



FUNDAÇÃO EDSON QUEIROZ
UNIVERSIDADE DE FORTALEZA - UNIFOR

LUIZ OTAVIO RIBEIRO AFONSO FERREIRA

RELAXAÇÃO LAGRANGEANA APLICADA A UM
SISTEMA DE TELEFONIA MÓVEL

Fortaleza-CE
2004

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

FERREIRA, Luiz Otavio Ribeiro Afonso.

RELAXAÇÃO LAGRANGEANA APLICADA A UM SISTEMA DE TELEFONIA MÓVEL

Fortaleza: Universidade de Fortaleza

Mestrado em Informática Aplicada, 2004.

Perfil do Autor: Graduado em Ciências Econômicas na UNIFOR – 1995, Pós-Graduado em Informática pela UFC-1997, Professor da FIC / Sistemas de Informação - Administração Geral

RESUMO:

Neste trabalho, apresenta-se um algoritmo para solução de um problema linear inteiro misto de grande porte. Este problema aparece durante o projeto de uma rede de transmissão do Sistema de Telefonia Móvel – STM. Objetivando apresentar soluções de boa qualidade para o problema de telefonia móvel, aplica-se relaxação lagrangeana com o método de subgradiente acrescentando heurísticas ao limite superior. O algoritmo do método subgradiente foi aplicado a um estudo de caso (STM – Fortaleza / CE) com até 8.124 variáveis inteiras, 8.092 variáveis binárias e 5.128 restrições. O gap de dualidade é promissor e os resultados computacionais obtidos são satisfatórios.

ÍNDICE PARA CATÁLOGO SISTEMÁTICO

1. Pesquisa Operacional
2. Programação Não Linear
3. Programação Inteira
4. Telefonia Móvel
5. Relaxação Lagrangeana
6. Subgradiente.

C.D.U:



FUNDAÇÃO EDSON QUEIROZ
UNIVERSIDADE DE FORTALEZA – UNIFOR

**RELAXAÇÃO LAGRANGEANA APLICADA A UM
SISTEMA DE TELEFONIA MÓVEL**

Luiz Otavio Ribeiro Afonso Ferreira

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Informática Aplicada da Universidade de Fortaleza, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Informática Aplicada.

Orientador: Professor Plácido Rogério Pinheiro, D. Sc.

Aprovada por:

Professor Plácido Rogério Pinheiro, D. Sc.
(Presidente da Banca)

Professor Elder Magalhães Macambira, D. Sc.

Professor José Lassance de Castro Silva, D. Sc.

Fortaleza, CE - Brasil.

2004

DEDICATÓRIA

Às MÃES

Sou um privilegiado em possuir mais de uma:

Esposa, Silvana Alencar A. Ribeiro (SIL),

Irmã, Christiane Ribeiro (TITA),

Mãe, Odete Ribeiro da Silva (DETINHA),

Avó, Socorro Ribeiro (ZINHA),

Sogra, Raimunda A. Albuquerque (DINHA).

AGRADECIMENTOS

Aos meus Familiares;

Aos Familiares de Silvana;

Ao Professor D. Sc. Plácido Rogério Pinheiro e família;

Ao Professor D. Sc. Antônio Clécio Fontelles Thomaz e família;

Ao Professor D. Sc. Pedro Porfírio;

Ao Professor M. Sc. Maikol Magalhães Rodrigues;

Ao M. Sc. Francisco Edmundo de Andrade;

Ao Alexei Barbosa Aguiar;

As pessoas que fazem parte do nosso cotidiano.

Abstract of the Dissertation presented to the Master in Applied Computer Science of the University of Fortaleza (UNIFOR) as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master degree in Science of Computing (M. Sc.)

**LAGRANGIAN RELAXATION APPLIED TO THE
MOBILE TELEPHONE SYSTEM**

Luiz Otavio Ribeiro Afonso Ferreira

April / 2004

Advisor: Plácido Rogério Pinheiro, D. Sc.

Course: Mastering in Applied Computer Science

This work presents an algorithm to solve the mixed integer linear problem of large scale, which optimizes the design network of transmission for the Mobile Telephone System – MTS.

We use the Lagrangian relaxation aiming to reduce the time solution then, we study some methods for the solution of the dual problem, among them, the method of subgradient adding to this heuristics methods to the upper bound.

This algorithm is implemented and tested for a case study and some hypothetical examples with up to 8,124 integer variables, 7,900 binary variables and 5,128 constraints.

The duality gap is significant and the obtained results are very good.

Resumo da Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Informática Aplicada (MIA) da Universidade de Fortaleza (UNIFOR), como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação (M. Sc.)

**RELAXAÇÃO LAGRANGEANA APLICADA A UM
SISTEMA DE TELEFONIA MÓVEL**

Luiz Otavio Ribeiro Afonso Ferreira

Abril / 2004

Orientador: Professor Plácido Rogério Pinheiro, D. Sc.

Curso: Mestrado em Informática Aplicada

Neste trabalho, apresenta-se um algoritmo para solução de um problema linear inteiro misto de grande porte. Este problema aparece durante o projeto de uma rede de transmissão do Sistema de Telefonia Móvel – STM. Objetivando apresentar soluções de boa qualidade para o problema de telefonia móvel, aplica-se relaxação lagrangeana com o método de subgradiente acrescentando heurísticas ao limite superior. O algoritmo do método subgradiente foi aplicado a um estudo de caso (STM – Fortaleza / CE) com até 8.124 variáveis inteiras, 8.092 variáveis binárias e 5.128 restrições. O gap de dualidade é promissor e os resultados computacionais obtidos são satisfatórios.

LISTA DE FIGURAS

FIG. 1.1 REDE DE TELECOMUNICAÇÃO	04
FIG. 1.2 TOPOLOGIA ESTRELA	04
FIG. 1.3 TOPOLOGIA ÁRVORE	05
FIG. 1.4 TOPOLOGIA MISTA	05
FIG. 1.5 HIERARQUIA DIGITAL PLESIÓCRONA (PDH)	07
FIG. 1.6 HIERARQUIA DIGITAL SÍNCRONA (SDH)	08
FIG. 1.7 ESTRUTURA FORTALEZA	09
FIG. 1.8 ESTRUTURA HIPOTÉTICA 1	10
FIG. 1.9 SOFTWARE DE RELAXAÇÃO	30
FIG. 1.10 ESTRUTURA HIPOTÉTICA 2	31

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Conversão das capacidades dos feixes.	07
Tabela 2 – Resultados do STM 4.2.1	36
Tabela 3 – Resultados do STM 4.2.2	38
Tabela 4 – Resultados do STM 4.2.3	40
Tabela 5 – Resultados do STM 4.2.4	42

LISTA DE SIGLAS E ABREVIACÕES

AMPS – Advanced Mobile Phone System

BTS – Base Transceiver Station

CCC - Central de Comutação e Controle

CDMA – Code Division Multiple Access

CSV – Comma-separated values

ERB - Estação Rádio Base

Gbps – Gigabits por segundo

GSM – Global System for Mobile Communications

HDSL – High Speed Digital Subscriber Line

Kbps - Kilobits por segundo

Mbps – Megabits por segundo

MSC - Mobile Switch Center

PDH - Plesióchronous Digital Hierarchy

PSTN – Public Switched Telephone Network

RBS - Radio Base Station

SDH - Synchronous Digital Hierarchy

TDMA – Time Division Multiple Access

UTM – Universal Transverse Mercator

STM – Sistema de Telefonia Móvel

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 1. Sistema de Telefonia Móvel	3
1.1. Composição do Sistema de Telefonia Móvel.....	3
CAPÍTULO 2. Modelo Proposto.....	11
2.1. Descrição do Modelo.....	11
CAPÍTULO 3. Aplicação da relaxação Lagrangeana com subgradiente	14
3.1. Conceito e evolução	14
3.2. Relaxação e decomposição lagrangeana.....	16
3.3. Propriedade da função dual	20
3.4. Definição do problema dual e suas propriedades	22
3.5. Otimização do problema.....	25
3.6. O Algoritmo de subgradiente	28
CAPÍTULO 4. Implementação e resultados computacionais.....	30
4.1. O Programa.....	31
4.2. Resultados dos testes computacionais	36
4.2.1. STM com tamanho de [8 ERB, 1 HUB e 1 CCC]	36
4.2.2. STM com tamanho de [15 ERB, 1 HUB e 1 CCC]	38
4.2.3. STM com tamanho de [128 ERB, 2 HUB e 1 CCC]	40
4.2.4. STM com tamanho de [256 ERB, 2 HUB e 1 CCC]	42
CONCLUSÃO.....	44
BIBLIOGRAFIA.....	46

INTRODUÇÃO

Nos últimos quatro anos, a alocação da rede de transmissão tornou-se um componente de custo elevado no Sistema de Telefonia Móvel – STM. A complexidade de todas as combinações de tecnologias e topologias torna esta alocação difícil de ser manuseada, pois quanto maior for a dimensão da rede, maior o impacto de possíveis desperdícios.

Para a descrição do STM, apresenta-se um modelo matemático que representa um problema de grande porte, descrito por Kubat (2000). Uma técnica de relaxação lagrangeana é aplicada ao modelo e alguns experimentos computacionais são realizados através de uma ferramenta computacional que faz uso de rotinas de otimização para este fim. Neste experimento realizou-se um estudo comparativo de instâncias hipotéticas e reais. Em ambos os casos procuraram-se melhorar a diferença (gap) entre a solução inteira e a solução obtida com a relaxação Lagrangeana.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos, conforme a descrição a seguir:

No capítulo 1, apresenta-se uma visão do Sistema de Telefonia Móvel destacando seus principais componentes. Examinam-se algumas topologias de redes em geral, como: anel, árvore, barramento, estrela e mista; explorando também a variação de combinações dos feixes de comunicação.

Um modelo matemático em programação linear inteira apresentado por Kubat (2000) é descrito no capítulo 2, com este modelo desejam minimizar o custo da alocação do projeto de rede de transmissão do Sistema de Telefonia Móvel segundo as restrições necessárias para a operacionalização do modelo.

No capítulo 3, são apresentados os conceitos básicos da técnica de Relaxação Lagrangeana com subgradiente aplicado ao modelo proposto no capítulo 2.

No capítulo seguinte, são apresentados a implementação da técnica de relaxação Lagrangeana e os resultados computacionais dos problemas utilizados com o algoritmo de relaxação Lagrangeana com subgradiente, ressaltando o gap - a comparação entre a solução ótima obtida por Pinheiro (2003) e as soluções relaxadas - e destacando qual o melhor conjunto de restrições do modelo a ser relaxado.

