{ikj} \widehat{P}_k \widehat{P}_j) = \frac{1}{2}(\epsilon_{ijk} \widehat{P}_j \widehat{P}_k + \epsilon_{ijk} \widehat{P}_j \widehat{P}_k) = 0$ . Logo,

$$[\widehat{L}_i, \widehat{H}] = 0.$$

- Equação (3.25)

$$[\widehat{P}_i, \widehat{H}] = 0.$$

### Demonstração

Esta relação de comutação obviamente é nula, pois  $\widehat{H}$  depende exclusivamente de  $\widehat{P}^2$  que comuta com  $\widehat{P}_i$ .

Agora que já foi mostrado que os operadores-estrela obedecem as relações de comutação da álgebra de Galilei estendida, pode-se dizer ainda que os operadores-estrela determinam uma representação projetiva do grupo de Galilei, podendo ser obtido o formalismo da mecânica quântica na descrição de Schroedinger ou Heisenberg.

Em termos de simetria,  $\widehat{P}$  é o gerador de translações, sendo identificado como operador momentum. De fato,  $\widehat{P}_j$  se transforma pelo *boost* (transformação pura de Galilei) de acordo com,

$$\exp(-i\mathbf{v} \cdot \frac{\widehat{K}}{\hbar}) \widehat{P}_j \exp(i\mathbf{v} \cdot \frac{\widehat{K}}{\hbar}) = \widehat{P}_j + mv_j \mathbf{1}. \quad (3.27)$$

Assim  $\widehat{Q}$  é interpretado como o operador de posição, se transformando de acordo com o *boost* como esperado, isto é

$$\exp(-i\mathbf{v} \cdot \frac{\widehat{K}}{\hbar}) \widehat{Q}_j \exp(i\mathbf{v} \cdot \frac{\widehat{K}}{\hbar}) = \widehat{Q}_j + v_j t \mathbf{1}. \quad (3.28)$$

As relações (3.27) e (3.28) mostram que  $\widehat{Q}$  e  $\widehat{P}$  se transformam como posição e momentum, respectivamente. E por consistência, eles satisfazem a relação de Heisenberg,

$$[\widehat{Q}_j, \widehat{P}_n] = i\hbar\delta_{jn}\mathbf{1}, \quad (3.29)$$

reafirmando a consistência de se interpretar  $\widehat{Q}$  e  $\widehat{P}$  como observáveis posição e momentum.

Os invariantes da álgebra de Galilei nesta representação são dados por

$$I_1 = \widehat{H} - \frac{\widehat{P}^2}{2m} \quad e \quad I_2 = \widehat{L} - \frac{1}{m}\widehat{K} \times \widehat{P}. \quad (3.30)$$

Sendo que o invariante de Cassimir dado por  $I_1$  descreve o hamiltoniano para uma partícula livre, enquanto o invariante  $I_2$  está associado ao spin. Os parâmetros  $m$  e  $t$  são interpretados como massa e tempo. Aqui será dada atenção às representações escalares, isto é, com  $I_2 = 0$ . Utilizando as relações de comutação demonstradas aqui, pode-se mostrar que os invariantes comutam com os geradores desta álgebra.

O gerador de translações temporais é  $\widehat{H}$ , com isso, a evolução no tempo de um observável  $\widehat{A}$  é especificado por

$$\exp(-it\frac{\widehat{H}}{\hbar})\widehat{A}(0)\exp(it\frac{\widehat{H}}{\hbar}) = \widehat{A}(t), \quad (3.31)$$

onde  $\widehat{A}(t)$  representa o observável  $\widehat{A}$  no instante  $t$ , e  $\widehat{A}(0)$ , no instante inicial. Pode-se obter uma equação dinâmica para  $\widehat{A}$  ao derivar a equação (3.31) com relação ao tempo,

$$\frac{\partial\widehat{A}(t)}{\partial t} = \frac{i\widehat{H}}{\hbar}\exp(-it\frac{\widehat{H}}{\hbar})\widehat{A}(0)\exp(it\frac{\widehat{H}}{\hbar}) - \exp(-it\frac{\widehat{H}}{\hbar})\widehat{A}(0)\exp(it\frac{\widehat{H}}{\hbar})\frac{-i\widehat{H}}{\hbar},$$

$$\frac{\partial\widehat{A}(t)}{\partial t} = \frac{i\widehat{H}}{\hbar}\widehat{A}(t) - \widehat{A}(t)\frac{i\widehat{H}}{\hbar},$$

$$i\hbar\frac{\partial\widehat{A}(t)}{\partial t} = \widehat{A}(t)\widehat{H} - \widehat{H}\widehat{A}(t) = [\widehat{A}(t), \widehat{H}].$$

Ao particularizar para os operadores posição e momentum, tem-se, por exemplo

$$i\hbar\frac{\partial\widehat{Q}(t)}{\partial t} = [\widehat{Q}(t), \widehat{H}], \quad (3.32)$$

e

$$i\hbar\frac{\partial\widehat{P}(t)}{\partial t} = [\widehat{P}(t), \widehat{H}]. \quad (3.33)$$

Vamos agora mostrar como construir uma base em  $H(\Gamma)$  com conteúdo de espaço de fase. Quando foram definidos os operadores posição e momentum eles tinham e seguinte



estrutura,

$$\hat{P} = p\star = p\mathbf{1} - \frac{i\hbar}{2}\partial_q = p\mathbf{1} + \frac{1}{2}\tilde{P}, \quad (3.34)$$

e

$$\hat{Q} = q\star = p\mathbf{1} + \frac{i\hbar}{2}\partial_p = q\mathbf{1} + \frac{1}{2}\tilde{Q}. \quad (3.35)$$

Definindo então operadores proporcionais à identidade (operadores *c-number*) como

$$\bar{P} = 2p\mathbf{1} \quad e \quad \bar{Q} = 2q\mathbf{1}, \quad (3.36)$$

os operadores de posição e momentum ficam escritos como,

$$\hat{P} = \frac{1}{2}(\bar{P} + \tilde{P}) \quad e \quad \hat{Q} = \frac{1}{2}(\bar{Q} + \tilde{Q}). \quad (3.37)$$

Sob o boost  $\bar{Q}$  e  $\bar{P}$  se transformam como,

$$\exp(-iv\frac{\hat{K}}{\hbar})2\bar{Q}\exp(iv\frac{\hat{K}}{\hbar}) = 2\bar{Q} + vt\mathbf{1}, \quad (3.38)$$

e

$$\exp(-iv\frac{\hat{K}}{\hbar})2\bar{P}\exp(iv\frac{\hat{K}}{\hbar}) = 2\bar{P} + mv\mathbf{1}. \quad (3.39)$$

Onde para obter este resultado utilizamos  $e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} [A, B]_n$ , onde

$$[A, B]_0 = B, [A, B]_1 = [A, B], \dots, [A, B]_n = [A, [A, B]_{n-1}], \quad n \geq 2.$$

Ou seja,  $\bar{Q}$  e  $\bar{P}$  se transformam como posição e momentum. Contudo  $\bar{Q}$  e  $\bar{P}$  não podem ser classificados como observáveis posição e momentum, pois eles não satisfazem a relação de comutação de Heisenberg, pois  $[\bar{Q}, \bar{P}] = 0$ . No entanto, é possível usá-los para construir um referencial no espaço de Hilbert com conteúdo de espaço de fase. Assim sendo, serão definidos um conjunto de autovetores ortonormalizados, que denotaremos por  $|q, p\rangle$ , sendo  $\{q\}$  e  $\{p\}$ , respectivamente, um conjunto de autovalores, satisfazendo

$$\bar{Q}|q, p\rangle = q|q, p\rangle, \quad (3.40)$$

e

$$\bar{P}|q, p\rangle = p|q, p\rangle, \quad (3.41)$$

onde

$$\langle q, p|q', p'\rangle = \delta(q - q')\delta(p - p'), \quad (3.42)$$

valendo a relação de completeza,

$$\int dqdp |q, p\rangle \langle q, p| = 1. \quad (3.43)$$

Considerando um vetor de estado  $|\psi\rangle$ , os operadores  $\tilde{Q}$  e  $\tilde{P}$  na base  $|q, p\rangle$  são tais que

$$\tilde{Q}\psi(q, p) = \langle q, p|\tilde{Q}|\psi\rangle = i\hbar\partial_p\psi(q, p), \quad (3.44)$$

e

$$\tilde{P}\psi(q, p) = \langle q, p|\tilde{P}|\psi\rangle = -i\hbar\partial_q\psi(q, p), \quad (3.45)$$

onde  $\langle q', p'|\psi\rangle = \psi(q', p')$ . Assim, é possível reconhecer,

$$\langle q, p|\tilde{Q}|q', p'\rangle = i\hbar\delta(q - q')\delta(p - p')\partial_p, \quad (3.46)$$

e analogamente,

$$\langle q, p|\tilde{P}|q', p'\rangle = i\hbar\delta(q - q')\delta(p - p')\partial_q. \quad (3.47)$$

Os operadores  $\overline{Q}$  e  $\overline{P}$ , cujos autovalores são  $\{q, p\}$ , são coordenadas de um espaço de fase  $\Gamma$ , onde a estrutura simplética é utilizada na definição do produto estrela. De fato, a partir do operador  $\Lambda$  pode-se construir a aplicação

$$e^{\frac{i\hbar}{2}\Lambda} : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma, \quad (3.48)$$

estabelecendo o produto estrela. Desse modo, a representação do grupo de Galilei que foi construída está estruturada sobre a noção de variedade simplética.

### 3.3 A Equação de Schroedinger no Espaço de Fase

Na seção anterior foi mostrado que os operadores-estrela constituem operadores representativos dos observáveis no espaço de Hilbert,  $H(\Gamma)$ . Logo é possível a construção da mecânica quântica, explicitando os postulados escritos em termos dos operadores-estrela e sua álgebra. O primeiro passo é a definição de alguns postulados análogos aos que definiram a mecânica quântica no espaço de Hilbert habitual.

Será considerada a projeção dos kets sobre o espaço de Hilbert gerado pelos autovetores simultâneos dos operadores  $\overline{Q}$  e  $\overline{P}$ ,  $|q, p\rangle$ . Considere  $|\psi(t)\rangle$  em  $H(\Gamma)$  como uma representação de um estado específico de um sistema quântico. Quando projetamos o vetor de estado,  $|\psi(t)\rangle$ , sobre o espaço de Hilbert,  $H(\Gamma)$ , gerado pelos kets  $\{|q, p\rangle\}$ ,

encontramos uma função das variáveis  $q, p$  e  $t$ ,

$$\psi(q, p, t) = \langle q, p | \psi(t) \rangle. \quad (3.49)$$

Vale a pena notar que  $\psi(q, p, t)$  é uma função de onda, mas não com o conteúdo entendido na mecânica quântica usual, pois  $p$  e  $q$  são autovalores dos operadores  $\bar{P}$  e  $\bar{Q}$  que são representações das coordenadas da variedade simplética.

Se for feito uso da relação de completeza, temos

$$\langle \psi | \phi \rangle = \langle \psi | \left( \int dq dp |q, p\rangle \langle q, p| \right) | \phi \rangle = \int dq dp \psi^\dagger(q, p) \phi(q, p). \quad (3.50)$$

onde  $\psi^\dagger(q, p) = \langle \psi | q, p \rangle$  e  $\phi(q, p) = \langle q, p | \phi \rangle$ .

Vimos da equação (2.42) que o produto estrela se trivializa quando integrado no espaço de fase, assim a equação (3.50) pode ser escrita da seguinte forma,

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int dq dp \psi^\dagger(q, p) \star \phi(q, p). \quad (3.51)$$

Os observáveis são representados por operadores estrela auto-adjuntos, tais que

$$\langle q, p | A | \psi \rangle = \int dq' dp' \langle q, p | A | q', p' \rangle \langle q', p' | \psi \rangle. \quad (3.52)$$

Assumindo

$$\langle q, p | A | q, p \rangle = \hat{A}(q, p) \delta(p - p') \delta(q - q'), \quad (3.53)$$

obtem-se

$$\langle q, p | A | \psi \rangle = \hat{A}(q, p) \psi(q, p). \quad (3.54)$$

E por construção  $\hat{A}(q, p)$  é associado com uma função  $a(q, p)$  por meio do produto estrela,

$$\hat{A}(q, p) = a(q, p) \star. \quad (3.55)$$

O valor esperado de um observável  $\hat{A}$  em um dado estado  $|\psi\rangle$  é dado por

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int dq dp \int dq' dp' \langle \psi | q, p \rangle \langle q, p | \hat{A} | q', p' \rangle \langle q', p' | \psi \rangle, \quad (3.56)$$

onde foi utilizada a relação de completeza antes e depois do operador.

Em geral, se for escrito  $\hat{A}(q, p) = a(q, p) \star$ , e utilizadas as propriedades do produto estrela, encontra-se

$$\langle \hat{A} \rangle = \int dq dp a(q, p) [\psi^\dagger(q, p) \star \psi(q, p)]. \quad (3.57)$$

Assim, nota-se que  $\langle \hat{A} \rangle$  poderá ser real se o espectro de  $\hat{A}$  for real. Em particular, para  $\hat{A} = \hat{Q}$ , tem-se

$$\langle \hat{Q} \rangle = \int dqdpq[\psi^\dagger(q,p) \star \psi(q,p)], \quad (3.58)$$

e o valor esperado  $\langle \hat{Q} \rangle$  pode ser escrito como

$$\langle \hat{Q} \rangle = \int dq q \sigma(q), \quad (3.59)$$

onde  $\sigma(q)$  representa a densidade de probabilidade associada à medida do observável  $\hat{Q}$ , na posição  $q$ . Comparando as equações (3.58) e (3.59), a conclusão é que

$$\sigma(q) = \int dp[\psi(q,p) \star \psi^\dagger(q,p)]. \quad (3.60)$$

Analogamente, a densidade de probabilidade associada ao momentum nos fornece,

$$\sigma(p) = \int dq[\psi(q,p) \star \psi^\dagger(q,p)]. \quad (3.61)$$

A evolução temporal de um operador arbitrário, conforme já foi visto, depende somente das propriedades algébricas do grupo de Galilei. Será utilizada então a equação (3.31) para descrever a evolução temporal dos observáveis físicos de tal maneira que o estado permaneça inalterado (descrição de Heisenberg), e a partir daqui sera feita a interpretação física. Assim tem-se as equações de Heisenberg para os observáveis  $\hat{Q}$  e  $\hat{P}$ ,

$$i\hbar \frac{\partial \hat{Q}(t)}{\partial t} = [\hat{Q}(t), \hat{H}], \quad (3.62)$$

e

$$i\hbar \frac{\partial \hat{P}(t)}{\partial t} = [\hat{P}(t), \hat{H}]. \quad (3.63)$$

Em geral para um observável  $\hat{A}$ ,

$$i\hbar \frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t} = [\hat{A}(t), \hat{H}], \quad (3.64)$$

com solução geral dada por

$$\hat{A} = \exp(-it \frac{\hat{H}}{\hbar}) \hat{A}(0) \exp(it \frac{\hat{H}}{\hbar}). \quad (3.65)$$

O valor esperado do observável  $\hat{A}(t)$  é dado por

$$\langle \hat{A}(t) \rangle = \int dqdp \varphi^\dagger \star \hat{A}(t) \star \varphi, \quad (3.66)$$

onde  $\varphi$  não depende explicitamente do tempo.

