

Mariana Penna Lima

*Efeito Casimir em Espaços Planos
Compactos*

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Mariana Penna Lima

*Efeito Casimir em Espaços Planos
Compactos*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Física, da Universidade de Brasília para a obtenção do título de Mestre.

Orientador:
Daniel Müller

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente, à minha família que me “suportou” nos momentos de muito cansaço e mau-humor, aos amigos que, por tantas vezes, me ouviram explicar e fizeram perguntas sobre esta dissertação e aos professores que tanto contribuíram para o meu desenvolvimento acadêmico. Em especial, ao Prof. Dr. Paulo Caldas que, além de ter me acompanhado desde o final da graduação e ao longo de todo o mestrado, tornou-se um grande amigo. Ao Sandro, que além de namorado e companheiro de estudo, foi um excelente professor de programação, sendo fundamental no desenvolvimento deste trabalho. E, para finalizar, ao Prof. Dr. Daniel Müller que sempre esteve presente, esclarecendo as dúvidas e ao CNPq que me contemplou com uma bolsa de estudo.

Resumo

A topologia do universo não é unicamente determinada pelas equações de Einstein e, desta forma, ela pode ser entendida como uma condição externa. Muitas conseqüências surgem devido ao fato de termos uma topologia não trivial, e uma delas é o Efeito Casimir. As formas espaciais de Clifford-Klein podem ser modeladas em espaços de recobrimento universais de curvatura constante, sendo eles o \mathbb{R}^3 , o \mathbb{S}^3 e o \mathbb{H}^3 . A ação dos subgrupos discretos do grupo de isometria Γ faz as identificações dos pontos no espaço de recobrimento. Portanto, o problema de classificação das formas-espaciais de Clifford-Klein reduz-se a um problema de teoria de grupos. No caso particular euclidiano, o número de variedades não equivalentes de dimensão n é finito. Por exemplo, há somente dez variedades que podem ser modeladas no \mathbb{R}^3 . Devido a razões cosmológicas, nós nos restringiremos somente às seis variedades orientáveis. Por outro lado, a função de Green, como qualquer outra função em variedades não triviais, deve conter as mesmas periodicidades da variedade em si. Para calcular essas funções de Green, nós primeiro calculamos a função de Green no espaço de Minkowski que é o recobrimento universal. O propagador de Feynman, no espaço compacto, é obtido como uma soma infinita sobre o grupo discreto Γ que define a variedade. Essa soma infinita é o que leva em conta todas as diferentes trajetórias da função de Feynman. O valor esperado do tensor energia-momento renormalizado para um campo escalar sem massa é obtido utilizando-se o método de separação de pontos. Os valores esperados do campo são calculados em pontos distintos e, no final, é feito o limite de coincidência desses pontos. A contribuição do caminho direto é desprezada, já que esse corresponde à renormalização da constante cosmológica. Nessa dissertação, nós obteremos o valor esperado da energia de Casimir para um campo escalar sem massa nas seis variedades planas, compactas, tridimensionais e orientáveis.

Abstract

The topology of the universe is not uniquely determined by Einstein's equations and it can be understood as an external condition. There are many consequences that arise due to a non trivial topology, among them the Casimir Effect. Clifford-Klein space-forms can be modeled in constant curvature universal covering spaces which are either \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^3 and \mathbb{H}^3 . The action of discrete subgroups of the isometry group Γ , performs the identification of the points in the covering space. Thus, the problem of classification of space-forms reduces to a problem in group theory. In the particular euclidean case, the number of inequivalent manifolds of dimension n is finite. For example, there are only ten manifolds that can be modeled in \mathbb{R}^3 . Due to cosmological reasons, we shall restrict to the six orientable ones. On the other hand, the Green function, as any other function on non trivial manifolds, must have the same periodicities of the manifold itself. To compute these Green's functions, we first evaluate the Green's function in the Minkowski space which is the universal covering space. The Feynman propagator in the compact space is obtained as an infinite sum over the discrete group Γ that defines the manifold. This infinite sum is what takes into account all the different trajectories of the Feynman function. The renormalized expectation value of the energy-momentum tensor for the massless scalar field is obtained from the separation point method. The field expectation values are calculated in separated points and at the end the coincidence limit is taken. The contribution of the direct path is disregarded since it corresponds to the renormalization of the cosmological constant. In this work, we will obtain the expectation value of the Casimir energy for a massless scalar field in the six orientable compact flat manifolds.

Sumário

Resumo	ii
Abstract	iii
Introdução	1
1 Elementos de Teoria Quântica de Campos	3
1.1 Efeito Casimir	3
1.2 Tensor Energia-Momento de um Campo Escalar	6
1.3 Método de Separação de Pontos	8
1.4 Cálculo das Funções de Feynman e Hadamard	10
1.5 Campo Escalar sem Massa no $\mathcal{R} \times \mathcal{S}^1 \times \mathcal{R}^2$	12
2 Elementos de Topologia	14
2.1 Aspectos Gerais	14
2.1.1 Grupo Fundamental	15
2.1.2 Espaço de Recobrimento Universal	16
2.1.3 Grupo de Isometrias	17
2.1.4 Variedades Orientáveis	18
2.2 Variedades Orientáveis do Espaço Plano Compacto Tri-Dimensional	18
2.2.1 Regiões Fundamentais	21
3 Valor Esperado do Tensor Energia Momento	27
3.1 Tensor Energia - Momento em Espaços Compactos	27

3.2	O Cálculo Numérico	29
3.3	Resultados e Análise de Dados	31
	Conclusão	39
	Referências	40

Introdução

As equações de Einstein (1) ,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

nos fornecem informações sobre a geometria do universo pois ela é uma equação diferencial parcial da métrica e de suas derivadas primeira e segunda. Todas essas quantidades são locais, já que a métrica, $g_{\mu\nu}(x)$, é uma função de um ponto x do espaço-tempo e onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R é o escalar de curvatura e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento.

Com isso, temos que as equações de Einstein não determinam totalmente a topologia do universo, pois essa corresponde às propriedades globais do mesmo. Portanto, temos que escolher uma topologia para se resolver um determinado problema. Essa escolha funciona como uma condição externa.

Felizmente, devido ao fato de nós observarmos um espaço homogêneo e isotrópico, restringimos as possibilidades somente às variedades de curvatura constante. Essas são classificadas da seguinte maneira: se a curvatura for positiva, o espaço é esférico, se for igual a zero, o espaço é plano, e se for negativa, o espaço é hiperbólico. Nesta dissertação, trabalhamos com as seis formas-espaciais orientáveis de Clifford-Klein cujo espaço de recobrimento é o espaço plano, euclidiano. Essas são variedades planas, compactas, tridimensionais e orientáveis. Cada uma delas possui um subgrupo de isometrias que fazem a identificação dos pontos no espaço de recobrimento.

O fato do espaço ter uma topologia não trivial, neste caso ser compacto, traz consequências físicas como, por exemplo, o efeito Casimir. Se o espaço fosse plano e aberto, o valor esperado do tensor energia-momento, de qualquer campo físico no vácuo, seria igual a zero. Porém, isso não é verdade para o espaço plano compacto. Neste trabalho, calculamos o valor esperado da energia de um campo escalar sem massa para as seis variedades citadas. A razão de usarmos campos escalares é devido à simplicidade encontrada nos cálculos. Mas, como DeWitt mostrou [1], se estivermos tratando de um problema onde a contribuição do spin é irrelevante, temos que os resultados do cálculo do tensor energia-momento, por exemplo, de um campo escalar e do campo eletromagnético são

“equivalentes”.

O valor esperado da energia de Casimir de um campo escalar sem massa é obtido com a utilização do método de separação de pontos, no qual o valor esperado do campo é calculado em pontos distintos e, no final, o limite de coincidência desses pontos é tomado. É preciso conhecer a função de Hadamard no espaço de Minkowski para realizar o cálculo. Os propagadores, específicos desse trabalho, devem conter as mesmas periodicidades que as nossas variedades. Com isso, temos que eles serão escritos como o somatório infinito de todas as possíveis trajetórias, isto é, sobre o grupo de isometria que define a variedade.

Como o cálculo aqui feito é numérico, precisamos truncar essa série. De acordo com a equação para o valor esperado do tensor energia-momento, podemos nos certificar que o valor converge de forma rápida.

1 Elementos de Teoria Quântica de Campos

Neste capítulo, veremos os métodos e conceitos de Teoria Quântica de Campos utilizados neste trabalho. Começaremos com uma breve descrição do Efeito Casimir. Em seguida, faremos o cálculo do tensor energia-momento de um campo escalar. Como esse valor geralmente diverge, mostraremos uma maneira de regularizá-lo. Essa é o Método de Separação de Pontos no qual precisamos conhecer o propagador para um campo escalar sem massa.

Por fim, é feito um exemplo utilizando-se os resultados obtidos ao longo do capítulo. Nesse exemplo, calculamos o valor esperado do tensor energia-momento no vácuo de um campo escalar sem massa em uma topologia plana tridimensional não trivial.

1.1 Efeito Casimir

O Efeito Casimir, em sua forma mais simples, manifesta-se como a força atrativa que há entre duas placas paralelas, condutoras e neutras devido à flutuação do campo eletromagnético no vácuo. Esse efeito é puramente quântico, já que na eletrodinâmica clássica não há força entre placas neutras. Ele foi descoberto teoricamente por Hendrick Casimir, físico holandês, em 1948 [2]. Essa força foi medida pela primeira vez por Sparnaay em 1958 [3]. Mas a acurácia do resultado estava longe de ser satisfatória, aproximadamente 100% de erro. Em 1996, Steven Lamoreaux obteve um resultado com uma incerteza experimental de 5% no Laboratório Nacional de Los Alamos [4], o que provocou um renovado interesse no estudo das forças de Casimir.

O vácuo é o único estado envolvido no efeito Casimir. O conceito de vácuo na teoria quântica de campo difere do mesmo na teoria clássica, no qual temos que os campos elétrico e magnético são nulos. Na outra, ele é definido como o estado cujo autovalor do operador aniquilação é zero (não há partículas reais) e, portanto, corresponde ao estado

do campo quantizado de mais baixa energia, estado fundamental.

A energia do vácuo é equivalente a de infinitos osciladores harmônicos. No espaço vazio, podemos ter qualquer modo de vibração assim como uma corda com as extremidades livres. Porém, se fixamos as extremidades da corda, como num violão, ou se, por exemplo, colocamos duas placas no espaço vazio, os modos permitidos estarão restritos a essas condições de contorno. Como a energia do campo depende do número de modos, temos que a energia do campo entre as placas será menor que no espaço vazio. A força observada no efeito Casimir advém dessa diferença de energia. Como a energia entre as placas e a do espaço vazio são infinitas, Casimir regularizou ambas antes de subtraí-las e, assim, obteve um resultado finito.