Por último, apresentam-se algumas considerações finais e enumeram-se algumas sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 1. Sistema de Telefonia Móvel

Fazendo fronteira com países sul-americanos com Argentina, Bolívia, Colômbia, Guianas, Uruguai, Paraguai, Peru, Venezuela e outros, está o Brasil. Todas as capitais brasileiras apresentam, em proporções relevantes, o problema do Sistema de Telefonia Móvel (STM).

O estudo de caso refere-se à Fortaleza, capital do estado do Ceará, aproximadamente, com 2.141.402 habitantes, encontrado no IBGE (2000). Atualmente, o STM desta capital utiliza-se de várias empresas na prestação do serviço de operação da telefonia móvel. A empresa analisada no estudo de caso atende a uma demanda da capital com uma estrutura física composta de 100 (cem) Estação Rádio Base - ERB, 3 (três) HUB e 1 (uma) Central de Comutação e Controle - CCC, atuando de forma manual. A seguir, a composição de um STM é descrita detalhadamente.

1.1. Composição do Sistema de Telefonia Móvel

A composição de um Sistema de Telefonia Móvel é formada por uma ou mais CCC – Centrais de Comutação e Controle (ou do inglês *Mobile Switching Center* - MSC), e de ERB – Estações Rádio Base (ou do inglês *Radio Base Station* - RBS). As ERB's são distribuídas de forma a atender toda área de cobertura no nível mínimo de sinal de rádio frequência garantindo, assim, uma qualidade de conversação aceitável. Fatores físicos e o aumento da demanda de tráfego dificultam o sinal de transmissão, exigindo um acréscimo de ERB ao STM. Considerando ainda o número limitado de canais de escoamento das ERB para a CCC, onde acontece o processamento de chamadas do sistema que são encaminhados a centrais de telefonia fixa (ou do inglês *Public*

Switched Telephone Network - PSTN) e ao próprio sistema, sendo interligada pelas ERB entre os enlaces de rádio frequência dos aparelhos móveis, assim, uma chamada de um determinado aparelho móvel ocupa um canal de rádio frequência de uma ERB, conseqüentemente, um canal do meio de transmissão ERB-CCC. A Figura 1.1 exemplifica uma rede de telecomunicação, proposto por Alencar (1998), com MSC, RBS e PSTN.

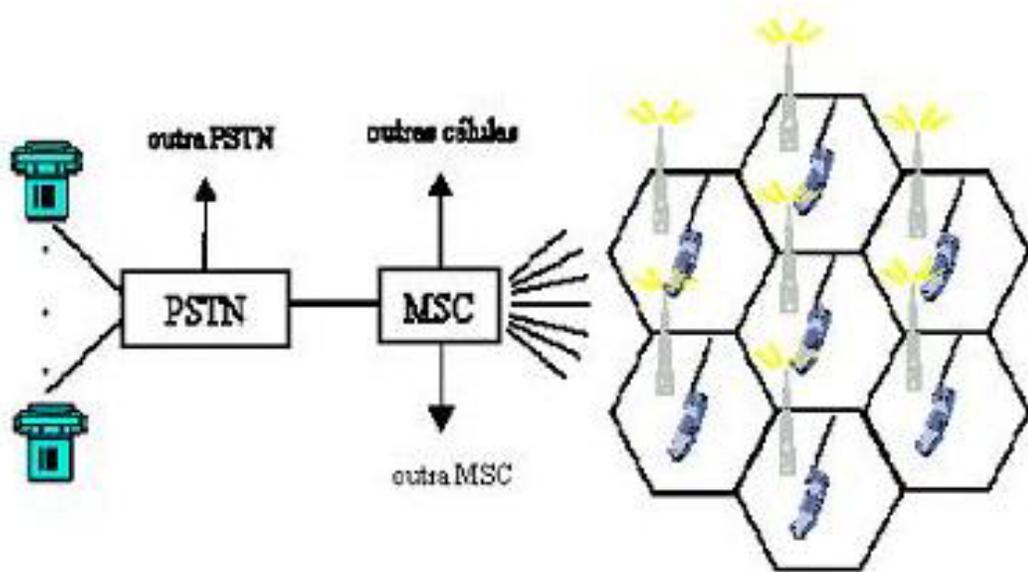


Figura 1.1 Rede de telecomunicação.

Um conjunto de ERB ligadas a sua CCC forma uma topologia lógica de rede de transmissão do tipo estrela (cf. Figura 1.2).

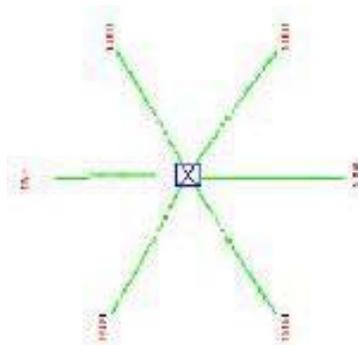


Figura 1.2 Topologia estrela.

A definição da topologia árvores (floresta) é mostrada na Figura 1.3, a topologia física da rede formada por diversos meios de transmissão, estações intermediárias, capacidade e relação custo–benefício de equipamentos e outros detalhes. Encontram-se também em outras topologias como: anel, barramento, malha, mista, etc., proposto por Soares (1995). A Figura 1.4 mostra um exemplo de topologia do tipo mista.

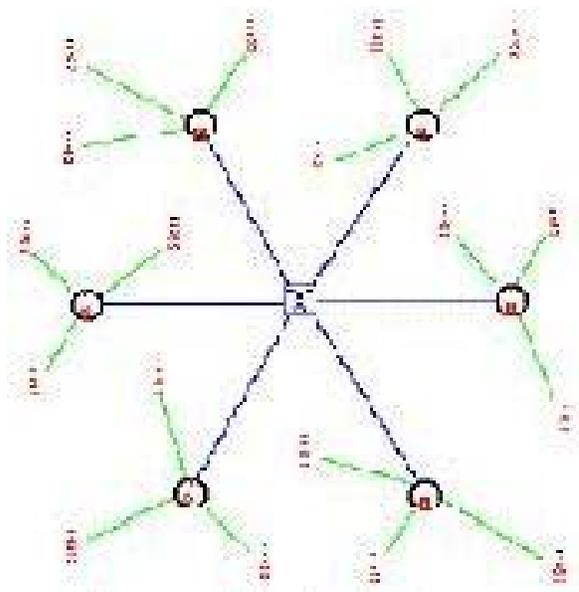


Figura 1.3 Topologia árvore.

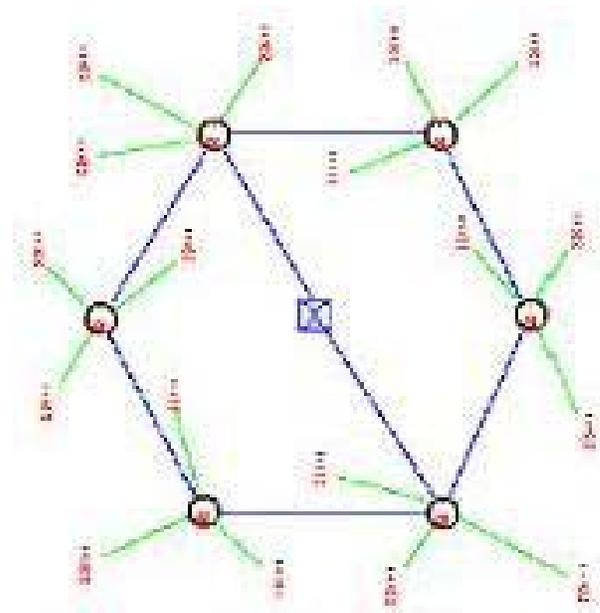


Figura 1.4 Topologia mista.

A seleção de ERB para a função de concentradores de meios de transmissão (ou em inglês, HUB) é uma função complexa e que tem bastante importância no custo de uma rede. Causa inquietude à localização estratégica, em função da distância, do correto dimensionamento dos seus enlaces e da pouca ociosidade das capacidades.

Além da escolha de quais ERBs deverão estar conectadas a quais concentradores, deve-se atentar para o fato de que, a soma das demandas dos meios de comunicação não podem exceder a capacidade do enlace da concentradora para a CCC, o qual altera o custo. Estas decisões são difíceis de serem tomadas, porque, a distância é proporcional ao custo da rede.

A redução de custos da rede é propiciada pelo agrupamento estratégico de ERB, no sentido de acumular uma demanda razoável de meios de comunicação, devido aos equipamentos de transmissão possuírem características de gerar melhor relação custo – benefício, quando suas capacidades são maiores. Isto implicaria na utilização da topologia física estrela, pelo menor custo, entretanto, características do problema real impedem a sua implementação.

O par metálico é um meio de transmissão de limites de capacidade e de distância reduzida, que, possui o menor custo.

O enlace do tipo rádio – microondas, localizado nas torres da ERB ou no topo de prédios, tem na frequência sua principal característica. Este enlace do tipo rádio – microondas, também, faz a comunicação entre o agrupamento de meios de transmissão. Mas, o enlace tem sua comunicação inviabilizada quando não permiti obstáculos entre as antenas.

Para formação do custo de redes é importante a seleção de ERB para a função de concentradoras de meios de transmissão; onde, o custo pode ser alterado na ociosidade das capacidades, no correto dimensionamento dos seus enlaces e na localização estratégica em função da distância.

A capacidade referida é constituída por feixes, possuindo diferentes capacidades de transmissão (cf, Tabela 1). Por exemplo, um feixe de 64 Kbps forma fisicamente um canal de conversação nos meios de transmissão, proposto por Alencar (1998). Este leva a representação digital da voz, e assim, trafega através de toda a rede de transmissão, passando por CCC's ou por PSTN. Para racionalização das conexões, estes canais digitais, também chamados de DS0, são multiplexados no tempo. Assim, são agrupados em agregados de 30 DS0 chamados de feixe E1, proposto por Alencar (1998), ou feixe de 2 Mbps.¹

¹ Apesar de ser indiferente para a aplicação, será abordado apenas o padrão europeu, já que só não é usado nos EUA e Japão. No padrão americano e japonês, é chamado de feixe T1, e multiplexa 24 canais DS0.

Tabela 1 - Conversão das capacidades dos feixes.

Feixes	Capacidade	Multiplexação
E1	02 Mbps	30 DS0
E2	08 Mbps	4 E1
E3	34 Mbps	4 E2
E4	140 Mbps	4 E3
...
STM0	51 Mbps	21 E1
STM1	155 Mbps	63 E1
STM4	622 Mbps	...
...
STM16	2,5 Gbps	1008 E1 ou 30240 DS0

Para transmissão de capacidade de canais maiores, agregados de agregados são gerados antes de serem transmitidos, aproveitando melhor o meio de transmissão utilizado. Desta forma, multiplexando-se 4 feixes E1, tem-se um feixe E2, de 8 Mbps. Multiplexando-se 4 feixes E2 tem-se um feixe E3, de 34 Mbps. Multiplexando-se 4 feixes E3 tem-se um feixe E4, de 140 Mbps (cf. Figura 1.5).