Definindo a exponencial estrela,  $e_\star^u$ , como

$$e_\star^u = 1 + u + \frac{1}{2!}u \star u + \frac{1}{3!}u \star u \star u + \dots, \quad (3.67)$$

e usando ainda  $\widehat{H} = h_\star$ , chega-se a

$$\langle \widehat{A}(t) \rangle = \int dqdp \varphi^\dagger \star e_\star^{\frac{i\hbar t}{\hbar}} \star A(0) \star e_\star^{\frac{i\hbar t}{\hbar}} \star \varphi. \quad (3.68)$$

Definindo  $\psi(t)$  como

$$\psi(t) = e_\star^{\frac{i\hbar t}{\hbar}} \star \varphi = e_\star^{\frac{i\hbar t}{\hbar}} \star \psi(0), \quad (3.69)$$

temos por consequência,

$$\psi^\dagger(t) = \psi^\dagger(0) \star e_\star^{\frac{-i\hbar t}{\hbar}}. \quad (3.70)$$

Com isso, o valor esperado do operador  $\widehat{A}(t)$  quando forem inseridas as equações (3.69) e (3.70) na equação (3.68), fica dado por

$$\langle \widehat{A}(t) \rangle = \int dqdp \psi(t) \star A(0) \star \psi^\dagger(t) = \int dqdp \psi(t) \widehat{A}(0) \psi^\dagger(t). \quad (3.71)$$

Neste caso os observáveis estão definidos num certo instante de tempo, e os estados evoluem no tempo. Isto define a descrição de Schroedinger.

Já se tem uma equação dinâmica para os observáveis, mas ao considerarmos  $\psi$  dependente do tempo, deve-se procurar uma outra equação dinâmica que descreva a evolução de  $\psi$ . Para isso, basta derivar a equação (3.69) com relação ao tempo,

$$\partial_t \psi(t) = \frac{i}{\hbar} h \star e_\star^{\frac{i\hbar t}{\hbar}} \star \psi(0) = \frac{i}{\hbar} h \star \psi(t) = \frac{i}{\hbar} \widehat{H} \psi(t),$$

o que resulta em

$$i\hbar \partial_t \psi(t) = \widehat{H} \psi(t), \quad (3.72)$$

ou ainda

$$i\hbar \partial_t \psi(t) = h \star \psi(t), \quad (3.73)$$

que é a equação dinâmica procurada.

Se for considerada uma partícula sujeita a um potencial  $V(\widehat{Q})$ , podemos escrever

$\widehat{H} = h \star = \left( \frac{\widehat{p}^2}{2m} + V(\widehat{Q}) \right)$ , de modo que a equação (3.72) se reduz a

$$i\hbar \partial_t \psi(q, p, t) = \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{i\hbar p}{2m} \frac{\partial}{\partial q} \right) \psi(q, p, t) + V\left(q + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) \psi(q, p, t); \quad (3.74)$$

que é a equação de Schroedinger representada no espaço de fase [8].

### 3.4 Equação dinâmica para a Matriz Densidade

Ao tomar a equação (3.72) pode-se obter uma equação dinâmica que envolve a matriz densidade. Os elemento diagonais da matriz densidade para um estado puro são dados por

$$\rho(q, p, t) = \langle q, p, t | \psi \rangle \langle \psi | q, p, t \rangle = \psi(q, p, t) \psi^\dagger(q, p, t). \quad (3.75)$$

Pode-se escrever o operador estrela associado a  $\rho(q, p, t)$  como

$$\widehat{\rho}(q, p, t) = \psi(q, p, t) \star \psi^\dagger(q, p, t) \star. \quad (3.76)$$

Ao derivar a equação (3.76) com relação ao tempo e multiplicar por  $i\hbar$  obtém-se,

$$i\hbar \partial_t \widehat{\rho} = (i\hbar \partial_t \psi) \star \psi^\dagger \star + \psi \star (i\hbar \partial_t \psi^\dagger) \star. \quad (3.77)$$

Considerando a equação (3.73) e seu conjugado hermiteano, temos

$$i\hbar \partial_t \psi(t) = h \star \psi(t), \quad (3.78)$$

e

$$-i\hbar \partial_t \psi(t)^\dagger = \psi(t)^\dagger \star h. \quad (3.79)$$

Podemos escrever a equação (3.77) como

$$i\hbar \partial_t \widehat{\rho} = h \star \psi \star \psi^\dagger \star - \psi \star \psi^\dagger \star h \star. \quad (3.80)$$

E ainda

$$i\hbar \partial_t \widehat{\rho} = \widehat{H} \widehat{\rho} - \widehat{\rho} \widehat{H} = [\widehat{H}, \widehat{\rho}], \quad (3.81)$$

ou seja, o operador  $\widehat{\rho}$  satisfaz a equação de Liouville-von Neuman.

### 3.5 Teorema de Ehrenfest

Finalmente pode-se demonstrar o teorema de Ehrenfest. Para isso, considere o valor esperado do operador posição, dado por

$$\langle \hat{Q} \rangle = \int dqdp \psi^\dagger \hat{Q} \psi, \quad (3.82)$$

$$\langle \hat{Q} \rangle = \int dqdp \psi^\dagger \star q \star \psi. \quad (3.83)$$

Se derivarmos a equação (3.82) com relação ao tempo, temos

$$\partial_t \langle \hat{Q} \rangle = \int dqdp \psi^\dagger [\hat{Q}, \hat{H}] \psi,$$

usando

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{Q}), \text{ ficamos com } [\hat{Q}, \hat{H}] = \frac{i\hbar}{m} \hat{P}, \text{ e conseqüentemente, temos}$$

$$\partial_t \langle \hat{Q} \rangle = \frac{1}{m} \int dqdp \psi^\dagger \hat{P} \psi = \langle \hat{P} \rangle. \quad (3.84)$$

Para completar a demonstração, é necessário uma equação para  $\partial_t \langle \hat{P} \rangle$ . Então, analogamente ao que foi feito com a equação (3.82), temos

$$\partial_t \langle \hat{P} \rangle = \int dqdp \psi^\dagger [\hat{P}, \hat{H}] \psi.$$

Assumindo  $\hat{V}(\hat{Q}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{Q}^n$ , e utilizando a relação de comutação,

$$[\hat{P}, \hat{Q}^n] = -in\hat{Q}^{n-1},$$

obtemos

$$[\hat{P}, \hat{H}] = -i\partial_{\hat{Q}} \hat{V}(\hat{Q}).$$

E finalmente chegamos a

$$\partial_t \langle \hat{P} \rangle = -\langle \partial_{\hat{Q}} \hat{V}(\hat{Q}) \rangle. \quad (3.85)$$

Se for considerado  $\hbar \rightarrow 0$  os resultados clássicos são obtidos.

### 3.6 Conexão com o Formalismo de Wigner

Considere a função

$$f(q, p) = \psi(q, p, t) \star \psi^\dagger(q, p, t). \quad (3.86)$$

Podemos mostrar que  $f = f(q, p, t)$  satisfaz todas as propriedades da função de Wigner, que foram mostradas no capítulo 2.

Para começar, tomemos a equação (3.73) e seu conjugado hermiteano,

$$i\hbar\partial_t\psi(t) = h \star \psi(t), \quad (3.87)$$

e

$$-i\hbar\partial_t\psi(t)^\dagger = \psi(t)^\dagger \star h, \quad (3.88)$$

e multiplique a equação (3.87) a esquerda por  $\psi\star$  e a equação (3.88) a direita por  $\star\psi^*$ , e depois subtraia uma da outra, o que leva a

$$i\hbar\partial_t(\psi \star \psi^\dagger) = h \star (\psi \star \psi^\dagger) - (\psi \star \psi^\dagger) \star h. \quad (3.89)$$

Mas  $\partial_t(\psi \star \psi^\dagger) = \psi \star (\partial_t\psi^\dagger) + (\partial_t\psi) \star \psi^\dagger$  e  $f = \psi \star \psi^\dagger$ ; com isso tem-se,

$$i\hbar\partial_t f = h \star f - f \star h, \quad (3.90)$$

ou ainda,

$$i\hbar\partial_t f = \{h, f\}_M, \quad (3.91)$$

que como foi visto no capítulo 2, é a equação dinâmica da função de Wigner.

Também pode-se notar que

$$\int dqdp f(q, p) = \int dqdp \psi \star \psi^\dagger = |\psi(q, p)|^2 = 1, \quad (3.92)$$

propriedade essa que também é satisfeita pela função de Wigner.

Tem-se ainda que

$$\langle \hat{A} \rangle = \int dqdp \psi(\hat{A}(q, p) \star \psi^\dagger), \quad (3.93)$$

onde se forem utilizadas as propriedades do produto estrela, tem-se

$$\langle \hat{A} \rangle = \int dqdp \hat{A}(q, p)(\psi \star \psi^\dagger), \quad (3.94)$$



o que dá

$$\langle \hat{A} \rangle = \int dqdp \hat{A}(q, p) f(q, p), \quad (3.95)$$

que também é uma propriedade satisfeita pela função de Wigner.

Pode ser verificado que  $f = \psi \star \psi^\dagger$  é uma função real. Para isso, considere

$$f^\dagger = (\psi \star \psi^\dagger)^\dagger. \quad (3.96)$$

Utilizando a propriedade da conjugação complexa do produto estrela, tem-se,

$$f^\dagger = (\psi \star \psi^\dagger)^\dagger = (\psi^\dagger)^\dagger \star (\psi)^\dagger = \psi \star \psi^\dagger = f, \quad (3.97)$$

logo  $f^\dagger = f$ . Assim, percebe-se que  $f$  é uma função real.

As equações (3.60) e (3.61) nos dizem que

$$\sigma(q) = \int dp [\psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)] = \int dp f(q, p), \quad (3.98)$$

e

$$\sigma(p) = \int dq [\psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)] = \int dq f(q, p). \quad (3.99)$$

Que é mais uma propriedade da função de Wigner.

Pode-se então escrever,

$$f(q, p) = f_w(q, p) = \psi(q, p, t) \star \psi^\dagger(q, p, t). \quad (3.100)$$

Observe ainda a equação de autovalores para o hamiltoniano,

$$h \star \psi = E\psi, \quad (3.101)$$

se for feito o produto estrela a direita por  $\psi^\dagger$ , obtém-se

$$h \star f_w = Ef_w, \quad (3.102)$$

mostrando que  $\psi(q, p)$  e  $f_w(q, p)$  satisfazem a mesma equação diferencial. Portanto, a procura por soluções reais para  $\psi$  leva a funções de Wigner. Além disso, diferentes funções de Wigner são obtidas mediante o produto  $\psi(q, p, t) \star \psi^\dagger(q, p, t)$ .

No capítulo seguinte iremos aplicar o formalismo discutido aqui para resolver problemas de autovalores. Também iniciaremos um tratamento de teoria de campos, abordando o campo de Schroedinger.

## 4 *Campo de Schroedinger*

Neste capítulo iniciaremos nosso enfoque em teoria de campos no espaço de fase, tratando do campo de Schroedinger. Nosso intuito é, a partir da densidade lagrangiana, obter as quantidades conservadas utilizando para isso o teorema de Noether. Também resolveremos problemas de autovalores para a equação de Schroedinger no espaço de fase para os seguintes casos: potencial linear, oscilador harmônico e potencial de Liouville, aplicando o formalismo do capítulo anterior, e mostrando que o mesmo é autoconsistente.

### 4.1 Lagrangiana para o campo de Schroedinger no espaço de fase e o teorema de Noether

A equação de Schroedinger no espaço de fase, equação (3.74), é obtida a partir da seguinte densidade lagrangiana,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{i\hbar}{2}(\psi^\dagger \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^\dagger) + \frac{i\hbar}{4m} p(\psi^\dagger \partial_q \psi - \psi \partial_q \psi^\dagger) \\ & - \frac{p^2}{2m} \psi \psi^\dagger + V(q) \star (\psi \psi^\dagger) - \frac{\hbar^2}{8m} \partial_q \psi \partial_q \psi^\dagger, \end{aligned} \quad (4.1)$$

utilizando para isso as equações de Euler-Lagrange,

$$\partial_q \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial q} \right)} \right) + \partial_p \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} \right)} \right) + \partial_t \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0.$$

Note que se utilizarmos as equações de Euler-Lagrange para  $\psi^\dagger$  obtemos a equação de Schroedinger para  $\psi$  e vice-versa. Note também que  $\psi$  e  $\psi^\dagger$  são tomados como campos independentes.

O objetivo agora é proceder com uma dedução do teorema de Noether no espaço de fase. Antes disso iremos definir uma coordenada simplética representada por  $\eta = (q, p)$ . Para incluirmos o tempo, utilizaremos a notação  $\eta_\mu = (q, p, t)$ . A dedução esboçada aqui foi baseada na referência [42].

A ação fica dada da seguinte forma

$$S = \int \mathcal{L}(\eta_\mu, \psi_k(\eta_\mu), \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\mu}) dq dp, \quad (4.2)$$

e as equações de movimento ficam dadas por

$$\frac{d}{d\eta_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\mu})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k} = 0.$$

Nosso interesse está nas transformações de simetria das equações de movimento que deixam invariante a integral de ação. Isto é, considere a transformação,

$$\eta'_\mu = \eta_\mu + \epsilon \tau_\mu(\psi, \eta), \quad (4.3)$$

$$\psi'_k(\eta') = \psi_k(\eta) + \epsilon \pi_k(\psi, \eta). \quad (4.4)$$

A lagrangiana deve satisfazer,

$$\mathcal{L}'(\eta'_\mu, \psi'_k(\eta'_\mu), \frac{\partial \psi'_k}{\partial \eta'_\mu}) d\eta' = \mathcal{L}(\eta_\mu, \psi_k(\eta_\mu), \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\mu}) d\eta, \quad (4.5)$$

onde  $d\eta = dq dp$ .

