

**O MODELO DE GURSON PARA DANO DÚCTIL:  
ESTRATÉGIA COMPUTACIONAL E APLICAÇÕES**

**Luiz Antônio Bragança da Cunda**

Porto Alegre  
2006

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

**LUIZ ANTÔNIO BRAGANÇA DA CUNDA**

**O MODELO DE GURSON PARA DANO DÚCTIL:  
ESTRATÉGIA COMPUTACIONAL E APLICAÇÕES**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia.

Porto Alegre

2006

**LUIZ ANTÔNIO BRAGANÇA DA CUNDA**

**O MODELO DE GURSON PARA DANO DÚCTIL:  
ESTRATÉGIA COMPUTACIONAL E APLICAÇÕES**

Esta tese de doutorado foi julgada adequada para a obtenção do título de DOUTOR EM ENGENHARIA e aprovada em sua forma final pelo professor orientador e pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

Porto Alegre, 08 de março de 2006

**Prof. Guillermo Juan Creus**  
D. Sc. pela COPPE/UFRJ  
orientador

**Prof. Eduardo Bittencourt**  
Dr. pelo PPGEC/UFRGS  
orientador

**Prof. Fernando Schnaid**  
Coordenador do PPGEC/UFRGS

**BANCA EXAMINADORA**

**Prof. Raul Rosas e Silva (PUC/RJ)**  
Ph.D. pela Stanford University

**Prof. Ignacio Iturrioz (PROMEC/UFRGS)**  
Dr. pelo PPGEC/UFRGS

**Prof. Armando Miguel Awruch (PPGEC/UFRGS)**  
D.Sc. pela COPPE/UFRJ

Dedico a Daniela e Letícia.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos Professores Guillermo J. Creus e Eduardo Bittencourt, pela dedicada orientação proporcionada ao longo deste trabalho.

À Fundação Universidade Federal do Rio Grande – FURG, pelo apoio dispensado ao longo deste trabalho.

Aos Professores Michel Hogge e Jean-Philippe Ponthot, da Universidade de Liège, pela autorização para empregar e modificar o código fonte do Metafor.

Ao Prof. Lírio Schaeffer, da UFRGS, pela sugestão de analisar o problema de hidroconformação.

Ao Prof. Andreas Öchsner, da Universidade de Aveiro, pelo convite para participar do estudo das espumas metálicas.

Aos amigos do PPGEC, pela agradável convivência proporcionada nos últimos anos.

Aos amigos do Departamento de Materiais e Construção da Fundação Universidade Federal do Rio Grande – DMC/FURG, pelo incentivo proporcionado ao longo destes anos.

À CAPES, ao CNPq e PROPESQ/UFRGS, pelo auxílio financeiro (bolsas e financiamento à linha de pesquisa “Problemas Não-Lineares em Estruturas”, coordenada pelo Prof. G.J. Creus).

Agradeço a quem colaborou de uma forma ou de outra para que este trabalho chegasse a seu final.

## RESUMO

CUNDA, L.A.B. O Modelo de Gurson para Dano Dúctil: Estratégia Computacional e Aplicações. 2006. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

Este trabalho trata do emprego do modelo de dano dúctil de Gurson e de alguns aspectos relativos a sua implementação computacional. Emprega-se como ponto de partida o programa Metafor, código de elementos finitos voltado para a simulação de problemas de conformação mecânica, contemplando portanto grandes deformações plásticas. Estudam-se alguns casos simples procurando identificar a influência de cada parâmetro do modelo de Gurson na resposta. É discutida a aplicação dos modelos de nucleação de vazios usualmente empregados em conjunto com a superfície de escoamento de Gurson em situações onde há reversão de sollicitação. São propostas alterações nos modelos usuais de nucleação de forma a minorar resultados incoerentes verificados. Apresenta-se um algoritmo alternativo ao método de Newton-Raphson para a solução do sistema de equações associado à forma fraca das equações de equilíbrio, em situações onde a rigidez fica muito pequena. Tal algoritmo é implementado e testado. Um algoritmo de integração de tensões é apresentado e implementado, mostrando-se sua vantagem do ponto de vista de robustez, ou seja, obtenção da resposta correta a despeito do tamanho de incremento empregado. Também é discutido um procedimento para desconsiderar elementos que apresentem ruptura local. Estudam-se problemas envolvendo geração de calor por deformação plástica em conjunto com a formulação do modelo de Gurson, mostrando que a consideração de acoplamento termo-mecânico com dano traz vantagens em algumas simulações. É discutida a implementação do modelo de Gurson sobre a versão tridimensional do Metafor, que contempla a formulação lagrangiana-euleriana arbitrária (LEA). Ao final, é feita uma simulação inicial do comportamento de espumas metálicas.

**Palavras-chave:** dano dúctil; modelo de Gurson; nucleação de vazios; temperatura.

## ABSTRACT

CUNDA, L.A.B. O Modelo de Gurson para Dano Dúctil: Estratégia Computacional e Aplicações. 2006. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

This work studies the use of Gurson ductile damage model and some aspects of its numerical implementation in the Finite Element code Metafor, developed initially at Liège University to simulate metal forming in a finite strains context. Some simple cases are studied, trying to identify the influence of each parameter of Gurson model in the response. The application of the known nucleation models used with Gurson yield surface is studied in cases where the pressure signal changes and modifications in these nucleation models are proposed. An algorithm alternative to the Newton-Raphson method is implemented to solve problems under force loading when the stiffness becomes very small. An algorithm to integrate the constitutive equations that provides good results even with larger increment sizes is formulated and implemented. A procedure to manage elements with local rupture is implemented and tested. Problems with thermomechanical coupling are studied in association with Gurson ductile damage model, showing advantages in some simulations. The implementation of Gurson model in the three-dimensional version of Metafor is discussed, introducing an Arbitrary Lagrangean-Eulerian formulation (ALE). As a further practical application, the code obtained is applied to the simulation of damage in metal foams.

**Key-words:** ductile damage; Gurson model; nucleation of voids; temperature.



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	p. 34
1.1 OBJETIVOS .....	p. 36
1.1.1 Solução do sistema de equações não-lineares .....	p. 37
1.1.2 Integração da lei constitutiva .....	p. 38
1.1.3 Acoplamento entre dano e temperatura .....	p. 39
1.1.4 Lei de nucleação .....	p. 40
1.1.5 O emprego da formulação LEA em problemas tridimensionais .....	p. 40
1.2 DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO .....	p. 41
<b>2 O MODELO DE GURSON</b> .....	p. 43
2.1 O MODELO .....	p. 43
2.1.1 A superfície de escoamento .....	p. 45
2.1.2 Nucleação ou formação de vazios .....	p. 49
2.1.3 Crescimento de vazios .....	p. 54
2.1.4 Coalescência de vazios .....	p. 55
2.1.5 Lei de deformação irreversível .....	p. 58
2.1.6 Comportamento elástico .....	p. 58
2.2 ALGUNS CASOS BÁSICOS .....	p. 62
2.2.1 Nucleação .....	p. 62
2.2.2 Crescimento .....	p. 68
2.2.3 Coalescência .....	p. 75
2.3 DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS .....	p. 81
2.4 MODIFICAÇÕES NO MODELO E APLICAÇÕES DIVERSAS .....	p. 83
2.5 RESUMO E CONCLUSÕES .....	p. 89
<b>3 A DETERMINAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO EQUILIBRADA</b> .....	p. 90
3.1 EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O CONTÍNUO .....	p. 91
3.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA .....	p. 93

3.2.1 Solução da forma fraca das equações de equilíbrio via elementos finitos .....	p. 96
3.2.2 Ordem de integração a ser empregada .....	p. 103
3.3 A DETERMINAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO DEFORMADA .....	p. 105
3.3.1 O método de Newton-Raphson .....	p. 107
3.3.2 Métodos alternativos para solução de sistemas de equações não-lineares .....	p. 111
3.3.3 O método de controle de incremento de trabalho .....	p. 112
3.4 APLICAÇÕES .....	p. 118
3.4.1 Monoelemento .....	p. 118
3.4.2 Barra em tração .....	p. 120
3.5 RESUMO E CONCLUSÕES .....	p. 123
<b>4 OBTENÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS .....</b>	<b>p. 124</b>
4.1 O TRATAMENTO DA NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA .....	p. 125
4.2 A INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS .....	p. 127
4.2.1 Algoritmos para integração de equações constitutivas .....	p. 127
4.2.2 Aplicação à superfície de escoamento de Gurson .....	p. 133
4.3 ELIMINAÇÃO DE ELEMENTOS EM SITUAÇÃO CRÍTICA .....	p. 142
4.4 APLICAÇÕES .....	p. 143
4.4.1 Robustez do esquema de integração .....	p. 143
4.4.2 Emprego da eliminação de elementos .....	p. 145
4.5 RESUMO E CONCLUSÕES .....	p. 154
<b>5 A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA .....</b>	<b>p. 155</b>
5.1 A DEFORMAÇÃO COMO FONTE DE CALOR .....	p. 156
5.2 SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS TÉRMICO E MECÂNICO .....	p. 161
5.3 O EFEITO DA TEMPERATURA NO MODELO DE GURSON .....	p. 162
5.4 CÁLCULO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS .....	p. 166

5.5 APLICAÇÕES .....	p. 168
5.5.1 Compressão de cilindro .....	p. 168
5.5.2 Teste de tração axial .....	p. 172
5.5.3 Fragilização por efeito de temperatura .....	p. 176
5.6 CONCLUSÕES .....	p. 178
<b>6 A INFLUÊNCIA DA PRESSÃO NA NUCLEAÇÃO DE VAZIOS</b> ....	p. 179
6.1 MODELOS USUAIS DE NUCLEAÇÃO .....	p. 179
6.2 MODELOS ALTERNATIVOS DE NUCLEAÇÃO .....	p. 188
6.2.1 Modelo simétrico .....	p. 188
6.2.2 Modelo deslocado .....	p. 190
6.2.3 Modelo baseado na deformação plástica principal máxima .....	p. 192
6.2.4 Qual dos modelos empregar? .....	p. 194
6.2.5 Hidroconformação aplicando os modelos alternativos .....	p. 194
6.3 APLICAÇÃO À RUPTURA POR FADIGA DE BAIXO CICLO .....	p. 198
6.4 CONCLUSÕES .....	p. 202
<b>7 A FORMULAÇÃO LAGRANGIANA-EULERIANA ARBITRÁRIA</b> .....	p. 203
7.1 INTRODUÇÃO .....	p. 203
7.2 CINEMÁTICA DA FORMULAÇÃO LEA .....	p. 208
7.3 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO NA FORMULAÇÃO LEA .....	p. 211
7.4 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS .....	p. 213
7.5 DETERMINAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO EQUILIBRADA .....	p. 214
7.5.1 Resolução das equações de equilíbrio .....	p. 215
7.5.2 Dificuldades na solução das equações de equilíbrio acopladas .....	p. 216
7.6 A TÉCNICA DE SEPARAÇÃO DO OPERADOR LEA .....	p. 220
7.6.1 Etapa Lagrangiana Atualizada .....	p. 220
7.6.2 Etapa Euleriana .....	p. 221
7.6.3 O método de Interpolação Transfinita .....	p. 222

7.7 TRANSFERÊNCIA DE DADOS .....	p. 223
7.7.1 Cálculo de campo de grandezas nos pontos de Gauss da malha SRC .	p. 224
7.7.2 Grandezas a serem transferidas .....	p. 225
7.8 APLICAÇÕES .....	p. 228
7.8.1 Dobramento de barra retangular .....	p. 228
7.8.2 Tração em barra de seção quadrada .....	p. 238
7.8.3 Puncionamento de bloco .....	p. 241
7.9 CONCLUSÕES .....	p. 250
<b>8 APLICAÇÃO À ESPUMAS METÁLICAS .....</b>	<b>p. 251</b>
8.1 DETERMINAÇÃO DE DANO VIA SOLICITAÇÃO CÍCLICA .....	p. 254
8.1.1 Análise de um ensaio cíclico de tração em barra cilíndrica .....	p. 254
8.2 DETERMINAÇÃO DO DANO EM ESPUMAS METÁLICAS .....	p. 257
8.2.1 Aplicação das condições de contorno .....	p. 258
8.2.2 Análise numérica de uma célula de metal celular .....	p. 259
8.3 COMENTÁRIOS FINAIS .....	p. 262
<b>9 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES .....</b>	<b>p. 263</b>
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	p. 266
APÊNDICE A – Elementos de Mecânica dos Sólidos .....	p. 277
APÊNDICE B – Decomposição do Tensor Taxa de Deformação .....	p. 294
APÊNDICE C – Áreas sob a Curva Normal de Gauss .....	p. 303
APÊNDICE D – Coeficientes Empregados na Integração de Tensões .....	p. 306

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: superfície de escoamento ( $\alpha_1 = 1,0$ ; $\alpha_2 = 1,0$ ) .....	p. 46
Figura 2: superfície de escoamento ( $\alpha_1 = 1,0$ ; $\alpha_2 = 0,7$ ) .....	p. 47
Figura 3: valores-limite de porosidade e pressão .....	p. 48
Figura 4: influência do desvio-padrão $s_N$ na lei de nucleação .....	p. 51
Figura 5: nucleação de vazios por descolamento na interface matriz-inclusão .....	p. 52
Figura 6: superfície de escoamento com nucleação somente em tração .....	p. 53
Figura 7: superfície de escoamento com nucleação simétrica em tração e compressão .....	p. 53
Figura 8: arranjo cúbico de vazios .....	p. 56
Figura 9: variação do módulo de compressibilidade em função da porosidade .....	p. 59
Figura 10: variação do módulo de elasticidade em função da porosidade .....	p. 60
Figura 11: variação do módulo de elasticidade transversal em função da porosidade .....	p. 60
Figura 12: configurações inicial (tracejada) e final (linha cheia) .....	p. 62
Figura 13: fração volumétrica de vazios para $\varepsilon_N = 0,05$ .....	p. 64
Figura 14: fração volumétrica de vazios para $\varepsilon_N = 0,1$ .....	p. 64
Figura 15: fração volumétrica de vazios para $\varepsilon_N = 0,2$ .....	p. 65
Figura 16: coeficiente de nucleação $A\{\varepsilon^p\}$ para $\varepsilon_N = 0,3$ .....	p. 65
Figura 17: área sob a curva de Gauss .....	p. 66
Figura 18: tensões de cisalhamento com e sem dano .....	p. 67
Figura 19: configurações inicial, final e condições de contorno .....	p. 68
Figura 20: fração volumétrica de vazios e variação de volume em EPD .....	p. 69
Figura 21: fração volumétrica de vazios e variação de volume em axissimétrico .....	p. 70
Figura 22: pressão com e sem dano em EPD (tração) .....	p. 70
Figura 23: fração volumétrica de vazios em axissimétrico .....	p. 72
Figura 24: fração volumétrica de vazios em EPD .....	p. 72
Figura 25: tensão axial em axissimétrico com e sem dano (tração e compressão) .....	p. 73

Figura 26: tensão longitudinal em EPD com e sem dano (tração e compressão) .....	p. 73
Figura 27: variação de volume em axissimétrico com e sem dano (tração e compressão) .	p. 74
Figura 28: variação de volume em EPD com e sem dano (tração e compressão) .....	p. 74
Figura 29: configurações inicial, final e condições de contorno .....	p. 75
Figura 30: força de tração para $\Delta\varepsilon = 0,1$ e $s_N = 0,01$ .....	p. 76
Figura 31: tensão axial para $\Delta\varepsilon = 0,1$ e $s_N = 0,01$ .....	p. 77
Figura 32: fração volumétrica de vazios para $\Delta\varepsilon = 0,1$ e $s_N = 0,01$ .....	p. 77
Figura 33: deformação plástica equivalente $\Delta\varepsilon = 0,1$ e $s_N = 0,01$ .....	p. 78
Figura 34: força de tração para $\Delta\varepsilon = 0,3$ e $s_N = 0,01$ .....	p. 78
Figura 35: tensão axial para $\Delta\varepsilon = 0,3$ e $s_N = 0,01$ .....	p. 79
Figura 36: fração volumétrica de vazios $\Delta\varepsilon = 0,3$ e $s_N = 0,01$ .....	p. 79
Figura 37: deformação plástica equivalente $\Delta\varepsilon = 0,3$ e $s_N = 0,01$ .....	p. 80
Figura 38: pressão normalizada para $\Delta\varepsilon = 0,1$ e $s_N = 0,01$ .....	p. 80
Figura 39: condições de contorno em deslocamentos, tensões e de contato .....	p. 92
Figura 40: sistemas de coordenadas físicas e reduzidas (caso bidimensional) .....	p. 98
Figura 41: pontos-limite, <i>snap-back</i> e <i>snap-through</i> .....	p. 106
Figura 42: esquema do elemento e vínculos .....	p. 119
Figura 43: força de tração (MNR – deslocamentos e forças) .....	p. 119
Figura 44: força de tração (MNR – deslocamentos e MCT – forças) .....	p. 120
Figura 45: geometria de $\frac{1}{4}$ do corpo de prova e malha empregada .....	p. 121
Figura 46: força de tração <i>versus</i> deslocamento no topo .....	p. 121
Figura 47: deformadas para MNR (deslocamentos) e MCT (forças), respectivamente ....	p. 122
Figura 48: incremento de deformação - (a) seção meridiana; (b) plano desviador .....	p. 132
Figura 49: malha empregada, condições de contorno e dimensões .....	p. 144
Figura 50: fração volumétrica de vazios obtida com o ABAQUS .....	p. 144
Figura 51: fração volumétrica de vazios obtida com o METAFOR .....	p. 145
Figura 52: geometria do corpo de prova e malha empregada (entalhe suave) .....	p. 147

Figura 53: curvas carga <i>versus</i> deslocamento variando entalhe e elemento .....	p. 148
Figura 54: deformação plástica e fração volumétrica de vazios (desloc. 1,9 mm) .....	p. 149
Figura 55: fração volumétrica de vazios, pressão e def. plástica, entalhe suave (Q4-VRI) .....	p. 149
Figura 56: fração volumétrica de vazios, pressão e def. plástica, entalhe brusco (Q4-VRI) .....	p. 150
Figura 57: fração volumétrica de vazios e pressão normalizada .....	p. 150
Figura 58: força de tração eliminando ou não elementos com ruptura local .....	p. 152
Figura 59: eliminação de elementos danificados .....	p. 152
Figura 60: última configuração equilibrada atingida sem eliminação de elementos .....	p. 153
Figura 61: porosidade, pressão e def. plástica finais eliminando elementos .....	p. 153
Figura 62: porosidade, pressão e def. plástica finais sem eliminar elementos .....	p. 154
Figura 63: malha, configuração inicial e configuração final .....	p. 169
Figura 64: força aplicada <i>versus</i> tempo .....	p. 170
Figura 65: aumento de temperatura <i>versus</i> tempo .....	p. 170
Figura 66: pressão e deformação plástica finais – termoplástico com dano .....	p. 171
Figura 67: porosidade e temperatura finais – termoplástico com dano .....	p. 171
Figura 68: evolução da porosidade – termoplástico com dano .....	p. 171
Figura 69: porosidade final – termoplástico com dano, nucleação em tração .....	p. 172
Figura 70: dimensões dos entalhes .....	p. 173
Figura 71: malha com o entalhe 2 e condições de contorno empregadas .....	p. 173
Figura 72: isolinhas para análise termo-elastoplástica com dano e sem entalhe .....	p. 175
Figura 73: carga <i>versus</i> deslocamento para material sem dano .....	p. 175
Figura 74: carga <i>versus</i> deslocamento considerando dano .....	p. 176
Figura 75: relações carga <i>versus</i> deslocamento obtidas a diferentes temperaturas.....	p. 177
Figura 76: temperatura na superfície externa, a partir da estrição, para $T_0 = 193$ K.....	p. 177
Figura 77: temperatura na superfície externa, a partir da estrição, para $T_0 = 393$ K.....	p. 178
Figura 78: contorno inicial e deformada final .....	p. 181

Figura 79: deformação plástica final .....	p. 181
Figura 80: pressão final .....	p. 182
Figura 81: fração volumétrica de vazios final .....	p. 182
Figura 82: pressão próxima à borda esquerda da placa .....	p. 183
Figura 83: deformação plástica próxima à borda esquerda da placa .....	p. 183
Figura 84: deslocamentos impostos nos ciclos TC e CT .....	p. 184
Figura 85: evolução da fração volumétrica de vazios durante os ciclos TC e CT .....	p. 185
Figura 86: evolução da deformação plástica durante os ciclos TC e CT .....	p. 185
Figura 87: evolução da pressão durante os ciclos TC e CT .....	p. 186
Figura 88: evolução da porosidade durante os ciclos TC e CT (porosidade inicial de 5%)p.	187
Figura 89: fração volumétrica de vazios nucleada – modelo simétrico .....	p. 189
Figura 90: fração volumétrica de vazios total – modelo simétrico .....	p. 189
Figura 91: fração volumétrica de vazios nucleada – modelo deslocado .....	p. 191
Figura 92: fração volumétrica de vazios total – modelo deslocado .....	p. 191
Figura 93: fração volumétrica de vazios nucleada – modelo baseado em deformação plástica principal máxima .....	p. 193
Figura 94: fração volumétrica de vazios total – modelo baseado em deformação plástica principal máxima .....	p. 193
Figura 95: geometria para simulação de hidroconformação .....	p. 195
Figura 96: frações volumétricas de vazios nucleada, por crescimento e total próximas à borda esquerda da placa (modelo simétrico) .....	p. 196
Figura 97: frações volumétricas de vazios nucleada, por crescimento e total próximas à borda esquerda da placa (modelo deslocado) .....	p. 197
Figura 98: fração volumétrica de vazios total final (modelo simétrico) .....	p. 197
Figura 99: fração volumétrica de vazios total final (modelo deslocado) .....	p. 198
Figura 100: fração volumétrica de vazios total – modelo ABAQUS (10 ciclos) .....	p. 200
Figura 101: fração volumétrica de vazios total – modelo simétrico (10 ciclos) .....	p. 200
Figura 102: fração volumétrica de vazios total – modelo deslocado (10 ciclos) .....	p. 201
Figura 103: fração volumétrica de vazios total – modelo baseado em deformação plástica principal máxima (10 ciclos) .....	p. 201



Figura 104: ponto $P$ em dois instantes de tempo consecutivos $t$ e $t + \Delta t$ , com coordenadas $x$ (SRE).....	p. 203
Figura 105: formulação Euleriana (SRE) .....	p. 204
Figura 106: ponto $P$ em dois instantes de tempo consecutivos $t$ e $t + \Delta t$ , com coordenadas $x$ (SRE) e $X$ (SRM) .....	p. 204
Figura 107: formulação Lagrangiana (SRM) .....	p. 205
Figura 108: ponto $P$ em dois instantes de tempo consecutivos $t$ e $t + \Delta t$ , com coordenadas $x$ (SRE) e $\chi$ (SRC) .....	p. 206
Figura 109: evolução da malha conforme a formulação empregada (FE, LA, LEA) .....	p. 207
Figura 110: incógnitas em um nó de elemento finito (formulação LEA) .....	p. 215
Figura 111: pontos de Gauss da malha e matéria (formulação LEA) .....	p. 218
Figura 112: nó material (SRM) em elemento finito da malha (SRC) .....	p. 218
Figura 113: partição hierárquica em subdomínios e malhamento transfinito .....	p. 223
Figura 114: esquema indicando a densidade de malha, as matrizes e as posições inicial e final da malha .....	p. 228
Figura 115: distribuição final de pressão – EPD (LA) .....	p. 229
Figura 116: distribuição final de deformação plástica – EPD (LA) .....	p. 230
Figura 117: distribuição final de porosidade – EPD (LA) .....	p. 230
Figura 118: distribuição final de pressão – EPD (LEA) .....	p. 230
Figura 119: distribuição final de deformação plástica – EPD (LEA) .....	p. 231
Figura 120: distribuição final de porosidade – EPD (LEA) .....	p. 231
Figura 121: deformada final e detalhe evidenciando a curvatura anticlástica – LA .....	p. 232
Figura 122: distribuição final de pressão – LA sem dano .....	p. 233
Figura 123: detalhe da distribuição final de pressão – LA sem dano .....	p. 233
Figura 124: distribuição final de deformação plástica – LA sem dano .....	p. 234
Figura 125: detalhe da distribuição final de deformação plástica – LA sem dano .....	p. 234
Figura 126: distribuição final de pressão – LA com dano .....	p. 235
Figura 127: detalhe da distribuição final de pressão – LA com dano .....	p. 235
Figura 128: distribuição final de deformação plástica – LA com dano .....	p. 236

Figura 129: detalhe da distribuição final de deformação plástica – LA com dano .....	p. 236
Figura 130: distribuição final de porosidade – LA com dano .....	p. 237
Figura 131: detalhe da distribuição final de porosidade – LA com dano .....	p. 237
Figura 132: malhas inicial, final (LA) e final (LEA) .....	p. 239
Figura 133: curvas carga <i>versus</i> deslocamento (LA e LEA) .....	p. 239
Figura 134: deformação plástica final (LA e LEA) .....	p. 239
Figura 135: pressão final (LA e LEA) .....	p. 240
Figura 136: fração volumétrica de vazios final (LA e LEA) .....	p. 240
Figura 137: deformada final (LEA) .....	p. 242
Figura 138: deformadas finais empregando formulações LA e LEA .....	p. 242
Figura 139: pressão e deformação plástica a 82% do puncionamento previsto (LA) .....	p. 243
Figura 140: pressão e deformação plástica finais (LEA) .....	p. 243
Figura 141: pressão a 78% do puncionamento previsto, nucleação simétrica (LA) .....	p. 244
Figura 142: deformação plástica a 78% do puncionamento previsto, nucleação simétrica (LA) .....	p. 245
Figura 143: porosidade final, nucleação simétrica (LA) .....	p. 245
Figura 144: porosidade final, nucleação deslocada (LA) .....	p. 246
Figura 145: porosidade final, nucleação somente em tração (LA) .....	p. 246
Figura 146: deformação plástica final, nucleação simétrica (LEA) .....	p. 248
Figura 147: pressão final, nucleação simétrica (LEA) .....	p. 248
Figura 148: porosidade final, nucleação simétrica (LEA) .....	p. 249
Figura 149: porosidade final, nucleação deslocada (LEA) .....	p. 249
Figura 150: porosidade final, nucleação somente em tração (LEA) .....	p. 250
Figura 151: espumas metálicas – (a) célula aberta, (b) célula fechada .....	p. 251
Figura 152: espuma de alumínio (DUOCEL <sup>®</sup> ) .....	p. 251
Figura 153: painel sanduíche com espuma metálica em seu interior .....	p. 252
Figura 154: curva tensão–deformação típica para espuma metálica .....	p. 253
Figura 155: variação no módulo de elasticidade com carga cíclica .....	p. 254

Figura 156: pressão, tensão de von Mises, deformação plástica e porosidade finais .....	p. 255
Figura 157: tensão macroscópica <i>versus</i> deformação macroscópica (barra cilíndrica) ....	p. 256
Figura 158: módulo de elasticidade aparente (barra cilíndrica) .....	p. 256
Figura 159: malhas empregadas para representar espuma metálica e metal celular .....	p. 257
Figura 160: placa de metal celular instrumentada .....	p. 258
Figura 161: resultados de diferentes condições de contorno aplicadas à face direita .....	p. 258
Figura 162: malha e condições de contorno para um oitavo de célula .....	p. 259
Figura 163: pressão final, análise com dano .....	p. 260
Figura 164: deformação plástica final, análise com dano .....	p. 260
Figura 165: fração volumétrica de vazios final .....	p. 260
Figura 166: tensão macroscópica <i>versus</i> deformação macroscópica (espuma) .....	p. 261
Figura 167: módulo de elasticidade aparente (espuma) .....	p. 261
Figura 168: configuração de referência e configuração atual .....	p. 279
Figura 169: variação de comprimento de segmento .....	p. 281
Figura 170: distribuição normal padronizada .....	p. 304

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: resumo do modelo de Gurson .....	p. 61
Quadro 2: parâmetros propostos por Goya <i>et al.</i> (1992) .....	p. 85
Quadro 3: passos, iterações e tempo.....	p. 122
Quadro 4: integração de tensões corrotacionais de Cauchy no modelo de Gurson .....	p. 141
Quadro 5: resumo do modelo de Gurson considerando efeitos térmicos .....	p. 165
Quadro 6: integração de tensões corrotacionais de Cauchy no modelo de Gurson com consideração da temperatura .....	p. 167
Quadro 7: tensão de escoamento e parâmetro de endurecimento .....	p. 169
Quadro 8: etapas para o emprego da formulação LEA .....	p. 227

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1: áreas sob a cauda esquerda da distribuição normal padronizada ..... p. 305

## LISTA DE SÍMBOLOS

### CAPÍTULO 1

- CDM – *continuum damage mechanics*  
 $f$  – fração volumétrica de vazios  
LEA – Lagrangiana-Euleriana arbitrária  
 $T$  – temperatura  
 $T_m$  – temperatura absoluta de fusão

### CAPÍTULO 2

- $a$  – aresta de arranjo cúbico de vazios esféricos  
cosh – função cosseno hiperbólico  
 $d$  – diferencial  
 $e$  – número de Euler ( $e = 2,718281$ )  
exp – função exponencial  $e^x$   
 $f$  – fração volumétrica de vazios  
 $\dot{f}$  – taxa de evolução da fração volumétrica de vazios  
 $\dot{f}_n$  – taxa de evolução da fração volumétrica vazios por nucleação  
 $\dot{f}_g$  – taxa de evolução da fração volumétrica de vazios por crescimento  
 $\dot{f}_c$  – taxa de evolução da fração volumétrica de vazios por coalescência  
 $f^*$  – função da fração volumétrica de vazios para levar em conta coalescência  
 $f_N$  – fração volumétrica de vazios de nucleação  
 $f_0$  – fração volumétrica de vazios inicial  
 $f_C$  – fração volumétrica de vazios que marca o início da coalescência  
 $f_U$  – fração volumétrica de vazios limite  
 $f_F$  – parâmetro de modelo de coalescência  
 $g\{x\}$  –  $g$  função de  $x$   
 $h$  – parâmetro de endurecimento  
 $k$  – constante de Boltzmann  
 $k_{min}$  – porcentagem de nucleação de vazios em relação à inicialmente prevista  
 $m$  – parâmetro de modelo de nucleação  
 $m$  – massa  
 $n$  – parâmetro de endurecimento, parâmetro da superfície de escoamento de Gurson  
 $p$  – pressão hidrostática  
 $\dot{p}$  – taxa de evolução da pressão hidrostática  
 $p_N$  – pressão média de nucleação  
 $q_1$  – parâmetro da superfície de escoamento de Gurson  
 $q_2$  – parâmetro da superfície de escoamento de Gurson  
 $r$  – raio de vazio  
 $s_N$  – desvio-padrão de nucleação  
 $s_{ij}$  – tensor desviador de tensões

$t$	– tempo
$z$	– parâmetro estatístico
$A\{\varepsilon^p\}$	– parâmetro de modelo de nucleação
$A, B$	– parâmetros de modelo de nucleação
$B\{p\}$	– parâmetro de modelo de nucleação
$C\{p, T\}$	– parâmetro de modelo de nucleação
$E$	– módulo de elasticidade ou de Young
EPD	– estado plano de deformações
$COD$	– <i>crack opening displament</i>
$G$	– módulo de elasticidade transversal
$G_0$	– módulo de elasticidade transversal do material íntegro
$G\{f\}$	– módulo de elasticidade transversal afetado pelo dano
GPa	– unidade de tensão
$\bar{H}_{ijkl}$	– tensor de constantes elásticas afetado pelo dano
$J$	– integral da mecânica da fratura
$K$	– módulo de compressibilidade
$K_0$	– módulo de compressibilidade do material íntegro
$K'$	– parâmetro de modelo de coalescência
$K\{f\}$	– módulo de compressibilidade afetado pelo dano
$MnS$	– sulfeto de manganês
MPa	– unidade de tensão
$N$	– quantidade de microvazios por unidade de volume
$\dot{N}$	– taxa de evolução da quantidade de microvazios por unidade de volume
$T$	– temperatura
$V_{aparente}$	– volume de referência
$V_{vazios}$	– volume de vazios encontrado em um volume de referência
$\alpha$	– parâmetro de superfície de escoamento de Gurson modificada
$\alpha_i$	– parâmetros da superfície de escoamento de Gurson
$\alpha_1$	– parâmetro da superfície de escoamento de Gurson
$\alpha_2$	– parâmetro da superfície de escoamento de Gurson
$\alpha_3$	– parâmetro da superfície de escoamento de Gurson
$\omega\{p, \sigma_y, f\}$	– função que introduz o amolecimento na superfície de escoamento de Gurson
$\rho$	– densidade volumétrica de massa
$\sigma$	– tensão normal
$\sigma_0$	– tensão normal de referência
$\sigma_{ij}$	– tensor de tensões de Cauchy
$\dot{\sigma}_{ij}$	– taxa do tensor de tensões de Cauchy
$\sigma_y$	– tensão de escoamento
$\sigma_y^0$	– tensão de escoamento inicial, sem endurecimento
$\dot{\sigma}_y$	– taxa de evolução da tensão de escoamento
$\varepsilon$	– deformação específica longitudinal
$\varepsilon_0$	– deformação específica longitudinal de referência
$\varepsilon^p$	– deformação específica longitudinal plástica
$\dot{\varepsilon}^p$	– taxa de evolução da deformação específica longitudinal plástica
$\varepsilon_N$	– deformação plástica média de nucleação

$\dot{\varepsilon}_{kl}$	– taxa de evolução do tensor de deformações
$\dot{\varepsilon}_{ij}^p$	– taxa de evolução do tensor de deformações plásticas
$\delta_{ij}$	– delta de Kronecker
$\psi$	– parâmetro de modelo de nucleação
$\dot{\lambda}$	– multiplicador plástico
$\nu$	– coeficiente de Poisson
$\partial$	– diferencial parcial
$\infty$	– infinito
$\Delta\varepsilon$	– parâmetro de modelo de coalescência
$\Omega$	– parâmetro de superfície de escoamento de Gurson modificada
$\Phi$	– superfície de escoamento de Gurson

### CAPÍTULO 3

$a$	– dimensão de entalhe
$b$	– dimensão de entalhe
$b_i$	– força volumétrica na direção $i$
$\cos$	– função cosseno
$dS$	– diferencial de superfície
$dS^{elem}$	– diferencial de superfície no domínio do elemento
$dV$	– diferencial de volume
$dV^{elem}$	– diferencial de volume no domínio do elemento
$dW$	– incremento de trabalho
$dW_i$	– incremento de trabalho no incremento de carga $i$
$d\Gamma_F^{elem}$	– diferencial da superfície $\Gamma_F$ no domínio do elemento
$g\{x\}$	– $g$ função de $x$
$h$	– altura
$i$	– subíndice associado a incremento de carga
$i$	– subíndice associado a grau de liberdade de nó
$j$	– subíndice associado a grau de liberdade de nó
$k$	– superíndice associado a iteração
$k$	– parâmetro de endurecimento
$l$	– subíndice associado a grau de liberdade da estrutura
$m$	– subíndice associado a grau de liberdade da estrutura
$m$	– parâmetro de endurecimento
$m$	– superíndice associado a iteração
$n$	– superíndice associado ao instante de tempo $t^n$
$n_j$	– vetor normal à superfície
$t$	– instante de tempo
$t^n$	– instante de tempo $n$ , onde todas as grandezas do problema são conhecidas
$t^{n+1}$	– instante de tempo $n + 1$ , onde se busca determinar alguma grandeza do problema
$t_i$	– vetor tensão
$u$	– vetor de deslocamentos
$u_t$	– vetor de deslocamentos correspondentes à carga de referência $P$
$u_r$	– vetor de deslocamentos correspondentes ao resíduo $R$



$u_i$	– deslocamento na direção $i$
$\bar{u}_i$	– deslocamentos prescritos na direção $i$
$u_{i,j}$	– divergente dos deslocamentos
$\dot{u}_i$	– velocidade na direção $i$
$v_i$	– velocidade na direção $i$
$v_{i,i}$	– divergente das velocidades
$x_i$	– coordenada na direção $i$
$\ddot{x}_i$	– acelerações na direção $i$
$A$	– grandeza do método de controle de incremento de trabalho
$B$	– grandeza do método de controle de incremento de trabalho
$C$	– grandeza do método de controle de incremento de trabalho
CSP	– <i>current stiffness parameter</i>
$E$	– módulo de elasticidade ou de Young
$F_i^{int,S}$	– força interna associada ao grau de liberdade $i$ do nó $S$
$F_m^{int}$	– força interna associada ao grau de liberdade $m$ da estrutura
$F^{int,k}$	– vetor de forças internas da estrutura na iteração $k$
$F_i^{int,k}$	– vetor de forças internas no incremento $i$ e iteração $k$
$F_i^{ext,S}$	– força externa associada ao grau de liberdade $i$ do nó $S$
$F_m^{ext}$	– força externa associada ao grau de liberdade $m$ da estrutura
GPa	– unidade de tensão
$I_i$	– número de iterações para atingir a convergência no incremento $i$
$K_i^k$	– matriz de rigidez tangente no incremento $i$ e iteração $k$
$K_{ml}$	– operador tangente
$K_{ml}^k$	– operador tangente na iteração $k$
$L^{min}$	– menor distância entre dois nós na discretização empregada
MPa	– unidade de tensão
MNR	– método de Newton-Raphson
MCT	– método de controle de incremento de trabalho
$M_{ij}$	– matriz de massa consistente de elemento
$M_{ml}$	– matriz de massa da estrutura
$N$	– número de nós de elemento, número de graus de liberdade de malha
$P$	– vetor de cargas de referência
Q4-VRI	– elemento finito bidimensional linear de 4 nós, com subintegração volumétrica
Q4-URI	– elemento finito bidimensional linear de 4 nós, com subintegração total
$R^k$	– vetor de resíduo da estrutura na iteração $k$
$R_0$	– raio inicial
$R_i^S$	– resíduo associado ao grau de liberdade $i$ do nó $S$
$R_m$	– resíduo associado ao grau de liberdade $m$ da estrutura
$R_m^k$	– resíduo associado ao grau de liberdade $m$ da estrutura na iteração $k$
$S$	– superfície externa correspondente ao volume $V$
SEM	– sistema de referência material
SRE	– sistema de referência espacial
$U^S$	– deslocamentos nodais associados ao $S$ -ésimo nó do elemento

$U_m^k$	– deslocamento nodal do grau de liberdade $m$ da estrutura na iteração $k$
$U_m^n$	– deslocamento nodal do grau de liberdade $m$ da estrutura no instante $t^n$
$V$	– volume
$X^S$	– coordenadas nodais associadas ao $S$ -ésimo nó do elemento
$\dot{X}_m^n$	– velocidade nodal do grau de liberdade $m$ da estrutura no instante $t^n$
$\ddot{X}_m^n$	– aceleração nodal do grau de liberdade $m$ da estrutura no instante $t^n$
$\ddot{X}_i$	– aceleração nodal do grau de liberdade $i$
$\alpha$	– coeficiente de variação do passo de tempo
$\delta u_i$	– incremento virtual de deslocamentos
$\delta u_{i,j}$	– divergente do incremento virtual de deslocamentos
$\delta \lambda^k$	– variação no multiplicador sobre a carga de referência na iteração $k$
$\delta u^k$	– variação nos deslocamentos na iteração $k$
$\delta u_i^k$	– variação no vetor de deslocamentos $u_i$ na iteração $k$
$\delta u_r^k$	– variação no vetor de deslocamentos $u_r$ na iteração $k$
$\varepsilon^p$	– deformação plástica
$\lambda_i^k$	– multiplicador sobre a carga de referência no incremento $i$ e iteração $k$
$\nu$	– coeficiente de Poisson
$\gamma$	– coeficiente de segurança empregado no cálculo do incremento de tempo
$\phi^S$	– funções de interpolação ou de forma do nó $S$
$\xi$	– coordenada reduzida ou paramétrica
$\eta$	– coordenada reduzida ou paramétrica
$\zeta$	– coordenada reduzida ou paramétrica
$\xi^S$	– valor nodal de coordenada reduzida
$\eta^S$	– valor nodal de coordenada reduzida
$\sigma_{ij}$	– tensor de tensões de Cauchy
$\sigma_{ij,j}$	– gradiente do tensor de tensões de Cauchy
$\sigma_y$	– tensão de escoamento
$\sigma_y^0$	– tensão de escoamento inicial, sem endurecimento
$\rho$	– densidade volumétrica de massa
$\dot{\rho}$	– taxa de evolução da densidade volumétrica de massa
$\rho_e$	– tolerância
$\zeta^S$	– valor nodal de coordenada reduzida
$\phi_{,j}^S$	– derivada em relação a $j$ das funções de forma associadas ao nó $S$
$\theta$	– ângulo entre vetores de deslocamento incremental em iterações consecutivas
$\Delta t$	– incremento de tempo
$\Delta t^n$	– incremento de tempo entre os instantes $n - 1$ e $n$
$\Delta t^{crit}$	– incremento de tempo máximo para que haja estabilidade
$\Delta u^k$	– acumulação das variações de $u$ no incremento, até a iteração $k$
$\Delta U_m^k$	– incremento de deslocamento nodal do grau de liberdade $m$ da estrutura na iteração $k$
$\Delta U_l$	– incremento de deslocamento nodal do grau de liberdade $l$ da estrutura
$\Delta \lambda^k$	– acumulação das variações de $\lambda$ no incremento de carga, até a iteração $k$
$\Gamma_D$	– superfície com deslocamentos prescritos

- $\Gamma_C$  – superfície candidata ao contato
- $\Gamma_F$  – superfície com tensões impostas
- $\Sigma$  – somatório
- – produto interno entre vetores
- $\| \|$  – norma euclidiana

## CAPÍTULO 4

- $a$  – dimensão do lado de elemento finito
- $a$  – dimensão de entalhe
- $b$  – dimensão de entalhe
- $b_i$  – coeficiente de sistema de equações empregado na integração temporal
- cosh – cosseno hiperbólico
- $dt$  – diferencial de tempo
- $f_C$  – fração volumétrica de vazios que marca o início da coalescência
- $f_N$  – fração volumétrica de vazios de nucleação
- $f_U$  – fração volumétrica de vazios limite
- $g$  – potencial plástico
- $g\{x\}$  –  $g$  função de  $x$
- $h_m$  – conjunto de variáveis internas
- $h_t$  – taxa de evolução das variáveis internas
- $h$  – altura
- $i$  – subíndice
- $j$  – subíndice
- $k$  – subíndice
- $k$  – parâmetro de endurecimento
- $l$  – subíndice
- ln – logaritmo neperiano
- $m$  – parâmetro de endurecimento
- $s_N$  – desvio-padrão de nucleação
- $p$  – pressão hidrostática
- $q$  – norma do tensor desviador de tensões
- $m$  – subíndice associado às variáveis internas
- $n$  – subíndice ligado à configuração de referência
- $n + \alpha$  – configuração intermediária entre as configurações de referência e atualizada
- $n + l$  – subíndice ligado à configuração atualizada
- $n_{ij}$  – vetor que dá a direção da deformação plástica
- $q$  – norma do tensor desviador de tensões
- $q_m$  – conjunto de variáveis internas
- $\dot{q}_m$  – taxa de evolução das variáveis internas  $q_m$
- $r_{ij}$  – tensor que dá a direção do incremento de deformação plástica
- $s_{ij}$  – tensor desviador de tensões
- $t$  – subíndice associado às variáveis internas
- $t$  – tempo

$u$	– deslocamento
$ x $	– módulo de $x$
$A_{ij}$	– coeficiente de sistema de equações empregado na integração temporal
ABS	– módulo de um valor
$C_{ijkl}$	– tensor constitutivo
$C_{ijkl}^c$	– tensor constitutivo em eixos corrotacionais
$D_{kl}$	– tensor taxa de deformação
$D_{kl}^c$	– tensor taxa de deformação em eixos corrotacionais
$D_{ij}^e$	– tensor taxa de deformação elástica
$D_{ij}^p$	– tensor taxa de deformação plástica
$E$	– módulo de elasticidade
$E_{ij}^N$	– tensor de deformações logarítmicas
$E_{ij}^{N,e}$	– tensor de deformação logarítmica elástica
$E_{ij}^{N,p}$	– tensor de deformação logarítmica plástica
$G$	– módulo de elasticidade transversal
$G\{\}$	– módulo de elasticidade transversal afetado pelo dano
GPa	– unidade de tensão
$H_t$	– conjunto de variáveis internas
$\dot{H}_t$	– taxa de evolução do conjunto de variáveis internas
$\bar{H}_{ijkl}$	– tensor elástico afetado pela porosidade
INT	– parte inteira de um número
$K$	– módulo de compressibilidade
$K\{\}$	– módulo de compressibilidade afetado pelo dano
MAX	– máximo entre um conjunto de valores
MPa	– unidade de tensão
$NSI$	– número de subincrementos
$NSI_1$	– número de subincrementos
$NSI_2$	– número de subincrementos
$P$	– derivada da superfície de escoamento em relação à norma do desviador corrigida
$Q$	– derivada da superfície de escoamento em relação à pressão
Q4-URI	– elemento finito bidimensional linear de 4 nós, com subintegração total
Q4-VRI	– elemento finito bidimensional linear de 4 nós, com subintegração parcial
$R_0$	– raio inicial
$R_{ij}$	– matriz de rotação
$T$	– superíndice associado ao previsor elástico
$U_{kl}$	– deformação oriunda da decomposição polar
$\alpha$	– parâmetro de controle do esquema de integração
$\alpha_2$	– parâmetro da superfície de escoamento de Gurson
$\delta_{ij}$	– delta de Kronecker
$\varepsilon_N$	– deformação plástica média de nucleação
$\varepsilon^P$	– deformação plástica uniaxial equivalente
$\varepsilon_{ij}$	– tensor de deformações
$\varepsilon_{ij}^e$	– tensor de deformações elásticas

- $\varepsilon_{ij}^p$  – tensor de deformações plásticas  
 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  – taxa do tensor de deformações plásticas  
 $\lambda$  – multiplicador plástico  
 $\dot{\lambda}$  – multiplicador plástico  
 $\nu$  – coeficiente de Poisson  
 $\omega\{p, \sigma_y, f\}$  – função que introduz o amolecimento na superfície de escoamento de Gurson  
 $\rho_p$  – correção em  $\Delta E_p$   
 $\rho_q$  – correção em  $\Delta E_q$   
 $\sigma_y$  – tensão de escoamento  
 $\sigma_y^0$  – tensão de escoamento inicial  
 $\sigma_{ij}$  – tensor de tensões de Cauchy  
 $\sigma_{ij}^t$  – tensor de tensões de Cauchy no instante  $t$   
 $\sigma_{ij}^{c,t}$  – tensor de tensões corrotacionais de Cauchy no instante  $t$   
 $\dot{\sigma}_{ij}^c$  – taxa de tensões corrotacionais de Cauchy  
 $\nabla$   
 $\sigma_{ij}$  – taxa do tensor de tensões de Cauchy  
 $\Delta e^r$  – magnitude da deformação desviadora radial  
 $\Delta e^t$  – magnitude da deformação desviadora tangencial  
 $\Delta e_{ij}$  – incremento de deformação desviadora  
 $\Delta E_{ij}^N$  – incremento de deformações logarítmicas  
 $\Delta E_{kl}^{N,e}$  – incremento de deformação logarítmica elástica  
 $\Delta E_{kl}^{N,p}$  – incremento de deformação logarítmica plástica  
 $\Delta E_{ij}^{N,p,v}$  – parte volumétrica do incremento de deformação logarítmica plástica  
 $\Delta E_{ij}^{N,p,d}$  – parte desviadora do incremento de deformação logarítmica plástica  
 $\Delta E_p$  – coeficiente empregado no esquema de integração temporal  
 $\Delta E_q$  – coeficiente empregado no esquema de integração temporal  
 $\Delta H_t$  – incremento na variável interna  $H_t$   
 $\Delta t$  – intervalo de tempo entre as configurações de referência e atualizada  
 $\Delta \varepsilon$  – parâmetro de coalescência  
 $\Delta \varepsilon_{ij}$  – incremento de deformação  
 $\Delta \varepsilon_m$  – incremento de deformação volumétrica  
 $\eta_{ij}^r$  – vetor unitário radial ao plano desviador  
 $\eta_{ij}^t$  – vetor unitário tangencial ao plano desviador  
 $\Phi$  – superfície de escoamento

## CAPÍTULO 5

- $a$  – dimensão de entalhe  
 $b$  – dimensão de entalhe

$b_i$	– coeficiente de sistema de equações empregado na integração temporal
$c$	– calor específico
$d$	– diferencial
$dt$	– diferencial de tempo
$dV$	– diferencial de volume
$dS$	– diferencial de superfície
$\exp$	– função exponencial
$f$	– fração volumétrica de vazios
$\dot{f}$	– taxa de evolução da fração volumétrica de vazios
$\dot{f}_n$	– taxa de evolução de da fração volumétrica vazios por nucleação
$\dot{f}_g$	– taxa de evolução da fração volumétrica de vazios por crescimento
$\dot{f}_c$	– taxa de evolução da fração volumétrica de vazios por coalescência
$f_N$	– fração volumétrica de vazios de nucleação
$f_C$	– fração volumétrica de vazios que marca o início da coalescência
$f_U$	– fração volumétrica de vazios limite
$h$	– coeficiente de endurecimento linear
$h$	– altura
$h_c$	– coeficiente de convecção
$h_t$	– taxa de evolução das variáveis internas
$k$	– condutibilidade térmica
$n_i$	– vetor normal
$n$	– subíndice associado ao instante de tempo $t^n$
$n+1$	– subíndice associado ao instante de tempo $t^{n+1}$
$p$	– pressão
$s_{ij}$	– tensor desviador de tensões
$u$	– energia interna específica
$\dot{u}$	– taxa de evolução da energia interna específica
$q$	– norma do tensor desviador de tensões
$q_j$	– vetor de fluxo de calor trocado com o meio externo
$q_{j,j}$	– divergente do vetor de fluxo de calor trocado com o meio
$r$	– produção interna de calor
$s_N$	– desvio-padrão de nucleação
$A_{ij}$	– coeficiente de sistema de equações empregado na integração temporal
$D_{kl}$	– tensor taxa de deformação
$D_{kl}^p$	– tensor taxa de deformação plástica
$D_{kl}^{th}$	– tensor taxa de deformação térmica
$D_{ij}^{irr}$	– tensor taxa de deformação irreversível
$D_{ij}^{rev}$	– tensor taxa de deformação reversível
$E$	– módulo de elasticidade
$G_0\{T\}$	– módulo de elasticidade transversal afetado pela temperatura
$G\{f, T\}$	– módulo de elasticidade transversal afetado pela porosidade e temperatura
$H_t$	– conjunto de variáveis internas

- $\hat{H}_{ijkl}$  – tensor elástico afetado pela temperatura e pela porosidade  
 $K_0\{T\}$  – módulo de compressibilidade afetado pela temperatura  
 $K\{f, T\}$  – módulo de compressibilidade afetado pelo porosidade e temperatura  
 Q4-URI – elemento finito bidimensional linear de 4 nós, com subintegração total  
 $R_0$  – raio  
 $S$  – superfície  
 $T$  – temperatura  
 $\bar{T}$  – superíndice associado ao previsor elástico  
 $\dot{T}$  – taxa de temperatura  
 $T_{ref}$  – temperatura inicial  
 $T_{n+1}$  – temperatura no instante  $t^{n+1}$   
 $V$  – volume  
 $\dot{W}^{te}$  – taxa de dissipação termoelástica de energia  
 $\alpha$  – parâmetro de controle do esquema de integração  
 $\alpha$  – variáveis internas  
 $\dot{\alpha}$  – taxa das variáveis internas  
 $\alpha_i$  – parâmetros da superfície de escoamento de Gurson  
 $\beta$  – coeficiente de dilatação térmica  
 $\gamma$  – produção interna de entropia  
 $\gamma_{local}$  – produção interna de entropia local  
 $\gamma_{cond}$  – produção interna de entropia por condução  
 $\delta$  – parâmetro de endurecimento  
 $\delta_{ij}$  – delta de Kronecker  
 $\varepsilon^p$  – deformação plástica uniaxial equivalente  
 $\bar{\varepsilon}^p$  – deformação plástica uniaxial equivalente  
 $\dot{\varepsilon}^p$  – taxa de evolução da deformação específica longitudinal plástica  
 $\varepsilon_N$  – deformação plástica média de nucleação  
 $\varepsilon_{ij}^{rev}$  – deformações reversíveis  
 $\dot{\lambda}$  – multiplicador plástico  
 $\eta$  – entropia  
 $\dot{\eta}$  – taxa de evolução da entropia  
 $\omega\{p, \sigma_y\{T\}, f\}$  – função que introduz o amolecimento na superfície de escoamento de Gurson  
 $\nu$  – coeficiente de Poisson  
 $\rho$  – densidade volumétrica de massa  
 $\psi$  – energia livre de Helmholtz  
 $\dot{\psi}$  – taxa da energia livre de Helmholtz  
 $\chi$  – coeficiente de correção aplicado sobre a taxa de trabalho plástico  
 $\Phi$  – superfície de escoamento  
 $\sigma_y$  – tensão de escoamento  
 $\sigma_y^0$  – tensão de escoamento inicial  
 $\sigma_y^\infty$  – tensão limite de escoamento  
 $\sigma_y\{T\}$  – tensão de escoamento, função da temperatura  
 $\sigma_{ij}$  – tensor de tensões de Cauchy

- $\dot{\sigma}_{ij}$  – taxa do tensor de tensões de Cauchy
- $\partial$  – diferencial parcial
- $\Delta\varepsilon$  – parâmetro do modelo de coalescência
- $\Delta t$  – intervalo de tempo entre os instantes  $t^n$  e  $t^{n+1}$
- $\Delta T$  – incremento de temperatura
- $\Delta E_{ij}^N$  – incremento de deformações logarítmicas
- $\Delta E_{kl}^{N,th}$  – incremento de deformação logarítmica térmica
- $\Delta E_{kl}^{N,p}$  – incremento de deformação logarítmica plástica
- $\rho_p$  – correção em  $\Delta E_p$
- $\rho_q$  – correção em  $\Delta E_q$
- $\Delta E_p$  – coeficiente empregado no esquema de integração temporal
- $\Delta E_q$  – coeficiente empregado no esquema de integração temporal

## CAPÍTULO 6

- $\dot{f}_n$  – taxa de evolução de da fração volumétrica vazios por nucleação
- $f_N$  – fração volumétrica de vazios de nucleação
- $n$  – superíndice associado ao instante de tempo  $t^n$
- $n+1$  – superíndice associado ao instante de tempo  $t^{n+1}$
- $p$  – pressão hidrostática
- $s_N$  – desvio-padrão de nucleação
- $A\{\varepsilon^p\}$  – parâmetro de modelo de nucleação
- $A\{\tilde{\varepsilon}^p\}$  – coeficiente de nucleação função de deformação plástica modificada
- $A\{\hat{\varepsilon}^p\}$  – coeficiente de nucleação função de deformação plástica modificada
- $E$  – módulo de elasticidade ou de Young
- MPa – unidade de tensão
- $\sigma_y$  – tensão de escoamento
- $\varepsilon^p$  – deformação plástica
- $\tilde{\varepsilon}^p$  – deformação plástica modificada
- $\hat{\varepsilon}^p$  – deformação plástica modificada
- $\varepsilon_1^p$  – deformação plástica principal máxima
- $\varepsilon_N$  – deformação plástica média de nucleação
- $\dot{\varepsilon}^p$  – taxa de evolução da deformação plástica
- $\dot{\varepsilon}_1^p$  – taxa de evolução da deformação plástica principal máxima
- $\nu$  – coeficiente de Poisson
- $\Delta\varepsilon^p$  – incremento de deformação plástica
- $\Delta\tilde{\varepsilon}^p$  – incremento de deformação plástica modificada
- $\Delta\hat{\varepsilon}^p$  – incremento de deformação plástica modificada
- $\Delta\varepsilon_1^p$  – incremento de deformação plástica principal máxima
- $\langle \rangle$  – colchete de Macauley



## CAPÍTULO 7

$b_i$	– forças de massa por unidade de volume
$c_i$	– velocidade convectiva
$dx^M$	– incremento de deslocamentos da malha
$dx_i^M$	– incremento de deslocamentos da matéria
$dx^C$	– incremento de deslocamentos da malha
$dx_i^C$	– incremento de deslocamentos da malha
$dx^{M,i}$	– incremento de deslocamentos da matéria na iteração $i$
$dS$	– diferencial de superfície
$dV$	– diferencial de volume
$dV^{elem}$	– diferencial de volume do elemento
$\vec{d}$	– vetor que separa pontos de Gauss nas malhas SRM e SRC
$f_N$	– fração volumétrica de vazios a nuclear
$f_C$	– parâmetro do modelo de Gurson
$f_U$	– parâmetro do modelo de Gurson
$f_i$	– função vetorial arbitrária
$f_{i,j}$	– derivada espacial de $f_i$ em relação à direção $j$
$g^N$	– valor da grandeza $g$ em um ponto de Gauss na malha SRC
$g^V$	– valor da grandeza $g$ em um ponto de Gauss na malha SRM
$h$	– parâmetro de endurecimento
$n$	– número de graus de liberdade da malha
$n_j$	– vetor normal
$n_i^{cp}$	– vetor normal ao contorno
$q_{i,i}$	– divergente do vetor fluxo de calor trocado com o meio
$r$	– produção interna de calor
$s_N$	– desvio-padrão de nucleação
$t$	– instante de tempo
$t_0$	– tempo inicial
$t + \Delta t$	– instante de tempo
$t_i$	– vetor de trações
$u$	– energia interna específica
$u_i$	– deslocamentos da matéria
$\hat{u}_i$	– deslocamentos da malha
$v_i$	– velocidade da matéria
$\hat{v}_i$	– velocidade da malha
$x$	– coordenadas SRE do ponto P
$x_i$	– coordenadas espaciais
$x^{M,i}$	– coordenadas da partícula material no instante $i$
$C_{ml}$	– matriz convectiva da estrutura
$C_{ij}$	– matriz convectiva de elemento
$D_{ij}$	– tensor taxa de deformação
$E$	– módulo de Young
$F_m^{ext}$	– vetor de forças externas da estrutura
$F_m^{int}$	– vetor de forças internas da estrutura
FE	– formulação Euleriana
FL	– formulação Lagrangiana
$K_{ml}^M$	– matriz de rigidez tangente relativa aos deslocamentos da matéria

$K_{ml}^C$	– matriz tangente relativa aos deslocamentos da malha
$K^{SRC}$	– matriz de rigidez associada ao processo de determinação SRC
LA	– formulação Lagrangiana atualizada
LEA	– formulação Lagrangiana Euleriana arbitrária
$M_{ml}$	– matriz de massa da estrutura
$P$	– ponto
PTV	– princípio dos trabalhos virtuais
$R_m$	– resíduo na estrutura
$S$	– superfície
SRE	– sistema de referência espacial
SRM	– sistema de referência material
SRC	– sistema de referência de cálculo
$V$	– volume
$V_l$	– vetor de velocidades nodais da malha (estrutura)
$\overset{\circ}{V}_l$	– vetor de acelerações nodais da matéria (estrutura)
$X$	– coordenadas SRM do ponto $P$
$X_i$	– coordenadas materiais
$\chi$	– coordenadas SRC do ponto $P$
$\chi_i$	– coordenadas de cálculo
$\partial$	– diferencial parcial
$\rho$	– densidade volumétrica de massa
$\sigma_{ij}$	– tensor de tensões de Cauchy
$\xi_e$	– coordenada isoparamétrica
$\eta_e$	– coordenada isoparamétrica
$\chi_i$	– coordenadas de cálculo
$\phi^R$	– função de forma associada ao nó $R$
$\phi_K$	– função de forma associada ao nó $R$
$\vec{\nabla}g$	– gradiente da grandeza $g$
$\nu$	– coeficiente de Poisson
$\sigma_y^0$	– tensão de escoamento de material virgem
$\alpha_2$	– parâmetro da superfície de Gurson
$\varepsilon_N$	– deformação plástica média de nucleação
$\Delta\varepsilon$	– parâmetro do modelo de dano
$\bullet$	– derivação temporal de grandeza referida ao SRM
$\circ$	– derivação temporal de grandeza referida ao SRC
$f_{,i}$	– derivação espacial da grandeza $f$ com relação à coordenada $i$

## CAPÍTULO 8

exp	– função exponencial $e^x$
ln	– função logaritmo com base $e$
$f_N$	– fração volumétrica de vazios de nucleação
$f_0$	– fração volumétrica de vazios inicial
$f_C$	– fração volumétrica de vazios que marca o início da coalescência
$k$	– parâmetro de endurecimento

$m$	– parâmetro de endurecimento
$\alpha_1$	– parâmetro da superfície de escoamento de Gurson
$\alpha_2$	– parâmetro da superfície de escoamento de Gurson
$\delta$	– deslocamento imposto
$\varepsilon^p$	– deformação plástica uniaxial equivalente
$s_N$	– desvio-padrão de nucleação
$E$	– módulo de elasticidade ou de Young
GPa	– unidade de tensão
$L_0$	– comprimento inicial
MPa	– unidade de tensão
$\sigma$	– tensão macroscópica
$\sigma_y$	– tensão de escoamento
$\sigma_y^0$	– tensão de escoamento inicial, sem endurecimento
$\sigma_y^\infty$	– tensão de escoamento de saturação
$\varepsilon$	– deformação macroscópica
$\varepsilon_N$	– deformação plástica média de nucleação
$\nu$	– coeficiente de Poisson
$\Delta\varepsilon$	– parâmetro de modelo de coalescência

# 1 INTRODUÇÃO

Quando uma estrutura é solicitada por um carregamento, seja este introduzido através de forças ou deslocamentos impostos, para solicitações pequenas o material da estrutura se comporta de maneira elástica, apresentando tensões proporcionais às deformações. À medida que aumenta a solicitação, segue-se um comportamento elastoplástico, no qual as deformações aumentam mais rapidamente para um dado aumento de tensão, tomando-se por referência a fase elástica. A principal característica do regime elastoplástico é o fato de uma parcela da deformação se mostrar irreversível, ou seja, não desaparece caso seja removida a solicitação – é a chamada deformação plástica. Caso a solicitação continue aumentando, pode ocorrer ruptura. Em se tratando de um material dúctil, ocorrem grandes deformações plásticas antes da ruptura.

A ruptura pode ser abordada segundo dois caminhos: o primeiro, através da chamada mecânica da fratura, que trata o problema do crescimento de uma trinca discreta, cujo tamanho, forma e posição são perfeitamente conhecidos; o segundo caminho é a chamada mecânica do dano contínuo (CDM – *continuum damage mechanics*), que trata o problema do enfraquecimento de uma região, em maior ou menor grau, podendo chegar a tal nível que caracterize ruptura. Tal abordagem tem origem no trabalho pioneiro de Kachanov (1958). Se a deterioração do material em uma dada região for muito grande pode surgir a trinca macroscópica, objeto de estudo da mecânica da fratura.

Na abordagem segundo a CDM, o enfraquecimento de uma região da peça é representado através de uma grandeza contínua, chamada genericamente de dano, o qual pode ser representado por escalar, vetor ou tensor, conforme a formulação adotada.

A CDM procura descrever a ruptura do material através da degradação de suas propriedades mecânicas, não sendo introduzida nenhuma trinca macroscópica. Lemaitre e Chaboche (1988) propõem a classificação do dano em quatro grupos, a partir do fenômeno que o origina:

- a) dano plástico dúctil – é a degradação que se observa em materiais dúcteis

submetidos a grandes deformações plásticas;

- b) dano viscoplástico de fluência – é a degradação que sofre um material que é solicitado a altas temperaturas. Admite-se que um metal pode apresentar fluência (*creep*) quando, no instante da aplicação da solicitação, sua temperatura  $T$  for superior a  $1/3$  de sua temperatura absoluta de fusão  $T_m$ , em graus Kelvin ( $T > 1/3 T_m$ );
- c) dano de fadiga – é a degradação originada por reversão ou flutuação de solicitações. A fadiga é classificada em dois grupos: de alto ciclo e de baixo ciclo. Na fadiga de alto ciclo, o material rompe após um número alto de ciclos, experimentando predominantemente deformações elásticas (Chimisso, 1994). Na fadiga de baixo ciclo (ou oligocíclica), o material rompe após um número menor de ciclos, podendo ocorrer deformações plásticas de magnitude considerável. Admite-se como limite entre as fadigas de alto e baixo ciclo um número de ciclos da ordem de 10000 (Chimisso, 1994);
- d) dano frágil – é o tipo de degradação experimentada por materiais que chegam à ruptura com níveis baixos de deformação, como por exemplo concreto (Bazant e Oh, 1983), ferro fundido, cerâmica e vidro, entre outros.

Este trabalho concentra-se no primeiro caso, ou seja, no dano originado por grandes deformações plásticas em metais. Para tratar tal tipo de dano, duas formulações têm sido largamente empregadas. Uma formulação é baseada na termodinâmica dos processos irreversíveis, empregada por Lemaitre e Chaboche (1988), entre outros (Hansen e Schreyer, 1994; Doghri, 1995). Baseia-se na definição ou estabelecimento de potenciais termodinâmicos, sendo as variáveis internas dadas em função desses potenciais. A outra formulação emprega como variável de dano a porosidade do material (Gurson, 1977; Thomason, 1985a). Dentro desse tipo de formulação destaca-se o modelo conhecido como modelo de Gurson, também referido como modelo de Gurson-Tvergaard, que é empregado neste trabalho.

O modelo de Gurson, baseado em microvazios, foi desenvolvido a partir de uma superfície de escoamento para materiais porosos (Gurson, 1977), modificada posteriormente

por Tvergaard (1981, 1982a). A variável de dano empregada é a fração volumétrica de vazios  $f$ , definida como a relação entre o volume de vazios e o volume aparente. O comportamento dos vazios é descrito através da consideração dos três mecanismos básicos de variação do volume de vazios: nucleação, crescimento e coalescência.