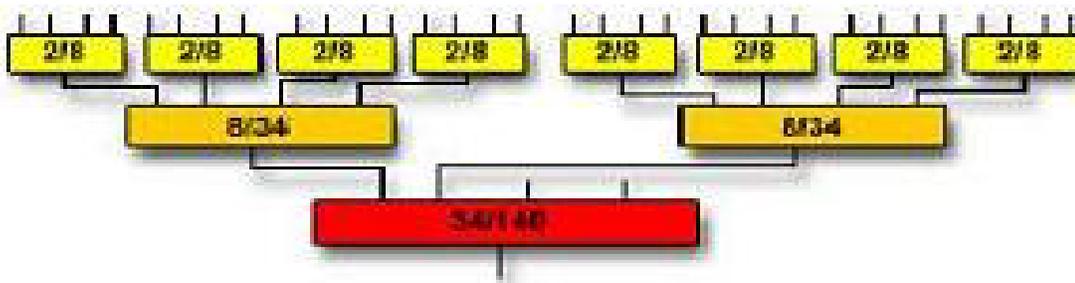


Figura 1.5 Hierarquia Digital Plesiócrona (PDH).

Alternativa, a esta forma de agrupar feixes em agregados, de maneira repetida e hierárquica (do inglês *Plesiochronous digital hierarchy* – PDH). As tecnologias mais recentes, (do inglês *hierarquia digital plesiócrons* - SDH), possibilitam o agrupamento e desagrupamento de vários tipos de agregados diretamente, sem a necessidade de ir subindo ou descendo a hierarquia degrau a degrau.

O surgimento desta tecnologia possibilita agregar 21 feixes E1 diretamente em um feixe STM0 de 51 Mbps, ou 63 feixes E1 diretamente em um feixe STM1 de 155 Mbps, ou várias outras flexíveis maneiras de se gerar os agregados STM0, STM1, STM4 de 622 Mbps, e STM16, de 2,5 Gbps, que totalizam 1008 feixes E1, e 30.240 canais DS0, proposto por Ramaswami (2001). A Figura 1.6 exemplifica uma árvore de agregados STM1, STM4 e STM16.

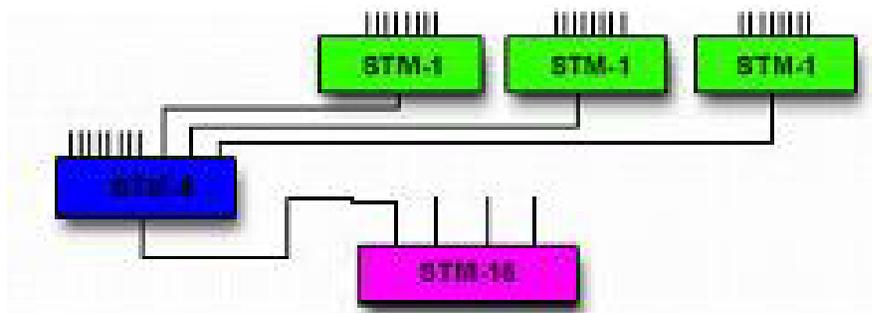


Figura 1.6 Hierarquia Digital Síncrona (SDH).

O sistema inicial de transmissão pode ser relativamente trabalhoso para o Sistema de Telefonia Móvel em uma cidade do porte de Fortaleza, que varia, dependendo da tecnologia usada e da restrição orçamentária, de 60 a 150 ERB aproximadamente (cf. Figura 1.7). Daí surgem necessidades de se utilizar o modelo em programação matemática para obter custos otimizados.

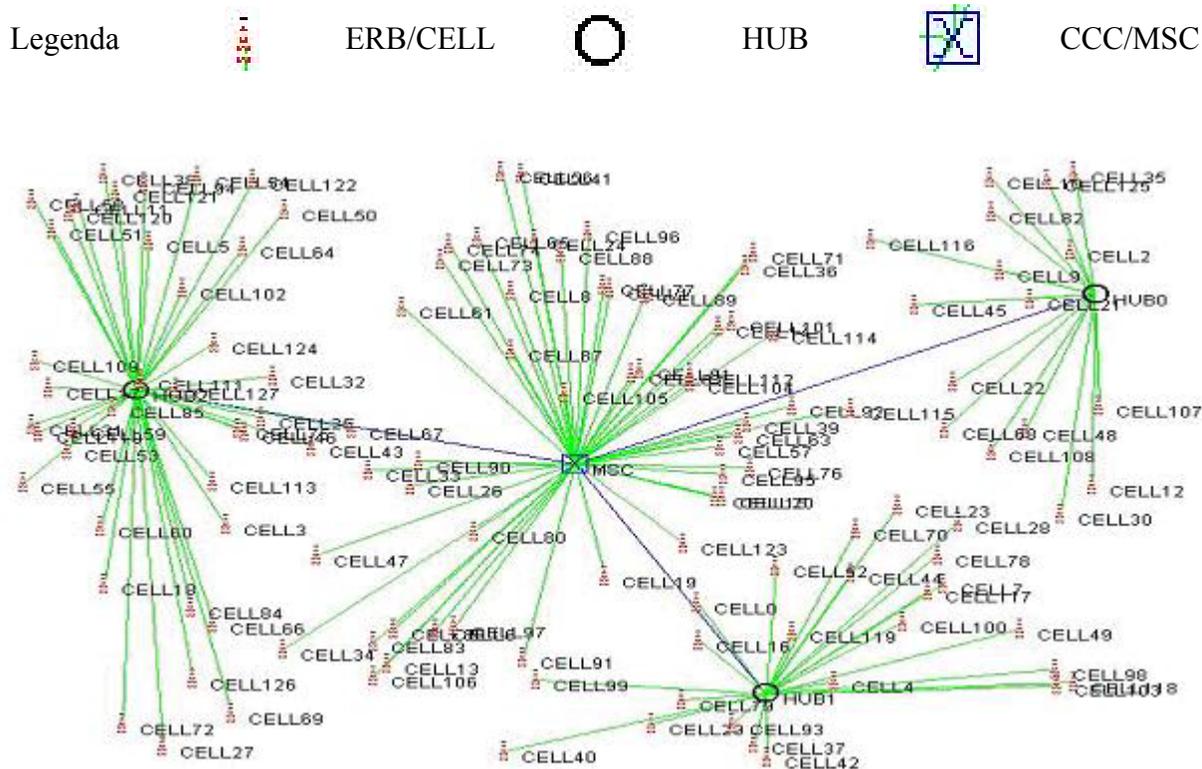


Figura 1.7 - Sistema de Telefonia Móvel para Fortaleza (128 ERB + 3 (CCC + HUB)).

A complexidade surge do aumento das ERB, como no caso do Sistema de Telefonia Móvel paulista que possui uma quantidade superior a 1.600 ERB (cf. Figura 1.8). Estas ampliações e realocações nos Sistemas de Telefonia Móvel acarretam dificuldades, e oportunamente problemas de otimização combinatória que são difíceis de serem resolvidos manualmente, e assim gerando desperdícios e custos extras.

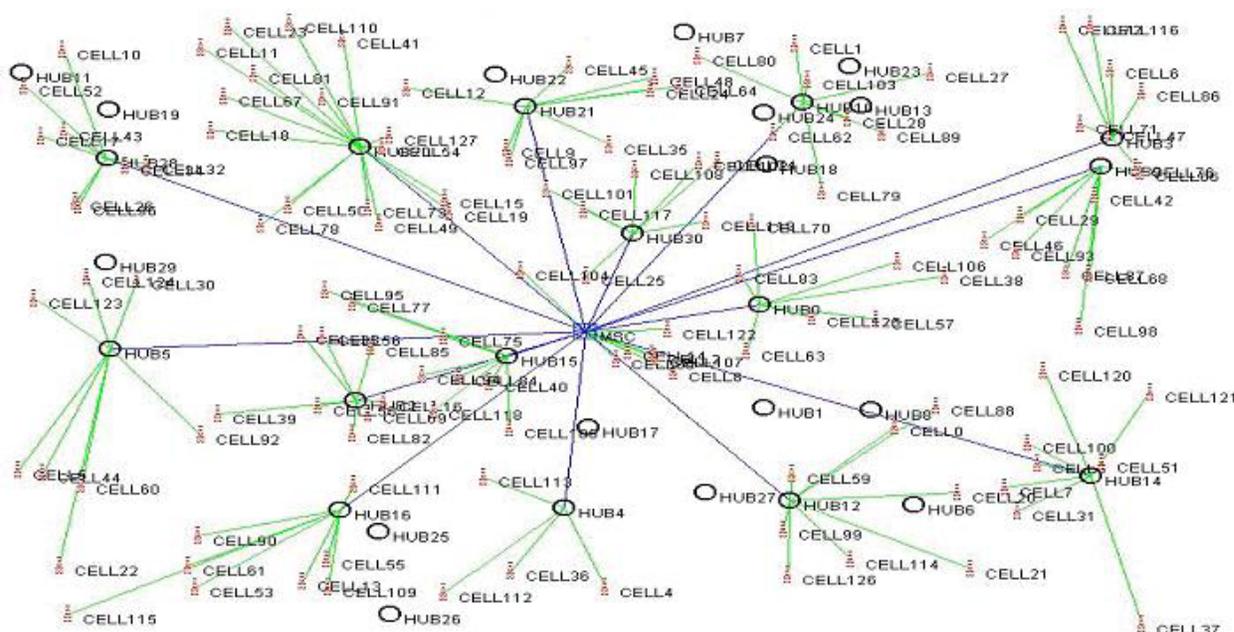


Figura 1.8 - Sistema hipotético (128 ERB + 32 (CCC + HUB)).

Alocar caminhos diferentes para escoar a demanda dos meios de comunicação de uma ERB é um requisito muito utilizado no meio de telecomunicações (contingência). Nestes casos, quando ocorre uma paralisação em alguns equipamentos, é retirada apenas parte da capacidade da ERB. Entretanto, algumas ERB são importantes e justificam os custos excedentes.

É necessário que todo caminho alocado a uma parte dos meios de comunicação seja completamente distinto do(s) caminho(s) alocado(s) a outra parte dos meios de comunicação. Proposto por Ramaswani (2001). Será apresentado a seguir um modelo em programação linear inteira estruturado a partir de Kubat (2000) aplicando a relaxação Lagrangeana no intuito de resolver o problema do Sistema de Telefonia Móvel - STM.

CAPÍTULO 2. Modelo Proposto

Neste capítulo, apresenta-se um modelo de programação linear inteira mista para um problema do Sistema de Telefonia Móvel equivalente aquele ilustrado na Figura 1.8. Este modelo tende a minimizar os custos operacionais com o projeto do STM segundo os aspectos operacionais da rede.