Para as equações de movimento coincidirem, podemos ter  $n$  funções  $f_\mu(\eta, \psi)$  tais que<sup>1</sup>

$$\mathcal{L}'(\eta'_\mu, \psi'_k(\eta'_\mu), \frac{\partial \psi'_k}{\partial \eta'_\mu}) = \mathcal{L}(\eta'_\mu, \psi'_k(\eta'_\mu), \frac{\partial \psi'_k}{\partial \eta'_\mu}) + \epsilon \frac{df'_\mu}{d\eta'_\mu}, \quad (4.6)$$

onde  $f'_\mu = f_\mu(\eta', \psi')$  e  $\frac{d}{d\eta'_\mu} = \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta'_\mu} \frac{\partial}{\partial \psi_k} + \frac{\partial}{\partial \eta'_\mu}$ . Os elementos de volume são relacionados por meio do jacobiano,  $J$ , da seguinte forma,  $d\eta' = J d\eta$ , com

$$J = 1 + \epsilon \frac{d\tau_\mu}{d\eta_\mu}. \quad (4.7)$$

Assim devemos ter,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\eta_\mu, \psi_k(\eta_\mu), \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\mu}) d\eta &= [\mathcal{L}'(\eta'_\mu, \psi'_k(\eta'_\mu), \frac{\partial \psi'_k}{\partial \eta'_\mu}) - \epsilon \frac{df'_\mu}{d\eta'_\mu}] d\eta' \\ &= \mathcal{L}'(\eta'_\mu, \psi'_k(\eta'_\mu), \frac{\partial \psi'_k}{\partial \eta'_\mu}) d\eta' - \epsilon \frac{df'_\mu}{d\eta'_\mu} d\eta', \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde  $\epsilon \frac{df'_\mu}{d\eta'_\mu} = \epsilon \frac{df_\mu}{d\eta_\mu} - O(\epsilon^2)$ . Usando a equação (4.7), temos

---

<sup>1</sup>Índices repetidos significa soma

$$\mathcal{L}(\eta'_\mu, \psi'_k(\eta'_\mu), \frac{\partial \psi'_k}{\partial \eta'_\mu}) = [\mathcal{L}(\eta_\mu, \psi_k(\eta_\mu), \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\mu}) + \epsilon \frac{df_\mu}{d\eta_\mu}](1 - \epsilon \frac{d\tau_\nu}{d\eta_\nu}); \quad (4.9)$$

e das equações(4.3) e (4.4) temos ainda que

$$\frac{d\psi'_k(\eta'_\nu)}{d\eta'_\mu} = \frac{\partial \psi'_k}{\partial \eta_\nu} \frac{\partial \eta_\nu}{\partial \eta'_\mu} = \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\mu} + \epsilon [\frac{d\pi_k}{d\eta_\mu} - \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\nu} \frac{d\tau_\nu}{d\eta_\mu}]. \quad (4.10)$$

Após rearranjarmos os termos, chegamos a

$$D\mathcal{L} = \frac{df_\mu}{d\eta_\mu}, \quad (4.11)$$

onde

$$D \equiv \tau_\mu \frac{\partial}{\partial \eta_\mu} + \pi_k \frac{\partial}{\partial \psi_k} + (\frac{d\pi_k}{d\eta_\mu} - \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\mu} \frac{d\tau_\nu}{d\eta_\mu}) \frac{\partial}{\partial (\frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\nu})} + \frac{d\tau_\nu}{d\eta_\nu}. \quad (4.12)$$

Podemos utilizar a equação (4.11) para determinar as constantes de movimento do sistema. Utilizando a identidade,

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\eta_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\nu})} \frac{\partial (\frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\nu})}{\partial \eta_\mu},$$

chegamos a,

$$\frac{d}{d\eta_\mu} [\mathcal{L}\tau_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\nu})} (\pi_k - \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\nu} \tau_\nu)] + [\frac{d}{d\eta_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\mu})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_k}] (\pi_k - \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\mu} \tau_\mu) = \frac{df_\mu}{d\eta_\mu}. \quad (4.13)$$

Se a dinâmica do sistema é regida pelas equações de Euler-Lagrange, chegamos finalmente a lei de conservação,

$$\frac{dG_\mu}{d\eta_\mu} = 0, \quad (4.14)$$

onde

$$G_\mu = \mathcal{L}\tau_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\nu})} (\pi_k - \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta_\nu} \tau_\nu) - f_\mu. \quad (4.15)$$

A equação (4.14) é a formulação do teorema de Noether, estabelecendo que toda transformação de simetria que mantém a ação invariante, corresponde a uma quantidade conservada.

Para aplicar este resultado, consideremos a lagrangiana para a equação de

Schroedinger, equação (4.1), onde utilizando a equação (4.11) fazemos as identificações,  $\tau_1 = \tau_q$ ,  $\tau_2 = \tau_p$ ,  $\tau_3 = \tau_t$ ,  $\eta_1 = q$ ,  $\eta_2 = p$ ,  $\eta_3 = t$ ,  $\psi_1 = \psi$  e  $\psi_2 = \psi^\dagger$ .

Utilizando as equações (4.1) e (4.12), obtemos para o potencial  $V(\hat{Q})$  independente do tempo a seguinte simetria da ação,  $\tau_1 = \tau_2 = 0$ ,  $\tau_3 = k$  (constante),  $\pi_1 = \pi_2 = 0$  e  $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ . Isso nos fornece

$$D = k \frac{\partial}{\partial t}. \quad (4.16)$$

E a partir da equação (4.15) obtemos a grandeza conservada,

$$G_1 = -\frac{i\hbar}{4m} p(\psi^\dagger \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^\dagger) + \frac{\hbar^2}{8m} (\partial_q \psi^\dagger \partial_t \psi + \partial_q \psi \partial_t \psi^\dagger), \quad (4.17)$$

$$G_2 = 0, \quad (4.18)$$

$$G_3 = \frac{i\hbar}{4m} p(\psi^\dagger \partial_q \psi - \psi \partial_q \psi^\dagger) - \frac{p^2}{2m} \psi \psi^\dagger + \hat{V}(q) \psi \psi^\dagger - \frac{\hbar^2}{8m} \partial_q \psi \partial_q \psi^\dagger. \quad (4.19)$$

Estas três componentes da grandeza conservada obedecem a lei de conservação,

$$\partial_q G_1 + \partial_p G_2 + \partial_t G_3 = 0. \quad (4.20)$$

Integrando a equação (4.20) numa região do espaço de fase, e realizando uma integração por partes; chegamos a

$$\frac{d}{dt} \left( \int \psi^\dagger \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{i\hbar}{2m} \partial_q - \frac{\hbar^2}{8m} \partial_q^2 + V(\hat{Q}) \right) \psi dq dp \right) = \frac{d}{dt} \left( \int \psi^\dagger \left( \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{Q}) \right) \psi dq dp \right) = 0. \quad (4.21)$$

A equação (4.21) pode ser escrita como

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = 0, \quad (4.22)$$

onde  $\langle E \rangle = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{Q})$ . A equação (4.22) significa a conservação da energia total do sistema.

Vamos explorar com mais detalhe o teorema de Noether no espaço de fase, tratando campos relativísticos, no próximo capítulo. Na sequência faremos algumas aplicações do formalismo da equação de Schroedinger no espaço de fase.

## 4.2 Aplicações

Nesta seção resolveremos problemas de autovalores para três tipos de potenciais. Primeiro aplicaremos o método ao potencial linear; como segunda aplicação discutiremos o oscilador harmônico; e a terceira aplicação será o potencial de Liouville. Vale lembrar que resolveremos os problemas de tais potenciais sem o uso da descrição de Schroedinger, tal como é observado frequentemente no contexto das funções de Wigner. Mostraremos aqui que é possível resolver problemas no espaço de fase de modo autoconsistente.

Nas três aplicações que seguirão, estaremos em busca de soluções reais. Lembrando que a amplitude pode ser escrita como  $\Psi(q, p) = \psi(q, p) + i\phi(q, p)$ , buscaremos encontrar somente  $\psi(q, p)$ .

### 4.2.1 Potencial Linear

Nosso objetivo aqui é resolver o problema do potencial linear no espaço de fase, em busca de soluções reais. Para isso, consideraremos por simplicidade:  $h(q, p) = p^2 + q$ , onde fizemos  $m = \frac{1}{2}$  e  $\hbar = 1$ . Assim, a equação de autovalores é escrita como

$$h(q, p) \star \psi(q, p) = (p^2 + q) \star \psi(q, p) = E\psi(q, p). \quad (4.23)$$

Aplicando as propriedades do produto estrela, temos

$$[(p - \frac{i}{2}\partial_q)^2 + (q + \frac{i}{2}\partial_p)]\psi(q, p) = E\psi(q, p), \quad (4.24)$$

ou

$$(p^2 - \frac{i}{2}p\partial_q - \frac{1}{4}\partial_q^2 + q + \frac{i}{2}\partial_p - E)\psi(q, p) = 0. \quad (4.25)$$

Separando a parte real da parte imaginária na equação diferencial acima, ficamos com

$$(p^2 + q - \frac{1}{4}\partial_q^2 - E)\psi(q, p) = 0, \quad (4.26)$$

e

$$(-p\partial_q + \partial_p)\psi(q, p) = 0. \quad (4.27)$$

Note que se tomarmos  $\psi(q, p) = \psi(p^2 + q) = \psi(h)$ , tanto a equação da parte real quanto a da parte imaginária serão satisfeitas. Definido assim  $z = p^2 + q$ , temos  $\partial_q = \partial_z$  e  $\partial_q^2 = \partial_z^2$ , assim obtemos,

$$(z - \frac{1}{4}\partial_z^2 - E)\psi(q, p) = 0. \quad (4.28)$$

Esta é a equação diferencial de Airy, e sua solução é dada em termos das funções de Airy. Assim, a amplitude para o potencial linear é dada por

$$\psi(q, p) = \frac{2^{\frac{2}{3}}}{2\pi} Ai(2^{\frac{2}{3}}(q + p^2 - E)), \quad (4.29)$$

onde  $Ai(z)$  é a conhecida função de Airy.

Se fizermos  $\psi(q, p) \star \psi(q, p)^*$  obtemos funções de Wigner para o problema . O comportamento tanto da amplitude no espaço de fase quanto da respectiva função de Wigner correspondente podem ser vistos comparando-se os gráficos dados nas figuras (1-6).

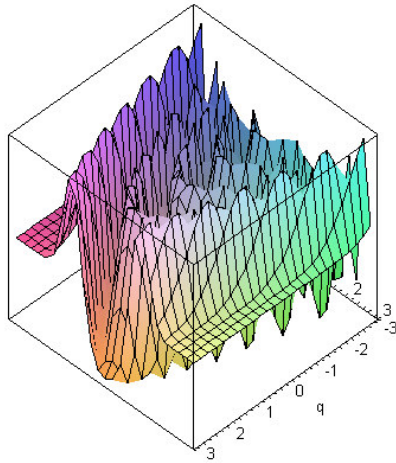


Figura 1: Amplitude para o potencial linear,  $E=5$

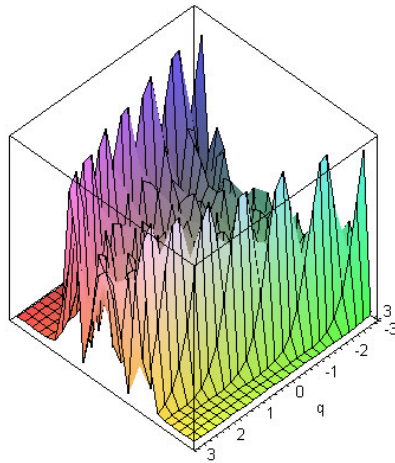


Figura 2: Função de Wigner para o potencial linear,  $E=5$



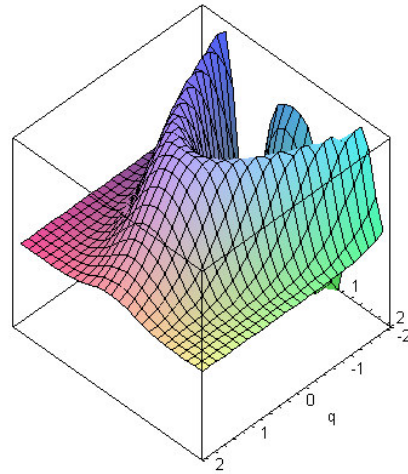


Figura 3: Amplitude para o potencial linear,  $E=1$

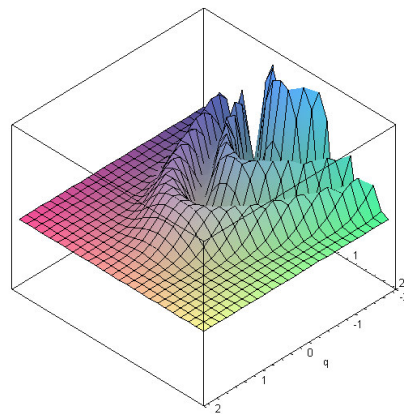


Figura 4: Função de Wigner para o potencial linear,  $E=1$

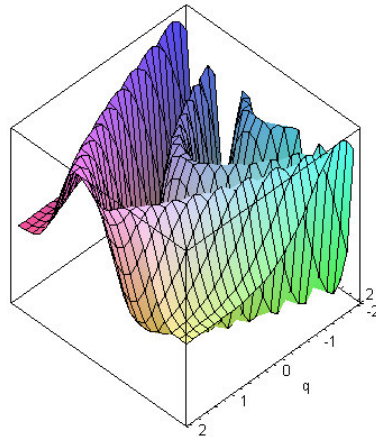


Figura 5: Amplitude para o potencial linear,  $E=3$

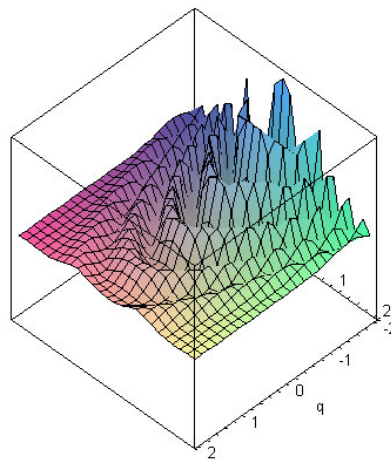


Figura 6: Função de Wigner para o potencial linear,  $E=3$

## 4.2.2 Oscilador Harmônico

No espaço de fase, este problema já foi resolvido na referência [8, 9], utilizando um método algébrico. Seguiremos aqui um procedimento diferente. Para isso, tomemos a equação de autovalores escrita no espaço de fase

$$h(q, p) \star \psi(q, p) = E\psi(q, p), \quad (4.30)$$

aqui  $h(q, p) = \frac{p^2 + q^2}{2}$ . Neste caso ficamos com,<sup>2</sup>

$$\left(\frac{p^2 + q^2}{2}\right) \star \psi(q, p) = E\psi(q, p). \quad (4.31)$$

Utilizando as propriedades do produto estrela temos,

$$\left[\left(p - \frac{i}{2}\partial_q\right)^2 + \left(q + \frac{i}{2}\partial_p\right)^2\right]\psi(q, p) = 2E\psi(q, p), \quad (4.32)$$

que leva a

$$\left[p^2 - \frac{i}{2}p\partial_q - \frac{1}{4}\partial_q^2 + q^2 + \frac{i}{2}q\partial_p - \frac{1}{4}\partial_p^2\right]\psi(q, p) = 2E\psi(q, p). \quad (4.33)$$

Podemos escrever ainda

$$\left[p^2 - \frac{1}{4}\partial_q^2 + q^2 - \frac{1}{4}\partial_p^2 - 2E\right]\psi(q, p) + \left[-\frac{i}{2}p\partial_q + \frac{i}{2}q\partial_p\right]\psi(q, p) = 0. \quad (4.34)$$

Igualando a parte real e a imaginária da equação (4.33) a zero, temos,

$$\left[p^2 - \frac{1}{4}\partial_q^2 + q^2 - \frac{1}{4}\partial_p^2 - 2E\right]\psi(q, p) = 0, \quad (4.35)$$

e

$$\left[-p\partial_q + q\partial_p\right]\psi(q, p) = 0, \quad (4.36)$$

se tomarmos  $\psi(q, p) = \psi(4h)$ , notamos que tanto a parte real quanto a parte imaginária da equação são satisfeitas. Desta forma, definindo  $z = 4h$ , temos

$$\partial_q = \frac{\partial z}{\partial q}\partial_z \rightarrow \partial_q = 4q\partial_z,$$

---

<sup>2</sup>tomamos  $\hbar = 1$  e  $m = 1$

$$\partial_p = \frac{\partial z}{\partial p} \partial_z \rightarrow \partial_p = 4p \partial_z,$$

e ainda

$$\partial_q^2 = 4q^2 \partial_z^2 + 2\partial_z,$$

$$\partial_p^2 = 4p^2 \partial_z^2 + 2\partial_z.$$

Substituindo nas equações (4.34) e (4.35), ficamos com

$$\left[ \frac{z}{4} - E - \frac{1}{8} ((16q^2 + 16p^2) \partial_z^2 + 8\partial_z) \right] \psi(z) = 0, \quad (4.37)$$

$$\left[ \frac{z}{4} - E - z\partial_z^2 - \partial_z \right] \psi(z) = 0. \quad (4.38)$$

Se tomarmos  $\psi(z) = e^{-\frac{z}{2}} L(z)$  e substituirmos na equação (4.37), temos

$$[z\partial_z^2 + (1-z)\partial_z + E - \frac{1}{2}] L(z) = 0, \quad (4.39)$$

que é uma das equações diferenciais de Laguerre. De fato, lembrando que a equação diferencial de Laguerre é dada por

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (m+1-x) \frac{dy}{dx} + ny = 0, \quad \text{onde } y = L_n^m(x), \quad (4.40)$$

temos em nosso caso  $m = 0$  e  $n = E - \frac{1}{2} = 0, 1, 2, \dots$ . Assim as soluções reais do problema do oscilador harmônico são dadas por

$$\psi_n(q, p) = e^{-2(q^2+p^2)} L_n(q^2 + p^2), \quad (4.41)$$

onde  $L_n$  representa o polinômio de Laguerre de ordem  $n$ . Vale a pena observar que no espaço de fase encontramos a solução da equação de evolução do sistema como funções escritas em termos de polinômios de Laguerre, enquanto que na descrição usual o estado é dado em termos de polinômios de Hermite.