## 1.1 OBJETIVOS

Este trabalho tem como ponto de partida um código de elementos finitos voltado para a simulação de problemas de conformação mecânica denominado METAFOR. O programa METAFOR (Hogge *et al.*, 1991; Hogge e Ponthot, 1991; Ponthot, 1992) foi elaborado na Universidade de Liège, sob a supervisão de Michel Hogge, e vem sendo aperfeiçoado através da contribuição de vários pesquisadores.

O tratamento numérico do problema de grandes deformações foi implementado por Ponthot (1990, 1995), abordando uma descrição Lagrangiana-Euleriana. O trabalho de Bittencourt (1994) contempla problemas envolvendo contato e atrito através do método da penalidade, aplicado a situações tridimensionais. Stainier (1996) introduziu na versão bidimensional a formulação do modelo de dano de Gurson aplicada a materiais viscoplásticos. Rozenwald (1997) acrescentou a possibilidade da consideração de acoplamento termo-mecânico na análise elastoplástica. Olmi (1997) introduziu um esquema de remalhamento aplicado a casos bidimensionais. Aymone (2000) introduziu um esquema de remalhamento e a formulação Lagrangiana-Euleriana aplicados a casos tridimensionais.

Após o estudo de alguns problemas com o emprego do METAFOR, constatou-se a necessidade de concentrar os estudos nos seguintes aspectos do programa:

- a) implementação de um esquema diferenciado de solução para o sistema de equações não-lineares associado às equações de equilíbrio. Normalmente, tal não-linearidade é tratada através do emprego do método de Newton-Raphson. Entretanto, se a estrutura é composta por um material que perde rigidez à medida que é deformado, o que ocorre em plasticidade e em maior grau se houver a presença de dano, o método de Newton-Raphson falha se a solicitação é introduzida através de forças prescritas. É necessário, então, implementar um

algoritmo capaz de contemplar tal tipo de problema;

- b) implementação de um esquema de integração de tensões e variáveis internas para o modelo de Gurson considerando material elastoplástico, devendo esse esquema apresentar robustez, ou seja, pequena sensibilidade ao tamanho do incremento de carga;
- c) consideração do acoplamento entre dano e temperatura: o dano é influenciado pelas tensões e deformações térmicas e pela variação nas constantes mecânicas do material, assim como as constantes ligadas ao problema térmico (condutividade, coeficiente de dilatação) são afetadas pelo dano (porosidade);
- d) introdução de modificações na lei de nucleação, ligadas ao tratamento de problemas envolvendo reversão de sollicitação;
- e) tratamento de problemas tridimensionais com dano empregando uma formulação Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (LEA), com o objetivo de dar uma maior aplicabilidade ao código METAFOR.

### 1.1.1 Solução do sistema de equações não-lineares

A aplicação do método dos elementos finitos à solução da forma fraca das equações de equilíbrio dá origem a um sistema de equações não-lineares. Em problemas que envolvem plasticidade, o método de Newton-Raphson é largamente empregado para solucionar tal sistema.

O método de Newton-Raphson normalmente trabalha com incrementos de carga positivos, de forma que a carga aplicada é sempre crescente. Tal procedimento não se mostra adequado se a estrutura é sollicitada por forças e o material perde a rigidez à medida que é deformado. Nesse caso, o método não consegue atingir a solução para níveis altos de sollicitação, pois a matriz de rigidez tangente pode se tornar imprópria.

Em tal situação, é necessário o emprego de outro tipo de procedimento. Existe uma grande disponibilidade de métodos capazes de fornecer a solução correta em presença de matriz tangente imprópria. Esses métodos baseiam-se em trabalhos pioneiros de

Bergan *et al.* (1978), Riks (1979) e Crisfield (1981, 1983). Tais métodos trabalham com um parâmetro adicional que multiplica um vetor de cargas de referência, dando origem às cargas efetivamente aplicadas. Dessa forma, o escalar cresce e decresce conforme o comportamento da estrutura, permitindo que a carga diminua à medida que a estrutura perde rigidez. Dentre os métodos mencionados, implementa-se o método de controle de incremento de trabalho, como apresentado por Chen e Blandford (1993).

### 1.1.2 Integração da lei constitutiva

Quando a lei constitutiva é dada em forma de taxas temporais, o que ocorre em hipoelasticidade em geral e especificamente no modelo de Gurson, é necessário introduzir um processo de integração dessa lei constitutiva para obter o incremento de tensões e variáveis internas. O esquema adotado para integrar uma lei constitutiva ao longo do tempo pode ser explícito ou implícito. Será explícito quando as grandezas em um instante posterior dependerem apenas das grandezas no instante anterior. Esse tipo de esquema obriga o uso de incrementos de tempo bastante pequenos para que se tenha precisão e estabilidade.

Um esquema de integração implícito normalmente leva a uma eficiência maior. Em tais esquemas, o cálculo de um passo de tempo entre uma configuração e outra é mais lento que em um esquema explícito. No entanto, devido a uma maior estabilidade do esquema de integração, é possível empregar intervalos de tempo maiores, empregando-se menos passos de tempo para atingir o final do problema. Os esquemas implícitos podem ainda serem construídos de forma a apresentar estabilidade incondicional.

A literatura menciona diversos esquemas disponíveis para integração de equações constitutivas para o modelo de Gurson (Aravas, 1987; Steinmann *et al.*, 1994; Lee e Zhang, 1994). Opta-se por implementar um esquema do tipo ponto-médio generalizado proposto por Zhang e Niemi (1995a), visto estar também contemplada a matriz tangente consistente (Zhang, 1995b). Tal esquema apresentou bons resultados, especialmente quando combinado com subincrementação, como proposto por Worswick e Pick (1992).

À medida que a solicitação cresce, o dano pode atingir valores críticos em alguma região da estrutura em estudo. É necessário, então, prever uma forma de continuar o problema



quando se encontra uma ruptura local, pois a estrutura pode ainda apresentar capacidade de carga. Tal objetivo pode ser atingido introduzindo-se algum procedimento para detectar elementos que não mais apresentam capacidade de carga, anulando a contribuição desses elementos à resistência da estrutura. Alguns trabalhos sugerem formas de tratar tal situação, entre eles Tvergaard e Needleman (1984), Worswick e Pick (1995), Hackenberg (1995), e Koppenhoefer e Dodds Jr. (1998). Um método bastante simplificado é implementado. Tal método consiste em reduzir as tensões internas em elementos “rompidos”, de forma que as forças internas se anulem, caracterizando a perda de resistência associada à ruptura.

### 1.1.3 Acoplamento entre dano e temperatura

Quando ocorrem grandes deformações plásticas em um curto espaço de tempo, como acontece em conformação mecânica, é necessário considerar a energia dissipada por deformação plástica, energia essa que se transforma em calor, ocasionando aumento de temperatura na peça. O aumento de temperatura provoca tensões térmicas e alteração em propriedades mecânicas do material, notadamente na tensão de escoamento e no módulo de elasticidade.

Essa combinação de influências constitui o acoplamento termo-mecânico. A variação de temperatura influi no problema mecânico através da introdução de mudanças nas características mecânicas do material e da introdução de tensões térmicas. As grandezas mecânicas influem no problema térmico através da deformação plástica que serve como fonte de calor.

O dano, especificamente a porosidade, também fica acoplado à temperatura, uma vez que depende das propriedades mecânicas do material e do estado de tensões. Por outro lado, certas propriedades térmicas do material dependem da porosidade (Zavaliangos e Anand, 1992). Assim, o dano participa do acoplamento termo-mecânico, afetando e sendo afetado por este.

Alguns casos são estudados, mostrando a influência da consideração de acoplamento termo-mecânico em conjunto com o modelo de dano.

#### 1.1.4 Lei de nucleação

Um dos mecanismos básicos de variação da quantidade de vazios em um material é a chamada nucleação. Representa a primeira etapa do processo de enfraquecimento do material à medida que é deformado. Após a nucleação, os vazios podem crescer e entrar em coalescência, ou seja, unirem-se. O instante e a intensidade em que ocorrem o crescimento e a coalescência são fortemente influenciados pelo instante e pela intensidade da nucleação. Pode-se dizer que, para materiais em que não há porosidade inicial, a evolução da porosidade é comandada pela nucleação.

A nucleação é um fenômeno bastante complexo. Usualmente, em conjunto com a superfície de escoamento de Gurson, a nucleação é descrita através do emprego de uma lei de distribuição (Chu e Needleman, 1980) semelhante à distribuição normal de Gauss, que diz que a taxa de nucleação de vazios é proporcional à taxa de deformação plástica. Apesar de tal modelo de nucleação ser controlado por deformação plástica, a pressão pode (ABAQUS, 1992) ou não (Stainier, 1996) ser considerada, o que leva a resultados bastante diversos quando durante a etapa de nucleação há mudança no sinal da pressão (Bittencourt *et al.*, 1998).

Alguns casos simples são estudados com o intuito de verificar a influência da pressão na nucleação em situações onde há reversão de sollicitação. São feitas duas propostas bastante simples de modelo de nucleação, visando minorar inconvenientes verificados no modelo empregado no programa ABAQUS (1992).

#### 1.1.5 O emprego da formulação LEA em problemas tridimensionais

A solução de problemas onde ocorrem grandes deformações através do emprego do método dos elementos finitos apresenta uma séria dificuldade: quando os elementos finitos apresentam uma distorção muito grande, os resultados obtidos numericamente se afastam da resposta física do problema. Para diminuir tal inconveniente, alguns métodos têm sido desenvolvidos, como por exemplo, realocização de nós da malha de elementos finitos, adaptação de malha e formulação Lagrangiana-Euleriana.

A realocização de nós mantém o mesmo número de graus de liberdade do problema ao longo do processo. A posição dos nós é alterada de modo a diminuir a distorção dos elementos finitos, podendo essa alteração ser feita de forma automática. A adaptação de malha é semelhante à realocização, sendo feita mediante intervenção do usuário. Apresenta resultados potencialmente bons, ficando limitada à experiência do analista na avaliação da qualidade da malha em uso e na geração da malha nova.

A chamada formulação Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (LEA) surge como uma ferramenta auxiliar na tarefa de minorar os erros devidos à distorção das malhas de elementos finitos. Apresenta como característica a possibilidade da malha de elementos finitos se deslocar de forma relativamente independente dos deslocamentos da matéria. As formulações Lagrangiana e Euleriana podem, então, serem tomadas como casos particulares da formulação LEA: na primeira, a malha se desloca junto com a matéria e, na segunda, a malha permanece imóvel. A formulação LEA foi empregada inicialmente em problemas envolvendo fluidos (Hughes *et al.*, 1981) e interação fluido-estrutura (Donea *et al.*, 1982), sendo posteriormente aplicada ao problema de grandes deformações em sólidos (Haber, 1984; Liu *et al.*, 1986; Schreurs *et al.*, 1986; Hogge e Ponthot, 1991; Ponthot, 1995; Aymone, 2000).

Após a aplicação do modelo de Gurson empregando a versão bidimensional do METAFOR e formulação Lagrangiana, buscando uma maior generalidade de emprego e maior confiabilidade nos resultados, estuda-se também o emprego do modelo de Gurson em conjunto com a formulação LEA implementada na versão tridimensional do METAFOR.

## 1.2 DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

No capítulo 2, é feita uma descrição do modelo de Gurson, incluindo-se alguns resultados obtidos a partir de situações simples, que servem para mostrar a influência dos parâmetros do modelo. Apresentam-se algumas recomendações do ponto de vista de parâmetros a serem empregados. Relatam-se algumas propostas de modificação ou de emprego do modelo de Gurson mencionadas na literatura.

No capítulo 3, apresentam-se as equações que regem o problema a ser estudado e a forma de solucioná-las empregando o método dos elementos finitos. Mostra-se como

encaminhar a solução levando ou não em conta o efeito da inércia. Para situações onde não é considerada a inércia, são feitas considerações sobre formas de resolver o sistema de equações não-lineares resultante. Implementa-se um algoritmo capaz de tratar estruturas carregadas por forças quando a matriz tangente se torna imprópria (ponto-limite). Ao final, alguns exemplos são analisados com o emprego de tal algoritmo.

No capítulo 4, apresenta-se um esquema de integração de equações constitutivas que é implementado, mostrando situações onde foi verificado ganho do ponto de vista de tamanho admissível de incremento, levando a uma maior robustez do código. Comentam-se algumas maneiras de tratar o problema de rupturas localizadas, tornando possível a continuação do cálculo em tais situações.

No capítulo 5, é abordado o acoplamento termo-mecânico, mostrando como sua consideração pode ser benéfica no caso da simulação de ensaios de tração uniaxial em corpos cilíndricos. Mostra-se também como a fragilização por temperatura pode ser simulada em problemas termo-mecânicos através do emprego do modelo de Gurson.

No capítulo 6, são discutidas algumas características dos modelos de nucleação comumente empregados em conjunto com a superfície de escoamento de Gurson. Mostram-se alguns resultados inesperados obtidos quando a solicitação não é monótona, apresentando-se sugestões para minorá-los.

O capítulo 7 contém uma breve exposição da formulação Lagrangiana-Euleriana Arbitrária e alguns resultados obtidos quando se combina tal formulação com o modelo de Gurson, em situações tridimensionais.

O capítulo 8 contém uma aplicação do modelo de Gurson à simulação do comportamento de espumas metálicas.

No capítulo 9, são apresentadas algumas conclusões e recomendações no sentido de melhorar as condições de aplicação do modelo de Gurson.

## 2 O MODELO DE GURSON

Neste capítulo, apresenta-se o equacionamento do modelo de Gurson, por vezes referido como modelo de Gurson–Tvergaard (Zhang e Niemi, 1995a). Tal modelo encontra-se implementado no código de elementos finitos METAFOR, que é empregado inicialmente no estudo de alguns casos simples, buscando mostrar a influência dos diversos coeficientes e variáveis do modelo. Alguns resultados obtidos são apresentados na seção 2.2. Após verificar a influência das variáveis e parâmetros, comentam-se alguns aspectos sobre a escolha dos parâmetros de nucleação a serem empregados no modelo.

A seção 2.3 apresenta algumas propostas encontradas na bibliografia sobre determinação ou escolha de parâmetros a serem utilizados. Na seção 2.4, são comentados alguns trabalhos que fazem referência ao modelo de Gurson, seja do ponto de vista de potencialidades de emprego diversas, seja do ponto de vista de efeitos considerados. Em tais trabalhos, a superfície inicial proposta por Gurson (Gurson, 1977) apresenta-se modificada, bem como os coeficientes inicialmente propostos por Tvergaard (1981).

A seção 2.5 contém algumas conclusões e relata as opções de parâmetros a serem adotados no desenvolvimento do trabalho.

### 2.1 O MODELO

O modelo de Gurson é empregado para descrever a degradação de um material em presença de grandes deformações plásticas. Gurson (1977) propôs como mecanismo de degradação o aparecimento de microvazios associados às grandes deformações plásticas. No contexto deste trabalho não há diferença entre os termos vazios e microvazios, podendo-se entendê-los como sinônimos. A presença de microvazios conduz ao emprego de uma superfície de escoamento dependente da pressão hidrostática e da porosidade, superfície esta obtida a partir de estudos efetuados considerando uma cavidade esférica em um meio rígido-plástico sem endurecimento (Gurson, 1977).

O grau de degradação do material é medido através da maior ou menor porosidade. A grandeza que mede a porosidade é chamada de fração volumétrica de vazios, representada por  $f$ , definida como a razão entre o volume de microvazios  $V_{vazios}$  e o volume de referência  $V_{aparente}$ .

$$f = \frac{V_{vazios}}{V_{aparente}} \quad (1)$$

A degradação das propriedades mecânicas do material ocorre devido a microvazios que existam ou venham a se formar na matriz do material. Os mecanismos básicos que originam variação na quantidade vazios à medida que o material é deformado plasticamente são:

- a) nucleação ou formação: normalmente se encontra nos metais uma série de defeitos (inclusões, juntas de grãos) que, quando submetidos a tensão, podem originar um vazio (Chu e Needleman, 1980). A chamada nucleação ou formação é um fenômeno irreversível, ocorrendo uma única vez no mesmo local (Tvergaard, 1982c);
- b) crescimento: os microvazios, pré-existentes ou nucleados, variam seu tamanho conforme o estado de deformação plástica e pressão hidrostática no material (McClintock, 1968; Rice e Tracey, 1969). O tamanho do vazio aumenta exponencialmente com a pressão hidrostática de tração e diminui em caso de compressão (pressão hidrostática negativa), caracterizando um fenômeno reversível;
- c) coalescência: quando o volume de vazios atinge um nível relativamente alto, os microvazios começam a interagir entre si. Quando o afastamento entre os microvazios é da ordem de seu raio médio, tende a ocorrer união entre vazios adjacentes, dando origem a vazios maiores (Goods e Brown, 1979).

Assim, o modelo de Gurson envolve dois aspectos fundamentais: uma superfície de escoamento capaz de descrever o comportamento de um material contendo microvazios e leis de evolução capazes de descreverem a variação da quantidade desses microvazios à medida

que o material é deformado, levando em conta nucleação, crescimento e coalescência.

### 2.1.1 A superfície de escoamento

O modelo de Gurson (Gurson, 1977) tem origem na superfície de escoamento proposta pelo mesmo para materiais dúcteis contendo vazios. A superfície proposta depende da tensão de Cauchy  $\sigma_{ij}$ , da tensão de escoamento  $\sigma_y$ , da pressão hidrostática  $p$  e da fração volumétrica de vazios  $f$ , ficando definida pela equação 2.

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} - \omega\{p, \sigma_y, f\} \sigma_y \quad (2)$$

$$\omega\{p, \sigma_y, f\} = \left[ 1 - 2\alpha_1 f \cosh\left(\frac{\alpha_2(3p)}{2\sigma_y}\right) + \alpha_3 f^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad p = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} \quad (4)$$

Nas equações acima  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, tendo valor unitário para  $i = j$  e nulo nas demais situações. A função  $\omega\{p, \sigma_y, f\}$  varia entre 0 e 1, representando um redutor sobre a tensão de escoamento. Caso o material se encontre íntegro,  $\omega\{p, \sigma_y, f\} = 1$  e o modelo de von Mises é reproduzido; para um material completamente danificado,  $\omega\{p, \sigma_y, f\} = 0$ .

Na proposta inicial de Gurson (1977) os parâmetros  $\alpha_i$  não aparecem. A introdução desses parâmetros foi proposta por Tvergaard (1981, 1982a), procurando melhor modelar resultados obtidos no estudo de problemas envolvendo bandas de cisalhamento, para valores baixos de  $f$ . Os valores propostos para os parâmetros são

$$\alpha_1 = 1,5 \quad \alpha_2 = 1,0 \quad \alpha_3 = \alpha_1^2 \quad (5)$$

Segundo Thomason (1985b), o parâmetro  $\alpha_1$  introduz a possibilidade de calibrar a influência da porosidade na superfície de escoamento, enquanto que o parâmetro  $\alpha_2$  introduz a possibilidade de calibrar o efeito da pressão. O parâmetro  $\alpha_1$  também pode ser entendido como o inverso do valor da fração volumétrica de vazios  $f$  que corresponde à ruptura na ausência de pressão hidrostática –  $\omega\{p = 0, \sigma_y, f\} = 0$ , valor este denominado  $f_U$ .

$$f_U = \frac{1}{\alpha_1} \quad (6)$$

Nas figuras 1 e 2 é mostrada a forma da superfície de escoamento para vários níveis de porosidade, em um sistema de referência tensão uniaxial equivalente normalizada  $\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}/\sigma_y$  versus pressão normalizada  $p/\sigma_y$ . É possível observar também o efeito do parâmetro  $\alpha_2$ . O emprego de um parâmetro  $\alpha_2$  de menor valor reduz o efeito da pressão, fazendo com que o escoamento se dê a uma pressão maior, ou seja, conduzindo a um domínio elástico maior. Se não houver vazios,  $f = 0$ ; nesse caso, o modelo reproduz o comportamento de um material com superfície de escoamento de von Mises, independente da pressão hidrostática.

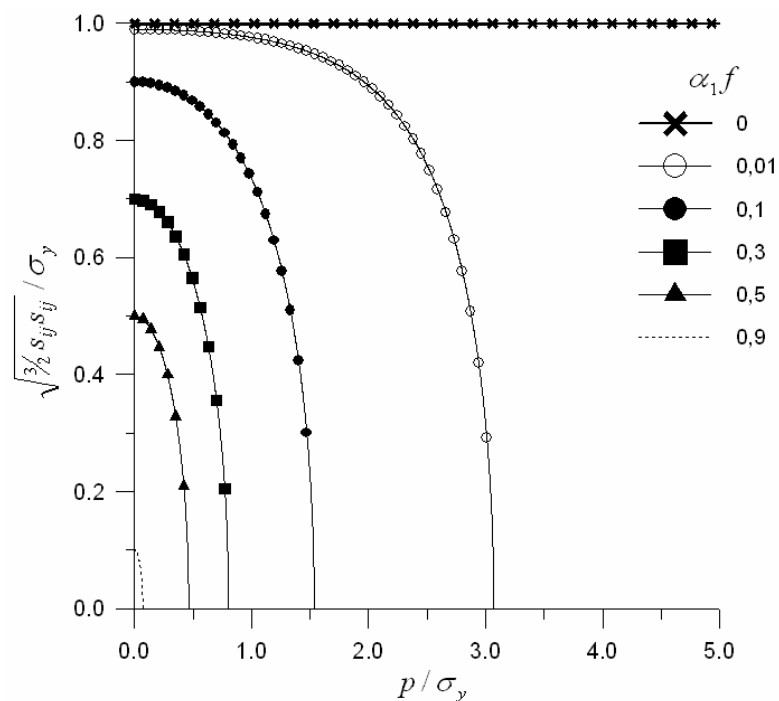


Figura 1: superfície de escoamento ( $\alpha_1 = 1,0$ ;  $\alpha_2 = 1,0$ )



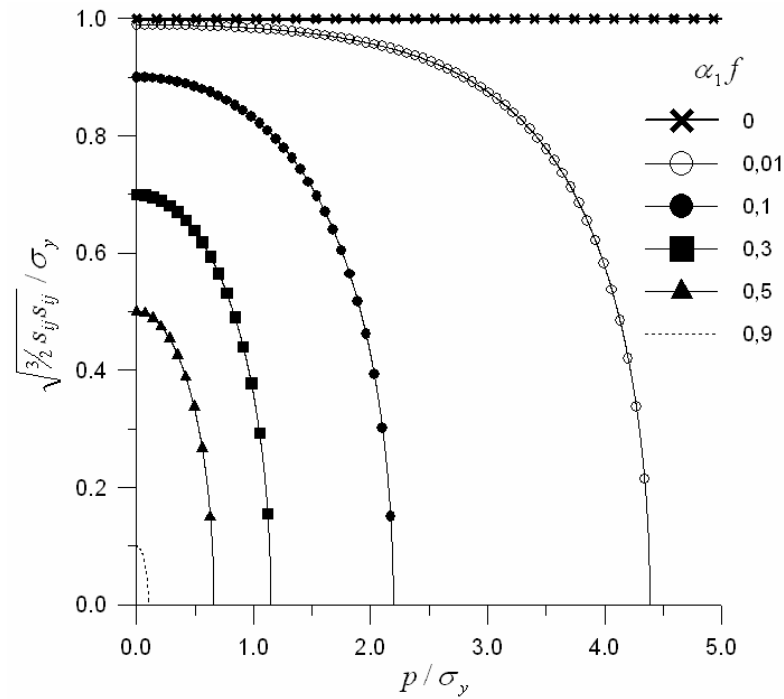


Figura 2: superfície de escoamento ( $\alpha_1 = 1,0$ ;  $\alpha_2 = 0,7$ )

É interessante observar ainda que, na ausência de pressão hidrostática (corte puro), o coeficiente  $\omega\{p, \sigma_y, f\}$  pode ser escrito

$$\omega\{p, \sigma_y, f\} = 1 - \alpha_1 f = 1 - \frac{f}{f_U} \quad (7)$$

o que caracteriza uma redução na resistência igual à relação entre a porosidade existente e a porosidade última na ruptura  $f_U$ . Tal resultado corresponde a uma relação linear entre tensão de cisalhamento no escoamento e fração volumétrica de vazios, o que foi observado experimentalmente em corte por Gurson (1977).

Para valores quaisquer de pressão, a determinação da fração volumétrica de vazios que leva à perda de capacidade de carga é feita a partir da condição  $\omega\{p, \sigma_y, f\} = 0$ . Nesse caso, o material não resiste mais às solicitações. Assim:

$$\omega\{p, \sigma_y, f\} = \left[ 1 - 2\alpha_1 f \cosh\left(\frac{\alpha_2(3p)}{2\sigma_y}\right) + \alpha_3 f^2 \right]^{1/2} = 0 \quad (8)$$

$$\left[ 1 - 2\alpha_1 f \cosh\left(\frac{\alpha_2(3p)}{2\sigma_y}\right) + \alpha_3 f^2 \right] = 0 \quad (9)$$

$$\frac{2}{3\alpha_2} \operatorname{arc\,cosh}\left(\frac{1 + (f/f_U)^2}{2(f/f_U)}\right) - \frac{p}{\sigma_y} = 0 \quad (10)$$

A equação 10 mostra que quando a pressão não é nula, a perda de resistência mecânica depende da fração volumétrica de vazios  $f$  e também da pressão normalizada  $p / \sigma_y$ . Os pares de valores de pressão normalizada e fração volumétrica de vazios que satisfazem a condição expressa na equação 10 levam a  $\omega\{p, \sigma_y, f\} = 0$ . Tal condição equivale a uma contração da superfície de escoamento, que ficaria reduzida a um ponto. A figura 3 mostra a representação gráfica da equação 10 empregando  $\alpha_2 = 0,7$  e  $\alpha_2 = 1,0$ .

A região limitada pelos eixos vertical e horizontal e pelas curvas que representam  $\omega\{p, \sigma_y, f\} = 0$  corresponde a valores admissíveis de pressão normalizada e fração volumétrica de vazios. Pode-se dizer então que as curvas representativas de  $\omega\{p, \sigma_y, f\} = 0$  limitam a ruptura. Fora dessa região encontram-se valores inadmissíveis de pressão e fração volumétrica de vazios.

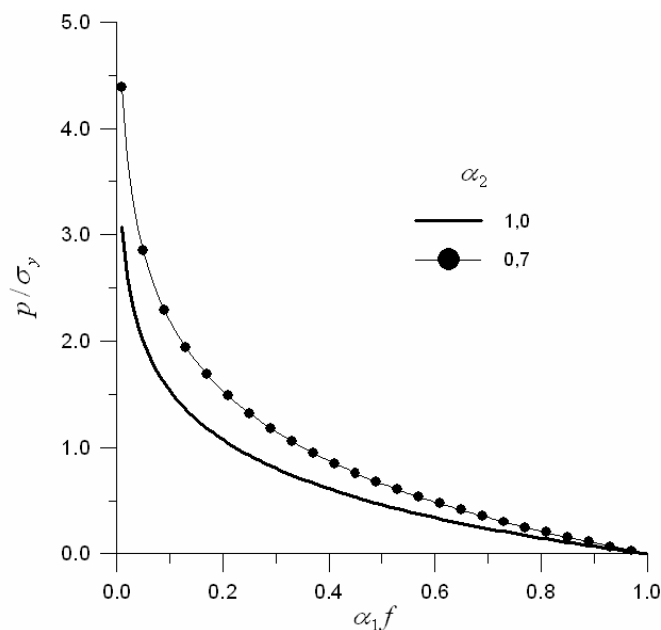


Figura 3: valores-limite de porosidade e pressão

### 2.1.2 Nucleação ou formação de vazios

A nucleação ocorre principalmente devido aos seguintes defeitos presentes no material: microvazios pré-existentes, inclusões e partículas de segunda fase, juntas de grãos e empilhamentos ou discordâncias (Perzyna, 1986).

Conforme a temperatura e o tipo de sollicitação, predomina um ou outro defeito como causador da nucleação. Admite-se que, para altas temperaturas ou situações envolvendo impacto, a principal causa da nucleação está ligada às juntas de grãos e discordâncias. Tal fonte de nucleação controlaria o processo de ruptura a altas temperaturas sob tensão constante (Perzyna, 1986). Quando a nucleação se dá à temperatura ambiente, admite-se que sua principal causa esteja ligada às inclusões.

Perzyna (1986), citando Curran *et al.*, apresenta uma lei para a evolução da quantidade de microvazios  $N$  por unidade de volume

$$\dot{N} = \left. \frac{\partial N}{\partial t} \right|_x = A\{\varepsilon^p\}\dot{\varepsilon}^p + B\{p\}\dot{p} + C\{p, T\} \quad (11)$$

que considera a influência de todos os defeitos mencionados. Na equação 11,  $T$  representa a temperatura,  $p$  a pressão hidrostática e  $\varepsilon^p$  a deformação plástica. O último termo modela a parcela da nucleação que se dá a altas temperaturas, assumindo a forma

$$C\{p, T\} \approx \exp\left(\frac{m|p - p_N|}{kT}\right) - 1 \quad (12)$$

onde  $p_N$  é um valor limite de pressão abaixo do qual não há nucleação,  $m$  um parâmetro do material e  $k$  a constante de Boltzmann.

O primeiro e segundo termos da equação 11 representam respectivamente a nucleação ligada à deformação plástica e ao descolamento entre inclusões e matriz. A nucleação ligada à deformação plástica é modelada adotando-se  $A\{\varepsilon^p\} \neq 0$  e  $B\{p\}=0$  (Tvergaard, 1982c).

O descolamento entre inclusão e matriz é controlado pela máxima tensão normal na interface inclusão–matriz. Segundo Needleman e Rice (1978), tal grandeza pode ser aproximada por  $\sigma_y + p$ , o que levaria ao emprego de coeficientes  $A\{\varepsilon^p\}$  e  $B\{p\}$  não-nulos na equação 11, visto que existe uma relação direta –  $\dot{\sigma}_y = h\dot{\varepsilon}^p$  – entre a taxa de evolução da tensão de escoamento e a taxa de deformação plástica, sendo que  $h$  caracteriza o endurecimento por deformação plástica.

Tvergaard (1982c) salienta que valores não-nulos para os coeficientes  $A\{\varepsilon^p\}$  e  $B\{p\}$  devem ser empregados apenas quando a variável que controla a nucleação, seja deformação plástica, seja pressão, for crescente, o que modela a irreversibilidade do fenômeno de nucleação.

Admite-se inicialmente neste trabalho que a nucleação de vazios é governada pela deformação plástica, o que leva a considerar como não nulo apenas o termo  $A\{\varepsilon^p\}$ . Assim, a taxa de nucleação de vazios  $\dot{f}_n$  pode ser escrita

$$\dot{f}_n = A\{\varepsilon^p\}\dot{\varepsilon}^p \quad (13)$$

O coeficiente  $A\{\varepsilon^p\}$  define a quantidade e a velocidade com que se formam os vazios. Chu e Needleman (1980) propõem que se empregue uma distribuição normal para descrever a formação de vazios, devido à complexidade do fenômeno. Assim, emprega-se

$$A\{\varepsilon^p\} = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^p - \varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right] \quad (14)$$

onde se identifica uma fração volumétrica de vazios a se formar  $f_N$ , a deformação plástica média em torno da qual os vazios se formam  $\varepsilon_N$  e o desvio padrão da distribuição  $s_N$ .

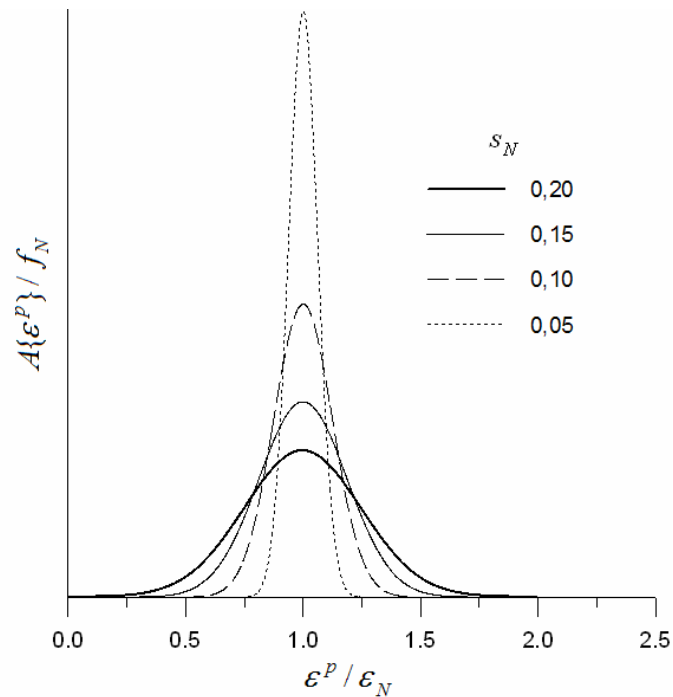


Figura 4: influência do desvio-padrão  $s_N$  na lei de nucleação

Na figura 4, observa-se o efeito do desvio-padrão de nucleação  $s_N$  no coeficiente  $A\{\varepsilon^p\}$ . A variação da deformação plástica de nucleação  $\varepsilon_N$  provoca apenas um deslocamento nas curvas da figura 4, não modificando sua forma. Tvergaard (1982b), empregando nucleação governada por tensão, adota um coeficiente  $B\{p\}$  definido dentro dos mesmos princípios, da forma

$$B\{p\} = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{p - p_N}{s_N} \right)^2 \right] \quad (15)$$

O código ABAQUS (1992) apesar de empregar nucleação controlada por deformação plástica, considera dependência da pressão, admitindo que a nucleação em um ponto se dá apenas se o ponto está tracionado. Tal procedimento estaria associado a uma nucleação proveniente de descolamento entre inclusão e matriz, conforme ilustra a figura 5. Na figura 5a mostra-se o material virgem. O momento do descolamento que dá origem à nucleação é indicado na figura 5b. Na figura 5c mostra-se o crescimento do vazio nucleado.

Tal procedimento equivale a considerar uma restrição à nucleação, ficando o

coeficiente de nucleação  $A\{\varepsilon^p\}$  dado por

$$A\{\varepsilon^p\} = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^p - \varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right] \quad \text{se } p > 0 \quad (16)$$

$$A\{\varepsilon^p\} = 0 \quad \text{se } p \leq 0 \quad (17)$$

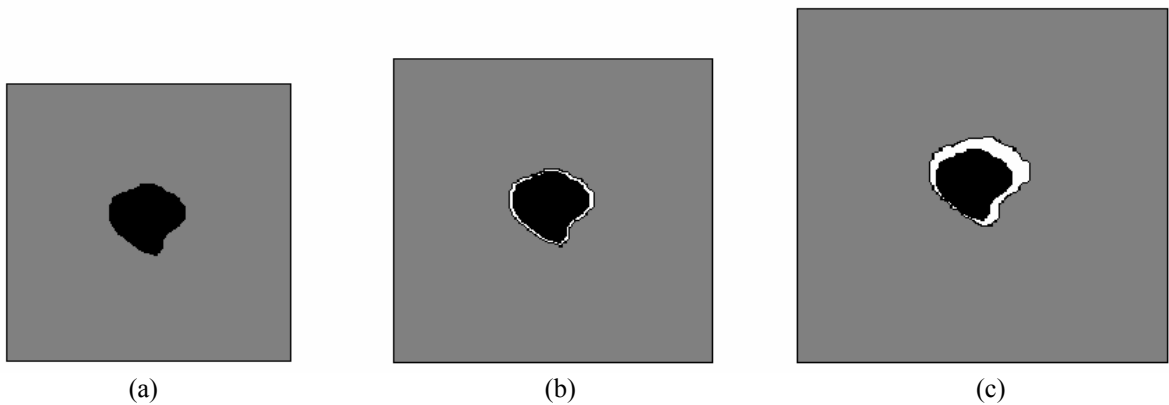


Figura 5: nucleação de vazios por descolamento na interface matriz–inclusão

Outra abordagem possível é admitir a lei de nucleação como sendo independente do sinal da pressão, conforme procedimento adotado por Stainier (1996), e inicialmente implementado no METAFOR.

Na maioria dos trabalhos consultados, a influência do sinal da pressão em processos de nucleação controlados por deformação não é claramente estabelecida, exceto em Stainier (1996), ABAQUS (1992) e Tvergaard (1982c). Embora tal aspecto possa parecer secundário, seu papel ganha importância quando se considera a possibilidade de reversão de solitação, situação que será abordada com maiores detalhes no capítulo 6. Considerando-se que a pressão parta de zero e cresça de forma monótona assumindo valores positivos, as abordagens de Stainier (1996) e do ABAQUS (1992) levam ao mesmo resultado. Se o sinal da pressão variar durante o processo de nucleação, os resultados podem ser substancialmente diferentes, como será mostrado no capítulo 6.

Caso não seja considerada a possibilidade de reversão de carregamento, partindo-se de um material sem porosidade inicial, admitindo-se nucleação somente em tração (ABAQUS, 1992), se o material for comprimido este comporta-se conforme o modelo de von Mises, com escoamento independente da pressão hidrostática, o que equivale ao emprego de uma superfície de escoamento como a da figura 6. Caso seja adotado o modelo de nucleação independente da pressão, a superfície de escoamento resulta dependente da pressão hidrostática tanto em tração quanto em compressão (figura 7), já que sempre haverá nucleação de vazios e a função  $\omega\{p, \sigma_y, f\}$  comporta-se de forma simétrica com relação à pressão hidrostática.

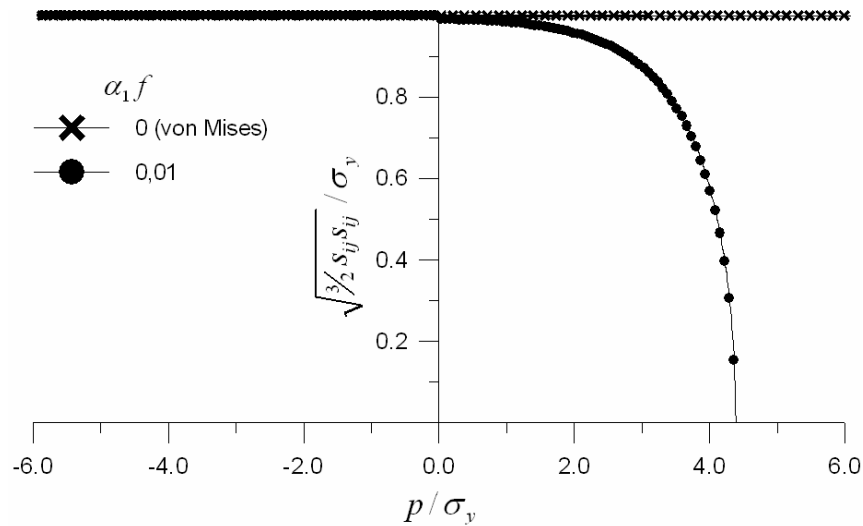


Figura 6: superfície de escoamento com nucleação somente em tração

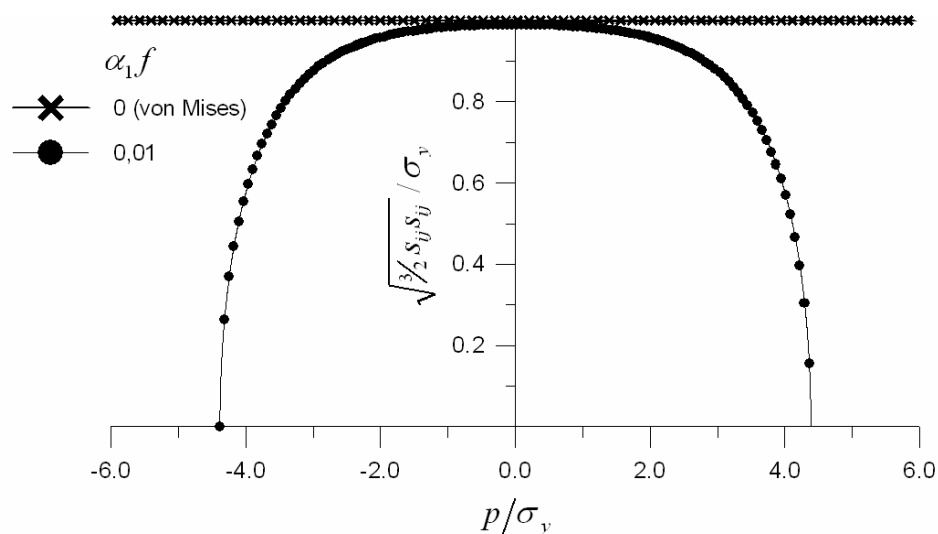


Figura 7: superfície de escoamento com nucleação simétrica em tração e compressão

Huang *et al.* (1998) apresentam uma forma semelhante à proposta por Chu e Needleman (1980) para a lei de nucleação,

$$\dot{f}_n = A\dot{\sigma}_y + B\dot{p} \quad (18)$$

onde, se considerarmos que  $\dot{\sigma}_y = h\dot{\varepsilon}^p$ , chega-se à mesma lei proposta por Curran *et al.* (Perzyna, 1986), a menos do último termo da equação 11. A diferença é que na equação 18, o coeficiente  $A$  é dependente não da deformação plástica, mas da quantidade de vazios necessária para completar a quantidade de vazios que deve nuclear e ainda não nucleou. Assim,

$$A = \frac{\psi \{f_N - \int_0^t \dot{f}_n dt\}}{h} \quad \text{para} \quad \int_0^t \dot{f}_n dt < f_N \quad (19)$$

sendo que  $t$  representa o instante atual. A presença de  $h$  na equação 19 acaba transformando o primeiro termo da equação 18 em um termo que introduz nucleação governada por deformação. O parâmetro  $\psi$  pode ser determinado a partir de um teste de tração uniaxial, pois  $\psi f_N$  representa a declividade inicial da curva fração volumétrica de vazios  $f$  versus deformação axial  $\varepsilon$ . Huang *et al.* (1998) citam vários trabalhos onde se pode encontrar tal tipo de curvas, por exemplo os trabalhos de Argon e Im, Argon *et al.*, Fisher e Gurland, Le Roy *et al.*, Brownrigg *et al.*, Spitzig *et al.*, Boucier *et al.* Quando se forma a quantidade prevista de vazios, o coeficiente  $A$  se anula.

### 2.1.3 Crescimento de vazios

Os vazios crescem quando o material que os contém é submetido à deformação plástica. Em temperatura baixa e velocidade de carregamento alta os vazios tendem a crescer em forma plana de trinca, dando origem a uma ruptura frágil. Em temperatura alta e velocidade de carregamento baixa, o crescimento se dá mantendo uma forma próxima à esférica (cavidades) caracterizando uma ruptura dúctil, pois os movimentos de discordâncias



responsáveis pelo escoamento plástico são favorecidos (Stainier, 1996).

Worswick e Pick (1991) verificaram experimentalmente que o crescimento com manutenção de forma é favorecido quando a pressão hidrostática é alta. Quando a pressão é baixa e a deformação plástica alta, ocorre mudança de forma de vazio.

A equação que governa o crescimento é estabelecida admitindo-se que a parcela de deformação elástica do conjunto matriz–vazio pode ser negligenciada, e que há conservação de massa do conjunto matriz–vazio (Tvergaard, 1982c). Assim, chega-se a

$$\dot{f}_g = (1 - f)\dot{\varepsilon}_{ii}^p \quad (20)$$

onde  $\dot{\varepsilon}_{ii}^p$  é a variação de volume aparente. A lei de crescimento de vazios expressa na equação 20 estabelece que os vazios crescem com variação de volume positiva (tração) e decrescem com variação de volume negativa (compressão), caracterizando assim a reversibilidade do fenômeno de crescimento de vazios. A equação 20 também garante que a taxa de crescimento de vazios é nula se  $f = 0$ , pois nesse caso o modelo de Gurson reproduz o modelo de von Mises, onde a deformação plástica se dá sem mudança de volume, anulando a equação 20.

#### 2.1.4 Coalescência de vazios

A coalescência está ligada à ruptura rápida que ocorre após a fração volumétrica de vazios atingir certo limite, aqui denominado  $f_C$ . Trata-se da união entre dois vazios próximos, pela ruptura do ligamento entre estes. Admite-se a possibilidade de coalescência quando o raio médio dos vazios for da ordem de seu espaçamento (Goods e Brown, 1979). Considerando-se um arranjo cúbico de vazios esféricos com aresta  $a$  como o da figura 8, para raio de vazios igual ao afastamento entre as faces ( $r = a/3$ ), chega-se a uma fração volumétrica de vazios da ordem de  $f_C = 0,15$ .

$$f_C = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} \quad (21)$$

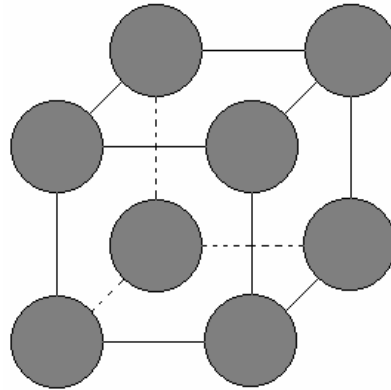


Figura 8: arranjo cúbico de vazios

Brown e Emburry (1973) admitem que o início da coalescência ocorre em uma fração volumétrica de vazios  $f_c$  entre 10% e 20%. Uma das explicações possíveis para a discrepância é o fato do arranjo real de vazios não seguir exatamente a forma cúbica mostrada na figura 8.

A ruptura rápida devido à coalescência de vazios tem sido introduzida no modelo de Gurson de duas formas: ou por modificação da fração volumétrica de vazios após o início da coalescência, ou por modificação da lei de evolução de vazios após  $f_c$  ser superado.

A primeira forma leva a uma superfície de escoamento dependente não da fração volumétrica de vazios  $f$ , mas de uma fração volumétrica de vazios  $f^*$  corrigida pela coalescência (Tvergaard e Needleman, 1984)

$$\Phi = \Phi\{p, s_{ij}, \sigma_y, f^*\} \quad (22)$$

com

$$f^* = \begin{cases} f & f \leq f_c \\ f_c + K'(f - f_c) & f > f_c \end{cases} \quad (23)$$

$$K' = \frac{f_U - f_c}{f_F - f_c} \quad (24)$$

onde  $f_F$  representa a fração volumétrica de vazios na ruptura e  $f_U = 1/\alpha_1$ . Assim, quando a fração volumétrica de vazios atinge o valor de ruptura  $f_F$ , o material perde a capacidade de resistir a solicitações.

A segunda forma de introduzir o efeito da coalescência (Tvergaard, 1982b) é através da modificação na lei de variação de vazios, procedimento adotado neste trabalho. A superfície de escoamento permanece função da fração volumétrica de vazios  $f$ .

$$\Phi = \Phi\{p, s_{ij}, \sigma_y, f\} \quad (25)$$

sendo que a lei de evolução de vazios é modificada após o início da coalescência, ficando

$$\dot{f} = \begin{cases} \dot{f}_n + \dot{f}_g & f \leq f_C \\ \dot{f}_c & f > f_C \end{cases} \quad (26)$$

com

$$\dot{f}_c = \frac{f_U - f_C}{\Delta\varepsilon} \dot{\varepsilon}^p \quad (27)$$

onde  $\Delta\varepsilon$  é um parâmetro do material, assim como  $f_F$  no esquema anterior (equação 24). Admite-se que até o início da coalescência a fração volumétrica de vazios varia por nucleação e crescimento de vazios. A partir daí, a variação de  $f$  segue uma lei diferenciada (equação 27).

O primeiro esquema (equação 22) sugere uma ruptura governada pela fração volumétrica de vazios: quando esta atinge o valor  $f_F$ , o material perde a resistência mecânica. O segundo esquema (equação 26) sugere uma ruptura definida principalmente por deformação plástica: quando o material experimenta um acréscimo de deformação plástica da ordem de  $\Delta\varepsilon$  após o início da coalescência, sua resistência mecânica desaparece.

### 2.1.5 Lei de deformação irreversível

Após definida a superfície de escoamento e o conjunto de leis que controla a evolução da fração volumétrica de vazios, para que o modelo fique completo é necessário definir a lei de evolução das deformações irreversíveis ou plásticas.

Segundo Gurson (1977), se a matriz de um material com microvazios segue o princípio da normalidade, o material também segue o mesmo princípio. Assim, empregando-se plasticidade associada, chega-se a uma lei como a seguir (Gurson, 1977; Tvergaard, 1982a)

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (28)$$

### 2.1.6 Comportamento elástico

A presença de microvazios além de alterar o comportamento plástico do material, altera também seu comportamento elástico. Se for considerada a possibilidade de descarga, é importante considerar a influência dos microvazios nas propriedades elásticas do material. Lemaitre e Chaboche (1985) propõem a determinação do grau de degradação do material a partir do grau de degradação no módulo de elasticidade  $E$ .

É possível obter a influência dos microvazios nas propriedades elásticas a partir de teorias de homogenização para materiais com duas fases. Considera-se os vazios como uma fase sem resistência alguma. Baseado no trabalho de Mori e Tanaka, Stainier (1996) apresenta os valores do módulo de compressibilidade  $K$  e do módulo de elasticidade transversal  $G$  para um material com uma fração volumétrica de vazios  $f$ , expressos em função das mesmas propriedades, respectivamente  $K_0$  e  $G_0$ , para o material sem porosidade.

$$K\{f\} = \frac{4K_0G_0(1-f)}{4G_0 + 3K_0f}; \quad G\{f\} = \frac{G_0(1-f)}{1 + \frac{6K_0 + 12G_0}{9K_0 + 8G_0}f} \quad (29)$$

Segundo Stainier (1996), as equações 29 levam em conta um certo nível de interação entre vazios. Para valores baixos de fração volumétrica de vazios, a resposta obtida com o emprego das equações obtidas a partir da teoria de Mori e Tanaka (equações 29) reproduz o comportamento obtido com o emprego das equações 30 apresentadas nos trabalhos de Perzyna (1986), Johnson (1981) e Mackenzie (1959).

$$K\{f\} = \frac{4K_0G_0(1-f)}{4G_0 + 3K_0f}; \quad G\{f\} = G_0(1-f) \left( 1 - \frac{6K_0 + 12G_0}{9K_0 + 8G_0} f \right) \quad (30)$$

Aplicando-se as equações acima (equações 29 e 30) para um material com módulo de elasticidade  $E_0 = 117,9$  GPa e coeficiente de Poisson  $\nu_0 = 0,3$  analisa-se a variação das propriedades elásticas segundo os dois modelos. Os resultados são apresentados nas figuras 9 a 11.

Na figura 9, observa-se a variação do módulo de compressibilidade em função da porosidade, idêntica pelas equações 29 ou 30. Os módulos de elasticidade e de elasticidade transversal são menos afetados pela porosidade quando são empregadas as equações 29, obtidas a partir da formulação de Mori e Tanaka, do que quando são empregadas as equações 30 propostas por Mackenzie (1959). No prosseguimento do trabalho será adotada a formulação obtida a partir da teoria de Mori e Tanaka.

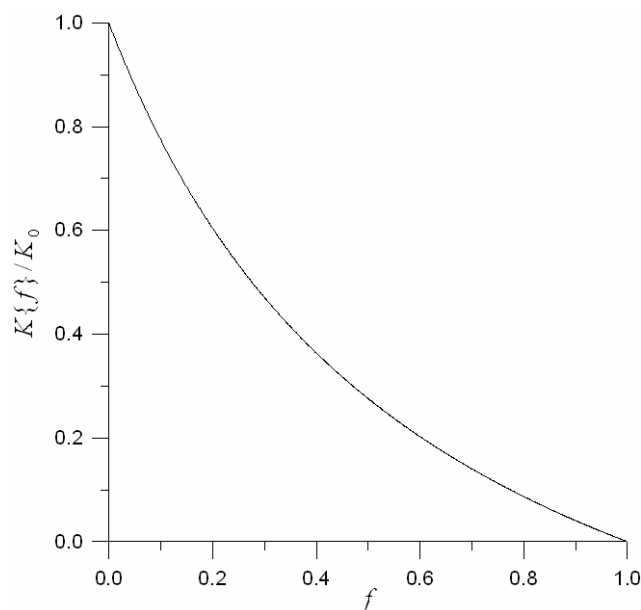


Figura 9: variação do módulo de compressibilidade em função da porosidade

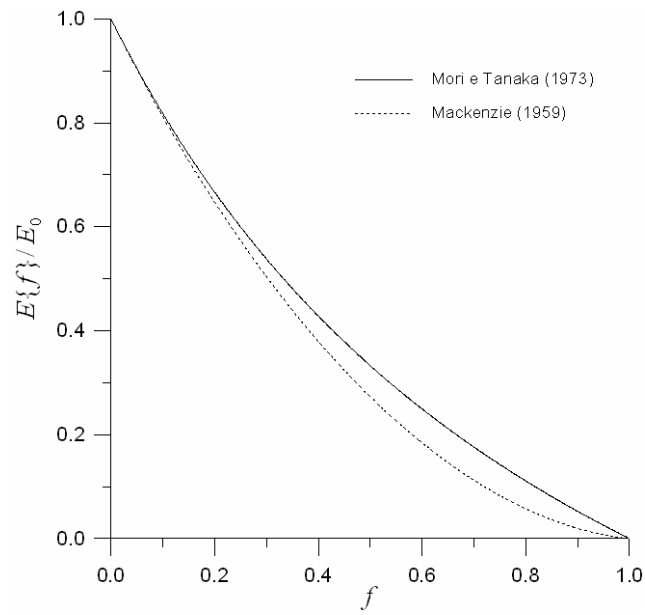


Figura 10: variação do módulo de elasticidade em função da porosidade

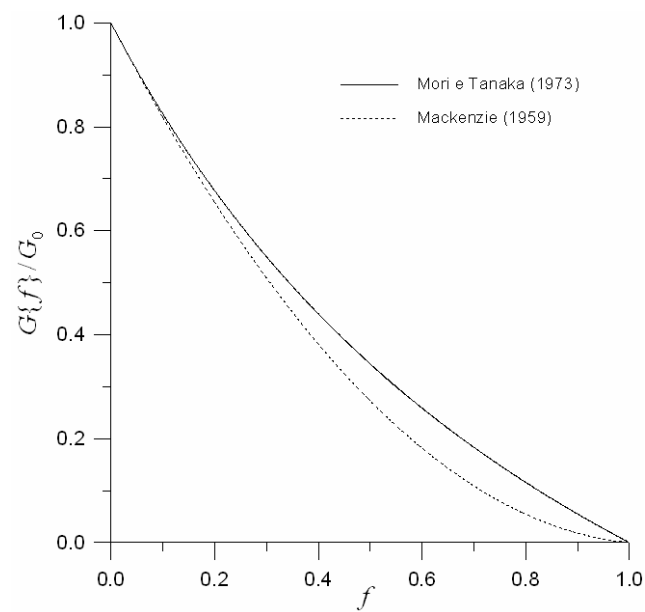


Figura 11: variação do módulo de elasticidade transversal em função da porosidade

No quadro 1 apresenta-se um resumo do modelo de Gurson conforme aplicado neste trabalho.

Quadro 1: resumo do modelo de Gurson

Comportamento reversível:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \bar{H}_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) \quad \bar{H}_{ijkl} = K\{f\} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G\{f\} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl})$$

$$K\{f\} = \frac{4K_0 G_0 (1-f)}{4G_0 + 3K_0 f} \quad G\{f\} = \frac{G_0 (1-f)}{1 + \frac{6K_0 + 12G_0}{9K_0 + 8G_0} f}$$

Comportamento irreversível:

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} - \omega\{p, \sigma_y, f\} \sigma_y$$

$$\omega\{p, \sigma_y, f\} = \left[ 1 - 2\alpha_1 f \cosh\left(\frac{\alpha_2 (3p)}{2\sigma_y}\right) + \alpha_3 f^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij} \quad p = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}$$

Lei de evolução da fração volumétrica de vazios  $f$ :

$$\dot{f} = \begin{cases} \dot{f}_n + \dot{f}_g & f \leq f_c \\ \dot{f}_c & f > f_c \end{cases}$$

com

$$\dot{f}_n = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon^p - \varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right] \dot{\varepsilon}^p \quad \text{nucleação}$$

$$\dot{f}_g = (1-f) \dot{\varepsilon}_{ii}^p \quad \text{crescimento}$$

$$\dot{f}_c = \frac{f_U - f_C}{\Delta \varepsilon} \dot{\varepsilon}^p \quad \text{coalescência}$$

## 2.2 ALGUNS CASOS BÁSICOS

Nesta seção, aplica-se o modelo descrito na seção anterior a casos simples, nos quais a malha de elementos finitos é constituída por um único elemento e as tensões e deformações são uniformes no domínio deste. Procura-se, tanto quanto possível, separar os efeitos de nucleação, crescimento e coalescência de vazios, de forma a evidenciar o efeito da variação de cada parâmetro do modelo na resposta.

### 2.2.1 Nucleação

Este exemplo analisa a nucleação de vazios através da consideração de cisalhamento simples. Como o volume do elemento não sofre variação, não deve haver crescimento de vazios. O estado é homogêneo, tanto em termos de tensões e deformações quanto em termos de deformação plástica e dano. Todos os graus de liberdade são prescritos.

A malha é constituída por um elemento quadrilátero em estado plano de deformações, com altura e largura unitárias. A geometria inicial é mostrada tracejada na figura 12, sendo a configuração final imposta mostrada na mesma figura, em traço cheio.

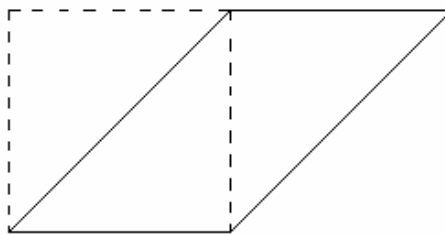


Figura 12: configurações inicial (tracejada) e final (linha cheia)

O deslocamento horizontal aplicado na face superior, igual à dimensão do lado do elemento, é dividido em 1000 incrementos. As características mecânicas do material e os parâmetros do modelo de dano empregados são:  $E = 300\sigma_y^0$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_y = (1 + 2 \varepsilon^p)\sigma_y^0$ ,  $\sigma_y^0 = 10000$ ,  $\alpha_1 = 1,5$ ,  $\alpha_2 = 1,0$ ,  $f_N = 0,05$ ,  $\varepsilon_N = 0,05$ ,  $\varepsilon_N = 0,1$ ,  $\varepsilon_N = 0,2$ ,  $s_N = 0,01$  e  $s_N = 0,1$ .



Apresentam-se nas figuras 13 a 15 os resultados obtidos para fração volumétrica de vazios considerando algumas combinações de valores de desvio-padrão  $s_N$  e deformação plástica média de nucleação  $\varepsilon_N$ , mantendo-se constante a fração volumétrica de vazios a nuclear  $f_N$ . Pela análise da figura 15, observa-se que a deformação plástica média de nucleação é respeitada. O desvio-padrão  $s_N$  influi na concentração da nucleação em torno da deformação plástica média de nucleação  $\varepsilon_N$ . Quanto maior o desvio-padrão  $s_N$ , maior a deformação plástica verificada entre o início e o fim da nucleação. Observa-se também que o valor de vazios nucleados é o valor previsto  $f_N$ .

Quando se adota uma certa deformação plástica média de nucleação  $\varepsilon_N$  associada a um desvio-padrão relativamente pequeno, o resultado (figura 14) se comporta conforme esperado, nucleando o valor especificado  $f_N$ . Para a mesma deformação plástica de nucleação, aumentando o valor do desvio-padrão adotado, a nucleação não atinge o valor previsto  $f_N$ . Se a deformação plástica média de nucleação  $\varepsilon_N$  diminui (figura 13), o valor final de vazios nucleados se afasta ainda mais do valor previsto. A explicação para a diferença entre o valor prescrito  $f_N$  e o valor efetivamente nucleado passa pela expressão adotada para a taxa de nucleação de vazios  $\dot{f}_n$ . A distribuição normal introduzida pelo coeficiente  $A\{\varepsilon^p\}$  na expressão para  $\dot{f}_n$  implica em uma fração volumétrica de vazios nucleada dada pela integral de  $\dot{f}_n$  entre  $-\infty$  e  $+\infty$ . Quando a deformação plástica média de nucleação é pequena e o desvio-padrão de nucleação é grande, parte significativa de  $\dot{f}_n$  situa-se em uma região de deformação plástica negativa. Tal situação se encontra representada na figura 16, obtida para  $\varepsilon_N = 0,3$ . Como se faz a integração de  $\dot{f}_n$  considerando unicamente deformação plástica positiva, a parcela de  $\dot{f}_n$  correspondente à deformação negativa não é integrada. A fração volumétrica de vazios nucleada resulta menor que a prevista. Esse efeito diminui à medida que a deformação plástica de nucleação cresce, como se vê pela comparação entre a fração volumétrica de vazios formada para os diversos valores de  $\varepsilon_N$  (figuras 13 a 15). Quando o desvio-padrão  $s_N$  diminui esse efeito também diminui. Conclui-se, então, que para uma dada deformação plástica média de nucleação existe um desvio-padrão máximo a ser empregado, de forma que a nucleação se complete. Pela figura 16, nota-se que para  $\varepsilon_N = 0,3$  o desvio-padrão máximo seria um valor em torno de  $s_N = 0,1$ .

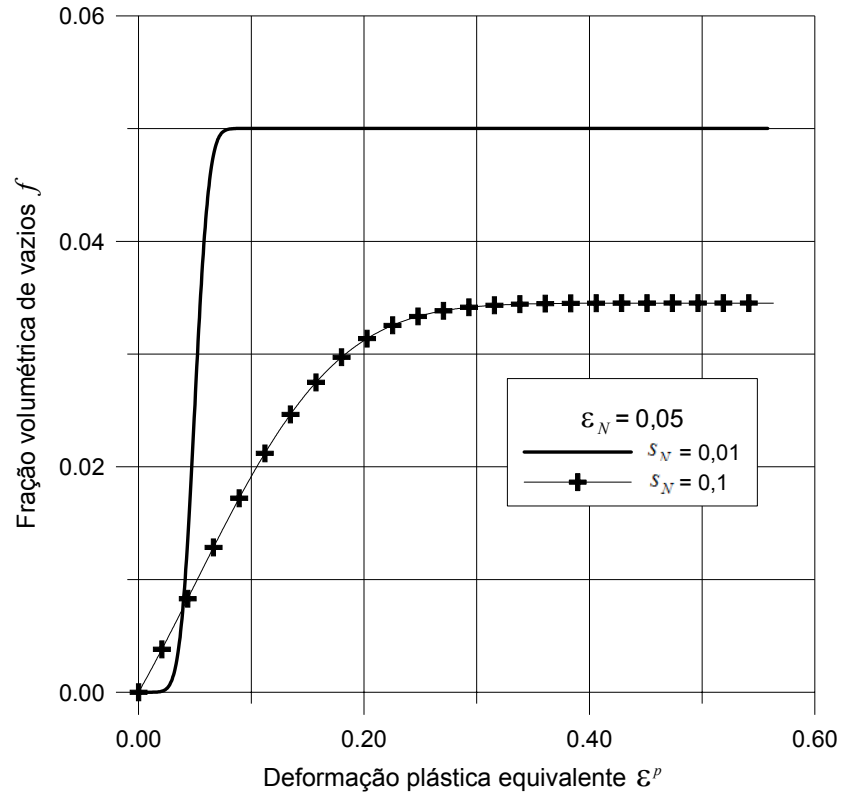


Figura 13: fração volumétrica de vazios para  $\epsilon_N = 0,05$

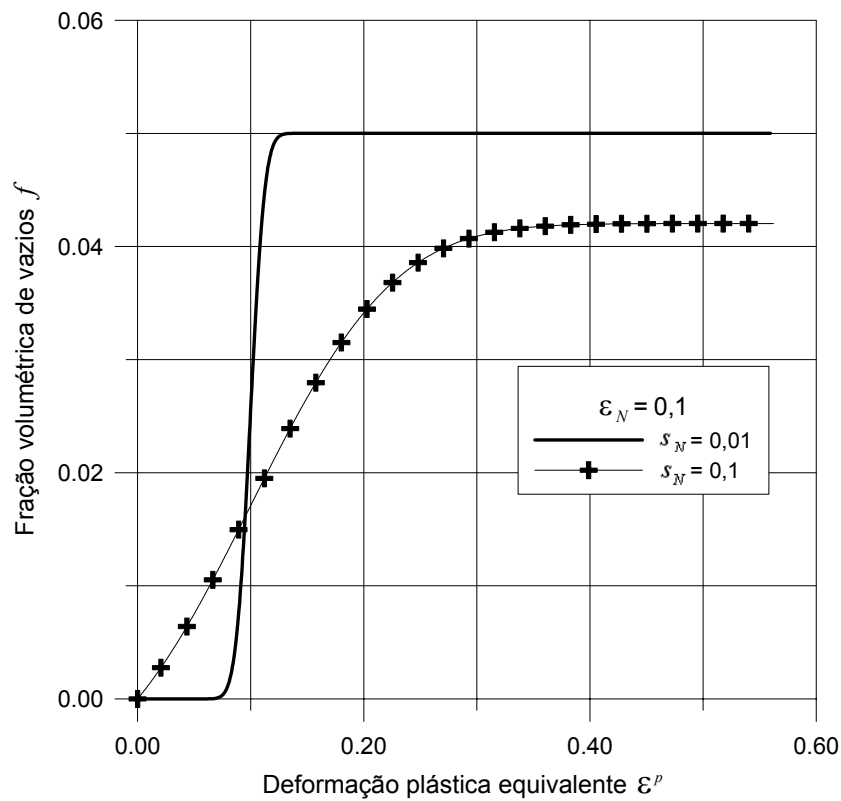


Figura 14: fração volumétrica de vazios para  $\epsilon_N = 0,1$

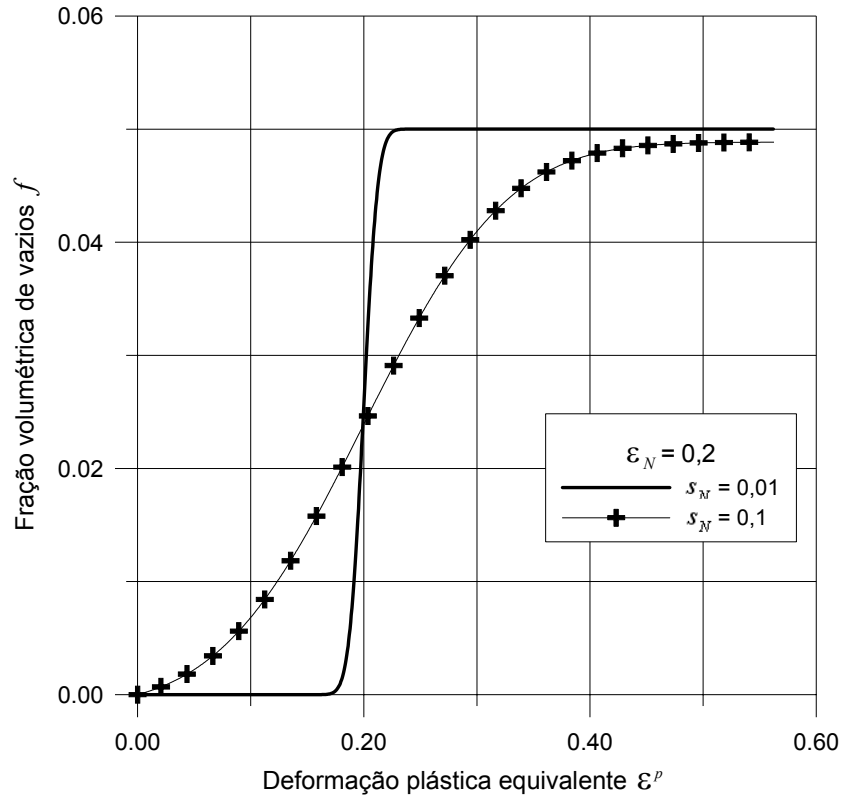


Figura 15: fração volumétrica de vazios para  $\varepsilon_N = 0,2$

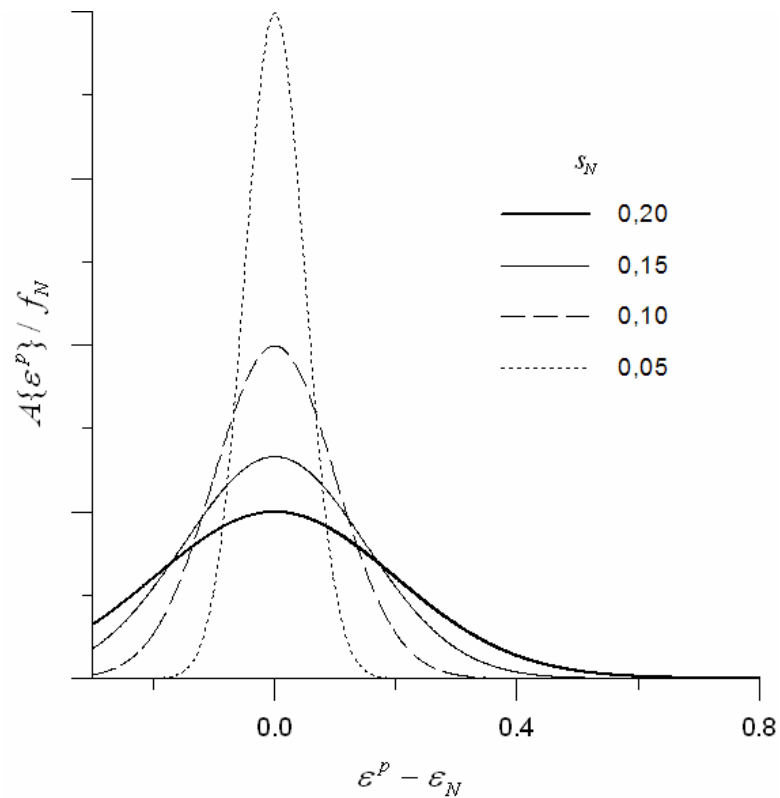


Figura 16: coeficiente de nucleação  $A\{\varepsilon^p\}$  para  $\varepsilon_N = 0,3$

Sabendo que a parcela de vazios não nucleados depende da área sob a curva de  $\dot{f}_n$  que fica em uma zona de deformação plástica negativa, é possível prever se para uma dada combinação de  $\varepsilon_N$  e  $s_N$  a nucleação vai atingir o valor desejado  $f_N$  ou não. O cálculo de áreas sob a curva de Gauss pode ser feito mediante o emprego de tabelas encontradas em textos de estatística (Stevenson, 1981), também apresentadas no apêndice C (tabela 1).