2.1. Descrição do Modelo

Em seguida, o modelo é descrito para o problema do STM abordado neste trabalho, foi proposto por Kubat (2000) e apresentado a seguir:

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{l \in H} b_l y_l \quad (1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in R} x_{i,j} = S_i, \text{ para todo } i \in V, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in R} \frac{D_i}{S_i} x_{i,j} \leq K y_l, \text{ para todo } l \in H, \quad (3)$$

$$\sum_{j \in Tq} x_{i,j} \leq 1, \text{ para todo } i \in V, \forall q \in Q, \quad (4)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}, \text{ para todo } i \in V, j \in R, \quad (5)$$

$$y_l \geq 0, \text{ para todo } l \in H. \quad (6)$$

As variáveis de decisão para o modelo são consideradas abaixo:

$x_{i,j}$ - indica se o enlace da ERB de índice i para a concentradora de índice j , deverá existir.

Valor um significa enlace presente, e zero significa enlace ausente. Este valor poderá ser igualada a zero no começo do modelo para indicar enlace inviável;

y_l - quantidade de agregados a serem utilizados no enlace da concentradora de índice l para a CCC;

$i \in V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ - conjunto de todas as n ERB;

$j \in R = \{h_0, h_1, h_2, \dots, h_m\}$ - conjunto de todas as m concentradoras, mais a CCC (nó zero);

$l \in H = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$ - conjunto de todas as m concentradoras (não incluindo a CCC, nó 0);

A função objetivo (1) é o somatório dos custos dos enlaces das ERBs para os concentradores HUB-CCC, adicionado ao somatório dos custos dos enlaces dos concentradores HUBs para a CCC.

$c_{i,j}$ - custo fixo do enlace da ERB de índice i para a concentradora de índice j ;

b_l - custo fixo do enlace da concentradora de índice l para a CCC;

A restrição (2) garante a diversidade definida. Para cada ERB de índice i , deverá existir S_i enlaces diferentes para concentradoras, ou CCC. A diversidade S_i implica em quantos caminhos diferentes para transmitir a demanda da ERB de índice i até a CCC.

A restrição (3) determina quantos links deverão existir da concentradora de índice l para a CCC. O calculado é baseado no somatório de todas as demandas das ERB alocadas para cada concentradora, e a capacidade dos seus agregados.

O valor D_i indica a demanda fixa em número de feixes DS0 (64 Kbps) da ERB de índice i para a CCC.

O valor K indica a capacidade do agregado dos enlaces das concentradoras para a CCC em número de feixes DS0 (64 Kbps).

A restrição (4) evita que a diversidade seja prejudicada em função de se ter a ERB ligada a duas concentradoras que terão um caminho comum, ou seja, impede que a ERB seja ligada a concentradoras da mesma árvore (T_q).

O conjunto $Q = \{T_1, T_2, \dots, T_q\}$ indica o conjunto de árvores. Para duas árvores quaisquer, $T_i \cap T_j = \emptyset$. As árvores possuem raiz no nó 0, que é a CCC.

Denotamos por T_q a árvore de índice q pertencente ao conjunto Q .

O número de restrições do modelo descrito é distribuído da seguinte maneira: somatório de ERB, somatório de HUB e somatório de ERB vezes o somatório de árvores, respectivamente. Por exemplo: para um problema com 16 ERB, 2 HUB e 1 árvore temos: a primeira classe de restrições com 16 linhas (correspondendo a 47,06 % do total de linhas), a segunda classe com 2 linhas (correspondendo a 5,88 % do total de linhas) e, por último, a terceira classe de restrição com 18 linhas (corresponde a 47,06 % do total de linhas). Para este exemplo, o modelo possui 18 variáveis e 34 restrições.

No próximo capítulo, serão expostos os conceitos básicos da relaxação lagrangeana e aplicação da metodologia de subgradiente ao modelo apresentado.

CAPÍTULO 3. Aplicação da relaxação Lagrangeana com subgradiente

Nos capítulos anteriores apresentou-se o conceito do Sistema de Telefonia Móvel (STM), suas características peculiares, seus principais problemas, além de um modelo matemático.

No início do século XXI, foi apresentado por Kubat (2000), um modelo matemático para solução de um problema do STM, este modelo enquadra-se, de forma clara, na classe de problema linear inteiro misto de grande porte. Para resolver esta classe de problema utiliza-se das seguintes técnicas: lineares, heurísticas, relaxações Lagrangeana ou novos paradigmas desenvolvidos recentemente como algoritmos genéticos, redes neurais artificiais e *simulated annealing*.

Desta forma, neste capítulo, aborda-se os conceitos básicos e aplicação da técnica de relaxação Lagrangeana ao modelo apresentado, descrevendo, em seguida, uma abordagem para a resolução do dual: método de subgradiente que é objeto de programação e testes computacionais.

3.1. Conceito e evolução

Uma das idéias computacionais mais úteis dos anos 70 é a observação de que muitos problemas difíceis podem ser vistos como problemas fáceis, complicados apenas por um número relativamente pequeno de restrições.

A dualização das restrições difíceis corresponde ao acréscimo desta à função objetivo através de um vetor de multiplicadores, chamados de *multiplicadores de Lagrange*, seguida da eliminação do conjunto de restrições.

Segundo Bazaraa (1993) a eliminação do conjunto de restrições deve produzir um problema de programação não linear de dois tipos: com restrições e sem restrições; cujo valor da solução ótima para o modelo apresentado no Capítulo 2 é uma cota inferior (problemas de minimização) para o valor ótimo do problema original.

Embora tenha existido uma série de incursões anteriores aos anos 70 no uso dos métodos de relaxação Lagrangeana, tanto em problemas teóricos quanto em práticos, os trabalhos de Held (1970) e Held (1971) são considerados marcos fundamentais. No entanto, o nome "Relaxação Lagrangeana" foi cunhado definitivamente por Geoffrion (1974).

Alguns autores contribuíram na utilização, dos métodos de Relaxação Lagrangeana - Rodrigues (1993), dos métodos de Feixes e Benders - Pinheiro (1998), dos métodos de meta heurística e geração de colunas – Macambira (2003), para solucionar problemas lineares inteiros todos contemplando uma classe de problemas na área de Telecomunicações. Outros importantes autores contribuíram de forma contínua, ao longo dos últimos 30 (trinta) anos, para a classe de Problemas de Cobertura de Conjuntos (PCC), utilizando o método de Relaxação Lagrangeana, abrangendo também otimização subgradiente, dentre eles podemos mencionar: Etcheberry (1977), Balas (1980) e Beasley (1990).

3.2. Relaxação e decomposição lagrangeana

Considere o seguinte problema original (PP), conforme modelo apresentado no capítulo 2:

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{l \in H} b_l y_l \quad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in R} x_{i,j} = S_i, \quad \text{para todo } i \in V, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in R} \frac{D_i}{S_i} x_{i,j} \leq K y_l, \quad \text{para todo } l \in H, \quad (3)$$

$$\sum_{j \in T_q} x_{i,j} \leq 1, \quad \text{para todo } i \in V, \forall q \in Q, \quad (4)$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad \text{para todo } i \in V, j \in R, \quad (5)$$

$$y_l \geq 0, \quad \text{para todo } l \in H. \quad (6)$$

A Relaxação Lagrangeana é aplicada para cada um dos três conjuntos de restrições, individualmente, como também, em combinações distintas, e até mesmo e uma única combinação.

Associa-se um vetor λ (multiplicador de Lagrange) ao conjunto de restrições a ser relaxado, e o restante dos conjuntos de restrições (não relaxados) devem ser verificados pelas variáveis primais. A seguir, são apresentados os problemas relaxados PR_i , para $i = \{2,3,4\}$.

Para o primeiro conjunto de restrições (2),

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{l \in H} b_l y_l + \lambda (S_i - \sum_{j \in R} x_{i,j})$$

sujeito a :

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in R} \frac{D_i}{S_i} x_{i,j} \leq K y_l \quad , \quad \text{para todo } l \in H,$$

$$\sum_{j \in Tq} x_{i,j} \leq 1 \quad , \quad \text{para todo } i \in V,$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad , \quad \text{para todo } i \in V, j \in R,$$

$$y_l \geq 0 \quad , \quad \text{para todo } l \in H,$$

$$\lambda \geq 0.$$

No segundo conjunto de restrições (3),

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{l \in H} b_l y_l + \lambda (-K y_l + \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} \frac{D_i}{S_i} x_{i,j})$$

sujeito a :

$$\sum_{j \in R} x_{i,j} = S_i \quad , \quad \text{para todo } i \in V,$$

$$\sum_{j \in Tq} x_{i,j} \leq 1 \quad , \quad \text{para todo } i \in V,$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad , \quad \text{para todo } i \in V, j \in R,$$

$$y_l \geq 0 \quad , \quad \text{para todo } l \in H,$$

$$\lambda \geq 0.$$

E por fim, o terceiro conjunto de restrições (4).

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{l \in H} b_l y_l + \lambda (-1 + \sum_{j \in R} x_{i,j})$$

sujeito a :

$$\sum_{j \in R} x_{i,j} = S_i \quad , \quad \text{para todo } i \in V,$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in R} \frac{D_i}{S_i} x_{i,j} \leq K y_l \quad , \quad \text{para todo } l \in H,$$

$$x_{i,j} \in \{0, 1\} \quad , \quad \text{para todo } i \in V, j \in R,$$

$$y_l \geq 0 \quad , \quad \text{para todo } l \in H,$$

$$\lambda \geq 0.$$

Denotando-se as variáveis primais por $w = \{x_{ij}, y_l\}$, temos:

$$f_1(w, \lambda) = \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{l \in H} b_l y_l + \lambda (S_i - \sum_{j \in R} x_{i,j}),$$

$$f_2(w, \lambda) = \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{l \in H} b_l y_l + \lambda (-K y_l + \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} \frac{D_i}{S_i} x_{i,j}),$$

$$f_3(w, \lambda) = \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{l \in H} b_l y_l + \lambda (-1 + \sum_{j \in R} x_{i,j}).$$

Deve-se assumir que as funções Lagrangeanas definidas acima, satisfazem a condição de que para todo $\lambda_i \in \mathfrak{R}_+^m$ existe um algoritmo para computar $L(\lambda) = \min_w \{f(w, \lambda)\}$, as duais por $\Lambda = \{\lambda\}$.

O problema (PR) com as relaxações propostas são dadas por (PR) $\left\{ \min_w L(w, \Lambda) \right\}$.