A força de Casimir, no caso de duas placas paralelas, é dada pela seguinte equação

$$f = -\frac{\pi^2}{240} \hbar c \frac{S}{a^4}, \quad (1.1)$$

onde S é a área das placas e a é a distância entre as mesmas. É interessante notar que essa força é universal no sentido em que ela não depende de uma carga física, de um tipo de campo e nem do tipo de metal. Uma característica única na força de Casimir é a sua forte dependência na forma, podendo ser atrativa ou repulsiva dependendo do tamanho, da geometria e da topologia do contorno [5].

Vejamos agora como é a divergência da energia do ponto-zero no caso de um campo escalar sem massa em um problema em que se conhece o espectro e de que maneira é feita a regularização.

O campo escalar, ϕ , satisfaz a equação de Klein-Gordon,

$$(\square + m^2)\phi = 0. \quad (1.2)$$

Considerando $m = 0$, temos que um possível conjunto de solução para o $\mathcal{R} \times \mathcal{S}^1$, já normalizado [6], é dado por

$$u_k = (2L\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{ikx - i\omega t}, \quad (1.3)$$

onde L é a periodicidade de \mathcal{S}^1 e $\omega = |k| = \frac{2\pi n}{L}$. E a solução quantizada é

$$\phi(t, \vec{x}) = \sum_k [a_k u_k(t, \vec{x}) + a_k^\dagger u_k^*(t, \vec{x})], \quad (1.4)$$

onde a é o operador de destruição e a^\dagger é o operador de criação. A energia total do sistema é

$$\langle b|H|b\rangle = \sum_k \omega_k \left(n_k + \frac{1}{2} \right), \quad (1.5)$$

onde $|b\rangle$ é um estado arbitrário do campo e n_k é o número de partículas no modo k . Portanto, o valor esperado do campo no vácuo é

$$\langle 0|H|0\rangle = \frac{1}{2} \sum_k \omega_k \quad (1.6)$$

e, com isso, temos a energia de Casimir

$$E_C = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (1.7)$$

Essa soma diverge. No entanto, como conhecemos o espectro da energia, podemos renormalizar e dar um significado a essa divergência através da função zeta de Riemann.

A função zeta de Riemann, que é bem conhecida na literatura, em sua forma mais comum, é dada por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (1.8)$$

o qual é válida para $\Re s > 1$. Por continuação analítica, esse resultado é estendido para valores negativos de s , possuindo um resultado finito e bem conhecido. Por exemplo, na expressão (1.7), temos $\zeta(-1)$. Com isso, dado que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ e tendo a seguinte relação de recorrência,

$$\zeta(1+s)\Gamma(1+s) = -(2\pi)^{s+1}\zeta(-s) \left(2\operatorname{sen}\frac{s\pi}{2} \right)^{-1}, \quad (1.9)$$

temos que

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}. \quad (1.10)$$

Portanto, a energia de Casimir, para o espaço, $\mathcal{R} \times \mathcal{S}^1$ possui um valor finito

$$E_C = -\frac{\pi}{6L}. \quad (1.11)$$

Esse procedimento ilustra a técnica de regularização através da função zeta de Riemann [7] [8].

O efeito Casimir, essencialmente, é um caso particular de teoria quântica de campos com um campo externo clássico. A condição de contorno representa a parte clássica. Se

essa varia no tempo, então existe a criação de partículas e, se for estática, partículas não são criadas [9].

1.2 Tensor Energia-Momento de um Campo Escalar

Em seguida, o tensor energia-momento do campo escalar será obtido. Começamos fazendo a variação da ação de um campo escalar em um campo de fundo curvo,

$$S[\phi] = -\frac{1}{2} \int g^{\frac{1}{2}} (\phi_{;\mu} \phi^{;\mu} + \xi R \phi^2 + m^2 \phi^2) d^4x, \quad (1.12)$$

onde $\phi(x)$ é o campo escalar, g é menos o determinante da métrica, $g_{\mu\nu}$, R é o escalar de curvatura, m é a massa do campo escalar e ξ é uma constante no qual é $\frac{1}{6}$ para um campo escalar conforme e 0 para um campo escalar no acoplamento mínimo. Variando ϕ infinitesimalmente,

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi, \quad (1.13)$$

obtemos a seguinte equação

$$S[\phi'] = -\frac{1}{2} \int g^{\frac{1}{2}} [(\phi + \delta\phi)_{;\mu} (\phi + \delta\phi)^{;\mu} + \xi R (\phi + \delta\phi)^2 + m^2 (\phi + \delta\phi)^2] d^4x. \quad (1.14)$$

Desprezando os termos com $(\delta\phi)^2$ e subtraindo (1.14) de $S[\phi]$, temos

$$S[\phi + \delta\phi] - S[\phi] = -\frac{1}{2} \int g^{\frac{1}{2}} [\phi_{;\mu} \delta\phi^{;\mu} + \delta\phi_{;\mu} \phi^{;\mu} + 2\xi R \phi + 2m^2 \phi] \delta\phi d^4x. \quad (1.15)$$

Integrando por partes, chegamos à seguinte equação

$$S[\phi'] - S[\phi] = -\frac{1}{2} \int g^{\frac{1}{2}} [(-2)\phi_{;\mu}^{\mu} + 2(\xi R + m^2)\phi] \delta\phi d^4x. \quad (1.16)$$

Utilizando o princípio de mínima ação e derivando funcionalmente (1.16) em relação ao campo ϕ ,

$$0 = \frac{\delta S}{\delta\phi(x')} = - \int g^{\frac{1}{2}} [-\phi_{;\mu}^{\mu} + (\xi R + m^2)\phi] \delta^4(x - x') \phi d^4x, \quad (1.17)$$

obtemos a equação de Klein-Gordon

$$0 = g^{\frac{1}{2}} [\phi_{;\mu}^{\mu} - (\xi R + m^2)\phi]. \quad (1.18)$$

A densidade do tensor energia-momento clássico é definido como

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{g^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (1.19)$$

Para fazer esse cálculo, precisamos saber como é a variação dos termos de S em relação a $g_{\mu\nu}$. Para isso, usaremos as seguintes relações:

1. $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}$;
2. $\delta g^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} g^{\frac{1}{2}} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}$;
3. $\delta R = -R^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (-\delta g_{\alpha\beta;\mu\nu} + \delta g_{\alpha\mu;\beta\nu})$;

Com isso, podemos encontrar o tensor energia-momento métrico clássico. Temos que

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{2}{g^{\frac{1}{2}}} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x')} \int g^{\frac{1}{2}} (\phi_{;\sigma} \phi^{;\sigma} + \xi R \phi^2 + m^2 \phi^2) d^4x \\ &= \frac{-1}{g^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}(x')} \int g^{\frac{1}{2}} (g^{\sigma\alpha} \phi_{;\sigma} \phi_{;\alpha} + \xi R \phi^2 + m^2 \phi^2) d^4x. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Primeiro aplicamos a relação 2 (lembrando que há um $\delta^4(x - x')$) e, desta forma, obtemos o primeiro termo

$$-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\phi_{;\sigma} \phi^{;\sigma} + \xi R \phi^2 + m^2 \phi^2). \quad (1.21)$$

O segundo termo é obtido aplicando-se a relação 1,

$$g^{\sigma\mu} g^{\alpha\nu} \phi_{;\sigma} \phi_{;\alpha}. \quad (1.22)$$

Os outros termos surgem da terceira relação. Temos a parte referente a $-R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$,

$$\xi R^{\mu\nu} \phi^2, \quad (1.23)$$

e a referente a $g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (-\delta g_{\alpha\beta;\mu\nu} + \delta g_{\alpha\mu;\beta\nu})$, no qual podemos reescrever como

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} (-\nabla_\nu \nabla_\mu \delta g_{\alpha\beta} + \nabla_\nu \nabla_\beta \delta g_{\alpha\mu}) &= -\nabla_\nu g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \delta g_{\alpha\beta} + \nabla_\nu g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\beta \delta g_{\alpha\mu} \\ &= \nabla_\nu [-\nabla_\mu (g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \delta g_{\alpha\beta}) + \nabla_\beta (g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \delta g_{\alpha\mu})], \end{aligned} \quad (1.24)$$

já que $\nabla_a g_{bc} = 0$, são obtidos a seguir.

Escrevendo $-\nabla_\mu (g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \delta g_{\alpha\beta}) = j^\nu$, $\nabla_\beta (g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \delta g_{\alpha\mu}) = j'_1$ e retornando à expressão de δS (somente o termo o qual nós estamos nos referindo, chamemos de δS_1), temos

$$\delta S_1 = - \int \xi \nabla_\nu (j^\nu + j'_1) \phi^2 d^4x. \quad (1.25)$$

Utilizando o fato de que a integral de uma divergência é zero, podemos reescrever (1.25)

como

$$\begin{aligned}
\delta S_1 &= \int \xi j^\nu (\nabla_\nu \phi^2) d^4x + \int \xi j_1^\nu (\nabla_\nu \phi^2) d^4x \\
&= - \int \xi (\nabla_\nu \phi^2) (\nabla^\nu \delta g_\alpha^\alpha) d^4x + \int \xi (\nabla_\nu \phi^2) (\nabla^\alpha \delta g_\alpha^\nu) d^4x \\
&= \int \xi (\nabla^\nu \nabla_\nu \phi^2) \delta g_\alpha^\alpha d^4x - \int \xi (\nabla^\alpha \nabla_\nu \phi^2) \delta g_\alpha^\nu d^4x.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Usando as relações $\delta g_\alpha^\alpha = g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}$ e $\delta g_\alpha^\nu = g^{\nu\beta} \delta g_{\alpha\beta}$ e derivando funcionalmente S_1 em relação à métrica, obtemos, finalmente, o último termo do tensor energia-momento,

$$\begin{aligned}
T_1^{\alpha\beta} &= \xi \{ g^{\alpha\beta} (\nabla^\nu \nabla_\nu \phi^2) - (\nabla^\alpha \nabla^\beta \phi^2) \\
&= 2\xi [g^{\alpha\beta} (\phi^{;\nu} \phi_{;\nu} + \phi \phi^{;\nu}_{;\nu}) - (\phi^{;\alpha} \phi^{;\beta} + \phi \phi^{;\alpha\beta})].
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Com isso, temos que o tensor energia-momento métrico clássico de um campo escalar em um espaço curvo é

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu} &= \left\{ g^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} + 2\xi \right) \phi_{;\sigma} \phi^{;\sigma} + (1 - 2\xi) \phi^{;\mu} \phi^{;\nu} - 2\xi \phi \phi^{;\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + 2\xi g^{\mu\nu} \phi \phi^{;\sigma}_{;\sigma} + \xi \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \phi^2 - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} m^2 \phi^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

1.3 Método de Separação de Pontos

Quase sempre o cálculo do valor esperado do vácuo diverge. Como vimos na seção 1.1, a divergência foi regularizada através da função zeta de Riemann somando-se diretamente o espectro. Esse método é muito restrito porque nem sempre se conhece o espectro da energia. A regularização pode ser realizada de várias maneiras, essa escolha é feita de forma conveniente com o problema que está sendo tratado.