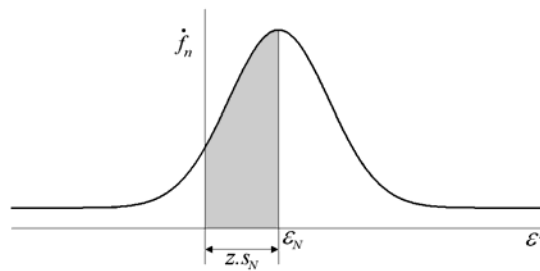


Figura 17: área sob a curva de Gauss

As tabelas são organizadas para fornecer a área sob a curva de Gauss, limitada pelos eixos verticais que passam na média  $\bar{x}$  e em uma posição  $z$  desvios-padrões afastada da média. Estabelecendo-se uma porcentagem mínima de  $f_N$  a ser formada,  $k_{min}$ , pode-se obter relações entre  $\varepsilon_N$  e  $s_N$  para que isso ocorra, através da área sob a curva de Gauss. A coordenada  $z$  marca a transição entre a zona onde há nucleação (deformação plástica positiva) e a zona onde não há. Assim, a condição que deve ser satisfeita para que haja um determinado nível de formação de vazios é que

$$\varepsilon_N - z \cdot s_N \geq 0 \quad (31)$$

sendo o valor de  $z$  escolhido para que uma área igual a  $k_{min}$  fique na parte positiva do eixo das deformações plásticas. A esse valor de  $k_{min}$  corresponde uma área tabelada de  $k_{min} - 0,5$  sob a curva de Gauss, entre os eixos verticais que passam na média e na coordenada  $z$ .

Por exemplo, caso se deseje uma nucleação mínima de 95% de  $f_N$ ,  $k_{min} = 0,95$ . A área entre a vertical que contém a média e a vertical que contém a coordenada  $z$  será de 0,45. Entrando na tabela (apêndice C), verifica-se que a área de 0,45 corresponde a um  $z$  de 1,645. Então a relação mínima entre  $\varepsilon_N$  e  $s_N$  para que ocorra uma formação de pelo menos 95% de

$f_N$  é de 1,645. Para 97% de formação mínima essa relação é de 1,882 e para 99% de 2,337.

A análise das tensões de cisalhamento (figura 18) para o caso com  $\varepsilon_N = 0,2$  mostra que o emprego de um desvio-padrão pequeno, correspondente a uma nucleação rápida, introduz uma variação brusca nas tensões de cisalhamento. Na mesma figura 18 é possível observar o efeito de amolecimento introduzido pela presença dos vazios.

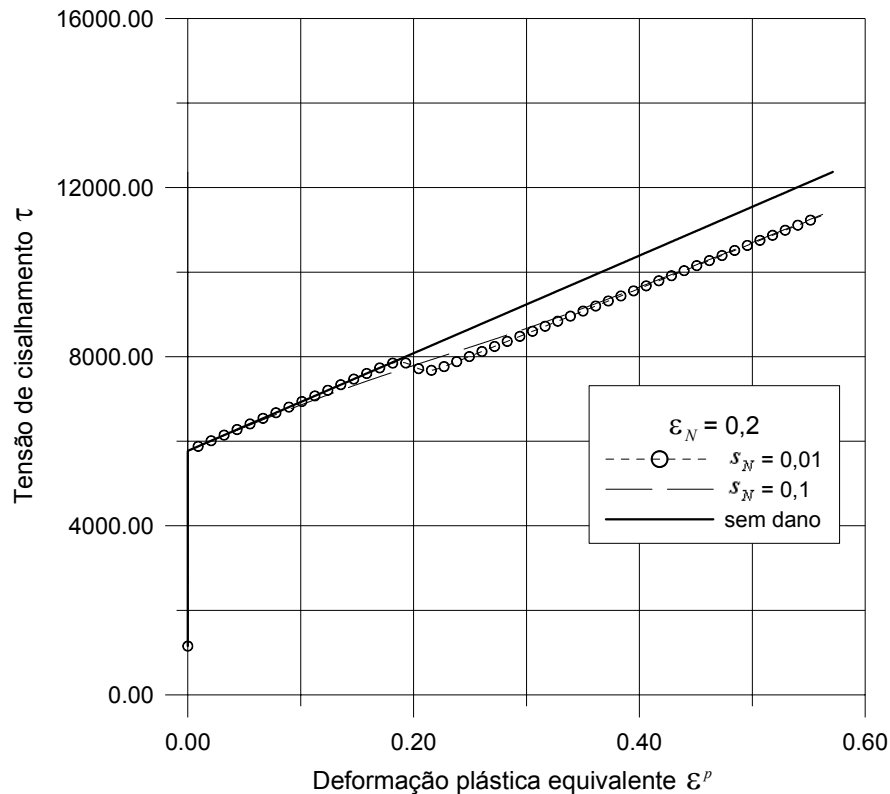


Figura 18: tensões de cisalhamento com e sem dano

Cabe ainda uma última consideração a respeito da nucleação: se a deformação de cisalhamento imposta neste exemplo se dá sem mudança de volume, não havendo perda de massa, como se pode chegar a uma fração volumétrica de vazios diferente da inicial? Em outras palavras: como passar de uma situação com volume unitário e porosidade nula a outra com porosidade diferente de zero e ainda volume unitário?

Supondo-se a nucleação originada por descolamento entre a matriz do metal e uma inclusão (figura 5), no exato momento em que ocorre o descolamento, o volume da partícula não contribui mais à resistência do conjunto, pelo menos para solicitações de tração. No entanto, a massa da inclusão continua no sistema. A fração volumétrica de vazios nucleada seria então uma medida não de vazios físicos – furos, buracos – mas de vazios no sentido de

perda de resistência. Tais cavidades podem estar vazias ou preenchidas por um material que não contribui à resistência do conjunto – caso de nucleação a partir de inclusões.

### 2.2.2 Crescimento

Neste exemplo são estudados os efeitos de tração e compressão na formação e crescimento de vazios. Analisam-se situações em estado plano de deformação e axissimétricas. Tais situações apresentam homogeneidade de tensões e deformações. A geometria para os casos de tração é indicada na figura 19, onde se mostra a configuração inicial pontilhada e a configuração final em linha cheia. Para compressão a única modificação é o sentido do deslocamento aplicado.

A malha é composta por um elemento finito com dimensões iniciais unitárias. O deslocamento aplicado em tração é o dobro do lado inicial e em compressão igual à metade do tamanho do lado.

Inicialmente, estuda-se somente o crescimento dos vazios. Para tanto emprega-se um material com porosidade inicial, sem considerar efeito de nucleação. O material não apresenta endurecimento. O deslocamento é aplicado com o emprego de 1000 incrementos. As características mecânicas do material e os parâmetros do modelo de Gurson empregados são:  $E = 300\sigma_y^0$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_y^0 = 10000$ ,  $\alpha_1 = 1,5$ ,  $\alpha_2 = 1,0$  e  $f_0 = 0,05$ .

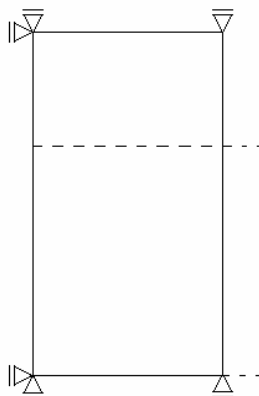


Figura 19: configurações inicial, final e condições de contorno

A verificação da conservação de massa pode ser feita com o auxílio dos valores

apresentados na figura 20. A densidade volumétrica de massa da matriz é dada por  $\rho = m[(1 - f)V_{aparente}]^{-1}$ . Admitindo-se uma densidade da matriz unitária, tomando a fração volumétrica de vazios inicial de 0,05 e o volume aparente inicial unitário, encontra-se uma massa  $m = 0,95$ . Para um volume aparente final de 1,37, admitindo-se que a massa se conserve, deve-se ter uma fração volumétrica de vazios da ordem de 0,3065. O valor obtido para a fração volumétrica de vazios na simulação é de 0,3058. A diferença pode em parte ser explicada pela presença no volume final da parcela devida à dilatação elástica, da ordem de 0,001, calculada a partir da pressão final e do módulo de compressibilidade  $K$ .

É possível proceder de forma semelhante para corpos axissimétricos (figura 21) em compressão. A partir da variação de volume, procedendo-se como acima e descontando a parcela elástica chega-se a uma porosidade teórica de 0,0233. O valor obtido com o emprego do METAFOR é de 0,0232.

Na figura 22 é comparada a evolução da pressão para o material com porosidade inicial e para um material sem dano (von Mises).

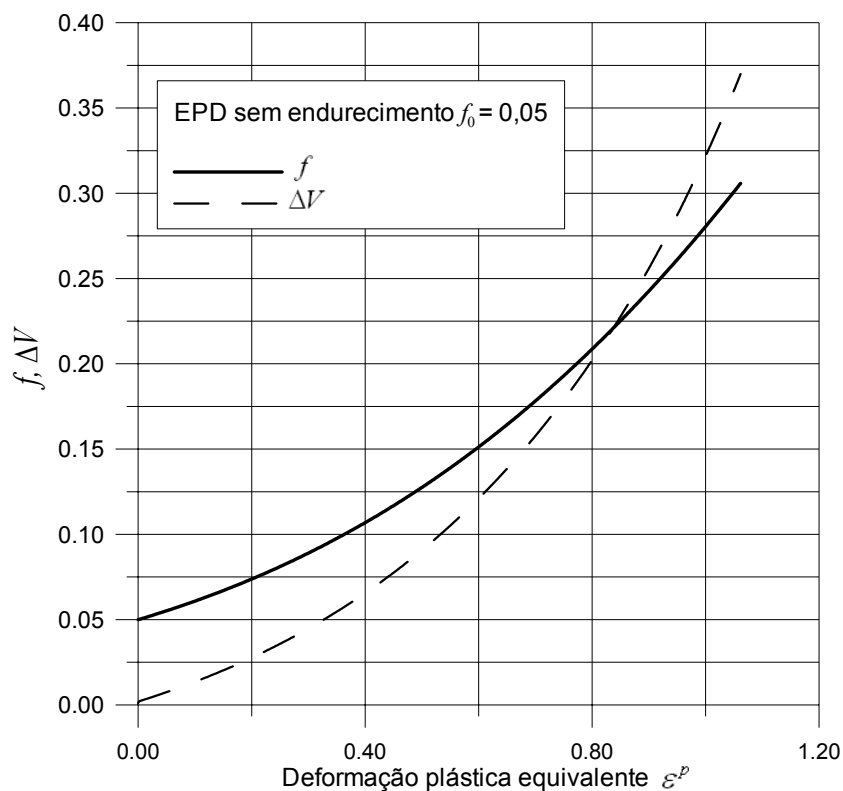


Figura 20: fração volumétrica de vazios e variação de volume em EPD

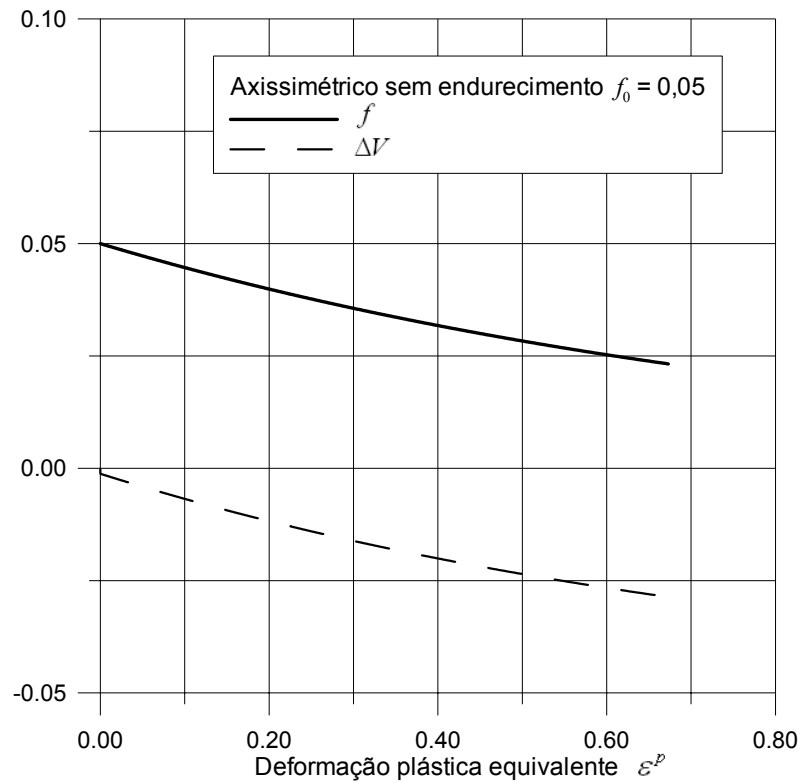


Figura 21: fração volumétrica de vazios e variação de volume em axissimétrico

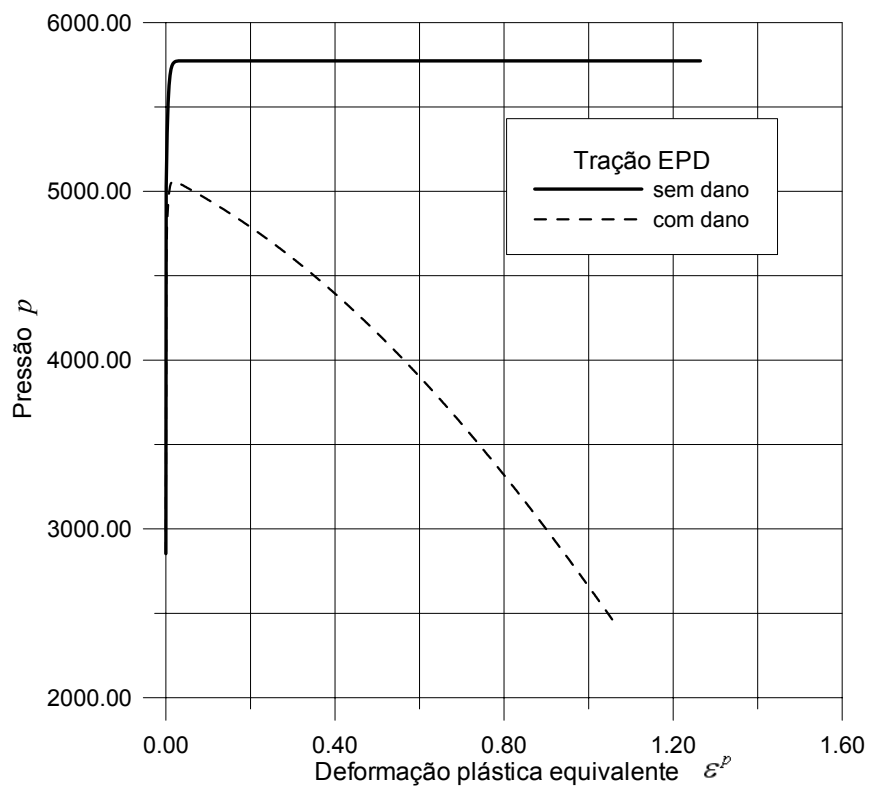


Figura 22: pressão com e sem dano em EPD (tração)



A seguir são estudados casos onde o material apresenta endurecimento, nucleação e crescimento de vazios. Admite-se que a formação de vazios se dá tanto em tração quanto em compressão (Stainier, 1996). As propriedades empregadas são:  $E = 300\sigma_y^0$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_y = (1 + 2 \varepsilon^p)\sigma_y^0$ ,  $\sigma_y^0 = 10000$ ,  $\alpha_1 = 1,5$ ,  $\alpha_2 = 1,0$ ,  $f_N = 0,05$ ,  $\varepsilon_N = 0,1$  e  $s_N = 0,01$ .

Observa-se, nas figuras 23 e 24, inicialmente o fenômeno de nucleação, que ocorre de forma rápida devido ao valor do desvio-padrão adotado. Após, segue-se uma fase de crescimento da fração volumétrica de vazios em tração, ou decréscimo em compressão.

Nas mesmas figuras 23 e 24, observa-se que em compressão aparentemente não chega a se formar a fração volumétrica de vazios de nucleação  $f_N$ . O que ocorre é que, assim que inicia a fase de nucleação, já começa a ocorrer simultaneamente “crescimento” – no caso decréscimo – de vazios. Quanto às tensões (figuras 25 e 26), observa-se que o amolecimento introduzido pelo dano mais uma vez é verificado ao se comparar os casos com e sem dano. Como o desvio-padrão empregado é pequeno, o efeito do dano se mostra nas tensões de forma brusca. Observa-se também (figuras 25 e 26) que em compressão o dano afeta de maneira mais significativa a geometria axissimétrica. Em tração, a geometria mais afetada é o estado plano de deformação.

Com relação ao volume final nos casos de tração com dano, em estado plano de deformação (figura 28) têm-se uma maior variação de volume que em corpos axissimétricos (figura 27). Isso está ligado à maior porosidade verificada em estado plano de deformação que em axissimétricos.

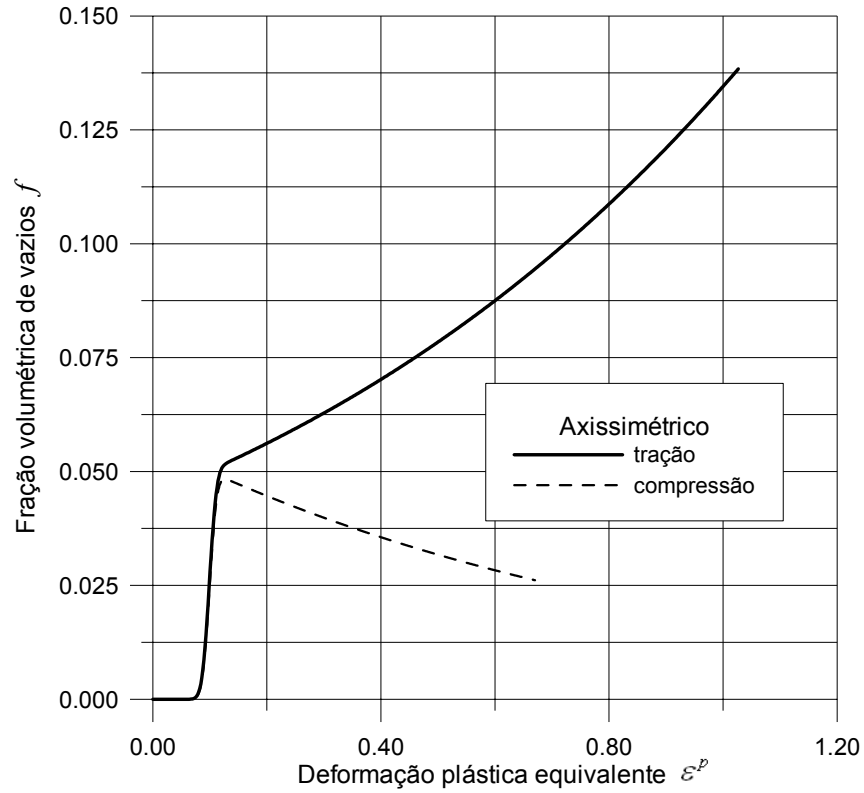


Figura 23: fração volumétrica de vazios em axissimétrico

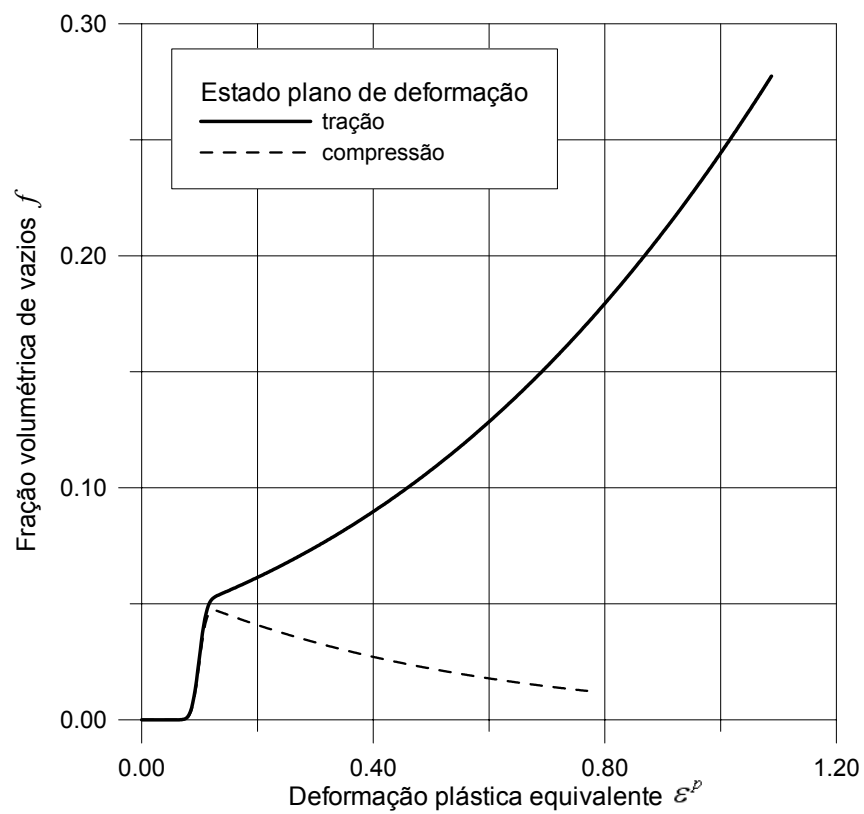


Figura 24: fração volumétrica de vazios em EPD

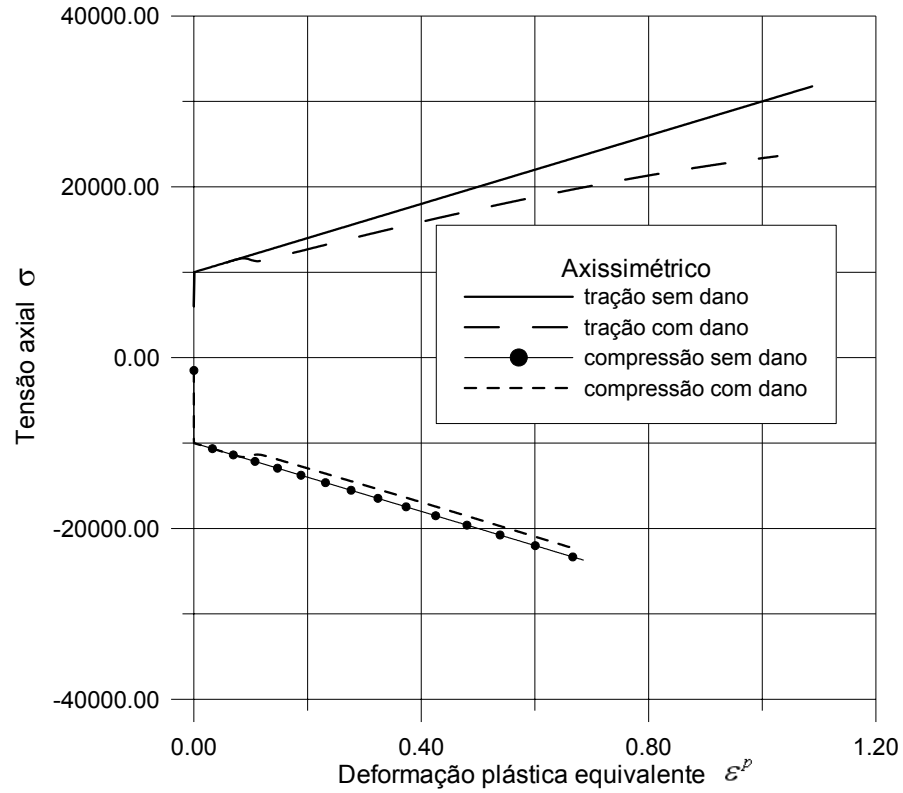


Figura 25: tensão axial em axissimétrico com e sem dano (tração e compressão)

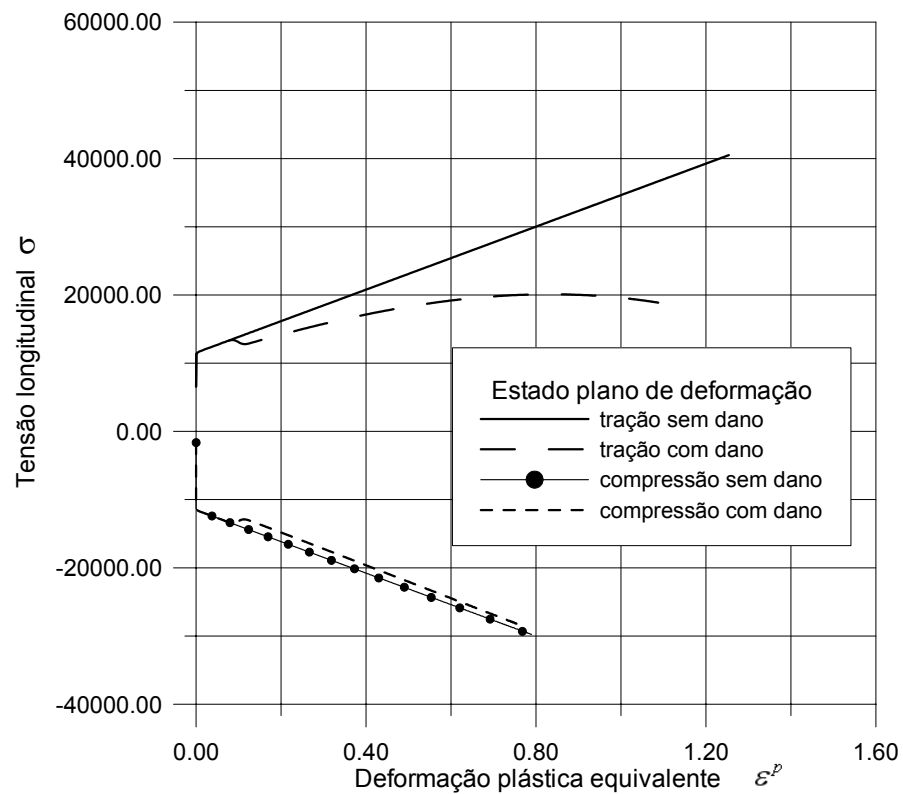


Figura 26: tensão longitudinal em EPD com e sem dano (tração e compressão)

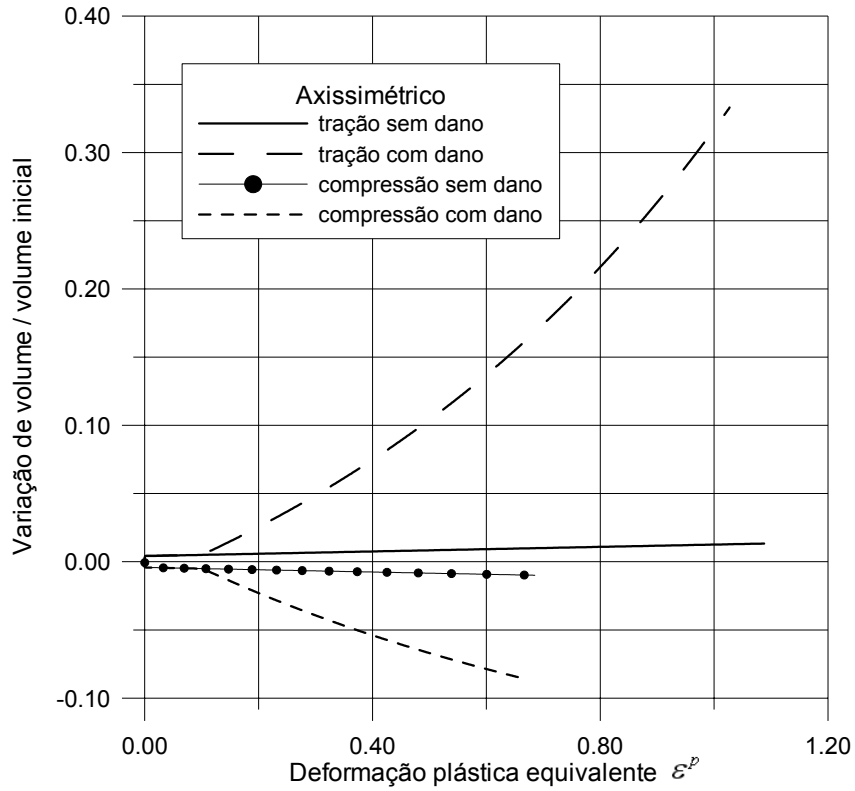


Figura 27: variação de volume em axissimétrico com e sem dano (tração e compressão)

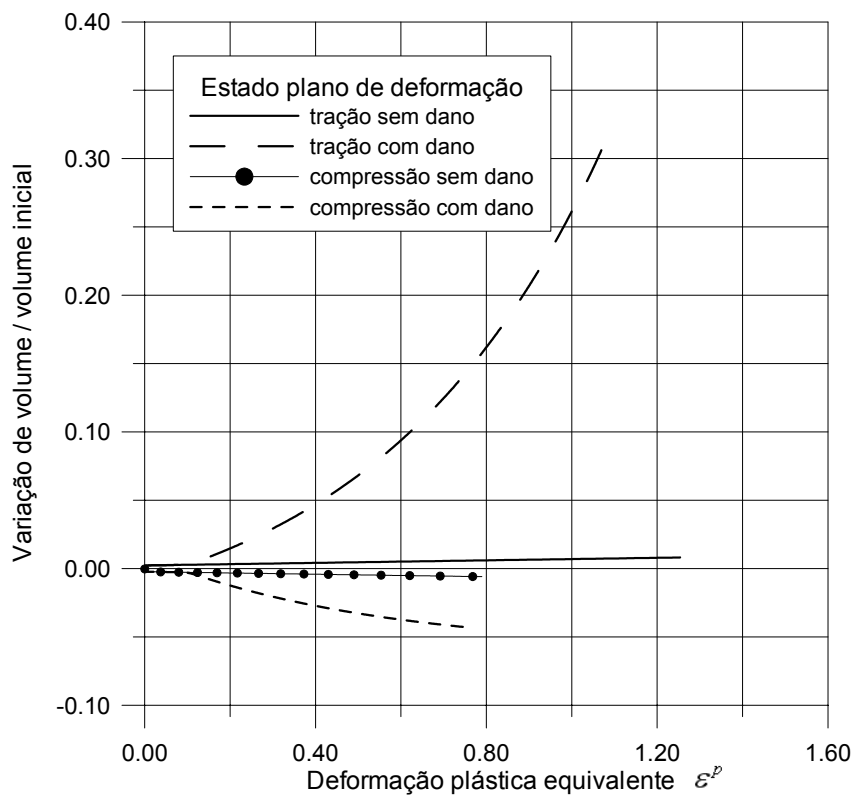


Figura 28: variação de volume em EPD com e sem dano (tração e compressão)

### 2.2.3 Coalescência

Neste exemplo é estudado o modelo de coalescência, utilizando-se para tanto uma geometria axissimétrica em tração, com malha constituída por um elemento finito com dimensões unitárias. A geometria empregada está representada na figura 29, onde se mostra a configuração inicial pontilhada e a configuração final em traço contínuo. O deslocamento aplicado em tração é o dobro do lado do elemento indeformado.

Admite-se que há nucleação de vazios, seguida de crescimento e coalescência. Neste exemplo em particular não são corrigidos os valores de  $K$  e  $G$  em função da porosidade. Utilizam-se 10000 incrementos de carga. As características mecânicas do material e os parâmetros do modelo de dano empregados são:  $E = 75$  GPa,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_y^0 = 250$  MPa,  $\sigma_y = (1 + 2 \varepsilon^p) \sigma_y^0$ ,  $\alpha_1 = 1,5$ ,  $\alpha_2 = 1,0$ ,  $f_N = 0,05$ ,  $\varepsilon_N = 0,1$ ,  $s_N = 0,01$ ,  $f_C = 0,08$ ;  $f_C = 0,1$ ,  $f_C = 0,12$ ,  $\Delta\varepsilon = 0,1$  e  $\Delta\varepsilon = 0,3$ .

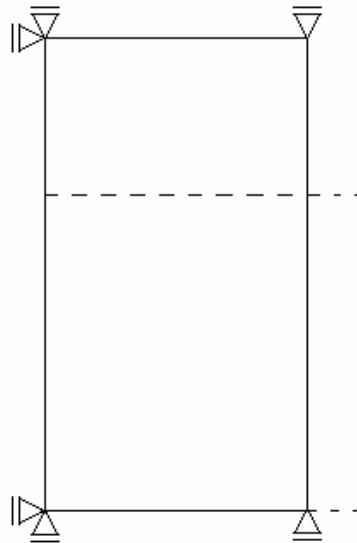


Figura 29: configurações inicial, final e condições de contorno

Observa-se nas figuras a seguir os resultados de carga em função do deslocamento aplicado (figuras 30 e 34), tensão em função da deformação plástica (figuras 31 e 35), porosidade em função da deformação plástica (figuras 32 e 36) e deformação plástica em função do deslocamento aplicado (figuras 33 e 37).

Quando se observa a evolução da fração volumétrica de vazios em função da

deformação plástica equivalente percebe-se a mudança de declividade (figuras 32 e 36) introduzida pela passagem da etapa de crescimento à etapa de coalescência, em  $f = f_C$ . Esta última etapa deve levar o material à uma ruptura tanto mais rápida quanto menor for o parâmetro  $\Delta\varepsilon$ , como se vê através da observação das figuras 30 e 34 ou figuras 31 e 35.

Na figura 38, observa-se que a pressão normalizada cai de forma linear com o aumento da porosidade. A ruptura se dá quando a curva correspondente ao problema intercepta a curva superior que dá os valores limite de pressão e fração volumétrica de vazios, conforme discutido na seção 2.1.1.

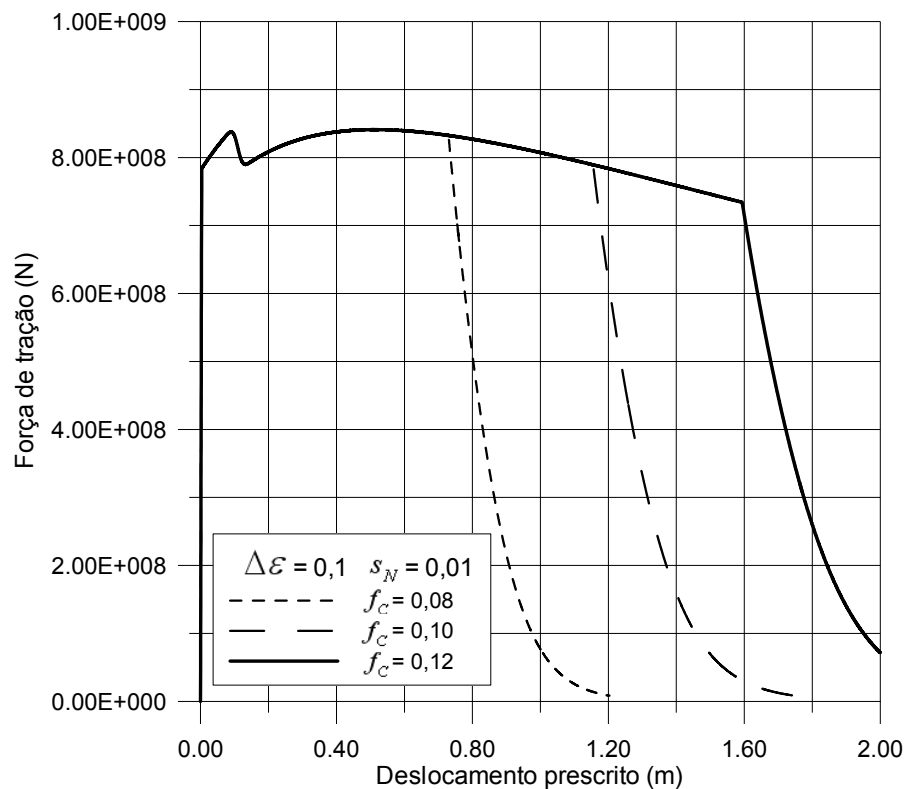


Figura 30: força de tração para  $\Delta\varepsilon = 0,1$  e  $s_N = 0,01$

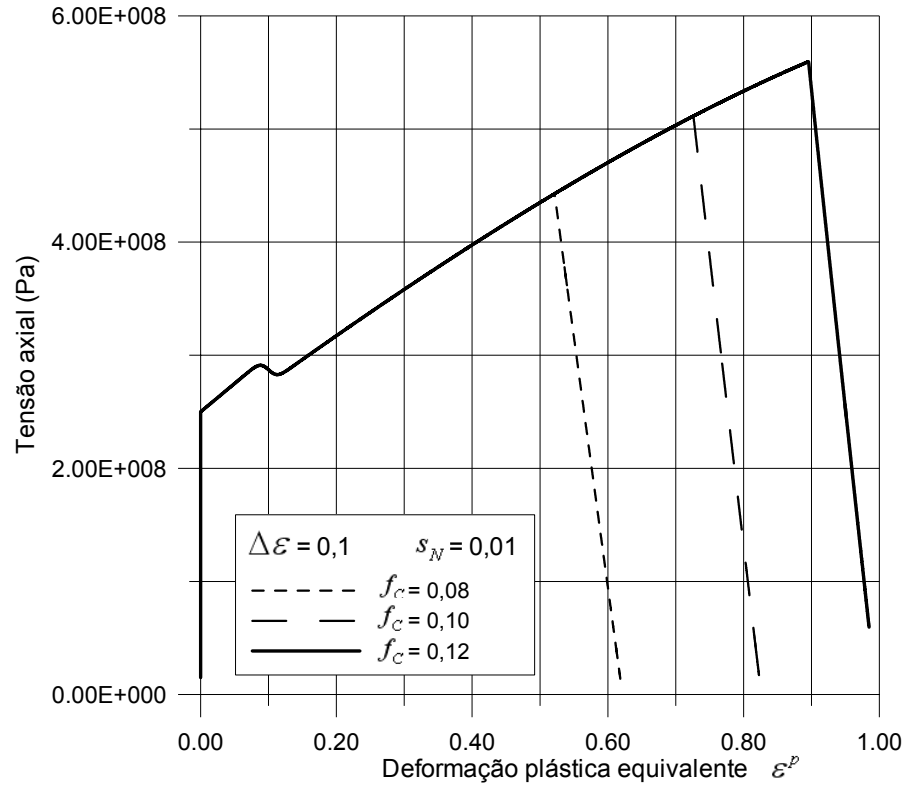


Figura 31: tensão axial para  $\Delta\epsilon = 0,1$  e  $s_N = 0,01$

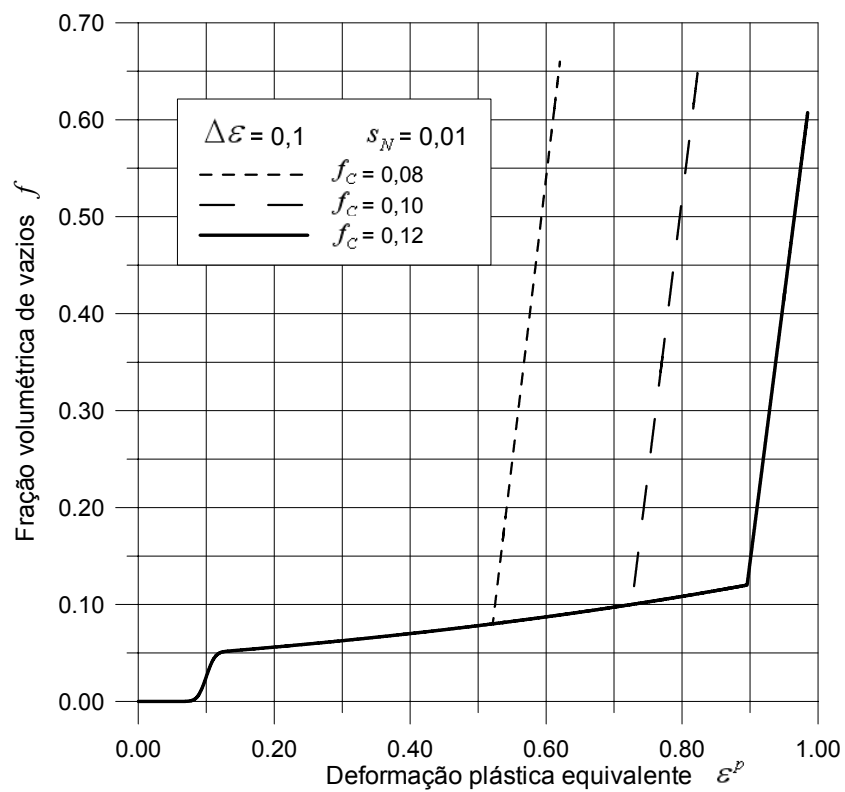


Figura 32: fração volumétrica de vazios para  $\Delta\epsilon = 0,1$  e  $s_N = 0,01$

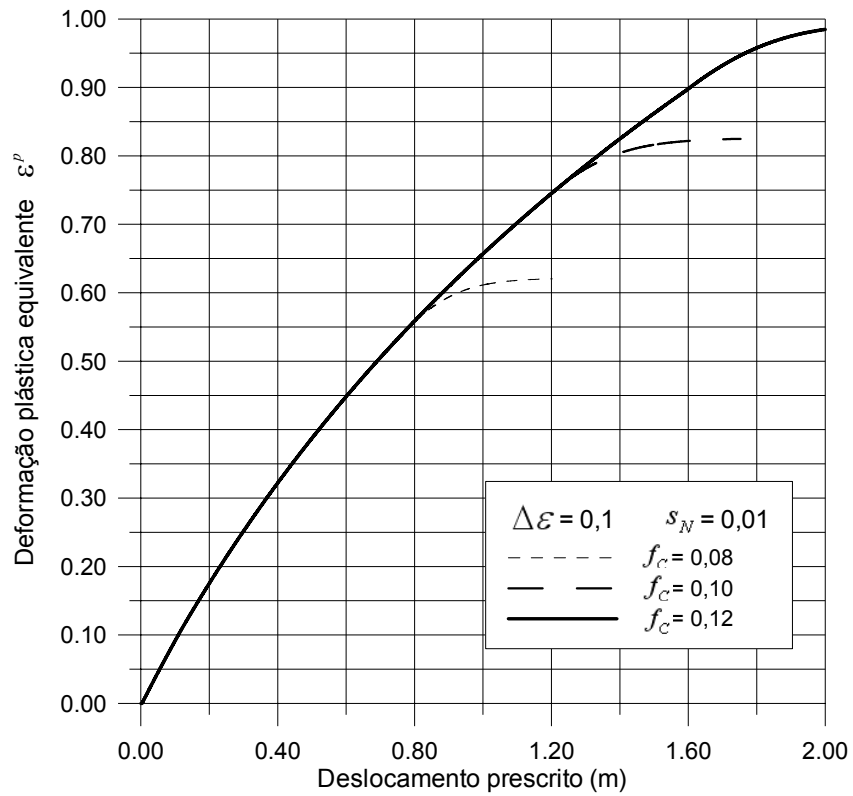


Figura 33: deformação plástica equivalente  $\Delta\varepsilon = 0,1$  e  $s_N = 0,01$

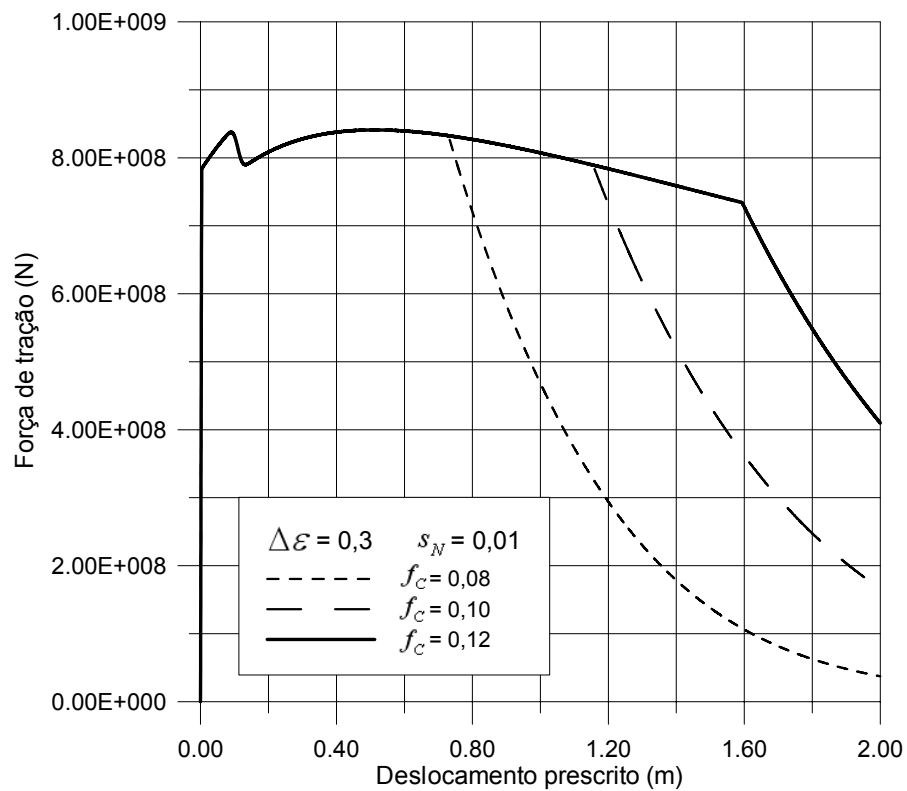


Figura 34: força de tração para  $\Delta\varepsilon = 0,3$  e  $s_N = 0,01$



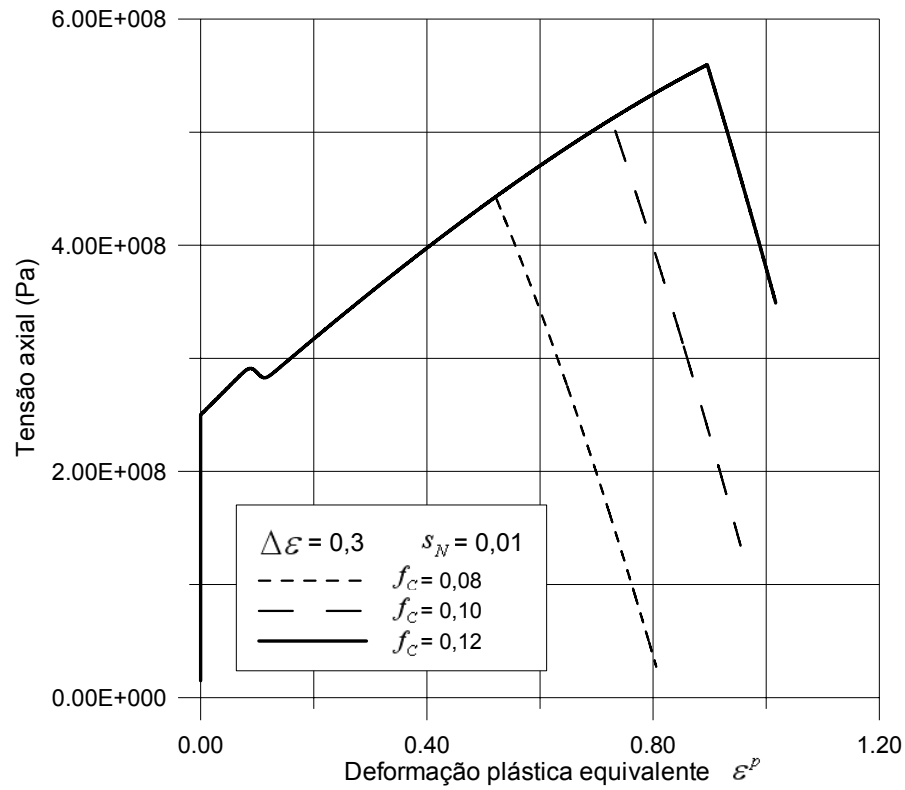


Figura 35: tensão axial para  $\Delta\epsilon = 0,3$  e  $s_N = 0,01$

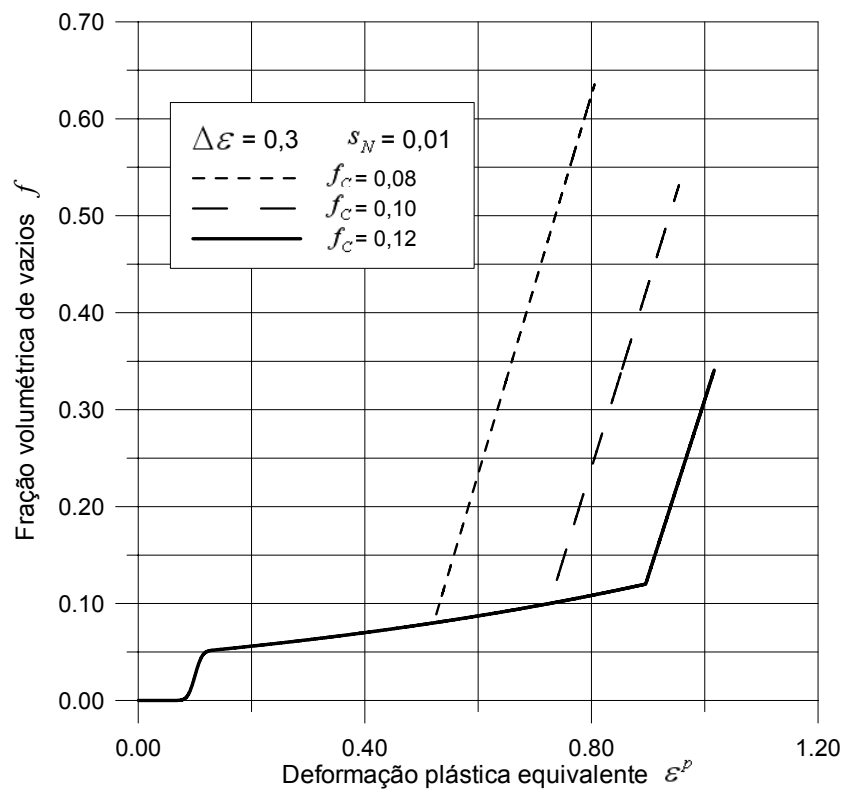


Figura 36: fração volumétrica de vazios  $\Delta\epsilon = 0,3$  e  $s_N = 0,01$

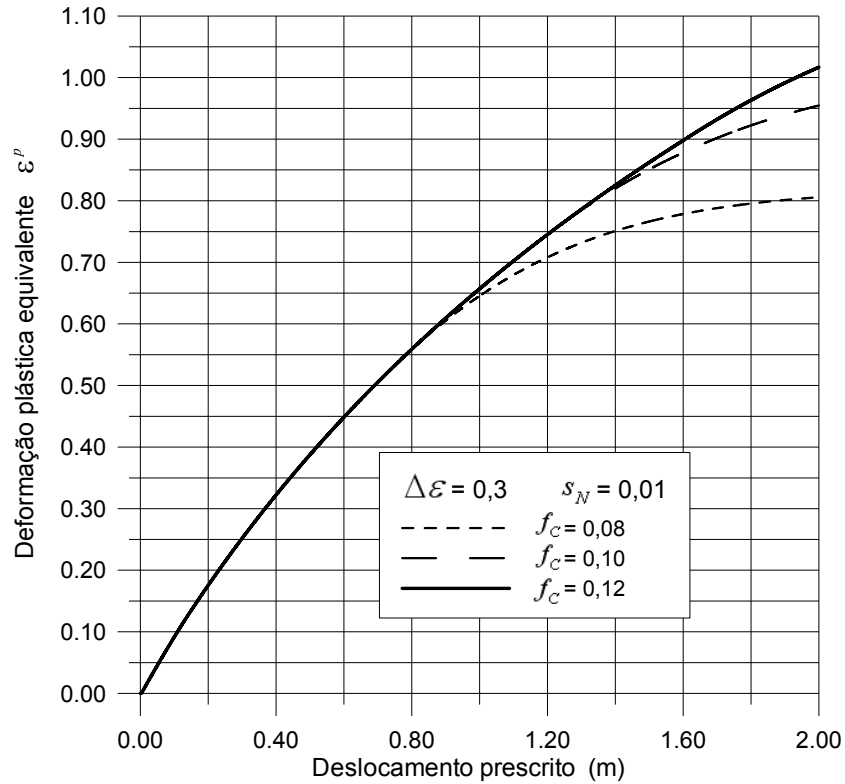


Figura 37: deformação plástica equivalente  $\Delta\varepsilon = 0,3$  e  $s_N = 0,01$

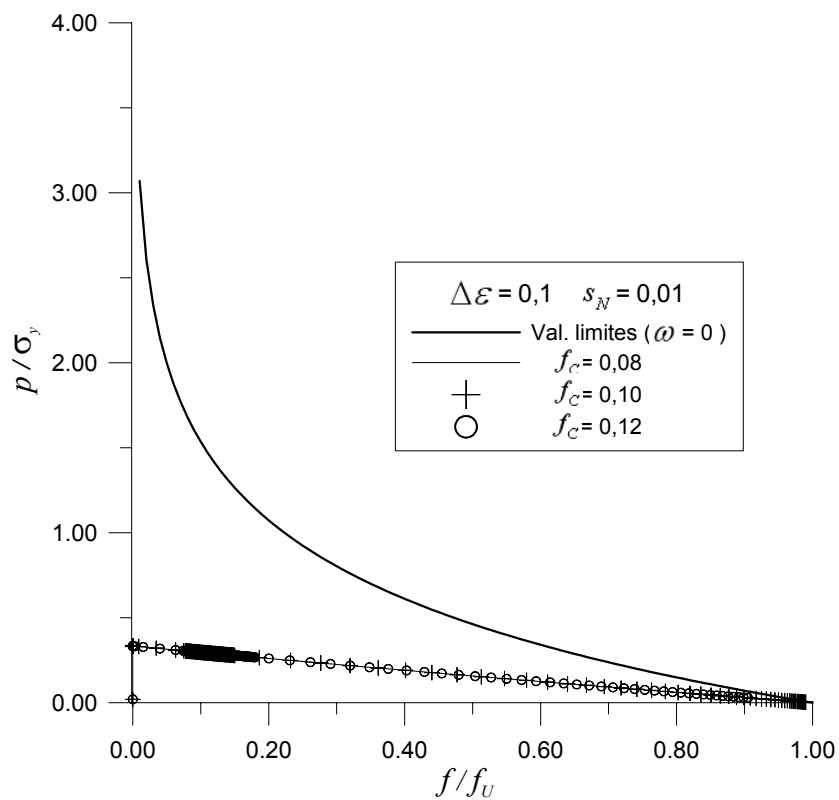


Figura 38: pressão normalizada para  $\Delta\varepsilon = 0,1$  e  $s_N = 0,01$

## 2.3 DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS

Um ponto nevrálgico na aplicação do modelo de Gurson é a determinação dos parâmetros a serem empregados. Zhang (1996) classifica tais parâmetros em grupos:

- a) parâmetros constitutivos:  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , ligados à superfície de escoamento;
- b) parâmetros iniciais:  $f_0$ ,  $f_N$ ,  $s_N$  e  $\varepsilon_N$ , ligados à origem dos vazios, se nucleados ou pré-existentes;
- c) parâmetros críticos:  $f_C$ ,  $\Delta\varepsilon$ , ligados à interação entre os vazios, marcando o início da fase final de degradação do material.

Segundo Zhang (1996), os parâmetros constitutivos podem ser mantidos para diferentes materiais, sendo que os valores  $1,0 \leq \alpha_1 \leq 1,5$ ,  $\alpha_2 = 1,0$  e  $\alpha_3 = \alpha_1^2$  têm sido largamente empregados (Gurson, 1977; Tvergaard 1981, 1982a, 1982b, 1982c; Tvergaard e Needleman, 1984; Koplik e Needleman, 1988; Zhang e Niemi, 1995b).

Os parâmetros iniciais estariam ligados a dois fenômenos diferenciados: vazios pré-existentes ou vazios que se formam ao longo da deformação plástica. Zhang (1996) sugere o emprego de uma fração volumétrica de vazios inicial  $f_0$  para modelar os vazios originados por inclusões maiores, que se destacam da matriz com uma deformação plástica menor. Os vazios originados por tais inclusões poderiam ser considerados como presentes desde o início do processo de deformação. O valor  $f_0$  seria adotado em função do componente que se admite vá se destacar da matriz. Para aços estruturais, o sulfeto de manganês (*MnS*) é adotado como origem de nucleação, encontrando-se distribuído na liga em uma fração volumétrica em torno de 0,0005 (Zhang, 1996; Koppenhoefer e Dodds Jr., 1998).

Para modelar o efeito das inclusões menores, que se destacam da matriz a uma deformação plástica mais elevada, emprega-se um modelo de nucleação como proposto por Chu e Needleman (1980). Os parâmetros  $s_N = 0,1$  e  $\varepsilon_N = 0,3$  têm sido empregados (Tvergaard e Needleman, 1984; Lee e Zhang, 1994) para modelar diversos materiais. Koppenhoefer e Dodds Jr. (1998) empregam  $s_N = 0,025$  e  $\varepsilon_N = 0,5$  em uma simulação e  $s_N = 0,25$  e  $\varepsilon_N = 0,2$  em outra, sendo que essa última escolha parece algo inadequada, podendo-se esperar

nucleação incompleta devido à combinação de valores de deformação média de nucleação e desvio-padrão de nucleação, como discutido antes. Kikuchi *et al.* (1991) empregam  $\varepsilon_N = 0,3$  para duas ligas de alumínio. Para a determinação de  $f_N$  recomendam o emprego de microscopia.

Segundo Zhang (1996), a quantidade de vazios a nuclear  $f_N$  fica atrelada ao parâmetro crítico que marca o início da coalescência. Existem vários pares de valores de  $f_N$  e  $f_C$  capazes de ajustar determinado ensaio, especialmente se o problema em questão ocorre com triaxilidade baixa. Assim, a determinação de  $f_N$  e  $f_C$  deve ser feita em conjunto, através de ensaios e simulações numéricas, preferencialmente em situações onde a triaxilidade seja alta, pois nesse caso existe uma tendência dos parâmetros em convergirem para uma solução única. Zhang (1996) recomenda a introdução de um mecanismo físico para levar em conta a coalescência, como os apresentados em Thomason (1985a, 1985b), Zhang e Niemi (1995b) e Klöcker e Tvergaard (2003). Segundo Zhang (1996), tal tipo de mecanismo conduziria o problema da determinação dos parâmetros de nucleação e coalescência a uma solução única.

Ragab (2004c) verifica dependência entre os parâmetros de nucleação e a deformação obtida na ruptura, recomendando maior estudo do fenômeno de nucleação.

Worswick e Pick (1991), em um trabalho que trata do estudo do crescimento de microvazios em uma liga de bronze, optam por empregar uma fração volumétrica inicial de vazios ao invés de empregar o modelo de nucleação. A fração volumétrica inicial a ser adotada vem de uma análise metalográfica da liga empregada, considerando que um dos componentes da liga originará os vazios. Esse componente apresenta uma resistência à tração cerca de 20 vezes menor que a resistência da matriz, portanto parece razoável admitir que logo no início do processo de deformação plástica a fase menos resistente já represente um vazio. Quando da comparação entre os valores de  $f$  oriundos do emprego do modelo de Gurson com os medidos experimentalmente, os valores experimentais resultam menores. A explicação é dada justamente admitindo que a nucleação tenha demorado mais que o previsto, fazendo com que o crescimento de vazios nos corpos de prova fosse menor que o previsto, por ter sido retardado pela nucleação. A fração volumétrica inicial  $f_0$  adotada foi de 0,025, obtida a partir de resultados metalográficos. Para a superfície de escoamento, foram empregados  $\alpha_1 = 1,25$ ,  $\alpha_2 = 0,95$  e  $\alpha_3 = \alpha_1^2$ , tendo os autores se baseado em trabalhos anteriores desenvolvidos (Worswick e Pick, 1990; Becker *et al.*, 1988). Em um trabalho posterior

(Worswick e Pick, 1995), os vazios no mesmo material são modelados como surgindo através de nucleação, com os parâmetros  $f_N = 0,025$ ,  $s_N = 0,05$  e  $\varepsilon_N = 0,13$ .

Quanto aos parâmetros críticos, o início da coalescência tem sido admitido como ocorrendo quando a fração volumétrica de vazios for da ordem de 0,1 a 0,2, como preconizado por Brown e Emburry (1973), sendo o valor 0,15 bastante empregado (Aravas e McMecking, 1985; Worswick e Pick, 1995; Tvergaard e Needleman, 1984).

Alegre e Gutiérrez-Solana (2004) apresentam um procedimento para identificar parâmetros do modelo de Gurson a partir de ensaios de tração em corpos de prova com e sem entalhe. Indicam que, para aço inox submetido a altas temperaturas, o parâmetro  $f_C$  varia em função do envelhecimento.

Mahnken (1999) apresenta a determinação de parâmetros do modelo de Gurson a partir de resultados experimentais empregando um algoritmo de otimização. Recomenda ser necessária a consideração de resultados metalográficos para melhorar a confiabilidade de tal procedimento. Já Springmann e Kuna (2005) recomendam que a determinação de parâmetros deve ser feita a partir de quantidades globais como por exemplo força e deslocamento. Corigliano *et al.* (2000) apresentam um método para determinação de  $f_0$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  através da solução de problema inverso. Lievers *et al.* (2004) apresentam um procedimento para calibrar os parâmetros de nucleação do modelo de Gurson a partir de ensaios efetuados em chapas metálicas conformadas.

Ragab (2004a) apresenta uma compilação de valores de porosidade inicial  $f_0$ , deformação de nucleação  $\varepsilon_N$  e fração volumétrica de vazios na ruptura,  $f_F$ .

## 2.4 MODIFICAÇÕES NO MODELO E APLICAÇÕES DIVERSAS

O modelo de Gurson tem sido modificado por vários pesquisadores, especialmente quanto a seus parâmetros. Várias possibilidades quanto à adoção dos parâmetros da superfície de escoamento  $\alpha_i$ , parâmetros de nucleação e de coalescência têm sido adotadas, como se viu na seção anterior. Existem propostas no sentido de tornar tais parâmetros dependentes da porosidade, pressão, forma dos vazios etc... Também existem propostas no sentido de se

empregar endurecimento cinemático (Lee e Zhang, 1994; Besson e Guillemer-Neel, 2003; Cedergren *et al.*, 2004). Ragab (2004c) alega que o emprego de endurecimento cinemático fornece deformações de ruptura mais corretas que o emprego de endurecimento isótropo. O próprio acoplamento termo-mecânico não deixa de ser uma evolução do modelo, já que introduz a possibilidade de considerar parâmetros termo-dependentes.