É verificado em cada Λ , com $\lambda \geq 0$, e \bar{w} viável (\bar{w} verificando os conjuntos de restrições não relaxadas), o custo dos problemas relaxados (PR)_i, $i = \{2, 3, 4\}$, denominado $v(\text{PR})$, é uma cota inferior para o custo do problema original $v(\text{PP})$.

$$v(\text{PP}(\bar{x})) = \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{l \in H} b_l y_l \geq L(\bar{w}, \Lambda) = v(\text{PR}(\bar{w}));$$

Por outro lado, tem-se que, $v(\text{PP}(\bar{w})) \geq v(\text{PR}(\bar{w})) \geq \{ \min_w L(w, \Lambda) \}$.

Esta proposta, baseada em Shapiro (1979), utiliza o teorema da dualidade fraca, contudo apresenta-se aqui reformulada – para satisfazer às necessidades do modelo delineado no Capítulo 2.

Devido às características do problema em questão, podem-se acrescentar cotas superiores (heurísticas) e inferiores (ponto de partida) ao problema relaxado (PR).

Com as desigualdade apresentadas no teorema da dualidade fraca tem-se por objetivo encontrar a maior das cotas inferiores, dadas em $v(\text{PP}(\bar{w})) \geq v(\text{PR}(w)) \geq \{ \min_w L(w, \Lambda) \}$, ou seja, encontrar a solução do problema dual de (PP):

$$\text{(PD)} \left\{ \max_{\lambda \geq 0} \min_w L(w, \Lambda) \right\}$$

ou, de modo equivalente.

$$\text{(PD)} \left\{ \max_{\lambda \geq 0} \varphi(\Lambda) \right\},$$

onde $\varphi(\Lambda) := \min_w L(w, \Lambda)$. Corresponde a função dual.

3.3. Propriedade da função dual

As propriedades apresentadas a seguir por Bazarra (1993) servirão como referencial teórico da relaxação Lagrangeana.

3.3.1. Concavidade

$\varphi(\Lambda)$ é a envoltória inferior de uma infinidade de funções afins de Λ para cada w . Portanto $\varphi(\Lambda)$ é côncava.

3.3.2. Não-diferenciabilidade

A determinação de $\varphi(\Lambda)$ pela resolução de (PR) tem, em geral, um vetor de soluções, o que comumente acarreta sua não diferenciabilidade.

Dessa forma, encontrar a solução de (PD) corresponde a resolver um problema de otimização não-diferenciável de maximização. Como $\varphi(\Lambda)$ é côncava, possui subgradiente em todos os pontos onde está definida.

3.3.3. Determinação de um subgradiente

Se \bar{w} minimiza $L(w, \Lambda)$ em $\bar{\Lambda}$, tem-se, por definição de $\varphi(\Lambda)$, para um Λ qualquer:

$$\varphi(\Lambda) \leq \min \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{l \in H} b_l y_l + \lambda (S_i - \sum_{j \in R} x_{i,j}).$$

Seja o resíduo denotado por $\bar{\gamma} = (S_i - \sum_{j \in R} x_{i,j})$.

Aplicado ao primeiro conjunto de restrições, e a função custo por

$$f(\bar{w}) := \min \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{l \in H} b_l y_l. \text{ Temos então:}$$

$$\varphi(\Lambda) \leq L(\bar{w}) + \bar{\Lambda}^t \bar{\gamma} - (\bar{\Lambda} - \Lambda)^t \bar{\gamma},$$

e, por definição de $(\bar{w}, \bar{\Lambda})$, temos então:

$$\varphi(\Lambda) \leq \varphi(\bar{\Lambda}) - (\bar{\Lambda} - \Lambda)^t \bar{\gamma}.$$

Portanto, o resíduo $\bar{\gamma}$, corresponde ao conjunto de restrições relaxadas, o subgradiente de φ em $\bar{\Lambda}$.

3.4. Definição do problema dual e suas propriedades

Por definição, o problema dual de (PP) é:

$$\max_{\lambda \in \mathfrak{R}_+^m} \min_w \{L(w, \lambda)\} \quad (\text{PD}).$$

ou também, pela introdução da função $L(\lambda) = \min_{x \in S} \{L(w, \lambda)\}$, chamada de função dual,

$$\max_{\lambda \in \mathfrak{R}_+^m} L(\lambda) \quad (\text{PD}).$$

A função dual de um problema de programação inteira tem um número importante de propriedades, em seguida, enumeram-se algumas delas:

Propriedade 1 - Cota inferior

Para qualquer $\lambda \in \mathfrak{R}_+^m$, e para todas as soluções viáveis w de (PP), tem-se $L(\lambda) \leq L(w)$.

Em particular, $L(\lambda) \leq L(w^*)$, onde w^* é um ótimo global de (PP).

Demonstração:

Por definição, $L(\lambda) \leq L(w) + \lambda (S_i - \sum_{j \in R} x_{i,j})$, $\forall \lambda \geq 0, \forall w \in S$. Como $\lambda \geq 0$ e $(S_i - \sum_{j \in R} x_{i,j}) = 0$,

para todas as soluções viáveis w de (PP), tem-se $L(\lambda) \leq L(w)$.

Em particular, para w^* , um mínimo absoluto de (PP), e se λ^* é um ótimo de (PD),

$$L(\lambda) \leq L(\lambda^*) \leq L(w^*).$$

Uma consequência imediata da Propriedade 1 é a seguinte: se o dual (PD) tem um ótimo ilimitado (∞), então o primal (PP) não tem solução.

Definição 1:

O vetor $\partial L(\lambda) = (\partial_1, \dots, \partial_m)^T$ é um subgradiente de L em λ se, para todo $\lambda^* \in \mathfrak{R}^m$, tem-se $L(\lambda^*) \leq L(\lambda) + (\lambda^* - \lambda)\partial L(\lambda)$.

Definição 2:

O conjunto dos subgradientes de L em λ é um conjunto convexo denotado por $\partial L(\lambda)$ e chamado de subdiferencial de L em λ .

De fato, segue da definição acima que se ∂_1 e ∂_2 são dois subgradientes em λ , então $\theta\partial_1 + (1 - \theta)\partial_2$ é também um subgradiente, para todo $\theta \in [0, 1]$.

Propriedade 2 – Subgradientes

Para $\lambda \in \mathfrak{R}_+^m$, seja $\partial L(\lambda) = \{w \in S \mid \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{l \in H} b_l y_l + \lambda (S_i - \sum_{j \in R} x_{i,j}) = L(\lambda)\}$.

Então,

$\forall w \in \partial L(\lambda), (S_i - \sum_{j \in R} x_{i,j}) \in \partial L(\lambda)$. Isto é, $(S_i - \sum_{j \in R} x_{i,j})$ é um subgradiente de L em λ .

Demonstração

Por definição de L , para todo λ^* em \mathfrak{R}_+^m ,

$$\text{tem-se } L(\lambda^*) \leq \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{l \in H} b_l y_l + \lambda^* (S_i - \sum_{j \in R} x_{i,j}).$$

Em particular, para $w \in \partial L(\lambda)$, $L(\lambda^*) \leq \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{l \in H} b_l y_l + \lambda^* (S_i - \sum_{j \in R} x_{i,j})$, e por de-

finição de $\partial L(\lambda)$, $L(\lambda) = \sum_{i \in V} \sum_{j \in R} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{l \in H} b_l y_l + \lambda (S_i - \sum_{j \in R} x_{i,j})$, segue por subtração que

$$L(\lambda^*) - L(\lambda) \leq (\lambda^* - \lambda) (S_i - \sum_{j \in R} x_{i,j}), \quad \forall \lambda^* \in \mathfrak{R}_+^m. \text{ Portanto, tem-se } (S_i - \sum_{j \in R} x_{i,j}) \in \partial L(\lambda).$$

Segundo Fisher (1981), além dessas duas propriedades, é possível a verificação na literatura da prova que $L(\lambda)$ é uma função linear por partes, também, côncava.

3.5. Otimização do problema

Como definido no tópico anterior, a função $L(\lambda)$ é côncava, de forma que todo ótimo local é também um ótimo global. Como esta função não é diferenciável em toda parte, os métodos clássicos de programação não-linear (método do gradiente, método do gradiente conjugado, etc.) não podem ser aplicados a ela.

Contudo, pode-se tentar generalizar os métodos clássicos dos gradientes tomando, em cada passo, a direção do gradiente, se a função é diferenciável no ponto λ corrente, ou em qualquer subgradiente $(S_i - \sum_{j \in R} x_{i,j}) \in \partial L(\lambda)$, se L não é diferenciável no ponto λ .

A simplicidade do método, leva ao cálculo de $L(\lambda)$, em tal ponto, fornecendo como consequência um subgradiente de L em λ . Além disso, o método é justificado pelo fato que $\partial L(\lambda)$ é a direção de decréscimo exato da função $PD(\lambda)$, ou seja, à distância de λ do conjunto Q dos pontos ótimos:

$$Q = \{\lambda \in \mathfrak{R}_+^m \mid L(\lambda) = L(\lambda^*)\}.$$

No entanto, somente o movimento na direção de $\partial L(\lambda)$ não assegura um aumento na função L por si só. Por esta razão, não é útil tentar otimizar L na direção de $\partial L(\lambda)$ simplesmente.

Além disso, devem ser dados valores pré-determinados de tamanhos de passos t_j .

Pode ser visualizado em Polyak (1967) que a seqüência $L(\lambda_j)$ converge para o valor ótimo $L(\lambda^*)$ com as simples condições de que $t_j \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$), e $\sum_{j=0}^{\infty} t_j \rightarrow \infty$, mas nada é dito sobre a velocidade de convergência.

Por outro lado, a seqüência de valores $L(\lambda)$ obtida é, geralmente, crescente não monótona.

Se em toda iteração j , escolhe-se t_j de acordo com a fórmula $t_j = \frac{\theta_j (L(\lambda^*) - L(\lambda))}{\|y\|^2}$ onde o

coeficiente de relaxação θ_j , é sujeito a $q < \theta_j \leq 2$, $\forall j$, $q > 0$ fixo, então, a convergência é geométrica.

Este resultado parece ser principalmente de interesse teórico, porque $L(\lambda^*)$ não é conhecido. Mas se na formulação acima, troca-se $L(\lambda^*)$ por uma cota inferior $\underline{L} < L(\lambda^*)$, então pode ser visto que ou a seqüência $L(\lambda_j)$ converge para \underline{L} , ou se obtém (depois de um número finito de passos) um ponto λ_j para o qual vale a desigualdade $\underline{L} \leq L(\lambda_j) \leq L(\lambda^*)$. Isto acontece, em particular, quando $\theta_j = 2$, $\forall j$.

Em vista da grande quantidade de escolhas para o coeficiente θ , em Held (1974), apresenta-se $L(\lambda^*)$ sendo substituído na equação acima por uma cota superior $\bar{L} \geq L(\lambda^*)$ sem essencialmente afetar a convergência do algoritmo.

Neste caso, a condição $t_j \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$) torna necessária a escolha de $\theta_j \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$).