Nesta seção, utilizaremos o método de separação de pontos para regularizar o valor esperado do tensor energia-momento de um campo escalar. Veremos que nesse método o que precisamos conhecer é o propagador.

O valor esperado $\langle 0|T^{\mu\nu}|0\rangle$ diverge pois o produto dos operadores do campo e suas derivadas são tomadas no mesmo ponto. Com isso, usamos o método de separação de pontos que consiste em trocar um dos $\phi(x)$ por $\phi(x')$, onde x' é um ponto próximo de x , e, no final, o limite, em que $x' \rightarrow x$, precisa ser obtido. Temos que o tensor energia-momento quantizado é obtido substituindo-se o campo clássico, em (1.28), pelo operador

do campo escalar. Então, usando as expressões

$$\{\phi^{i\mu}, \phi^{i\nu}\} = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{1}{2} [\{\phi^{i\mu'}, \phi^{i\nu}\} + \{\phi^{i\mu}, \phi^{i\nu'}\}], \quad (1.29)$$

$$\{\phi^{i\mu\nu}, \phi\} = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{1}{2} [\{\phi^{i\mu'\nu'}, \phi\} + \{\phi^{i\mu\nu}, \phi'\}], \quad (1.30)$$

$$\{\phi, \phi\} = \lim_{x' \rightarrow x} \{\phi, \phi'\}, \quad (1.31)$$

$$\{\phi_{;\sigma}, \phi^{i\sigma}\} = \lim_{x' \rightarrow x} \{\phi_{;\sigma}, \phi^{i\sigma'}\}, \quad (1.32)$$

$$\{\phi_{;\sigma}^{\sigma}, \phi\} = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{1}{2} [\{\phi_{;\sigma'}^{\sigma'}, \phi\} + \{\phi_{;\sigma}^{\sigma}, \phi'\}], \quad (1.33)$$

onde $\phi' = \phi(x')$ e $\phi^{i\mu'} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^{\mu}}$, em (1.28), quantizando-a e reescrevendo os operadores em termos de anticomutadores, obtemos

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & \left\{ \frac{1}{2}(1 - 2\xi)\{\phi^{i\mu}(x), \phi^{i\nu}(x)\} + \frac{1}{2} \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g^{\mu\nu} \{\phi_{;\sigma}(x), \phi^{i\sigma}(x)\} \right. \\ & - \xi \{\phi^{i\mu\nu}(x), \phi(x)\} + \xi g^{\mu\nu} \{\phi_{;\sigma}^{\sigma}(x), \phi(x)\} + \frac{1}{2} \xi \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \{\phi(x), \phi(x)\} \\ & \left. - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} m^2 \{\phi(x), \phi(x)\} \right\}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Através da equação de movimento (1.18), escrevemos $\{\phi_{;\sigma}^{\sigma}, \phi\}$ como

$$\{\phi_{;\sigma}^{\sigma}, \phi\} = \frac{1}{4} \{\phi_{;\sigma}^{\sigma}, \phi\} + \frac{3}{4} (\xi R + m^2) \{\phi, \phi\}, \quad (1.35)$$

e substituindo em $T^{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & \left\{ \frac{1}{2}(1 - 2\xi)\{\phi^{i\mu}(x), \phi^{i\nu}(x)\} + \frac{1}{2} \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g^{\mu\nu} \{\phi_{;\sigma}(x), \phi^{i\sigma}(x)\} \right. \\ & - \xi \{\phi^{i\mu\nu}(x), \phi(x)\} + \frac{\xi g^{\mu\nu}}{4} \{\phi_{;\sigma}^{\sigma}(x), \phi(x)\} + \frac{3}{4} \xi g^{\mu\nu} (\xi R + m^2) \{\phi(x), \phi(x)\} \\ & \left. + \frac{1}{2} \xi \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \{\phi(x), \phi(x)\} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} m^2 \{\phi(x), \phi(x)\} \right\}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Calculando o valor esperado do tensor energia-momento no vácuo, $\langle T^{\mu\nu} \rangle$, obtemos uma expressão que pode ser reescrita em termos da função de Hadamard, a qual é definida como

$$G^{(1)}(x, x') = \langle 0 | \{\phi(x), \phi(x')\} | 0 \rangle, \quad (1.37)$$

e onde é utilizada a seguinte notação:

$$G^{(1);\mu\nu}(x, x') = \langle 0 | \{ \phi^{;\mu\nu}, \phi' \} | 0 \rangle, \quad (1.38)$$

$$G^{(1);;\mu\nu'}(x, x') = \langle 0 | \{ \phi^{;\mu}, \phi^{;\nu'} \} | 0 \rangle, \quad (1.39)$$

$$G^{(1);;\mu'\nu'}(x, x') = \langle 0 | \{ \phi, \phi^{;\mu'\nu'} \} | 0 \rangle. \quad (1.40)$$

Calculando o valor esperado de (1.36), fazendo as devidas substituições, obtemos

$$\begin{aligned} \langle T^{\mu\nu} \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} & \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) (G^{(1);;\mu'\nu} + G^{(1);;\mu\nu'}) + \left(\xi - \frac{1}{4} \right) g^{\mu\nu} G_{;\sigma}^{(1)\sigma'} \right. \\ & - \frac{1}{2} \xi (G^{(1);;\mu'\nu'} + G^{(1);;\mu\nu}) + \frac{\xi g^{\mu\nu}}{8} (G_{;\sigma'}^{(1)\sigma'} + G_{;\sigma}^{(1)\sigma}) + \frac{3}{4} \xi g^{\mu\nu} (\xi R + m^2) G^{(1)} \\ & \left. + \frac{1}{2} \xi \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) G^{(1)} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} m^2 G^{(1)} \right\}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Verificamos que para efetuar esse cálculo precisamos conhecer a função de Hadamard, que será obtida em seguida.

1.4 Cálculo das Funções de Feynman e Hadamard

Como estamos estudando o caso de um campo escalar sem massa no espaço plano, $m = 0$ e $R = 0$, o operador diferencial

$$(\square - m^2 - \xi R) \quad (1.42)$$

reduz-se a \square . Com isso, precisamos calcular a solução de

$$\square G(x, x') = -i\delta^{(4)}. \quad (1.43)$$

Escrevendo $G(x, x')$ em termos de sua transformada de Fourier, lembrando que \square refere-se à coordenada x e que

$$\delta^4(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik \cdot (x - x')}, \quad (1.44)$$

temos que

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [-k^2 \tilde{G}(k) + i] e^{-ik \cdot (x - x')} = 0. \quad (1.45)$$

Multiplicando (1.45) por

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4a e^{ik'.a}, \quad (1.46)$$

onde $a = x - x'$, obtemos

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} [-k^2 \tilde{G}(k) + i] \delta^4(k - k') = 0, \quad (1.47)$$

e, conseqüentemente,

$$\tilde{G}(k) = \frac{i}{k^2}. \quad (1.48)$$

Com isso, calculamos a sua transformada de Fourier

$$G(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2} e^{-ik.(x-x')}, \quad (1.49)$$

o qual podemos escrever como

$$G(x - x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds e^{ik^2s} e^{-ik.(x-x')}. \quad (1.50)$$

Completando o quadrado, chamando $k' = k - \frac{(x-x')}{2s}$ e, com isso, $dk' = dk$, temos

$$G(x - x') = \int_0^\infty ds e^{-i\frac{(x-x')^2}{4s}} \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4} e^{isk'^2}. \quad (1.51)$$

Utilizando a integral de Fresnel [10],

$$\int \frac{dk^0}{2\pi} e^{ik^{02}a} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi a}{i}}}, \quad \int \frac{dk^i}{2\pi} e^{ik^{i2}a} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi a}{i}}},$$

obtemos

$$G(x - x') = \frac{-1}{16\pi^2} \int_0^\infty ds \frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4s}}}{s^2}. \quad (1.52)$$

Para que (1.52) seja integrável quando $s \rightarrow 0$, precisamos substituir $(x - x')^2$ por $(x - x')^2 - i\epsilon$. Fazendo, também, a seguinte substituição $w = \frac{1}{4s}$ e, com isso, $ds = -\frac{1}{4w^2}dw$, chegamos a forma final da função de Feynman para um campo escalar sem massa,

$$\begin{aligned} G(x - x') &= \frac{-1}{4\pi^2} \int_0^\infty dw e^{-i[(x-x')^2 - i\epsilon]w} \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{1}{(x - x')^2 - i\epsilon}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Esse propagador refere-se ao espaço - tempo $\mathcal{R} \times \mathcal{R}^3$.

O propagador de Feynman relaciona-se com a função de Hadamard da seguinte forma

[11] [12]

$$G^{(1)}(x, x') = 2ImG(x, x'). \quad (1.54)$$

Com isso, temos

$$G^{(1)}(x - x') = \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{(x - x')^2 - i\epsilon}. \quad (1.55)$$

1.5 Campo Escalar sem Massa no $\mathcal{R} \times \mathcal{S}^1 \times \mathcal{R}^2$

A técnica para a obtenção do propagador e do cálculo do valor esperado do tensor energia - momento em espaços compactos é exemplificada a seguir para um campo escalar sem massa no espaço - tempo $\mathcal{R} \times \mathcal{S}^1 \times \mathcal{R}^2$ [13]. Consideramos o espaço - tempo plano e escolhemos as coordenadas Cartesianas x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Também escolhemos a direção x^3 como a dimensão compacta, \mathcal{S}^1 , sendo a o período da mesma.

Na seção anterior, já calculamos a função de Green deste problema para o espaço de Minkowski, $\mathcal{R} \times \mathcal{R}^3$ (chamemos de G_0). A periodicidade em \mathcal{S}^1 pode ser imposta da seguinte maneira

$$G(x, x') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_0(x, x' + nae_3), \quad (1.56)$$

onde e_3 é o vetor unitário paralelo ao eixo x^3 , contanto que o somatório convirja.

O $\langle T^{\mu\nu} \rangle$ diverge quando x' é igual a x e $n = 0$, o que corresponde ao caminho direto. Porém, trabalharemos com a função de Green renormalizada

$$G_{ren}(x, x') =^{def} \sum' G_0(x, x' + nae_3), \quad (1.57)$$

onde \sum' não contém o termo $n = 0$, ou seja, o caminho direto é excluído.