Thomason (1985a, 1985b) propôs um modelo que incorpora as equações de Rice e Tracey (1968), capazes de modelar além do crescimento do vazio, sua mudança de forma. O fato de os vazios nem sempre serem esféricos levaria a uma alteração de forma na superfície de escoamento. A existência dos parâmetros  $\alpha_i$  no modelo de Gurson é criticada (Thomason, 1985b), pois a introdução de tais parâmetros viria apenas contornar a inadequação do modelo em descrever o comportamento dos vazios. As discrepâncias de resultados que levaram Tvergaard (1981) a propor o emprego dos parâmetros  $\alpha_i$  seriam fruto da não consideração da mudança de forma dos vazios, e que os parâmetros  $\alpha_i$  apenas introduzem um fator de escala sobre a superfície, não alterando sua forma, sendo portanto inadequados. Klöcker e Tvergaard (2003) apresentam uma modificação no modelo de Gurson para considerar a mudança de forma do vazio, bem como o início da coalescência por localização de deformação no ligamento entre vazios.

Zhang e Niemi (1995b) apresentam um critério que introduz o mecanismo de coalescência de forma natural, sem a necessidade da determinação experimental de um valor crítico a partir do qual se inicie a coalescência. Tal proposta admite que o vazio mantém a forma (esférica) durante o crescimento, sendo que a presença ou não de coalescência é governada pela triaxilidade.

Mahnken (1999) sugere o emprego de uma forma linearizada da superfície de Gurson ao invés da forma quadrática original. Tal simplificação melhoraria a convergência dos algoritmos de integração de tensões. Procedimento semelhante é mencionado por Stainier (1996).

Ragab (1999) propõe uma adaptação do modelo de Gurson para simular problemas em estado plano de tensão.

Goya *et al.* (1992) trabalham com dois arranjos de vazios, um cúbico e outro hexagonal, alegando que este último representa um material isótropo enquanto que o primeiro

representa um material ortotrópico. A influência da forma do vazio considerado não alteraria substancialmente a forma da superfície de escoamento. Trabalhando com uma função genérica, que contém a superfície de Gurson no caso de  $q_1 = q_2 = n = 1,0$ ,

$$\omega\{p, \sigma_y, f\} = \left[ 1 - 2q_1 f^n \cosh\left(\frac{n(3p)}{2\sigma_y}\right) + q_2 f^{2n} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (32)$$

e analisando um furo embebido em material rígido plástico, encontram como valores adequados aos parâmetros da equação 32  $q_1 = 1,91$ ,  $q_2 = 0$  e  $n = 1,0$  para carregamento do tipo pressão hidrostática; para carregamento do tipo tensão desviadora, os parâmetros a serem empregados seriam  $q_1 = 1,21$ ,  $q_2 = q_1^2$  e  $n = 2/3$ , valores obtidos considerando o arranjo cúbico de vazios. Considerando o arranjo hexagonal, e combinando carregamento de pressão e tensão desviadora, sugerem  $q_1 = 1,283$  e  $q_2 = \left[ 1 - \left( \frac{1 - \Omega}{\sqrt{1 - q_1 f}} \right) \right] \Omega^{-1}$ , com  $\Omega = 1,21 f^{2/3}$  para o arranjo cúbico e  $\Omega = 1,07 f^{2/3}$  para o arranjo hexagonal. Um resumo da proposta de Goya *et al.* encontra-se no quadro 2.

Quadro 2: parâmetros propostos por Goya *et al.* (1992)

Parâmetros	Arranjo cúbico	Arranjo hexagonal
$\Omega$	$1,21 f^{2/3}$	$1,07 f^{2/3}$
$q_1$	1,91	1,283
$q_2$ (se $f = 0,0650$ )	0,719	0,788
$q_2$ (se $f = 0,0082$ )	0,847	0,883

Segundo Goya *et al.* (1992), o modelo proposto se revela mais adequado que o de Gurson para prever a superfície de escoamento quando se considera o arranjo hexagonal de vazios. No trabalho de Goya *et al.* (1992), encontra-se uma proposta da extensão do modelo a situações anisotrópicas, o que é feito através do emprego de tensores. Goya *et al.* (1992) relatam ainda proposta de Richmond e Smelser, no sentido do emprego de uma superfície de

escoamento com parâmetros  $q_1 = q_2 = 1,0$  e  $n = 2/3$ .

Voyiadjis e Kattan (1992) apresentam uma formulação que introduz o dano através de uma matriz. Aplicam tal formulação para simular o modelo de Gurson, chegando a parâmetros de superfície de escoamento dependentes da porosidade.

$$\alpha_1 = \frac{4}{3f} \qquad \alpha_3 = \frac{8}{3f^2} \qquad (33)$$

Lee e Mear (1993) relatam falhas no emprego da superfície de escoamento de Gurson quando a curva tensão-deformação do material apresenta endurecimento. Foi empregado no estudo um material descrito por uma curva tensão-deformação do tipo

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \qquad (34)$$

onde  $\sigma$  é a tensão,  $\varepsilon$  a deformação e  $\sigma_0$  e  $\varepsilon_0$  valores de referência, sendo o endurecimento governado pelo valor de  $n$ . Foram obtidos resultados indicando que o erro nas previsões diminui à medida que  $n$  cresce, ficando tais resultados menos sensíveis à triaxilidade. Isso indica que quanto mais o material se aproximar de um material sem endurecimento ( $n$  elevado), menos erros são verificados, pois a superfície de Gurson foi obtida considerando um material rígido plástico. Outra causa das alegadas falhas da superfície de escoamento de Gurson seria uma possível inadequação para emprego com carregamentos genéricos, uma vez que a superfície de Gurson foi deduzida admitindo como carregamento apenas pressão.

Para minorar tais erros, Lee e Mear (1993) apresentam parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  função da triaxilidade e da curva tensão-deformação plástica (endurecimento) do material. Como a proposta é feita para baixas frações volumétricas de vazios,  $\alpha_3$  seria irrelevante. Para triaxilidades entre 0 e 0,8, apresentam figuras mostrando os valores dos parâmetros. Para triaxilidade de 0,2, apresentam as expressões a seguir:



$$\alpha_1 = 1,62 - \frac{0,44}{n} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = 1,04 - \frac{0,38}{n} \quad (35)$$

Lee e Mear (1993) relatam ainda que a proposta de Tvergaard (1981), apesar de ter sido deduzida para um caso particular, fornece bons resultados e representa uma melhora significativa na proposta original de Gurson (1977), que emprega parâmetros  $\alpha_i$  unitários. Ristinmaa (1999) também indica que o parâmetro  $\alpha_2$  é função do endurecimento do material. Ragab (2004b) indica que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são função do tipo de endurecimento e também da forma do vazio, apresentando uma série de valores adequados para serem empregados na simulação de diversos materiais metálicos. Ristinmaa (1999) alega que a forma do vazio tem pouca influência nos resultados.

Wen *et al.* (2005) apresentam uma modificação no modelo de Gurson para levar em conta o tamanho do vazio. Mostram que a superfície de escoamento para materiais que contenham vazios muito pequenos pode ser mais dilatada que a prevista pelo modelo de Gurson. Tal efeito seria insignificante em curvas tensão-deformação obtidas através de testes de tração axial, se a porosidade for baixa, podendo se tornar significativo à medida que a porosidade aumenta.

Biner e Spitzig (1990) empregam o modelo de Gurson para estudar o fenômeno de compactação, quando se tem um material com porosidade e se busca reduzi-la por meio de compressão. Tal processo é conhecido como sinterização. Através de uma modificação na superfície de escoamento, introduzindo o efeito da pressão no interior dos vazios, o modelo modificado reproduziu muito bem resultados experimentais. Como parâmetros da superfície de escoamento foram empregados  $\alpha_1 = 1,25$ ,  $\alpha_2 = 0,95$  e  $\alpha_3 = \alpha_1^2$ . Wang (1991) também emprega o modelo de Gurson no estudo de processos de sinterização. Empregou um coeficiente  $\alpha_2 = e^{\alpha f}$ , dependente da fração volumétrica de vazios e de uma constante a ser ajustada.

Fleck *et al.* (1992) empregam o modelo de Gurson no estudo de um caso de indentação. Mostram que para  $f < 0,15$ , o modelo de Gurson aplicado a tal situação apresentou bons resultados quando comparado a resultados experimentais.

O modelo de Gurson também tem sido empregado em conjunto com procedimentos da

Mecânica da Fratura. A possibilidade da união entre trincas e furos, considerando o material de ligação modelado através do emprego do modelo de Gurson, tem sido estudada por Aravas e McMeeking (1985) empregando integral  $J$  e  $COD$ , e por Kikuchi *et al.* (1991), Needleman e Tvergaard (1994), Koppenhoefer e Dodds Jr. (1998) empregando integral  $J$  e também por Skallerud e Zhang (2001).

Um tema que tem recebido grande atenção nos últimos anos é a influência da densidade da malha de elementos finitos empregada quando o material apresenta amolecimento. Se não forem tomados cuidados adicionais, a resposta fica fortemente dependente da densidade de malha empregada. Como o dano introduz um forte amolecimento, tal problema se manifesta quando do emprego do modelo de Gurson (Tvergaard, 1982c; Needleman e Tvergaard, 1994). Para eliminar ou diminuir tal efeito alguns procedimentos têm sido adotados: emprego de viscoplasticidade ou modelos não-locais (plasticidade com gradientes). Todos esses procedimentos acabam por introduzir um comprimento característico, dependente do problema físico e não da malha.

No caso dos modelos não-locais, admite-se que uma determinada variável interna depende de grandezas no ponto onde está sendo calculada, e também de grandezas na vizinhança deste ponto. Seguindo essa linha aplicada ao modelo de Gurson, têm-se os trabalhos de Leblond, Perrin e Devaux (1994), Tvergaard e Needleman (1995), Reusch *et al.* (2003, 2003a).

O emprego de formulações envolvendo plasticidade com gradientes admite que a superfície de escoamento depende não somente das variáveis internas, mas também dos gradientes dessas variáveis, o que faz com que haja uma espécie de comportamento não-local. Nessa linha, aplicada ao modelo de Gurson, têm-se os trabalhos de Gologanu *et al.* (1995) e Ramaswamy e Aravas (1998a e 1998b).

A viscoplasticidade introduz naturalmente um comprimento característico no problema. No contexto do modelo de Gurson, empregam viscoplasticidade Tvergaard e Needleman (1995) e Stainier (1996).

## 2.5 RESUMO E CONCLUSÕES

Nas seções anteriores, apresenta-se o equacionamento do modelo de Gurson, abordando a superfície de escoamento e a evolução de vazios por nucleação, crescimento e coalescência.

Mostra-se que a perda de capacidade de carga do material (ruptura) é função não somente da fração volumétrica de vazios última  $f_U$ , mas também da pressão. Quanto maior a pressão, menor a fração volumétrica de vazios que leva à ruptura. Tal conclusão não aparece de forma clara na bibliografia consultada.

Mencionam-se possíveis diferenças no comportamento do modelo de nucleação, caso haja a possibilidade de variação no sinal da pressão ao longo da etapa de nucleação. Tal discussão será retomada de forma mais abrangente no capítulo 6.

Quanto aos parâmetros  $\alpha_i$  da superfície de escoamento, deste ponto em diante serão adotados os valores recomendados por Tvergaard (1981), a menos que se faça ressalva em contrário. Quanto aos parâmetros de porosidade inicial, nucleação e coalescência, será adotado procedimento semelhante, já que muitas das propostas mencionadas na seção 2.3 buscam contemplar situações particulares ou materiais específicos.

Na seção 2.2.1 apresenta-se um critério que relaciona os valores de deformação de nucleação  $\varepsilon_N$  e desvio-padrão  $s_N$  para que haja efetiva nucleação da fração volumétrica de vazios  $f_N$ . No contexto da bibliografia consultada, tal critério se revela inédito, sendo inclusive violado em alguns trabalhos referidos na seção 2.3.

### 3 A DETERMINAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO EQUILIBRADA

Quando são aplicadas solicitações sobre uma estrutura, esta se deforma passando de uma situação com geometria conhecida (configuração inicial) a uma outra configuração que necessita ser determinada (configuração deformada).

Uma configuração somente é admissível quando além de respeitar as condições de contorno impostas através de forças e/ou deslocamentos prescritos, está em equilíbrio. A verificação do equilíbrio é feita a partir do conhecimento das solicitações externas e das tensões internas.

Neste capítulo, estuda-se o problema da determinação da configuração deformada correta. A discretização espacial da estrutura é feita mediante o emprego do método dos elementos finitos.

Na seção 3.1, são apresentadas algumas relações básicas que governam o comportamento de um meio contínuo.

Na seção 3.2, mostra-se como o problema definido na seção 3.1 é solucionado numericamente através do emprego do método dos elementos finitos.

A seção 3.3 trata da determinação da configuração deformada correta, feita iterativamente caso a primeira aproximação obtida para a nova configuração não se encontre em equilíbrio. Aborda-se o método de Newton-Raphson, indicando situações em que seu emprego não é adequado. Comentam-se propostas alternativas encontradas na literatura para a obtenção da resposta nas situações em que o método de Newton-Raphson falha. O método de controle de incremento de trabalho (Chen e Blandford, 1993) é adotado como alternativa em tais situações.

Ao final, na seção 3.4, são apresentados alguns resultados obtidos com o algoritmo descrito na seção 3.3. Apresentam-se os resultados obtidos para um elemento finito, onde o amolecimento da estrutura é dado pela variação da seção transversal. Após, é abordado o problema de uma barra cilíndrica tracionada axialmente por forças.

### 3.1 EQUAÇÕES QUE GOVERNAM O CONTÍNUO

Neste trabalho serão tratados problemas no contexto da mecânica do contínuo. A massa do corpo estudado é distribuída de forma contínua no seu volume. Para facilitar a definição das equações que regem esse tipo problema, será empregada a notação indicial. Maiores esclarecimentos podem ser obtidos em Malvern (1969). Procurando simplificar o problema, abordam-se neste capítulo apenas as equações para processos isotérmicos. A primeira lei do movimento, ou equação da conservação da quantidade de movimento, pode ser escrita

$$\rho \ddot{x}_i = \sigma_{ij,j} + \rho b_i \quad (36)$$

onde  $\rho$  representa a densidade de massa,  $x_i$  as coordenadas,  $\sigma_{ij}$  o tensor de tensões de Cauchy e  $b_i$  as forças volumétricas específicas. O ponto ( $\cdot$ ) sobre as variáveis indica derivação em relação ao tempo; a vírgula no subíndice, derivação espacial em relação à coordenada indicada após a vírgula.

A segunda lei do movimento, ou equação da conservação do momento da quantidade de movimento, pode ser escrita

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (37)$$

A equação da continuidade, ou lei da conservação de massa, é expressa como a seguir, onde  $v_i$  é a velocidade do ponto considerado.

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (38)$$

$$v_i = \dot{u}_i \quad (39)$$

Para meios incompressíveis,  $\dot{\rho} = 0$  e a equação 38 torna-se

$$v_{i,i} = 0 \quad (40)$$

As leis acima (equações 36, 37 e 38) devem ser respeitadas no volume  $V$  do corpo. Na superfície, tem-se condições de contorno em deslocamentos, tensões e de contato (figura 39) que também devem ser respeitadas. As condições de contorno em tensões, na superfície  $\Gamma_F$  da figura 39, podem ser escritas

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \quad (41)$$

onde  $n_j$  é o vetor normal à superfície e  $t_i$  o vetor tensão (forças por unidade de superfície). A equação 41 também é conhecida como lei de Cauchy. As condições de contorno em deslocamentos, na superfície  $\Gamma_D$  da figura 39, são traduzidas por

$$u_i = \bar{u}_i \quad (42)$$

onde  $u_i$  são os deslocamentos do meio e  $\bar{u}_i$  os deslocamentos prescritos. Na superfície  $\Gamma_C$  (figura 39) candidata ao contato, deve-se garantir que não há interpenetração entre os corpos, podendo ou não haver deslizamento relativo entre regiões em contato. A possibilidade de deslizamento entre regiões adjacentes em contato implica no surgimento de forças tangenciais, calculadas segundo uma lei constitutiva de atrito (Bittencourt, 1994).

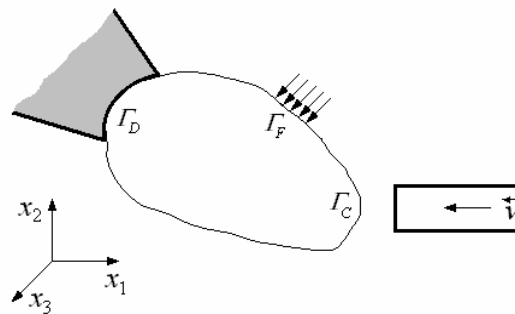


Figura 39: condições de contorno em deslocamentos, tensões e de contato

O conjunto de equações anterior (equações 36, 37, 38, 41 e 42) não forma um problema fechado. Para que seja possível resolvê-lo, é necessária a consideração da relação entre as tensões  $\sigma_{ij}$  e os deslocamentos  $u_i$ , ou seja, a consideração de uma lei constitutiva – neste caso material hipoplástico com superfície de escoamento de Gurson.

O conjunto de equações estabelecido antes (equações 36, 37, 38, 41 e 42), acrescido da lei constitutiva do material, forma a chamada “formulação forte”, ou exata, de um problema da mecânica do contínuo. Tais equações devem ser verificadas em todos os pontos do contínuo. Sua solução é difícil e limitada a carregamentos e geometrias muito simples. Como alternativa é possível a adoção de formas variacionais, permitindo uma solução aproximada do problema. Adota-se aqui o método dos elementos finitos.

### 3.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA

Antes de estudar com maiores detalhes a solução numérica do problema, cabe uma consideração bastante geral. Em plasticidade, o estado de tensões e deformações não depende apenas do deslocamento medido com relação à posição inicial, como ocorre em elasticidade. As tensões e deformações dependem do caminho percorrido para atingir o estado de deslocamentos em questão. Assim, não faz sentido buscar a determinação do estado de tensões e deformações para uma determinada solicitação, sem determinar todo o caminho até chegar a essa solicitação. Isso leva ao emprego de um procedimento incremental, onde se avança incrementando a solicitação passo a passo até atingir o nível desejado (Zienkiewicz e Taylor, 1989). O avanço ao longo da história de tensões e deformações é indicado por uma variável, o tempo  $t$ .

A determinação da história de tensões e deformações é feita referenciando-se as novas quantidades obtidas a configurações conhecidas. Conforme se empregue uma ou outra configuração como referência surgem as chamadas formulações ou descrições. Existem vários tipos de formulação, entre elas:

- a) formulação Euleriana: estuda a passagem da matéria através de uma região particular do espaço, tomada como referência. Assim, o sistema de referência é

fixo e denominado sistema de referência espacial (SRE). Estudam-se as propriedades da partícula que está passando em uma posição do espaço em um dado instante. Tem grande aplicação na mecânica dos fluidos, pois apresenta como característica o fato de os elementos finitos manterem sua forma inicial, não havendo problemas relativos à distorção da malha. Assim, o meio pode experimentar enormes deformações sem qualquer problema do ponto de vista de malha de elementos finitos. Para emprego em mecânica dos sólidos, a formulação euleriana tem como grande inconveniente a dificuldade na introdução das condições de contorno;

- b) formulação Lagrangiana: estuda o deslocamento espacial de uma certa quantidade de matéria que forma um corpo. O sistema de referência é fixo ao corpo em estudo, e denominado sistema de referência material (SRM). Estuda-se o deslocamento de uma determinada partícula. Normalmente os problemas de mecânica dos sólidos são tratados através do emprego de uma formulação Lagrangiana. Como os elementos finitos da discretização acompanham a deformação do corpo, em zonas de grandes deformações pode haver problemas do ponto de vista de distorção da malha de elementos finitos empregada.

Conforme se empregue como referência uma ou outra configuração, surgem divisões dentro da formulação Lagrangiana. Existe a chamada formulação Lagrangiana Total, onde se emprega como referência a configuração geométrica inicial do corpo em estudo, no instante  $t_0$ , normalmente livre de solicitações e portanto livre também de tensões e deformações. É bastante empregada quando se admite uma lei constitutiva hiperelástica, com tensões obtidas a partir da derivação de uma função conhecida em relação às deformações. Outra possibilidade é o emprego da chamada formulação Lagrangiana Atualizada. Para o cálculo das grandezas do problema no instante  $t+\Delta t$ , considera-se como referência a última configuração equilibrada conhecida, no instante  $t$ . Bastante empregada quando se trabalha com leis constitutivas hipoeelásticas, que relacionam taxas de tensão a taxas de deformação.

Estuda-se nesta seção a determinação numérica da configuração equilibrada de um corpo em um instante de tempo  $t+\Delta t$ , correspondente a um nível de solicitação conhecido, a



partir das grandezas conhecidas no instante de tempo  $t$ , correspondente a um nível de solicitação diverso. Emprega-se, portanto, uma formulação Lagrangiana Atualizada (Bathe, 1996). A configuração em um instante de tempo  $t$ , onde todas as incógnitas do problema são conhecidas, será denominada configuração de referência. A configuração que se busca determinar será chamada configuração atualizada, associada ao instante  $t+\Delta t$ . As coordenadas ao final do incremento são atualizadas, sendo acrescidos os deslocamentos do incremento. A configuração atualizada de um incremento serve como configuração de referência do incremento seguinte.

Como não se conhece a geometria da configuração atualizada, esta será arbitrada através da imposição de um campo de deslocamentos cinematicamente admissível, ou seja, contínuo, com derivadas contínuas e que não viola as condições de contorno em deslocamentos. Tal procedimento possibilitará o início do processo de solução do problema.

Tomando-se a equação 36, multiplicando por um campo de deslocamentos cinematicamente admissível  $\delta u_i$ , e integrando sobre o volume  $V$  do corpo em questão se obtém

$$\int_V \rho \ddot{x}_i \delta u_i dV = \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV + \int_V \rho b_i \delta u_i dV \quad (43)$$

Considerando que

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV = \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV \quad (44)$$

chega-se a

$$\int_V \rho \ddot{x}_i \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV + \int_V \rho b_i \delta u_i dV \quad (45)$$

Empregando o teorema de Gauss (Dym e Shames, 1973) e a lei de Cauchy (equação 41) chega-se a

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV = \int_S (\sigma_{ij} n_j) \delta u_i dS = \int_S t_i \delta u_i dS \quad (46)$$

sendo  $S$  a superfície externa do volume  $V$ . Relacionando as equações 45 e 46 se obtém

$$\int_V \rho \ddot{x}_i \delta u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_V \rho b_i \delta u_i dV + \int_S t_i \delta u_i dS \quad (47)$$

com

$$u_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (48)$$

Para problemas *quasi*-estáticos, desprezando o efeito da inércia e rearranjando a equação 47, resulta

$$\int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_V \rho b_i \delta u_i dV + \int_S t_i \delta u_i dS \quad (49)$$

As equações 47 ou 49, conforme seja ou não considerado o efeito da inércia, representam a forma integral ou “forma fraca” do problema da mecânica do contínuo. Elas garantem o equilíbrio no volume  $V$  do corpo, sem no entanto garanti-lo em todos os pontos deste.

### 3.2.1 Solução da forma fraca das equações de equilíbrio via elementos finitos

Para resolver as equações 47 e 49 será empregado o método dos elementos finitos (Bathe, 1996; Zienkiewicz e Taylor, 1989). O domínio real é subdividido em subdomínios, os elementos finitos. No interior dos elementos finitos as grandezas podem ser calculadas a partir do conhecimento de seus valores em pontos pré-determinados do elemento finito, os nós, através das funções de interpolação.

Serão empregados elementos finitos lineares do tipo isoparamétrico, nos quais as mesmas funções que descrevem a geometria servem como funções de interpolação. Assim, para um elemento com  $N$  nós, têm-se que

$$u_i = \sum_{S=1}^N \phi^S \{\xi, \eta, \zeta\} U_i^S \quad (50)$$

$$\delta u_i = \sum_{S=1}^N \phi^S \{\xi, \eta, \zeta\} \delta U_i^S \quad (51)$$

$$x_i = \sum_{S=1}^N \phi^S \{\xi, \eta, \zeta\} X_i^S \quad (52)$$

sendo  $U^S$  e  $X^S$  os deslocamentos e coordenadas nodais associados  $S$ -ésimo nó do elemento.  $\phi^S$  são as funções de interpolação ou de forma, e  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  são as coordenadas reduzidas ou paramétricas, variando de  $-1$  a  $1$  no domínio do elemento.

Para o caso tridimensional (hexaedro de 8 nós) as funções de forma  $\phi^S$  são dadas por

$$\phi^S = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi^S) (1 + \eta \eta^S) (1 + \zeta \zeta^S) \quad (53)$$

com  $\xi^S$ ,  $\eta^S$  e  $\zeta^S$  assumindo os valores  $-1$  ou  $+1$  conforme a posição do nó no elemento, e  $S$  variando de 1 a 8. Para o caso bidimensional (quadrilátero de 4 nós) as funções de forma  $\phi^S$  são dadas por

$$\phi^S = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi^S) (1 + \eta \eta^S) \quad (54)$$

com  $\xi^S$  e  $\eta^S$  assumindo os valores  $-1$  ou  $+1$  conforme a posição do nó no elemento (figura 40), e  $S$  variando de 1 a 4.

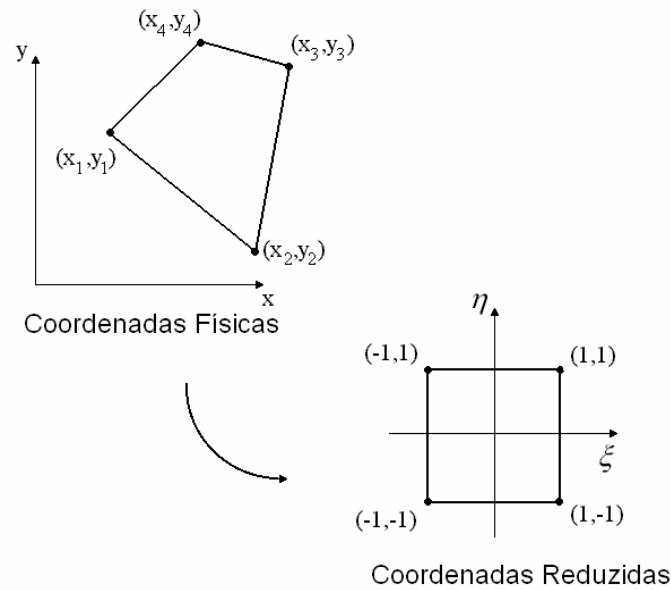


Figura 40: sistemas de coordenadas físicas e reduzidas (caso bidimensional)

É possível aplicar a equação 49 para um único elemento finito. Levando em conta a equação 51 obtém-se

$$\int_V \sigma_{ij} \phi_{,j}^S \delta U_i^S dV^{elem} = \int_V \rho b_i \phi^S \delta U_i^S dV^{elem} + \int_S t_i \phi^S \delta U_i^S dS^{elem} \quad (55)$$

Considerando que a equação 55 deve se verificar para um incremento de deslocamentos arbitrário, e que a integral das forças de superfície só resultará diferente de zero na superfície  $\Gamma_F$ , onde existem forças externas aplicadas, a equação 55 transforma-se em

$$\int_V \sigma_{ij} \phi_{,j}^S dV^{elem} = \int_V \rho b_i \phi^S dV^{elem} + \int_{\Gamma_F} t_i \phi^S d\Gamma_F^{elem} \quad (56)$$

onde  $d\Gamma_F^{elem}$  representa a parcela da superfície  $\Gamma_F$  onde existem forças externas prescritas que pertence ao elemento.

Os termos à direita da igualdade representam o efeito das forças externas. O termo à esquerda representa o efeito das tensões internas. Empregando a montagem clássica de elementos finitos, considerando a contribuição de cada elemento que se conecta a um nó  $S$

chega-se a um conjunto de  $i$  equações para esse nó. Quando são considerados apenas graus de liberdade translacionais, têm-se  $i = 2$  para casos bidimensionais e  $i = 3$  para casos tridimensionais. A equação de equilíbrio do nó  $S$  fica

$$F_i^{int,S} = F_i^{ext,S} \quad (57)$$

com

$$F_i^{int,S} = \int_V \sigma_{ij} \phi_{,j}^S dV^{elem} \quad (58)$$

e

$$F_i^{ext,S} = \int_V \rho b_i \phi^S dV^{elem} + \int_{\Gamma_F} t_i \phi^S d\Gamma_F^{elem} \quad (59)$$

A equação 57 substitui as equações 36 e 41. Se a configuração atualizada empregada no cálculo da equação 57 não está em equilíbrio, verifica-se a presença de um resíduo, dado pela diferença entre as forças externas (equação 59) e internas (equação 58).

$$R_i^S = F_i^{ext,S} - F_i^{int,S} \quad (60)$$

É possível obter para a estrutura uma equação análoga à equação nodal (equação 60), esta última limitada ao nó  $S$ . Emprega-se um processo de montagem para obter vetores de forças externas  $F_m^{ext}$  e internas  $F_m^{int}$  associadas à estrutura, considerando a contribuição de cada nó. Calcula-se o resíduo  $R_m$  para a estrutura através de

$$R_m = F_m^{ext} - F_m^{int} \quad (61)$$

com o subíndice  $m$  está associado a cada grau de liberdade da malha de elementos finitos.

Para obter uma configuração equilibrada após um incremento de solitação, procura-se minimizar o resíduo na estrutura, corrigindo as coordenadas até que haja equilíbrio. Normalmente tal correção é feita iterativamente. Desenvolve-se o resíduo em série de Taylor, retendo apenas o termo de primeira ordem

$$R_m^k + \left( \frac{\partial R_m}{\partial U_l} \right)^k \Delta U_l^k = 0 \quad (62)$$

$$U_m^{k+1} = U_m^k + \Delta U_m^k \quad (63)$$

onde o superíndice  $k$  está relacionado à  $k$ -ésima iteração.

Com o emprego da equação 62 é possível determinar a correção nos deslocamentos, aplicada através da equação 63, ficando assim determinada a correção na geometria. Com a nova geometria recalculam-se as forças internas e externas (equações 58 e 59), continuando com as iterações até que o resíduo se anule. No caso do METAFOR, emprega-se como critério de convergência a norma euclidiana do resíduo testada contra uma tolerância especificada.

O termo entre parênteses na equação 62 é a chamada matriz tangente, ou operador tangente. Sua obtenção depende da lei constitutiva empregada e do processo empregado para integrá-la. Sua obtenção nem sempre é imediata (Zhang, 1995b; Govindarajan e Aravas, 1995; Stainier, 1996). Bittencourt (1994) emprega uma matriz tangente obtida numericamente por perturbação de nós.

Observe-se que quando é desprezado o efeito da inércia, a equação que traduz o equilíbrio em um elemento finito (equação 56) resulta independente do tempo, servindo este apenas como uma referência associada ao nível de carga, perdendo seu sentido físico. O mesmo acontece com a equação correspondente à estrutura.

Caso não se considere o efeito da inércia, o que equivale a empregar como ponto de

partida para a aplicação do método dos elementos finitos não a equação 49 mas a equação 47, para um elemento finito obtém-se

$$\int_V \rho \phi^R \ddot{X}_i \phi^S dV^{elem} + \int_V \sigma_{ij} \phi_{,j}^S dV^{elem} = \int_V \rho b_i \phi^S dV^{elem} + \int_{\Gamma_F} t_i \phi^S d\Gamma_F^{elem} \quad (64)$$

Montando as equações associadas a cada grau de liberdade chega-se a um sistema de equações para a estrutura

$$M_{ml} \ddot{X}_l = R_m \quad (65)$$

com a matriz de massa  $M_{ml}$  obtida adicionando-se a contribuição de cada elemento que se conecta a determinado nó e montando a contribuição de cada nó à matriz de massa da estrutura. A contribuição elementar à matriz de massa vale

$$M_{ij} = \int_V \phi^R \rho \phi^S dV^{elem} \quad (66)$$

e é denominada matriz de massa consistente do elemento. Quando os efeitos de inércia são considerados, a equação 65 fornece as acelerações associadas aos graus de liberdade. Para determinar deslocamentos é necessário o emprego de um processo de integração temporal. É possível empregar algoritmos de integração explícitos ou implícitos. Neste trabalho será empregado o método explícito das diferenças centrais, resumido a seguir.

Define-se a velocidade em um ponto médio entre os instantes  $t^n$  e  $t^{n+1}$  como

$$\dot{X}_m^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t^{n+1}} (X_m^{n+1} - X_m^n) \quad (67)$$

ficando a aceleração no instante  $t^n$  dada por

$$\ddot{X}_m^n = \frac{1}{\Delta t^{n+1}} (\dot{X}_m^{n+1/2} - \dot{X}_m^{n-1/2}) \quad (68)$$

onde se considerou  $\Delta t^n \cong \Delta t^{n+1}$ . As acelerações no instante  $t^n$  são calculadas a partir da equação 65,

$$\ddot{X}_m^n = M_{ml}^{-1} R_l^n \quad (69)$$

e substituídas na equação 68. Como  $\dot{X}_m^{n-1/2}$  é conhecido do passo anterior, através da equação 68 se obtém  $\dot{X}_m^{n+1/2}$ , o que leva às coordenadas atualizadas  $X_m^{n+1}$  através da equação 67. Assim,

$$\dot{X}_m^{n+1/2} = \left( \frac{X_m^{n+1} - X_m^n}{\Delta t^n} \right) + \ddot{X}_m^n \Delta t^{n+1} \quad (70)$$

$$X_m^{n+1} = X_m^n + \dot{X}_m^{n+1/2} \Delta t^{n+1} \quad (71)$$

onde o superíndice  $n$  refere-se ao instante de tempo, e os subíndices  $l$  e  $m$  variam de 1 até o total de graus de liberdade da malha de elementos finitos. Em conjunto com o processo de integração explícito é usual o emprego de uma matriz massa diagonalizada, ou seja, com termos não-nulos somente na diagonal. Quando se emprega uma matriz de massa diagonalizada, o sistema de equações representado pela equação 69 fica desacoplado, facilitando muito o processo de cálculo. Ao invés de resolver um sistema de  $m$  equações com  $m$  incógnitas para determinar as acelerações, são resolvidas  $m$  equações independentes. Emprega-se como processo de diagonalização da matriz de massa o processo de soma de linhas (Hinton *et al.*, 1976).

O método das diferenças centrais é condicionalmente estável, sendo que sua estabilidade depende principalmente do tamanho do incremento de tempo  $\Delta t$  empregado na



integração. Para que se tenha estabilidade, deve-se empregar na integração um incremento de tempo menor que o tempo necessário para uma onda de pressão percorrer a distância entre os dois nós mais próximos da malha de elementos finitos (Flanagan e Belytschko, 1984). Assim, o tamanho do incremento de tempo empregado é dado por

$$\Delta t \leq \Delta t^{crit} \quad (72)$$

$$\Delta t^{crit} = \gamma L^{min} \sqrt{\frac{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}} \quad (73)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\nu$  o coeficiente de Poisson,  $\rho$  a densidade volumétrica de massa,  $L^{min}$  a menor distância entre dois nós na discretização empregada e  $\gamma$  um coeficiente de segurança, normalmente adotado entre 0,6 e 0,9.

### 3.2.2 Ordem da integração a ser empregada

Em elementos finitos isoparamétricos, a integração das grandezas sobre o volume de cada elemento é feita numericamente. Para quadriláteros isoparamétricos lineares bidimensionais, para que a integração seja feita de maneira exata é necessário que se utilize 4 pontos de Gauss.

Em elasticidade, essa regra funciona bem. Porém, em plasticidade clássica (von Mises), onde o critério de escoamento é independente da pressão, a deformação plástica se dá sem mudança de volume. Nesses casos, quando se empregam 4 pontos de Gauss pode ocorrer o chamado fenômeno de *locking*, ou trancamento da malha (Ponthot, 1995).

Quando há porosidade, a deformação plástica não se dá de forma isocórica (a volume constante), mas com uma mudança de volume pequena, para deformações plásticas usuais. Ainda assim, é necessário que seja tomada precaução com relação ao surgimento de *locking*. Um estudo bastante completo sobre o fenômeno, suas causas, formas de quantificá-lo e de

evitá-lo pode ser encontrado em Ponthot (1990).

Dentre as diversas possibilidades de evitar o *locking*, uma das mais empregadas é a chamada subintegração. Ela consiste em integrar as grandezas no elemento finito com menos pontos de integração que os necessários a uma integração exata. Tal procedimento foi proposto por Zienkiewicz *et al.* (1971), sendo discutido de forma ampla em Malkus e Hughes (1978).

A subintegração pode ser parcial ou total. No caso da subintegração parcial (integração reduzida seletiva), para o elemento isoparamétrico linear de 4 nós (bidimensional) calculam-se as tensões desviadoras com o emprego de 4 pontos de Gauss e a pressão com 1 ponto de Gauss. Para o cálculo da pressão, considera-se deformação volumétrica constante no elemento. Os elementos assim calculados são chamados Q4-VRI (*volumetric reduced integration*). Em elementos tridimensionais de 8 nós, emprega-se como regra de integração 1 ponto de Gauss na parte volumétrica e 8 pontos de Gauss na parte desviadora.

No caso do modelo de dano de Gurson, há o acoplamento entre a superfície de escoamento e a pressão. As tensões desviadoras, a pressão, a deformação plástica e a fração volumétrica de vazios são ajustadas em conjunto. No caso do emprego do modelo de Gurson com elementos Q4-VRI, o que se faz é o cálculo da previsão do incremento de pressão em cada ponto de Gauss a partir de uma variação de volume constante no elemento. Se não houver plastificação, as pressões serão idênticas nos 4 pontos de Gauss e idênticas à calculada para um ponto central. Caso haja plastificação, a pressão nos pontos de Gauss que plastificarem será ajustada. Assim, apesar do predictor elástico de pressão idêntico para os 4 pontos, a pressão final pode resultar diferente, pois a correção plástica leva em conta o efeito das tensões desviadoras e demais variáveis internas.

Outra maneira de aplicar a subintegração é através do emprego de um único ponto de Gauss para calcular tensões volumétricas e desviadoras, a chamada subintegração total. Aos elementos bidimensionais calculados dessa maneira se atribui a designação Q4-URI (*uniform reduced integration*). A vantagem desse método de cálculo é o menor tempo gasto no cálculo das tensões e demais incógnitas associadas aos pontos de Gauss, especialmente quando são considerados os efeitos da inércia empregando um algoritmo de integração no tempo do tipo explícito.

Por outro lado, pode-se ao tentar eliminar o *locking* através da subintegração total estar introduzindo um outro fenômeno indesejável - o chamado *hourglass*. O fenômeno de *hourglass* está associado a modos de deformação com energia nula (Alves, 1991) que se sobrepõem à solução física, levando a resultados completamente irreais.

A correção do *hourglass* é feita através da introdução de forças viscosas calculadas de forma a amortizar os modos de deformação parasitas sem contudo interferir na solução física do problema (Stainier e Ponthot, 1994).

### 3.3 A DETERMINAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO DEFORMADA

Quando se despreza o efeito das forças inerciais, a discretização espacial através do método dos elementos finitos conduz a um sistema de equações algébricas. Tomando-se a expansão em série de Taylor da equação 61, onde foi retido apenas o termo de primeira ordem, identifica-se um resíduo  $R_m$ , a matriz tangente  $K_{ml}$  e o vetor de deslocamentos nodais  $\Delta U_l$  correspondente.

$$R_m = K_{ml} \Delta U_l \quad (74)$$

com

$$K_{ml} = \frac{\partial R_m}{\partial U_l} \quad (75)$$

Para solicitações de valor elevado, a equação 74 apresenta uma forte não-linearidade, com a matriz tangente fortemente dependente dos deslocamentos, devido à plasticidade e grandes deformações. Na figura 41, apresenta-se uma curva carga *versus* deslocamento genérica para uma estrutura, mostrando forte não-linearidade e amolecimento.

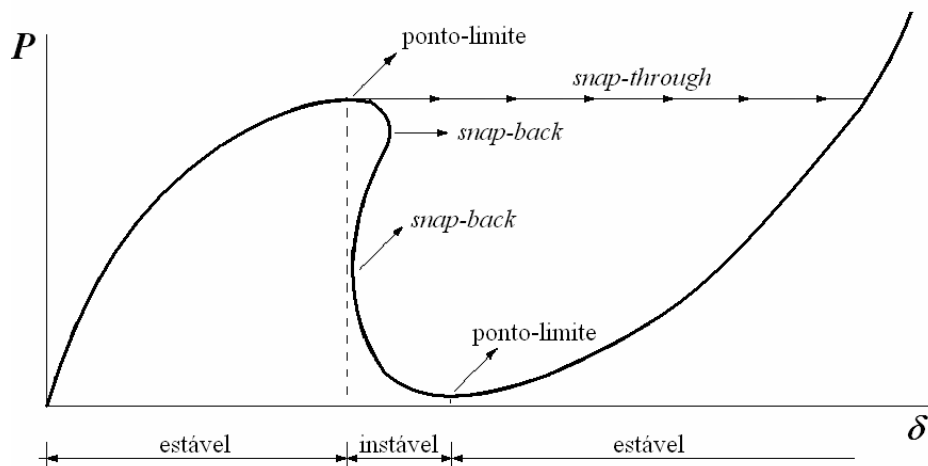


Figura 41: pontos-limite, *snap-back* e *snap-through*

Segundo Yang e Shieh (1990), os requisitos básicos que um método de solução deve satisfazer para apresentar um bom desempenho em aplicações estruturais são:

- a) tamanho do incremento de carga auto-ajustável, refletindo o endurecimento ou amolecimento da estrutura;
- b) capacidade de diminuir (ou mesmo reverter) o carregamento externo na ocorrência de pontos-limite, que são pontos onde a rigidez se anula;
- c) apresentar estabilidade em qualquer ponto de uma curva carga-deslocamento genérica (figura 41), mesmo na vizinhança de pontos-limite e *snap-back*.

O primeiro requisito pode ser introduzido com razoável facilidade em qualquer esquema iterativo de solução adotado. Em função do número de iterações necessárias para atingir o equilíbrio em um incremento, é possível ajustar o tamanho do incremento seguinte (Ponthot, 1995; Chen e Blandford, 1993).

O segundo requisito tem papel importante quando se analisam casos onde são aplicadas forças em uma estrutura que sofre diminuição de rigidez, havendo a possibilidade de que esta se anule. O terceiro requisito trata da estabilidade para qualquer valor de rigidez, positiva, nula, negativa ou infinita. Normalmente, para que se consiga atender ao segundo e terceiro requisitos é necessária a introdução de um parâmetro de carga e uma equação adicional de restrição, que governam o tamanho e o sentido do incremento de carga.

Existem vários métodos disponíveis para resolver o sistema de equações correspondente à forma fraca das equações de equilíbrio. Dentre os mais conhecidos destacam-se os métodos de Newton-Raphson (Zienkiewicz e Taylor, 1989), do comprimento do arco (Riks, 1979; Crisfield, 1981), do controle de deslocamentos (Zienkiewicz, 1971) e o método de controle de incremento de trabalho (Powell e Simons, 1981; Bathe e Dvorkin, 1983; Chen e Blandford, 1993). Tais métodos são revisados no trabalho de Yang e Shieh (1990), no sentido do atendimento ou não dos requisitos mencionados antes.

Segundo Yang e Shieh (1990), quando se aplica o método de Newton-Raphson com forças prescritas, caso a estrutura atinja um ponto-limite não haverá convergência. Caso se trabalhe com deslocamentos prescritos, a convergência não ocorre nos pontos de *snap-back*.

Os métodos de comprimento de arco e controle de incremento de trabalho empregam um parâmetro de carga e uma equação adicional. Permitem a obtenção de solução em pontos-limite e pontos de *snap-back*. Ainda segundo Yang e Shieh (1990), os métodos de comprimento de arco apresentam inconvenientes quando são considerados graus de liberdade rotacionais (simulação de pórticos, por exemplo), em função da diferença de magnitude entre os deslocamentos rotacionais e translacionais. Yang e Shieh (1990) propõem um método de controle de deslocamentos generalizado, capaz de contornar tais inconvenientes.

A seguir, descreve-se de forma rápida o método de Newton-Raphson, pelo seu amplo uso. Como método alternativo para o caso de estruturas solicitadas por forças e que possam apresentar amolecimento é adotado o método de controle de incremento de trabalho (Chen e Blandford, 1993). Tal escolha se baseia na capacidade do método em fornecer solução em presença de pontos-limite, e em função da facilidade de implementação, não levando a modificações substanciais no algoritmo do programa METAFOR. Também não é aumentado de forma excessiva o esforço computacional, sendo apenas necessário executar algumas operações vetoriais adicionais, sem aumentar o número de operações matriciais.

### 3.3.1 O método de Newton-Raphson

Dentre os diversos métodos iterativos disponíveis um dos mais usados é o método de Newton-Raphson (MNR). É um método que além da fácil implementação computacional

apresenta convergência quadrática, ou seja, o resíduo diminui rapidamente. A condição para que isso ocorra é que a solução inicial esteja dentro de uma “zona de atração” suficientemente próxima da solução correta, de forma que através de algumas iterações o resultado tenda à solução correta.

Partindo-se de uma configuração equilibrada para a qual se conhece a geometria e as solicitações, busca-se determinar a nova configuração equilibrada após um incremento de solicitação. Devido ao incremento de solicitação surge um resíduo, ou seja, forças desequilibradas. Essas forças desequilibradas serão minimizadas através de correção na geometria, empregando-se a matriz de rigidez tangente e calculando um incremento de deslocamentos através de

$$R_m^1 = K_{ml}^0 \Delta U_l^1 \quad (76)$$

$$U_m^1 = \Delta U_m^1 \quad (77)$$

Com a nova geometria, recalculam-se as forças internas e o resíduo. Caso o resíduo não tenha se anulado prossegue-se iterando até que este resulte suficientemente pequeno, segundo algum critério de convergência.

$$R_m^{k+1} + K_{ml}^k \Delta U_l^{k+1} = 0 \quad (78)$$

$$U_m^{k+1} = U_m^k + \Delta U_m^{k+1} \quad (79)$$

Assim, para um incremento de carga, os passos para a obtenção da configuração equilibrada empregando-se o método de Newton-Raphson são:

- a) determinar o incremento na solicitação, seja força ou deslocamento prescrito;

- b) determinar o estado de tensões para a geometria atual;
- c) determinar o resíduo. Se o incremento de solicitação foi aplicado através de forças, a força externa ficará maior que a força interna dando origem ao resíduo. Se o incremento foi aplicado por deslocamentos prescritos, as tensões internas maiores levarão a uma força interna maior que a externa, originando o resíduo;
- d) se o resíduo for pequeno comparado a uma tolerância, considera-se que existe equilíbrio. As coordenadas do passo anterior são atualizadas somando-se os deslocamentos calculados. Passar ao próximo incremento (a). Caso contrário,
- e) determinar a matriz de rigidez tangente  $K_{mi}$ ;
- f) determinar o incremento de deslocamentos para o resíduo calculado em (c); passar para o item (b).

A literatura apresenta alguns inconvenientes do método de Newton-Raphson aplicado à análise estrutural:

- a) a inversão da matriz tangente é uma operação onerosa, tanto mais quanto maior o número de graus de liberdade. Em função disto têm sido propostos os chamados métodos de Newton-Raphson modificados ou *quasi-Newton*, que propõem atualizações e inversões da matriz tangente menos frequentes. Pode-se atualizar a matriz de rigidez apenas na primeira ou segunda iteração de cada incremento de carga. Também pode ser mantida a matriz tangente inicial. É claro que a convergência diminui. Entretanto a necessidade de realizar um maior número de iterações pode ser compensada se as iterações forem mais rápidas;
- b) a matriz tangente nem sempre é simétrica, como ocorre em plasticidade não-associada, o que leva à necessidade do uso de métodos de solução para matrizes não-simétricas, normalmente mais lentos que os aplicáveis a matrizes simétricas;

c) no caso da estrutura experimentar uma diminuição de rigidez (amolecimento ou *softening*), quando o carregamento é introduzido através de forças, o método de Newton-Raphson não é capaz de fornecer uma resposta adequada, uma vez que a matriz tangente pode se tornar imprópria e os deslocamentos tenderem a infinito. Caso o carregamento seja introduzido por meio de deslocamentos prescritos, problema semelhante ocorre na vizinhança dos pontos de *snap-back*. Na verdade, para forças aplicadas, já na vizinhança de um ponto-limite o número de iterações necessárias para a obtenção da solução correta se torna muito grande. Em tal situação, normalmente o cálculo é interrompido em função de um número máximo de iterações normalmente especificado nos códigos de elementos finitos. É preciso então buscar um outro esquema de solução capaz de continuar com o cálculo em tais situações.

Vários métodos têm sido desenvolvidos para contornar esse inconveniente, como por exemplo o método de controle de deslocamentos generalizado (Yang e Shieh, 1990), o método do comprimento do arco (Riks, 1979) e o método de controle do incremento de trabalho (Powell e Simons, 1981). Quanto aos dois primeiros inconvenientes, em maior ou menor grau continuam presentes caso se adote métodos alternativos como os mencionados antes.

Também têm sido estudadas formas de tornar a aplicação do Método de Newton-Raphson mais eficiente. Mondkar e Powell (1978) fazem uma comparação entre o método de Newton-Raphson puro, com variantes empregando atualização de rigidez no início de cada incremento ou mesmo com rigidez mantida constante desde o primeiro incremento. Crisfield (1979) apresenta um algoritmo de Newton-Raphson modificado para apresentar uma convergência melhorada.

Geradin *et al.* (1981) fazem uma comparação entre diversos métodos ditos *quasi-Newton*, onde ao invés de se empregar a matriz tangente nas iterações, emprega-se uma outra matriz obtida por modificação da matriz tangente, mais fácil de ser obtida. Mostram que em alguns casos, o custo computacional diminui bastante empregando-se os métodos *quasi-Newton* ao invés do Newton-Raphson puro.

Esche *et al.* (1997) apresentam uma discussão sobre processos de *line-search* que



buscam aumentar a convergência do método de Newton-Raphson.

### 3.3.2 Métodos alternativos para solução de sistemas de equações não-lineares

Bergan *et al.* (1978) propõem um método para solução de sistemas de equações com operador tangente não-linear. Tal método trabalha com a força externa definida como um vetor de referência multiplicado por um parâmetro de carga, parâmetro que pode decrescer após atingir um ponto-limite. Trabalha também com o conceito de CSP ou *current stiffness parameter* para detectar a presença do ponto-limite e ajustar o tamanho do incremento conforme o grau de não-linearidade. Bergan (1980) fornece critérios para detectar pontos de bifurcação, e sugere como pode ser encaminhado o tratamento do problema quando o carregamento externo for não-proporcional.

Riks (1979) apresenta um método que emprega um parâmetro de carga relacionado ao comprimento de um arco da trajetória de equilíbrio. Assim, a carga pode diminuir após atingir um ponto-limite ou um ponto de bifurcação, que são detectados através do emprego de autovalores e autovetores. É introduzida uma equação adicional, a equação de restrição, tendo como variáveis deslocamentos e o parâmetro que governa a variação da carga. É o chamado método do comprimento do arco, que limita a variação nos deslocamentos em função de um incremento constante ao longo da trajetória de deformação. Mais tarde o método foi sistematizado por Crisfield (1981), que também introduziu *line-searches* com o objetivo de melhorar a convergência (Crisfield, 1983).

Runesson *et al.* (1986) apresentam uma comparação entre vários métodos de solução. Apresentam ainda uma equação de restrição para emprego em conjunto com o método de comprimento do arco em função de deslocamentos, deslocamentos prescritos e forças, podendo-se atribuir um peso maior no controle a um ou outro termo.

Bathe e Dvorkin (1983) apresentam um método mixto que combina equações de restrição do tipo comprimento de arco com equações de restrição do tipo controle de incremento de trabalho, conforme a proximidade de um ponto-limite seja maior ou menor.

Segundo Yang e Shieh (1990) e Chen e Blandford (1993), os métodos de controle de

arco podem apresentar problemas de convergência quando se têm deslocamentos de magnitudes muito diferentes, o que ocorre quando são considerados graus de liberdade rotacionais. Em tais situações, se a equação de restrição for definida em função da norma do vetor de deslocamentos, pode apresentar inconsistência de unidades se não forem tomados cuidados adicionais em sua definição.

Yang e Shieh (1990) apresentam como inconvenientes dos métodos de controle de incremento de trabalho e de comprimento de arco a determinação da correção iterativa na força externa, pois esta é obtida a partir de uma equação quadrática que tem duas raízes. A escolha incorreta da raiz poderia introduzir o retorno pelo caminho previamente percorrido sobre a trajetória de equilíbrio. Yang e Shieh (1990) apresentam um método aplicado a situações onde ocorrem múltiplos pontos-limite e *snap-back*. Desenvolvido para estruturas de barras, foi denominado método de controle de deslocamentos generalizado, e viria a suprir as deficiências dos métodos de controle de incremento de trabalho e de comprimento de arco.

Magnusson e Svensson (1998) apresentam um método de solução capaz de detectar com exatidão pontos-limite e pontos de bifurcação, através do emprego de autovalores. Os autovetores fornecem informação se o ponto atingido é um ponto-limite ou ponto de bifurcação. Segundo Magnusson e Svensson (1998), em caso de pontos de bifurcação, a partir do conhecimento do autovetor associado ao autovalor correspondente ao ponto de bifurcação é possível determinar o comportamento após a bifurcação. Um inconveniente do método é que, ao sistema com  $N \times N$  equações associado aos deslocamentos, é agregada uma equação de restrição e mais um sistema  $N \times N$  associado aos autovalores e autovetores, o que aumenta em muito o esforço computacional necessário à solução do problema.

### 3.3.3 O método de controle de incremento de trabalho

O método do controle de incremento de trabalho como apresentado por Chen e Blandford (1993) é um aprimoramento de outras formas (Powell e Simons, 1981; Bathe e Dvorkin, 1983) de aplicar o mesmo método. O método trabalha de forma incremental e iterativa, iterando sobre cargas e deslocamentos. Assim, para um incremento  $i + 1$ , a equação 61 em forma incremental fica

$$K_{i+1}^{k-1} \delta u^k = \lambda_{i+1}^k P - F_{i+1}^{\text{int},k-1} \quad (80)$$

onde  $K$  é a matriz tangente,  $u$  o vetor de deslocamentos,  $P$  um vetor de cargas de referência, mantido uniforme ao longo do processo e  $F^{\text{int}}$  o vetor de forças internas. Os subíndices  $i + 1$  estão associados ao incremento e os superíndices  $k$  e  $k - 1$  estão associados às iterações. Observe-se que a condição de  $P$  constante ao longo do processo corresponde a carga proporcional e conservativa.

Quando a matriz  $K$  deixa de ser positivo-definida, o que é detectado pelo surgimento de algum termo diagonal nulo ou negativo, têm-se um ponto-limite, o que corresponde ao início do amolecimento. O método a ser apresentado não se destina a tratar pontos de bifurcação.

O parâmetro de carga  $\lambda_{i+1}^k$  em uma iteração  $k$  de um passo  $i + 1$  é calculado por  $\lambda_{i+1}^k = \lambda_{i+1}^{k-1} + \delta\lambda_{i+1}^k$ . A maneira de calcular o valor de  $\lambda_{i+1}^k$ , através do cálculo de seu incremento  $\delta\lambda_{i+1}^k$ , dá origem a alguns dos métodos mencionados na seção anterior. Aplicando-se incrementos positivos  $\delta\lambda_{i+1}^1$  na primeira iteração de cada incremento e mantendo  $\lambda_{i+1}^k$  constante no incremento ( $\delta\lambda_{i+1}^k = 0$  para  $k > 1$ ), o método de Newton-Raphson é obtido. Quando  $\delta\lambda_{i+1}^k$  é vinculado à norma de um incremento de deslocamentos se obtém o método do comprimento do arco. Vinculando a escolha de  $\delta\lambda_{i+1}^k$  a um incremento de trabalho, se obtém o método de controle de incremento de trabalho.

Trabalha-se com um incremento de trabalho constante entre a configuração de referência e a configuração atualizada. A equação adicional de restrição introduzida quando se emprega o método de controle de incremento de trabalho é

$$\Delta\lambda_i^k P \Delta u_i^k = \pm dW_i \quad (81)$$

onde  $\Delta$  significa acumulação de um dado valor ao longo de todo o incremento. Desse modo,  $\Delta\lambda^k = \sum \delta\lambda^m$ ,  $m = 1, 2, \dots, k$ ;  $dW$  é um dado valor de incremento de trabalho previsto para ser acumulado no incremento. O incremento de trabalho pode ser positivo ou negativo, conforme

o incremento se situe antes ou após um ponto-limite, como se verá adiante. Observando a equação 81, nota-se que não há inconsistência quanto às unidades mesmo que se tenha graus de liberdade rotacionais, o que é uma boa característica, fornecendo generalidade ao método.

Na primeira iteração de cada incremento, a equação 81 leva a uma estimativa inicial para o parâmetro de carga da ordem de

$$\Delta\lambda^1 = \delta\lambda^1 = \pm \left( \frac{dW}{P \delta u^1} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (82)$$

Para as iterações seguintes, a correção no parâmetro de carga é obtida a partir de

$$(\Delta\lambda^{k-1} + \delta\lambda^k)P(\Delta u^{k-1} + \delta\lambda^k \delta u_t^k + \delta u_r^k) = \pm dW \quad (83)$$

onde os deslocamentos totais  $u$  do incremento foram separados em duas parcelas, uma parcela  $u_t$  correspondente à carga de referência  $P$  e uma parcela  $u_r$  correspondente ao resíduo  $R^k = \lambda^{k-1}P - F^{int,k-1}$ .

$$\delta u^k = \delta\lambda^k \delta u_t^k + \delta u_r^k \quad (84)$$

$$\delta u_t^k = (K^{k-1})^{-1} P \quad (85)$$

$$\delta u_r^k = (K^{k-1})^{-1} (\lambda^{k-1}P - F^{int,k-1}) = (K^{k-1})^{-1} R^k \quad (86)$$

onde o resíduo  $R^k$  é definido em função das forças externas  $\lambda^{k-1}P$  e das forças internas  $F^{int,k-1}$ .

A equação 83 pode ser reescrita

$$A(\delta\lambda^k)^2 + B(\delta\lambda^k) + C = 0 \quad (87)$$

onde

$$A = P\delta u_t^k \quad (88)$$

$$B = P(\Delta u^{k-1} + \delta u_r^k + \Delta\lambda^{k-1}\delta u_t^k) \quad (89)$$

$$C = \Delta\lambda^{k-1}P(\Delta u^{k-1} + \delta u_r^k) \pm dW \quad (90)$$

A partir da solução da equação 87 se obtém a correção no parâmetro de carga para a iteração. A equação 87 é uma equação quadrática, com duas raízes reais se  $(B^2 - 4AC) \geq 0$ . Se  $(B^2 - 4AC) < 0$ , não existe solução real que forneça o mesmo incremento de trabalho do passo anterior. Tal situação significa que foi encontrado um ponto-limite, devendo o incremento de trabalho ter seu sinal trocado, o coeficiente  $C$  (equação 90) recalculado, e assim dois valores reais serão obtidos como solução.

Obtidas as duas raízes reais, resta escolher qual delas deve ser empregada. A escolha é feita considerando que se deve evoluir ao longo da curva carga-deslocamento, sem que haja retorno pelo caminho já percorrido. Para tanto, generalizando os resultados relativos a uma situação unidimensional, os vetores que correspondem aos deslocamentos do incremento calculados para duas iterações consecutivas devem formar um ângulo agudo entre si. Essa condição é introduzida através do cálculo do cosseno entre os dois vetores de deslocamento para iterações sucessivas,

$$\cos\theta = \frac{\Delta u^k \bullet \Delta u^{k+1}}{\|\Delta u^k\| \|\Delta u^{k+1}\|} \quad (91)$$

para  $\Delta u^{k+1}$  calculado como abaixo, considerando uma e outra das duas raízes  $\delta\lambda^{k+1}$ .

$$\Delta u^{k+1} = \Delta u^k + \delta\lambda^{k+1} \delta u_t^{k+1} + \delta u_r^{k+1} \quad (92)$$

A equação 91 dará origem a dois valores de cosseno, correspondentes às duas raízes  $\delta\lambda^{k+1}$ . Opta-se pela raiz que fornecer o cosseno positivo. Caso ambos os cossenos sejam positivos, opta-se pela raiz mais próxima à solução linearizada  $\delta\lambda^{k+1} = -C/B$ .

A escolha do sinal do incremento de trabalho na primeira iteração de cada incremento é feita em função do resultado obtido na decomposição da matriz de rigidez. Se houver algum termo diagonal nulo ou negativo, adota-se um  $dW$  negativo, pois a estrutura está amolecendo. Em caso contrário  $dW$  será positivo.

Para tornar o tamanho do incremento auto-ajustável em função da variação do grau de não-linearidade do problema, Chen e Blandford (1993) recomendam um critério em função do número de iterações necessárias para que a convergência seja atingida.

$$dW_{i+1} = \alpha dW_i \quad (93)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{4}{I_i}} \quad (94)$$

onde  $I_i$  representa o número de iterações que se fizeram necessárias para atingir a convergência. O valor 4 é o número de iterações desejadas, podendo ser alterado. Assim, se a convergência estiver ocorrendo com menos de 4 iterações, o incremento de trabalho aplicado vai crescendo passo a passo. Caso contrário, decresce. A limitação do parâmetro  $\alpha$  ( $0,1 \leq \alpha \leq 1,5$ ) busca evitar uma diminuição excessiva no tamanho do incremento de trabalho ou uma amplificação excessiva que poderia ser prejudicial do ponto de vista da convergência.

O critério de convergência recomendado é também em função de trabalho,

$$\frac{\delta u^k (\lambda^k P - F^{int,k})}{\delta u^1 \delta \lambda^1 P} \leq \rho_e \quad (95)$$

onde  $\rho_e$  é uma tolerância que varia de  $10^{-6}$  a  $10^{-10}$ .

O roteiro de cálculo empregando o método de controle de incremento de trabalho fica, então:

- a) determinar o incremento na solicitação do incremento, através da equação 82;
- b) determinar o estado de tensões para a geometria atual;
- c) determinar o resíduo;
- c) se não for a primeira iteração e se o resíduo for pequeno comparado a uma tolerância, existe equilíbrio. As coordenadas do passo anterior são atualizadas somando-se os deslocamentos. Passar ao próximo incremento (a). Caso contrário,
- d) determinar a matriz de rigidez tangente  $K$ ;
- e) determinar os deslocamentos correspondentes ao resíduo e à carga de referência. Se for primeira iteração, passar para o item (b). Caso contrário,
- f) determinar a correção no parâmetro de carga e nos deslocamentos, através da equação 83. Passar para o item (b).

Observando-se o roteiro acima e comparando com o do método de Newton-Raphson, conforme se encontrava implementado, verifica-se que não há diferença substancial. Além disso, os inconvenientes mencionados por Yang e Shieh (1990) quanto à inconsistência dimensional da equação de restrição (equação 81) e dificuldades na escolha das raízes não se verificam. Ademais, a implementação do método de controle de incremento de trabalho, conforme apresentado, não aumenta o número de operações matriciais. Além de alguns produtos escalares adicionais, ao invés de determinar deslocamentos para um vetor de cargas (resíduo), determina-se deslocamentos para dois vetores de cargas (resíduo e cargas de

referência) simultaneamente, o que é feito com uma pequena mudança na rotina de solução. A formação e decomposição da matriz de rigidez, que são as operações mais demoradas, continuam sendo únicas. Assim, e em vista dos resultados obtidos que serão apresentados na seção seguinte, parece plenamente justificada a escolha do método de controle de incremento de trabalho como alternativa ao método de Newton-Raphson, no contexto deste trabalho.

### 3.4 APLICAÇÕES

Nesta seção apresenta-se o estudo de dois problemas empregando o algoritmo descrito antes.

#### 3.4.1 Monoelemento

Neste exemplo, procura-se resolver um caso bastante simples, onde um elemento em estado plano de deformações é tracionado por forças. A seção transversal se reduz devido à deformação do elemento, levando ao efeito de amolecimento ou diminuição da rigidez da estrutura. Quando a rigidez tende a um valor pequeno, o método de Newton-Raphson falha. Resolve-se o mesmo problema aplicando o método de controle de incremento de trabalho para obter a resposta após o ponto-limite.

O elemento analisado é do tipo Q4-VRI em estado plano de deformações, inicialmente quadrado com lado de 5 mm. Quando o carregamento é introduzido por deslocamentos prescritos, a vinculação é como indicada na figura 42. Quando o carregamento é introduzido por forças, estas substituem os dois vínculos verticais superiores, aplicadas verticalmente nesses graus de liberdade. As propriedades do material constituinte do elemento são:  $E = 200$  GPa,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 7500$  kg/m<sup>3</sup>,  $\sigma_y = \sigma_y^0(1 + k\varepsilon^p)$ ,  $\sigma_y^0 = 250$  MPa e  $k = 2500$  Mpa.



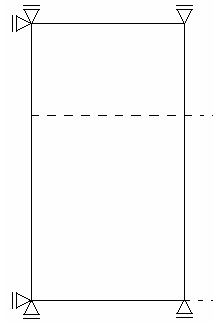


Figura 42: esquema do elemento e vínculos

Na figura 43, observa-se a evolução da força de tração obtida empregando o método de Newton-Raphson com carregamento aplicado por forças e por deslocamentos. Na figura 44, observa-se a força de tração obtida empregando o método de controle de incremento de trabalho. Nota-se que, quando o carregamento é introduzido através de deslocamentos prescritos, o método de Newton-Raphson funciona a contento. Quando o carregamento é introduzido por forças, o método de Newton-Raphson falha quando a rigidez tende a zero (figura 43). Na figura 44, observa-se que o método do controle de incremento de trabalho consegue fornecer a resposta após o ponto-limite ser ultrapassado.