A associação com a função de Wigner pode ser feita se tomarmos o produto estrela da solução dada acima com ela mesma. Para obter uma expressão geral dessas funções, escrevamos a solução para o problema dado da seguinte forma,

$$\psi_n = C_n \exp\left(\frac{-2h}{\hbar\omega}\right) L_n\left(\frac{4h}{\hbar\omega}\right), \quad (4.42)$$

onde  $C_n$  são constantes de normalização. As correspondentes funções de Wigner são dadas por

$$f_w^{(n)}(q, p) \sim \exp\left(\frac{-2h}{\hbar\omega}\right) \star [L_n\left(\frac{4h}{\hbar\omega}\right) \star \exp\left(\frac{-2h}{\hbar\omega}\right)] \star L_n\left(\frac{4h}{\hbar\omega}\right). \quad (4.43)$$

Contudo, dada uma função  $f(h)$ , expressa em série de potências,

$$g(h) = \sum_n f_n h^n, \quad (4.44)$$

temos, utilizando as propriedades do produto estrela,

$$f(h) \star e^{\frac{-2h}{\hbar\omega}} = \text{constante} \times e^{\frac{-2h}{\hbar\omega}}. \quad (4.45)$$

Considerando esse resultado, podemos escrever a equação (4.42) como,

$$f_w^{(n)}(q, p) \sim \exp\left(\frac{-2h}{\hbar\omega}\right) \star [\exp\left(\frac{-2h}{\hbar\omega}\right) L_n\left(\frac{4h}{\hbar\omega}\right)]. \quad (4.46)$$

o que nos fornece

$$f_w^{(n)}(q, p) \sim \exp\left(\frac{-2h}{\hbar\omega}\right) \star \psi_n = \exp\left(\frac{-2\hat{h}}{\hbar\omega}\right) \psi_n. \quad (4.47)$$

Como  $\psi_n$  é autofunção de  $\hat{h}$ , podemos escrever,

$$\exp\left(\frac{-2\hat{h}}{\hbar\omega}\right) \psi_n = \exp\left(\frac{-2E_n}{\hbar\omega}\right) \psi_n \sim \psi_n. \quad (4.48)$$

Assim, as funções de Wigner para o oscilador harmônico são [4]

$$f_w^{(n)}(q, p) \sim \exp\left(\frac{-2h}{\hbar\omega}\right) L_n\left(\frac{4h}{\hbar\omega}\right), \quad (4.49)$$

que são coincidentes com as soluções encontradas para as amplitudes. Esse fato é consistente, já que elas obedecem a mesma equação de autovalores. O comportamento de alguns casos para as amplitudes e das respectivas funções de Wigner podem vistos por meio dos gráficos dados nas figuras (7-16).

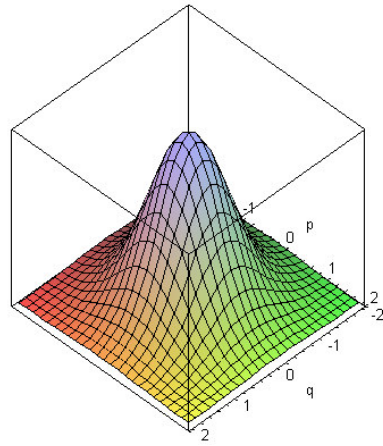


Figura 7: Amplitude para o oscilador harmônico, ordem zero

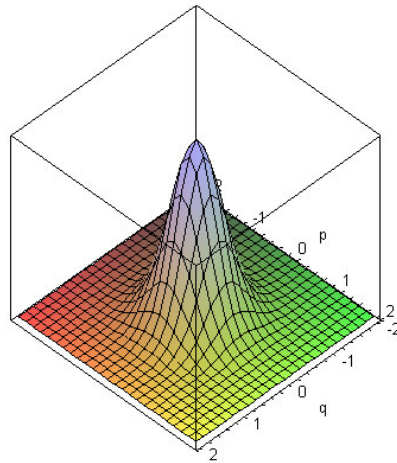


Figura 8: Função de Wigner para o oscilador harmônico, ordem zero

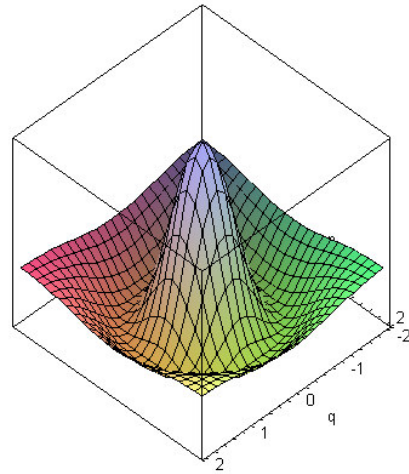


Figura 9: Amplitude para o oscilador harmônico, ordem 1

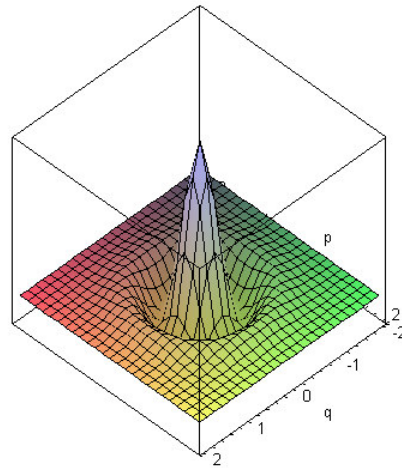


Figura 10: Função de Wigner para o oscilador harmônico, ordem 1

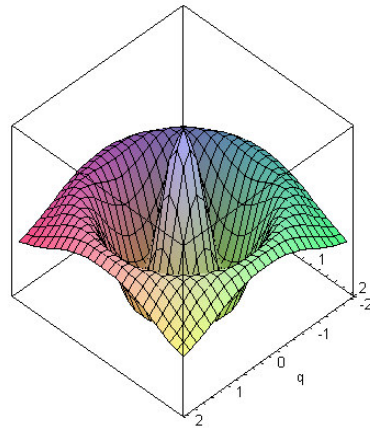


Figura 11: Amplitude para o oscilador harmônico, ordem 2

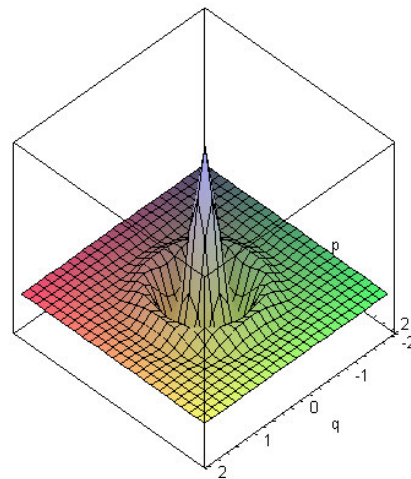


Figura 12: Função de Wigner para o oscilador harmônico, ordem 2



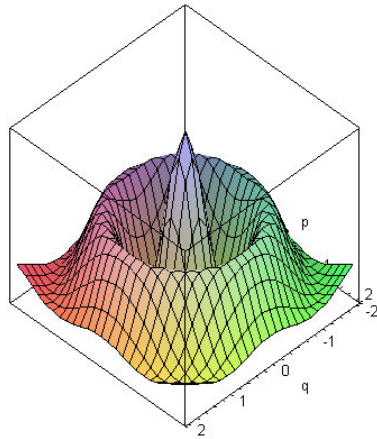


Figura 13: Amplitude para o oscilador harmônico, ordem 3

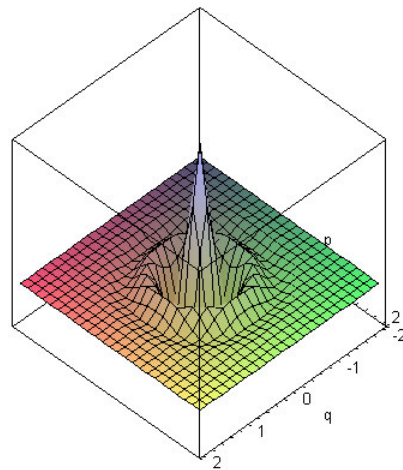


Figura 14: Função de Wigner para o oscilador harmônico, ordem 3

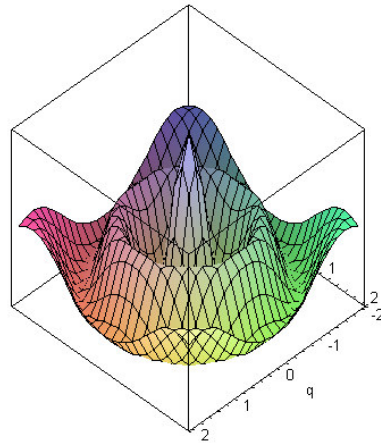


Figura 15: Amplitude para o oscilador harmônico, ordem 4

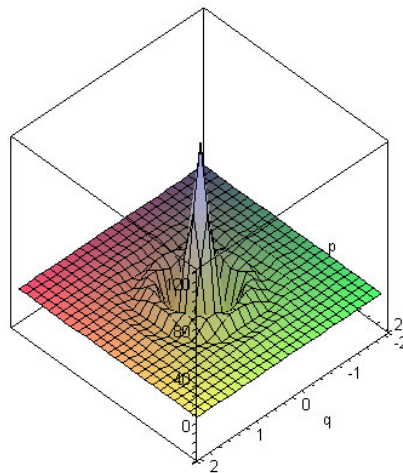


Figura 16: Função de Wigner para o oscilador harmônico, ordem 4

### 4.2.3 Potencial de Liouville

Nosso objetivo aqui é resolver o problema do potencial de Liouville no espaço de fase, ou melhor, solucionar a equação de autovalores para este potencial, buscando soluções reais. O potencial de Liouville possui a seguinte forma  $V(q) = e^{2q}$ ; neste caso teremos  $h(q, p) = p^2 + e^{2q}$ , onde tomamos  $m = \frac{1}{2}$  e  $\hbar = 1$ . A equação de autovalores a ser resolvida é,

$$h(q, p) \star \psi(q, p) = (p^2 + e^{2q}) \star \psi(q, p) = E\psi(q, p). \quad (4.50)$$

Utilizando as propriedades do produto estrela ficamos com

$$\left[\frac{1}{2}p^2 - \frac{i}{4}p\partial_q - \frac{1}{8}\partial_q^2 + e^{2q}e^{i\partial_p}\right]\psi(q, p) = E\psi(q, p). \quad (4.51)$$

Usando a identidade  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  temos

$$\left[\frac{1}{2}p^2 - \frac{i}{4}p\partial_q - \frac{1}{8}\partial_q^2 + e^{2q} \cos \partial_p + ie^{2q} \sin \partial_p\right]\psi(q, p) = E\psi(q, p). \quad (4.52)$$

Separando agora a parte real da parte imaginária, temos para a parte real,

$$\frac{1}{2}p^2\psi(q, p) - \frac{1}{8}\partial_q^2\psi(q, p) + e^{2q} \cos \partial_p\psi(q, p) - E\psi(q, p) = 0, \quad (4.53)$$

e para a parte imaginária,

$$-\frac{1}{4}p\partial_q\psi(q, p) + e^{2q} \sin \partial_p\psi(q, p) = 0. \quad (4.54)$$

Utilizando agora as identidades  $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  e  $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ , e também o fato que  $e^{a\partial_x} f(x) = f(x + a)$ , ficamos com a seguinte expressão para a parte imaginária,

$$\frac{1}{4}p\partial_q\psi(q, p) = \frac{1}{2i}e^{2q}[\psi(q, p + i) - \psi(q, p - i)], \quad (4.55)$$

e para a parte real,

$$e^{-2q}(p^2 - E - \frac{1}{4}\partial_q^2)\psi(q, p) = \frac{-1}{2}[\psi(q, p + i) + \psi(q, p - i)]. \quad (4.56)$$

Derivando a equação (4.55) com relação a  $q$ , ficamos com

$$\partial_q^2 \psi(q, p) = \partial_q \left\{ \frac{1}{2ip} e^{2q} [\psi(q, p+i) - \psi(q, p-i)] \right\}, \quad (4.57)$$

e

$$\partial_q^2 \psi(q, p) = \frac{1}{ip} e^{2q} [\psi(q, p+i) - \psi(q, p-i)] + \frac{1}{2ip} e^{2q} [\partial_q \psi(q, p+i) - \partial_q \psi(q, p-i)]. \quad (4.58)$$

Recorrendo novamente a equação (4.55) para substituir no último colchete da equação (4.58), temos

$$\begin{aligned} \partial_q^2 \psi(q, p) = & \frac{1}{ip} e^{2q} [\psi(q, p+i) - \psi(q, p-i)] \\ & - \frac{1}{4p^2} e^{4q} [\psi(q, p+2i) - 2\psi(q, p) + \psi(q, p-2i)]; \end{aligned}$$

e utilizando a equação (4.56) finalmente chegamos a

$$\begin{aligned} 0 = (p^2 - E)\psi(q, p) & + \left(\frac{e^{2q}}{4p}\right)^2 [\psi(q, p+2i) - 2\psi(q, p) + \psi(q, p-2i)] + \frac{i}{4p} e^{2q} [\psi(q, p+i) \\ & - \psi(q, p-i)] + \frac{e^{2q}}{2} [\psi(q, p+i) + \psi(q, p-i)]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Esta é uma equação de diferenças, cuja solução aparece na literatura [4] sob a seguinte forma,

$$\psi(q, p) = \frac{\sinh(\pi\sqrt{E})}{8\pi^3} G_{04}^{40} \left( \frac{e^{4q}}{16} \mid \frac{i\sqrt{E} - ip}{2}, \frac{-i\sqrt{E} - ip}{2}, \frac{i\sqrt{E} + ip}{2}, \frac{-i\sqrt{E} + ip}{2} \right), \quad (4.60)$$

onde a função  $G_{pq}^{mn}$  é conhecida como função de Meijer, definida por [13, 14]

$$G_{pq}^{mn} = \left( x \mid \begin{array}{c} a_1, \dots, a_q \\ b_1, \dots, b_p \end{array} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)}. \quad (4.61)$$