Para efetuarmos o cálculo, utilizaremos (1.41) onde, neste caso, $\xi = 0$ (acoplamento mínimo), $m = 0$ e $R = 0$. Portanto, temos

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \frac{1}{4} (G^{(1),\mu'\nu} + G^{(1),\mu\nu'}) - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} G_{,\sigma}^{(1)\sigma'} \right\}, \quad (1.58)$$

onde $g^{\frac{1}{2}} = 1$ e

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Substituindo esses dados e a equação (1.55) em (1.58), calculando as derivadas e tomando $x' = x$, obtemos o seguinte resultado

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(na)^4} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad (1.59)$$

e sabendo que $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, temos o resultado final

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \frac{\pi^2}{90a^4} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

2 *Elementos de Topologia*

A forma global de qualquer espaço é caracterizado por uma geometria e uma topologia. Neste capítulo, faremos uma revisão bibliográfica sobre topologia. A primeira seção é uma introdução no qual falamos sobre o principal problema de um topólogo e alguns conceitos que estão envolvidos na solução do mesmo. Seguimos com os conceitos necessários para classificar as características topológicas de uma variedade.

Na segunda seção, apresentaremos teoremas e lemas que nos permitem determinar as variedades compactas, em um espaço plano, utilizadas neste trabalho e faremos uma descrição das mesmas.

2.1 Aspectos Gerais

A topologia descreve características globais do espaço que ficam inalterados por transformações contínuas. O principal problema é determinar se dois espaços topológicos são homeomórficos ou não e, quando possível, classificá-los em classes não-homeomórficas [14]. Para que dois espaços sejam homeomórficos, deve haver um mapeamento contínuo de um para o outro e um inverso também contínuo. Mas para que eles sejam não-homeomórficos, devemos mostrar que essa função contínua não existe.

Comparar as propriedades topológicas de dois espaços é uma maneira de se resolver essa questão, pois se uma propriedade diferir de um espaço para o outro, temos que eles não podem ser homeomórficos. Mas esse procedimento era muito restrito, até que, ao longo do século *XX*, foi desenvolvida a topologia algébrica, a qual consiste em reduzir problemas topológicos, sobre espaços e mapeamentos contínuos, para questões puramente algébricas [15]. Há uma coleção dessas propriedades que são invariantes topológicos os quais são usados para reconhecer as classes de equivalência desses espaços [16]. Entre elas estão: *grupo fundamental*, ou *primeiro grupo de homotopia*, *espaço de recobrimento universal*, *grupo de holonomia* e *domínio fundamental*.

2.1.1 Grupo Fundamental

Seja uma variedade \mathcal{M} , um laço em $x \in \mathcal{M}$ é qualquer caminho que comece em x e termine em x . Dois laços γ e γ' são homotópicos se γ pode ser continuamente deformado em γ' . O conceito de homotopia foi primeiramente formulada por Poincaré por volta de 1900. A variedade \mathcal{M} é simplesmente-conexa se, para qualquer x , dois laços quaisquer em x forem homotópicos, isto é, se todo laço é homotópico a um ponto. Se isso não ocorrer, a variedade é multiplamente-conexa. O estudo desses laços homotópicos é uma maneira de se detectar buracos e asas (como de uma xícara). Além disso, as classes de equivalência dos laços homotópicos podem ter a estrutura de um grupo, essencialmente porque os laços podem ser adicionados unindo-se as extremidades dos mesmos. Por exemplo, no espaço euclidiano, unir um laço com m voltas, em torno de um buraco, a um laço com n voltas resulta em um laço com $m + n$ voltas. O grupo dos laços é chamado de primeiro grupo de homotopia em x ou, em uma terminologia originalmente introduzida por Poincaré, grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{M}, x)$. [17]

Teorema 1. *Se \mathcal{M} for conexo por arcos, os grupos $\pi_1(\mathcal{M}, x)$ e $\pi_1(\mathcal{M}, y)$ são isomórficos para quaisquer dois pontos $x, y \in \mathcal{M}$. [15]*

Com isso, temos que o grupo fundamental é independente do ponto: ele é um invariante topológico da variedade. Vejamos três exemplos de classes de homotopia [17]:

1. Plano Euclidiano: Qualquer laço pode ser reduzido a um ponto. O grupo fundamental é a identidade.
2. Plano com um buraco: O laço γ , que não contorna o buraco, não é homotópico a γ' , que envolve o buraco. Toda classe de homotopia h_n está associada a um inteiro: $\gamma \in h_n$ se ele envolver o buraco n vezes na direção horária ($n > 0$), $n < 0$ na direção anti-horária e $n = 0$ se não envolver o buraco. Portanto, o grupo fundamental é o grupo cíclico infinito, o grupo dos inteiros \mathbb{Z} .
3. Toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$: Os laços podem girar m vezes em torno do buraco central e n vezes em torno do corpo do toro. Com isso, temos que o grupo fundamental consiste de pares (m, n) de inteiros com a seguinte relação de adição $(m, n) + (p, q) = (m + p, n + q)$, isto é, ele é isomórfico a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Foi mostrado que se uma superfície é multiplamente-conexa, então seu grupo fundamental é não trivial, isto é, há pelo menos um laço que não pode ser reduzido a um ponto.

Porém, para dimensões maiores, o problema é mais complexo pois, sendo o laço unidimensional, ele não é suficiente para verificar as propriedades topológicas das variedades. Com isso, foi feita uma generalização para dimensões mais altas do grupo fundamental que são os grupos de homotopia de ordem n arbitrária.

2.1.2 Espaço de Recobrimento Universal

Começemos com a definição de espaço de recobrimento para falarmos do espaço de recobrimento universal.

Definição: *Seja X um espaço topológico. Um espaço de recobrimento de X é um par que consiste de um espaço \tilde{X} e um mapeamento contínuo $p : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que a seguinte condição esteja assegurada: Cada ponto $x \in X$ tem uma vizinhança U aberta e conexa por arcos tal que cada componente arco de $p^{-1}(U)$ é mapeada topologicamente em U por p (em particular, é considerado que $p^{-1}(U)$ não é vazio). Qualquer vizinhança aberta U que satisfaz essa condição é chamada de vizinhança elementar. O mapeamento p é geralmente chamado de projeção. [15]*

Seja (\tilde{X}, p) um espaço de recobrimento de X tal que \tilde{X} é simplesmente conexo. Se (\tilde{X}', p') for qualquer outro espaço de recobrimento de X , então existe um homomorfismo ϕ de (\tilde{X}, p) em (\tilde{X}', p') , e (\tilde{X}, ϕ) é um espaço de recobrimento de \tilde{X}' ; isto é, \tilde{X} pode servir como um espaço de recobrimento de qualquer espaço de recobrimento de X . Por essa razão, um espaço de recobrimento simplesmente conexo, como (\tilde{X}, p) , é chamado de *espaço de recobrimento universal*. [15]

Exemplo: Considere o espaço $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, **toro** plano, o produto do mapeamento

$$p \times p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

é um recobrimento do toro pelo plano \mathbb{R}^2 . [18]

Um ponto x e um caminho γ , de x a x' no toro, podem ser associados a um ponto \tilde{x} e um caminho Γ de \tilde{x} a \tilde{x}' no \mathbb{R}^2 . Como o toro é multiplamente conexo, há muitos caminhos distintos, $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ que levam x a x' tais que seus associados levam a pontos distintos, $\tilde{x}', \tilde{x}'', \dots$ no \mathbb{R}^2 . Isto é, temos infinitas imagens de um ponto do toro no \mathbb{R}^2 , portanto, um habitante de um espaço finito multiplamente conexo, toro, pode ter a ilusão de viver em um espaço infinito simplesmente conexo, \mathbb{R}^2 .

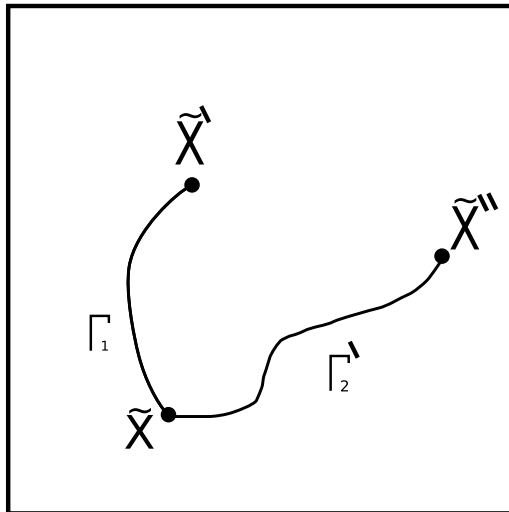


Figura 1: Dois caminhos associados a seus respectivos pontos no espaço de recobrimento, \mathbb{R}^2 .

2.1.3 Grupo de Isometrias

Como visto na seção 2.1.2, em uma variedade $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ multiplamente-conexa, onde \mathbf{g} é a métrica, quaisquer dois pontos, x e x' , podem ser unidos por mais de uma geodésica, sendo cada um desses caminhos pertencentes a uma classe de homotopia γ . A partir disso, temos que a métrica do espaço de recobrimento universal $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathbf{g}})$ é obtida definindo-se a distância entre $\tilde{x} = (x, \gamma)$ e $\tilde{x}' = (x', \gamma)$ em $\tilde{\mathcal{M}}$ como sendo igual à distância entre x e x' em \mathcal{M} [17].

Porém, sabemos que um ponto x em \mathcal{M} possui várias imagens, $\tilde{x}, \tilde{x}', \tilde{x}'', \dots$ em $\tilde{\mathcal{M}}$ e, portanto, de acordo com a definição da métrica $\tilde{\mathbf{g}}$, temos que os deslocamentos $\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}', \tilde{x} \rightarrow \tilde{x}'' \dots$ são isometrias. Essas isometrias do espaço de recobrimento formam um subgrupo discreto do grupo de isometrias, Γ [17] [16]. A ação desse grupo precisa ser livre, ou seja, nenhum ponto do espaço é invariante pelos elementos desse grupo. Com isso, temos a variedade quociente $\mathcal{M} = \tilde{\mathcal{M}}/\Gamma$, que é obtida identificando-se os pontos de $\tilde{\mathcal{M}}$ através da ação dos elementos de Γ . Essa ação também é responsável pela formação do mosaico de $\tilde{\mathcal{M}}$, construída com células idênticas do **domínio fundamental** [19][20]. O domínio ou região fundamental, também conhecido como **poliedro fundamental**, é um polígono ou poliedro a partir do qual uma variedade pode ser construída [16] através da identificação das faces desse poliedro.