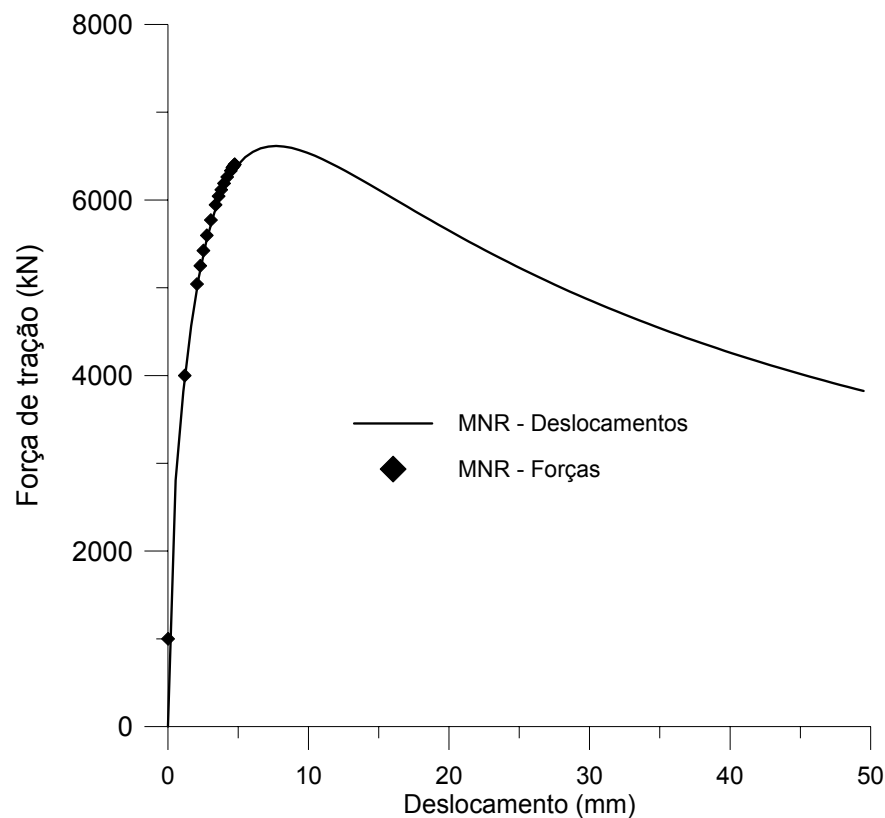


Figura 43: força de tração (MNR – deslocamentos e forças)

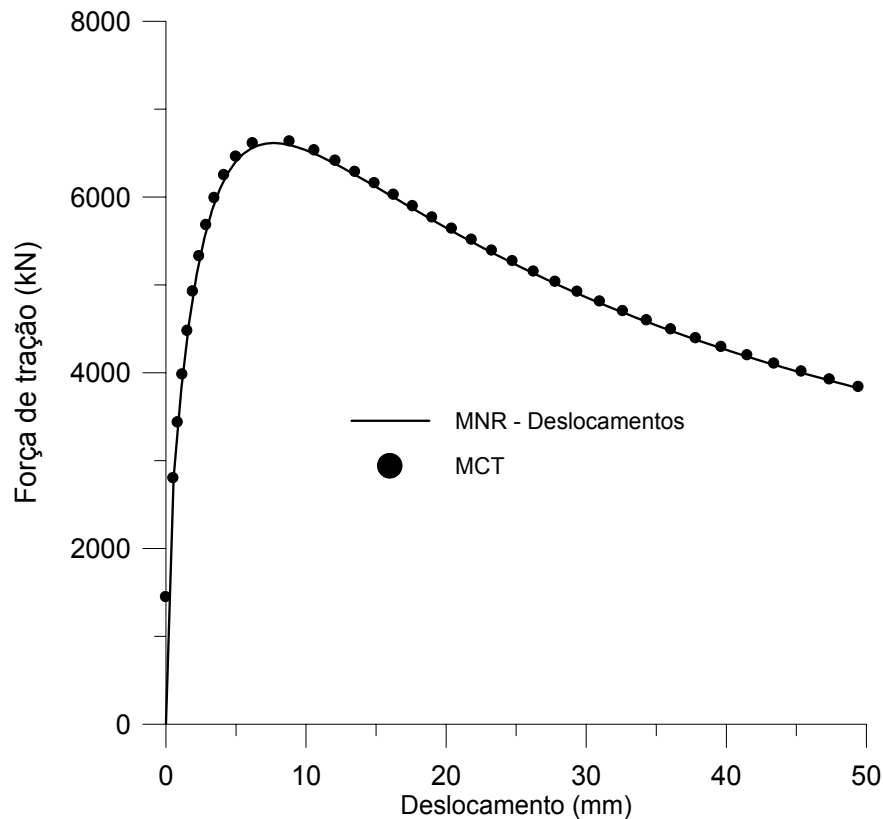


Figura 44: força de tração (MNR – deslocamentos e MCT – forças)

### 3.4.2 Barra em tração

Neste exemplo, estuda-se o problema de uma barra axissimétrica tracionada, sendo que a tração é introduzida por forças. É um problema semelhante ao anterior do ponto de vista de curva carga-deslocamento esperada, porém é interessante testar o algoritmo implementado para problemas com um número maior de graus de liberdade, com vários elementos, onde enquanto alguns elementos têm seu estado de tensões aumentado outros têm seu estado de tensões aliviado, devido à plastificação na seção onde ocorre estrição. Emprega-se como referência a solução obtida através do método de Newton-Raphson com deslocamentos prescritos.

A barra cilíndrica estudada possui altura  $h = 40$  mm e raio  $R_0 = 5$  mm. Na figura 45 é mostrado um esquema de  $\frac{1}{4}$  da barra, que será discretizada com elementos Q4-VRI considerando-se a dupla simetria existente. Emprega-se uma perturbação geométrica para que a estrição tenha início. As dimensões do entalhe introduzido para dar origem à estrição são

$a = 0,025$  mm e  $b = 5,215$  mm. As propriedades mecânicas do material são:  $E = 75$  GPa,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_y = \sigma_y^0(1 + k\varepsilon^P)^m$ ,  $\sigma_y^0 = 250$  MPa,  $k = 345$  e  $m = 0,1$ .

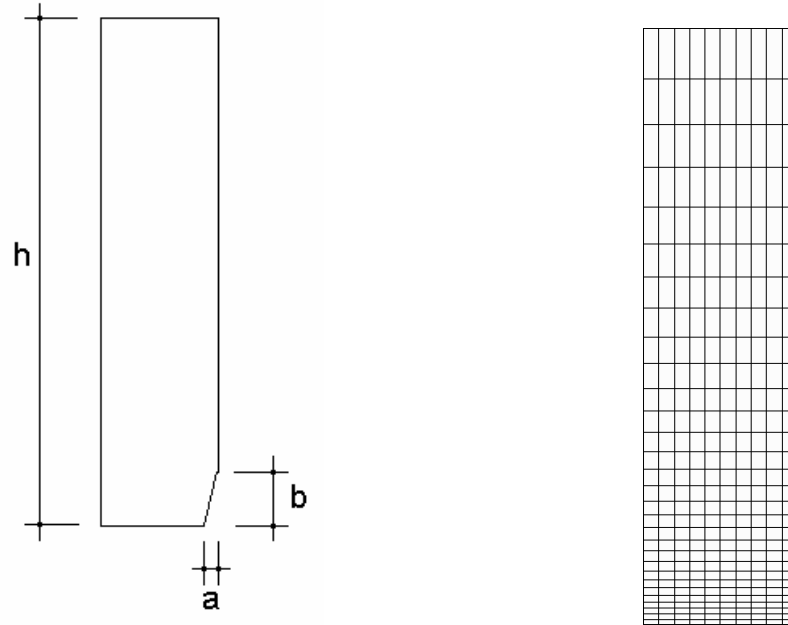


Figura 45: geometria de  $\frac{1}{4}$  do corpo de prova e malha empregada

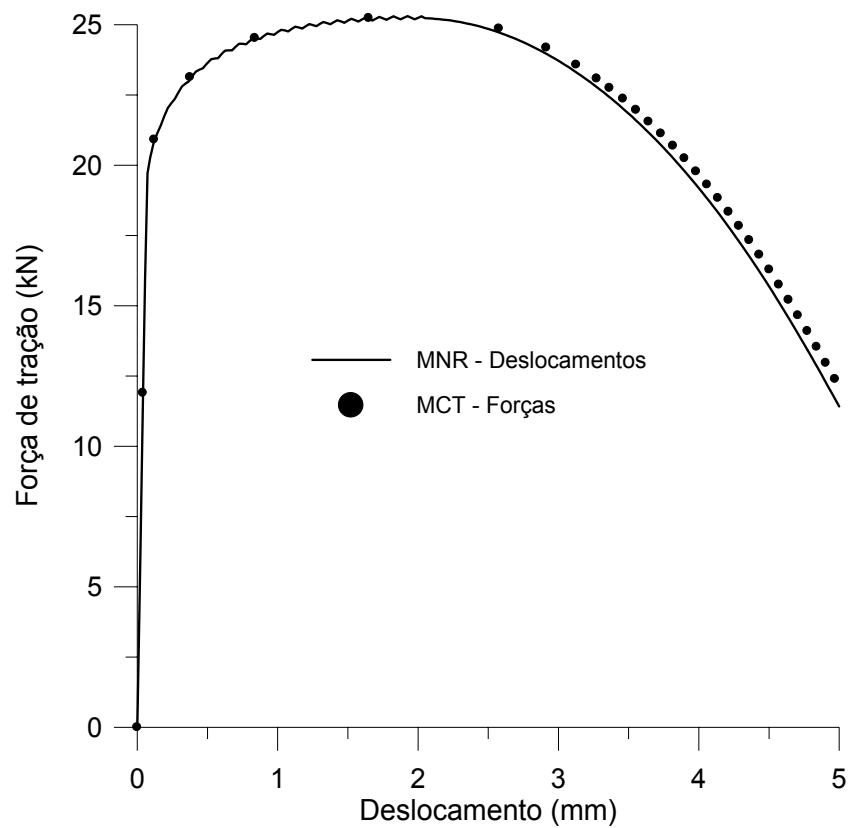


Figura 46: força de tração *versus* deslocamento no topo

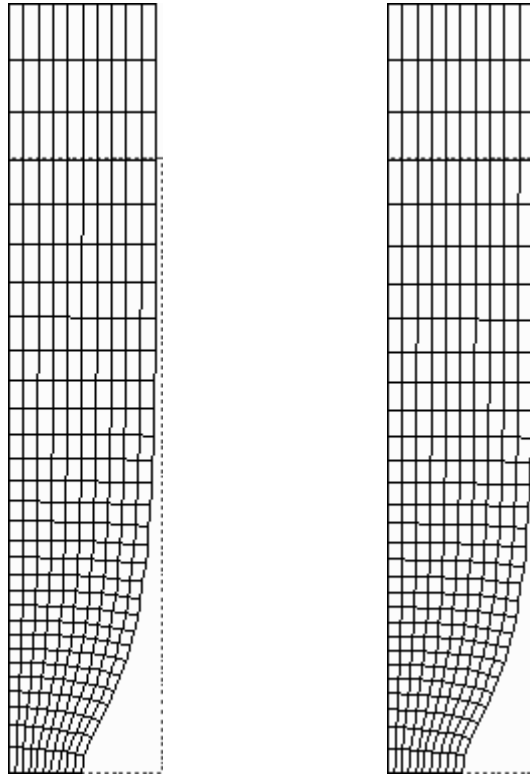


Figura 47: deformadas para MNR (deslocamentos) e MCT (forças), respectivamente

Pela análise das figuras 46 e 47, verifica-se que tanto a relação carga *versus* deslocamento quanto a deformada são muito semelhantes, quer se empregue o método de controle de trabalho aplicando como solicitação forças, quer se empregue o método de Newton-Raphson com deslocamentos prescritos, este último tomado como referência. O quadro a seguir mostra o número de passos, iterações e tempo necessários para atingir o estado final previsto.

Quadro 3: passos, iterações e tempo

<i>Método</i>	<i>Nº de passos</i>	<i>Nº de iterações</i>	<i>Tempo relativo</i>
NR – deslocamentos	207	154	1,0
CT ( $\Delta\lambda_1^1 = 0,07$ )	127	537	2,1
CT ( $\Delta\lambda_1^1 = 0,05$ )	197	531	3,1
CT ( $\Delta\lambda_1^1 = 0,04$ )	249	629	3,8

### 3.5 RESUMO E CONCLUSÕES

Neste capítulo, foram apresentadas as equações que governam o equilíbrio de um corpo sujeito a solicitações, equações estas que podem apresentar forte não-linearidade. Tais equações são discretizadas empregando elementos finitos. Para problemas *quasi*-estáticos o método de solução mais empregado é o de Newton-Raphson, que em algumas situações falha. Para contemplar tais situações, implementa-se um método alternativo de solução, o método de controle de incremento de trabalho (Chen e Blandford, 1993). O algoritmo de controle de trabalho implementado se mostra capaz de resolver o problema da determinação de curvas carga-deslocamento em estruturas solicitadas por forças quando a rigidez tende a zero.

Alguns pontos nevrálgicos na escolha desse tipo de algoritmo, mencionados por Yang e Shieh (1990), são satisfeitos pelo método, notadamente consistência dimensional da equação de restrição (equação 81) e definição de um critério de escolha de raízes que não admita dúvidas quanto à raiz a ser adotada, de modo que não haja possibilidade de retorno sobre a curva carga-deslocamento.

As modificações necessárias no código computacional para implementar o método de controle de trabalho podem ser consideradas pequenas, caso o código já contemple o método de Newton-Raphson. Além disso, o esforço computacional aumenta unicamente devido a produtos escalares adicionais e à determinação de deslocamentos para dois vetores de carga, o que é feito de forma simultânea. O número das operações relativamente custosas, como por exemplo montagem e triangularização da matriz de rigidez global, não é alterado para um passo.

## 4 OBTENÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS

Para que seja feita a verificação do equilíbrio na presença de solicitações, é necessário o conhecimento das tensões na estrutura, de forma a possibilitar o cálculo das forças internas. Em hipoelasticidade a lei constitutiva relaciona taxas de tensão e taxas de deformação. Portanto, para a obtenção das tensões, é necessário o emprego de um processo de integração da equação constitutiva.

Este capítulo trata da determinação do incremento de tensões que ocorre em função de um incremento de deslocamentos conhecido. Além do incremento de tensões, busca-se determinar o incremento nas variáveis internas – dano e deformação plástica. Para tanto, considera-se uma discretização temporal onde a cada instante  $t$  está associado um determinado nível de solicitação.

Para problemas onde se admite a presença de deslocamentos finitos, notadamente grandes rotações, existem diversas definições de tensores de tensão e deformação passíveis de emprego. No apêndice A, são feitas considerações sobre medidas de tensão e deformação empregadas em conjunto com deslocamentos finitos.

A seção 4.1 mostra de forma geral como é resolvido o problema da determinação do incremento de tensões em presença de deslocamentos finitos, indicando como são desacoplados os problemas da não-linearidade física e da não-linearidade geométrica.

A seção 4.2 trata da integração temporal das equações constitutivas em plasticidade com dano (Zhang e Niemi, 1995a), mostrando como é obtido o incremento de tensões corrotacionais de Cauchy.

A partir de procedimentos empregados por outros autores (Tvergaard e Needleman, 1984; Worswick e Pick, 1995; Koppenhoefer e Dodds Jr., 1998), é proposta uma maneira de prosseguir com o cálculo quando um ponto de Gauss atinge um estado crítico de pressão e dano, procedimento este apresentado na seção 4.3.

Na seção 4.4, são mostrados alguns resultados obtidos com o esquema de integração

implementado. No primeiro caso, é mostrada a robustez do esquema; no segundo, o resultado obtido com a implementação do procedimento de eliminação de elementos.

#### 4.1 O TRATAMENTO DA NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

A obtenção do incremento de tensões por integração da lei constitutiva pode ser feita de duas maneiras. Pode-se empregar o sistema de referência associado à última configuração equilibrada conhecida (configuração de referência), empregando a equação (v. equação 322)

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} D_{kl} \quad (96)$$

para a evolução de tensões, onde  $\overset{\nabla}{\sigma}_{ij}$  é uma taxa corrotacional de tensões de Cauchy,  $C_{ijkl}$  o tensor constitutivo e  $D_{kl}$  o tensor taxa de deformação. A obtenção do incremento de tensões de Cauchy a partir da integração da equação 96 é abordada em Bittencourt (1994) e Ponthot (1995), que relatam ser este um processo que não apresenta objetividade incremental. Também é possível partir de uma equação definida no sistema corrotacional (v. equação 321),

$$\dot{\sigma}_{ij}^c = C_{ijkl}^c D_{kl}^c \quad (97)$$

procedimento que se adota neste trabalho. Na equação 97,  $\dot{\sigma}_{ij}^c$  é a taxa de tensões corrotacionais de Cauchy,  $C_{ijkl}^c$  o tensor constitutivo em eixos corrotacionais e  $D_{kl}^c$  o tensor taxa de deformação definido também em eixos corrotacionais. Empregam-se equações constitutivas com a mesma forma das equações constitutivas empregadas em pequenas deformações, apenas trocando a taxa de tensões de Cauchy empregada em pequenas deformações pela taxa de tensões corrotacionais de Cauchy.

Dessa forma, é possível realizar a integração de tensões desde uma configuração de referência onde todas as grandezas são conhecidas até uma configuração atualizada onde se conhece apenas a geometria, desacoplando os efeitos de não-linearidade física e

não-linearidade geométrica. No tratamento da não-linearidade física, o procedimento é idêntico ao realizado em pequenas deformações.

Considera-se a taxa de deformação nos eixos corrotacionais  $D_{kl}^c$  constante durante o passo de tempo, podendo ser determinada a partir da equação 329, resultando

$$D_{kl}^c = \frac{1}{\Delta t} \ln U_{kl} = \frac{1}{\Delta t} \Delta E_{kl}^N \quad (98)$$

onde  $U_{kl}$  é a deformação calculada a partir da decomposição polar, com relação à configuração de referência. Emprega-se o método da rotação instantânea final (Nagtegaal, 1982), ou seja, durante a integração das tensões considera-se que haja somente deformação, sendo que a rotação  $R_{ij}$  é aplicada no instante  $t+\Delta t$ . Considerando-se que

$$\sigma_{ij}^{c,t} = \sigma_{ij}^t \quad (99)$$

a tensão corrotacional no instante  $t+\Delta t$  fica dada por

$$\sigma_{ij}^{c,t+\Delta t} = \sigma_{ij}^t + \int_{t+\Delta t}^{t+\Delta t} C_{ijkl}^c D_{kl}^c dt \quad (100)$$

sendo que a avaliação da integral presente na equação 100 encontra-se descrita na seção 4.2.

Após obtidas as tensões corrotacionais, é fácil obter as tensões de Cauchy, aplicando a rotação  $R_{ij}$ .

$$\sigma_{ij}^{t+\Delta t} = R_{ik} \sigma_{kl}^{c,t+\Delta t} R_{lj} \quad (101)$$

Assim, a integração das equações constitutivas ocorre em duas etapas:

- a) cálculo das tensões corrotacionais de Cauchy (tratamento da não-linearidade



física);

- b) cálculo das tensões de Cauchy a partir das tensões corrotacionais de Cauchy (tratamento da não-linearidade geométrica).

É interessante salientar que o emprego do método da rotação instantânea final traz como vantagens (Ponthot, 1995):

- a) objetividade incremental;
- b) não introdução de variação artificial de volume;
- c) simplicidade e economia na implementação;
- d) possibilidade da obtenção de um operador tangente consistente.

## 4.2 A INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Busca-se um processo para determinar a variação nas tensões e variáveis internas desde uma configuração de referência onde todas as grandezas são conhecidas, até uma configuração atualizada onde se conhece apenas a geometria. Tal processo é independente do fato de haver a possibilidade da ocorrência de deslocamentos finitos, conforme mencionado na seção anterior.

### 4.2.1 Algoritmos para integração de equações constitutivas

Um dos grandes temas de estudos em plasticidade tem sido o desenvolvimento de algoritmos de integração temporal de equações constitutivas ao mesmo tempo robustos e eficientes. Enquanto que a melhor ou pior aproximação da matriz tangente se reflete apenas na taxa de convergência, a exata integração das equações constitutivas tem reflexo direto na precisão com que é resolvido o problema. Na escolha ou desenvolvimento de um algoritmo de integração, deve-se atentar para os seguintes aspectos (Runesson *et al.*, 1988):

- a) superfícies de escoamento com vértices, que podem levar a descontinuidades no vetor normal à superfície de escoamento;
- b) consistência incremental;
- c) estabilidade incremental e precisão;
- d) objetividade incremental.

A objetividade incremental está relacionada à problemas onde ocorrem grandes deformações, notadamente rotações. Esse aspecto fica resolvido com o emprego de uma formulação corrotacional, como descrito na seção anterior.

A chamada robustez de um esquema de integração pode ser associada a um compromisso entre estabilidade e precisão. Um esquema de integração com estabilidade incondicional sempre levará à solução correta, mesmo que a um custo mais alto. Um esquema de integração preciso garante uma solução de boa qualidade, podendo implicar em aumento de custo. A busca do equilíbrio entre estabilidade e precisão com a maior eficiência possível tem sido preocupação constante, com o objetivo de obter soluções confiáveis, a um custo tolerável. Considere-se ainda que essa busca da otimização de precisão e estabilidade com eficiência depende em muito do problema que está sendo resolvido.

Para resolver problemas hipoeásticos, têm sido largamente empregados os métodos do tipo previsor elástico - corretor plástico, também conhecidos como métodos de partição de operador (*split-operator*). Esses métodos calculam uma previsão do valor das tensões, considerando todo o incremento de deformação como elástico. Caso seja atingida a superfície de escoamento, calcula-se a parcela plástica de deformação e desconta-se a tensão correspondente a essa parcela. Assim é imposta a condição de consistência.

Ortiz e Popov (1985) apresentam uma análise da estabilidade e precisão de duas famílias de métodos de integração aplicáveis a um material que siga um conjunto de leis constitutivas bastante geral, apresentado a seguir:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e + \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p \quad (102)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \quad (103)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} r_{ij} \{ \sigma_{ij}, q_m \} \quad (104)$$

$$\dot{q}_m = \dot{\lambda} h_m \{ \sigma_{ij}, q_m \} \quad (105)$$

onde  $\sigma_{ij}$  representa o tensor de tensões de Cauchy,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}^e$  e  $\varepsilon_{ij}^p$  os tensores de deformação, de deformação elástica e de deformação plástica.  $C_{ijkl}$  representa o tensor constitutivo e  $q_m$  um conjunto de variáveis internas. A direção da deformação plástica é dada por  $r_{ij}$  e sua magnitude por  $\lambda$ .

São analisadas as famílias do trapézio generalizado e do ponto médio generalizado, aplicadas à plasticidade com superfície de escoamento de von Mises sem endurecimento. Os subíndices  $n$  e  $n + 1$  estão relacionados às configurações, e aos níveis de solitação. No instante  $n$  tem-se a chamada configuração de referência, onde todas as grandezas ligadas ao problema são conhecidas. É a última configuração equilibrada conhecida. No instante  $n + 1$  têm-se a configuração atualizada, para a qual se conhece apenas as coordenadas. É possível calcular o incremento de deformação ocorrido entre as duas configurações. Busca-se, a partir desse incremento de deformação, determinar o incremento correspondente nas tensões e variáveis internas. A família do trapézio generalizado é representada pelas equações a seguir,

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (106)$$

$$(\varepsilon_{ij}^p)_{n+1} = (\varepsilon_{ij}^p)_n + \lambda [(1 - \alpha)(r_{ij})_n + \alpha(r_{ij})_{n+1}] \quad (107)$$

$$(q_m)_{n+1} = (q_m)_n + \lambda [(1 - \alpha)(h_m)_n + \alpha(h_m)_{n+1}] \quad (108)$$

$$\Phi_{n+1} = 0 \quad (109)$$

onde

$$(r_{ij})_n = r_{ij} \{(\sigma_{ij})_n, q_n\}; \quad (r_{ij})_{n+1} = r_{ij} \{(\sigma_{ij})_{n+1}, (q_m)_{n+1}\} \quad (110)$$

$$(h_m)_n = h_m \{\sigma_n, q_n\}; \quad (h_m)_{n+1} = h_m \{(\sigma_{ij})_{n+1}, (q_m)_{n+1}\} \quad (111)$$

enquanto que a família do ponto médio generalizado emprega as equações

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (112)$$

$$(\varepsilon_{ij}^p)_{n+1} = (\varepsilon_{ij}^p)_n + \lambda (r_{ij})_{n+\alpha} \quad (113)$$

$$(q_m)_{n+1} = (q_m)_n + \lambda (h_m)_{n+\alpha} \quad (114)$$

$$\Phi_{n+1} = 0 \quad (115)$$

onde

$$(r_{ij})_{n+\alpha} = r_{ij} \{(1-\alpha)(\sigma_{ij})_n + \alpha(\sigma_{ij})_{n+1}, (1-\alpha)(q_m)_n + \alpha(q_m)_{n+1}\} \quad (116)$$

$$(h_m)_{n+\alpha} = h_m \{(1-\alpha)(\sigma_{ij})_n + \alpha(\sigma_{ij})_{n+1}, (1-\alpha)(q_m)_n + \alpha(q_m)_{n+1}\} \quad (117)$$

A variação do parâmetro  $\alpha$  faz com que se passe de um método explícito ( $\alpha = 0$ ), isto é, dependente somente das grandezas já conhecidas, a um método implícito ( $\alpha = 1$ ). Tais famílias contêm como casos particulares (Ortiz e Popov, 1985) os métodos do retorno radial, da normal média (*mean normal*) e *closest-point return*.

Quanto à precisão, o estudo de Ortiz e Popov (1985) indica que as duas famílias possuem precisão de primeira ordem. Para o caso particular de  $\alpha = 0,5$ , as duas famílias têm precisão de segunda ordem. Isso indica que o valor adequado para  $\alpha$  quando se está preocupado com precisão é  $\alpha = 0,5$ . Para incrementos de deformação grandes comparados à deformação no escoamento, valores de  $\alpha$  superiores a 0,5 se revelaram convenientes quanto à precisão. A análise da estabilidade indica que a família do ponto médio generalizado apresenta estabilidade incondicional para  $\alpha \geq 0,5$ . A família do trapézio generalizado tem sua estabilidade incondicional influenciada pela forma da superfície de escoamento. Quando a curvatura da superfície de escoamento é constante a estabilidade incondicional é atingida para  $\alpha \geq 0,5$ . Caso a superfície de escoamento contenha vértices, somente se terá estabilidade incondicional com  $\alpha = 1,0$ , no caso da família do trapézio generalizado. Isto indicaria uma superioridade da família do ponto médio generalizado sobre a família do trapézio generalizado.

Gratacos *et al.* (1992) estudaram o problema da precisão da família do ponto médio generalizado para superfície de escoamento de von Mises com endurecimento isótropo. Para incrementos de deformação reais, na maioria dos casos estudados o valor  $\alpha = 1,0$  revelou-se mais conveniente que  $\alpha = 0,5$ .

Lee (1988) analisou a precisão de três esquemas de integração: *forward Euler* ( $\alpha = 0$ ), retorno radial com rigidez secante ( $\alpha = 0,5$ ) e *backward Euler* ou retorno radial ( $\alpha = 1,0$ ). O estudo de Lee (1988) considera uma superfície de von Mises modificada para levar em conta a influência de pressão e plasticidade associada. Os resultados obtidos indicam que o esquema que apresenta melhores resultados em termos de eficiência e precisão, independente do incremento de deformação, é o retorno radial com rigidez secante ( $\alpha = 0,5$ ). Runesson *et al.* (1988) recomendam o emprego de  $\alpha = 0,5$  para incrementos de deformação de pequenos a moderados, enquanto que  $\alpha = 1,0$  seria preferível para grandes incrementos de deformação.

Zhang (1995a) apresenta uma análise de precisão para esquemas de ponto médio generalizado aplicados à superfície de escoamento de Gurson com endurecimento isótropo. Para tanto, um incremento de deformação  $\Delta\varepsilon_{ij}$  é decomposto (figura 48a) em uma componente desviadora  $\Delta e_{ij}$  e em uma componente volumétrica  $\Delta\varepsilon_m$ , de modo que  $\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta e_{ij} + \Delta\varepsilon_m \delta_{ij}$ , sendo  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker. Além disso, o incremento de deformação desviadora  $\Delta e_{ij}$  é decomposto (figura 48b) em uma componente radial  $\Delta e^r \eta_{ij}^r$  e em uma componente tangencial  $\Delta e^t \eta_{ij}^t$ , de modo que  $\Delta e_{ij} = \Delta e^r \eta_{ij}^r + \Delta e^t \eta_{ij}^t$ , sendo  $\eta_{ij}^r$  e  $\eta_{ij}^t$  os vetores unitários radial e tangencial ao plano desviador. Zhang (1995a) analisa os resultados obtidos para alguns valores de  $\alpha$ . A precisão de segunda ordem quando  $\alpha = 0,5$  foi observada para pequenos valores de deformação desviadora tangencial à superfície de escoamento  $\Delta e^t$ . Em tais casos a magnitude da deformação desviadora radial  $\Delta e^r$  não afeta a precisão. Quando a deformação desviadora tangencial  $\Delta e^t$  cresce, a precisão de segunda ordem só é atingida para  $\alpha = 0,625$  ou  $\alpha = 0,75$ .

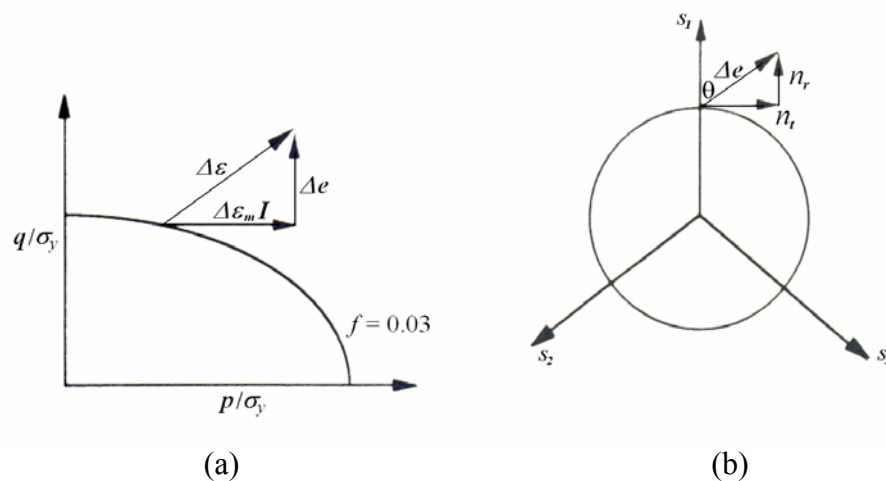


Figura 48: incremento de deformação - (a) seção meridiana; (b) plano desviador

O trabalho de Zhang (1995a) mostra que, quando os incrementos de deformação desviadora tangencial  $\Delta e^t$  são grandes, o uso de  $\alpha = 0,5$  não conduz a bons resultados, chegando a erros de 40% em relação a uma solução de referência obtida com método explícito e incremento de deformação bastante reduzido. Nesse caso, o erro para  $\alpha = 0,75$  foi da ordem de 5%. O uso de  $\alpha = 1,0$  levou a valores moderados de erro em todos os casos. O erro diminui na presença de deformação volumétrica  $\Delta\varepsilon_m$ , exceto quando  $\alpha = 0,75$ . O valor de  $\alpha$  que levou a menores erros situa-se entre 0,75 e 0,875. Segundo Gratacos *et al.* (1992) esse

valor situa-se entre 0,75 e 0,83.

Além de um adequado esquema de integração, existem alguns recursos para melhorar a eficiência e robustez de um esquema de integração. Segundo Worswick e Pick (1991), um recurso conveniente na integração das equações constitutivas associadas à superfície de escoamento de Gurson é o emprego de subincrementação. O número de subincrementos  $NSI$  pode ser escolhido em função de duas grandezas: o valor da superfície de escoamento e a pressão normalizada calculada pelo previsor elástico.

$$NSI_1 = \text{INT}(\Phi_{n+1}^T / \sigma_y) \quad (118)$$

$$NSI_2 = \text{INT}(\text{ABS}(p_{n+1}^T / \sigma_y)) \quad (119)$$

$$NSI = \text{MAX}(NSI_1, NSI_2) \quad (120)$$

Com base no exposto acima, se empregará um algoritmo do tipo ponto-médio generalizado, preferencialmente utilizando  $\alpha=0,75$ , e adicionando um esquema de subincrementação.

#### 4.2.2 Aplicação à superfície de escoamento de Gurson

Para a integração das equações constitutivas em plasticidade com endurecimento isótropo, opta-se pelo algoritmo proposto por Zhang e Niemi (1995a). Trata-se de uma evolução do algoritmo proposto por Aravas (1987) para integrar equações constitutivas com variáveis internas quaisquer, separando a deformação plástica em duas parcelas: uma volumétrica e outra desviadora.

O algoritmo em questão pode variar de explícito a implícito, conforme o valor adotado para o parâmetro  $\alpha$ . O valor de  $\alpha$  varia de 0 para integração explícita a 1 para integração

implícita. Trata-se, portanto, de um algoritmo de ponto médio generalizado, expresso de forma a permitir o equacionamento da matriz de rigidez tangente consistente em forma explícita, sem necessidade de inversão de matrizes. Assume-se nesta seção que a tensão representada por  $\sigma_{ij}$  e as deformações logarítmicas  $E_{ij}^N$  são corrotacionais, apesar de não se empregar índice adicional para representar tal condição.

As equações básicas que regem o problema de integração de equações constitutivas são apresentadas a seguir.

$$E_{ij}^N = E_{ij}^{N,e} + E_{ij}^{N,p} \quad (121)$$

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^p \quad (122)$$

$$\sigma_{ij} = \bar{H}_{ijkl} E_{kl}^{N,e} \quad (123)$$

$$\Phi\{\sigma_{ij}, H_t\} = \Phi\{p, q, H_t\} = 0 \quad (124)$$

$$D_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (125)$$

$$\dot{H}_t = h_t \{D_{ij}^p, \sigma_{ij}, H_t\} = h_t \{D_{ij}^p, p, q, H_t\} \quad (126)$$

onde

$$\bar{H}_{ijkl} = (K\{f\} - \frac{2}{3}G\{f\})\delta_{ij}\delta_{kl} + 2G\{f\}\delta_{ik}\delta_{jl} \quad (127)$$



$$p = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij} \quad (128)$$

$$\delta_{ij} = 1 \text{ se } i = j \quad \delta_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \quad (129)$$

Tais equações carregam algumas hipóteses importantes:

- a) admite-se a decomposição aditiva da deformação logarítmica  $E_{ij}^N$  em parcelas elástica  $E_{ij}^{N,e}$  e plástica  $E_{ij}^{N,p}$ , conforme a equação 121; tal procedimento é válido quando se emprega a descrição lagrangiana atualizada e as configurações de referência e atualizada estão próximas;
- b) somente deformações elásticas provocam tensão, conforme a equação 123;
- c) a superfície de escoamento depende da norma  $q$  do tensor desviador de tensões, da pressão  $p$  e das demais variáveis internas  $H_t$  (equação 124);
- d) a taxa de deformação plástica é definida em função de um potencial  $g$ . O potencial adotado coincide com a superfície de escoamento de Gurson, correspondendo, portanto, a plasticidade associada (equação 125);
- e) a taxa de evolução  $h_t$  das variáveis internas  $H_t$  depende do estado de tensões e do próprio valor das variáveis internas (equação 126).

As principais expressões do esquema de ponto médio generalizado aplicado por Zhang e Niemi (1995a) à plasticidade com dano e superfície de escoamento de Gurson são apresentadas a seguir, onde o subíndice fora do parênteses refere-se ao instante considerado e o superíndice  $T$  está associado a valores calculados considerando todo o incremento de deformação como elástico, ou seja, o chamado previsor elástico.

$$(E_{ij}^N)_{n+1} = (E_{ij}^N)_n + (\Delta E_{ij}^N)_{n+1} \quad (130)$$

$$(\sigma_{ij})_{n+1}^T = \bar{H}_{ijkl} [(E_{kl}^{N,e})_n + (\Delta E_{kl}^N)_{n+1}] \quad (131)$$

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = (\sigma_{ij})_{n+1}^T - \bar{H}_{ijkl} (\Delta E_{kl}^{N,p})_{n+1} \quad (132)$$

$$(\Delta E_{ij}^{N,p})_{n+1} = \lambda (r_{ij})_{n+\alpha} \quad (133)$$

$$(H_t)_{n+1} = (H_t)_n + (\Delta H_t)_{n+1} \quad (134)$$

$$(\Delta H_t)_{n+1} = (h_t)_{n+\alpha} \quad (135)$$

$$\Phi_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} - \omega \{p, \sigma_y, f\} \sigma_y = 0 \quad (136)$$

$$\omega \{p, \sigma_y, f\} = \left[ 1 - 2\alpha_1 f \cosh\left(\frac{\alpha_2(3p)}{2\sigma_y}\right) + \alpha_3 f^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (137)$$

Identifica-se uma expressão (equação 131) que define o previsor elástico. Caso o estado de tensões assim calculado recaia fora da superfície de escoamento de Gurson (equação 136), é necessária a aplicação de uma correção plástica, conforme a equação 132. A deformação plástica no incremento, que possibilita o cálculo da correção plástica a ser aplicada sobre as tensões oriundas do previsor elástico, é dada pela equação 13. As equações 134 e 135 dão a evolução das variáveis internas, neste caso deformação plástica e dano ( $t = 1, 2$ ).

$$(r_{ij})_{n+\alpha} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{n+\alpha} = r_{ij} \{ (\sigma_{ij})_{n+\alpha}, (H_t)_{n+\alpha} \} \quad (138)$$

$$(h_t)_{n+\alpha} = h_t \{ (\sigma_{ij})_{n+\alpha}, (H_t)_{n+\alpha} \} \quad (139)$$

$$(\sigma_{ij})_{n+\alpha} = (1 - \alpha)(\sigma_{ij})_n + \alpha(\sigma_{ij})_{n+1} \quad (140)$$

$$H_{n+\alpha} = (1 - \alpha)H_n + \alpha H_{n+1} \quad (141)$$

Tanto as tensões quanto a deformação plástica no incremento podem ser separadas em componentes volumétrica e desviadora

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = p_{n+1} \delta_{ij} + (s_{ij})_{n+1} = p_{n+1} \delta_{ij} + \frac{2}{3} q (n_{ij})_{n+1} \quad (142)$$

$$(n_{ij})_{n+1} = \frac{3}{2} q (s_{ij})_{n+1} \quad (143)$$

$$\Delta E_{ij}^{N,p} = \Delta E_{ij}^{N,p,v} + \Delta E_{ij}^{N,p,d} = \lambda \left[ - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_{n+\alpha} \frac{1}{3} \delta_{ij} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right)_{n+\alpha} \frac{3}{2} \frac{(s_{ij})_{n+\alpha}}{q_{n+\alpha}} \right] \quad (144)$$

onde  $\Delta E_{ij}^{N,p,v}$  representa a parte volumétrica do incremento de deformações plásticas e  $\Delta E_{ij}^{N,p,d}$  representa a parte desviadora do mesmo incremento. É conveniente alterar a forma da equação 144, o que torna possível o equacionamento em forma explícita da matriz de rigidez tangente consistente (Zhang e Niemi, 1995a).

$$\Delta E_{ij}^{N,p} = \lambda \left[ - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_{n+\alpha} \frac{1}{3} \delta_{ij} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right)_{n+\alpha} \frac{q_n}{q_{n+\alpha}} \frac{3}{2} \frac{(s_{ij})_{n+\alpha}}{q_n} \right] = \frac{1}{3} \Delta E_p \delta_{ij} + \frac{3}{2} \Delta E_q \frac{(s_{ij})_{n+\alpha}}{q_n} \quad (145)$$

$$\Delta E_p = -\lambda \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_{n+\alpha} \quad (146)$$

$$\Delta E_q = \lambda \frac{q_n}{q_{n+\alpha}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right)_{n+\alpha} \quad (147)$$

Combinando as equações 146 e 147 para eliminar  $\lambda$ , chega-se a

$$\Delta E_p \left[ \frac{q_n}{q_{n+\alpha}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right)_{n+\alpha} \right] + \Delta E_q \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_{n+\alpha} = 0 \quad (148)$$

ou simplesmente

$$\Delta E_p P + \Delta E_q Q = 0 \quad (149)$$

com

$$P = \frac{q_n}{q_{n+\alpha}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right)_{n+\alpha} \quad (150)$$

$$Q = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right)_{n+\alpha} \quad (151)$$

A expressão final para as tensões com a consideração da correção plástica fica

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = (\sigma_{ij})_{n+1}^T - K\{f\}\Delta E_p \delta_{ij} - 3G\{f\}\Delta E_q \frac{(s_{ij})_{n+\alpha}}{q_n} \quad (152)$$

ou

$$P_{n+1} = p_{n+1}^T + K\{f\}\Delta E_p \quad (153)$$

$$(s_{ij})_{n+1} = (s_{ij})_{n+1}^T - 3G\{f\}\Delta E_q \frac{(s_{ij})_{n+\alpha}}{q_n} \quad (154)$$

Assim, o problema da integração de tensões na presença de plasticidade e dano fica reduzido à solução do conjunto de equações não-lineares a seguir:

$$\Delta E_p P + \Delta E_q Q = 0 \quad (155)$$

$$\Phi_{n+1} = \Phi\{p_{n+1}, (s_{ij})_{n+1}, (H_t)_{n+1}\} = 0 \quad (156)$$

$$P_{n+1} = p_{n+1}^T + K\{f\}\Delta E_p \quad (157)$$

$$(s_{ij})_{n+1} = (s_{ij})_{n+1}^T - 3G\{f\}\Delta E_q \frac{(s_{ij})_{n+\alpha}}{q_n} \quad (158)$$

$$(\Delta H_t)_{n+1} = (h_t)_{n+\alpha} \{\Delta E_p, \Delta E_q, p_{n+\alpha}, (s_{ij})_{n+\alpha}, (H_t)_{n+\alpha}\} \quad (159)$$

Emprega-se o método de Newton-Raphson na solução do sistema de equações não-lineares anterior. Trabalhando com  $\Delta E_p$  e  $\Delta E_q$  como incógnitas principais e tomando as equações 155 e 156 chega-se a

$$A_{11}\rho_p + A_{12}\rho_q = b_1 \quad (160)$$

$$A_{21}\rho_p + A_{22}\rho_q = b_2 \quad (161)$$

onde  $\rho_p$  e  $\rho_q$  são as correções em  $\Delta E_p$  e  $\Delta E_q$ , respectivamente. Os coeficientes  $A_{ij}$  e  $b_i$  são apresentados no apêndice D. Com os valores de  $\rho_p$  e  $\rho_q$  é possível corrigir  $\Delta E_p$  e  $\Delta E_q$ .

$$\Delta E_p = \Delta E_p + \rho_p \quad (162)$$

$$\Delta E_q = \Delta E_q + \rho_q \quad (163)$$

e atualizar  $p_{n+1}$ ,  $(s_{ij})_{n+1}$  e  $(H_t)_{n+1}$  empregando as equações 157, 158 e 159. Repete-se o processo até que a solução apresente um erro pequeno, adotando-se como critério de convergência  $|(\Phi)_{n+1}| \leq 10^{-07}$ .

Quando  $\alpha = 1$  é empregado, o método do ponto médio generalizado introduzido por Zhang e Niemi (1995a) reproduz o método denominado *backward Euler* ou *closest point return*, sendo as tensões relaxadas sobre o ponto mais próximo da superfície de escoamento atualizada (Aravas, 1987). No quadro 4 é apresentado um resumo do esquema de integração temporal para as equações constitutivas adotado.

Quadro 4: integração de tensões corrotacionais de Cauchy no modelo de Gurson

Previsor elástico:  $(\sigma_{ij})_{n+1}^T = (\sigma_{ij})_n + \bar{H}_{ijkl} (\Delta E_{kl}^N)_{n+1}$

Teste da superfície de escoamento:  $\Phi\{(\sigma_{ij})_{n+1}^T, (H_t)_n\} \leq 0$

Se  $\Phi\{(\sigma_{ij})_{n+1}^T, (H_t)_n\} \leq 0$  então,

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = (\sigma_{ij})_{n+1}^T$$

$$(H_t)_{n+1} = (H_t)_n$$

senão, aplica-se o corretor plástico:

- (a) resolve-se o sistema abaixo, determinando  $\rho_p$  e  $\rho_q$

$$A_{11}\rho_p + A_{12}\rho_q = b_1$$

$$A_{21}\rho_p + A_{22}\rho_q = b_2$$

- (b) corrige-se  $\Delta E_p$  e  $\Delta E_q$  e após as tensões e variáveis internas:

$$\Delta E_p = \Delta E_p + \rho_p$$

$$\Delta E_q = \Delta E_q + \rho_q$$

$$p_{n+1} = p_{n+1}^T + K\{f\}\Delta E_p$$

$$(s_{ij})_{n+1} = (s_{ij})_{n+1}^T - 3G\{f\}\Delta E_q \frac{(s_{ij})_{n+\alpha}}{q_n}$$

$$(\Delta H_t)_{n+1} = (h_t)_{n+\alpha} \{\Delta E_p, \Delta E_q, p_{n+\alpha}, (s_{ij})_{n+\alpha}, (H_t)_{n+\alpha}\}$$

- (c) se  $\Phi_{n+1}\{(\sigma_{ij})_{n+1}, (H_t)_{n+1}\} \leq 0$ , convergiu. Se não, vai para (a);

### 4.3 ELIMINAÇÃO DE ELEMENTOS EM SITUAÇÃO CRÍTICA

Quando após um determinado número de iterações não é atingido o equilíbrio entre forças externas e internas, o cálculo do passo que não convergiu é refeito, com um incremento de carga ou trabalho reduzido, igual ao último tamanho de incremento aplicado que convergiu, dividido por 3. Caso a convergência não seja atingida, o incremento continua sendo reduzido buscando a convergência. Essa redução é feita enquanto duas condições se mantiverem verdadeiras: a primeira, o tamanho do incremento após a divisão por 3 deve resultar maior que 10% do tamanho do primeiro incremento empregado na solução do problema; segunda, a divisão por 3 pode ser feita no máximo 5 vezes sucessivas. Tais condições podem ser alteradas pelo usuário do METAFOR, caso julgue conveniente. Caso ainda assim não se consiga equilíbrio, é possível que alguns pontos de integração da estrutura estejam em uma situação de ruptura. Tal situação está associada ou ao fato de o elemento ter atingido o dano de ruptura  $f_U$ , ou aos limites de pressão e dano apresentados na figura 3 estarem sendo violados.

Quando um elemento chega a uma situação de ruptura, é necessário estabelecer um critério para que este elemento não impeça o prosseguimento do problema, uma vez que a ruptura verificada pode ser uma ruptura local, ou seja, a estrutura ainda apresenta capacidade de carga, apesar de ter perdido sua resistência em uma região localizada.

Tvergaard e Needleman (1984) sugerem que se despreze o elemento em que a fração volumétrica de vazios chegar a 90% de  $f_U$ . Hackenberg (1995) emprega o modelo de coalescência com modificação na superfície de escoamento. Quando a fração volumétrica de vazios em algum ponto atinge o valor  $f_F$ , o módulo de elasticidade nesse ponto é dividido por 10000 e o cálculo continua com esse ponto trabalhando no regime elástico. A contribuição do ponto à rigidez da estrutura passa a ser pequena, pois com o módulo de elasticidade reduzido, o acréscimo de tensão devido a um incremento de deformação se torna insignificante na escala do problema.

Neste trabalho, quando um ponto de integração apresenta uma condição crítica, as tensões nesse ponto não são mais calculadas a partir da relação constitutiva. Para um elemento nessa situação, as tensões na configuração atualizada são calculadas como as tensões na configuração de referência multiplicadas por 0,999. As variáveis internas são



mantidas constantes. Esse procedimento leva a uma queda nas forças internas correspondentes ao elemento. Quando se emprega a aproximação *quasi*-estática, na solução do sistema de equações associado ao equilíbrio da estrutura, se um nó estiver conectado unicamente a elementos “rompidos”, este tem suas coordenadas mantidas fixas ou limitadas. Esse tratamento dos nós que conectam unicamente elementos “rompidos” é necessário, pois devido à baixa rigidez nos graus de liberdade desses nós, qualquer força residual provoca um grande deslocamento, podendo-se chegar a problemas de determinante jacobiano negativo. Procedimentos semelhantes são empregados por Tvergaard (1990), Worswick e Pick (1995) e Koppenhoefer e Dodds Jr. (1998).

## 4.4 APLICAÇÕES

Nesta seção estudam-se dois casos: no primeiro, o objetivo é mostrar a robustez do algoritmo de integração de tensões e variáveis internas implementado; no segundo, mostra-se a influência do entalhe empregado para simular estrição em testes de tração axial e também os resultados obtidos empregando o algoritmo de eliminação de elementos com ruptura local.

### 4.4.1 Robustez do esquema de integração

Neste exemplo, apresenta-se o resultado obtido com o esquema de integração apresentado por Zhang e Niemi (1995a) combinado com subincrementação como propõe Worswick e Pick (1992). Estuda-se um elemento em estado plano de deformação sujeito à tração, onde se considera nucleação e crescimento de vazios. Na figura 49, apresenta-se a geometria, condições de contorno e dimensões. Emprega-se integração com 1 ponto de Gauss (Q4-URI) e esquema totalmente implícito com  $\alpha = 1$ . Não se corrige os valores de  $K$  e  $G$  em função da porosidade, para possibilitar a comparação com o ABAQUS e com a resposta obtida por Zhang e Niemi (1995a). As propriedades do material são:  $E = 75$  GPa,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_y = \sigma_y^0(1 + k\varepsilon^p)^m$ ,  $\sigma_y^0 = 250$ MPa,  $k = 345$ ,  $m = 0,1$ ,  $f_N = 0,04$ ,  $\varepsilon_N = 0,3$ ,  $s_N = 0,1$ ,  $\alpha_1 = 1,5$  e  $\alpha_2 = 1,0$ .

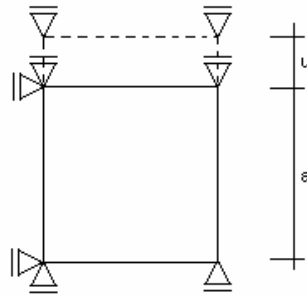


Figura 49: malha empregada, condições de contorno e dimensões

Apresentam-se na figura 50 os resultados obtidos com o programa ABAQUS, para diversos tamanhos de incremento. A deformação logarítmica é dada por  $\varepsilon = \ln(1 + u/a)$ , onde  $u$  é o deslocamento aplicado e  $a$  o tamanho inicial do elemento.

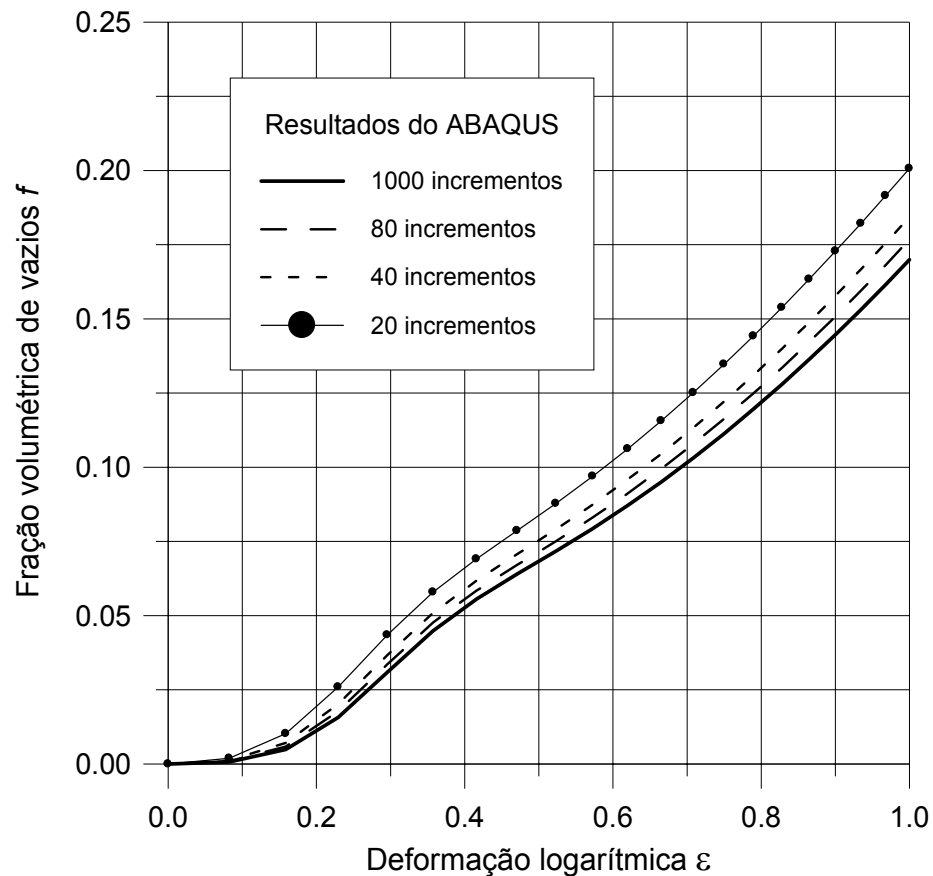


Figura 50: fração volumétrica de vazios obtida com o ABAQUS

Na figura 51 são mostrados os resultados obtidos com o METAFOR. A solução

mostra-se praticamente independente do tamanho do incremento, tomando-se por referência a solução considerada exata, obtida por Zhang e Niemi (1995a) a partir de um sistema de equações não-lineares resolvido com 200000 incrementos. Verifica-se, portanto, que o esquema de integração implementado, associado à subincrementação, resulta em um procedimento preciso e confiável, mesmo quando os incrementos de deformação crescem.

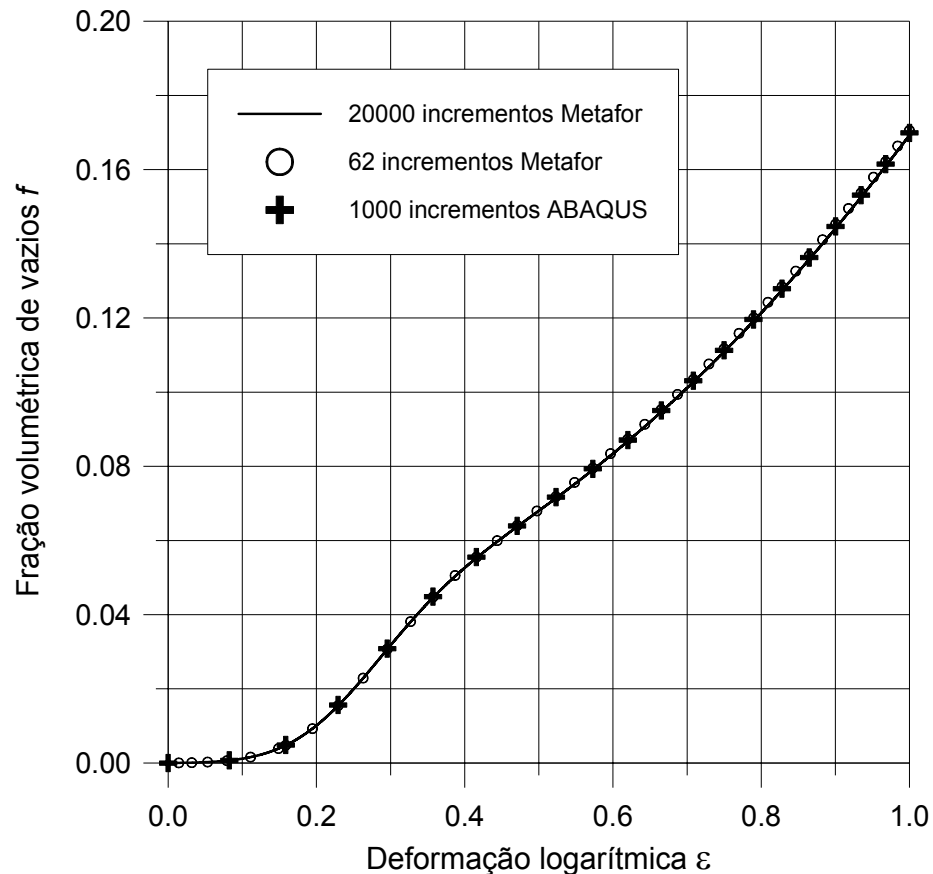


Figura 51: fração volumétrica de vazios obtida com o METAFOR

#### 4.4.2 Emprego da eliminação de elementos

Este exemplo trata da simulação numérica de um ensaio largamente empregado na determinação de propriedades mecânicas de metais - o ensaio de tração axial em corpo de prova cilíndrico. Tal simulação tem sido bastante empregada na validação de códigos de elementos finitos que consideram grandes deformações e dano (Tvergaard e Needleman, 1984; Aravas, 1987; Lee e Zhang, 1991; Steinmann *et al.*, 1994; Stainier, 1996; García Garino *et al.*

1996a). Em materiais dúcteis, a deformação se desenvolve de maneira elástica até que a tensão de escoamento seja atingida. O material sofre então uma reorganização em sua estrutura e o corpo de prova começa a sofrer um estrangulamento denominado estrição.

Caso a solicitação continue aumentando, na região central da seção de estrição começa a ocorrer crescimento e união de microcavidades, dando origem a uma trinca, que progride do núcleo para a superfície do corpo de prova. A ruptura se dá de forma plana no centro do corpo, alterando sua orientação para aproximadamente  $45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal quando se aproxima da superfície do corpo de prova, devido à predominância da ruptura por cisalhamento, uma vez que nessa região o estado triaxial de tensões já não existe mais. É a chamada ruptura em taça e cone (*cup-cone*).

Neste exemplo, prescreve-se inicialmente um deslocamento no topo da barra que leva a um valor moderado de porosidade, visando à observação dos campos de pressões e porosidade. Utiliza-se como referência o trabalho de Aravas (1987). Para que a estrição tenha início, emprega-se uma perturbação geométrica. García Garino *et al.* (1996b, 1997) fornecem informações sobre a influência das dimensões dessa perturbação geométrica no resultado final da simulação. Empregam-se então dois tipos de perturbação, com dimensões sugeridas por Stainier (1996). Empregam-se dois tipos de elemento (Q4-VRI e Q4-URI), procurando verificar se há diferença de comportamento entre uma situação e outra. A barra cilíndrica a ser estudada possui altura  $h = 40$  mm e raio  $R_0 = 5$  mm. A relação entre a altura e o raio é da ordem de 8. Na figura 52 é mostrado um esquema de  $\frac{1}{4}$  da barra, que será discretizada considerando-se a simetria existente. Empregam-se dois tipos de perturbações para iniciar a estrição: um entalhe brusco, com dimensões  $a = 0,025$  mm e  $b = 0,168$  mm e um entalhe suave com dimensões  $a = 0,025$  mm e  $b = 5,215$  mm. Note-se que a dimensão horizontal (profundidade) dos entalhes é a mesma -  $0,005 R_0$  - havendo variação apenas na altura.

As propriedades mecânicas e parâmetros de dano do material adotado são:  $E = 75$  GPa,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_y = \sigma_y^0(1 + k\varepsilon^P)^m$ ,  $\sigma_y^0 = 250$ MPa,  $k = 345$ ,  $m = 0,1$ ,  $f_N = 0,04$ ,  $\varepsilon_N = 0,3$ ,  $s_N = 0,1$ ,  $\alpha_1 = 1,5$  e  $\alpha_2 = 1,0$ .

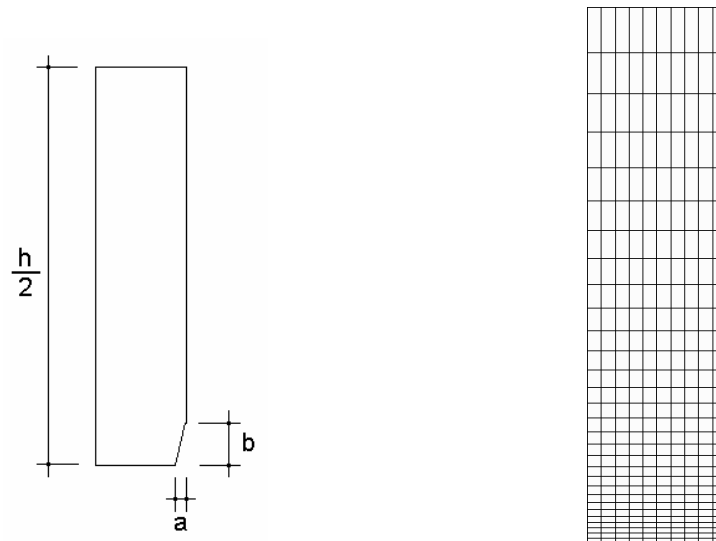


Figura 52: geometria do corpo de prova e malha empregada (entalhe suave)

O carregamento é introduzido através de deslocamentos prescritos no topo da barra. Inicialmente é aplicado um deslocamento da ordem de  $0,19 \cdot h/2$ , valor este que não deve levar à coalescência de vazios. Na figura 53, mostra-se a curva carga *versus* deslocamento obtida com o emprego dos elementos Q4-VRI e Q4-URI e com os dois tipos de entalhe. Observa-se que o comportamento para os elementos Q4-VRI e Q4-URI é muito semelhante. No entanto, o tempo de análise empregando o elemento Q4-VRI foi cerca de 2,5 vezes superior ao tempo de análise empregando o elemento Q4-URI, para ambos os entalhes.

Observa-se também que a curva carga-deslocamento para o entalhe suave (figura 53) revela um amolecimento maior do que no caso do entalhe brusco. Tal se deve ao fato de a estricção iniciar antes com o entalhe suave. Na figura 54, tem-se a deformação plástica para entalhe suave (figura 54a) e brusco (figura 54b), e fração volumétrica de vazios para entalhe suave (figura 54c) e brusco (figura 54d), quando é aplicada a metade - 1,9 mm - do deslocamento de topo previsto. Para esse nível de deslocamento aplicado, no caso do entalhe suave, já há localização de deformação e porosidade; no caso do entalhe brusco, a distribuição dessas grandezas na barra ainda é praticamente uniforme.

Apresenta-se na figura 56 os valores finais de deformação plástica, pressão e fração volumétrica de vazios para o entalhe brusco, calculados com Q4-VRI. Os resultados obtidos empregando o elemento Q4-URI são extremamente semelhantes. Na figura 55 são apresentados os valores finais obtidos para o entalhe suave, empregando-se o elemento Q4-VRI. Na figura 57 são mostrados os valores de fração volumétrica de vazios e pressão

normalizada (pressão dividida pela tensão de escoamento inicial) obtidos por Aravas (1987). A concordância entre os valores apresentados por Aravas (1987) e os valores referentes ao entalhe brusco (figura 56), o mesmo empregado por Aravas (1987), é razoável, levando-se em conta que o trabalho de Aravas (1987) não menciona o emprego de correção nas propriedades elásticas, ao contrário deste trabalho.