Nosso objetivo agora é mostrar que a solução dada em termos da função de Meijer, equação (4.60), realmente satisfaz a equação (4.59). Para isso, antes escreveremos a equação (4.59) da seguinte forma,

$$0 = (p^2 - E)\psi(q, p) + \frac{1}{p^2} \left(\frac{e^{4q}}{16}\right) [\psi(q, p+2i) - 2\psi(q, p) + \psi(q, p-2i)] + \frac{i}{p} \left(\frac{e^{4q}}{16}\right)^{\frac{1}{2}} [\psi(q, p+i) -$$

$$- \psi(q, p - i)] + 2\left(\frac{e^{4q}}{16}\right)^{\frac{1}{2}}[\psi(q, p + i) + \psi(q, p - i)]. \quad (4.62)$$

Para simplificar a notação e facilitar os cálculos, definiremos as seguintes variáveis

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(\pi\sqrt{E})}{8\pi^3} &= K, \\ \frac{i\sqrt{E} - ip}{2} &= a, \\ \frac{-i\sqrt{E} - ip}{2} &= b, \\ \frac{i\sqrt{E} + ip}{2} &= c, \\ \frac{-i\sqrt{E} + ip}{2} &= d, \\ \frac{e^{4q}}{16} &= x. \end{aligned}$$

Assim, a solução torna-se

$$\psi(q, p) = KG_{04}^{40}(x \mid a, b, c, d). \quad (4.63)$$

Agora, explicitaremos as correspondentes funções da equação de diferenças, tomadas em pontos adjacentes,

$$\begin{aligned} \psi(q, p + 2i) &= KG_{04}^{40}(x \mid a + 1, b + 1, c - 1, d - 1), \\ \psi(q, p - 2i) &= KG_{04}^{40}(x \mid a - 1, b - 1, c + 1, d + 1), \\ \psi(q, p + i) &= KG_{04}^{40}(x \mid a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}, c - \frac{1}{2}, d - \frac{1}{2}), \\ \psi(q, p - i) &= KG_{04}^{40}(x \mid a - \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2}, d + \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Desse modo a equação (4.59) fica escrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned} 0 &= (p^2 - E)G_{04}^{40}(x \mid a, b, c, d) + (x)^2[G_{04}^{40}(x \mid a + 1, b + 1, c - 1, d - 1) - \\ &- 2G_{04}^{40}(x \mid a, b, c, d) + G_{04}^{40}(x \mid a - 1, b - 1, c + 1, d + 1)] + \\ &+ \frac{i}{p}(x)^{\frac{1}{2}}[G_{04}^{40}(x \mid a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}, c - \frac{1}{2}, d - \frac{1}{2}) - G_{04}^{40}(x \mid a - \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2}, d + \frac{1}{2})] + \\ &+ 2(x)^{\frac{1}{2}}[G_{04}^{40}(x \mid a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}, c - \frac{1}{2}, d - \frac{1}{2}) + \end{aligned}$$

$$+ G_{04}^{40}(x \mid a - \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2}, d + \frac{1}{2})]. \quad (4.64)$$

Utilizando a propriedade da função de Meijer dada por

$$x^\sigma G_{pq}^{mn} \left( x \mid \begin{matrix} a_r \\ b_s \end{matrix} \right) = G_{pq}^{mn} \left( x \mid \begin{matrix} a_r + \sigma \\ b_s + \sigma \end{matrix} \right),$$

a equação (4.59) fica da seguinte forma,

$$\begin{aligned} 0 = (p^2 - E)G_{04}^{40}(x \mid a, b, c, d) &+ [G_{04}^{40}(x \mid a + 2, b + 2, c, d) - 2G_{04}^{40}(x \mid a + 1, b + 1, c + 1, d + 1) + \\ &+ G_{04}^{40}(x \mid a, b, c + 2, d + 2)] + \frac{i}{p}[G_{04}^{40}(x \mid a + 1, b + 1, c, d) - \\ &- G_{04}^{40}(x \mid a, b, c + 1, d + 1)] + 2[G_{04}^{40}(x \mid a + 1, b + 1, c, d) + \\ &+ G_{04}^{40}(x \mid a, b, c + 1, d + 1)]. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Usando agora uma outra propriedade da função de Meijer, dada por [13, 14]

$$(1 - a_1 + b_1)G_{pq}^{mn} \left( x \mid \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right) = G_{pq}^{mn} \left( x \mid \begin{matrix} a_1 - 1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right) + G_{pq}^{mn} \left( x \mid \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1 + 1, \dots, b_q \end{matrix} \right),$$

temos que

$$\begin{aligned} G_{04}^{40}(x \mid a + 2, b + 2, c, d) &= a^2 b^2 G_{04}^{40}(x \mid a, b, c, d), \\ G_{04}^{40}(x \mid a, b, c + 2, d + 2) &= c^2 d^2 G_{04}^{40}(x \mid a, b, c, d), \\ G_{04}^{40}(x \mid a + 1, b + 1, c + 1, d + 1) &= abcd G_{04}^{40}(x \mid a, b, c, d), \\ G_{04}^{40}(x \mid a + 1, b + 1, c, d) &= ab G_{04}^{40}(x \mid a, b, c, d), \\ G_{04}^{40}(x \mid a, b, c + 1, d + 1) &= cd G_{04}^{40}(x \mid a, b, c, d). \end{aligned}$$

Como  $a^2 b^2 = c^2 d^2 = abcd$  e  $ab = cd = \frac{-1}{4}(-E + p^2)$ , fica claro que o segundo e o terceiro colchetes da equação de diferenças são identicamente nulos. Assim

$$\begin{aligned} 0 = (p^2 - E)G_{04}^{40}(x \mid a, b, c, d) &+ 2\left[\frac{-1}{4}(-E + p^2)G_{04}^{40}(x \mid a, b, c, d) + \right. \\ &\left. + \frac{-1}{4}(-E + p^2)G_{04}^{40}(x \mid a, b, c, d)\right], \end{aligned} \quad (4.66)$$

mostrando que a solução da equação de diferenças é realmente da forma dada na equação (4.60).

Neste caso a solução para o potencial de Liouville, em termos amplitude no espaço de fase é dada na equação (4.60) e a respectiva função de Wigner é dada por

$$f_w(q, p) = \psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p). \quad (4.67)$$

Os comportamentos da amplitude e da respectiva função de Wigner podem ser comparados por meio dos gráficos dados na figuras (17-24).

No próximo capítulo faremos uma generalização do formalismo construído até aqui, discutindo alguns aspectos da teoria de campos relativísticos no espaço de fase.

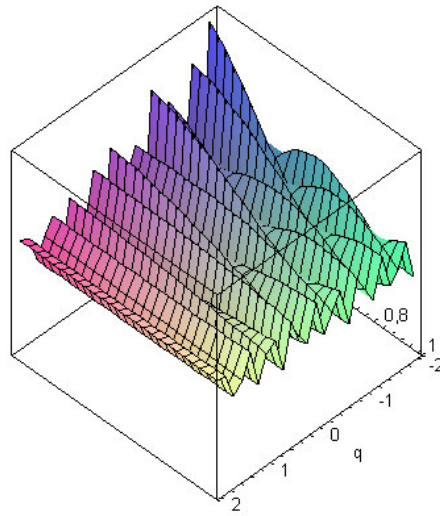


Figura 17: Amplitude para o potencial de Liouville,  $E=49$

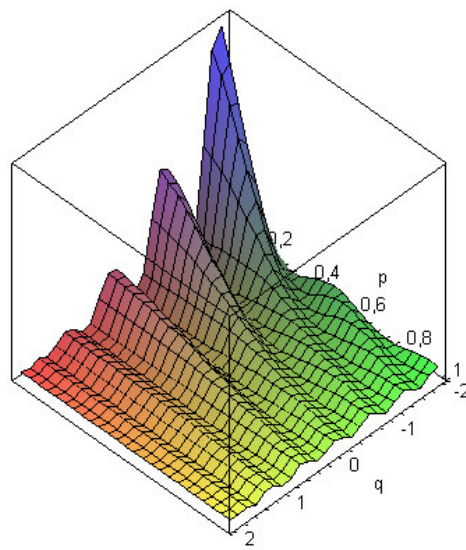


Figura 18: Função de Wigner para o potencial de Liouville,  $E=49$



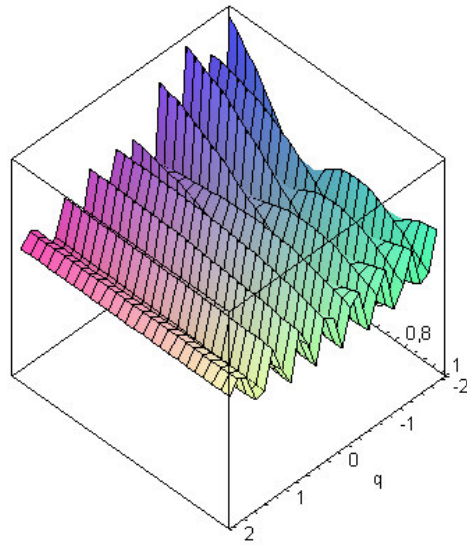


Figura 19: Amplitude para o potencial de Liouville,  $E=64$

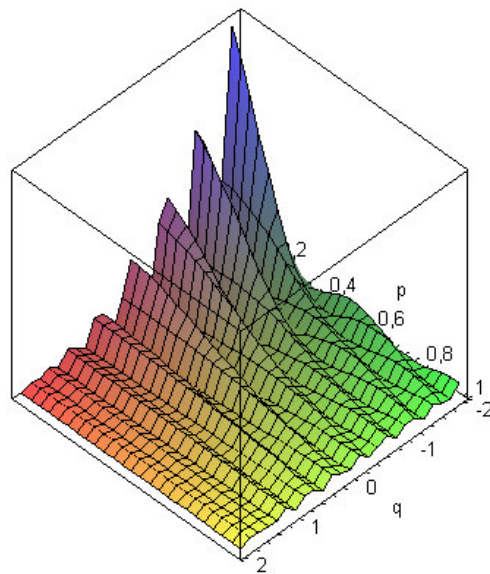


Figura 20: Função de Wigner para o potencial de Liouville,  $E=64$

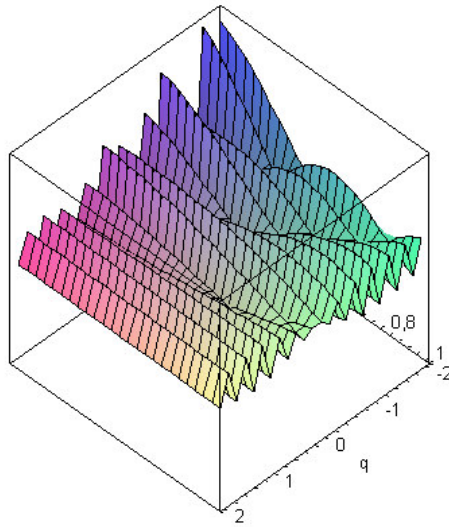


Figura 21: Amplitude para o potencial de Liouville,  $E=121$

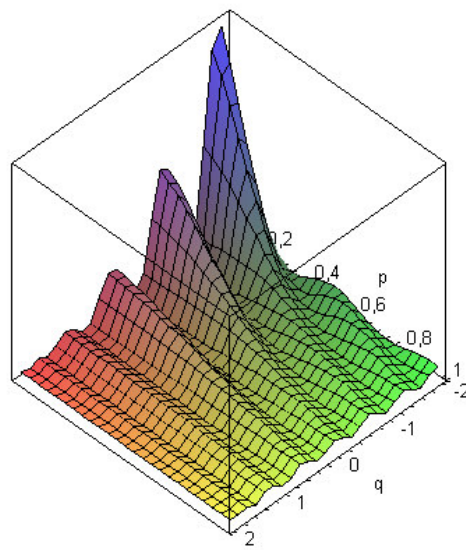


Figura 22: Função de Wigner para o potencial de Liouville,  $E=121$

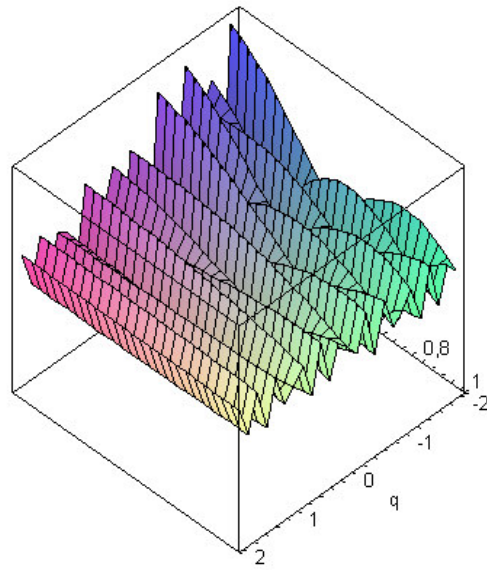


Figura 23: Amplitude para o potencial de Liouville,  $E=144$

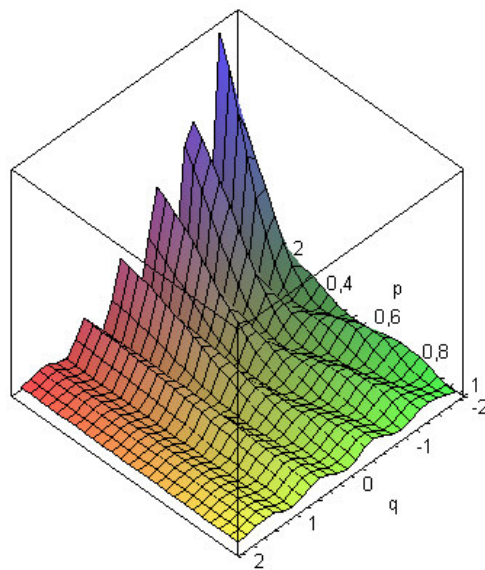


Figura 24: Função de Wigner para o potencial de Liouville,  $E=144$

## 5 *Grupo de Poincaré e campos relativísticos no espaço de fase*

Ao construir a mecânica quântica no espaço de fase, definimos os operadores-estrela e mostramos que eles satisfazem a álgebra do grupo de Galilei. Neste capítulo definiremos um conjunto de operadores-estrela para construir uma representação da álgebra de Lie do grupo de Poincaré, e conseqüentemente obter uma representação para os campos relativísticos no espaço de fase.