Os elementos do grupo de isometria e as combinações desses são chamados, respectivamente, de “letras” e “palavras”.

Exemplo: Como vimos, o toro plano é dado por $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, e como já estamos falando de variedade com métrica, temos que o espaço de recobrimento é \mathbb{E}^2 , espaço euclidiano bi-dimensional. Portanto, a variedade quociente é $\mathcal{M} = \mathbb{E}^2/\Gamma$, onde Γ consiste nas translações discretas associadas com a identificação dos lados opostos do retângulo, o qual é o polígono fundamental.

2.1.4 Variedades Orientáveis

Variedades n dimensionais conexas, para $n > 1$, são classificadas como orientáveis ou não-orientáveis. Vejamos, com um exemplo, o que isso significa.

A fita de Möbius é uma variedade bi-dimensional construída a partir de um retângulo o qual é “torcido” antes de ter duas laterais unidas. Definimos um vetor \vec{n} normal à superfície em um ponto x e movemos esse vetor continuamente ao longo da fita até que ele retorne ao ponto x já apontando na direção $-\vec{n}$. Isso indica que a fita de Möbius é uma variedade não orientável.

Uma maneira simples, para verificarmos se a variedade é orientável ou não, é calcular o determinante da matriz de rotação dos geradores do grupo Γ ; se ele for positivo a variedade é orientável e se for negativo é não-orientável.

Como em uma variedade não-orientável espacialmente nós não podemos definir lado esquerdo e lado direito, se vivêssemos em um espaço não-orientável uma pessoa que viajasse da Terra para a Lua, por exemplo, quando retornasse estaria com o coração do lado direito do corpo. Ou seja, apenas as variedades orientáveis são de interesse na cosmologia [17] [21].

2.2 Variedades Orientáveis do Espaço Plano Compacto Tri-Dimensional

Seja Γ um grupo discreto de isometrias de um espaço geométrico n -dimensional X [22] tal que Γ atua livremente [23] em X . Então, o espaço X/Γ é chamado de forma-espacial - X , que é uma n -variedade. Quando $X = \mathbb{S}^n$, \mathbb{E}^n , ou \mathbb{H}^n , esférico, euclidiano e hiperbólico, respectivamente, temos que a forma-espacial - X é chamada de *forma-espacial de Clifford-Klein* [22]. Como neste trabalho estamos interessados somente no espaço euclidiano, nos restringeremos, daqui em diante, às propriedades do mesmo.

Teorema 2. [22] *Toda forma-espacial euclidiana, n -dimensional e compacta é finitamente*

recoberta por um n -toro euclidiano.

Além desse teorema, temos também um importante resultado, dado pelos três teoremas de Bieberbach [23], o qual nos diz que há um número finito de classes de isomorfismo de grupos cristalográficos n -dimensionais. No caso $n = 3$, temos 10 variedades possíveis mas somente 6 são orientáveis.

Portanto, faremos a classificação e descrição dessas variedades, aqui apresentadas por um lema e um teorema os quais seguem a seguinte notação:

1. Λ é a rede (formada pela região fundamental);
2. Γ^* representa o subgrupo das translações $t_i = t_{a_i}$, cujos geradores são $\{a_1, a_2, a_3\}$;
3. $\Psi = \Gamma/\Gamma^*$ representa o subgrupo das rotações;
4. Os ângulos do subgrupo de rotação, neste caso, são dados por $\frac{2\pi}{m}$;
5. α é o eixo de rotação.

Lema 3. [24] $\Psi \cap \text{SO}(3)$ é o grupo cíclico \mathbb{Z}_m de ordem $m = 1, 2, 3, 4$ ou 6 , ou $\Psi \cap \text{SO}(3) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ onde Λ é retangular.

Teorema 4. [24] Há somente 6 classes difeomórficas afins de variedades riemannianas planas tri-dimensionais compactas, conexas e orientáveis. Elas são representadas pelas variedades \mathbb{R}^3/Γ onde Γ é um dos 6 grupos \mathcal{G}_i dados abaixo.

\mathcal{G}_1 . $\Psi = 1$ e Γ é gerado pelas translações $\{t_1, t_2, t_3\}$ com $\{a_i\}$ linearmente independente.

\mathcal{G}_2 . $\Psi = \mathbb{Z}_2$ e Γ é gerado por $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$ onde $\alpha^2 = t_1$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_2^{-1}$ e $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_3^{-1}$, a_1 é ortogonal a a_2 e a_3 enquanto $\alpha = \left(A, t_{\frac{a_1}{2}}\right)$ com $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = -a_2$ e $A(a_3) = -a_3$.

\mathcal{G}_3 . $\Psi = \mathbb{Z}_3$ e Γ é gerado por $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$ onde $\alpha^3 = t_1$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_3$ e $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_2^{-1} t_3^{-1}$; a_1 é ortogonal a a_2 e a_3 , $\|a_2\| = \|a_3\|$ e $\{a_2, a_3\}$ é uma rede plana hexagonal, e $\alpha = \left(A, t_{\frac{a_1}{3}}\right)$ com $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = a_3$ e $A(a_3) = -a_2 - a_3$.

\mathcal{G}_4 . $\Psi = \mathbb{Z}_4$ e Γ é gerado por $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$ onde $\alpha^4 = t_1$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_3$ e $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_2^{-1}$; $\{a_i\}$ são mutuamente ortogonais com $\|a_2\| = \|a_3\|$ enquanto $\alpha = \left(A, t_{\frac{a_1}{4}}\right)$ com $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = a_3$ e $A(a_3) = -a_2$.

\mathcal{G}_5 . $\Psi = \mathbb{Z}_6$ e Γ é gerado por $\{\alpha, t_1, t_2, t_3\}$ onde $\alpha^6 = t_1$, $\alpha t_2 \alpha^{-1} = t_3$ e $\alpha t_3 \alpha^{-1} = t_2^{-1} t_3$; a_1 é ortogonal a a_2 e a_3 , $\|a_2\| = \|a_3\|$ e $\{a_2, a_3\}$ é uma rede plana hexagonal, e $\alpha = \left(A, t_{\frac{a_1}{6}}\right)$ com $A(a_1) = a_1$, $A(a_2) = a_3$ e $A(a_3) = a_3 - a_2$.

\mathcal{G}_6 . $\Psi = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e Γ é gerado por $\{\alpha, \beta, \gamma; t_1, t_2, t_3\}$ onde $\gamma\beta\alpha = t_1 t_3$ e

$$\alpha^2 = t_1, \quad \alpha t_2 \alpha^{-1} = t_2^{-1}, \quad \alpha t_3 \alpha^{-1} = t_3^{-1};$$

$$\beta t_1 \beta^{-1} = t_1^{-1}, \quad \beta^2 = t_2, \quad \beta t_3 \beta^{-1} = t_3^{-1};$$

$$\gamma t_1 \gamma^{-1} = t_1^{-1}, \quad \gamma t_2 \gamma^{-1} = t_2^{-1}, \quad \gamma^2 = t_3.$$

Os $\{a_i\}$ são mutuamente ortogonais

$$\alpha = \left(A, t_{\frac{a_1}{2}}\right) \quad \text{com} \quad A(a_1) = a_1, \quad A(a_2) = -a_2, \quad A(a_3) = -a_3;$$

$$\beta = \left(B, t_{\frac{(a_2+a_3)}{2}}\right) \quad \text{com} \quad B(a_1) = -a_1, \quad B(a_2) = a_2, \quad B(a_3) = -a_3;$$

$$\gamma = \left(C, t_{\frac{(a_1+a_2+a_3)}{2}}\right) \quad \text{com} \quad C(a_1) = -a_1, \quad C(a_2) = -a_2, \quad C(a_3) = a_3.$$

Todos esses grupos estão representados como um movimento rígido, o qual é definido da seguinte maneira:

Definição:[23] Um *movimento rígido* é um par ordenado (R, t) com $R \in O_n$ e $t \in \mathbb{R}^n$. A atuação de um movimento rígido em \mathbb{R}^n é dado por

$$(R, t).x = Rx + t, \tag{2.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$. E a multiplicação de dois deles tem a seguinte composição

$$(R_2, t_2)(R_1, t_1) = (R_2 R_1, R_2 t_1 + t_2). \tag{2.2}$$

Nós podemos escrever um movimento rígido (R, t) como uma matriz $(n+1) \times (n+1)$,

$$\begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

onde a composição (2.2) é dada pela multiplicação de matrizes usual. E é dessa forma que apresentaremos os 6 grupos dados no teorema 4.

2.2.1 Regiões Fundamentais

Para obter a região fundamental de uma variedade, aplicamos os geradores do Γ e combinações deles na origem e verificamos quais são os pontos mais próximos da mesma. A partir disso, calculamos o ponto médio entre a origem e cada ponto mais próximo e as equações do plano que passam por cada um desses pontos médios. As interseções desses planos resultam nas arestas e vértices do poliedro fundamental.

1. Cubo

Os geradores do grupo de isometria são dados por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

e suas inversas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

O toro é formado por um paralelepípedo, poliedro fundamental, cujas faces opostas são identificadas.

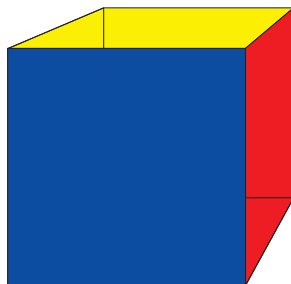


Figura 2: Região fundamental do cubo, $a = b = c = 1$, cujas faces são identificadas com suas respectivas faces opostas.

2. Cubo $\frac{1}{2}\pi$

Os geradores do grupo de isometria são dados por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{4} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

e suas inversas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-a}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

O toro é formado por um paralelepípedo que tem uma das faces do plano - yz girada 90 graus antes de ser identificada com a sua face oposta. As outras faces são identificadas como no caso anterior.

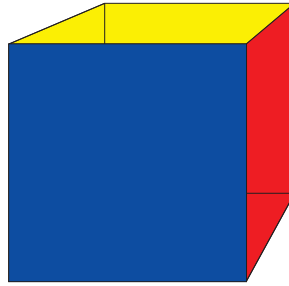


Figura 3: Região fundamental do cubo cuja face frontal é girada 90 graus antes de ser indentificada com sua face oposta e $a = b = 1$.

3. Cubo π

Os geradores do grupo de isometria são dados por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

e suas inversas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-a}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

O toro é formado por um paralelepípedo que tem uma das faces do plano - yz girada 180 graus antes de ser identificada com a sua face oposta. As outras faces são identificadas com as suas respectivas faces opostas.