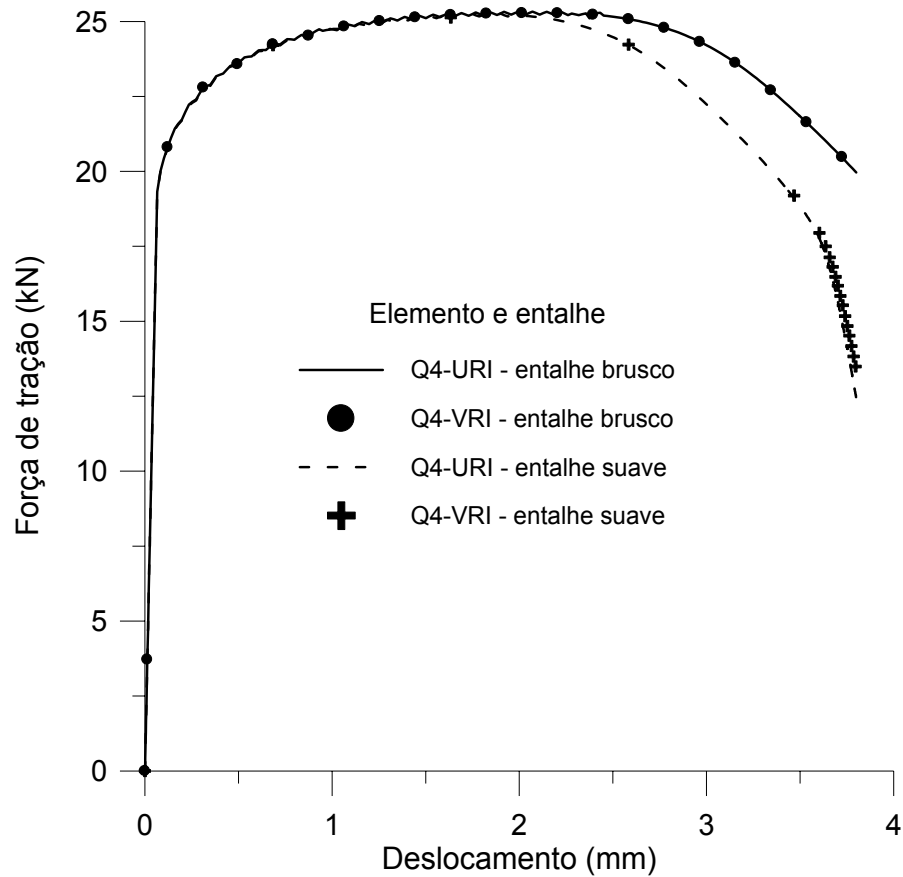


Figura 53: curvas carga *versus* deslocamento variando entalhe e elemento

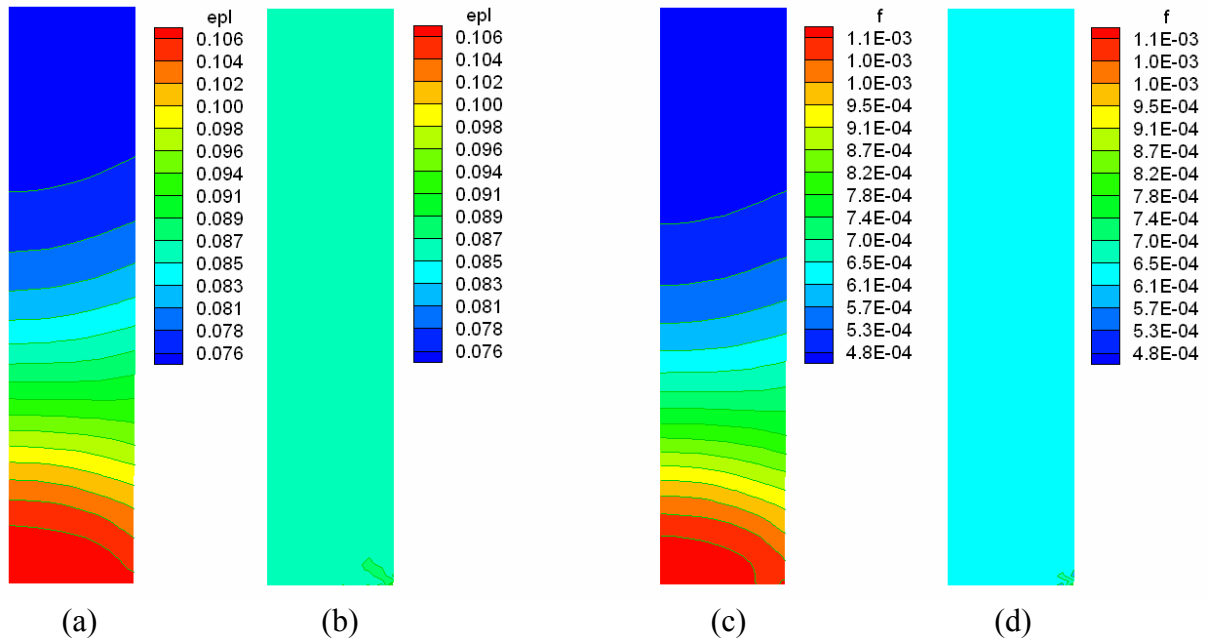


Figura 54: deformação plástica e fração volumétrica de vazios (desloc. 1,9 mm)

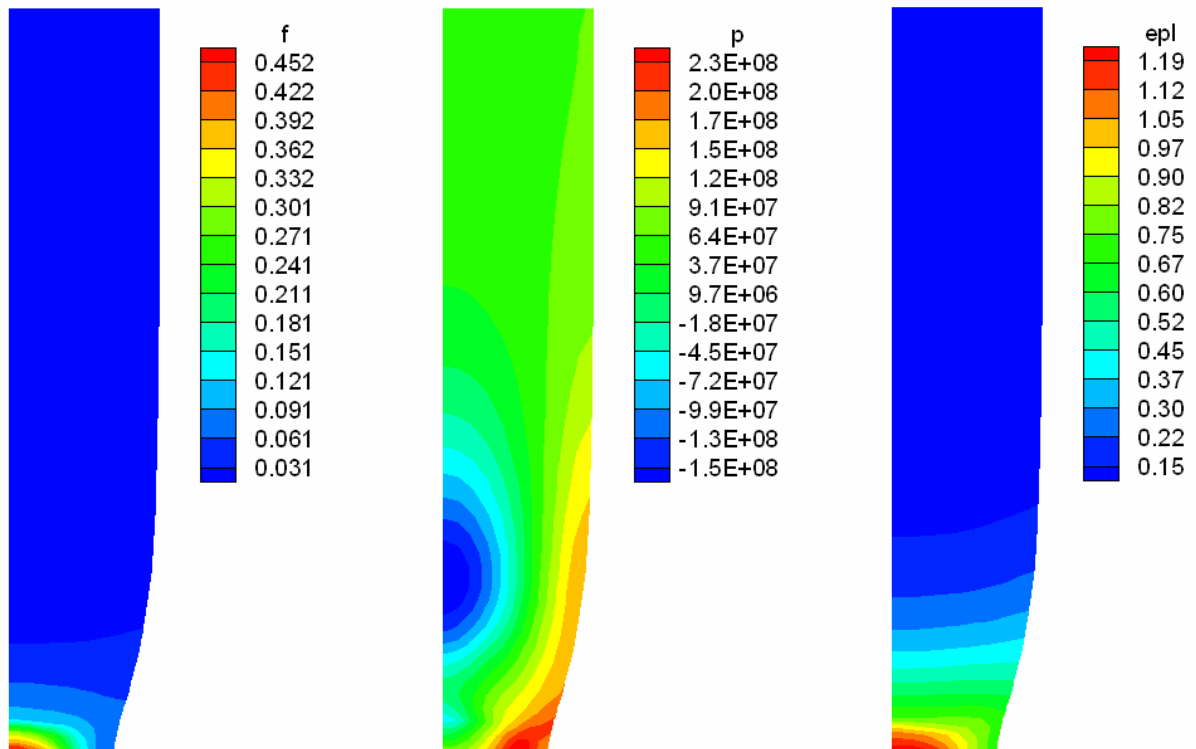


Figura 55: fração volumétrica de vazios, pressão e def. plástica, entalhe suave (Q4-VRI)

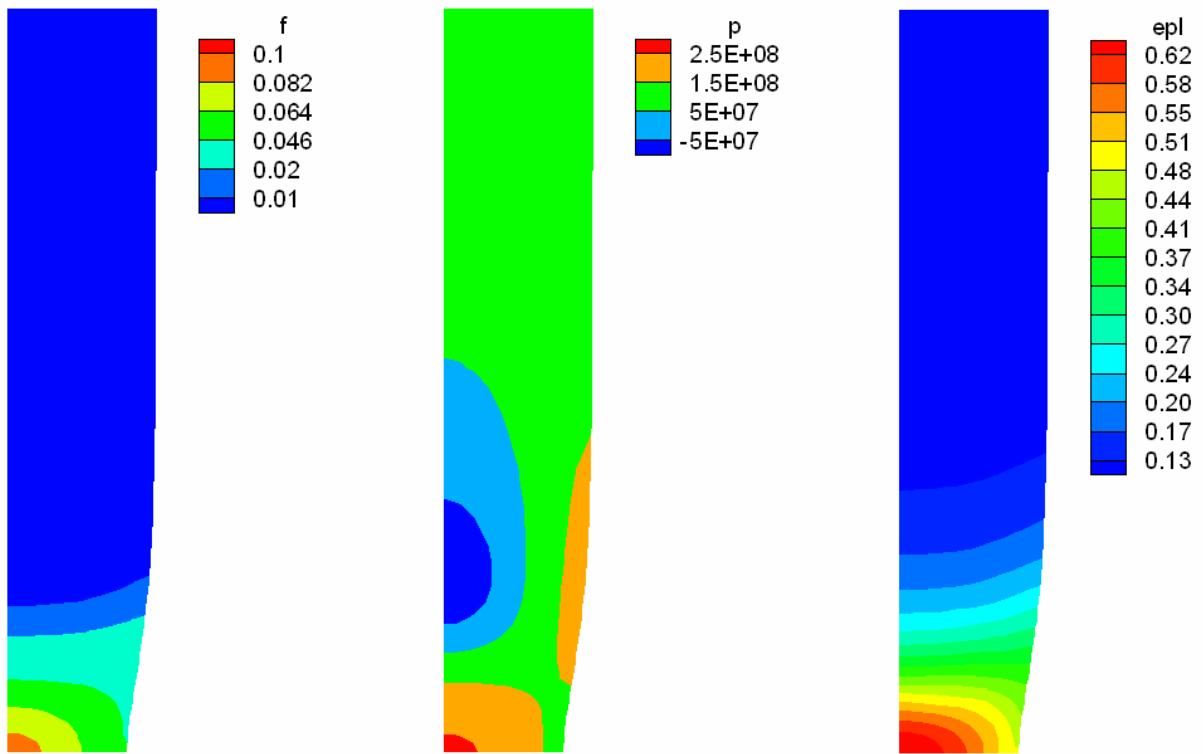


Figura 56: fração volumétrica de vazios, pressão e def. plástica, entalhe brusco (Q4-VRI)

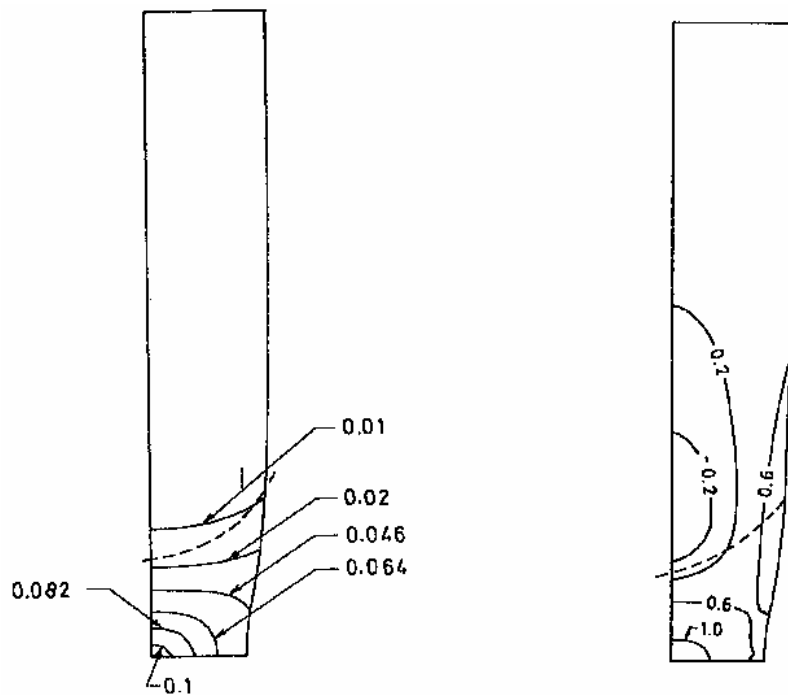


Figura 57: fração volumétrica de vazios e pressão normalizada (Aravas, 1987)



Com o intuito de verificar como se comporta o problema quanto à eliminação de elementos, simula-se a mesma barra aumentando o deslocamento imposto no topo e admitindo possibilidade de coalescência de vazios. Emprega-se a barra com entalhe suave. As constantes relativas à coalescência empregadas são  $f_C = 0,15$  e  $\Delta\varepsilon = 0,5$ . Emprega-se o elemento Q4-URI. Inicialmente, quando não se admite a possibilidade de eliminação de elementos, o elemento que corresponde à posição central da barra atinge o dano de ruptura e interrompe o cálculo (figura 58).

Na figura 59 são apresentadas as malhas deformadas correspondentes às etapas da eliminação de elementos. Os elementos em amarelo são elementos “eliminados”, enquanto que os elementos em verde são elementos onde a fração volumétrica de vazios excede o valor crítico para início de coalescência  $f_C$ . Admite-se que um nó que esteja vinculado unicamente a elementos eliminados terá suas coordenadas mantidas inalteradas. Nas figuras 59a, 59b e 59c nota-se a evolução da coalescência do centro para a superfície da barra. Nas figuras 59d, 59e e 59f observa-se que enquanto alguns elementos centrais vão sendo eliminados, tendo suas tensões diminuídas, ocorre uma redistribuição de tensões que acaba por provocar o aumento do nível de dano nos elementos próximos à superfície da barra. Após, nas figuras 59g, 59h e 59i a eliminação de elementos prossegue, até que o cálculo é interrompido, restando um único elemento, e ainda assim enfraquecido pelo dano. Observe-se que o primeiro elemento a ser eliminado é o que corresponde à região central da barra. Após, os elementos vão sendo eliminados do centro para a superfície da barra, simulando a progressão da trinca (Tvergaard e Needleman, 1984; Stainier, 1996).

Na figura 60, apresenta-se a última configuração equilibrada atingida sem o emprego da eliminação de elementos. O elemento em vermelho está com fração volumétrica a 90% de  $f_U$ , valor tomado como limite para evitar problemas numéricos.

Nas figuras 61 e 62 apresentam-se os valores de fração volumétrica de vazios, pressão e deformação plástica ao final do cálculo, eliminando ou não elementos, respectivamente.

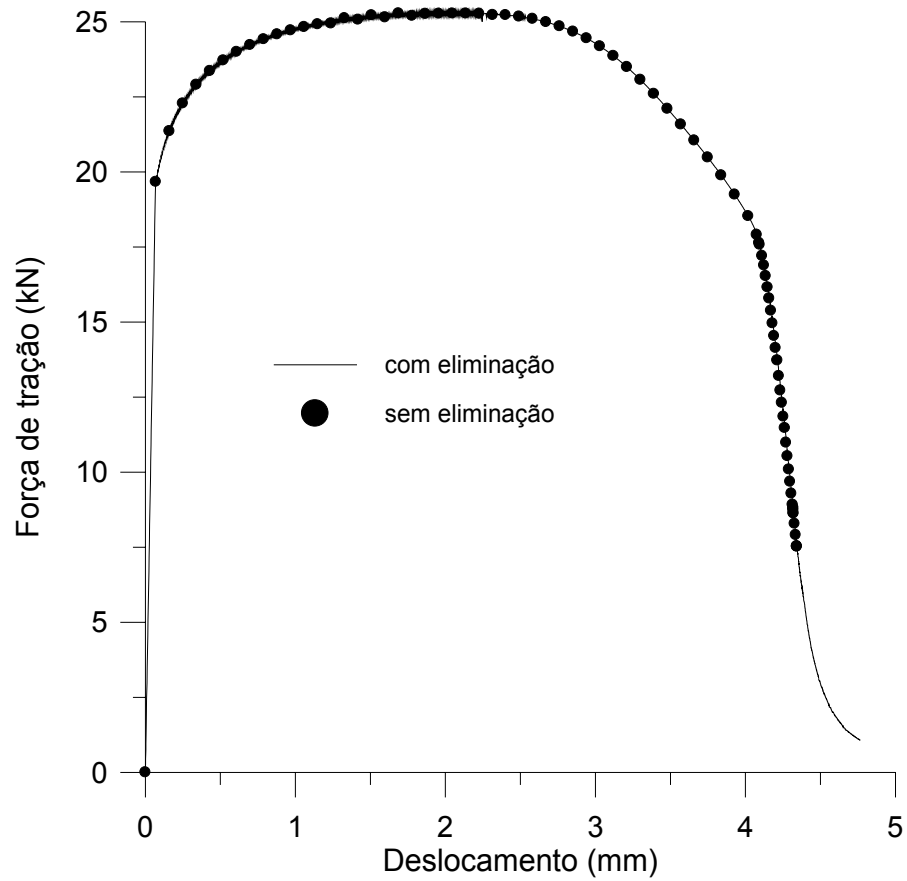


Figura 58: força de tração eliminando ou não elementos com ruptura local

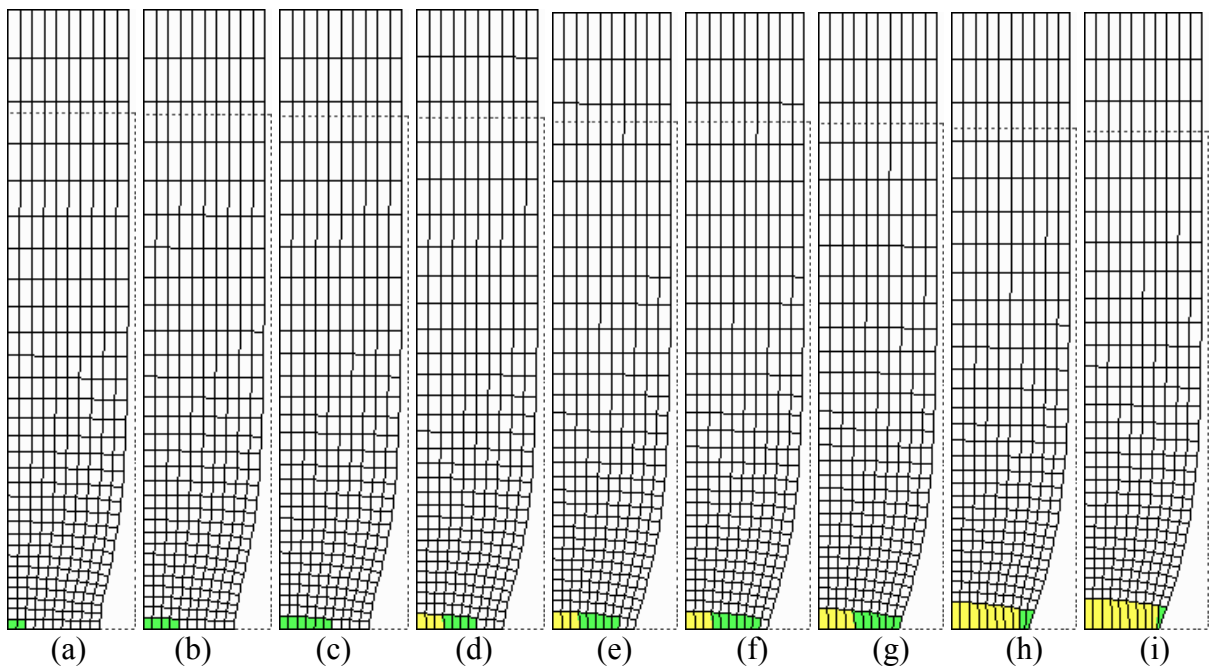


Figura 59: eliminação de elementos danificados

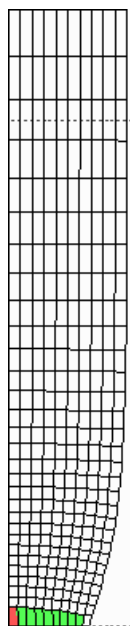


Figura 60: última configuração equilibrada atingida sem eliminação de elementos

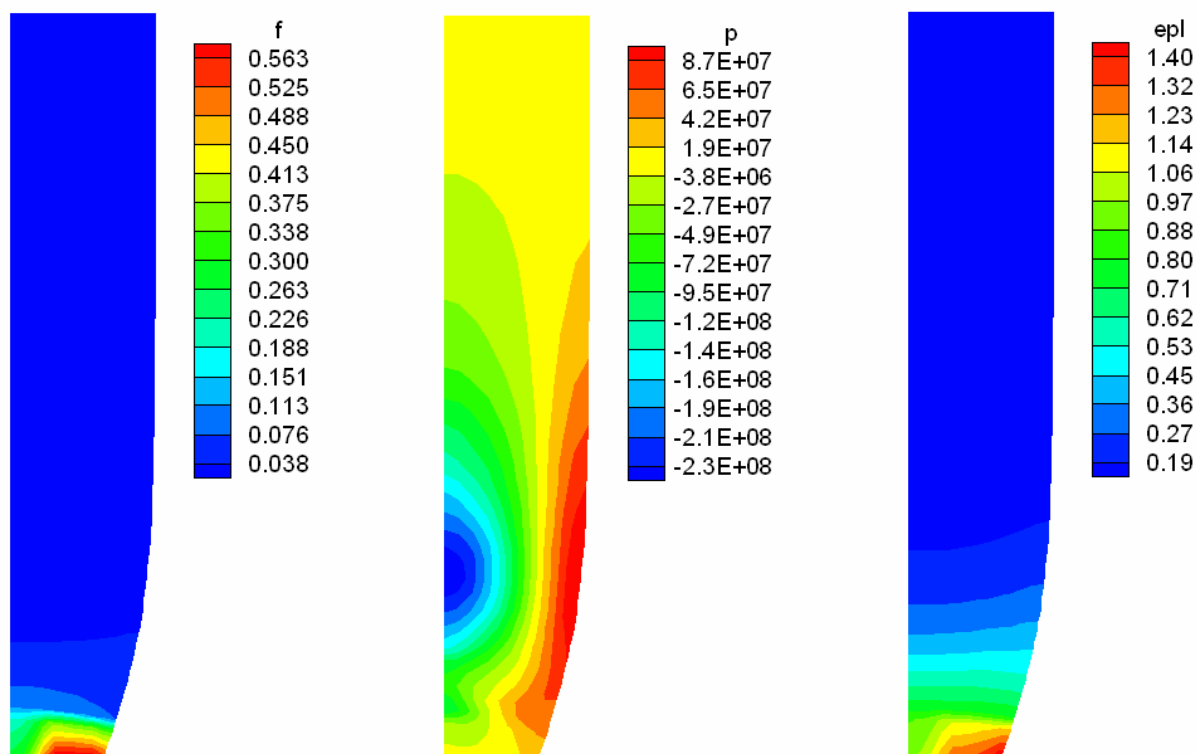


Figura 61: porosidade, pressão e def. plástica finais eliminando elementos

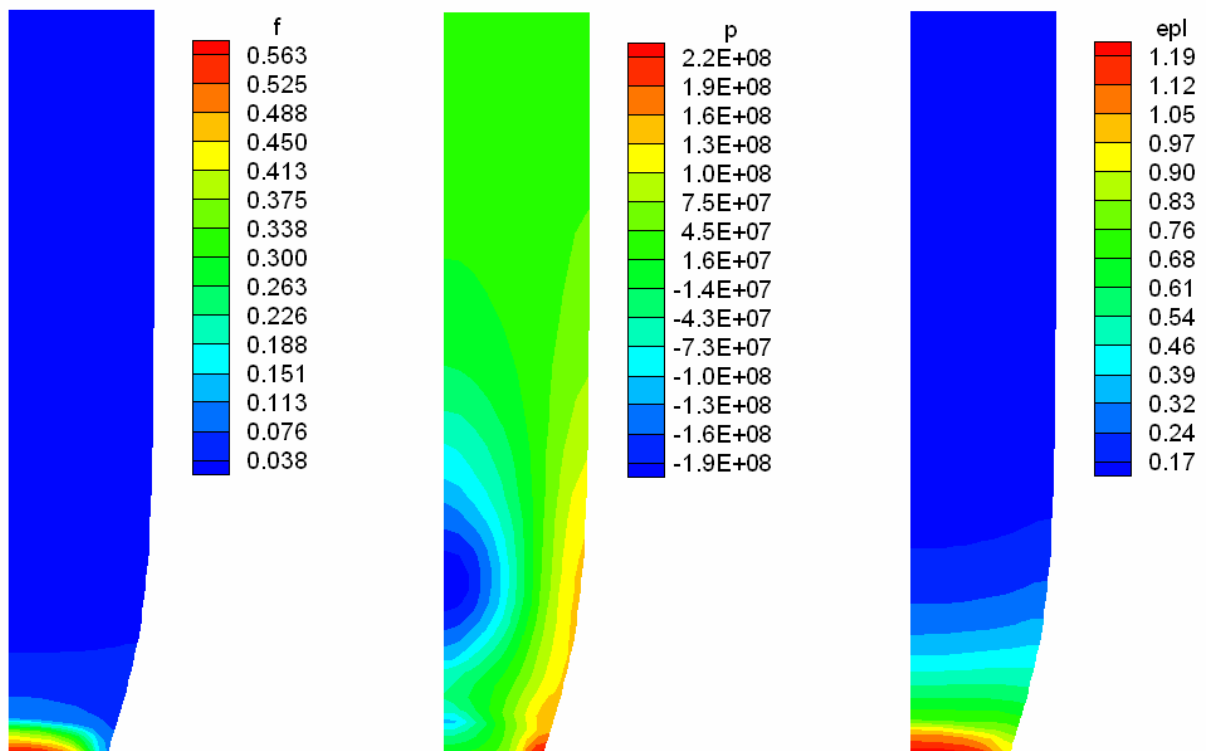


Figura 62: porosidade, pressão e def. plástica finais sem eliminar elementos

## 4.5 RESUMO E CONCLUSÕES

Neste capítulo, inicialmente, são discutidos alguns aspectos gerais do processo de integração de equações constitutivas. Após, é apresentado um esquema de integração de equações constitutivas que é implementado e testado, revelando boa robustez.

A seção 4.4.2 trata da simulação de ensaio de tração em barras cilíndricas. Mostra-se como a dimensão do entalhe empregado para dar origem à estrição pode influenciar na solução obtida. No mesmo exemplo, mostra-se como a implementação de um esquema de eliminação de elementos “rompidos” permite levar a solução avante, após a ruptura do primeiro elemento da malha. O esquema implementado, apesar de bastante simples e intuitivo, apresentou resultado considerado satisfatório.

## 5 A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA

Quando ocorrem grandes deformações plásticas em um tempo relativamente curto, como em conformação mecânica, é necessário considerar na determinação das tensões a energia dissipada por deformação plástica. A energia dissipada se transforma em calor, ocasionando aumento de temperatura na peça. A variação da temperatura provoca tensões térmicas e também alteração em propriedades mecânicas do material, notadamente na tensão de escoamento e constantes elásticas.

Essa combinação de influências é chamada acoplamento termo-mecânico. As grandezas térmicas influem no problema mecânico através da introdução de mudanças nas características mecânicas do material e da introdução de tensões térmicas. As grandezas mecânicas influem no problema térmico através da deformação plástica, que serve como fonte de calor. A uma maior temperatura correspondem menores módulo de elasticidade e tensão de escoamento. O efeito da temperatura é mais marcante na tensão de escoamento que nas constantes elásticas (Huetnik e van der Lugt, 1986).

A porosidade também intervém no acoplamento termo-mecânico. É razoável considerar que a porosidade afete algumas propriedades térmicas do material, notadamente aquelas que dependem da continuidade do material, como por exemplo calor específico e condutibilidade. Zavaliangos e Anand (1992) mostram como levar em conta tal tipo de influência. A presença de deformação térmica altera o estado de tensões, alterando a porosidade.

Na seção 5.1, mostra-se como é obtida a equação que dá as taxas de temperatura, levando em conta a parcela de energia dissipada por deformação plástica. Na seção 5.2, comenta-se a resolução do problema termo-mecânico acoplado, já que a variação de temperatura depende da deformação plástica e a deformação plástica depende da deformação térmica, que depende da variação de temperatura. A seção 5.3 contém as alterações no modelo de Gurson para levar em conta efeitos térmicos. A seção 5.4 contém as alterações no esquema de integração apresentado na seção 4.2 para levar em conta efeitos térmicos. Na seção 5.5 são apresentadas algumas aplicações.

## 5.1 A DEFORMAÇÃO COMO FONTE DE CALOR

O primeiro princípio da termodinâmica pode ser escrito

$$\rho \dot{u} = \sigma_{ij} D_{ij} + \rho r - q_{j,j} \quad (164)$$

onde  $u$  é a energia interna específica,  $\rho$  é a densidade de massa,  $r$  é a produção interna de calor e  $q_j$  o vetor fluxo de calor trocado com o meio externo ao domínio considerado.  $\sigma_{ij}$  são as tensões de Cauchy e  $D_{ij}$  o tensor taxa de deformação, que pode ser decomposto de forma aditiva em duas parcelas, uma irreversível  $D_{ij}^{irr}$  e outra reversível  $D_{ij}^{rev}$ , sendo que somente esta última provoca tensões. A equação 164 pode ser interpretada como sendo a equação que traduz a conservação de energia.

O segundo princípio da termodinâmica, expresso através da desigualdade de Clausius-Duhem, diz que a taxa de aumento de entropia  $\eta$  do sistema material em estudo é sempre maior ou igual à taxa de entrada de entropia no sistema.

$$\frac{d\eta}{dt} \geq \frac{r}{T} - \frac{1}{\rho T} q_{j,j} \quad (165)$$

A produção de entropia é dada por (Malvern, 1969)

$$\gamma \equiv \dot{\eta} - \frac{r}{T} + \frac{1}{\rho T} q_{j,j} - \frac{1}{\rho T^2} q_j T_{,j} \quad (166)$$

podendo ser separada em duas parcelas, uma local  $\gamma_{local}$  e outra relativa à condução  $\gamma_{cond}$ .

$$\gamma = \gamma_{local} + \gamma_{cond} \quad (167)$$

$$\gamma_{local} = \dot{\eta} - \frac{r}{T} + \frac{1}{\rho T} q_{j,j} \quad (168)$$

$$\gamma_{cond} = -\frac{1}{\rho T^2} q_j T_{,j} \quad (169)$$

Tomando a equação 164 e isolando  $r$ , têm-se que

$$r = \dot{u} - \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} + \frac{1}{\rho} q_{j,j} \quad (170)$$

Substituindo a equação 170 na equação 166 resulta

$$\gamma = \dot{\eta} - \frac{\dot{u}}{T} + \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{1}{\rho T^2} q_j T_{,j} \quad (171)$$

e levando em conta a equação 169, resulta da equação 171 que

$$\gamma_{local} = \dot{\eta} - \frac{\dot{u}}{T} + \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij} D_{ij} \quad (172)$$

Define-se a chamada energia livre de Helmholtz  $\psi$  como

$$\psi = \psi\{\varepsilon_{ij}^{rev}, \alpha, T\} = u - T\eta \quad (173)$$

onde  $\alpha$  são variáveis internas. A taxa da energia livre de Helmholtz pode ser escrita

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^{rev}} D_{ij}^{rev} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} = \dot{u} - T\dot{\eta} - \dot{T}\eta \quad (174)$$

e, da equação 174, isolando a taxa de entropia resulta

$$\dot{\eta} = \frac{\dot{u}}{T} - \frac{\dot{\psi}}{T} - \frac{\dot{T}}{T} \eta \quad (175)$$

Tomando a equação 172 e substituindo a equação 175 resulta

$$\gamma_{local} = \frac{1}{\rho T} \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{\dot{\psi}}{T} - \frac{\dot{T}}{T} \eta \quad (176)$$

Partindo da função energia livre de Helmholtz, é possível derivá-la em relação a  $T$ , obtendo

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (177)$$

e em seguida, empregando a regra da cadeia, obter a taxa da equação 177 multiplicada pela densidade  $\rho$

$$\rho \dot{\eta} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial T} \right) = -\rho \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^{rev} \partial T} D_{ij}^{rev} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial T} \dot{\alpha} \right) \quad (178)$$

Definindo

$$c = -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \quad (179)$$

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^{rev}} \quad (180)$$



$$A = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \quad (181)$$

e substituindo as equações 179, 180 e 181 na equação 178 resulta

$$\rho \dot{\eta} = \rho c \frac{\dot{T}}{T} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} D_{ij}^{rev} + \frac{\partial A}{\partial T} \dot{\alpha} \quad (182)$$

Tomando a equação 168 multiplicada por  $\rho T$  é possível escrever

$$\rho T \gamma_{local} - \rho T \dot{\eta} + \rho r - q_{j,j} = 0 \quad (183)$$

Substituindo a equação 182 na equação 183 obtém-se

$$\rho T \gamma_{local} - \rho c \dot{T} + T \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} D_{ij}^{rev} - \frac{\partial A}{\partial T} \dot{\alpha} \right) + \rho r - q_{j,j} = 0 \quad (184)$$

Tomando a equação 173, derivando em relação ao tempo e multiplicando pela densidade  $\rho$  obtém-se

$$\rho \dot{\psi} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \psi \{ \varepsilon_{ij}^{rev}, \alpha, T \} = \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^{rev}} D_{ij}^{rev} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \right) \quad (185)$$

que, considerando as equações 179, 180 e 181, pode ser reescrita

$$\rho \dot{\psi} = \sigma_{ij} D_{ij}^{rev} - \rho \eta \dot{T} - A \dot{\alpha} \quad (186)$$

Substituindo a equação 186 na equação 176 multiplicada pela temperatura  $T$  e pela densidade  $\rho$

$$\rho T \gamma_{local} = -\sigma_{ij} D_{ij}^{rev} + A \dot{\alpha} + \sigma_{ij} D_{ij} \quad (187)$$

$$\rho T \gamma_{local} = \sigma_{ij} D_{ij}^{irr} + A \dot{\alpha} \quad (188)$$

Substituindo a equação 188 na equação 184 chega-se a

$$\sigma_{ij} D_{ij}^{irr} + A \dot{\alpha} - \rho c \dot{T} + T \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} D_{ij}^{rev} - \frac{\partial A}{\partial T} \dot{\alpha} \right) + \rho r - q_{j,j} = 0 \quad (189)$$

$$\rho c \dot{T} = -q_{j,j} + \rho r + \sigma_{ij} D_{ij}^{irr} + A \dot{\alpha} + T \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} D_{ij}^{rev} - \frac{\partial A}{\partial T} \dot{\alpha} \right) \quad (190)$$

$$\rho c \dot{T} = -q_{j,j} + \rho r + \sigma_{ij} D_{ij}^{irr} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^{rev} \partial T} D_{ij}^{rev} + \rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha \partial T} \dot{\alpha} \quad (191)$$

$$\rho c \dot{T} = -q_{j,j} + \rho r + \sigma_{ij} D_{ij}^{irr} - \rho \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T} \right) \dot{\alpha} + \rho T \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^{rev} \partial T} D_{ij}^{rev} \quad (192)$$

O termo

$$\rho \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T} \right] \dot{\alpha} \quad (193)$$

na equação 192 representa a energia não recuperável armazenada no material, associada ao aumento de discordâncias (Rozenwald, 1997). Tal parcela é da ordem de 5% a 15% da energia associada à deformação plástica. Assim, a equação 192 pode ser modificada através

da introdução de um coeficiente  $\chi$  variável entre 0,85 e 0,95. Assim, têm-se que

$$\rho c \dot{T} = \chi \sigma_{ij} D_{ij}^{irr} + \rho r - q_{j,j} + \rho T \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^{rev} \partial T} \right) D_{ij}^{rev} \quad (194)$$

$$\dot{W}^{te} = \rho T \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^{rev} \partial T} \right) D_{ij}^{rev} \quad (195)$$

A parcela de calor gerado por deformação reversível (equação 195) é pequena, sendo desprezada por alguns autores (Simo e Miehe, 1992). Rozenwald (1997) a considera, para materiais hiperelásticos ou hipoeelásticos plasticamente incompressíveis, alegando benefícios do ponto de vista de estabilidade no esquema de integração da equação 194 para a obtenção das temperaturas.

Alguns autores consideram o acoplamento entre problemas termo-mecânicos e dano sem levar em conta condução de calor e trocas com o meio, ou seja, processo adiabático (Mathur *et al.*, 1994; Norr *et al.*, 1998). Nesse caso, a equação 194 é reduzida ficando

$$\rho c \dot{T} = \chi \sigma_{ij} D_{ij}^{irr} \quad (196)$$

## 5.2 SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS TÉRMICO E MECÂNICO

Para resolver a equação 194 e determinar o incremento de temperatura, é necessário o emprego de um processo de discretização espacial associado a um processo de integração temporal, de forma semelhante ao que se fez com a equação 46, correspondente à forma fraca das equações de equilíbrio.

O acoplamento termo-mecânico fica evidente através de duas equações: a equação 194 mostra que para a determinação do incremento de temperatura é necessário o conhecimento

da taxa de deformação plástica. Por outro lado, a taxa de deformação plástica é obtida a partir da taxa de deformação total, descontando-se a taxa de deformação térmica e a taxa de deformação elástica (equação 334).

Para resolver em conjunto as equações resultantes da discretização em elementos finitos correspondente ao problema termo-mecânico, duas formas são usualmente empregadas: os esquemas monolíticos ou os esquemas particionados (*staggered* ou *étagé*).

Os esquemas monolíticos têm como característica o tratamento do problema termo-mecânico simultaneamente, trabalhando com um sistema de equações com graus de liberdade térmicos e mecânicos, sistema esse não-simétrico. Além de mais custosos do ponto de vista do tamanho do sistema de equações a resolver, apresentam problemas com relação ao tamanho do incremento a ser empregado. A parte térmica pode exigir um incremento bastante diferente da parte mecânica, e o algoritmo fica limitado pelo menor dos dois. Como vantagem, apresentam uma grande robustez.

Os esquemas particionados tratam o problema termo-mecânico em duas etapas: uma etapa mecânica que se desenvolve a temperatura constante, seguida por uma etapa térmica. Alternativamente, a fase mecânica pode desenvolver-se à entropia constante. Entre outras, apresentam a vantagem da solução de dois sistemas de equações menores ao invés de um maior. Além disso, o sistema correspondente ao problema mecânico pode ser simetrizado. Outra vantagem seria o fato de poder trabalhar com incrementos de tempo diferentes em uma e outra etapa.

O Metafor permite ao usuário optar entre o emprego de um esquema monolítico ou particionado (Rozenwald, 1997).

### 5.3 O EFEITO DA TEMPERATURA NO MODELO DE GURSON

As constantes da superfície de escoamento  $\alpha_i$  introduzidas por Tvergaard (1981) representam a maior ou menor influência da fração volumétrica de vazios e da pressão sobre a superfície de escoamento. Não se encontrou em trabalhos consultados (Zavaliangos e Anand, 1992; Srikanth e Zabarás, 1999; Alegre e Gutiérrez-Solana, 2004) menção a uma eventual dependência das constantes  $\alpha_i$  em função da temperatura. Além disso, o próprio Tvergaard,

em um trabalho posterior onde considera acoplamento termo-mecânico adiabático (Mathur *et al.*, 1994), trata os parâmetros  $\alpha_i$  como independentes da temperatura. Alegre e Gutiérrez-Solana (2004) consideram o parâmetro  $f_C$  como dependente do envelhecimento à altas temperaturas.

Assim, ao menos para porosidades abaixo do início da coalescência, parece razoável considerar que o acoplamento entre efeitos térmicos e a superfície de escoamento de Gurson se dê apenas através da dependência entre a tensão de escoamento e a temperatura. Assim,

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} - \omega \{p, \sigma_y \{T\}, f\} \sigma_y \{T\} = 0 \quad (197)$$

onde  $T$  representa a temperatura.

Quanto às constantes elásticas, estas levam em conta a influência de temperatura e porosidade. A influência da porosidade é considerada da mesma forma que para problemas isotérmicos (Stainier, 1996), ficando a dependência da temperatura implícita.

$$K \{f, T\} = \frac{4K_0 \{T\} G_0 \{T\} (1-f)}{4G_0 \{T\} + 3K_0 \{T\} f} \quad (198)$$

$$G \{f, T\} = \frac{G_0 \{T\} (1-f)}{1 + \frac{6K_0 \{T\} + 12G_0 \{T\}}{9K_0 \{T\} + 8G_0 \{T\}} f} \quad (199)$$

O subíndice  $0$  está associado ao material íntegro, sem porosidade, com dependência apenas da temperatura.

Para a obtenção da taxa de deformação plástica admite-se plasticidade associada, assim,

$$D_{kl}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{kl}} \quad (200)$$

O tensor taxa de deformação térmica é obtido empregando a hipótese clássica (Rozenwald, 1997) da variação de temperatura provocar apenas deformação volumétrica,

$$D_{kl}^{th} = \beta \dot{T} \delta_{kl} \quad (201)$$

O fato de se considerar efeitos térmicos não altera a consideração das tensões serem provocadas unicamente por deformações elásticas (Kleiber, 1991; Zavalianos e Anand, 1992). Considerando a decomposição do tensor taxa de deformação detalhada no apêndice B, a taxa corrotacional de tensões de Cauchy em presença de deformação térmica pode ser escrita

$$\dot{\sigma}_{ij} = \hat{H}_{ijkl} (D_{kl} - D_{kl}^p - D_{kl}^{th}) \quad (202)$$

onde o tensor elástico  $\hat{H}_{ijkl}$  carrega os efeitos de porosidade e temperatura, calculado a partir de  $G\{f, T\}$  e  $K\{f, T\}$  provenientes das equações 198 e 199. Um resumo do modelo de Gurson considerando os efeitos térmicos é apresentado no quadro 5.

Quadro 5: resumo do modelo de Gurson considerando efeitos térmicos

Comportamento reversível:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \hat{H}_{ijkl} (D_{kl} - D_{kl}^p - D_{kl}^{th}) \quad \hat{H}_{ijkl} = K\{f, T\} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G\{f, T\} [\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}]$$

$$K\{f, T\} = \frac{4K_0\{T\}G_0\{T\}(1-f)}{4G_0\{T\} + 3K_0\{T\}f} \quad G\{f, T\} = \frac{G_0\{T\}(1-f)}{1 + \frac{6K_0\{T\} + 12G_0\{T\}}{9K_0\{T\} + 8G_0\{T\}}f}$$

Comportamento irreversível:

$$\Phi = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{ij} s_{ij} - \omega\{p, \sigma_y\{T\}, f\} \sigma_y\{T\} = 0$$

$$\omega\{p, \sigma_y\{T\}, f\} = \left[ 1 - 2\alpha_1 f \cosh\left(\frac{\alpha_2(3p)}{2\sigma_y\{T\}}\right) + \alpha_3 f^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij} \quad p = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}$$

$$D_{ij}^p = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad D_{ij}^{th} = \beta \dot{T} \delta_{ij}$$

Lei de evolução da fração volumétrica de vazios  $f$ :

$$\dot{f} = \begin{cases} \dot{f}_n + \dot{f}_g & f \leq f_c \\ \dot{f}_c & f > f_c \end{cases}$$

com

$$\dot{f}_n = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon^p - \varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right] \dot{\varepsilon}^p \quad \text{nucleação}$$

$$\dot{f}_g = (1-f) D_{ii}^p \quad \text{crescimento}$$

$$\dot{f}_c = \frac{f_U - f_c}{\Delta \varepsilon} \dot{\varepsilon}^p \quad \text{coalescência}$$

## 5.4 CÁLCULO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS

Sejam dois instantes de tempo subseqüentes  $n$  e  $n+1$ , separados por um intervalo de tempo  $\Delta t$ . No instante  $n$  são conhecidas todas as grandezas relativas ao problema, quais sejam, coordenadas, temperaturas, deformações e tensões. No instante  $n+1$  se conhece apenas as coordenadas e as temperaturas. Busca-se determinar a variação nas tensões e nas demais variáveis internas quando se passa do instante  $n$  ao instante  $n+1$ , problema que foi resolvido para o caso isotérmico na seção 4.2.2. O algoritmo apresentado na seção 4.2.2 sofre pequenas alterações. É introduzida uma discretização do tipo ponto-médio generalizado para a temperatura, dentro da filosofia do procedimento apresentado por Zhang e Niemi (1995a),

$$T_{n+\alpha} = (1-\alpha)T_n + \alpha T_{n+1} \quad (203)$$

com  $0 \leq \alpha \leq 1$ , de forma semelhante ao que é feito com as tensões e demais variáveis internas. A diferença é que a temperatura  $T_{n+1}$  é conhecida. Assim, é possível calcular a integral do tensor taxa de deformação térmica, para aplicá-la na expressão do previsor elástico.

$$\Delta E_{kl}^{N,th} = \int_t^{t+\Delta t} D_{kl}^{th} dt = \beta \Delta T \delta_{kl} \quad (204)$$

$$(\sigma_{ij})_{n+1}^T = (\sigma_{ij})_n + \int_t^{t+\Delta t} \hat{H}_{ijkl} (D_{kl} - D_{kl}^{th}) dt = (\sigma_{ij})_n + \hat{H}_{ijkl} (\Delta E_{kl}^N - \Delta E_{kl}^{N,th}) \quad (205)$$

Caso o previsor de tensões calculado conforme a equação 205 recaia fora da superfície de escoamento, será aplicada uma correção plástica.

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = (\sigma_{ij})_{n+1}^T - \int_t^{t+\Delta t} \hat{H}_{ijkl} (D_{kl}^p) dt \quad (206)$$

O quadro 6 mostra um resumo do esquema de integração de tensões.



Quadro 6: integração de tensões corrotacionais de Cauchy no modelo de Gurson com consideração da temperatura

Previsor elástico:  $(\sigma_{ij})_{n+1}^T = (\sigma_{ij})_n + \hat{H}_{ijkl} (\Delta E_{kl}^N - \Delta E_{kl}^{N,th})_{n+1}$

Teste da superfície de escoamento:  $\Phi\{(\sigma_{ij})_{n+1}^T, (H_t)_n, T\} \leq 0$

Se  $\Phi\{(\sigma_{ij})_{n+1}^T, (H_t)_n, T\} \leq 0$  então,

$$(\sigma_{ij})_{n+1} = (\sigma_{ij})_{n+1}^T$$

$$(H_t)_{n+1} = (H_t)_n$$

senão, aplica-se o corretor plástico:

- (a) resolve-se o sistema abaixo, determinando  $\rho_p$  e  $\rho_q$

$$A_{11}\rho_p + A_{12}\rho_q = b_1$$

$$A_{21}\rho_p + A_{22}\rho_q = b_2$$

- (b) corrige-se  $\Delta E_p$  e  $\Delta E_q$  e após as tensões e variáveis internas:

$$\Delta E_p = \Delta E_p + \rho_p$$

$$\Delta E_q = \Delta E_q + \rho_q$$

$$p_{n+1} = p_{n+1}^T + K\{f, T\}\Delta E_p$$

$$(s_{ij})_{n+1} = (s_{ij})_{n+1}^T - 3G\{f, T\}\Delta E_q \frac{(s_{ij})_{n+\alpha}}{q_n}$$

$$(\Delta H_t)_{n+1} = (h_t)_{n+\alpha} \{\Delta E_p, \Delta E_q, p_{n+\alpha}, (s_{ij})_{n+\alpha}, (H_t)_{n+\alpha}\}$$

- (c) se  $\Phi\{(\sigma_{ij})_{n+1}, (H_t)_{n+1}, T\} \leq 0$ , convergiu. Senão, vai para (a);

## 5.5 APLICAÇÕES

Nesta seção, estudam-se três problemas considerando acoplamento entre efeitos térmicos e dano. O primeiro problema trata da compressão de um cilindro. Mostra-se que o efeito térmico aumenta o amolecimento introduzido pelo dano. No segundo exemplo, estuda-se a tração de uma barra considerando ou não efeitos térmicos. Mostra-se que a estricção se forma de maneira natural se for considerado acoplamento termo-mecânico, sem a necessidade de utilizar entalhes. O último exemplo procura mostrar de forma simplificada a fragilização que ocorre com metais sujeitos a baixas temperaturas.

### 5.5.1 Compressão de cilindro

Estuda-se o caso de um cilindro constituído de material elastoplástico com endurecimento isótropo, com altura de 36 mm e raio de 9 mm, sujeito a compressão axial (Cunda *et al.*, 1997). A altura do cilindro é reduzida em 44%, durante 1,6 s. Na determinação da configuração atualizada emprega-se o algoritmo para análise dinâmica explícita. Admite-se que todo o trabalho plástico se transforma em calor e que não há troca com o meio (processo adiabático). Considera-se contato colante na base do cilindro. Emprega-se uma malha de elementos finitos isoparamétricos de 4 nós e tamanho uniforme. Discretiza-se apenas um quarto da peça, devido à simetria. Admite-se que, neste exemplo, algumas propriedades mecânicas do material não variam com a temperatura. São elas:  $E = 210$  GPa,  $\nu = 0,28$  e densidade  $\rho = 7830$  kg/m<sup>3</sup>. A temperatura inicial é de 293 K e o coeficiente de dilatação térmica vale  $\beta = 15 \times 10^{-6}$  K<sup>-1</sup>. O calor específico  $c$  vale 460 Jkg<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup> e a condutibilidade térmica  $k = 46$  Wm<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>. A tensão de escoamento inicial  $\sigma_y^0$  e o coeficiente de endurecimento linear  $h$  são termo-dependentes, assumindo os valores apresentados no quadro 7. Os parâmetros empregados no modelo de dano são  $f_N = 0,04$ ;  $\varepsilon_N = 0,3$ ;  $s_N = 0,1$ ;  $\alpha_I = 1,5$ ;  $\alpha_2 = 1,0$ .

Apresenta-se a malha inicial e a configuração final (figura 63) após a compressão. Apresenta-se também a evolução da força de compressão (figura 64), considerando-se comportamentos elastoplástico com e sem dano e comportamentos termo-elastoplástico com e sem dano. Os aumentos de temperatura no ponto central do cilindro e na superfície externa, à

meia altura, são mostrados na figura 65. A força de conformação (figura 64) e o aumento de temperatura (figura 65) não mudam sensivelmente quando se considera ou não o dano, devido à baixa porosidade envolvida no processo (figura 67).

Quadro 7: tensão de escoamento e parâmetro de endurecimento

Temperatura (K)	$\sigma_y^0$ (MPa)	$h$ (MPa)
294	320	350
383	285	320
433	265	300
508	220	250
573	200	200

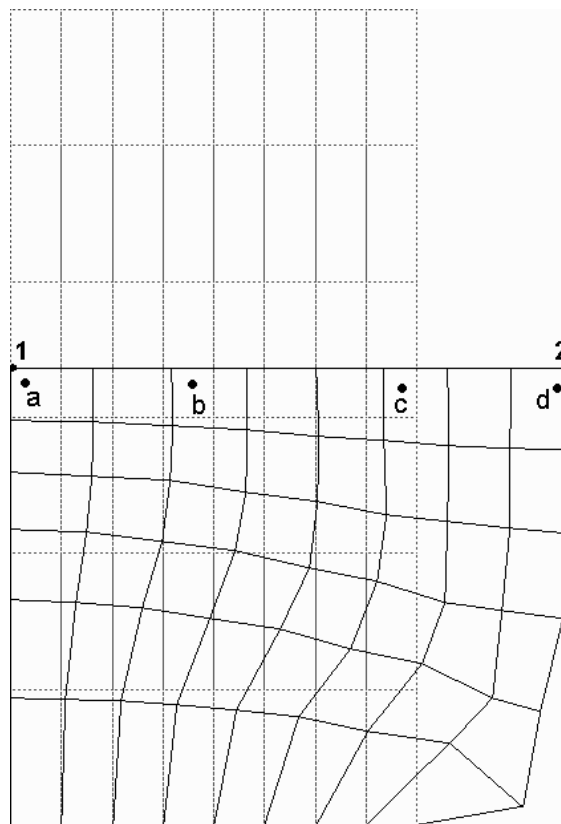


Figura 63: malha, configuração inicial e configuração final

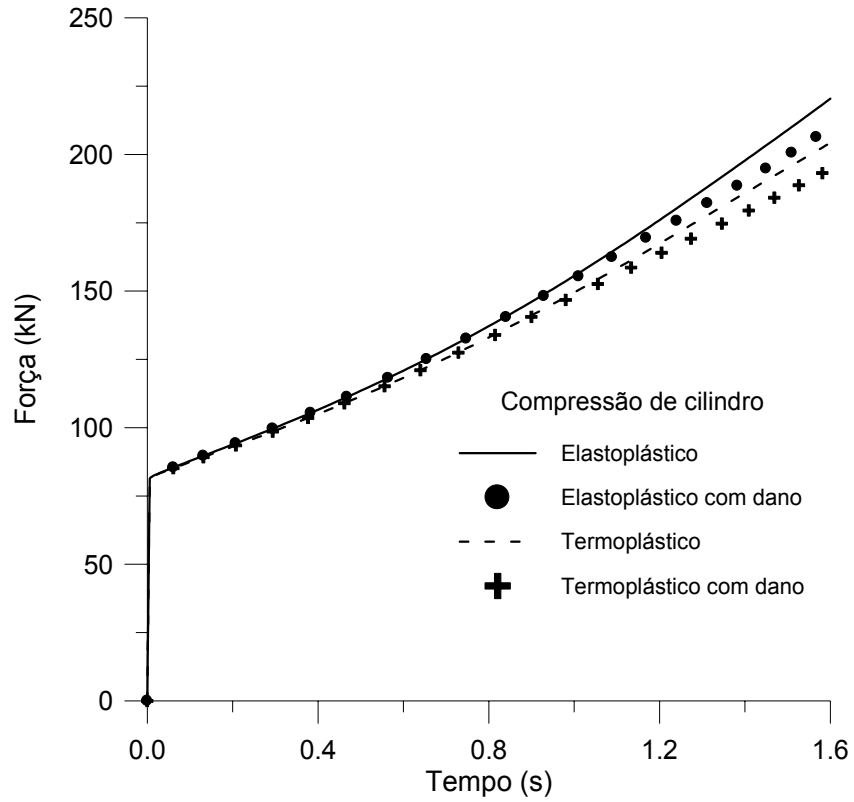


Figura 64: força aplicada *versus* tempo

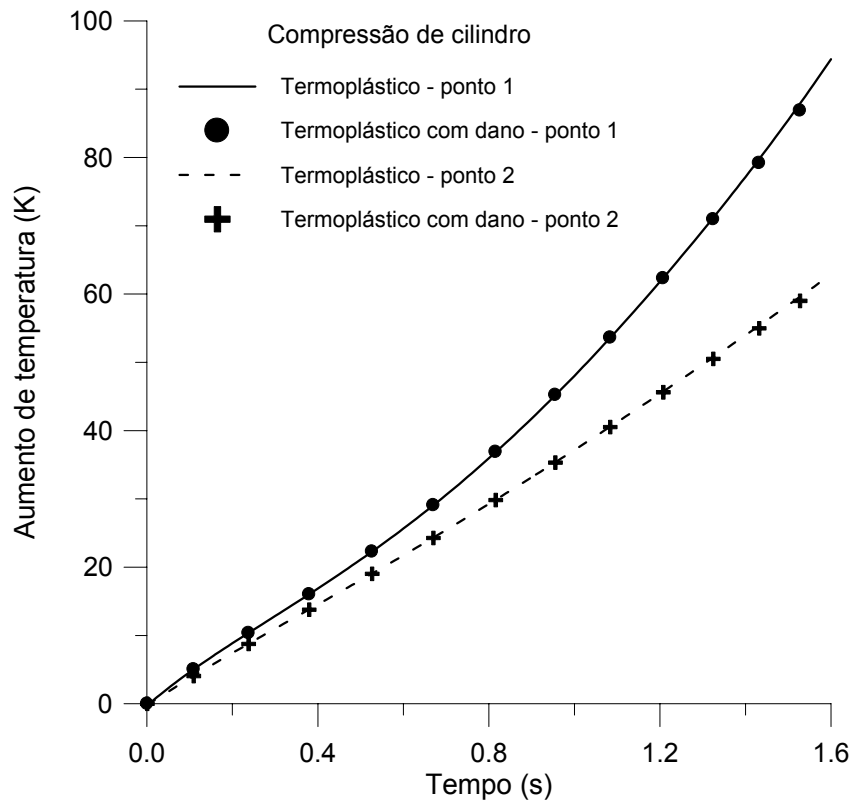


Figura 65: aumento de temperatura *versus* tempo

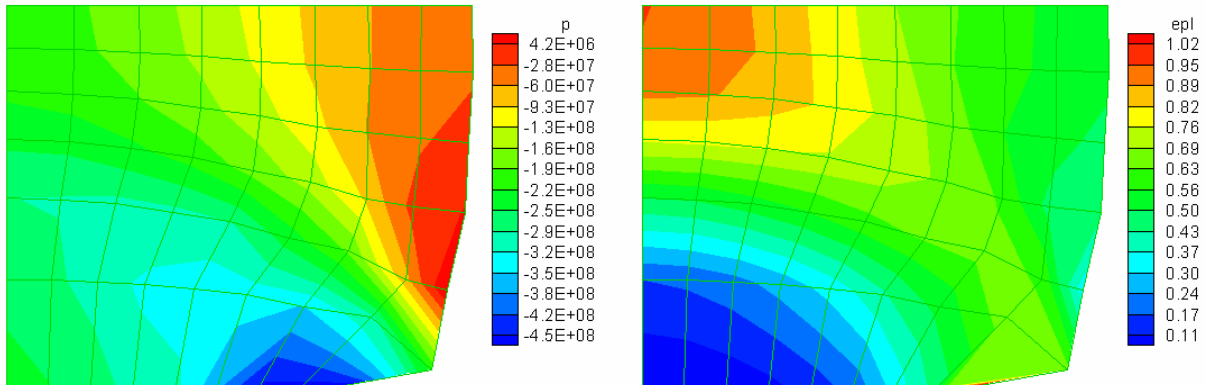


Figura 66: pressão e deformação plástica finais – termoplástico com dano

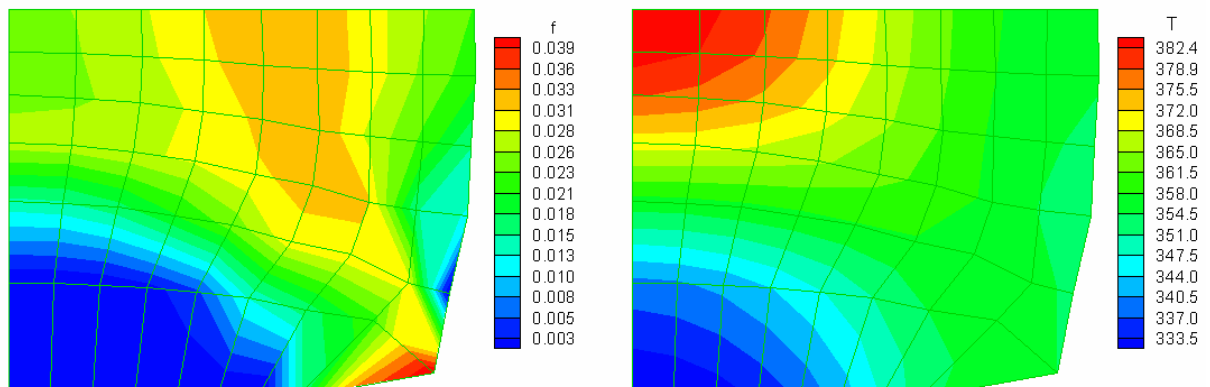


Figura 67: porosidade e temperatura finais – termoplástico com dano

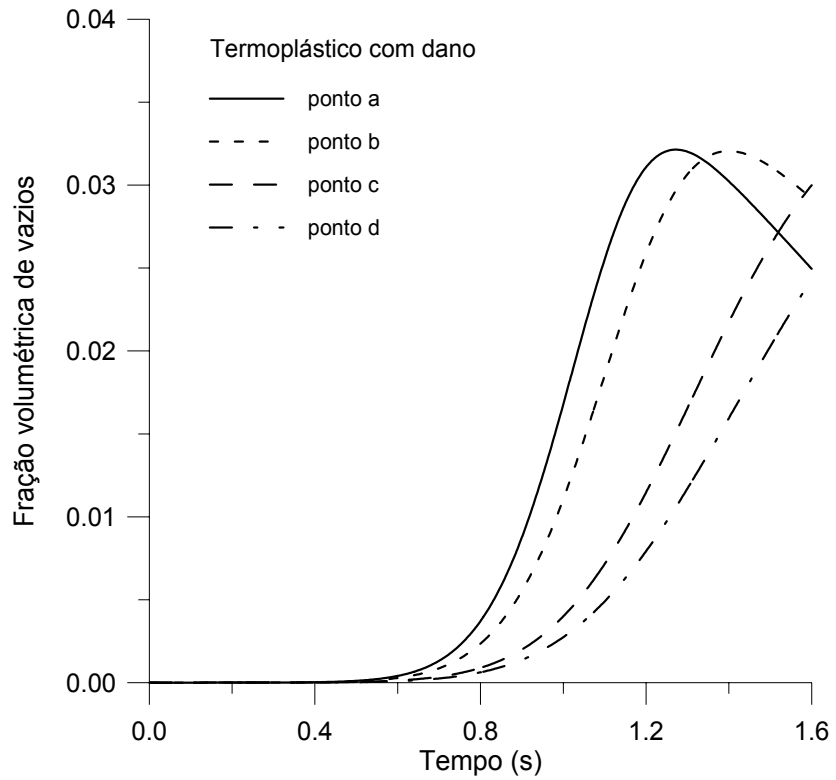


Figura 68: evolução da porosidade – termoplástico com dano

Pela análise da distribuição final de porosidade (figura 67) observa-se que a porosidade máxima não se encontra nem na zona onde a deformação plástica é máxima nem na zona onde a pressão é máxima, mas numa zona intermediária entre essas. A figura 68 mostra a evolução da porosidade em 4 regiões (pontos *a*, *b*, *c* e *d* da figura 63), na seção à meia altura do cilindro. Observando-se a figura 68 é possível perceber que, na zona central do cilindro, após ocorrida a nucleação, a porosidade começa a decrescer devido à compressão.

Os resultados até a figura 68 foram obtidos admitindo-se nucleação tanto em tração quanto em compressão. Considerando a possibilidade de nucleação apenas em tração, a distribuição de porosidade final resulta substancialmente diferente (figura 69). A força aplicada praticamente não difere em relação ao caso sem dano, novamente devido aos baixos níveis de porosidade envolvidos.

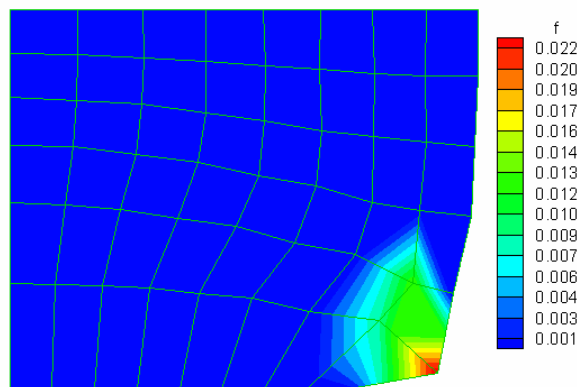


Figura 69: porosidade final – termoplástico com dano, nucleação em tração

Considera-se que o procedimento implementado mostra-se capaz de reproduzir o amolecimento do material causado pelos efeitos de dano e aquecimento, mesmo com a adoção de um acoplamento simples entre esses efeitos.

### 5.5.2 Teste de tração axial

Neste exemplo, estuda-se a tração de uma barra axissimétrica. O problema é analisado segundo quatro abordagens: elastoplástica, elastoplástica com dano, termo-elastoplástica e termo-elastoplástica com dano (Cunda *et al.*, 1998).

A altura  $h$  da barra é de 53,334 mm e o raio  $R_0$  de 6,413 mm. É empregada uma malha

de elementos isoparamétricos de 4 nós, com integração reduzida na parte volumétrica (Q4-VRI). O carregamento é aplicado através de uma velocidade de deslocamento vertical prescrita nos nós do topo da barra, da ordem de 1 mm/s. Estudam-se três geometrias: duas apresentando imperfeição à meia altura da barra, na parte externa, com o objetivo de dar origem à estricção, e uma barra homogênea.

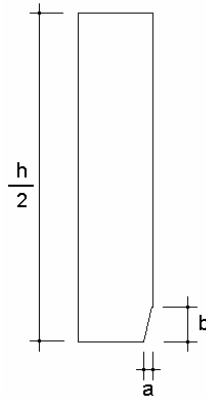


Figura 70: dimensões dos entalhes

A imperfeição é introduzida através de uma variação de raio na metade da altura da barra, sendo o raio menor único, da ordem de  $0,995 R_0$ . As dimensões que caracterizam as imperfeições são:  $a = 0,032$  mm e  $b = 0,82$  mm (figura 70) para o denominado entalhe 1 e  $a = 0,032$  mm e  $b = 8,62$  mm para o entalhe 2. A relação  $b/h$  é da ordem de 3,07% para o entalhe 1 e de 32,3% para o entalhe 2. Na figura 71, mostra-se a malha empregada para discretizar  $\frac{1}{4}$  da barra, considerando-se a simetria existente.

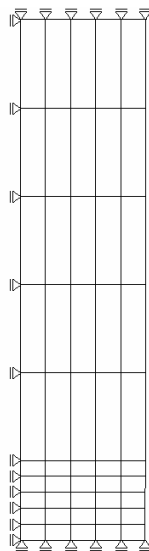


Figura 71: malha com o entalhe 2 e condições de contorno empregadas

Assume-se que 90% da energia dissipada por deformação plástica se transforma em calor, que pode ser dissipado pela parede externa vertical da peça (convecção). As propriedades mecânicas, que neste exemplo se admitem independentes da temperatura, são: módulo de elasticidade  $E = 206,9$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e densidade  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>. A temperatura inicial é  $T_{ref} = 293$  K e o coeficiente de dilatação térmica  $\beta = 10 \times 10^{-6}$  K<sup>-1</sup>. O calor específico é da ordem de  $c = 460$  Jkg<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup> e a condutibilidade de  $k = 45$  Wm<sup>-1</sup>K<sup>-1</sup>. O parâmetro de convecção é  $h_c = 17,8$  W/m<sup>2</sup>K. Os parâmetros de dano adotados são  $f_N = 0,04$ ,  $\varepsilon_N = 0,3$ ,  $s_N = 0,1$ ,  $f_C = 0,55$ ,  $\alpha_1 = 1,5$ , e  $\alpha_2 = 1,0$ . A tensão de escoamento é dada por

$$\sigma_y(T) = \sigma_y^0(T) + (\sigma_y^\infty(T) - \sigma_y^0(T))[1 - \exp(-\delta \bar{\varepsilon}^P)]$$

$$\sigma_y^0(T) = \sigma_y^0(T_{ref})[1 - 0,002(T - T_{ref})]$$

$$\sigma_y^\infty(T) = \sigma_y^\infty(T_{ref})[1 - 0,002(T - T_{ref})]$$

onde  $\sigma_y^0(T_{ref}) = 450$  MPa,  $\sigma_y^\infty(T_{ref}) = 715$  MPa,  $\delta = 16,93$  e  $T_{ref} = 293$  K.

Na figura 72, apresentam-se isolinhas finais de deformação plástica, pressão, fração volumétrica de vazios e temperatura, para análise termo-elastoplástica com dano sem o emprego de entalhe.

As curvas carga-deslocamento para algumas combinações de tipo de análise e geometria são mostradas na figura 73. Nota-se que as barras com entalhes têm comportamento diferente da hipótese de análise considerada mais rigorosa, ou seja, termoplasticidade com convecção, dano e sem entalhes. Verifica-se que a presença dos entalhes afeta o comportamento pós-pico da curva carga-deslocamento, como relatado por García-Garino (1996b; 1997).

Observa-se que as barras com entalhe 1 apresentam uma carga crítica maior. Isso se verifica tanto na análise elastoplástica quanto na análise termo-elastoplástica (figura 74).

A conclusão a que se chega é que a introdução de entalhes para dar origem à estricção introduz perturbações consideráveis. Assim, para fugir do efeito introduzido pela presença dos entalhes, é conveniente o emprego de uma abordagem termo-elastoplástica, quando então a estricção se forma de maneira natural.