Freqüentemente se escolhe para \bar{L} o valor da função objetivo que corresponde a melhor solução para o problema (PP), obtida nos estágios iniciais de computação.

Para escolha do coeficiente de relaxação (θ_j) várias estratégias podem ser adotadas.

Em Held (1974), utiliza-se a seguinte regra: $\theta = 2$ durante $2m$ iterações (m é o número de multiplicadores de Lagrange $-\lambda_i$); então divida por 2 ambos θ e o número de iterações até que um limite q (fixado com antecedência) de iterações for alcançado; finalmente, divida o valor de θ por 2 a cada q iterações até que t_j seja suficientemente pequeno ($< \varepsilon$, fixado).

Este procedimento viola a condição $\sum_{j=0}^{\infty} t_j \rightarrow \infty$, sendo possível a convergência para um ponto que não pertence ao conjunto ótimo, embora tenham reportado que esse fato quase nunca tenha acontecido. Particularmente, pode-se apontar que a escolha do tamanho do passo é uma área que não é perfeitamente compreendida na atualidade.

3.6. O Algoritmo de subgradiente

O algoritmo de subgradiente, adaptado de Martin (2002), para encontrar λ é apresentado a seguir:

$(\sum_{j \in R} x_{i,j} = S_i)$, a função relaxada a cada nova iteração j ;

Passo 1 – $j \leftarrow 0, \lambda^j \in \mathfrak{R}_+^m, e \varepsilon > 0$

Passo 2 – $\gamma^j \leftarrow (\sum_{j \in R} x_{i,j} = S_i)$ onde $x^j \in \Gamma(\lambda^j)$.

Passo 3 – $\lambda^{j+1} \leftarrow \max\{0, \lambda^j + t_j \gamma^j\}$ onde t_j é um escalar positivo (tamanho do passo).

Passo 4 – Se $\|\lambda^{j+1} - \lambda^j\| < \varepsilon$ então PARE, caso contrário, $j \leftarrow j+1$ e vá para o passo 2.

O algoritmo subgradiente foi aplicado pelo autor nas classes de problemas alocação generalizada e da mochila, observando algumas particularidades.

Estas classes de problemas possuem características bem distintas, em seguida, mencionam-se algumas delas:

a) alocação generalizada: a relaxação de programação linear é usualmente muito pobre na aproximação para solução binária.

- Apresentam dois tipos de relaxações referentes aos blocos de restrições com as seguintes relações “=” (igualdade) e “ \leq ” (menor ou igual) ou “ \geq ” (maior ou igual).

- Quando é relaxada a relação de “ \leq ” ou “ \geq ” restando a relação “ $=$ ”, torna-se fácil mostrar que a função lagrangeana $L(\lambda)$ tem a propriedade de integralidade e para o λ ótimo, $L(\lambda)$ menor ou igual ao valor da relaxação da programação linear, formando um (gap).

- Quando é relaxada a relação de “ $=$ ” restando a relação “ \leq ” ou “ \geq ”, torna-se melhor para relaxar, esta função lagrangeana tem uma considerável estrutura especial; entretanto não possui a propriedade de integralidade sendo um programa linear inteiro.

b) mochila: existem numerosos algoritmos especiais propostos para solucionar esta classe de problema.

Diante de todos estes conceitos serão apresentados no próximo capítulo os resultados computacionais obtidos com o emprego da relaxação Lagrangeana na resolução do projeto de um Sistema de Telefonia Móvel - STM.

4.1. A Implementação

O software da implementação computacional do algoritmo de otimização subgradiente foi desenvolvido para microcomputadores compatíveis ao IBM PC, com características de processamento: Pentium IV com o clock de 2.4 MHz ou superior, 256Mb de memória RAM, disco rígido com capacidade acima de 20Gb e memória de vídeo de 8Mb. Utilizando como linguagem de programação o Visual Basic 6.0 com a biblioteca (dll) do LINDO. Uma ilustração do software é apresentada na Figura 1.10.

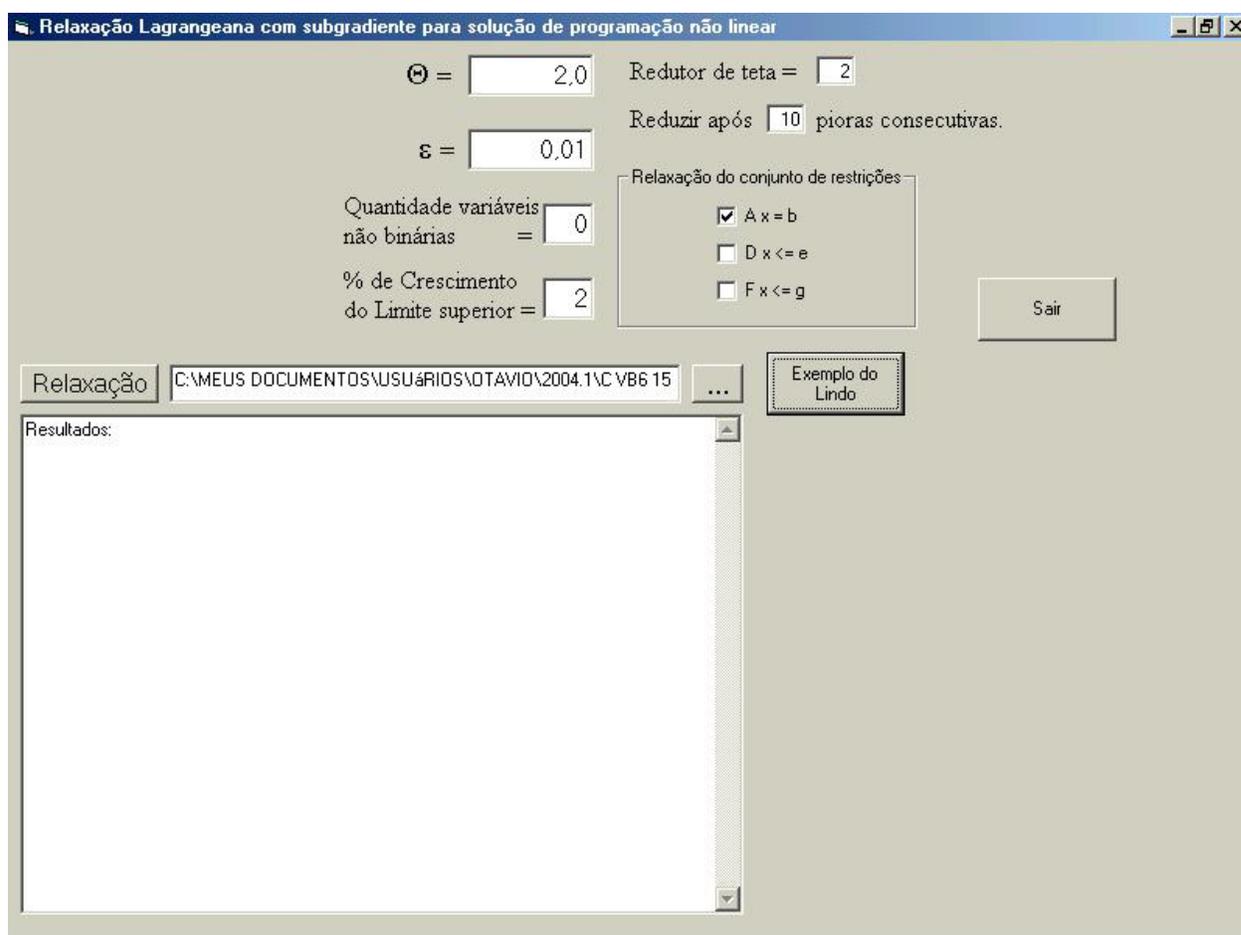
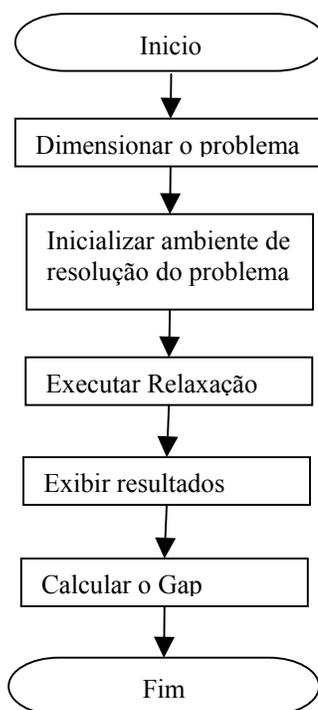


Fig. 1.10 Software Relaxação Lagrangeana (SRL).

O programa da implementação pode ser descrito com o auxílio do seguinte fluxograma:

FLUXOGRAMA PRINCIPAL



O processo inicial é acompanhado em seguida pelo processo *dimensionar o problema*, desenvolvido em ambiente Java, voltado para problemas de telecomunicações, por Aguiar (2003), recebe como dado de entrada a quantidade de ERB, HUB e árvores, gerando arquivos no formato *.txt, *.m, *.mpl, *.ldt, os quais contêm as matrizes que poderão ser, posteriormente, utilizadas por software de otimização, como: LINGO, MATLAB, CPLEX e o SRL (Sistema de Relaxação Lagrangeana), neste último, executa-se o algoritmo de relaxação Lagrangeana, podendo também, ser visto na Figura 1.9.

Para facilitar o entendimento dos resultados do problema original; estes são demonstrados de formas tabulares, convertidas de sua forma matemática – restrições, para suas formas matriciais -

matrizes. Assim, onde eram encontradas as restrições, (2), (3) e (4), encontram-se as matrizes A , D e F , respectivamente.

Este arquivo contém a função objetivo “c” que é formada com os coeficientes do problema original em forma de colunas, contendo, também, os coeficientes das matrizes “A” e “b”, “D” e “e”, “F” e “g”.