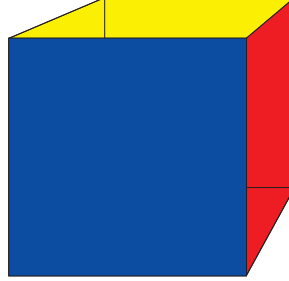


Figura 4: Região fundamental do cubo cuja face frontal é girada 180 graus antes de ser indentificada com sua face oposta e $a=b=c=1$.

4. Prisma Hexagonal $\frac{1}{3}\pi$

Os geradores do grupo de isometria são dados por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

e suas inversas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-a}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-\sqrt{3}b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Neste caso, a base do toro é hexagonal. O toro hexagonal é topologicamente equivalente ao toro (quadrado) mas o formato é diferente. A face hexagonal frontal do plano - yz é girada 60 graus antes de ser identificada com a face oposta.

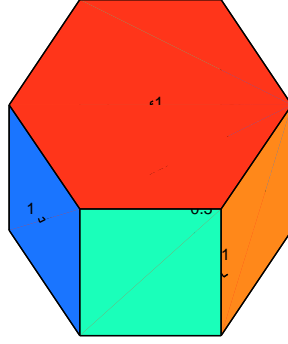


Figura 5: Região fundamental do prisma hexagonal cuja face hexagonal superior é girada 60 graus antes de ser indentificada com sua face oposta, $altura = a = 1$, $b = 1$ e $aresta = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. Prisma Hexagonal $\frac{2}{3}\pi$

Os geradores do grupo de isometria são dados por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{3} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

e suas inversas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{a}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}b}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Este também é um toro hexagonal cuja face frontal do plano - yz é girada 120 graus e então identificada com sua face oposta.

6. Hantzsche-Wendt

Os geradores do grupo de isometria, teorema 4 e [25], são dados por :

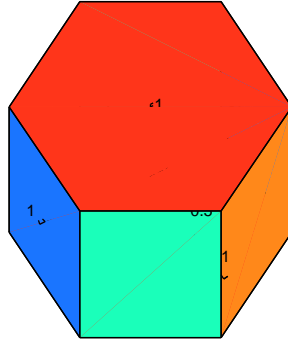


Figura 6: Região fundamental do prisma hexagonal cuja face hexagonal superior é girada 120 graus antes de ser indentificada com sua face oposta, $altura = a = 1$, $b = 1$ e $aresta = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{c}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

e suas inversas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-a}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-b}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{c}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \frac{a}{2} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-c}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

O poliedro fundamental, obtido para esta variedade, é um paralelepípedo cujos lados valem 1, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ e as faces são identificadas conforme mostra a figura.

Todas essas regiões fundamentais representam o interior do universo no qual obteremos o valor da energia de Casimir para vários pontos do mesmo.

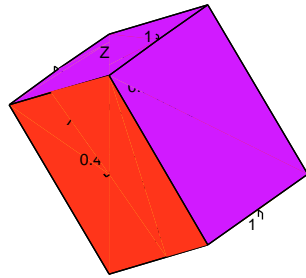


Figura 7: Região fundamental da variedade de Hantzsche-Wendt cujas arestas valem $1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$. As faces que possuem a mesma cor estão identificadas.

3 *Valor Esperado do Tensor Energia Momento*

O objetivo desta dissertação é calcular o valor esperado do tensor energia-momento de um campo escalar sem massa nas seis variedades planas, compactas, tridimensionais e orientáveis, as quais foram descritas no capítulo 2. É neste capítulo onde relacionamos os dois primeiros e apresentamos os resultados obtidos.

Na primeira seção, apresentamos a forma do valor esperado do tensor energia-momento utilizando as ferramentas tratadas no capítulo 1 e discutimos de que maneira a compactação do espaço aparece nessa estrutura.

Na segunda seção, utilizamos os resultados do capítulo 2 para descrever os elementos dessa compactação. Podendo, assim, finalizar este capítulo com uma seção onde apresentamos os resultados obtidos para as seis variedades.

3.1 *Tensor Energia - Momento em Espaços Compactos*

No capítulo 1, partimos da ação de um campo escalar em um campo de fundo curvo, equação (1.12), para obtermos o valor esperado do tensor energia momento do mesmo. Porém, nos deparamos com uma divergência, a qual surge devido ao produto do campo no mesmo ponto x . Por isso, o valor esperado do tensor energia-momento foi regularizado com o método de separação de pontos e, dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} \langle T^{\mu\nu} \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} & \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) (G^{(1); \mu' \nu} + G^{(1); \mu \nu'}) + \left(\xi - \frac{1}{4} \right) g^{\mu\nu} G_{;\sigma}^{(1)\sigma'} \right. \\ & - \frac{1}{2} \xi (G^{(1); \mu' \nu'} + G^{(1); \mu \nu}) + \frac{\xi g^{\mu\nu}}{8} (G_{;\sigma'}^{(1)\sigma'} + G_{;\sigma}^{(1)\sigma}) + \frac{3}{4} \xi g^{\mu\nu} (\xi R + m^2) G^{(1)} \\ & \left. + \frac{1}{2} \xi \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) G^{(1)} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} m^2 G^{(1)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nosso objetivo é calcular a equação (3.1) no caso de um campo sem massa, em um

espaço plano, $R = 0$, e com acoplamento mínimo, $\xi = 0$, o que nos leva a

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \left\{ \frac{1}{4} (G^{(1),\mu'\nu} + G^{(1),\mu\nu'}) - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} G^{(1)\sigma'}_{,\sigma} \right\}, \quad (3.2)$$

onde o propagador $G^{(1)}(x, x')$ é a função de Hadamard, a qual também foi calculada no capítulo 1 para o espaço-tempo $\mathcal{R} \times \mathcal{R}^3$ e é dada pela equação (3.3),

$$G^{(1)}(x - x') = \frac{2}{(2\pi)^2} \frac{1}{(x - x')^2 - i\epsilon}. \quad (3.3)$$

Nos resta então, interpretar e verificar como uma topologia não trivial modifica o resultado (3.3). Isto é, precisamos conhecer $G^{(1)}_{\mathcal{M}^3}$ onde \mathcal{M}^3 são as seis variedades dadas no teorema 4.

Recordando que o propagador é a função de Green, isto é, a solução da equação diferencial (1.43), vemos que a compactação do espaço serve como condição de contorno dessa equação. Essa condição impõe uma periodicidade na função de Hadamard. Essa periodicidade advém do fato da variedade ser multiplamente-conexa, ou seja, temos vários caminhos que ligam x a x' que não podem ser deformados continuamente uns nos outros. A compactação do espaço é expressa através dos elementos de Γ que fazem as identificações dos pontos no espaço de recobrimento.

A técnica, que usamos para escrever a função de Hadamard nas seis variedades citadas, consiste em somar o propagador do campo no espaço de Minkowski em todas as identificações de um ponto x de forma que, se fizermos uma aplicação de um elemento de Γ , nesse somatório, levamos um termo em outro já existente, tornando esse somatório invariante sob esse tipo de transformação. A partir disso, obtemos

$$G^{(1)}_{ren, \mathcal{M}^3}(x, x') \equiv \sum_{\gamma_n \in \Gamma} ' G^{(1)}(x, \gamma_n x'), \quad (3.4)$$

onde $\gamma_n x^{\alpha'} = (x^{0'}, \gamma_n \vec{x}')$ e γ_n são as palavras sob o qual o somatório é feito. Lembremos que esse resultado é válido somente quando o somatório converge. Também é importante ressaltar que todas as palavras do somatório são independentes, isto é, não queremos que duas palavras distintas levem a um mesmo ponto x no espaço de recobrimento. Assim como na seção 1.5, renormalizamos o nosso resultado excluindo o caminho direto do somatório.

Como temos infinitos elementos em Γ e queremos realizar um cálculo numérico, precisamos truncar o somatório. Para truncar essa série de forma adequada, notamos que o valor esperado do tensor energia-momento é inversamente proporcional a quarta potência

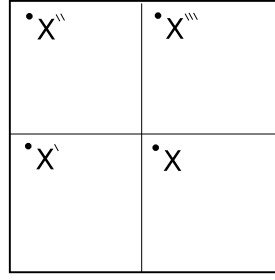


Figura 8: A região fundamental que possui o ponto x é onde nós aplicamos as isometrias que geram os outros pontos.

da distância, pois de (1.58) e (1.55) temos

$$\langle T^{00} \rangle = \frac{-1}{\pi^2} \lim_{x' \rightarrow x} \sum_{\gamma_n \in \Gamma} ' \frac{1}{(x - \gamma_n x')^4}, \quad (3.5)$$

$$\langle T^{0i} \rangle = 0, \quad (3.6)$$

$$\langle T^{ii} \rangle = \frac{-1}{\pi^2} \lim_{x' \rightarrow x} \sum_{\gamma_n \in \Gamma} ' \left[\frac{-1}{(x - \gamma_n x')^4} + \frac{4(x^i - \gamma_n x'^i)^2}{(x - \gamma_n x')^6} \right] \quad (3.7)$$

e

$$\langle T^{ij} \rangle = \frac{-1}{\pi^2} \lim_{x' \rightarrow x} \sum_{\gamma_n \in \Gamma} ' \frac{4(x^i - \gamma_n x'^i)(x^j - \gamma_n x'^j)}{(x - \gamma_n x')^6}, \quad (3.8)$$

onde usamos a assinatura $(-, +, +, +)$. Com isso, temos que a contribuição dos termos, conforme nos afastamos do ponto x , diminui rapidamente tornando-se desprezível. Neste trabalho, escolhemos fazer o somatório com palavras de até 16 letras.

3.2 O Cálculo Numérico

Os valores esperados, descritos acima, são calculados dentro das regiões fundamentais descritas no capítulo 2. Para obter essas palavras, fizemos um programa em Perl o qual consiste em aplicar os três geradores e suas inversas, de cada uma das seis variedades, um a um, em um ponto qualquer do E^3 formando palavras de até dezesseis letras. Se voltarmos ao teorema 4, veremos que as inversas não estão incluídas. Essa inclusão foi feita para podermos nos “movimentar” em todas as direções em quantidades iguais. A cada aplicação de qualquer palavra armazenamos o resultado em um banco de dados. Esse procedimento é finalizado quando todas as combinações possíveis de geradores formam as palavras de dezesseis letras. Utilizar banco de dados é a maneira mais eficiente de se trabalhar com uma grande quantidade de dados. Seleccionamos e armazenamos somente as palavras independentes, já que seria inviável guardar todas as $\sum_{n=1}^{16} 6^n$ palavras.