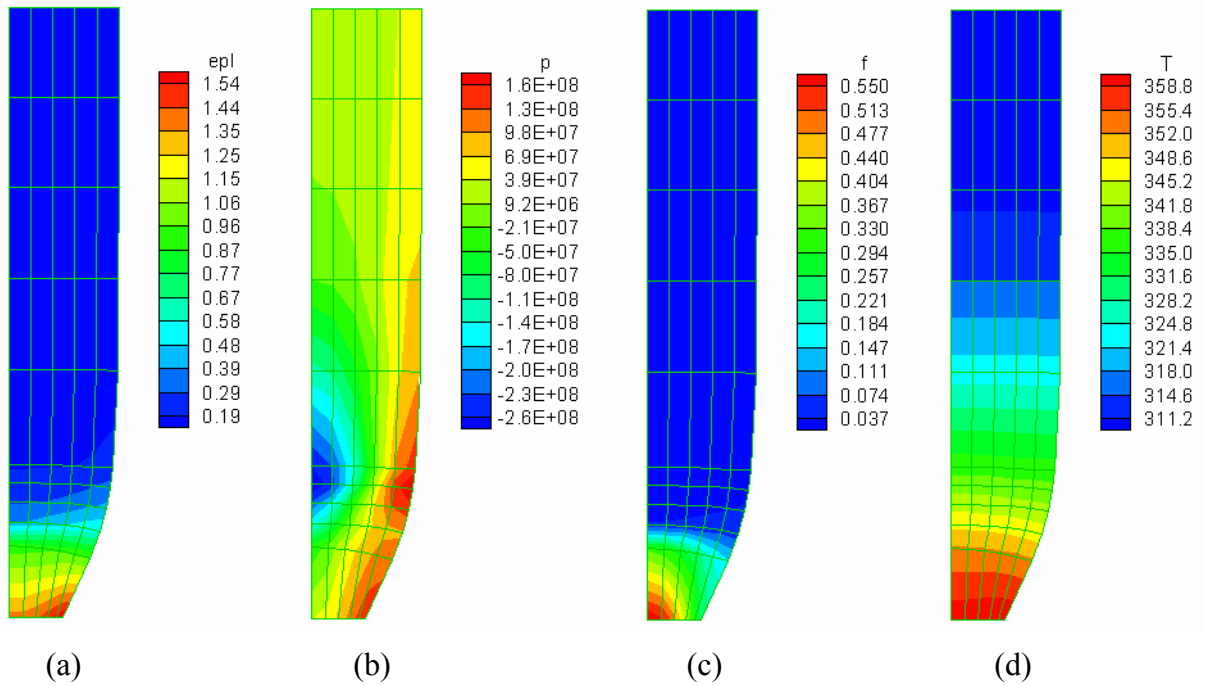


Figura 72: isolinhas para análise termo-elastoplástica com dano e sem entalhe

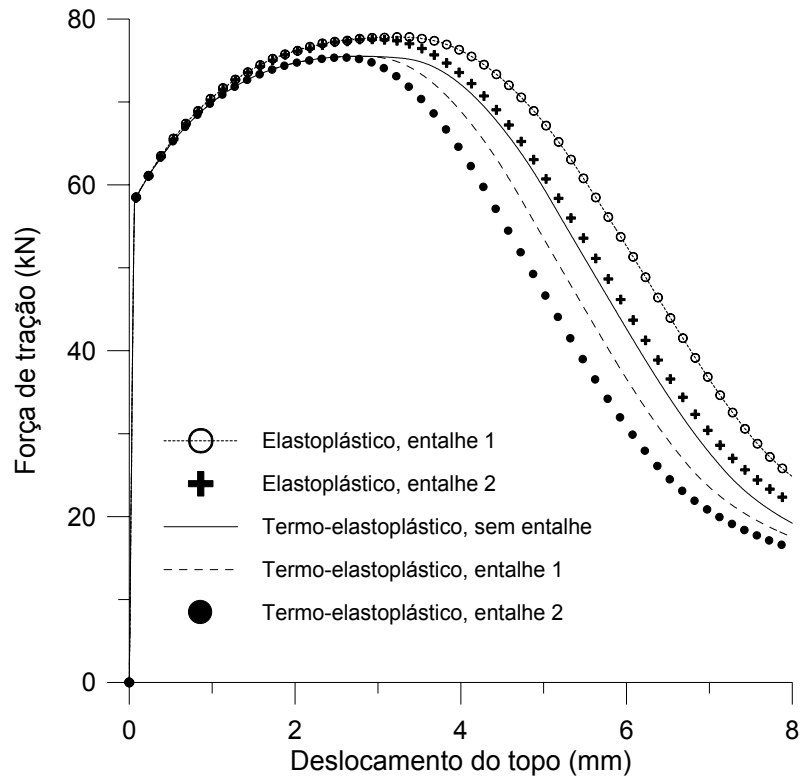


Figura 73: carga *versus* deslocamento para material sem dano

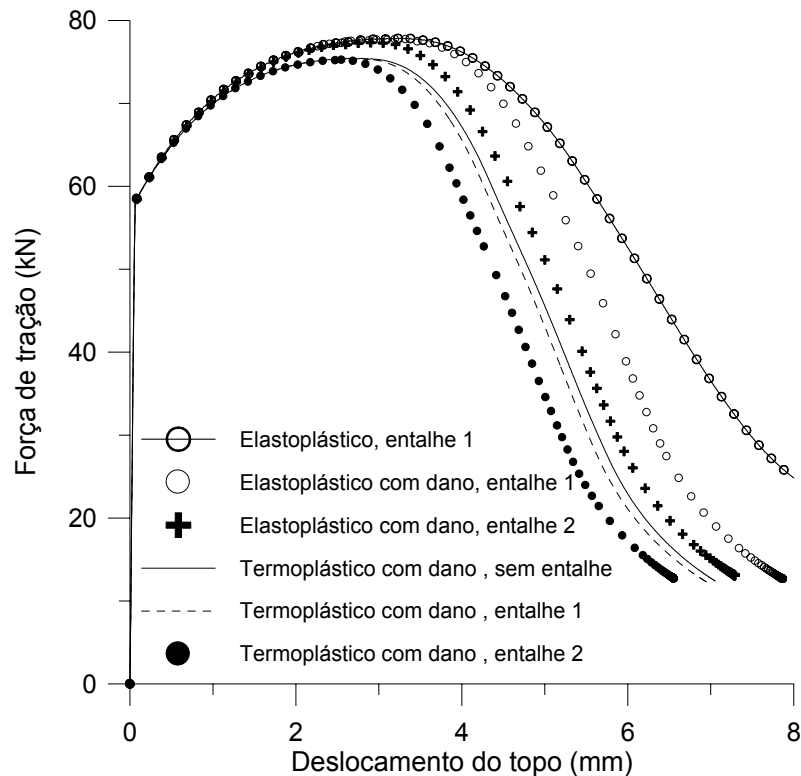


Figura 74: carga *versus* deslocamento considerando dano

### 5.5.3 Fragilização por efeito de temperatura

Neste exemplo, simula-se um ensaio de tração realizado a diferentes temperaturas em uma barra axissimétrica. Emprega-se a geometria e propriedades térmicas e mecânicas do exemplo anterior, variando apenas a temperatura inicial. Emprega-se a barra com entalhe do tipo 2, também descrito no exemplo anterior. As temperaturas iniciais empregadas são de 193 K e 393 K. Apresenta-se, na figura 75, as relações carga *versus* deslocamento obtidas.

Considerando-se as análises sem dano, observa-se que a carga máxima atingida é maior quando a temperatura é menor, devido ao aumento da tensão de escoamento. Note-se que nas análises sem dano as curvas carga *versus* deslocamento evoluem de forma semelhante, o que contraria a menor ductilidade verificada em ensaios a temperaturas mais baixas. Quando se introduz a consideração do dano na análise, observa-se que a declividade do ramo descendente é menor no caso da temperatura de ensaio maior, o que caracteriza uma maior ductilidade. Nas figuras 76 e 77 apresenta-se a evolução da temperatura na superfície externa para temperaturas iniciais de 193 K e 393 K, sem considerar dano.

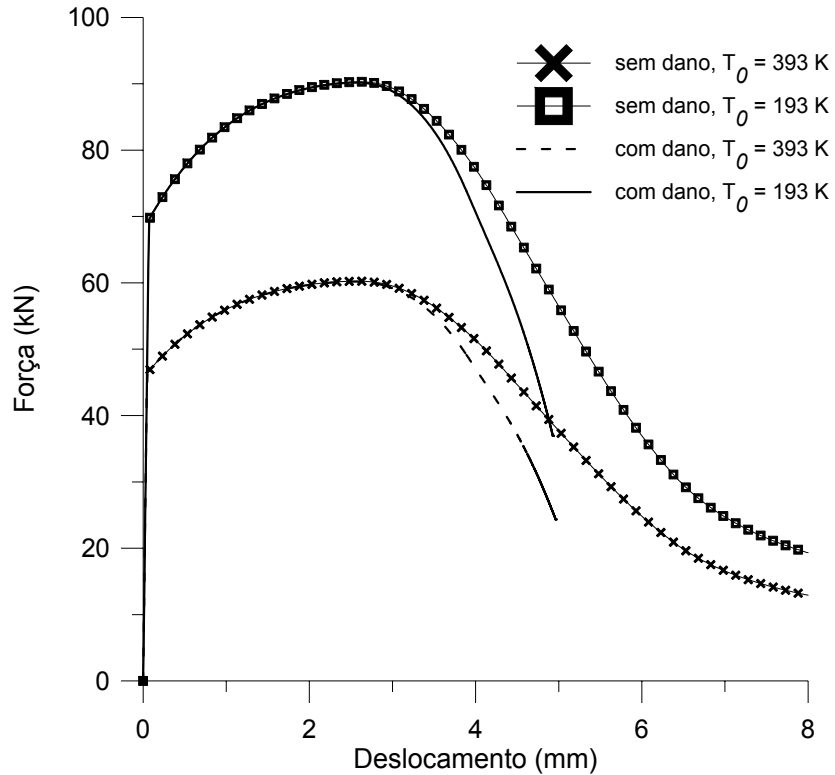


Figura 75: relações carga *versus* deslocamento para diferentes temperaturas iniciais

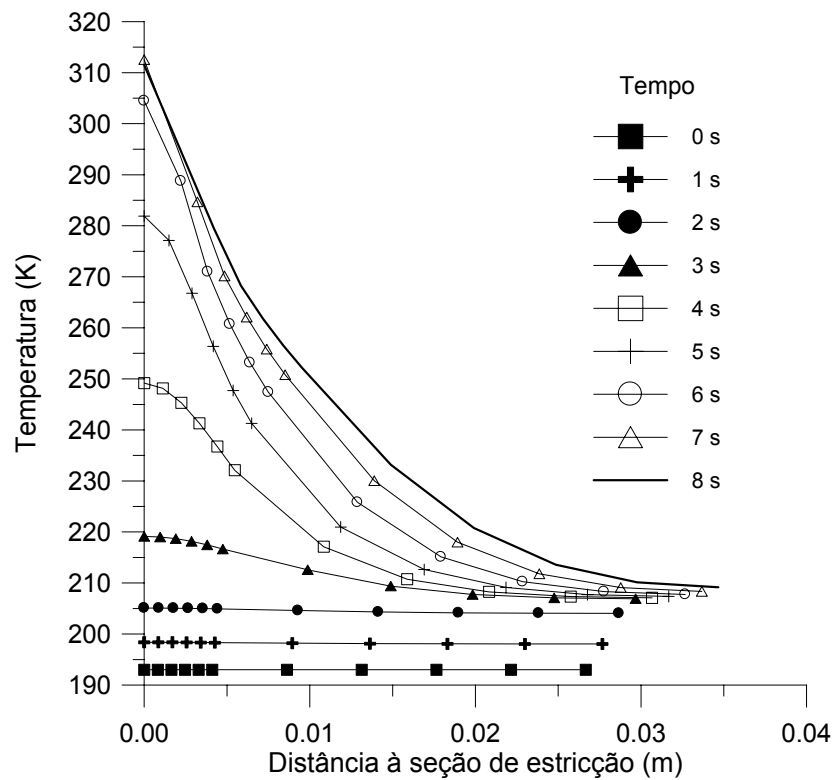


Figura 76: temperatura na superfície externa, a partir da estrição, para  $T_0 = 193$  K

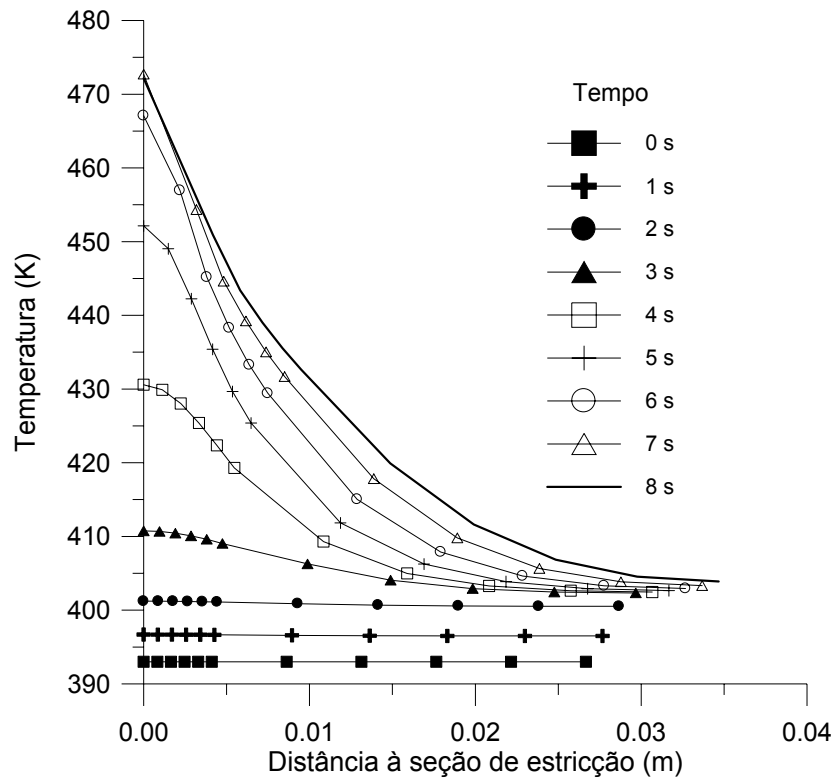


Figura 77: temperatura na superfície externa, a partir da estrição, para  $T_0 = 393$  K

## 5.6 CONCLUSÕES

Apresentou-se uma forma relativamente simples de acoplar uma análise termo-mecânica e o modelo de Gurson. Os resultados obtidos permitem verificar que, com a consideração desse acoplamento, é possível simular um ensaio de tração simples sem a necessidade de um entalhe para dar origem à estrição. Tal possibilidade mostra-se interessante, pois a presença de entalhes fictícios empregados para originarem a estrição acaba perturbando a solução final.

Também se mostra que, com a consideração do dano na análise termo-mecânica, é possível introduzir a fragilização que ocorre quando diminui a temperatura, efeito que sem a consideração do dano não se manifesta.

## 6 A INFLUÊNCIA DA PRESSÃO NA NUCLEAÇÃO DE VAZIOS

O modelo de Gurson envolve dois aspectos fundamentais: uma superfície de escoamento dependente da porosidade e leis para a evolução dessa porosidade. Admite-se que a variação de porosidade ocorre devido a 3 fenômenos: nucleação, crescimento e coalescência de microvazios.

Neste capítulo, pretende-se abordar alguns aspectos dos modelos de nucleação usados em conjunto com a superfície de escoamento de Gurson, mostrando algumas inconsistências encontradas quando a pressão não varia de forma monótona, e propondo algumas formas de minorar o problema.

### 6.1 MODELOS USUAIS DE NUCLEAÇÃO

Usualmente em conjunto com a superfície de escoamento de Gurson empregam-se modelos de nucleação baseados em deformação plástica (Chu e Needleman, 1980), sendo que dois modelos (Stainier, 1996; ABAQUS, 1992) destacam-se pelo largo emprego. O primeiro dos modelos, implementado no METAFOR (Stainier, 1996), que considera a taxa de nucleação de vazios independente da pressão, dada por

$$\dot{f}_n = A\{\varepsilon^p\}\dot{\varepsilon}^p \quad (207)$$

$$A\{\varepsilon^p\} = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^p - \varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right] \quad (208)$$

No modelo de nucleação acima, admite-se que a nucleação seja independente do fato de a região em questão encontrar-se tracionada ou comprimida. Como uma das causas da

nucleação é o descolamento que ocorre na interface inclusão - matriz do metal, parece que tal fenômeno seja de alguma maneira influenciado pela pressão hidrostática. Parece coerente esperar que o descolamento seja favorecido por tensões de tração na interface, sendo inibido ou até impedido na presença de tensões de compressão.

O segundo modelo de nucleação (ABAQUS, 1992; Alegre e Gutiérrez-Solana, 2004) comumente empregado com a superfície de escoamento de Gurson procura levar em conta a situação mencionada acima. Encontra-se implementado no ABAQUS e é muito semelhante ao anterior, sendo que a diferença é uma restrição à nucleação, impedindo que esta ocorra quando a região em questão se encontra comprimida. Tal critério estaria em consonância com Needleman e Rice (1978), que dizem ser a tensão na interface matriz-inclusão proporcional à pressão. Note-se que apesar de ser um modelo de nucleação baseado em deformação, apresenta também dependência da pressão.

$$\dot{f}_n = A\{\varepsilon^p\}\dot{\varepsilon}^p \quad (209)$$

$$A\{\varepsilon^p\} = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^p - \varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right] \quad \text{se } p > 0 \quad (210)$$

$$A\{\varepsilon^p\} = 0 \quad \text{se } p \leq 0 \quad (211)$$

Para um estado de tensões unicamente de tração, ambos os modelos fornecem os mesmos resultados. A diferença entre um e outro se apresenta quando o material é comprimido durante a etapa de nucleação. No caso do modelo implementado no ABAQUS, se o material atinge uma deformação plástica superior à deformação de nucleação em compressão, e após é tracionado, é possível que a nucleação não se dê. Esse fenômeno foi primeiro observado ao empregar tal modelo de nucleação no estudo de um processo de hidroconformação (Bittencourt *et al.*, 1998). A simulação do processo consiste na aplicação de deslocamentos radiais prescritos no contorno externo de uma placa circular e na aplicação

de uma pressão de fluido na zona central da placa. Na figura 78, mostra-se o contorno inicial e a malha final. A pressão cresce linearmente com o tempo, não sendo considerada fricção entre a placa e a matriz.

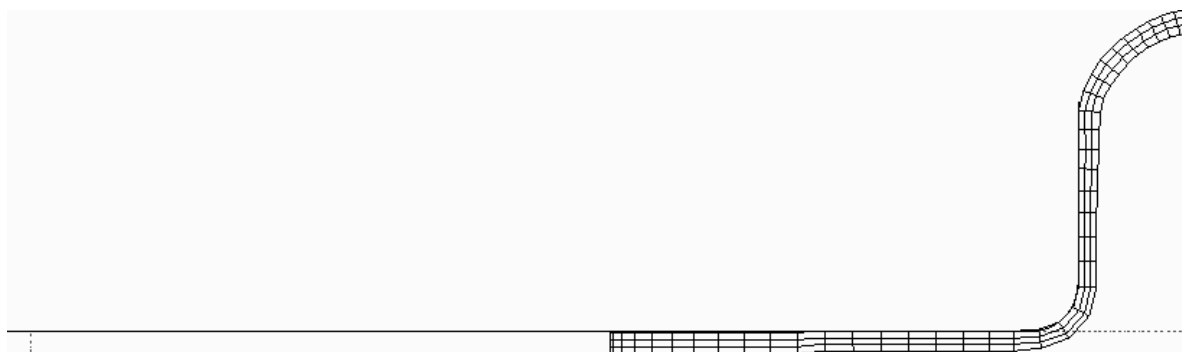


Figura 78: contorno inicial e deformada final

Inicialmente chamou atenção em tal problema o fato de em uma região com deformação plástica alta (figura 79) e pressão positiva (figura 80), próximo à borda esquerda da peça, ser encontrada porosidade nula (figura 81). Estudando a história de pressões nessa região (figura 82), verificou-se que a mesma inicialmente se encontrava comprimida, tendo a tração se dado ao final do processo de deformação.

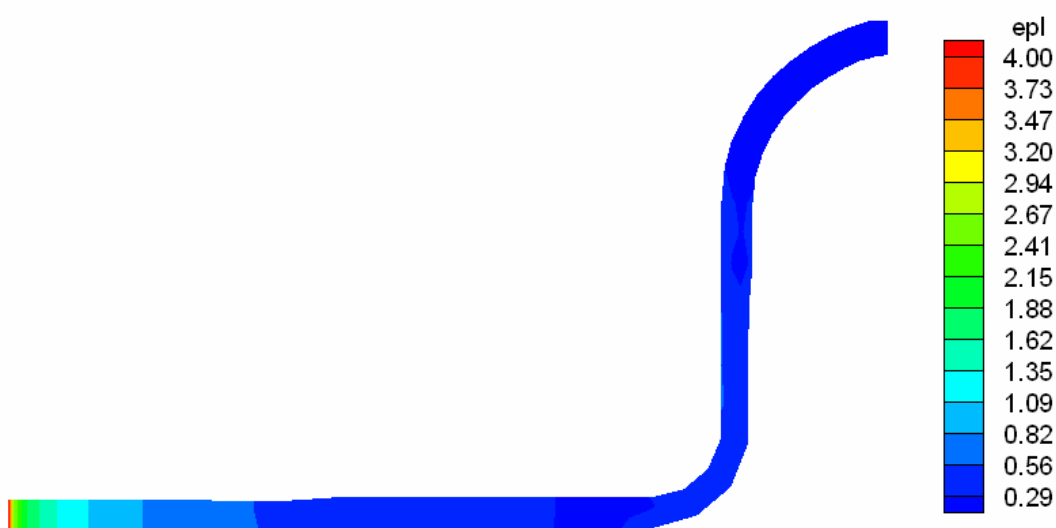


Figura 79: deformação plástica final

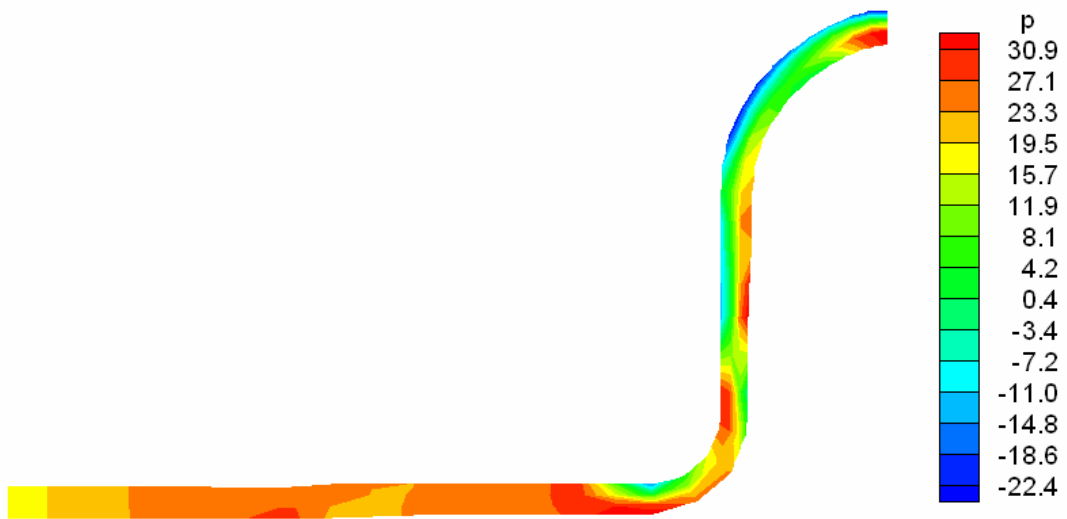


Figura 80: pressão final

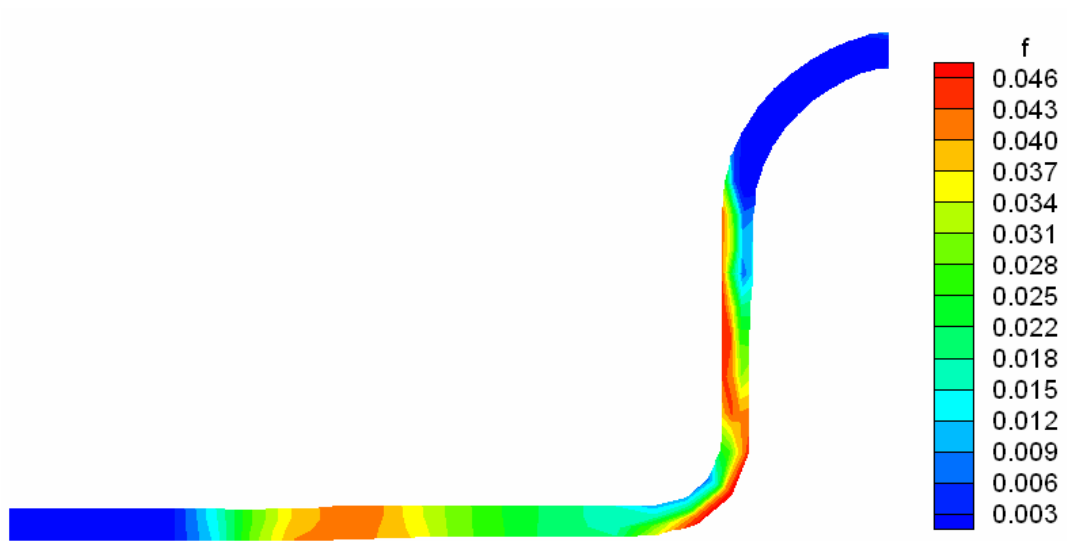


Figura 81: fração volumétrica de vazios final



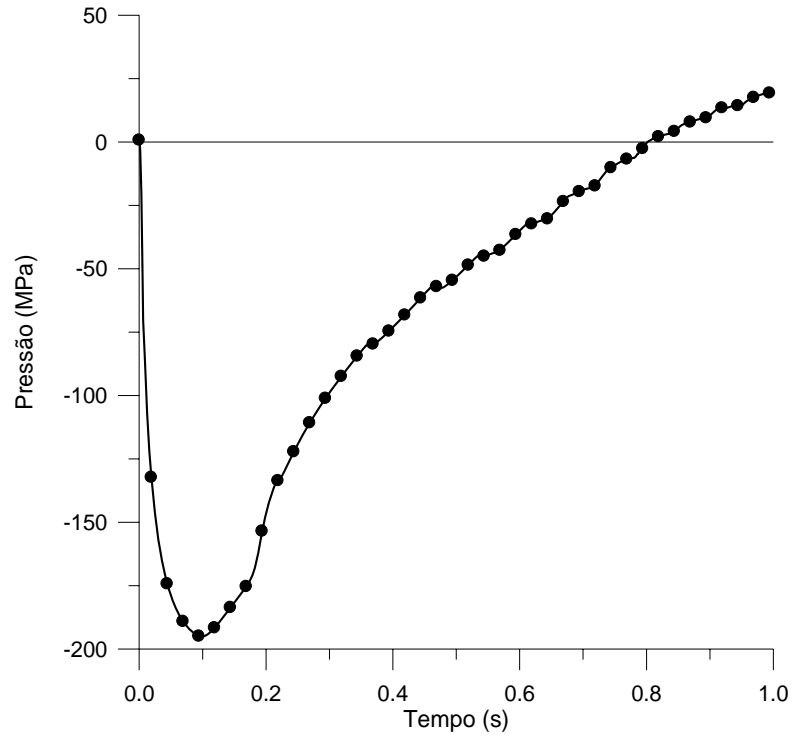


Figura 82: pressão próxima à borda esquerda da placa

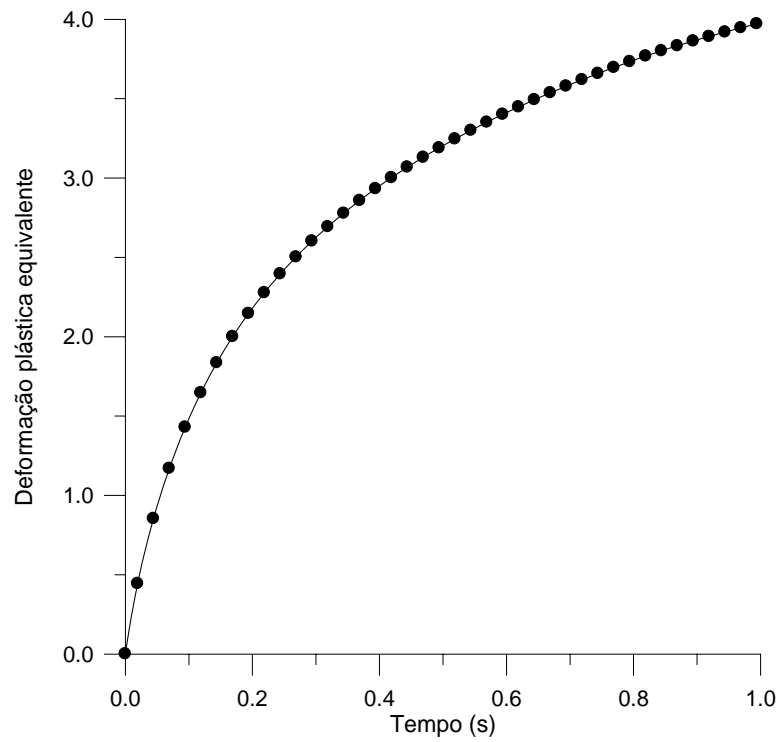


Figura 83: deformação plástica próxima à borda esquerda da placa

Procurando confirmar a causa de tal ocorrência – porosidade nula combinada com deformação plástica alta – estuda-se o comportamento de um material sujeito a carga cíclica. Os resultados obtidos na análise de um monoelemento axissimétrico de tamanho unitário, sujeito a ciclos de carregamento axial, empregando o modelo de nucleação implementado no ABAQUS são mostrados a seguir. Empregam-se dois tipos de ciclos: o denominado ciclo TC, iniciando com tração, e o denominado ciclo CT, iniciando com compressão, detalhados na figura 84. As propriedades do material, admitido como elastoplástico perfeito, são:  $E = 10$  GPa,  $\nu = 0,3$  e tensão de escoamento  $\sigma_y = 70$  MPa. A fração volumétrica de vazios a nuclear  $f_N$  é de 0,04 em uma deformação plástica média de nucleação  $\varepsilon_N$  de 0,3 e com um desvio-padrão de nucleação  $s_N$  de 0,1.

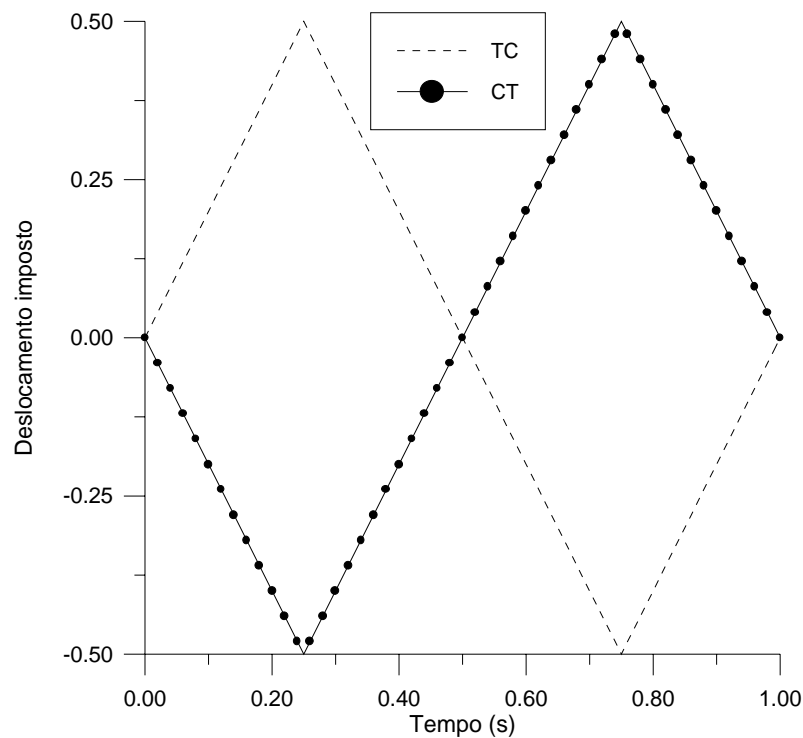


Figura 84: deslocamentos impostos nos ciclos TC e CT

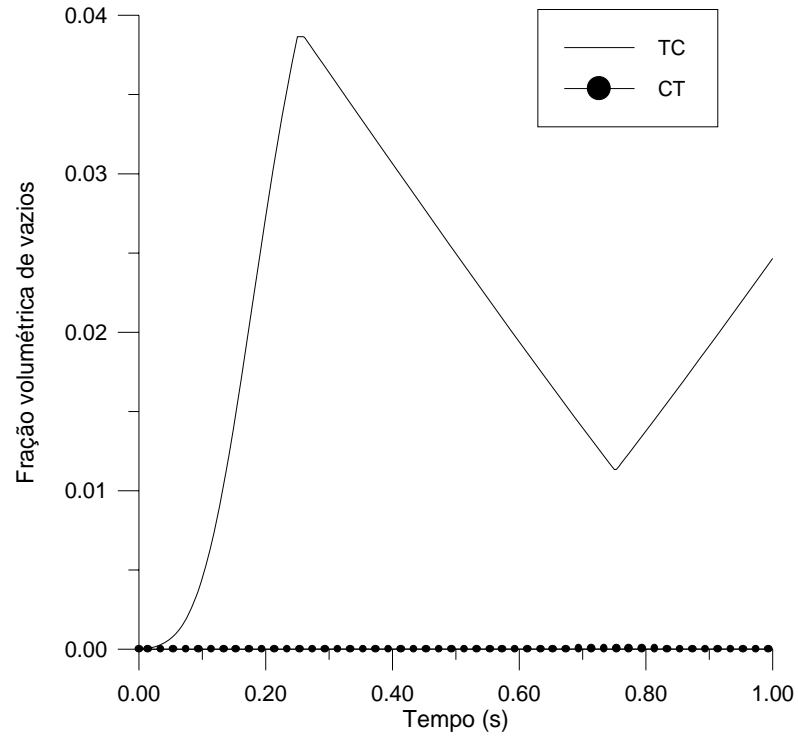


Figura 85: evolução da fração volumétrica de vazios durante os ciclos TC e CT

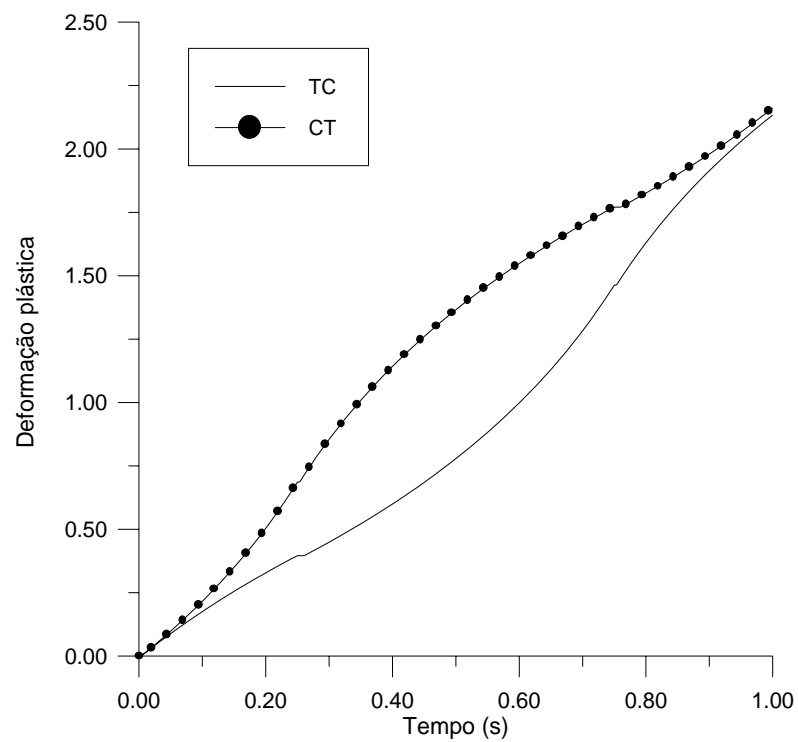


Figura 86: evolução da deformação plástica durante os ciclos TC e CT

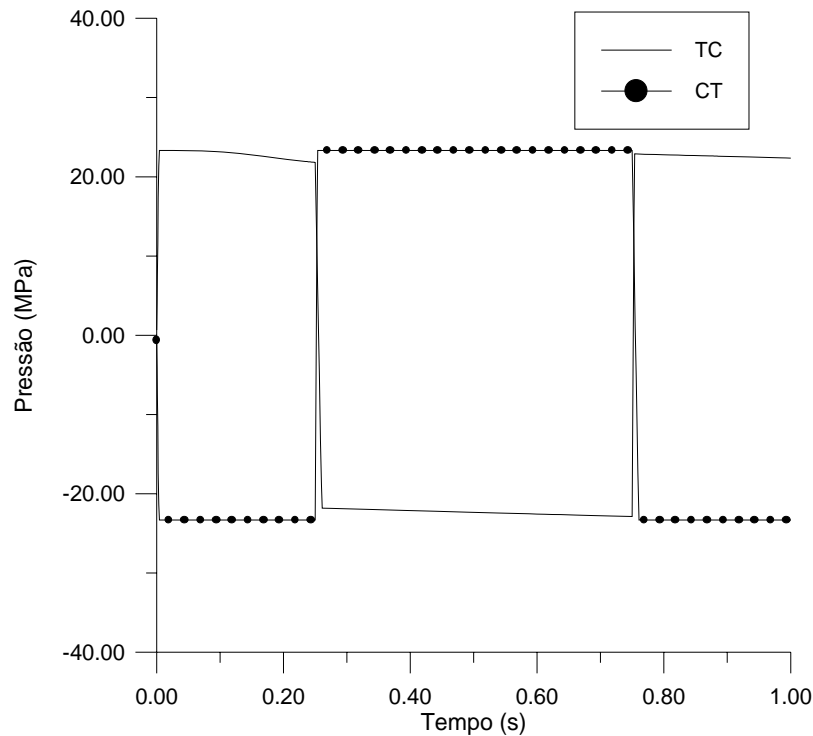


Figura 87: evolução da pressão durante os ciclos TC e CT

Na figura 85, mostra-se a fração volumétrica de vazios obtida para ambos os ciclos (TC e CT). A deformação plástica é apresentada na figura 86, enquanto que a pressão é apresentada na figura 87. Observa-se pela figura 85 que no ciclo TC a fração volumétrica de vazios de nucleação não se completa, pois antes que isto possa ocorrer, o material começa a ser comprimido interrompendo a nucleação. Começa então uma etapa de decréscimo de porosidade, que se prolonga até o fim da etapa de compressão.

Analisando-se na mesma figura 85 os resultados de porosidade para o ciclo CT, verifica-se que o material permanece intacto, sem porosidade. Observando-se as figuras 84 e 87, verifica-se que quando a deformação plástica média de nucleação  $\varepsilon_N$  de 0,3 é atingida, o material se encontra comprimido. Assim, a nucleação acaba sendo inibida pela equação 211. Quando o material passa a ser tracionado, a equação 212 resulta em um valor nulo, pois a deformação plástica já é muito maior que a deformação plástica média de nucleação (ver figura 4).

Cabe ressaltar que quando se emprega um material que se admite livre de porosidade inicial, e por algum motivo não ocorre nucleação, a superfície de escoamento de Gurson coincide com a de von Mises. Não havendo porosidade, seja ela inicial ou nucleada, não há

crescimento de vazios, pois a equação 20 resulta nula, uma vez que as deformações plásticas em um material do tipo von Mises se dão sem mudança de volume, com o primeiro invariante do tensor taxa de deformação plástica nulo.

Para confirmar a nucleação como principal fonte das diferenças de comportamento entre os ciclos TC e CT, analisou-se o mesmo problema com a consideração de uma porosidade inicial de 5% e sem nucleação. A evolução da fração volumétrica de vazios em tal situação é apresentada na figura 88.

Assim, quando houver a possibilidade de mudança do sinal da pressão durante a nucleação, a resposta obtida empregando o modelo com nucleação somente em tração parece inadequada. Salienta-se que a alternância do sinal da pressão nem sempre é de fácil identificação, pois pode ocorrer mesmo quando o carregamento aplicado é monótono, como no caso da simulação do processo de hidroconformação.

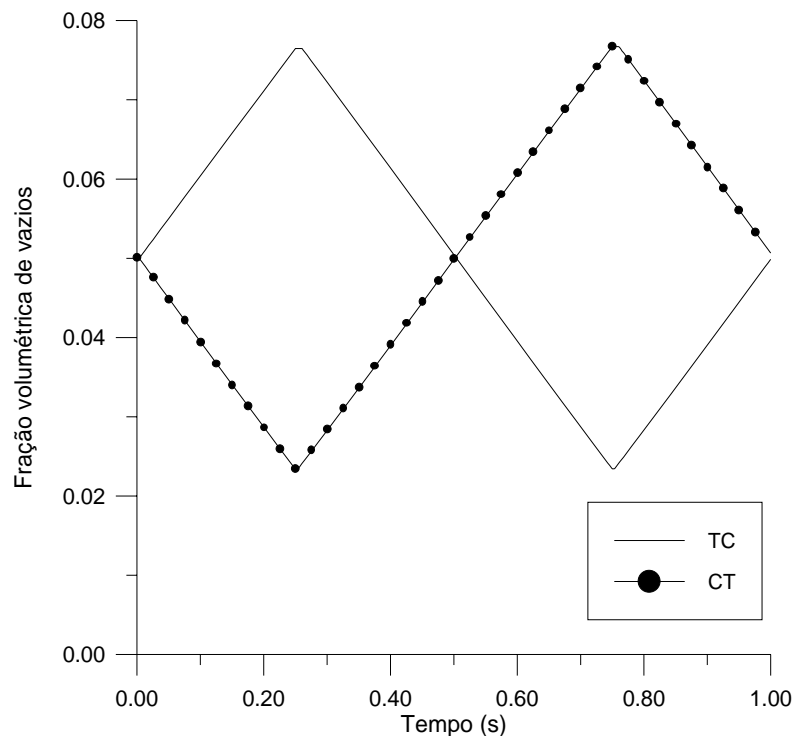


Figura 88: evolução da porosidade durante os ciclos TC e CT (porosidade inicial de 5%)

## 6.2 MODELOS ALTERNATIVOS DE NUCLEAÇÃO

Procurando corrigir os inconvenientes mencionados acima, buscou-se modelos alternativos de nucleação (Cunda e Creus, 1999a; 1999b), já que na bibliografia consultada não foi encontrada referência à inconsistência mencionada na seção anterior, e nem modelos que cumpram os requisitos a seguir:

- a) tratem a nucleação em compressão de forma diferenciada da nucleação em tração, propiciando que a primeira resulte nula ou ao menos menor que a segunda. Assim, ficaria coberta a consideração de nucleação por descolamento na interface inclusão-matriz;
- b) tratem de forma adequada a nucleação quando há alternância do sinal da pressão ao longo do processo, propiciando que haja nucleação quando o material é tracionado, a despeito de haver sido previamente comprimido.

### 6.2.1 Modelo simétrico

O modelo simétrico encontra-se implementado no METAFOR (Stainier, 1996). Não apresenta problemas quando há reversão de carregamento, uma vez que existe nucleação seja o material comprimido ou tracionado. No entanto, satisfaz parcialmente os requisitos anteriores, pois trata a nucleação em compressão de forma idêntica à nucleação em tração.

$$\dot{f}_n = A\{\varepsilon^p\}\dot{\varepsilon}^p \quad (212)$$

$$(\varepsilon^p)^{n+1} = (\varepsilon^p)^n + (\Delta\varepsilon^p)^{n+1} \quad (213)$$

A seguir são apresentados os resultados obtidos quando se emprega o modelo simétrico descrito acima ao problema apresentado na seção 6.1. Apresenta-se a fração volumétrica de vazios nucleada (figura 89) e a fração volumétrica de vazios total (figura 90).

Observa-se que a fração volumétrica de nucleação é atingida (figura 89), sendo que a nucleação é governada unicamente pela deformação plástica uniaxial equivalente, não havendo dependência da pressão.

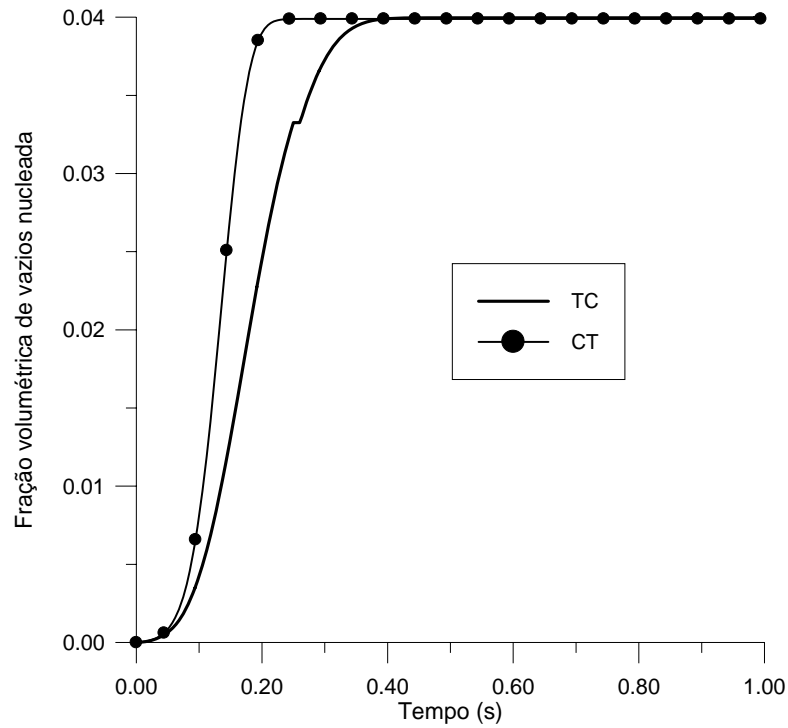


Figura 89: fração volumétrica de vazios nucleada – modelo simétrico

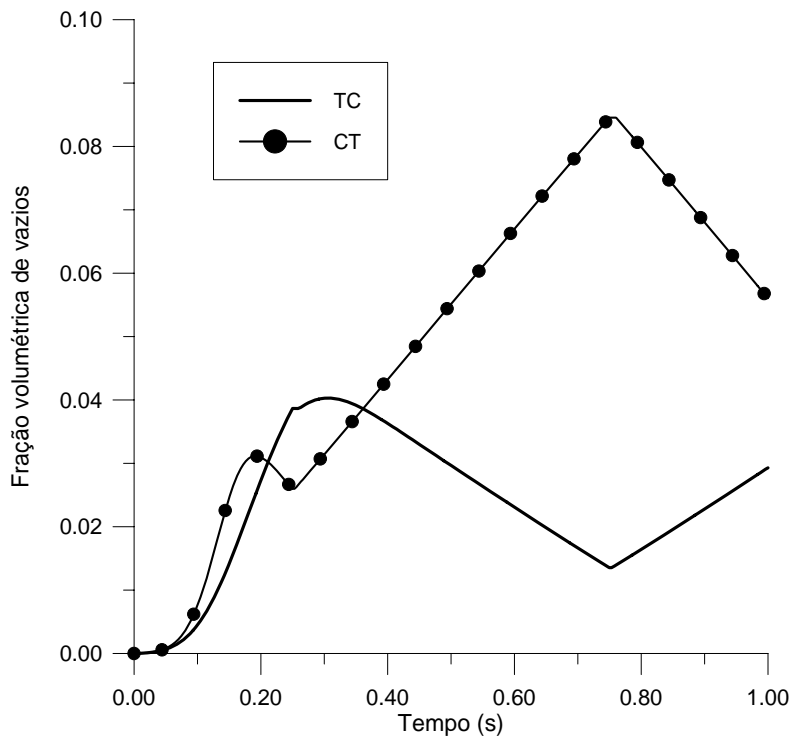


Figura 90: fração volumétrica de vazios total – modelo simétrico

Quanto a fração volumétrica de vazios final (figura 90), observa-se que no caso do ciclo CT a porosidade final é maior que no caso do ciclo TC. No ciclo CT após a nucleação em compressão segue-se uma fase de crescimento de porosidade em tração, enquanto que no ciclo TC após a nucleação em tração segue-se uma fase diminuição de porosidade devido à compressão. Além disso, o ciclo CT desenvolve-se com deformação plástica mais elevada.

### 6.2.2 Modelo deslocado

O modelo denominado deslocado é muito semelhante ao modelo implementado no ABAQUS. A diferença é o parâmetro que governa a nucleação, que neste caso é adotado como sendo uma deformação plástica modificada  $\tilde{\varepsilon}^p$ , obtida a partir da acumulação dos incrementos de deformação plástica equivalente que se derem em tração. Dessa forma, a nucleação em tração ou compressão é tratada de forma diversa, não ficando a nucleação inibida quando o material é comprimido no início da sollicitação.

$$\dot{f}_n = A\{\tilde{\varepsilon}^p\}\dot{\varepsilon}^p \quad (214)$$

$$(\tilde{\varepsilon}^p)^{n+1} = (\tilde{\varepsilon}^p)^n + (\Delta\tilde{\varepsilon}^p)^{n+1} \quad (215)$$

$$(\Delta\tilde{\varepsilon}^p)^{n+1} = 0 \quad \text{se } p^{n+1} < 0 \quad (216)$$

$$(\Delta\tilde{\varepsilon}^p)^{n+1} = (\Delta\varepsilon^p)^{n+1} \quad \text{se } p^{n+1} > 0 \quad (217)$$

A seguir são apresentados os resultados obtidos quando se emprega o modelo descrito acima ao problema apresentado na seção 6.1. Apresenta-se a fração volumétrica de vazios nucleada (figura 91) e a fração volumétrica de vazios total (figura 92).



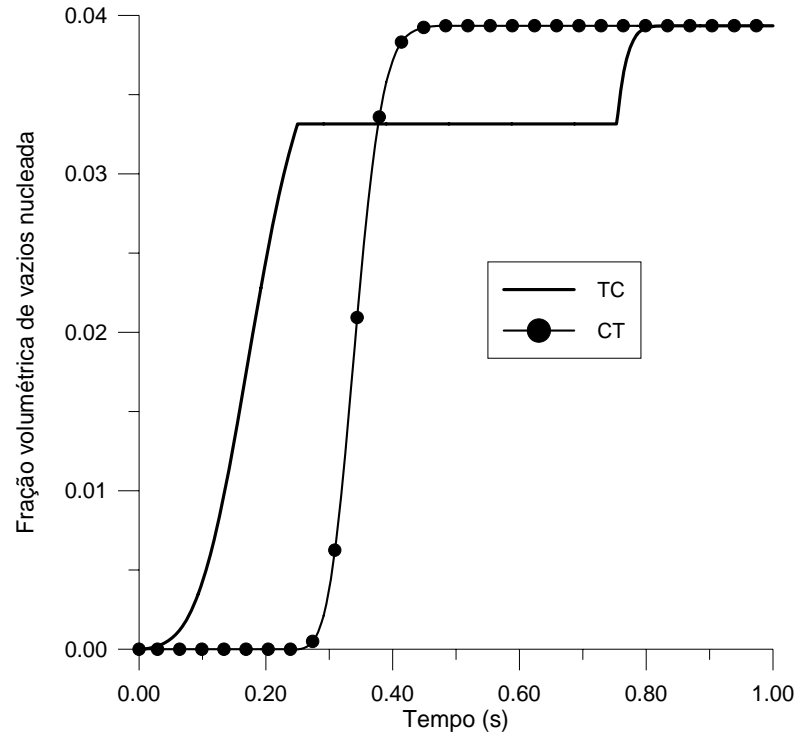


Figura 91: fração volumétrica de vazios nucleada – modelo deslocado

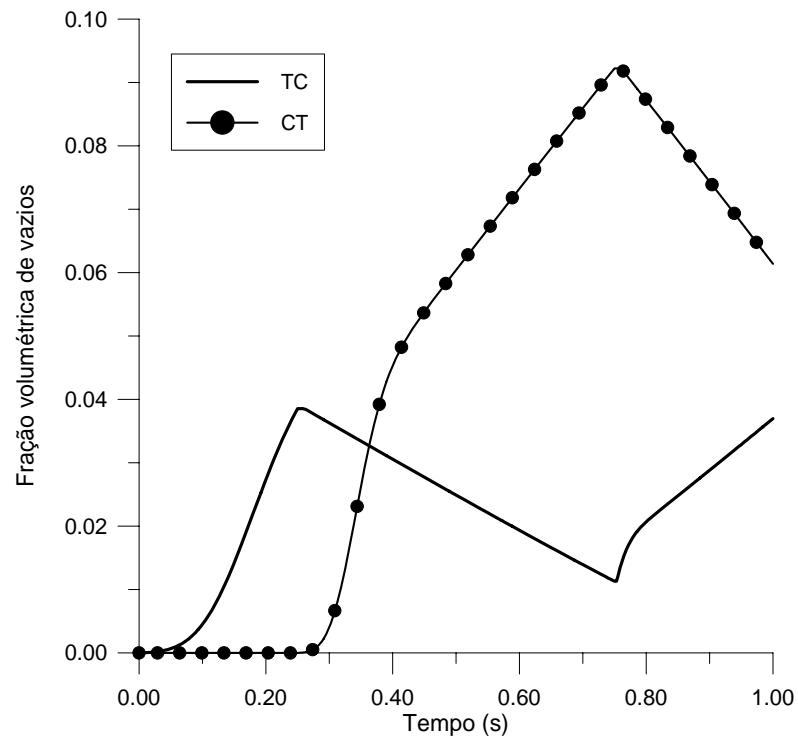


Figura 92: fração volumétrica de vazios total – modelo deslocado

Observa-se que a fração volumétrica de nucleação é atingida (figura 91), sendo que a nucleação é governada pela deformação plástica uniaxial equivalente  $\tilde{\varepsilon}^p$  e pela pressão. Quando há pressão negativa (ver figura 87) a nucleação cessa, tornando a crescer quando a pressão assume valores positivos. A porosidade final (figura 92) resulta maior no caso do ciclo CT.

### 6.2.3 Modelo baseado na deformação plástica principal máxima

Esta proposta emprega como parâmetro não a deformação plástica equivalente, mas uma deformação plástica  $\hat{\varepsilon}^p$ , obtida por acumulação da deformação plástica principal máxima  $\varepsilon_1^p$ .

A motivação para o desenvolvimento desta proposta foi a possibilidade de ocorrer pressão negativa com uma ou até duas das tensões principais positivas, se a tensão principal de compressão for suficientemente grande para equilibrar o efeito das tensões principais positivas. Nesse caso, poderia haver nucleação na direção da deformação plástica principal máxima. Assim, emprega-se como parâmetro de nucleação a deformação plástica principal máxima  $\varepsilon_1^p$ . Quando o sinal da pressão troca, o acumulador é zerado.

$$\text{se } p^n \cdot p^{n+1} < 0 \text{ então } (\hat{\varepsilon}^p)^n = 0 \quad (218)$$

$$\dot{f}_n = A\{\hat{\varepsilon}^p\}\dot{\varepsilon}_1^p, \quad (\hat{\varepsilon}^p)^{n+1} = (\hat{\varepsilon}^p)^n + \langle (\Delta\hat{\varepsilon}^p)^{n+1} \rangle \quad (219)$$

$$(\Delta\hat{\varepsilon}^p)^{n+1} = (\Delta\varepsilon_1^p)^{n+1} \quad (220)$$

onde  $\langle \rangle$  é o colchete de Macauley:  $\langle p \rangle = \frac{1}{2}(p + |p|)$ .  $(\Delta\varepsilon_1^p)^{n+1}$  é o incremento de deformação plástica principal máxima, calculado usando os autovalores do tensor incremento de deformação plástica, obtido por integração do tensor taxa de deformação plástica.

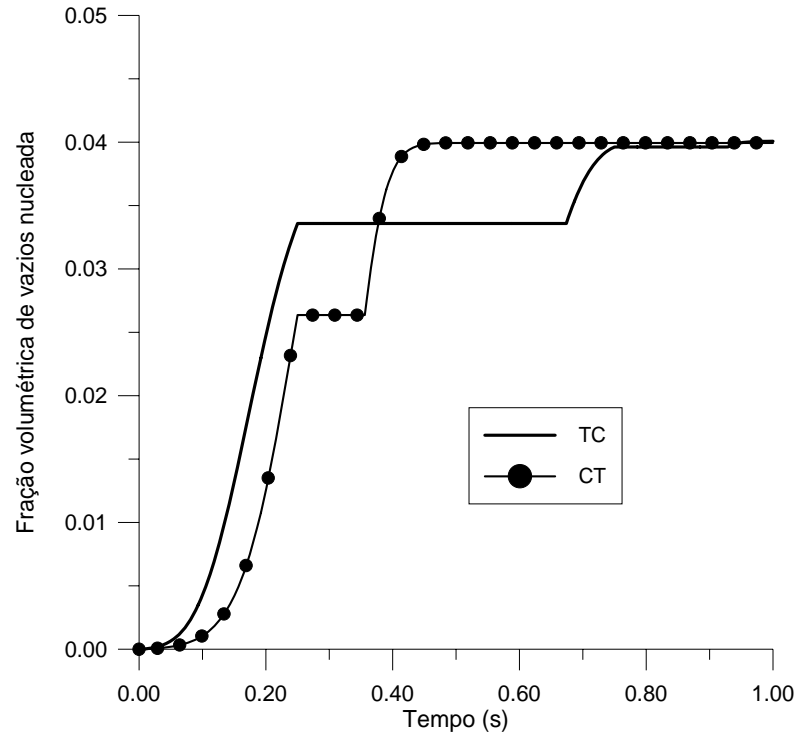


Figura 93: fração volumétrica de vazios nucleada – modelo baseado em deformação plástica principal máxima

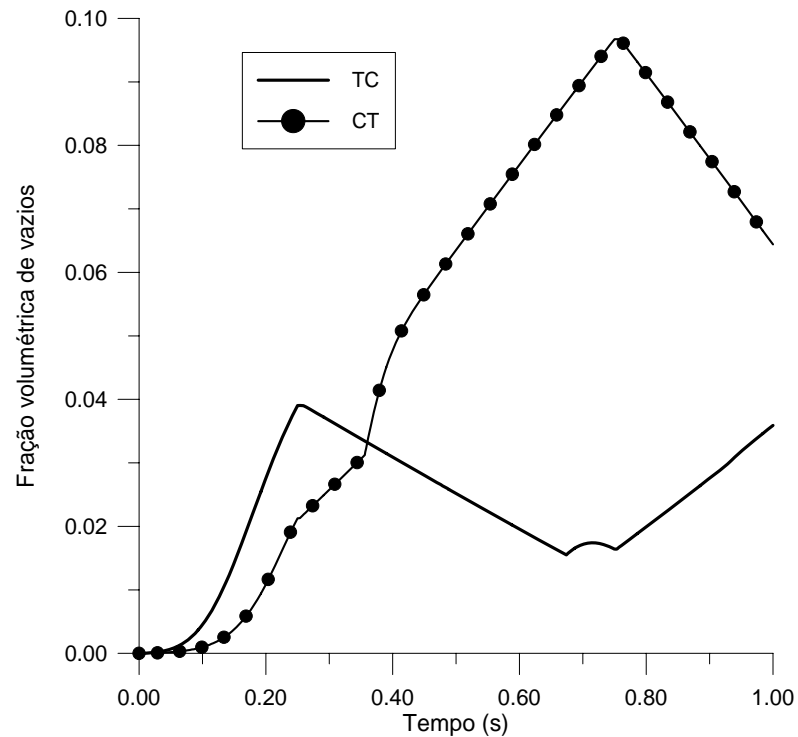


Figura 94: fração volumétrica de vazios total – modelo baseado em deformação plástica principal máxima

#### 6.2.4 Qual dos modelos empregar?

Observando-se o comportamento dos modelos descritos nas seções anteriores (6.2.1, 6.2.2 e 6.2.3), verifica-se que o problema detectado com o emprego do modelo de nucleação descrito pelas equações 209 a 211 fica resolvido caso se empregue qualquer dos 3 modelos apresentados. Dos modelos mencionados, o modelo denominado simétrico trata a nucleação em tração ou em compressão de forma idêntica, o que soa um tanto quanto estranho, não devendo todavia ser descartado até que haja uma maior disponibilidade de resultados experimentais. O modelo deslocado é de fácil implementação e parece ser uma boa alternativa, assim como o modelo baseado em deformação plástica principal máxima.

#### 6.2.5 Hidroconformação aplicando os modelos alternativos

Após a implementação dos modelos alternativos de nucleação, simula-se novamente o problema de hidroconformação. Trata-se da aproximação axissimétrica inicial empregada no estudo de um problema tridimensional (Aymone, 2000).

Antes de descrever de forma mais detalhada o problema de hidroconformação, cabe um breve comentário sobre tratamento de problemas envolvendo contato. O Metafor adota o método da penalidade para resolver problemas de contato. Quando é detectada interpenetração entre a ferramenta e a peça que está sendo conformada, surgem forças que procuram anular essa interpenetração. Para tanto é definida uma penalidade normal à superfície de contato, que dá a magnitude das forças restitutivas que procuram eliminar a interpenetração. Quanto ao deslizamento entre ferramenta e peça a ser conformada, 3 situações podem ocorrer:

- a) contato colante: é o que ocorre quando após as duas superfícies (ferramenta e peça a ser conformada) entrarem em contato não se admite que possa ocorrer escorregamento entre uma e outra;
- b) contato deslizante: admite-se que o contato do tipo deslizante ocorre sem atrito algum entre peça a ser conformada e ferramenta;

- c) contato com atrito: nessa situação admite-se a presença de atrito entre a peça a ser conformada e a ferramenta. Existem diversos modelos para levar em conta o atrito (Bittencourt, 1994). Se o atrito for muito grande, o problema tende a um problema com contato colante; se for muito pequeno, tende a um problema com contato deslizante. A magnitude do atrito é definida através da penalidade tangencial: se nula, têm-se contato deslizante.

A peça a sofrer hidroconformação é uma chapa circular de 50 mm de raio por 1 mm de espessura. A matriz sobre a qual a peça será pressionada tem raio de arredondamento de 2 mm. A borda esquerda da chapa sofre um deslocamento horizontal de 25 mm, enquanto que a borda direita é fixa na direção horizontal, podendo deslocar-se livremente na direção vertical. Admite-se contato deslizante. Existe uma pressão de 8 MPa atuando na face inferior da chapa, de baixo para cima. Alguns graus de liberdade da face inferior são restringidos em  $y$ , conforme indicado na figura 95.

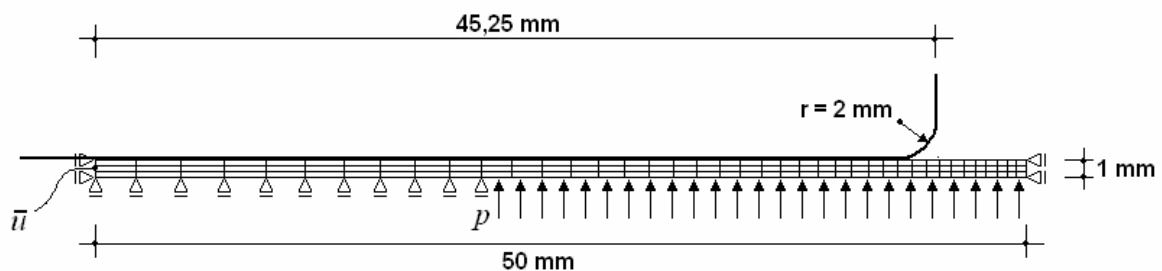


Figura 95: geometria para simulação de hidroconformação

As propriedades do material, admitido como elastoplástico perfeito, são:  $E = 100$  GPa,  $\nu = 0,3$  e tensão de escoamento  $\sigma_y = 70$  MPa. A fração volumétrica de vazios a nuclear  $f_N$  é de 0,04 em uma deformação plástica média de nucleação  $\varepsilon_N$  de 0,3 e com um desvio-padrão de nucleação  $s_N$  de 0,1. Emprega-se  $\alpha_1 = 1,5$  e  $\alpha_2 = 1,0$ .

Analisa-se o problema descrito com os modelos de nucleação simétrico e deslocado. As curvas para pressão e deformação plástica praticamente não diferem daquelas apresentadas nas figuras 82 e 83, obtidas para o modelo em que se tem nucleação somente em tração. Analisando-se a região próxima à borda esquerda da placa, apresentam-se as parcelas de

nucleação e crescimento da fração volumétrica de vazios, e também a porosidade total, para o modelo simétrico (figura 96). Observa-se que a nucleação se completa, mas devido à compressão, ocorre um decréscimo de porosidade, de modo que a porosidade final resulta nula.

No caso do modelo deslocado (figura 97), a nucleação só começa quando a pressão assume valor positivo. O acréscimo de deformação plástica entre o instante em que a pressão passa a ter valor positivo e o instante final de análise não é grande o suficiente para completar a nucleação. Aos vazios nucleados soma-se uma pequena parcela de crescimento, o que leva a uma porosidade não-nula ao final do processo. Nas figuras 98 e 99, apresentam-se as distribuições finais de porosidade, para os modelos simétrico e deslocado, respectivamente. Observa-se que no caso do modelo deslocado a porosidade próxima à borda esquerda é superior a zero.