O próximo momento destina-se à utilização do processo *inicialização do ambiente de resolução do problema*, o SRL é desenvolvido em linguagem de programação VB, e tem como interface com o usuário um ambiente amigável onde serão definidos alguns parâmetros, os quais serão destacados a seguir:

θ – obter o tamanho do passo;

ε – dimensionar a precisão do resultado;

QVNB – identificar a quantidade de variáveis não binárias;

% do limite superior – alteração do limite superior;

Redutor de θ – dividi o teta de forma geométrica até a convergência;

Escolha de restrições – definir o conjunto de restrições a ser relaxada;

Combo box – selecionar o arquivo das matrizes;

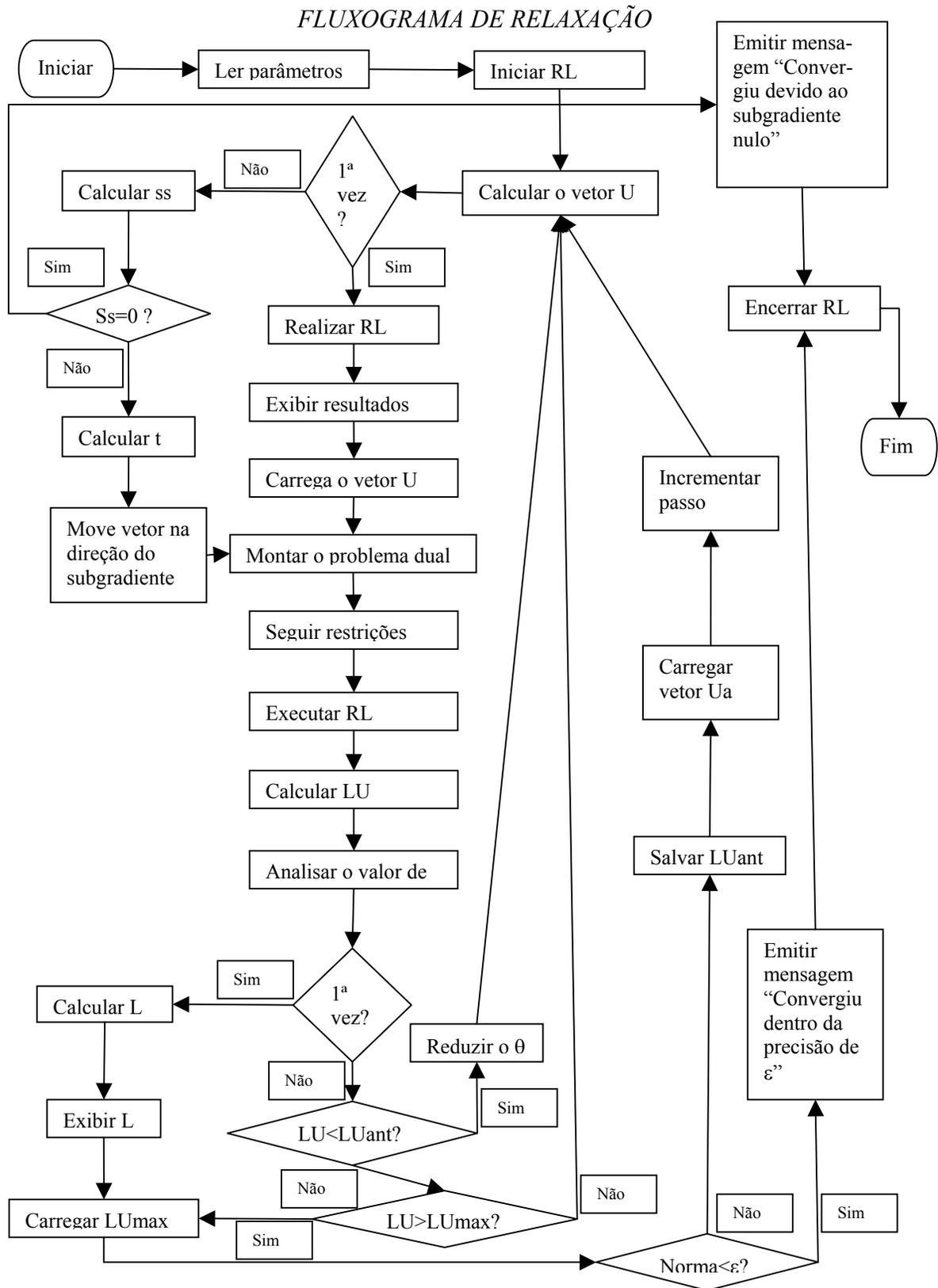
Botão Relaxação – executar a relaxação;

Botão Sair – sair do ambiente do programa;

Botão livro – executar um problema de relaxação apresentado no software LINDO.

O fluxograma apresenta o processo completo da implementação da relaxação do algoritmo subgradiente.

O processo execução da relaxação apresentado abaixo no:



O próximo processo do fluxograma principal, *exibir resultados*, apresenta o limite inferior encontrado no processo de relaxação, mostrando também, o valor do teta (θ) e a quantidade de passos incrementais (t_j) para se obter esse valor.

Para calcular a diferença entre os resultados encontrados na solução linear inteira e os encontrados na solução relaxada é necessário executar o software “LINGO 7.0” da empresa *LINDO System, Inc*, agregar os resultados do Lingo e SRL com o objetivo de conhecer o gap do problema Principal (PP).

O parâmetro limite superior, encontrado de forma heurística, calculando o somatório dos coeficientes da função relaxada na primeira iteração, destaca-se dos demais por interferir diretamente nos resultados obtidos. Outros parâmetros como θ e ε não apresentam influência nos resultados, contudo afetam na velocidade de convergência.

Foram testadas varias situações, como descritas abaixo:

1. Variação no θ (teta), notamos que não houve mudanças para varias quantidades de variáveis testadas;
2. Algumas variações no crescimento do limite superior foram significativas para as situações testadas;
3. Os blocos envolvendo as matrizes A e F, correspondem a 95 % das restrições, apresentando resultados satisfatórios.

O último processo do fluxograma principal, *apresentar solução*, verifica se a referida frequência relativa pode ser considerada satisfatória ou se servirá apenas como ponto de partida para o início de heurísticas mais perspicazes para solucionar o problema.

4.2. Resultados dos testes computacionais

Foram comparados os dois métodos de solução: linear e relaxado. Com o método relaxado podem-se utilizar as matrizes A, D e F de forma isolada, ou agrupadas: AD, AF, ADF e DF.

Apresentam-se os resultados mais importantes obtidos com os testes computacionais:

4.2.1. STM com tamanho de [8 ERB, 1 HUB e 1 CCC]

Os resultados para o STM do item atual (18 variáveis com 42 restrições) são dispostos nos métodos de solução inteiros, relaxados e lineares. São submetidos a várias relaxações referentes as matrizes (A, D e F) que podem ser individuais ou agrupadas (cf. Tabela 2).

Tabela 2 – Resultados do STM 4.2.1

Parâmetros 8 ERB, 1 HUB e 1 CCC	Conjunto de restrições						
	A	D	F	AD	AF	ADF	DF
Inteiro	164.899	164.899	164.899	164.899	164.899	164.899	164.899
Linear	157.296	157.296	157.296	157.296	157.296	157.296	157.296
Relaxado	164.620	157.296	200.422	157.296	163.222	161.821	157.296
Diferença 1 (Relaxado - Linear)	7.324	-	43.126	-	5.926	4.525	-
%	4,66	-	27,42	-	3,77	2,88	-
Diferença 2 (Inteiro - Relaxado)	279	7.603	(35.523)	7.603	1.677	3.078	7.603
%	0,17	4,61	(21,54)	4,61	1,02	1,87	4,61

As soluções dos problemas linear e linear inteiro são 157.296 e 164.899, respectivamente.

Com o método de solução relaxado existe uma variação de valores, para a matriz “A” o valor é 164.620, para a matriz “F” é de 200.422, para a matriz “AF” é de 163.222, para o restante das matrizes “D”, “AD”, “DF” o valor é de 157.296 e “ADF” o valor é de 161.821.

Após a apresentação destes resultados observa-se a diferença entre os valores inteiros e relaxados, e encontra-se os seguintes valores: com a matriz “A” a diferença é de 279 e o gap é de

0,17%, com a matriz “F” a diferença é de (35.523) negativos e o gap é de (21,54%) negativos, com uma ressalva com o “status 5” retornado do resolvedor utilizado, tornando a solução infinita, na matriz “AF” a diferença é de 1.677 e o gap é de 1,02% utilizando uma redução do parâmetro “Limite Superior” de 57%, com a matriz “ADF” a diferença é de 3.078 e o gap é de 1,87%, com as demais matrizes (“D”, “AD” e “DF”) a diferença coincide com o valor de 7.603 e o gap é de 4,61%.

Desta forma, concluiu-se que o valor ótimo da solução relaxada referente a matriz “A” apresenta-se com um gap de 0,17 %.

4.2.2.STM com tamanho de [15 ERB, 1 HUB e 1 CCC]

Os resultados para o STM deste item (48 variáveis com 78 restrições) são dispostos nos métodos de solução inteiros, relaxados e lineares. São submetidos a várias relaxações referentes as matrizes (A, D e F) que podem ser individuais ou agrupadas (cf. Tabela 3).

Tabela 3 – Resultados do STM 4.2.2

Parâmetros 15 ERB, 1 HUB e 1 CCC	Conjunto de restrições						
	A	D	F	AD	AF	ADF	DF
Inteiro	329.933	329.933	329.933	329.933	329.933	329.933	329.933
Linear	309.515	309.515	309.515	309.515	309.515	309.515	309.515
Relaxado	320.006	309.515	321.929	309.515	325.613	309.515	309.515
Diferença 1 (Relaxado - Linear)	10.491	-	12.414	-	16.098	-	-
%	3,39	-	4,01	-	5,20	-	-
Diferença 2 (Inteiro - Relaxado)	9.927	20.418	8.004	20.418	4.320	20.418	20.418
%	3,01	6,19	2,43	6,19	1,31	6,19	6,19

As soluções dos problemas linear e linear inteiro são 309.515 e 329.933, respectivamente.

Com o método de solução relaxado existe uma variação de valores, para a matriz “A” o valor é 320.006, para a matriz “F” é de 321.929, para a matriz “AF” é de 325.613 e para o restante das matrizes “D”, “AD”, “DF” e “ADF” o valor é de 309.515.

Após a apresentação destes resultados observa-se a diferença entre os valores inteiros e relaxado, e encontra-se os seguintes valores: com a matriz “A” a diferença é de 9.927 e o gap é de 3,01%, com a matriz “F” a diferença é de 8.004 e o gap é de 2,43% utilizando uma redução do parâmetro “Limite Superior” de 75%, com a matriz “AF” a diferença é de 4.320 e o gap é de 1,31% utilizando uma redução do parâmetro “Limite Superior” de 51%, com as demais matrizes (“D”, “AD”, “DF” e “ADF”) a diferença coincide com o valor de 20.418 e o gap é de 6,19%.

Desta forma, concluiu-se que o valor ótimo da solução relaxada referente a matriz “AF” apresenta-se com um gap de 1,31 %.

4.2.3.STM com tamanho de [128 ERB, 2 HUB e 1 CCC]

Os resultados para o STM – Fortaleza - (256 variáveis com 637 restrições) são dispostos nos métodos de solução inteiros, relaxados e lineares. São submetidos a várias relaxações referentes as matrizes (A, D e F) que podem ser individuais ou agrupadas (cf. Tabela 4).