O ponto escolhido para essa aplicação foi a origem da região fundamental, no qual é equivalente à aplicação somente da translação como podemos ver na equação (2.1) e no exemplo abaixo. E, com isso, quando escolhermos qualquer outro ponto, só precisamos aplicar a parte relacionada à rotação dos geradores nesse ponto, assim como na equação (2.2), e somar com o resultado obtido para a origem, sendo a palavra aplicada na origem igual a do outro ponto. Vejamos de forma clara com um exemplo, no qual A e B são os dois geradores de uma variedade qualquer.

Exemplo: Aplicação dos geradores na origem:

$$A.0 = (A_R, t_A).0 = t_A,$$

$$A^2.0 = (A_R, t_A).t_A = A_R t_A + t_A,$$

$$A^3.0 = (A_R, t_A).(A_R t_A + t_A) = A_R^2 t_A + A_R t_A + t_A, \quad (3.9)$$

$$BA.0 = (B_R, t_B).t_A = B_R t_A + t_B,$$

$$ABA.0 = (A_R, t_A).(B_R t_A + t_B) = A_R B_R t_A + A_R t_B + t_A. \quad (3.10)$$

Aplicação dos geradores em um ponto x qualquer:

$$A.x = (A_R, t_A).x = A_R x + t_A,$$

$$A^2.x = (A_R, t_A).(A_R x + t_A) = A_R^2 x + A_R t_A + t_A$$

$$A^3.x = (A_R, t_A).(A_R^2 x + A_R t_A + t_A) = A_R^3 x + A_R^2 t_A + A_R t_A + t_A \quad (3.11)$$

$$BA.x = (B_R, t_B).(A_R x + t_A) = B_R A_R x + B_R t_A + t_B$$

$$ABA.x = (A_R, t_A).(B_R A_R x + B_R t_A + t_B) = A_R B_R A_R x + A_R B_R t_A + A_R t_B + t_A. \quad (3.12)$$

Queremos saber como o valor esperado do tensor energia-momento se comporta nesse espaço. Portanto, precisamos calculá-lo em vários pontos da região fundamental. Para isso, fizemos outro programa, em C, no qual realizamos o cálculo final, onde criamos uma rede cúbica dentro dessa região. Nove “fatias” do poliedro fundamental são selecionadas na direção x . A seleção no plano yz é feita de modo a calcularmos dez mil pontos nele.

Já sabemos qual é a região fundamental das seis variedades. No caso das quatro variedades cuja região é um paralelepípedo, fizemos a escolha de que todas as translações fossem iguais a 1, com isso, obtemos um cubo. A mesma escolha foi feita para os dois casos do prisma hexagonal, portanto temos uma base hexagonal cujos lados valem $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e a altura é igual a 1. A partir disso, escolhemos o intervalo entre as coordenadas da direção

y dos pontos igual a 10^{-2} , sendo o mesmo para a direção z , e, assim temos um plano com dez mil pontos selecionados para calcularmos o valor esperado da energia de Casimir.

3.3 Resultados e Análise de Dados

Com os programas desenvolvidos, esse cálculo pode ser feito facilmente para as seis variedades discutidas no capítulo 2. Porém, temos que esse cálculo pode ser estendido para topologias mais complicadas ou até para campos diferentes, pois as idéias foram construídas de forma independente. Por exemplo, se mudássemos o spin do campo, bastaria alterar a forma do propagador no espaço de Minkowski.

Esses resultados podem ser usados em modelos cosmológicos, pois uma análise das condições de energia pode dar informações sobre as conseqüências desses modelos na evolução do universo e na sua forma atual. O efeito Casimir é um efeito quântico que, provavelmente, teve relevância no universo primordial.

Neste trabalho, a forma do propagador e, conseqüentemente, o tensor energia-momento têm uma forma particularmente simples e, portanto, podemos fazer uma análise a priori do resultados. Por exemplo, para o cubo 0, sabemos que a energia será constante pois todos os pontos distam da mesma forma de suas imagens. Então, analisando as várias distâncias entre os pontos e suas imagens, podemos ter uma visão intuitiva do que está acontecendo em cada variedade. A seguir, apresentamos os resultados e essa análise para cada variedade.

1. Cubo

Neste caso, temos somente translações da região fundamental nas três direções espaciais. Portanto, a distância entre um ponto x qualquer da região inicial e o seu respectivo ponto identificado é igual à distância entre o ponto x' , também da região inicial, e seu ponto identificado. Dessa forma, se gerássemos um gráfico obteríamos uma constante, toda a região fundamental, por ele representado, tem a mesma energia.

Para simplificar o cálculo, fatoramos $\frac{-1}{\pi^2}$ de todos os resultados que são dados em unidades naturais, isto é, $\hbar = c = 1$.

2. Cubo $\frac{1}{2}\pi$

Os gráficos das nove “fatias”, citadas anteriormente, são iguais. Portanto, temos que a distribuição de energia ao longo de todo o eixo x se mantém uniforme. Já

no plano yz , percebemos que a energia no centro e nos vértices é menor. Isso se deve ao fato de termos muitas imagens alinhadas com o ponto original, o que não acontece com os outros pontos devido à rotação de noventa graus.

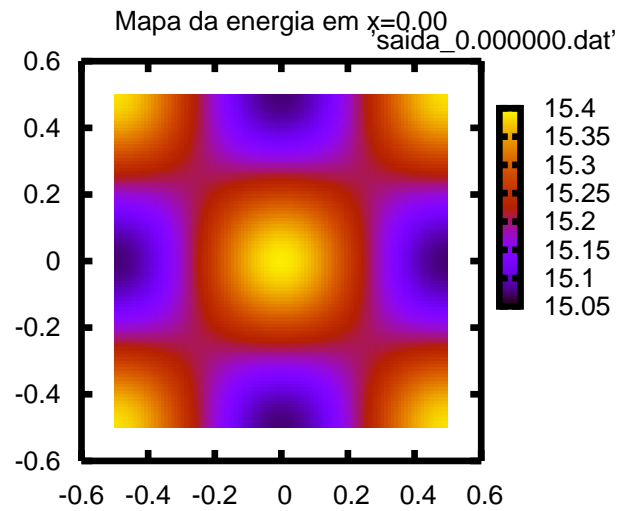


Figura 9: Distribuição de energia no plano yz em $x = 0$.

3. Cubo π

Como no caso anterior, os nove gráficos gerados são iguais, portanto, temos que a distribuição de energia ao longo do eixo x é uniforme. A maior diferença que notamos entre este caso e o anterior, é que nas extremidades das laterais temos pontos de mais baixa energia como no centro e nos vértices. Isso acontece porque a rotação é de cento e oitenta graus, portanto, o ponto médio das laterais têm muitas imagens com a menor distância possível entre elas e o ponto original.

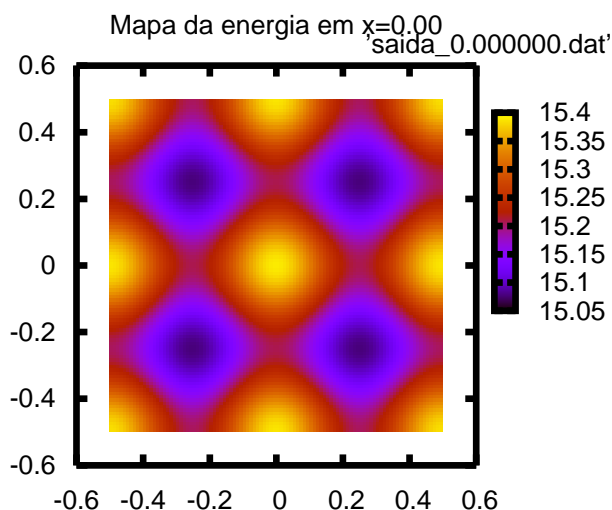


Figura 10: Distribuição de energia no plano yz em $x = 0$.

4. Prisma Hexagonal $\frac{1}{3}\pi$

Os nove gráficos gerados são iguais, portanto temos que a distribuição de energia ao longo do eixo x é uniforme. A distância entre os pontos do centro e suas respectivas imagens é menor que a distância entre os pontos da borda e suas imagens. Esse aumento se dá de forma uniforme. Mesmo os vértices e as regiões mais próximas deles mantêm as distâncias maiores pois, neste caso, somente após seis rotações os vértices retornam à sua posição “inicial”, isto é, estarão alinhados com o seu respectivo vértice da região fundamental onde estão sendo aplicadas as palavras.

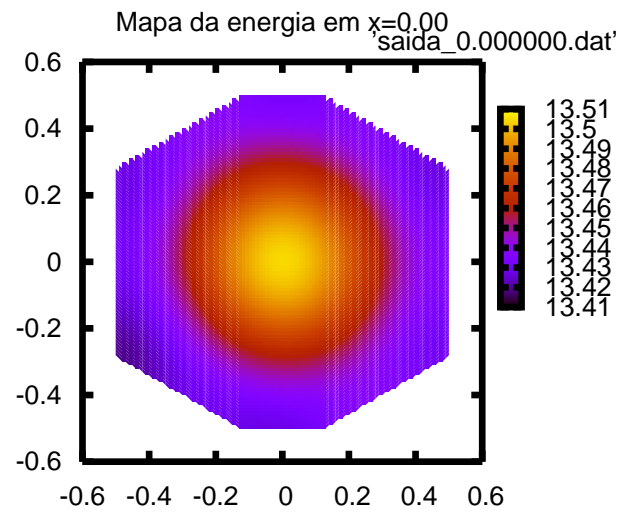


Figura 11: Distribuição de energia no plano yz em $x = 0$.

5. Prisma Hexagonal $\frac{2}{3}\pi$

Os nove gráficos gerados são iguais, portanto temos que a distribuição de energia ao longo do eixo x é uniforme. A principal característica que difere o resultado do prisma hexagonal $\frac{2}{3}\pi$ para o prisma hexagonal $\frac{1}{3}\pi$ é a energia nos vértices. Neste caso, os vértices retornam às suas posições “iniciais” após três rotações.