### 5.1 Estrutura simplética e espaço de Hilbert

Considere um espaço de fase  $2N$ -dimensional como uma variedade  $\Gamma$  definida por meio da 2-forma,

$$\omega = dq^\mu \wedge dp_\mu, \quad (5.1)$$

chamada forma simplética. Esta forma simplética, em conjunto com o operador

$$\Lambda = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q^\mu} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_\mu} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p^\mu} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_\mu}, \quad (5.2)$$

induz o parentesis de Poisson,

$$\{f, g\} = \omega(f\Lambda, g\Lambda) = f\Lambda g, \quad (5.3)$$

onde

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \frac{\partial g}{\partial q_\mu}. \quad (5.4)$$

e ( $f = f(q^\mu, p^\mu)$  e  $g = g(q^\mu, p^\mu)$ ). Estamos usando  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , e a métrica dada por  $-g^{00} = g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$  e  $g^{\mu\nu} = 0$  ( $\mu \neq \nu$ ). Os campos vetoriais sobre  $\Gamma$  são dados por

$$X_f = f\Lambda = \frac{\partial f}{\partial q^\mu} \frac{\partial}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f}{\partial p^\mu} \frac{\partial}{\partial q_\mu}, \quad (5.5)$$

e o espaço das funções  $f(q^\mu, p^\mu)$   $C^\infty$  é chamado de espaço de fase relativístico, e será denotado por  $\Gamma$ .

Iremos introduzir um espaço de Hilbert associado ao espaço de fase  $\Gamma$  relativístico, considerando o conjunto de funções complexas de quadrado integrável,  $\psi(q, p)$  em  $\Gamma$ , tal que

$$\int d^4p d^4q \psi^\dagger(q, p) \psi(q, p) < \infty, \quad (5.6)$$

é uma forma bilinear real. Neste caso, podemos escrever  $\psi(q, p) = \langle q, p | \psi \rangle$ , com

$$\int d^4p d^4q |q, p\rangle \langle q, p| = 1, \quad (5.7)$$

tal que

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int d^4p d^4q \psi^\dagger(q, p) \phi(q, p), \quad (5.8)$$

sendo  $\langle \psi |$  um vetor dual de  $|\psi\rangle$ . Vamos denominar este espaço de Hilbert por  $H(\Gamma)$ . Na sequência vamos deduzir uma representação do grupo de Poincaré a partir de  $H(\Gamma)$ .

## 5.2 A álgebra de Lie do grupo de Poincaré

A álgebra de Lie do grupo de Poincaré é dada por

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{P}_\sigma] = i(g_{\nu\sigma} \widehat{P}_\mu - g_{\sigma\mu} \widehat{P}_\nu), \quad (5.9)$$

$$[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\nu] = 0, \quad (5.10)$$

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\sigma\rho}] = -i(g_{\mu\rho} \widehat{M}_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} \widehat{M}_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} \widehat{M}_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma} \widehat{M}_{\rho\mu}), \quad (5.11)$$

onde  $\widehat{M}_{\mu\nu}$  são geradores de rotações e  $\widehat{P}_\mu$  de translações.

Os invariantes de Cassimir da álgebra de Poincaré são dados por  $C_1 = P^2 = \widehat{P}_\mu \widehat{P}^\mu = m^2$  e  $C_2 = \widehat{W}_\mu \widehat{W}^\mu = -m^2 s(s+1)$ , onde  $\widehat{W}_\mu$  é o pseudovetor de Pauli-Lubanski,

$\widehat{W}_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\widehat{M}^{\nu\rho}\widehat{P}^\sigma$ . A massa corresponde ao primeiro invariante e o segundo invariante é referente ao spin da partícula.

As representações escalares para esta álgebra são construídas aqui pela definição,

$$\widehat{M}_{\nu\sigma} = \widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\sigma - \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\nu, \quad (5.12)$$

e ainda é válida a relação de comutação,

$$[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\nu] = ig_{\mu\nu}. \quad (5.13)$$

A representação simplética para a álgebra de Poincaré é obtida a partir dos operadores dados por,

$$\widehat{P}^\mu = p^\mu_\star = p^\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_\mu}, \quad (5.14)$$

$$\widehat{Q}^\mu = q^\mu_\star = q^\mu + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_\mu}, \quad (5.15)$$

definidos no espaço de Hilbert  $H(\Gamma)$ .

Nossa tarefa agora é mostrar que os operadores-estrela definidos pelas equações (5.12)-(5.15) satisfazem a álgebra de Lie de Poincaré. Procedendo assim, teremos os fundamentos da construção da teoria dos campos relativísticos no espaço de fase.

- Equação (5.13)

Iniciaremos as demonstrações pela relação de comutação

$$[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\nu] = ig_{\mu\nu},$$

que será útil nas demonstrações das demais relações de comutação.

### Demonstração

$$[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\nu] = \widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\nu - \widehat{P}_\nu\widehat{Q}_\mu.$$

Aplicando o comutador em uma função  $f(q, p) \equiv f$  e utilizando as equações (5.14)-(5.15),

temos

$$\begin{aligned} [\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\nu]f &= (q^\mu + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p_\mu})(p^\nu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q_\nu})f - ((p^\nu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q_\nu})(q^\mu + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial p_\mu})f \\ &= q^\mu p^\nu - \frac{i q^\mu}{2} \frac{\partial f}{\partial q_\nu} + \frac{i}{2} \frac{\partial(p^\nu f)}{\partial p_\mu} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial p_\mu \partial q_\nu} - p^\nu q^\mu - \frac{i p^\nu}{2} \frac{\partial f}{\partial p_\mu} + \frac{i}{2} \frac{\partial(q^\mu f)}{\partial q_\nu} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial q_\nu \partial p_\mu}. \end{aligned}$$

Usando o fato da função  $f$  ser contínua e diferenciável, e ainda utilizando a métrica para subir e descer índices, ficamos com

$$[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\nu]f = [q^\mu, p^\nu]f + \frac{i}{2} f g^{\rho\mu} \frac{\partial q_\rho}{\partial q_\nu} + \frac{i}{2} f g^{\rho\nu} \frac{\partial p_\rho}{\partial p_\mu}.$$

Como  $[q^\mu, p^\nu] = 0$ , nos resta o seguinte

$$[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\nu]f = \frac{i}{2} f g^{\rho\nu} \delta_\rho^\mu + \frac{i}{2} f g^{\rho\mu} \delta_\rho^\nu = i f g^{\mu\nu}.$$

Ou seja,

$$[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\nu] = i g_{\mu\nu},$$

como queríamos demonstrar.

- Equação (5.10)

$$[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\nu] = 0.$$

### Demonstração

Substituindo na equação (5.10) o operador dado na equação (5.15), e aplicando o comutador numa função  $f \equiv f(q, p)$  suposta contínua e diferenciável, temos

$$[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\nu]f = (p^\mu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q_\mu})(p^\nu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q_\nu})f - (p^\nu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q_\nu})(p^\mu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q_\mu})f.$$

Desenvolvendo essa expressão, chegamos a

$$[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\nu]f = (p_\mu p_\nu)f - \frac{i}{2} \frac{\partial(p^\mu f)}{\partial q_\nu} + \frac{i}{2} \frac{\partial(p^\mu f)}{\partial q_\nu} - \frac{i}{2} \frac{\partial(p^\nu f)}{\partial q_\mu} + \frac{i}{2} \frac{\partial(p^\nu f)}{\partial q_\mu} - \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial q_\nu \partial q_\mu} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial q_\mu \partial q_\nu}.$$

Como sabemos que  $[p_\mu, p_\nu] = 0$ , então,

$$[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\nu] = 0,$$

como queríamos demonstrar.

- Equação (5.9)

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{P}_\sigma] = i(g_{\nu\sigma}\widehat{P}_\mu - g_{\sigma\mu}\widehat{P}_\nu).$$

### Demonstração

Para demonstrar essa relação de comutação, utilizaremos a equação (5.12) e a propriedade distributiva da comutação. Temos então,

$$\begin{aligned} [\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{P}_\sigma] &= [\widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\nu - \widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\sigma] \\ &= [\widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\nu, \widehat{P}_\sigma] - [\widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\sigma] \\ &= [\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\sigma]\widehat{P}_\nu + \widehat{Q}_\mu[\widehat{P}_\nu, \widehat{P}_\sigma] - [\widehat{Q}_\nu, \widehat{P}_\sigma]\widehat{P}_\mu - \widehat{Q}_\nu[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\sigma]. \end{aligned}$$

Utilizando as equações (5.11) e (5.14), ficamos com

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{P}_\sigma] = i(g_{\nu\sigma}P_\mu - g_{\sigma\mu}P_\nu),$$

como queríamos demonstrar.

- Equação (5.11)

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\sigma\rho}] = -i(g_{\mu\rho}\widehat{M}_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}\widehat{M}_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}\widehat{M}_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma}\widehat{M}_{\rho\mu}).$$

### Demonstração

Para demonstrar essa relação de comutação, utilizaremos a equação (5.12) e a propriedade distributiva da comutação. Usando  $\widehat{M}_{\nu\sigma} = \widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\sigma - \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\nu$ , temos então

$$\begin{aligned} [\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\sigma\rho}] &= [\widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\nu - \widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\mu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho - \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma] \\ &= [\widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\nu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho - \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma] - [\widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\mu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho - \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma] \\ &= [\widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\nu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho] - [\widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\nu, \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma] - [\widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\mu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho] + [\widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\mu, \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma]. \end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned} [\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\sigma\rho}] &= [\widehat{Q}_\mu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho]\widehat{P}_\nu + \widehat{Q}_\mu[\widehat{P}_\nu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{Q}_\rho] - [\widehat{Q}_\mu, \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma]\widehat{P}_\nu - \widehat{Q}_\mu[\widehat{P}_\nu, \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma] - \\ &[\widehat{Q}_\nu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho]\widehat{P}_\mu - \widehat{Q}_\nu[\widehat{P}_\mu, \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\rho] + [\widehat{Q}_\nu, \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma]\widehat{P}_\mu + \widehat{Q}_\nu[\widehat{P}_\mu, \widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\sigma]. \end{aligned}$$

Utilizando novamente a propriedade distributiva da comutação, obtemos

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\sigma\rho}] = \widehat{Q}_\sigma[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\rho]\widehat{Q}_\nu + [\widehat{Q}_\mu, \widehat{Q}_\sigma]\widehat{P}_\rho\widehat{P}_\nu + \widehat{Q}_\sigma\widehat{Q}_\mu[\widehat{P}_\nu, \widehat{P}_\rho]\widehat{Q}_\mu[\widehat{P}_\nu, \widehat{Q}_\sigma]\widehat{P}_\rho -$$



$$\begin{aligned} & \widehat{Q}_\rho[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\sigma]\widehat{P}_\nu - [\widehat{Q}_\mu, \widehat{Q}_\rho]\widehat{P}_\nu\widehat{P}_\sigma - \widehat{Q}_\rho\widehat{Q}_\mu[\widehat{P}_\nu, \widehat{P}_\sigma] - \widehat{Q}_\mu[\widehat{P}_\nu, \widehat{Q}_\rho]\widehat{P}_\sigma - \\ & \widehat{Q}_\sigma[\widehat{Q}_\nu, \widehat{P}_\rho]\widehat{P}_\mu - [\widehat{Q}_\nu, \widehat{Q}_\sigma]\widehat{P}_\rho\widehat{P}_\mu - \widehat{Q}_\nu\widehat{Q}_\sigma[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\rho] - \widehat{Q}_\nu[\widehat{P}_\mu, \widehat{Q}_\sigma]\widehat{P}_\rho + \\ & \widehat{Q}_\rho[\widehat{Q}_\nu, \widehat{P}_\sigma]\widehat{P}_\mu + [\widehat{Q}_\nu, \widehat{Q}_\rho]\widehat{P}_\sigma\widehat{P}_\mu + \widehat{Q}_\nu\widehat{Q}_\rho[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\sigma] + \widehat{Q}_\nu[\widehat{P}_\mu, \widehat{Q}_\rho]\widehat{P}_\sigma. \end{aligned}$$

utilizando as relações  $[\widehat{P}_\mu, \widehat{P}_\nu] = 0$ ,  $[\widehat{Q}_\mu, \widehat{Q}_\nu] = 0$  e  $[\widehat{Q}_\mu, \widehat{P}_\nu] = ig_{\mu\nu}$ , temos

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\sigma\rho}] = ig_{\mu\rho}(\widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\sigma - \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\nu) - ig_{\nu\rho}(\widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\sigma - \widehat{Q}_\sigma\widehat{P}_\mu) + ig_{\mu\sigma}(\widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\nu - \widehat{Q}_\nu\widehat{P}_\rho) - ig_{\nu\sigma}(\widehat{Q}_\rho\widehat{P}_\mu - \widehat{Q}_\mu\widehat{P}_\rho).$$

O que finalmente nos fornece

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{M}_{\sigma\rho}] = -i(g_{\mu\rho}\widehat{M}_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}\widehat{M}_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}\widehat{M}_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma}\widehat{M}_{\rho\mu}),$$

como queríamos demonstrar.

Tendo demonstrado as relações de comutação que definem a álgebra de Lie do grupo de Poincaré, podemos mostrar que  $P^2 = \widehat{P}_\mu\widehat{P}^\mu$  é um invariante dessa álgebra. Se  $P^2$  é um invariante, logo ele deve comutar com os geradores da álgebra. Obviamente  $P^2$  comuta com  $\widehat{P}_\mu$ , resta-nos mostrar que ele também comuta com  $\widehat{M}_{\mu\nu}$ . Neste caso, utilizando a propriedade distributiva da comutação, temos

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, P^2] = \widehat{P}_\sigma[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{P}^\sigma] + [\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{P}_\sigma]\widehat{P}^\sigma.$$

Se fizermos uso da métrica para descer alguns índices, obtemos

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, P^2] = g^{\rho\sigma}\widehat{P}_\rho[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{P}_\sigma] + g^{\rho\sigma}[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{P}_\rho]\widehat{P}_\sigma.$$

Utilizando a equação (5.10), ficamos com

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, P^2] = g^{\rho\sigma}\widehat{P}_\rho i(g_{\nu\sigma}\widehat{P}_\mu - g_{\sigma\mu}\widehat{P}_\nu) + g^{\rho\sigma}i(g_{\nu\rho}\widehat{P}_\mu - g_{\sigma\mu}\widehat{P}_\nu)\widehat{P}_\sigma.$$

Distribuindo os produtos e observando que  $g^{\rho\sigma}g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\rho$ , chegamos a

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, P^2] = i\delta_\nu^\rho\widehat{P}_\rho\widehat{P}_\mu - i\delta_\mu^\rho\widehat{P}_\rho\widehat{P}_\nu + i\delta_\nu^\sigma\widehat{P}_\mu\widehat{P}_\sigma - i\delta_\mu^\sigma\widehat{P}_\nu\widehat{P}_\sigma.$$

Após manipularmos com as deltas (efetuarmos as somas) ficamos com

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, P^2] = i\widehat{P}_\nu\widehat{P}_\mu - i\widehat{P}_\mu\widehat{P}_\nu + i\widehat{P}_\mu\widehat{P}_\nu - i\widehat{P}_\nu\widehat{P}_\mu.$$

E finalmente encontramos

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, P^2] = 0.$$

Assim, fica claro, que os operadores-estrela definidos aqui determinam uma representação do grupo de Poincaré. Nas próximas seções faremos uso desta álgebra para escrever as equações de movimento para campos relativísticos.