Tabela 4 – Resultados do STM 4.2.3

Parâmetros 128 ERB, 2 HUB e 1 CCC	Conjunto de restrições						
	A	D	F	AD	AF	ADF	DF
Inteiro	3.088.612	3.088.612	3.088.612	3.088.612	3.088.612	3.088.612	3.088.612
Linear	3.068.745	3.068.745	3.068.745	3.068.745	3.068.745	3.068.745	3.068.745
Relaxado	3.080.868	3.080.867	3.126.682	3.080.869	3.079.839	3.085.124	3.088.280
Diferença 1 (Relaxado - Linear)	12.123	12.122	57.937	12.124	11.094	16.379	19.535
%	0,40	0,40	1,89	0,40	0,36	0,53	0,64
Diferença 2 (Inteiro – Relaxado)	7.744	7.745	(38.070)	7.743	8.773	3.488	332
%	0,25	0,25	(1,23)	0,25	0,28	0,11	0,01

As soluções dos problemas linear e linear inteiro são 3.068.745 e 3.088.612, respectivamente.

Com o método de solução relaxado existe uma variação de valores na seguinte ordem, para as matrizes “A, D e AD” os valores são 3.080.868, para a matriz “F” é de 3.126.682, para a matriz “AF” é de 3.079.839, para a matriz “ADF” é de 3.085.839 e para a matriz “DF” o valor é de 3.088.280.

Após a apresentação destes resultados observa-se a diferença entre os valores inteiros e relaxado, e encontra-se os seguintes valores: com as matrizes “A, D e AD” a diferença é de 7.744 e o gap é de 0,25%, com a matriz “F” a diferença é de (38.070) negativos e o gap é de (1,23%) negativos e, com uma ressalva com o “status 5” retornado do resolvidor utilizado, tornando a solução infinita, com a matriz “AF” a diferença é de 8.773 e o gap é de 0,28% utilizando uma redução do parâmetro “Limite Superior” de 21%, com a matriz “ADF” a diferença é de 3.488 e o gap é de

0,11% utilizando uma redução do parâmetro “Limite Superior” de 21%, com a matriz “DF” a diferença é de 332 e o gap é de 0,01% utilizando uma redução do parâmetro “Limite Superior” de 60%.

Desta forma, concluiu-se que o valor ótimo da solução relaxada referente a matriz “DF” apresenta-se com um gap de 0,01 %.

4.2.4.STM com tamanho de [256 ERB, 2 HUB e 1 CCC]

Os resultados para o STM atual (1024 variáveis com 1279 restrições) são dispostos nos métodos de solução inteiros, relaxados e lineares. São submetidos a várias relaxações referentes as matrizes (A, D e F) que podem ser individuais ou agrupadas (cf. Tabela 5).

Tabela 5 – Resultados do STM 4.2.4

Parâmetros 256 ERB, 3 HUB e 1 CCC	Conjunto de restrições						
	A	D	F	AD	AF	ADF	DF
Inteiro	4.697.638	4.697.638	4.697.638	4.697.638	4.697.638	4.697.638	4.697.638
Linear	4.066.761	4.066.761	4.066.761	4.066.761	4.066.761	4.066.761	4.066.761
Relaxado	4.085.648	1.370.629	4.240.157	4.066.761	4.240.170	4.592.399	4.066.761
Diferença 1 (Relaxado - Linear)	18.887	(2.696.132)	173.396	-	173.409	525.638	-
%	0,46	(66,30)	4,26	-	4,26	12,93	-
Diferença 2 (Inteiro - Relaxado)	611.990	3.327.009	457.481	630.877	457.468	105.239	630.877
%	13,03	70,82	9,74	13,43	9,74	2,24	13,43

As soluções dos problemas linear e linear inteiro são 4.066.761 e 4.697.638, respectivamente.

Com o método de solução relaxado existe uma variação de valores na seguinte ordem, para a matriz “A” o valor é de 4.085.648, para a matriz “F” é de 4.240.157, para as matrizes “D, AD e DF” os valores são 4.066.761, para a matriz “AF” é de 4.240.170, e para a matriz “ADF” é de 4.592.399.

Após a apresentação destes resultados observa-se a diferença entre os valores inteiros e relaxado, e encontra-se os seguintes valores: com a matriz “A” a diferença é de 611.990 e o gap é de 13,03%, com a matriz “F” a diferença é de 457.481 e o gap é de 9,74%, com as matrizes “D, AD e DF” a diferença é de 630.877 e o gap é de 13,43%, com a matriz “AF” a diferença é de 457.468

e o gap é de 9,74%, com a matriz “ADF” a diferença é de 105.239 e o gap é de 2,24% utilizando uma redução do parâmetro “Limite Superior” de 78%.

Analisando a tabela verifica-se que pela disposição dos valores nos métodos de solução inteiro e linear são constantes e, com o método de solução relaxado são variáveis, a diferença e o gap apresentam a mesma disposição do método de solução relaxado.

Desta forma, concluiu-se que o valor ótimo da solução relaxada referente a matriz “ADF” apresenta-se com um gap de 2,24 %.

Nos testes mostrados, com 4 (quatro) tamanhos de STM distintos notou-se que, ao aumentar o número de variáveis nos sistemas de telefonia móvel, os resultados lineares aproximam-se dos resultados relaxados.

CONCLUSÃO

Este trabalho atingiu o seu objetivo ao solucionar um problema linear inteiro misto de grande porte aplicado no Sistema de Telefonia Móvel – STM, foi possível através da aplicação do método de subgradiente, obtendo-se, essencialmente, a validação da técnica de Relaxação Lagrangeana utilizada, onde apresentou um gap de 0,01%, comprovando a aplicação da técnica para solução da classe de problemas envolvendo STM.

A realização deste trabalho gerou um produto a qual destaca-se a implementação de um software para aplicação da metodologia de Relaxação Lagrangeana no STM, com o algoritmo do método de subgradiente.

Conclui-se, com a realização desta dissertação:

1. Os resultados obtidos foram considerados promissores para as relaxações executadas;
2. Dos testes realizados os menores *gap* foram encontrados quando se utilizou a relaxação da matriz A ou uma combinação com as matrizes D e F; havendo comportamentos variados na utilização de outras matrizes, e ;
3. Foi possível trabalhar com os ambientes com restrições e sem restrições, observando o comportamento de cada classe de problemas como Alocação Generalizada e Mochila.

A partir dos resultados alcançados com o presente trabalho, sugere-se como trabalhos futuros as seguintes propostas:

1. Serviço na WEB, disponibilizando o uso da ferramenta de modo interativo.
2. Através de software livre e ferramentas *Open Source*, pode-se trabalhar com técnicas de soluções inteiras como B&B, etc.
3. Aplicação prática desta metodologia a várias áreas de atuação, tais como:
 - a. Transporte / trânsito;
 - b. Recursos hídricos e;
 - c. Computação de alto desempenho.
4. Análise econômica sobre o efeito dos custos dos enlaces e número de árvores.
5. Desenvolver um ambiente de testes utilizando dilatação de Shor e o método de Feixes na Programação Não – Diferencial.

BIBLIOGRAFIA

AGUIAR, ALEXEI B. DE. Um modelo de Otimização para Telefonia Celular, Monografia - Universidade de Fortaleza - UNIFOR, Brasil, 2003.

ALENCAR, MARCELO SAMPAIO DE, *Telefonia Digital*, São Paulo: Érica, 1998.

BALAS, E.; HO, A. "Set Covering Algorithms Using Cutting Planes, Heuristics And Subgradient Optimization: A Computational Study". *Mathematical Programming STUDY* 12: 37-60, (1980).

BAZARAA, MOKHTAR S. et alli. *Non Linear Programming, Theory and Algorithms*. Singapore, JOHN WILEY & SONS, INC. 1993.

BEASLEY, J.E. "A Lagrangian heuristic for set covering problems". *Naval Research Logistics*, 37: 145-164,(1990).

ETCHEBERRY, J. "The set covering problem: a new implicit enumeration algorithm". *Operational Research*, 25: 760-772, (1977).

FISHER, M. L. "The Lagrangian relaxation method of solving integer programming problems. *Management Science*, 27(1): 1-18, 1981.

GEOFFRION, A.M. "Lagrangian Relaxation end its Uses in Integer Programming". *Math. Programming Study*, Vol. 2 , 82-114, 1974.

HELD, M. ; KARP, R.M. "The travelling salesman problem and minimum spanning trees: part II". *Mathematical Programming*, 1: 6-25, 1971.

HELD, M.; KARP, R.M" "The travelling salesman problem and minimum spanning trees". *Mathematical Programming*, 18: 1138-1162, 1970.

HELD, M.; WOLF, P.; CROWDER, H.P. "Validation of subgradient optimization". *Mathematical Programming*, 6: 62-88, 1974.

IBGE – Censo Demográfico 2000 - <http://www.ibge.gov.br/>

KUBAT, PETER at al, *Design of Cellular Networks with Diversity and Capacity Constraints* 2000. In Papers in IEEE Transactions on Reliability Vol. 49, Nº 2, June, p. 165-175, 2000.

MACAMBIRA, ELDER MAGALHÃES, Modelos e algoritmos de programação inteira no projeto de redes de telecomunicações, Tese de doutorado - Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, COOPE, Brasil, 2003.

MARTIN, RICHARD Kipp, "Large Scale Linear and Integer Optimization: *a Unified Approach*", p. 393-415, Second Printing, 2002.

PINHEIRO, P. R., Uma Metodologia de Feixes e Benders Aplicado a um Problema Linear Inteiro de Grande Porte, Tese de doutorado - Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ,

COPPE, Brasil, 1998.

PINHEIRO, P. R.; RODRIGUES, M. M.; MACAMBIRA, M, E.; FERREIRA, L.O.R.A; AQUIAR, A. B.; *Design Of Cellular Network Using Lagrangean Relaxation Algorithm*, INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER, COMMUNICATION AND CONTROL TECHNOLOGIES: CCCT'03 AND THE 9TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATION SYSTEMS ANALYSIS AND SYNTHESIS: ISAS'03, 2003, ORLANDO, FLORIDA, USA. PROCEEDINGS INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER, COMMUNICATION AND CONTROL TECHNOLOGIES: CCCT'03, PP. 127 – 133, 2003

POLYAK, B.T. "A general method for solving extremal problemas". *Soviet. Math. Dokl.* 8, 593-597, 1967.

RAMASWAMI, RAJIV; SIVARAJAN, KUMAR N., *Optical Networks, A Pratical Perspective*, London: Morgan Kaufmann, 2001.

RODRIGUES, SANDRA I. M., *Relaxação Lagrangeana e Subgradiente com Dilatação de Espaço Aplicado a um Problema de Grande Porte*, Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, COPPE, Brasil, 1993.

SHAPIRO, J. F. "A surver of lagrangean techniques for discret optimization". *Ann. Discret Mathematical*, 5: 113-138, 1979.

SOARES, LUIZ FERNANDO GOMES. *Redes de Computadores: das Lan's, Man's e Wan's às Redes ATM*. Rio de Janeiro: Campus, 1995.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)