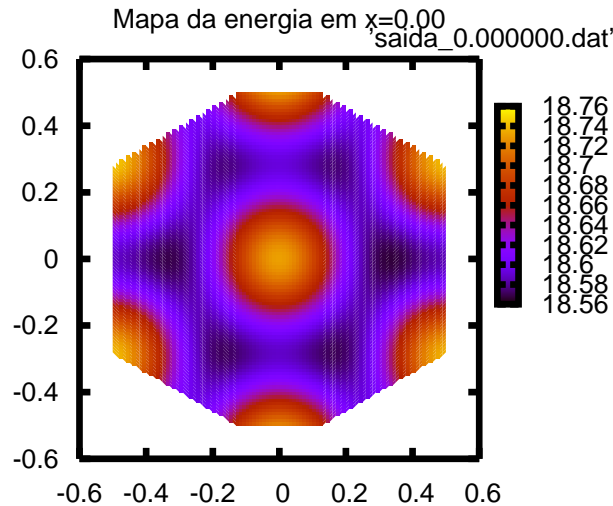
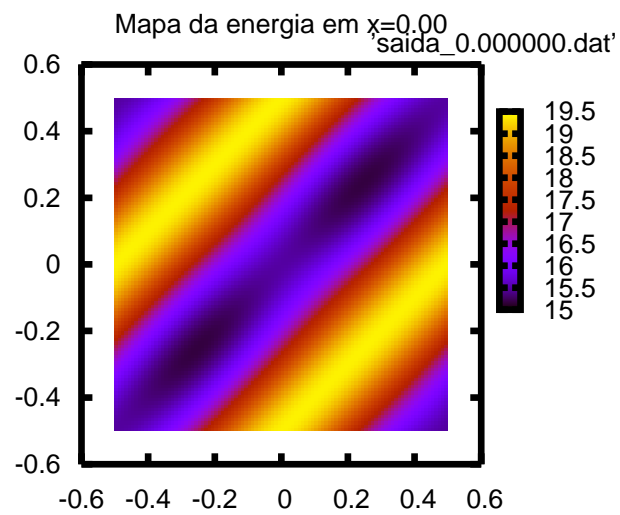
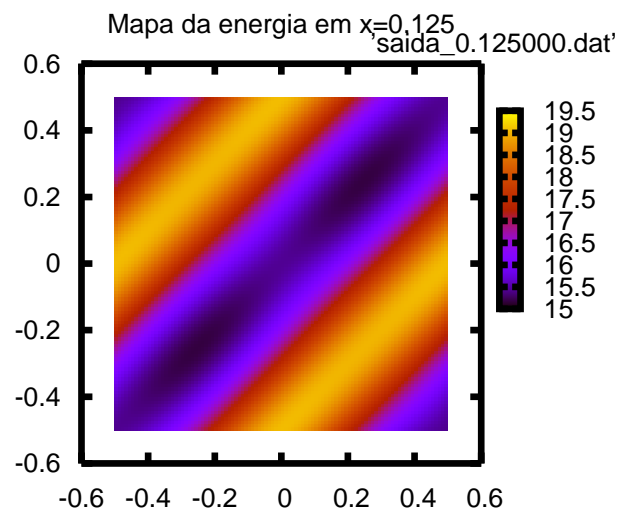


Figura 12: Distribuição de energia no plano yz em $x = 0$.

6. Hantzsche-Wendt

A região fundamental, obtida da forma descrita no capítulo 2, estava com os vértices sobre os eixos y e z . De forma a simplificar o programa, especificamente para o cálculo dos pontos da rede, aplicamos uma transformação da forma RAR^{-1} , onde R e A são matrizes 4×4 , para girarmos a região em noventa graus e obtermos um cubo de lado 1 e não $\sqrt{2}$. A justificativa para essa última alteração é diminuirmos o erro numérico, pois se trabalharmos com um número flutuante, ao invés de um inteiro, já teremos associado a ele uma imprecisão.

A variedade de Hantzsche-Wendt é a única que não apresenta uma uniformidade no eixo x , apesar de serem simétricos, isto é, o gráfico no ponto $x = 0,5$ é igual ao do $x = -0,5$. O resultado mais interessante, dessa variedade, é que a energia no centro, ao contrário das outras quatro, é a maior energia possível, independente do ponto x .

Figura 13: Distribuição de energia no plano yz em $x = 0$.Figura 14: Distribuição de energia no plano yz em $x = 0,125$.

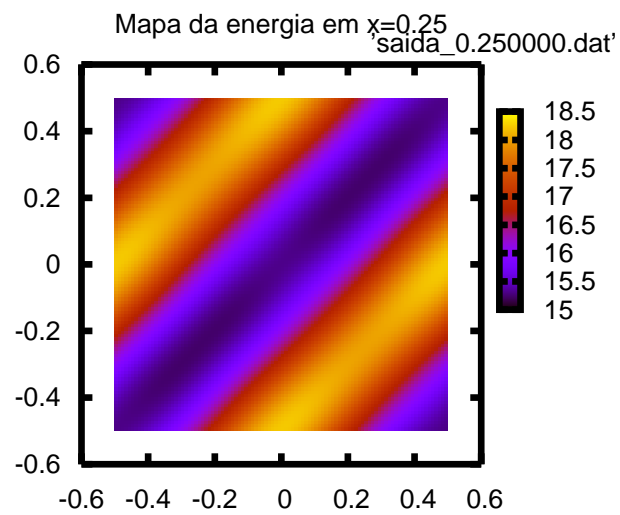


Figura 15: Distribuição de energia no plano yz em $x = 0,25$.

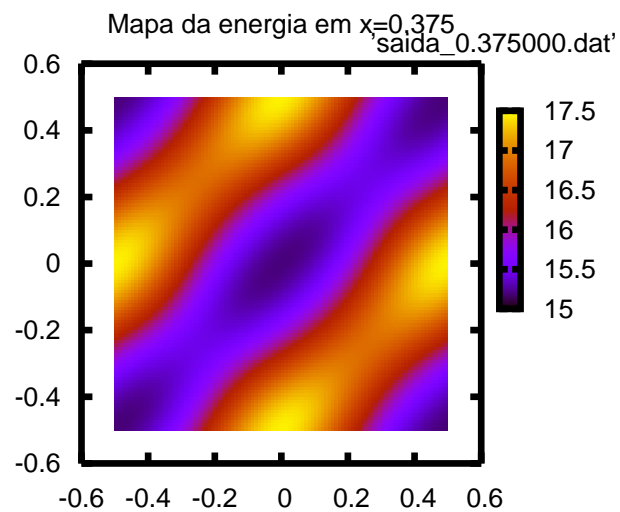


Figura 16: Distribuição de energia no plano yz em $x = 0,375$.

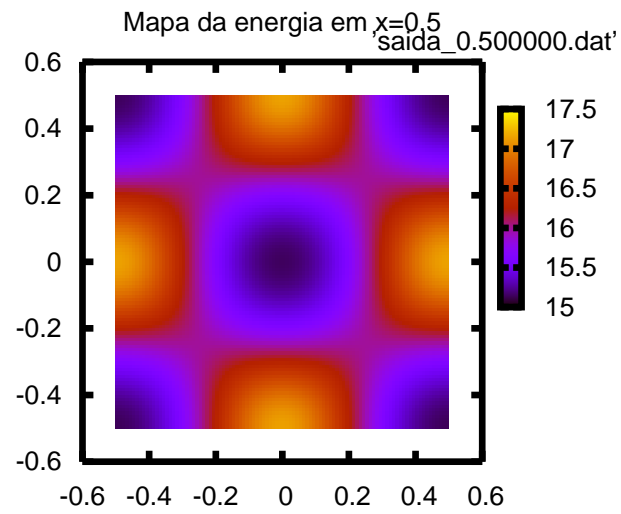


Figura 17: Distribuição de energia no plano yz em $x = 0,5$.

Conclusão

O fato das equações de Einstein não determinarem totalmente a topologia do universo, faz com que nós tenhamos que escolhê-la ao resolvermos algum problema. Nesta dissertação, escolhemos trabalhar com espaços planos, compactos, tridimensionais e orientáveis, já que a compactação nos gera um efeito quântico, o Efeito Casimir. Esse, por sua vez, provavelmente só foi relevante no universo primordial, pois, devido à expansão desse, os efeitos devido à compactação tendem a diminuir.

Das cinco variedades, para as quais obtivemos resultados não triviais, somente a variedade de Hantzsche-Wendt não se mostrou uniforme ao longo do eixo x e é a única que possui o centro com a maior energia. Essas diferenças podem ser atribuídas ao fato da variedade de Hantzsche-Wendt ser a única a possuir rotação em torno dos três eixos.

A partir desses resultados, podemos fazer uma análise física dos tensores energia-momento para que possamos estudar a viabilidade de modelos cosmológicos em espaços como os estudados neste trabalho. Existe, também, a possibilidade de procurar padrões nas distribuições de estrelas compatíveis com as simetrias de cada variedade.

Referências

- [1] B. S. DeWitt. Quantum field theory in curved space-time. *Phys. Rept.*, 19:295 – 357, 1975.
- [2] H. B. G. Casimir. On the attraction between two perfectly conducting plates. *Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc.*, 51:793–795, 1948.
- [3] M. J. Sparnaay. Measurements of attractive forces between flat plates. *Physica*, 24:751–764, 1958.
- [4] S. K. Lamoreaux. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 micrometers range. *Phys. Rev. Lett.*, 78:5–7, 1997.
- [5] M. Bordag, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko. New developments in the casimir effect. *Phys. Rept.*, 353:1–205, 2001.
- [6] N. D. Birrel and P. C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1984.
- [7] J. S. Dowker and R. Critchley. Effective lagrangian and energy momentum tensor in de sitter space. *Phys. Rev.*, D13:3224, 1976.
- [8] S. W. Hawking. Zeta function regularization of path integrals in curved space-time. *Commun. Math. Phys.*, 55:133, 1977.
- [9] S. G. Mamayev A. A. Grib and V. M. Mostepanenko. *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields*. Friedmann Laboratory Publishing, St. Petersburg, 1994.
- [10] H. Kleinert. *Particles and Quantum Fields*. Berlin, 1996.
- [11] D. Muller. Casimir effect in compact universes. 2004.
- [12] B. S. DeWitt. *Dynamical Theory of Groups and Fields*. Documents on Modern Physics. Gordon and Breach, New York, 1965.
- [13] C. J. Isham B. S. DeWitt, C. F. Hart. Topology and quantum field theory. *Physica A*, 96:197–211, 1979.
- [14] H. Seifert and W. Threlfall. *A Textbook of Topology*. Academic Press, 1980.
- [15] W. S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Number 127 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1991.
- [16] J. Levin. Topology and the cosmic microwave background. *Phys. Rept.*, 365:251–333, 2002.

- [17] M. Lachieze-Rey and J. Luminet. Cosmic topology. *Phys. Rept.*, 254:135–214, 1995.
- [18] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 2000.
- [19] M. J. Reboucas. A brief introduction to cosmic topology. 2005.
- [20] M. J. Reboucas and G. I. Gomero. Cosmic topology: A brief overview. *Braz. J. Phys.*, 34:1358–1366, 2004.
- [21] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1989.
- [22] J. G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Number 149 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [23] L. S. Charlap. *Bieberbach Groups and Flat Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [24] J. A. Wolf. *Spaces of Constant Curvature*. Publish or Perish, 1984.
- [25] G. I. Gomero and M. J. Reboucas. Detectability of cosmic topology in flat universes. *Phys. Lett.*, A311:319–330, 2003.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)