### 5.3 A Equação de Klein-Gordon no Espaço de Fase

Estamos em condições de escrever uma equação de onda para uma partícula escalar, que possui apenas uma componente que denotaremos por  $\psi$ . A equação de onda é obtida a partir do primeiro invariante desta álgebra, que é relacionado com a camada de massa<sup>1</sup>. Assim, podemos escrever

$$\widehat{P}^2\psi = \widehat{P}^\mu\widehat{P}_\mu\psi = m^2\psi. \quad (5.16)$$

Substituindo na equação (5.16) o operador dado na equação (5.15), obtemos

$$(p^\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_\mu})(p_\mu - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q^\mu})\psi = m^2\psi. \quad (5.17)$$

O que nos fornece

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial^2\psi}{\partial q^\mu\partial q_\mu} - ip^\mu\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu} + (p^\mu p_\mu - m^2)\psi = 0, \quad (5.18)$$

que é a equação de Klein-Gordon no espaço de fase. Essa equação possui uma solução de partícula livre dada por

$$\psi(q_\mu, p_\mu) = \xi(p_\mu)e^{-i4p^\mu q_\mu}, \quad (5.19)$$

onde  $\xi(p_\mu)$  é uma função que depende das condições de contorno.

A equação de Klein-Gordon, equação (5.18), pode ser deduzida a partir da densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{4}\frac{\partial\psi}{\partial q_\mu}\frac{\partial\psi^*}{\partial q^\mu} + \frac{1}{2}ip^\mu(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial q^\mu}) - (p^\mu p_\mu - m^2)\psi\psi^*, \quad (5.20)$$

onde se utilizarmos as equações de Euler-Lagrange para campos, obtemos a equação esperada.

Podemos fazer a associação do estado  $\psi(q, p)$  com a função de Wigner  $f_w(q, p)$ .

---

<sup>1</sup>É importante lembrar que  $\psi = \psi(q, p)$

Mostraremos que a função definida por

$$f_w(q, p) = \psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p) \quad (5.21)$$

é a função de Wigner. Começaremos nossa demonstração escrevendo a equação de Klein-Gordon no espaço de fase como

$$p^2 \star \psi(q, p) = m^2 \psi(q, p). \quad (5.22)$$

Multiplicando a equação (5.22) a direita por  $\psi^\dagger$ , obtemos

$$(p^2 \star \psi(q, p)) \star \psi^\dagger(q, p) = m^2 \psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p). \quad (5.23)$$

Tomando o complexo conjugado da equação (5.22) e multiplicando a esquerda por  $\psi$ , chegamos a

$$\psi(q, p) \star (\psi^\dagger(q, p) \star p^2) = m^2 \psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p). \quad (5.24)$$

Subtraindo as equações (5.23) e (5.24) e utilizando a propriedade associativa do produto estrela, temos

$$p^2 \star f_w - f_w \star p^2 = 0,$$

onde a notação  $f_w(q, p) = \psi(q, p) \star \psi^\dagger(q, p)$  foi usada.

Se utilizarmos os parênteses de Moyal e o fato que  $\{g, f\}_M = g(2\text{sen}\frac{i\Lambda}{2})f$ , podemos escrever a equação (5.24) como

$$\{p^2, f_w\}_M = p_\mu \frac{\partial f_w}{\partial q_\mu} = 0, \quad (5.25)$$

onde usamos  $p^2 \Lambda = -2p\partial_q$ ,  $p^2 \Lambda^2 = 2\partial_q^2$  e  $p^2 \Lambda^3 = 0$ . A solução para a equação (5.25) é a função de Wigner relativística.

## 5.4 Equação de Dirac no Espaço de Fase

Iremos considerar uma representação para partículas de spin  $\frac{1}{2}$ . Para isso introduzimos o operador  $\gamma^\mu \hat{P}_\mu$  onde  $\hat{P}_\mu$  é definido na equação (5.15). Escrevemos então

$$\gamma^\mu \hat{P}_\mu \psi = \gamma^\mu p_\mu \star \psi = m\psi. \quad (5.26)$$

Utilizando a equação (5.15) chegamos a

$$\gamma^\mu \left( p_\mu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right) \psi = m\psi, \quad (5.27)$$

que é a equação de Dirac no espaço de fase.

Sabemos que as soluções da equação de Dirac devem ser também soluções da equação de Klein-Gordon. Iremos então aplicar um operador na equação de Dirac, de modo a torná-la uma equação de segunda ordem. Neste caso, temos

$$(\gamma^\mu \hat{P}_\mu)(\gamma^\nu \hat{P}_\nu)\psi = m^2\psi. \quad (5.28)$$

Se utilizarmos a equação (5.15), chegamos a

$$\gamma^\mu \left( p_\mu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right) \gamma^\nu \left( p_\nu - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q^\nu} \right) \psi = m^2\psi. \quad (5.29)$$

E ainda, temos que

$$(\gamma^\mu \hat{P}_\mu)(\gamma^\nu \hat{P}_\nu) = \hat{P}_\mu \hat{P}_\nu = P^2, \quad (5.30)$$

$$(\gamma^\mu \hat{P}_\mu)(\gamma^\nu \hat{P}_\nu) = \gamma^\mu \gamma^\nu \hat{P}_\mu \hat{P}_\nu. \quad (5.31)$$

Observe que  $\gamma^\mu \gamma^\nu$  pode ser escrito como a soma de uma parte simétrica e uma parte antissimétrica. Assim,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \hat{P}_\mu \hat{P}_\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \hat{P}_\mu \hat{P}_\nu. \quad (5.32)$$

E para que a equação de Klein-Gordon seja satisfeita, devemos ter

$$(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = 2g^{\mu\nu}, \quad (5.33)$$

que é a relação satisfeita pelos geradores da álgebra de Clifford.

A equação de Dirac, equação (5.27), pode ser deduzida a partir da densidade lagrangiana para este campo, que é escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{-i}{4} [(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi - \bar{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu \psi)] - (m - \gamma^\mu p_\mu). \quad (5.34)$$

## 5.5 Teorema de Noether e grandezas conservadas

O objetivo agora é demonstrar o teorema de Noether em uma versão para o espaço de fase relativístico. O enunciado do teorema de Noether aqui é o seguinte: "A todo grupo de transformações contínuas de  $\psi$  que mudam  $\mathcal{L}$  no máximo por uma divergência, existe

associada uma corrente conservada. "O divergente no espaço de fase relativístico é definido por

$$D_\mu S^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) S^\mu.$$

A demonstração esboçada aqui está baseada na referência [43]

### Demonstração

Considere uma transformação infinitesimal  $\psi(q, p) \rightarrow \psi'(q, p) = \psi(q, p) + \delta\psi(q, p)$  tal que  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}$  em que  $\delta\mathcal{L} = \left( \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) S^\mu$ .

Agora,

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu}\right)}\frac{\partial\delta\psi}{\partial q^\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial p^\mu}\right)}\frac{\partial\delta\psi}{\partial p^\mu}.$$

Utilizando a equação de movimento para  $\psi$  (equações de Euler-Lagrange) dada por

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu}\right)} - \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial p^\mu}\right)} = 0,$$

temos,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \left( \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu}\right)} \delta\psi + \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial p^\mu}\right)} \delta\psi \right) + \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu}\right)} \frac{\partial\delta\psi}{\partial q^\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial p^\mu}\right)} \frac{\partial\delta\psi}{\partial p^\mu} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q^\mu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu}\right)} \delta\psi \right) + \frac{\partial}{\partial p^\mu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial p^\mu}\right)} \delta\psi \right). \end{aligned}$$

Assim, chegamos a

$$\left( \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) j^\mu = 0.$$

E a corrente conservada é então,

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial q^\mu}\right)} \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial p^\mu}\right)} \delta\psi - S^\mu. \quad (5.35)$$

Como queríamos demonstrar.

Agora utilizaremos o teorema de Noether para estudar alguns casos de transformações do espaço-tempo.

### (a) Translações no espaço-tempo

$$q^\mu \rightarrow q'^\mu = q^\mu + \varepsilon^\mu,$$

$$p^\mu \rightarrow p'^\mu = p^\mu + \lambda^\mu.$$

Para simplificar a notação, definiremos a coordenada simplética  $\eta^\mu = (q^\mu, p^\mu)$ , como também  $\epsilon^\mu = (\varepsilon^\mu, \lambda^\mu)$ .

Temos,

$$\psi(q, p) = \psi'(q', p'),$$

ou

$$\psi(\eta) = \psi'(\eta').$$

Ou seja,  $\psi'(\eta) = \psi(\eta - \epsilon)$  tal que

$$\delta\psi(\eta) = \psi'(\eta) - \psi(\eta).$$

Fazendo uma expansão em Taylor até primeira ordem, temos

$$\psi(q - \varepsilon, p - \lambda) = \psi(q, p) - \varepsilon_\nu \frac{\partial\psi(q, p)}{\partial q^\nu} - \lambda_\nu \frac{\partial\psi(q, p)}{\partial p^\nu},$$

ou

$$\psi(\eta - \epsilon) = \psi(\eta) - \epsilon_\nu \frac{\partial\psi(\eta)}{\partial \eta^\nu}.$$

Assim, obtemos

$$\delta\psi(\eta) = -\epsilon_\nu \frac{\partial\psi(\eta)}{\partial \eta^\nu},$$

e

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}\left(\psi + \delta\psi, \frac{\partial\psi}{\partial\eta^\nu} + \frac{\partial\delta\psi}{\partial\eta^\nu}\right) - \mathcal{L}\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial\eta^\nu}\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\psi', \frac{\partial\psi'}{\partial\eta^\nu}\right) - \mathcal{L}\left(\psi, \frac{\partial\psi}{\partial\eta^\nu}\right) \\ &= \mathcal{L}(\eta - \epsilon) - \mathcal{L}(q, p) = -\epsilon_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^\mu}. \end{aligned}$$

Substituindo  $\delta\psi(\eta) = -\epsilon_\nu \frac{\partial\psi(\eta)}{\partial\eta^\nu}$  na equação (5.34) temos,

$$j^\mu = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta^\mu} \right)} \right) \left( -\epsilon_\nu \frac{\partial \psi}{\partial \eta^\nu} \right) + \epsilon^\mu \mathcal{L}.$$

Ou, mais explicitamente

$$j^\mu = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial q^\mu} \right)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial p^\mu} \right)} \right) \left( -\epsilon_\nu \frac{\partial \psi}{\partial q^\nu} - \lambda^\nu \frac{\partial \psi}{\partial p^\nu} \right) + \epsilon^\mu \mathcal{L}.$$

Lembrando que  $\epsilon$  é arbitrário obtemos a conservação do tensor energia-momentum canônico,

$$\left( \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \theta^{\mu\nu} = 0.$$

Onde o tensor energia-momentum canônico é dado por,

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta^\mu} \right)} \frac{\partial \psi}{\partial \eta^\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (5.36)$$

Com a finalidade de exemplificar, tomaremos o caso das translações somente na coordenada associada a posição, ou seja,  $\lambda = 0$ .

### Exemplo 5.1 Campo de Klein-Gordon

Utilizando a densidade de lagrangiana dada na equação (5.20), e substituindo na equação (5.36), temos

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{-1}{4} \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial q_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial q_\nu} + \frac{\partial \psi}{\partial q_\mu} \frac{\partial \psi^*}{\partial q_\nu} \right) + \frac{1}{2} i p^\mu \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial q_\nu} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial q_\nu} \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (5.37)$$

### Exemplo 5.2 Campo de Dirac

Partindo da densidade de lagrangiana para o campo de Dirac, dada na equação (5.34) e substituindo na equação (5.36), obtemos

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{-i}{4} \left( -\bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial q_\nu} + \gamma^\mu \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial q_\nu} \right) - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (5.38)$$

Nesses dois exemplos, um 4-vetor constante no tempo é definido por

$$P^\nu = \int \theta^{0\nu} d^3 q d^3 p, \quad (5.39)$$

onde a integração não é realizada em  $q^0$  e  $p^0$ .

### (c) Rotações no espaço-tempo (Grupo das Rotações)

Considere

$$\delta q^\mu = \epsilon^{\mu\nu} q_\nu,$$

$$\delta p^\mu = \lambda^{\mu\nu} p_\nu,$$

$$\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu},$$

$$\lambda^{\mu\nu} = -\lambda^{\nu\mu},$$

$$q^\nu \rightarrow q^\nu + \epsilon^{\mu\nu} q_\nu,$$

$$p^\nu \rightarrow p^\nu + \lambda^{\mu\nu} p_\nu.$$

Para simplificar, utilizando a notação  $\eta^\mu = (q^\mu, p^\mu)$ , temos

$$\delta\eta^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} \eta_\nu.$$

Assim, o campo  $\psi(\eta)$  se transforma de acordo com alguma representação do grupo, isto é,

$$\psi(\eta) \rightarrow \psi'(\eta) = D(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}\eta) = D(\Lambda)\psi(\eta^\mu - \varepsilon^{\mu\nu}\eta_\nu).$$

Como a transformação é infinitesimal,  $D(\Lambda)$  é próximo à identidade e tem a forma  $D(\Lambda) = I + \frac{i}{2}\varepsilon_{\rho\sigma}I^{\rho,\sigma}$ . Assim,

$$\psi'(\eta) = \psi(\eta) - \frac{\varepsilon^{\mu\nu}}{2}[\eta_\nu\partial_\mu - \eta_\mu\partial_\nu - iI_{\mu\nu}]\psi(\eta).$$

Ou seja,

$$\delta\psi = -\frac{\varepsilon^{\mu\nu}}{2}[\eta_\nu\partial_\mu - \eta_\mu\partial_\nu - iI_{\mu\nu}]\psi(\eta).$$

Por outro lado, sendo a densidade lagrangiana um escalar, temos



$$\delta \mathcal{L} = -\varepsilon^{\mu\nu} \eta_\nu \partial_\mu \mathcal{L} = \frac{-1}{2} \varepsilon^{\lambda\nu} \partial^\mu [(x_\nu g_{\mu\lambda} - x_\lambda g_{\mu\nu}) \mathcal{L}].$$

A corrente conservada é então,

$$j^\mu(\eta) = \frac{\varepsilon^{\lambda\nu}}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} (\eta^\lambda \partial^\nu - \eta^\nu \partial^\lambda + i I^{\lambda\nu}) \psi + (\eta^\nu g^{\mu\lambda} - \eta^\lambda g^{\mu\nu}) \mathcal{L} \right].$$

Como  $\varepsilon_{\lambda\nu}$  é um tensor infinitesimal arbitrário, temos que

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\lambda} = 0,$$

onde  $M^{\mu\nu\lambda}$  é o tensor densidade de momentum angular, dado por

$$M^{\mu\nu\lambda} = -q^\lambda \theta^{\mu\nu} - p^\lambda \theta^{\mu\nu} + q^\nu \theta^{\mu\lambda} + p^\nu \theta^{\mu\lambda} + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \psi}{\partial q^\mu})} I^{\nu\lambda} \psi + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \psi}{\partial p^\mu})} I^{\nu\lambda} \psi. \quad (5.40)$$

### Exemplo 5.3 Campo de Klein-Gordon

Utilizando a lagrangiana para o campo de Klein-Gordon, equação (5.20), podemos escrever o tensor densidade de momentum angular para este campo como

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu\lambda} = & - q^\lambda \theta^{\mu\nu} - p^\lambda \theta^{\mu\nu} + q^\nu \theta^{\mu\lambda} + p^\nu \theta^{\mu\lambda} + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \psi}{\partial q^\mu})} I^{\nu\lambda} \psi + i \frac{\partial \psi^*}{\partial q_\mu} I^{\nu\lambda} \psi + i \frac{\partial \psi}{\partial q_\mu} I^{\nu\lambda} \psi^* \\ & - \frac{1}{2} p^\mu \psi^* I^{\nu\lambda} \psi + \frac{1}{2} p^\mu \psi I^{\nu\lambda} \psi^*, \end{aligned} \quad (5.41)$$

onde  $\theta^{\mu\lambda}$  é dado na equação (5.37).

### Exemplo 5.4 Campo de Dirac

$$M^{\mu\nu\lambda} = -q^\lambda \theta^{\mu\nu} - p^\lambda \theta^{\mu\nu} + q^\nu \theta^{\mu\lambda} + p^\nu \theta^{\mu\lambda} - \frac{1}{4} \bar{\psi} \gamma^\mu I^{\nu\lambda} \psi + \frac{1}{4} \gamma^\mu \psi I^{\nu\lambda} \bar{\psi}, \quad (5.42)$$

onde  $\theta^{\mu\lambda}$  é dado na equação (5.38).

Em ambos os casos considerados, podemos determinar o momentum angular por meio de

$$M^{\mu\nu} = \int M^{\mu\nu 0} d^3 q d^3 p. \quad (5.43)$$

### (c) Simetrias Internas

Além das simetrias geométricas induzidas por transformações no espaço-tempo, podemos considerar as simetrias internas, que são as simetrias associadas com transformações intrínsecas do campo. O caso que analisaremos aqui é o da simetria de calibre de primeira espécie, que embora não seja tão relevante fisicamente, nos fornece correntes conservadas. Para esse fim, consideraremos as transformações,

$$\psi' = e^{-i\Lambda}\psi \quad e \quad \bar{\psi}' = e^{i\Lambda}\bar{\psi},$$

onde  $\Lambda$  é uma constante. Fazendo uma expansão até primeira ordem,

$$\psi' = (1 - i\Lambda)\psi \quad \rightarrow \quad \delta\psi = -i\Lambda\psi,$$

e

$$\bar{\psi}' = (1 + i\Lambda)\bar{\psi} \quad \rightarrow \quad \delta\bar{\psi} = i\Lambda\bar{\psi}.$$

Para esse tipo de transformação  $\delta\mathcal{L} = 0$ .

### Exemplo 5.5 Campo de Klein-Gordon

Utilizando a transformação dada e substituindo na equação (5.35), obtemos a corrente conservada para o campo de Klein-Gordon,

$$j^\mu = \frac{i}{4} \left( \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial q_\mu} + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial q_\mu} \right) + p^\mu \psi^* \psi. \quad (5.44)$$

### Exemplo 5.6 Campo de Dirac

Utilizando a transformação dada e substituindo na equação (5.35), obtemos a corrente conservada para o campo de Dirac,

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (5.45)$$

Nesses dois casos, podemos encontrar uma quantidade identificada como a carga do campo,

$$Q = \int j^0 d^3q d^3p. \quad (5.46)$$

## 5.6 Interação

Podemos, neste contexto de espaço de fase, explorar problemas com interação. Para isso tomemos a densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{-1}{4} \frac{\partial \psi}{\partial q_\mu} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial q^\mu} + \frac{1}{2} i p^\mu (\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial q^\mu} - \psi \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial q^\mu}) - (p^\mu p_\mu - m^2) \psi \psi^\dagger + U(\psi \psi^\dagger), \quad (5.47)$$

que leva à equação de Klein-gordon sujeita ao potencial dado,

$$\frac{-1}{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^\mu \partial q_\mu} - i p^\mu \frac{\partial \psi}{\partial q^\mu} + (p^\mu p_\mu - m^2) \psi - V(\psi) = 0, \quad (5.48)$$

onde  $V(\psi) = \frac{\partial U(\psi \psi^\dagger)}{\partial \psi^\dagger}$ . Note que  $p$  é apenas um parâmetro nesta equação diferencial parcial.

A fim de buscar soluções para a equação de Klein-Gordon, equação (5.48), utilizaremos o método da função de Green. Para isso suponhamos uma distribuição pontual, a qual uma função  $G = G(q^\mu, q'^\mu, p^\mu, p'^\mu)$  satisfaz

$$\frac{-1}{4} \frac{\partial^2 G}{\partial q^\mu \partial q_\mu} - i p^\mu \frac{\partial G}{\partial q^\mu} + (p^\mu p_\mu - m^2) G = \delta(q^\mu - q'^\mu) \delta(p^\mu - p'^\mu), \quad (5.49)$$

onde  $G$  é a função de Green. Pelo princípio da superposição, temos que a solução para nossa equação é dada por

$$\psi(q^\mu, p^\mu) = \psi_0(q^\mu, p^\mu) + \int d^4 q'^\mu d^4 p'^\mu G(q^\mu, q'^\mu, p^\mu, p'^\mu) V(\psi), \quad (5.50)$$

onde  $\psi_0(q^\mu, p^\mu)$  é solução do problema livre. Agora nosso trabalho consiste em encontrar a função de Green. Para isso, aplicaremos uma transformada de Fourier na equação (5.48), onde as coordenadas correspondentes no espaço de Fourier serão  $q^\mu \rightarrow k^\mu$  e  $p^\mu \rightarrow \eta^\mu$ . Após a transformação, tal que  $F[\frac{\partial^2 G}{\partial q^\mu \partial q_\mu}] = -k^2 \tilde{G}(k^\mu, \eta^\mu)$ ,  $F[\frac{\partial G}{\partial q^\mu}] = -i k^\mu \tilde{G}(k^\mu, \eta^\mu)$  e  $F[G] = \tilde{G}(k^\mu, \eta^\mu)$ , segue que

$$\frac{1}{4} k^2 \tilde{G}(k^\mu, \eta^\mu) - p^\mu k_\mu \tilde{G}(k^\mu, \eta^\mu) + (p^\mu p_\mu - m^2) \tilde{G}(k^\mu, \eta^\mu) = 1, \quad (5.51)$$

onde  $F[g]$  representa a transformada de Fourier da função  $g$ . E então, obtemos

$$\tilde{G}(k^\mu, \eta^\mu) = \frac{1}{\frac{1}{4} k^2 - p^\mu k_\mu + (p^\mu p_\mu - m^2)}. \quad (5.52)$$

Desse modo

$$\begin{aligned}
 G(q^\mu, q'^\mu, p^\mu, p'^\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k^\mu d^4 \eta^\mu e^{-ik^\mu q_\mu - i\eta^\mu p_\mu} \tilde{G}(k^\mu, \eta^\mu) \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k^\mu d^4 \eta^\mu \frac{e^{-ik^\mu q_\mu - i\eta^\mu p_\mu}}{\frac{1}{4}k^2 - p^\mu k_\mu + (p^\mu p_\mu - m^2)}. \tag{5.53}
 \end{aligned}$$

E a solução da equação fica dada com a substituição da última expressão em

$$\psi(q^\mu, p^\mu) = \psi_0(q^\mu, p^\mu) + \int d^4 q'^\mu d^4 p'^\mu G(q^\mu, q'^\mu, p^\mu, p'^\mu) V(\psi), \tag{5.54}$$

que é uma solução para o problema proposto.

## 6 *Conclusão e Perspectivas*

Realizando uma retrospectiva dos capítulos anteriores, chegamos a equação de Schroedinger no espaço de fase, obtida por meio de uma representação escalar do Grupo de Galilei. E ainda, utilizando uma representação irredutível do grupo de Poincaré, mostramos como escrever as equações de Dirac e de Klein-Gordon no espaço de fase. O ponto de partida foi o uso do produto estrela (ou produto de Weyl) para introduzir os operadores básicos das representações dadas. Percebemos que a aplicação do produto estrela a direita em funções da espécie  $a(q, p)$  leva a operadores que satisfazem a uma estrutura de álgebra de Galilei estendida, dada nas equações (3.18 - 3.26). Como também, levam a operadores que satisfazem a uma estrutura de álgebra de Poincaré, dada nas equações (5.9 - 5.11).

Na representação simplética do grupo de Galilei, as variáveis canônicas são dadas por  $\hat{Q} = q\star = q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p$ , e  $\hat{P} = p\star = p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q$ , e os estados do sistema são especificados por vetores no espaço de Hilbert no espaço de fase, dados por  $\psi(q, p, t)$ . O formalismo quântico usual é obtido usando o método da função de Wigner. Isto é, mostramos que a função dada por  $f(q, p, t) = \psi(q, p, t) \star \psi^\dagger(q, p, t)$  definida no espaço de fase é uma função de Wigner. A conexão com o formalismo clássico é obtido via o teorema de Ehrenfest.

Aplicamos a equação de Schoedinger no espaço de fase para encontrar as amplitudes de probabilidade para os seguintes casos: potencial linear, oscilador harmônico e potencial de Liouville. Todos esses problemas de autovalores foram resolvidos num formalismo autocontido. Neste método a informação sobre os sistemas quânticos no espaço de fase é obtida de forma direta, abandonando as dificuldades do formalismo de Wigner, tais como não-positividades da função de Wigner. Também mostramos como escrever uma lagrangiana para a equação de Schroedinger no espaço de fase, obtendo a partir dela uma equação de continuidade. No caso dos campos relativísticos no espaço de fase, construímos lagrangianas para as equações de Klein-Gordon e de Dirac e obtivemos a partir destas lagrangianas as correntes conservadas para estes dois campos. Também fizemos uma breve discussão da equação de Klein-Gordon sujeita a uma interação, aplicando para

isso o método da função de Green.

Aspectos interessantes que ainda podem ser estudados são o acoplamento dessa teoria com o campo eletromagnético que pode ser implementado via o acoplamento mínimo, dado por  $\hat{P} \rightarrow \hat{P} - ieA = p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q - ieA$ . Também merecem ser estudados, por exemplo, o problema de muitos corpos e a teoria do espalhamento.

## *Referências*

- [1] E. P. Wigner, Phys. Rev. **40** (1932) 749.
- [2] E. P. Wigner, Ann. Math. **40** (1939) 149.
- [3] M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, E. P. Wigner; Phys. Rep. **106** (1984) 121.
- [4] T. Curtright, D. Fairlie, C. Zacos, Phys. Rev. D **58** (1998) 25002.
- [5] K. Imre, E. Ozizmir, M. Rosembaum, P. F. Zweifel, J. Math. Phys. **8** (1967) 1097.
- [6] T. Curtright, T. Uematsu, C. Zachos, Generating all Wigner Functions, (2001) [hep-th/0011137]
- [7] D. Galetti, *Mecânica Quântica no Espaço de Fase*, Notas do Curso Apresentado na III Escola Mário Schonberg de Pós-Graduação, João Pessoa, 1966.
- [8] M. D. Oliveira, M. C. B. Fernandes, F. C. Khanna, A. E. Santana, J. M. D. Vianna, Ann. Phys. (2004).
- [9] M. D. Oliveira, *Mecânica Quântica no Espaço de Fase*, Dissertação de Mestrado apresentada ao IF-UFBA, Salvador, 2002.
- [10] M. Hamermesh, *Group Theory and Its Applications to Physical Problems*, (Addison-Wesley, Massachusetts, 1962).
- [11] Y. S. Kim, M. S. Noz, *Phase Space Picture on Quantum Mechanics-Group Theoretical Approach* (World Scientific, Londres, 1991).
- [12] Notas do seminário sobre funções de Wigner. UnB. (2004).
- [13] A. Ederlyi et al, *Higher Transcendental Functions*, Bateman Manuscript Project (McGraw-Hill, New York, 1953).
- [14] A. Erdelyi et al., *Tables of Integral Transforms*, Bateman Manuscript Project (McGraw-Hill, New York, 1954).
- [15] M. C. B. Fernandes, A. E. Santana, J. D. M. Vianna, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 3841.
- [16] A. E. Santana, A. Matos Neto, J. D. M. Vianna, F. C. Khanna; Phys. A **280** (2001) 405.

- [17] M. C. B. Andrade, A. E. Santana, J. D. M. Vianna, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 3841.
- [18] M. C. B. Andrade, A. E. Santana, J. D. M. Vianna, J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2000) 4015.
- [19] A. E. Santana, F. C. Khanna, Y. Takahashi, Prog. Theor. Phys. **99** (1998) 327.
- [20] M. de Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana, in Recent Res. Devel. Phys. **1** (2000) 45.
- [21] T. Fillippakis, P. Fillippakis, D. Vavougiou, A. Jannussis, Hadronic Journal **13** (1990) 1.
- [22] M. R. Douglas, N. Nekrasov, *Noncommutative Field Theory*, (2001), [hep-th/0106048].
- [23] A. E. Santana, J. D. M. Vianna, Rev. Bras. Ens. Fís. **14** (1992) 72.
- [24] A. E. Santana, Rev. Bras. Ens. de Fís., **19** (1997) 113.
- [25] E. Inonu, E. P. Wigner, Nuovo Cimento **9** (1952) 705.
- [26] Y. Takahashi, Fortschr. Phys. **36** (1988) 63.
- [27] Hamermesh, Ann. Phys.,(N.Y.) **17** (1960) 518.
- [28] J. M. Levy-Leblond, J. Math. Phys. **4** (1963) 776.
- [29] A. Loinger, Ann. Phys. (N.Y.) **20** (1962) 132.
- [30] D. B. Fairlie, *Moyal Brackets, Star Products and generalised Wigner Functions*, (1998) [hep-th/9806198].
- [31] C. Itzykson, J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [32] E. C. G. Sudarshan e N. Mukunda, *Classical Dynamics: A modern Perspective* (John Wiley, New York, 1974).
- [33] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Second Edition (Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1980).
- [34] B. Shutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics* (Cambridge University Press, Londres, 1980).
- [35] A. Messiah, *Quantum Mechanics* (Wiley, New York, 1961).
- [36] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, 3<sup>a</sup>Ed. (Wiley, New York, 1977).
- [37] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, *Quantum Mechanics* (Wiley, New York, 1977).
- [38] K. Huang, *Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 1987).
- [39] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley Publishing Company, 1994).



- [40] *Handbook of Mathematical Functions*, edited by M. Abramowitz and I. Stegun, Natl. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. N<sup>o</sup> 55(U.S. GPO, Washington,D.C.1965).
- [41] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*(Dover, New York,1950).
- [42] T. M. Rocha Filho, *Mecânica Clássica*(2004).www.fis.unb.br.
- [43] M. O. Caminha Gomes, *Teoria Quântica de Campos*(Edusp, São Paulo, 2002).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)