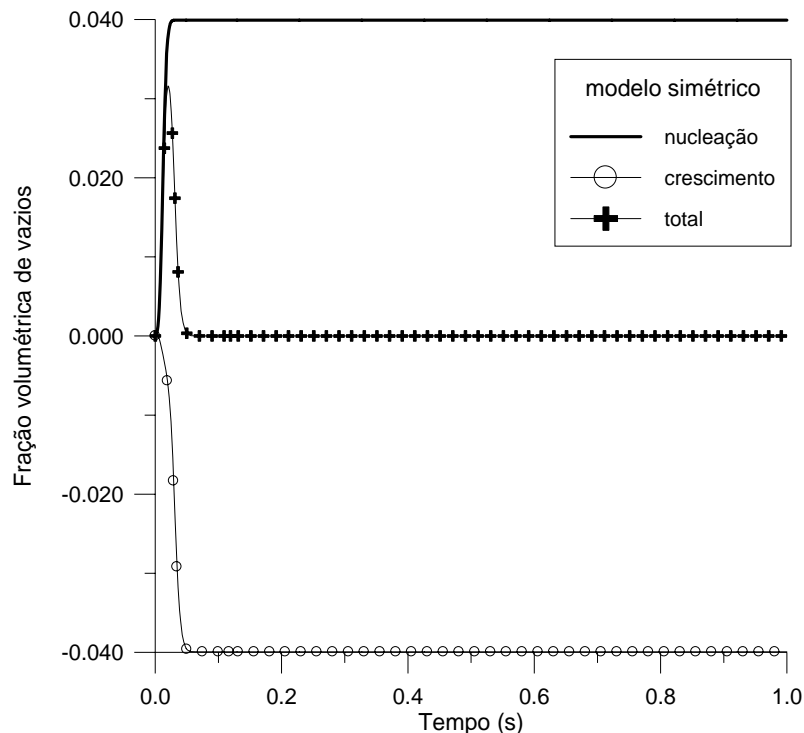


Figura 96: frações volumétricas de vazios nucleada, por crescimento e total próximas à borda esquerda da placa (modelo simétrico)

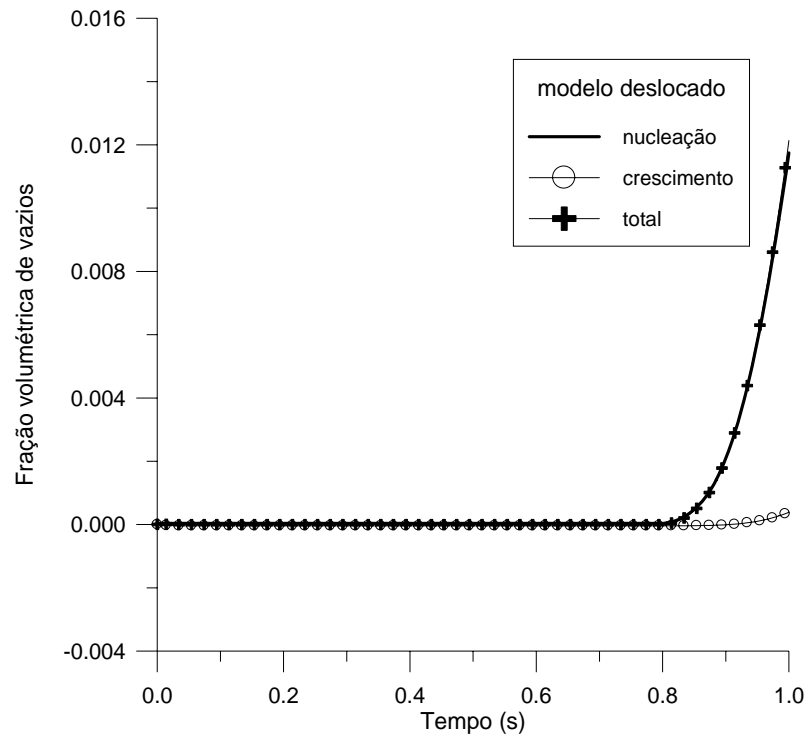


Figura 97: frações volumétricas de vazios nucleada, por crescimento e total próximas à borda esquerda da placa (modelo deslocado)

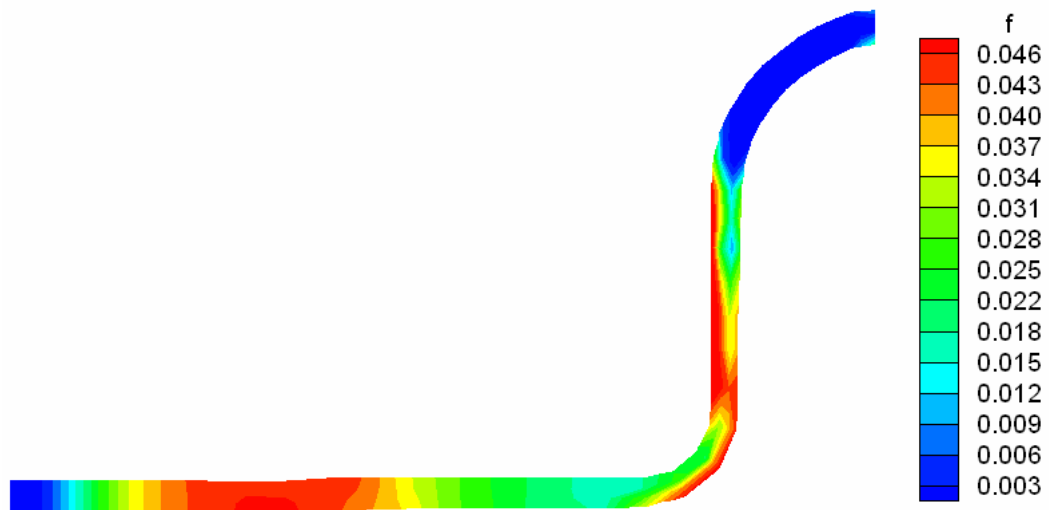


Figura 98: fração volumétrica de vazios total final (modelo simétrico)

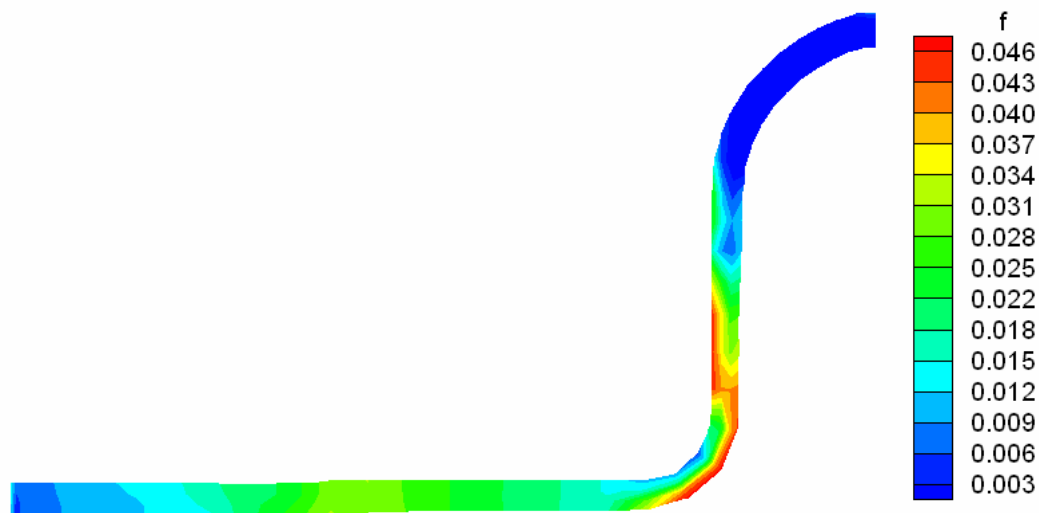


Figura 99: fração volumétrica de vazios total final (modelo deslocado)

### 6.3 APLICAÇÃO À RUPTURA POR FADIGA DE BAIXO CICLO

Uma extensão óbvia que surge quando se pensa em carga cíclica, seria a análise de problemas de fadiga de baixo ciclo, onde a ruptura se dá com deformação plástica considerável.

Do ponto de vista de nucleação, alguns trabalhos consultados simulam fadiga empregando o modelo de nucleação simétrico (Skallerud e Zhang, 2001; Cedergren *et al.*, 2004).

Com relação aos três modelos alternativos de nucleação, chama atenção o fato da fração volumétrica total resultar significativamente diferente ao final do processo (figuras 90, 92 e 94) caso o ciclo seja iniciado com compressão ou com tração. Uma possível explicação poderia ser o fato do processo de deformação se desenvolver sempre a níveis maiores de deformação plástica na ciclagem iniciada com compressão, o que pode ser visto na figura 86.

Observando a figura 88, verifica-se que, quando se considera que a porosidade já existe no material, a diferença entre os valores finais de fração volumétrica de vazios caso se inicie com tração ou com compressão resulta bastante pequena. Ainda assim, caso se inicie com compressão, a fração volumétrica de vazios é maior devido ao processo ocorrer com deformação plástica maior (figura 86). Entretanto, a influência de um processo que se



desenvolve a uma deformação plástica mais alta não é tão grande a ponto de justificar a diferença nos valores finais da fração volumétrica de vazios para os modelos alternativos implementados. Tal diferença parece dever-se às combinações do sinal da pressão com o nível de vazios. Quando uma configuração com razoável quantidade de vazios é tracionada, o crescimento de vazios fica favorecido. Assim, ao final do processo a quantidade final de vazios resulta maior.

Pergunta-se: apesar de justificado, tal comportamento é fisicamente admissível? Se estivermos pensando no contexto da fadiga de baixo ciclo, ou seja, quando o material experimenta certa deformação plástica sob carga cíclica, a resposta é não.

Suponha-se uma situação em que determinado componente rompe após, por exemplo, 100 ciclos. Se essa ruptura for governada pela fração volumétrica de vazios, e esta se comporta de forma bastante diversa caso um ciclo se inicie com tração ou compressão, parece incoerente que a ruptura após 100 ciclos seja governada pelo sinal do primeiro.

Nas figuras 100 a 103 são apresentados os resultados obtidos para a evolução da fração volumétrica de vazios final empregando-se os quatro modelos de nucleação em estudo, submetendo o material a dez ciclos iguais ao da figura 84.

Observa-se que nos modelos alternativos (simétrico, deslocado e baseado em deformação plástica principal máxima) o dano médio é crescente à medida que aumenta o número de ciclos, podendo chegar a um valor crítico que corresponderia à ruptura. Isso é um primeiro indicativo que os modelos se prestam à simulação do fenômeno de fadiga de baixo ciclo. No modelo simétrico os ciclos desenvolvem-se com um dano mais baixo que nos demais modelos. No caso do modelo deslocado, a diferença entre o dano médio nos ciclos CT e TC é um pouco menor que no modelo baseado em deformação plástica principal máxima e menor ainda que no modelo simétrico. Tal diferença poderia ser um indicativo da influência do sinal do primeiro ciclo no comportamento ao longo do processo: quanto menor a diferença, mais próximo do comportamento esperado, ou seja, que um fenômeno verificado após um número grande ciclos se comporte de forma relativamente independente do sinal do carregamento no primeiro ciclo.

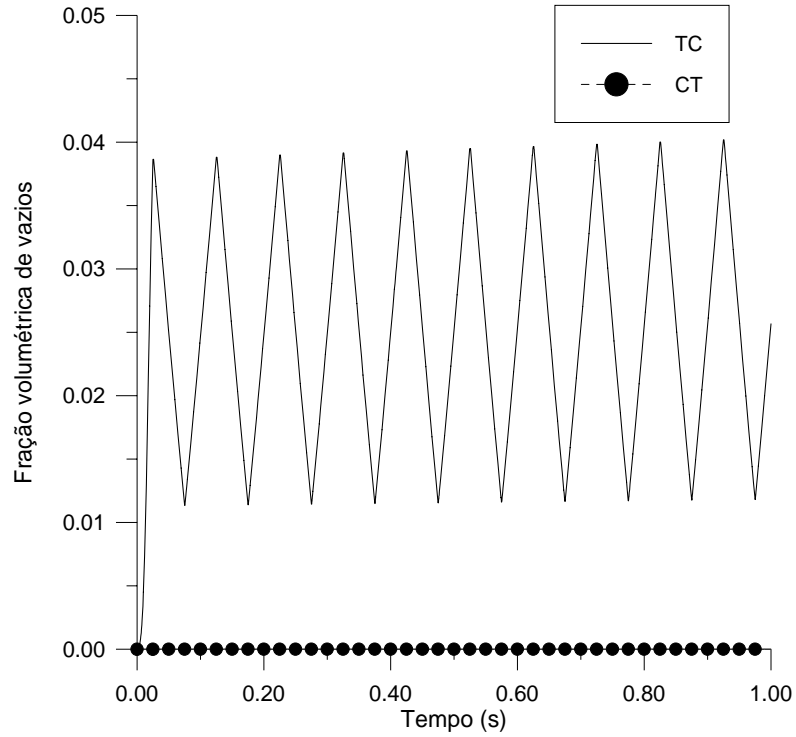


Figura 100: fração volumétrica de vazios total – modelo ABAQUS (10 ciclos)

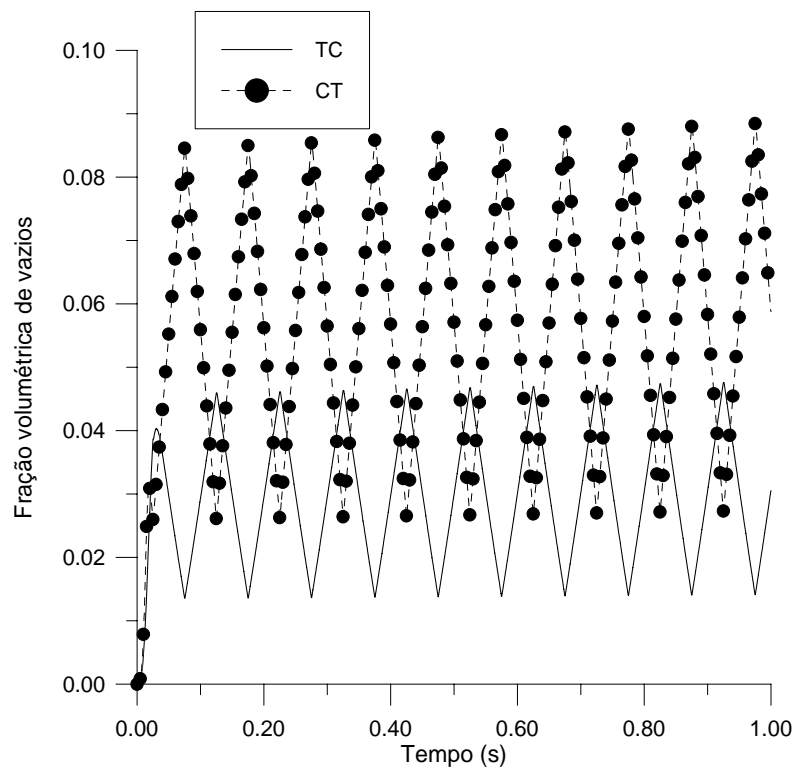


Figura 101: fração volumétrica de vazios total – modelo simétrico (10 ciclos)

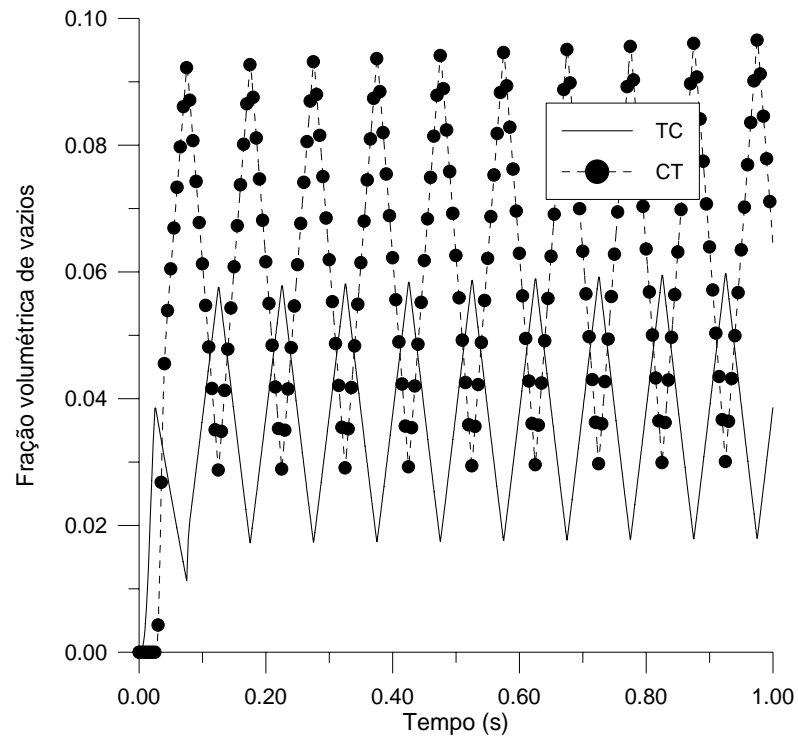


Figura 102: fração volumétrica de vazios total – modelo deslocado (10 ciclos)

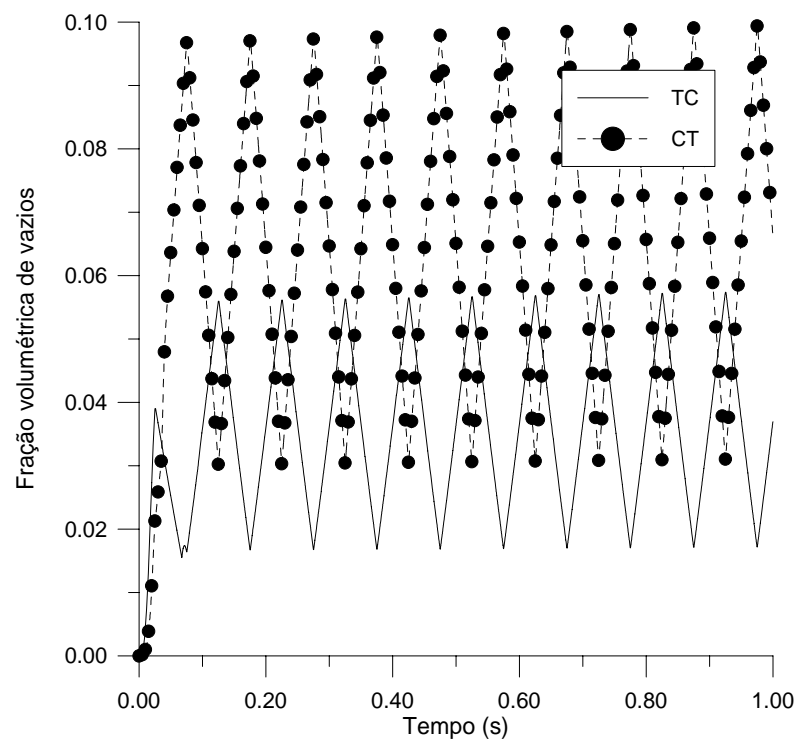


Figura 103: fração volumétrica de vazios total – modelo baseado em deformação plástica principal máxima (10 ciclos)

## 6.4 CONCLUSÕES

A maioria das referências consultadas aplica o modelo de Gurson considerando carregamento monótono, sem alternância no sinal da pressão. Neste capítulo, procura-se mais do que tudo chamar atenção para resultados incoerentes que podem ser obtidos quando há alternância do sinal da pressão durante o processo de solitação. Os modelos propostos antes (deslocado e baseado em deformação plástica principal máxima) são uma tentativa muito tênue de contornar o problema, visto que a carência de resultados experimentais e metalográficos que poderiam embasar modelos mais sofisticados é grande. Os modelos apresentados são modelos bastante simples e de fácil implementação numérica.

Além disso, o modelo deslocado coincide com os modelos que vêm sendo empregados até então (simétrico e ABAQUS) caso haja somente tração e é capaz de nuclear vazios após uma etapa prévia de compressão.

## 7 A FORMULAÇÃO LAGRANGIANA-EULERIANA ARBITRÁRIA

Neste capítulo, é abordada de forma concisa a formulação Lagrangiana-Euleriana Arbitrária. Ao final, são discutidos alguns resultados obtidos com o emprego da versão tridimensional do METAFOR, empregando a referida formulação e o modelo de dano de Gurson.

### 7.1 INTRODUÇÃO

Normalmente em plasticidade com grandes deformações é necessário o emprego de procedimentos incrementais, tornando possível a determinação da história de tensões e deformações a que o material é submetido. O cálculo das incógnitas relevantes é feito a partir de uma configuração de referência, empregando-se um sistema de referência. Conforme o sistema de referência empregado e o instante em que é avaliada a configuração de referência, são obtidas as diversas formulações empregadas em mecânica computacional.

O sistema de referência pode ser considerado fixo no espaço (figura 104), sendo denominado sistema de referência espacial (SRE). A formulação que emprega tal sistema de referência é a chamada formulação Euleriana (FE).

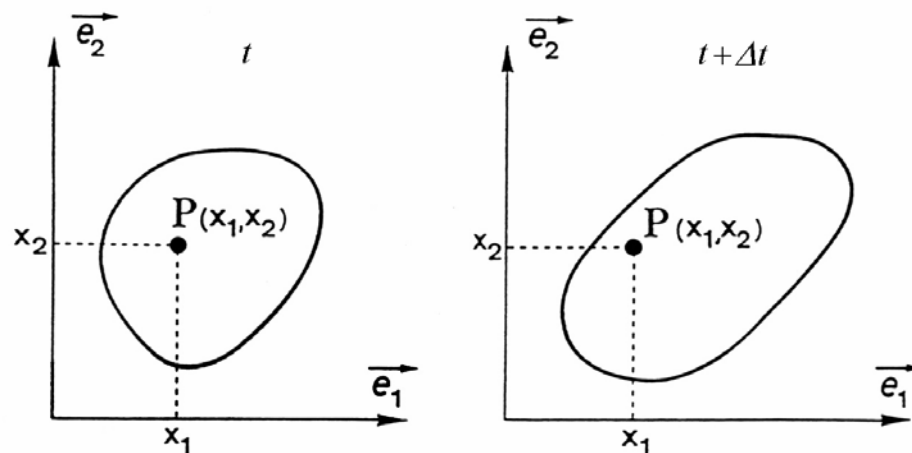


Figura 104: ponto  $P$  em dois instantes de tempo consecutivos  $t$  e  $t + \Delta t$ , com coordenadas  $x$  (SRE)

Na formulação Euleriana a malha de elementos finitos se mantém fixa (figura 105) e indeformável, sendo que as partículas materiais se deslocam através dessa malha, passando de um elemento finito a outro. A FE é bastante empregada em problemas de mecânica dos fluidos. Eventualmente pode ser empregada na simulação de processos de extrusão, apresentando como grande vantagem o fato de a malha não sofrer distorção alguma. Por outro lado, para aplicações mais gerais no contexto da mecânica dos sólidos, a introdução das condições de contorno materiais fica grandemente dificultada, já que os limites do corpo geralmente não coincidem com os limites dos elementos finitos.

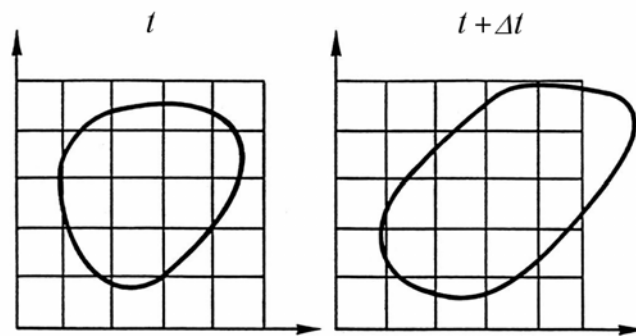


Figura 105: formulação Euleriana (SRE)

A adoção de um sistema de referência móvel no espaço, porém ligado ao corpo em estudo (figura 106), denominado sistema de referência material (SRM), conduz à chamada formulação Lagrangiana (FL). Cada nó da malha de elementos finitos fica ligado ao mesmo ponto material (figura 107) ao longo de todo o processo de deformação.

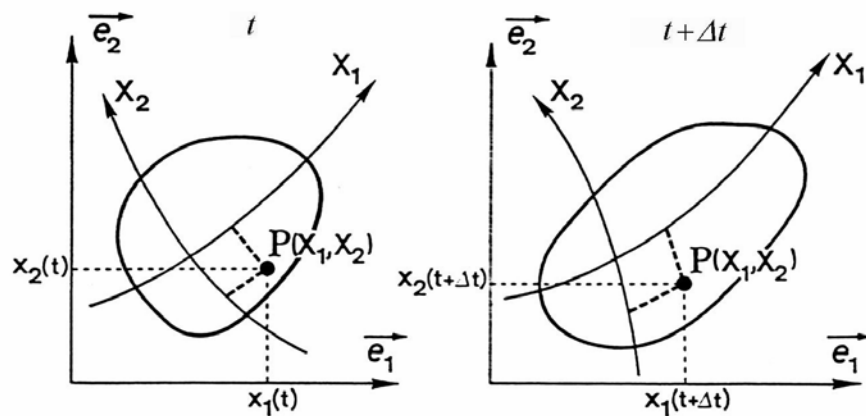


Figura 106: ponto  $P$  em dois instantes de tempo consecutivos  $t$  e  $t + \Delta t$ , com coordenadas  $x$  (SRE) e  $X$  (SRM)

A formulação Lagrangiana apresenta como vantagem a facilidade na introdução das condições de contorno, visto que um nó inicialmente na fronteira do corpo permanece na fronteira do mesmo ao longo do processo. Tal formulação também se mostra conveniente quando se deseja estudar a história de tensões e deformações em um ponto material, uma vez que tal ponto material está sempre na mesma posição paramétrica em relação aos nós, situando-se sempre no mesmo elemento finito. O inconveniente do emprego da FL se manifesta na presença de grandes deformações. Em tal situação, algumas regiões da malha de elementos finitos podem experimentar grandes distorções, fazendo com que a convergência do problema seja reduzida. Além disso, os resultados obtidos podem ter a precisão diminuída.

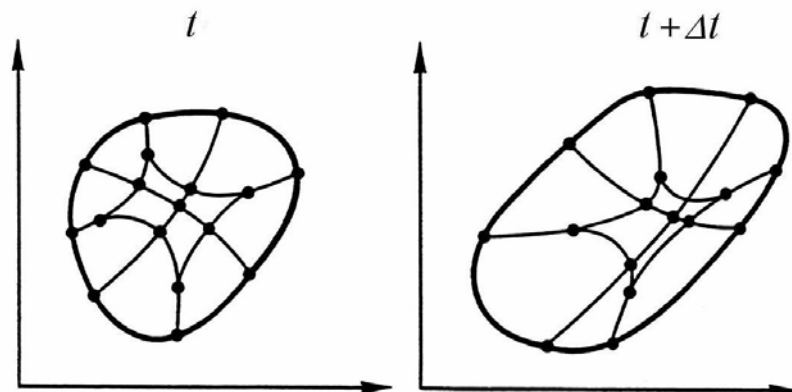


Figura 107: formulação Lagrangiana (SRM)

É possível definir pelo menos dois tipos de formulação Lagrangiana, conforme o instante em que é tomada a configuração de referência. É possível tomar como configuração de referência a configuração inicial do problema, levando à chamada formulação Lagrangiana Total, normalmente empregada em conjunto com leis constitutivas hiperelásticas. Outra possibilidade é tomar como referência a última configuração equilibrada conhecida. Assim é obtida a formulação Lagrangiana Atualizada (LA), muito empregada em problemas onde a lei constitutiva é expressa em função de taxas (hipoelasticidade).

Procurando aproveitar as vantagens de cada uma das formulações descritas antes, minorando seus inconvenientes, surgiu a chamada formulação Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (LEA), também conhecida como formulação Euleriana-Lagrangiana Mixta ou formulação Euleriana-Lagrangiana Arbitrária.

A formulação LEA considera que a matéria se desloca em relação à malha como em uma formulação Euleriana, sendo que normalmente no contorno é imposta uma restrição para que os contornos da malha e da matéria coincidam ao longo do processo, como em uma formulação Lagrangiana. Quando do emprego da formulação LEA é necessária a consideração de um terceiro sistema de referência, que não é fixo no espaço e nem fixo ao corpo, o chamado sistema de referência de cálculo (SRC), como se vê na figura 108.

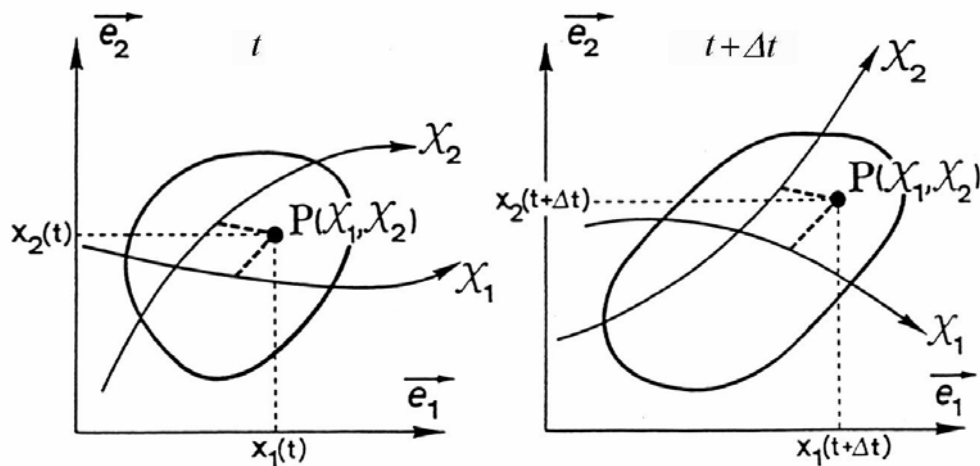


Figura 108: ponto  $P$  em dois instantes de tempo consecutivos  $t$  e  $t + \Delta t$ , com coordenadas  $x$  (SRE) e  $\chi$  (SRC)

As formulações Euleriana e Lagrangiana podem ser entendidas como casos particulares da formulação Lagrangiana-Euleriana Arbitrária. Fixando-se o sistema de referência de cálculo (SRC) no espaço, a formulação Euleriana é reproduzida. Ligando-se o sistema de referência de cálculo (SRC) à matéria, a formulação Lagrangiana é reproduzida.

A posição do SRC pode ser modificada de forma arbitrária ao longo da simulação, ou calculada, gerando um conjunto de incógnitas adicionais. A forma de determinar o sistema de referência de cálculo será abordada na seção 7.5.

A vantagem do emprego em mecânica dos sólidos de uma formulação Lagrangiana-Euleriana Arbitrária em relação ao emprego de uma formulação Lagrangiana é que, como o sistema de referência de cálculo pode ser escolhido de forma arbitrária, a distorção da malha de elementos finitos pode ser reduzida, desde que a escolha da posição dos nós ao longo do processo seja adequada.



É importante frisar que, caso a distorção dos elementos seja muito grande, a necessidade de remalhamento não é eliminada, sendo no entanto postergada. Tal retardo no remalhamento se constitui em um fato altamente benéfico, já que alguns aspectos do remalhamento são bastante dependentes da presença de um operador qualificado e experiente (Gadala e Wang, 1999), o que implica em custos. Dentre tais aspectos, é possível enumerar a correta definição do instante no qual o remalhamento deve ser realizado e a avaliação da qualidade da malha gerada. Assim, Ponthot (1995) salienta que o remalhamento e a formulação LEA devem ser entendidas não como técnicas concorrentes, mas como técnicas complementares.

Na figura 109, é mostrada de forma esquemática a evolução da malha conforme a formulação empregada, considerando as formulações Euleriana, Lagrangiana e Lagrangiana-Euleriana Arbitrária, respectivamente.

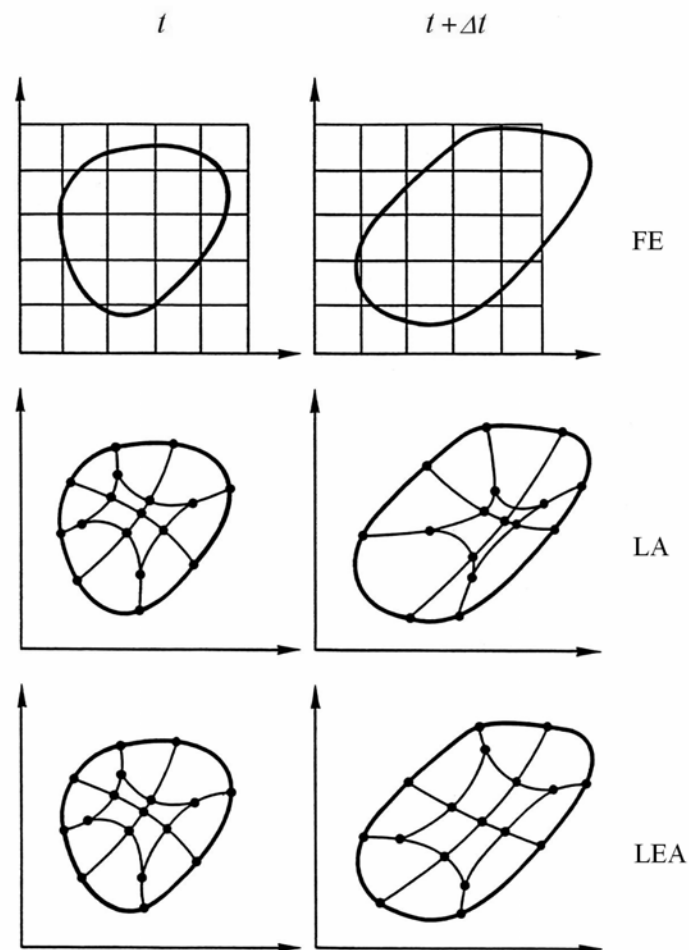


Figura 109: evolução da malha conforme a formulação empregada (FE, LA, LEA)

Do ponto de vista de emprego em códigos de elementos finitos, a formulação LEA foi empregada na mecânica dos sólidos em conjunto com o método dos elementos finitos inicialmente por Donea *et al.* (1982), simulando o fenômeno de interação fluido-estrutura. As primeiras aplicações à simulação de conformação mecânica aparecem nos trabalhos de Haber (1984), Liu, Belytschko e Chang (1986) e Schreurs, Veldpaus e Brekelmans (1986). Liu *et al.* (1988) derivam uma matriz tangente empregando um processo de linearização consistente. Huetnik *et al.* (1990) aplicam a formulação LEA à simulação de problemas de contato. Gadala e Wang (1998, 1999) apresentam uma formulação que contempla o caso de cargas seguidoras.

## 7.2 CINEMÁTICA DA FORMULAÇÃO LEA

Na cinemática da formulação LEA são envolvidos três domínios ou sistemas de referência: o domínio espacial (SRE), característico da formulação Euleriana, com coordenadas espaciais  $x_i$ ; o domínio material (SRM), composto pelas coordenadas materiais  $X_i$ , característico da formulação LA e o domínio de referência ou de cálculo (SRC), com coordenadas  $\chi_i$ .

Para relacionar o movimento da malha com o movimento da matéria é necessário o estabelecimento de relações biunívocas entre as coordenadas espaciais, as coordenadas materiais e as coordenadas da malha ou de cálculo. Assim, as coordenadas espaciais  $x_i$  são expressas em função das coordenadas materiais  $X_i$  e do tempo  $t$  (equação 221), ou em função das coordenadas da malha  $\chi_i$  e do tempo  $t$  (equação 222).

$$x_i = x_i(X_i, t) \quad (221)$$

$$x_i = x_i(\chi_i, t) \quad (222)$$

Usando as relações anteriores, é possível definir os deslocamentos da matéria  $u_i$  e da malha  $\hat{u}_i$ , considerando  $t_0$  como o tempo inicial.

$$u_i(X_i, t) = x_i(X_i, t) - x_i(X_i, t_0) \quad (223)$$

$$\hat{u}_i(\chi_i, t) = x_i(\chi_i, t) - x_i(\chi_i, t_0) \quad (224)$$

Diferenciando com relação ao tempo  $t$  as coordenadas espaciais expressas como função das coordenadas materiais  $x_i(X_i, t)$  e mantendo fixas as coordenadas materiais  $X_i$ , a velocidade da matéria  $v_i$  pode ser escrita como sendo

$$v_i = \left. \frac{\partial x_i(X_i, t)}{\partial t} \right|_{X_i} = \dot{x}_i \quad (225)$$

De forma similar, diferenciando em relação ao tempo  $t$  as coordenadas espaciais  $x_i(\chi_i, t)$  e mantendo fixas as coordenadas da malha  $\chi_i$ , a velocidade da malha  $\hat{v}_i$  pode ser definida como

$$\hat{v}_i = \left. \frac{\partial x_i(\chi_i, t)}{\partial t} \right|_{\chi_i} = \overset{\circ}{x}_i \quad (226)$$

O ponto cheio ( $\dot{\cdot}$ ) sobrescrito indica derivação temporal de uma quantidade referida ao SRM enquanto que o ponto vazado ( $\overset{\circ}{\cdot}$ ) sobrescrito indica derivação temporal de uma quantidade referida ao SRC. A diferença entre as velocidades da matéria e da malha é chamada de velocidade convectiva  $c_i$

$$c_i = v_i - \hat{v}_i \quad (227)$$

De forma a assegurar que os nós externos da malha representativa de um corpo sólido permaneçam sobre o contorno do mesmo, o contorno da malha (SRC) e da matéria (SRM) devem coincidir. Para tanto, Schreurs *et al.* (1986) sugerem o uso da restrição

$$c_i n_i^{cp} = 0 \quad (228)$$

onde  $n_i^{cp}$  é o vetor normal ao contorno no ponto considerado. Tal restrição inibe movimentos dos nós de contorno na direção normal a este, sendo que os movimentos tangenciais são permitidos.

Para uma função vetorial arbitrária  $f_i$ , a derivada material no tempo é obtida pelo emprego da derivada convectiva

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial f_i}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial x_j}{\partial t} \Big|_x \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial t} \Big|_x + v_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (229)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação contém a taxa local de variação da função  $f_i$  na vizinhança de  $x_j$ , enquanto que o segundo termo contém a taxa convectiva de variação de  $f_i$  (gradiente) na vizinhança de um ponto à medida que ele se move para um lugar onde o valor da função  $f_i$  é diferente (Malvern, 1969).

De maneira similar, é possível definir uma derivada referencial no tempo como

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial f_i}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial x_j}{\partial t} \Big|_x \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial t} \Big|_x + \hat{v}_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (230)$$

e pela combinação das equações 229 e 230, a derivada material resulta

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial f_i}{\partial t} \Big|_x + c_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (231)$$

ou

$$\dot{f}_i = \overset{\circ}{f}_i + c_j f_{i,j} \quad (232)$$

onde o termo mais à direita representa o efeito convectivo devido ao movimento relativo entre a malha e a matéria.

A equação 232 contém dois casos particulares:

a) formulação Lagrangiana ( $v_j = \hat{v}_j$ ): a matéria e a malha deslocam-se juntas;

$$\dot{f}_i = \overset{\circ}{f}_i \quad (233)$$

b) formulação Euleriana ( $\hat{v}_j = 0$ ): a malha está fixa.

$$\dot{f}_i = \overset{\circ}{f}_i + v_j f_{i,j} \quad (234)$$

### 7.3 EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO NA FORMULAÇÃO LEA

As leis de conservação em forma LEA são definidas sobre a configuração atualizada a partir das leis de conservação em forma LA (seção 3.1), empregando-se a equação 232 para relacionar derivadas temporais SRC e SRM. A conservação de massa em forma Euleriana é dada por

$$\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (235)$$

onde  $\rho$  é a densidade volumétrica de massa e  $v_i$  a velocidade da matéria. Considerando a equação 232 resulta

$$\dot{\rho} + c_i \rho_{,i} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (236)$$

A equação que expressa a conservação do momento da quantidade de movimento não se altera, já que não envolve derivação temporal,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (237)$$

sendo verificada de forma trivial se é empregado o tensor de tensões de Cauchy  $\sigma_{ij}$ .

A conservação da quantidade de movimento, que deve ser satisfeita em qualquer ponto do interior do corpo, é expressa em forma Lagrangiana através da equação de balanço de momento

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \quad (238)$$

onde  $b_i$  são as forças de massa por unidade de volume. Em forma Lagrangiana-Euleriana resulta

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \left( \dot{v}_i + c_j v_{i,j} \right) \quad (239)$$

As forças de inércia aparecem do lado direito da equação 239. Em problemas *quasi*-estáticos, nos quais as forças de inércia podem ser desprezadas, a equação 239 para as formulações LA e LEA coincide, resultando então

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = 0 \quad (240)$$

A conservação de energia em forma Lagrangiana-Euleriana é dada por

$$\rho \dot{u} + \rho c_i u_{,i} = \sigma_{ij} D_{ij} + \rho r - q_{i,i} \quad (241)$$

onde  $u$  é a entropia,  $D_{ij}$  o tensor taxa de deformação,  $r$  representa a produção interna de calor e  $q_i$  o vetor fluxo de calor trocado com o meio externo ao domínio considerado.

#### 7.4 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais, obtém-se a chamada forma fraca das equações de equilíbrio. Assim, tomando a integral da equação 239 multiplicada por um incremento virtual de deslocamentos, chega-se a

$$\int_V \delta u_i \left[ \sigma_{ij,j} + \rho b_i - \rho \left( \dot{v}_i + c_i v_{i,j} \right) \right] dV = 0 \quad (242)$$

que expressa em forma escalar o trabalho virtual realizado pelas forças de volume e de superfície. Empregando o teorema de Gauss, resulta

$$\int_V \rho \dot{v}_i \delta u_i dV + \int_V \rho c_j v_{i,j} \delta u_i dV + \int_V \delta u_{i,j} \sigma_{ji} dV = \int_V \rho b_i \delta u_i dV + \int_S t_i \delta u_i dS \quad (243)$$

com  $t_i = \sigma_{ij} n_j$ . As integrações são realizadas sobre áreas e volumes atualizados. Caso  $c_j = 0$ , o que ocorre em uma formulação LA, a equação 243 reproduz a equação 47.

Empregando elementos finitos, a equação 243 transforma-se em um sistema de equações para toda a estrutura

$$M_{ml} \dot{V}_l + C_{ml} V_l = R_m \quad (244)$$

onde a matriz de massa e o resíduo calculado a partir dos vetores de forças internas e externas

têm a mesma forma apresentada na seção 3.2. A matriz de convecção  $C_{ml}$  da estrutura é obtida por montagem a partir das contribuições de cada elemento, sendo as contribuições elementares  $C_{ij}$  dadas por

$$C_{ij} = \int_V \rho \phi^R c_j \phi_{,j}^R dV^{elem} \quad (245)$$

A diferença entre as equações 65 e equação 244 é o termo convectivo  $C_{ml} V_l$ , que complica a resolução da equação 244. Desprezando os efeitos de inércia, a equação 243 assume a forma

$$R_m = F_m^{ext} - F_m^{int} \quad (246)$$

idêntica à equação 61 para formulação LA. Nesse caso, para solucionar a equação 246, emprega-se um método iterativo, como por exemplo o método de Newton-Raphson.

## 7.5 DETERMINAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO EQUILIBRADA

A resolução da equação 244 em dinâmica ou da equação 246 em problemas *quasi*-estáticos permite determinar a configuração equilibrada atualizada, de forma semelhante ao que acontece na formulação LA. Em problemas *quasi*-estáticos, a equação 246 é solucionada em forma iterativa. É empregado o método de Newton-Raphson, iterando até que o resíduo se anule. O ponto crucial na aplicação do método de Newton-Raphson é a determinação do operador tangente, ou matriz de rigidez tangente, que relaciona taxa de variação de esforços internos às taxas de deslocamentos.

$$F_m^{int} = \frac{\partial F_m^{int}}{\partial x_l} dx_l \quad (247)$$



Após uma série de considerações, Ponthot (1995) mostra que a equação 247 conduz a

$$\overset{\circ}{F}_m^{int} = K_{ml}^C \overset{\circ}{x}_l + K_{ml}^M \dot{x}_l = K_{ml}^C \hat{v}_l + K_{ml}^M v_l \quad (248)$$

onde se identifica uma matriz de rigidez tangente relativa aos deslocamentos da matéria  $K_{ml}^M$  e outra  $K_{ml}^C$  relativa aos deslocamentos da malha. A equação 248 é fundamental na determinação da nova configuração equilibrada. Ela mostra que é matematicamente impossível linearizar o PTV no contexto da formulação LEA empregando unicamente o SRC, mas que é necessário levar em conta, de forma simultânea, as grandezas referentes ao SRM. A justificativa é evidente. É possível verificar o equilíbrio estático de um corpo para o qual se conhece o campo de tensões empregando apenas o SRC, mas não é possível determinar como esse equilíbrio evolui, pois a evolução temporal do campo de tensões depende das deformações materiais. Liu *et al.* (1988) apresentam a derivação de uma matriz tangente consistente onde a dependência em relação ao SRC e SRM também se verifica.

Assim, um elemento finito na formulação LEA possui um duplo conjunto de incógnitas, como se vê na figura 110, onde se encontram evidenciados o incremento de deslocamentos material  $dx_i^M$  e da malha  $dx_i^C$ .

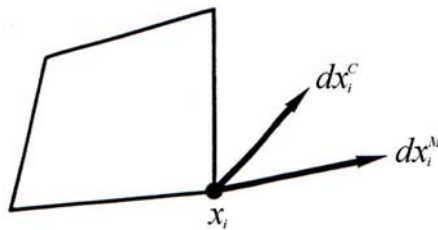


Figura 110: incógnitas em um nó de elemento finito (formulação LEA)

### 7.5.1 Resolução das equações de equilíbrio

No contexto do método de Newton-Raphson, a equação 248 conduz a

$$R_m = K_{ml}^C dx_l^C + K_{ml}^M dx_l^M \quad (249)$$

As matrizes  $K_{ml}^M$  e  $K_{ml}^C$  são de ordem  $n \times n$ , sendo  $n$  o número de graus de liberdade da malha. O sistema de equações caracterizado pela equação 248 é então um sistema com número de incógnitas igual ao dobro do número de equações. Existem duas formas de resolver a equação 248: ou eliminando incógnitas de forma a reduzir seu número à metade, ou acrescentando equações de restrição suplementares capazes de tornar o sistema determinado, o que corresponde a uma matriz de ordem  $2n \times 2n$ . Tal processo é conhecido como processo de determinação SRC.

O emprego de um SRC que não é estabelecido *a priori*, nem calculado em função da deformação da matéria, introduz uma grande liberdade na solução do problema. É possível fixar a malha no espaço ( $dx_i^M = 0$ ), reproduzindo a formulação Euleriana. Por outro lado, é possível fixar a malha à matéria ( $dx_i^M = dx_i^C$ ), reproduzindo a formulação Lagrangiana.

A determinação do SRC de forma a reproduzir as formulações Euleriana ou Lagrangiana representa uma solução trivial. É possível empregar um processo de determinação SRC não-trivial, considerando a coincidência entre as fronteiras da malha e da matéria (equação 228). Os incrementos devem respeitar tal condição de coincidência, assim

$$(dx_i^C - dx_i^M) \cdot n_i^{cp} = 0 \quad (250)$$

### 7.5.2 Dificuldades na solução das equações de equilíbrio acopladas

A solução das equações de equilíbrio quando se emprega o processo geral de determinação SRC, o que corresponde a empregar um sistema de equações com  $2n$  incógnitas, apresenta algumas dificuldades na sua implementação. A aplicação da equação 250 introduz algumas complicações, fato que leva alguns autores a considerar os nós de fronteira como puramente lagrangianos, o que simplifica o problema.

O processo geral de determinação SRC deve ser passível de linearização, podendo-se então calcular uma matriz  $K^{SRC}$ , de modo a transformar a equação 249 em um sistema quadrado de ordem  $2n \times 2n$ . Assim, resulta (Schreurs, Veldpaus e Brekelmans, 1986)

$$\begin{bmatrix} K^M & K^C \\ 0 & K^{SRC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx^M \\ dx^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ R^* \end{bmatrix} \quad (251)$$

onde se encontram adicionadas as condições impostas pela equação 250 sobre as fronteiras. Estas últimas impedem a resolução particionada da equação 251, pois se fosse admissível tal resolução, após obtidos  $dx^C$ , nas fronteiras livres teríamos que

$$dx_i^M \cdot n_i^{cp} = dx_i^C \cdot n_i^{cp} \quad (252)$$

ou seja, o processo de determinação SRC controlaria os deslocamentos da matéria normais à fronteira, de forma independente do comportamento físico do problema.

Para contornar tal inconveniente, é necessário resolver a equação 249 como um sistema acoplado com  $2n$  incógnitas. Tal procedimento torna-se oneroso em relação ao emprego de uma formulação LA, onde o número de incógnitas permanece limitado a  $n$ .

Para contornar o problema do duplo conjunto de incógnitas, Gadala e Wang (1998) propõem o emprego de uma combinação de interpolação transfinita e condensação, em nível de elemento, que faz com que o número de incógnitas permaneça limitado a  $n$ .

Além das complicações citadas, há o problema dos termos convectivos nas matrizes de rigidez  $K^M$  e  $K^C$ . É necessária a obtenção de um campo contínuo de tensões para que possa ser calculado seu gradiente.

Outra dificuldade provém do fato de  $dx_i^M$  e  $dx_i^C$  geralmente apresentarem valores diferentes em um mesmo nó. Isso faz com que, ao longo das iterações, um ponto material na configuração de referência passe a ser caracterizado por dois pontos de Gauss na configuração

deformada, um associado ao SRC e outro associado ao SRM, já que a malha e a matéria se deslocam de forma diversa.

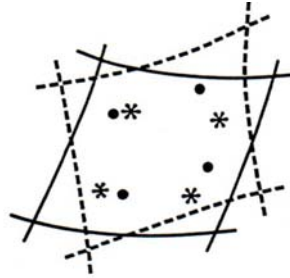


Figura 111: pontos de Gauss da malha e matéria (formulação LEA)

O inconveniente da duplicidade de pontos de Gauss (malha e matéria) é que as equações constitutivas são integradas para pontos materiais, enquanto que o equilíbrio é verificado sobre a malha. A transferência de tensões da matéria para a malha é possível, podendo, entretanto, surgirem falsas descargas elásticas, de origem puramente numérica, resultantes do processo de transferência.

Para avaliar corretamente a variação de tensão para uma dada partícula material, é necessário calcular o incremento de deslocamento após a última configuração equilibrada conhecida. Não basta simplesmente somar os  $dx^{M,i}$  de cada iteração, já que esses incrementos de deslocamento referem-se a espaços tangentes diversos (a última iteração não-equilibrada, que, por definição, muda de uma iteração a outra). Para calcular o campo de tensões de maneira correta, é necessário acompanhar a evolução de partículas materiais que correspondem geometricamente aos nós da malha na última configuração equilibrada conhecida. Para cada uma dessas partículas materiais é necessário a cada iteração:

- a) localizar o elemento que a contém, determinando suas coordenadas isoparamétricas  $\xi_e$  e  $\eta_e$ ;

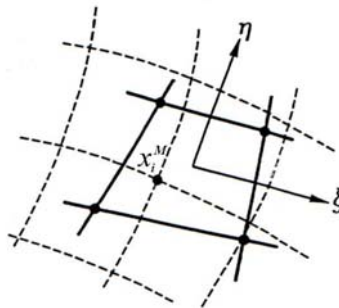


Figura 112: nó material (SRM) em elemento finito da malha (SRC)

b) atualizar as coordenadas dessas partículas materiais;

$$x_j^{M,i+1} = x_j^{M,i} + \phi^K(\xi_e, \eta_e) dx_j^{M,K} \quad (253)$$

c) calcular o incremento de tensões nos pontos de Gauss materiais;

d) transferir o campo de tensões para os pontos de Gauss da malha;

e) calcular o resíduo, e, caso este não se anule, executar nova iteração.

O processo pode ser entendido como um processo desenvolvido com duas malhas: uma, definida pelas coordenadas de malha (SRC) onde são verificadas as equações de equilíbrio; a outra, definida pelas coordenadas materiais (SRM) onde são integradas as equações constitutivas. Algumas grandezas devem ser transferidas do SRM ao SRC e vice-versa durante as iterações. Uma malha comum é redefinida cada vez que o equilíbrio é atingido.

Resumindo, as dificuldades adicionais na aplicação da formulação LEA acoplada no tratamento de problemas de mecânica dos sólidos envolvendo materiais com comportamento dependente da história de deformações são:

a) tamanho do sistema de equações a ser resolvido multiplicado por 2;

b) necessidade de incluir um processo de determinação SRC;

c) restrições a serem respeitadas sobre as fronteiras livres;

d) presença de termos convectivos nas matrizes de rigidez tangentes;

e) necessidade de obter um campo contínuo de tensões;

e) necessidade de uma técnica multi-malhas para integrar corretamente as leis constitutivas, bem como possibilidade de determinar a que elemento um ponto qualquer da estrutura pertence.

Essas dificuldades podem ser minoradas empregando-se um método alternativo, a chamada técnica de separação do operador LEA.

## 7.6 A TÉCNICA DE SEPARAÇÃO DO OPERADOR LEA

A técnica de separação do operador LEA permite simplificar a resolução das equações de equilíbrio e diminuir seu custo, sem abrir mão dos principais benefícios da formulação LEA. Inicialmente, para um incremento de carga é efetuada uma etapa puramente lagrangiana na qual a malha e a matéria encontram-se ligadas. Benson (1989) relata que um algoritmo empregando separação de operador normalmente resulta mais econômico e mais robusto que um algoritmo que trabalhe de forma acoplada.

Após atingido o equilíbrio, é empregado um processo de determinação SRC. Adota-se o método de interpolação transfinita, um método de geração de malha que trabalha à topologia constante, gerando a malha em uma região quadrangular a partir de linhas de contorno previamente definidas, sobre as quais é fixo o número de nós. Definida a nova malha (SRC), é realizada uma convecção de grandezas entre as malhas antiga (SRM) e nova (SRC). A malha nova servirá como referência (SRM) para o incremento de carga seguinte.

As vantagens da separação do operador LEA são evidentes. Na etapa puramente lagrangiana, estando a malha e a matéria ligadas, não existem termos convectivos. As equações de conservação ficam grandemente simplificadas. A formulação recai sobre a formulação LA desenvolvida no capítulo 3. O tamanho do sistema a resolver permanece de dimensão  $n$ . O processo de determinação SRC pode ser escolhido segundo os requisitos que se deseje satisfazer, normalmente malha pouco distorcida e uniforme.

### 7.6.1 Etapa Lagrangiana Atualizada

Na etapa LA, o movimento da malha e da matéria são tratados de forma acoplada ( $\hat{v}_i = v_i$ ). Neste passo, em se tratando de um código implícito, calcula-se a matriz tangente para a solução do problema e, ao atingir o equilíbrio, a malha obtida é relativamente

distorcida. A matriz tangente é calculada sem a necessidade de avaliar os termos convectivos ( $c_i = 0$ ).

Detalhes na determinação da matriz tangente analítica para problemas de contato podem ser encontrados em Bittencourt e Creus (1998). Em problemas com dano, até a implementação da matriz tangente analítica, emprega-se a matriz tangente obtida por perturbação numérica.

### 7.6.2 Etapa Euleriana

Após ser atingido o equilíbrio na etapa LA, é executada a etapa Euleriana, onde os nós da malha são realocados de forma a diminuir a distorção dos elementos. Esta realocação nodal equivale a eliminar as incógnitas  $\hat{v}_i$  da equação 248, visto que a posição dos nós da malha realocada (SRC) é imposta de forma a controlar a deformação da malha e reduzir sua distorção. Ainda na etapa Euleriana os dados (variáveis de estado) são transferidos da malha do passo LA (SRM) para a malha realocada (SRC). Emprega-se como técnica de realocação nodal o método de interpolação transfinita (Ponthot, 1995). No trabalho de Aymone (2000) são discutidas outras técnicas de realocação nodal. Segundo Benson (1989), pode ser atingida uma maior economia se a etapa Euleriana não for realizada em todos os passos de carga, e também se for empregado um particionamento na estrutura de modo que somente seja realizada etapa euleriana onde a malha apresentar distorção elevada a ponto de degradar a convergência do problema.

Após a aplicação da realocação nodal, a transferência de dados da malha LA para a malha realocada pode ser feita com a aplicação da derivada convectiva (equação 232). Para a transferência de tensões resulta

$$\dot{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{\circ} - c_k \sigma_{ij,k} \quad (254)$$

Tal procedimento é válido se a malha realocada é próxima da malha LA, como será visto na seção 7.7.1. No passo Euleriano, não é verificado o equilíbrio, visto que a realocação

nodal é realizada freqüentemente, ocasionando uma pequena mudança de posição nodal em cada passo de tempo.

Depois do passo Euleriano, o processo iterativo de cálculo continua no passo de tempo seguinte, onde novamente se utiliza a separação do operador LEA. De acordo com Ponthot e Hogge (1991), a transferência de dados da malha LA para a malha realocada pode causar algum trabalho extra no início do passo LA do tempo seguinte, especialmente em problemas de contato.

Tanto para problemas *quasi*-estáticos (código implícito com matriz tangente) quanto para problemas dinâmicos (código explícito sem matriz tangente) é feita a separação do operador LEA.

### 7.6.3 O método de Interpolação Transfinita

Na formulação Lagrangiana-Euleriana com separação de operador LEA, uma nova malha de elementos finitos deve ser determinada ao fim de cada etapa LA, ou em intervalos prescritos pelo usuário do código.

É desejável que a topologia se mantenha constante, ou seja, o número de nós, número de elementos e as conectividades não variem. Nesse caso, pode-se dizer que a cada ponto de Gauss na malha antiga corresponde um ponto de Gauss na malha redefinida. Como a redefinição de malha é feita seguidamente, deve-se empregar um método bastante simples e rápido. A intervenção do usuário deve ser a mínima possível. Um método que satisfaz os requisitos anteriores é o chamado método da Interpolação Transfinita (Ponthot, 1995).

O método de Interpolação Transfinita trabalha através do particionamento hierárquico do domínio em subdomínios quadrangulares. A malha é gerada a partir de informações nas faces dessas regiões quadrangulares, faces essas denominadas linhas mestras. O número de elementos e o tamanho destes é definido a partir do posicionamento de nós sobre as linhas mestras. Maiores detalhes sobre o método de Interpolação Transfinita podem ser encontrados no trabalho de Ponthot (1995).



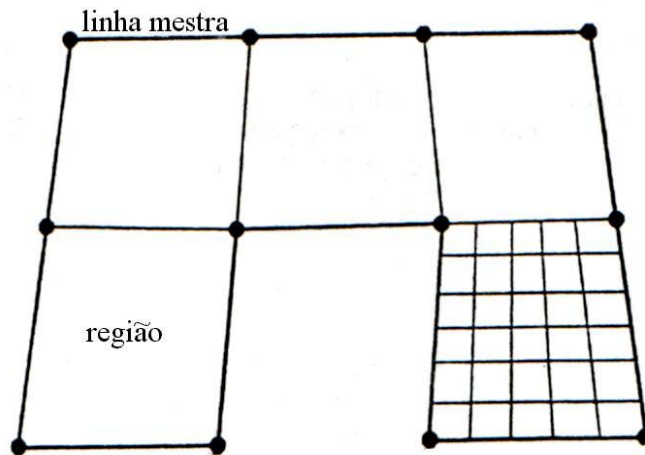


Figura 113: partição hierárquica em subdomínios e malhamento transfinito

## 7.7 TRANSFERÊNCIA DE DADOS

A determinação das tensões e variáveis internas nos pontos de Gauss da malha associada ao sistema de referência de material (SRM) e a verificação do equilíbrio para tal estado de tensões constituem a etapa Lagrangiana Atualizada do passo de carga. Após, segue-se a etapa euleriana, quando é necessário definir uma nova malha de elementos finitos e fazer a transferência de dados da malha referida ao SRM para a malha nova (SRC), que servirá de configuração de referência para o passo seguinte.

O algoritmo para transferência de dados entre os sistemas SRM e SRC é executado em duas etapas:

- a) suavização: é a obtenção de valores nodais para a grandeza a ser transferida, o que caracteriza um campo contínuo sobre o domínio. Para tanto, é aplicado um processo de mínimos quadrados local, como proposto por Hinton e Campbell (1974). Partindo dos valores da grandeza nos pontos de integração, com o conhecimento das funções de forma do elemento, é possível chegar aos valores nodais correspondentes. Fazendo a média entre os valores nodais de todos os elementos que concorrem ao nó obtém-se o valor nodal da grandeza. Segundo Ponthot (1995), tal técnica evita a obtenção de valores de tensão abaixo dos

reais nas fronteiras do domínio e em zonas muito deformadas. Esse procedimento é empregado para todas as grandezas que são calculadas nos pontos de Gauss, tais como deformação plástica equivalente, porosidade, etc...

- b) interpolação: a partir dos valores nodais de uma grandeza, empregando as funções de forma do elemento é possível determinar os valores em qualquer ponto no domínio do elemento. Assim, determinando a que elemento da malha SRM um ponto de Gauss da malha SRC pertence, é possível determinar tensões, deformação plástica, porosidade etc... Caso as malhas SRM e SRC se encontrem próximas, é possível empregar um procedimento simplificado descrito a seguir.

### 7.7.1 Cálculo de campo de grandezas nos pontos de Gauss da malha SRC

A transferência de dados entre as malhas SRM e SRC pode ser feita de duas formas. É possível através da determinação do elemento SRM a que um ponto SRC pertence, empregar as funções de interpolação do elemento SRM e, com o valor das coordenadas paramétricas do ponto SRC, obter o valor da grandeza a ser transferida. Tal processo se revela bastante preciso, porém o preço a pagar é um custo computacional alto.

Caso a distância entre os pontos de Gauss SRM e SRC seja pequena, particularmente quando os pontos de Gauss SRC situam-se no interior do elemento SRM (figura 111), é possível (Ponthot, 1995) empregar para a grandeza a ser transferida um desenvolvimento em série de Taylor limitada aos termos de primeira ordem. Assim, a grandeza  $g^N$  na malha SRC é obtida a partir de  $g^V$  na malha SRM por

$$g^N = g^V + \vec{d} \cdot \vec{\nabla} g \quad (255)$$

onde  $\vec{d}$  representa o vetor que separa os pontos de Gauss nas malhas SRM e SRC e  $\vec{\nabla} g$  o gradiente da grandeza a ser transferida. Esse procedimento encontra-se detalhado no trabalho de Aymone (2000). Gadala e Wang (1999) empregam procedimento semelhante.

No início de cada passo de carga, os sistemas de referência SRM e SRC coincidem. Para incrementos de carga pequenos, a distância entre as posições SRM e SRC de um ponto de Gauss será pequena. Segundo Rozenwald (1996), a precisão da equação 255 é tanto melhor quanto menor for a distância que separa os pontos de Gauss SRM e SRC, o que pode ser obtido por incrementos pequenos de solicitação, ou por reconstrução freqüente da malha, por exemplo, ao fim de todos os incrementos de carga. A grande vantagem desta forma de transferir grandezas é não haver a necessidade de determinar a que elemento SRM pertence um ponto SRC. Salienta-se que a aplicabilidade de tal processo passa pelo emprego de um algoritmo de redefinição de malha que mantenha a topologia constante.

A hipótese inicial, ou seja, pontos de Gauss SRC e SRM pertencentes ao mesmo elemento SRM, deve ser confirmada, para haver a garantia de não estar sendo introduzido erro. Uma maneira possível de fazê-lo, conforme o elemento empregado e o número de pontos de Gauss, é através de inversão paramétrica.

### 7.7.2 Grandezas a serem transferidas

A escolha das grandezas a serem transferidas para a verificação do equilíbrio é feita em função da lei constitutiva que governa o material. No caso de materiais hipoeelásticos, as taxas de tensão são obtidas a partir das taxas de deformação. As tensões são obtidas incrementalmente por integração das taxas de tensão. As variáveis internas, deformação plástica equivalente e fração volumétrica de vazios, também influem no processo, já que estão presentes na equação da superfície de escoamento.

As variáveis a serem transferidas para a verificação do equilíbrio mecânico serão, então, tensões de Cauchy, fração volumétrica de vazios e deformação plástica equivalente.

Para problemas onde há acoplamento termo-mecânico, é necessária também a transferência da temperatura, já que a verificação do equilíbrio térmico será realizada através da lei de Fourier, que relaciona o fluxo de calor ao gradiente de temperatura. Além disso, em função do algoritmo de cálculo de temperaturas adotado, os valores finais das temperaturas ao final de um incremento temporal servem como valores iniciais para o incremento seguinte (Rozenwald, 1996).

Em caso de problemas dinâmicos, é necessário transferir a densidade para reavaliar a matriz de massa da estrutura. Se o material for *quasi*-incompressível é possível reavaliar a matriz de massa empregando a densidade inicial. Também devem ser transferidas as velocidades e acelerações nodais. Ponthot (1995) emprega um método simplificado simplesmente transferindo as velocidades e acelerações nodais de uma malha a outra e informa que tal técnica apresenta boa conservação de energia cinética.

O quadro 8 apresenta as etapas desenvolvidas na solução de um problema empregando a formulação LEA conforme implementada no Metafor.

Quadro 8: etapas para o emprego da formulação LEA

**1 INICIALIZAÇÃO** - *Entrada de dados*: instantes inicial ( ${}^0t$ ) e final ( ${}^ft$ ), geometria (nós e elementos), condições de contorno, cargas, leis constitutivas, matrizes de conformação (contato).

**2 OPERADOR LEA**

**2.1 Passo LA**

${}^{n+1}t = {}^nt + \Delta t$  laço sobre o passo de tempo

2.1.1 Aplicar o método de Newton-Raphson ou Diferenças Centrais para, a partir da configuração de referência  ${}^0X = {}^nX$ , encontrar uma nova configuração instantânea  ${}^1X = {}^{n+1}X$ .

2.1.2 Calcular o gradiente de deformação espacial  ${}^{0-1}F$ .

$$F = \frac{\partial {}^1X}{\partial {}^0X}, \quad {}^{0-1}F = {}^{0-1}R {}^{0-1}U, \quad \text{com } {}^{0-1}R \text{ e } {}^{0-1}U \text{ tensores de rotação e deformação pura}$$

2.1.3 Cálculo das tensões de Cauchy  ${}^1\sigma$

2.1.3.1 Calcular a matriz  ${}^{0-1}U$

$${}^{0-1}U = \sqrt{{}^{0-1}F^T {}^{0-1}F}, \quad \text{que requer o cálculo de autovalores e autovetores}$$

2.1.3.2 Calcular  ${}^{0-1}R$

$${}^{0-1}R = {}^{0-1}U^{-1} {}^{0-1}F$$

2.1.3.3 Obtenção das tensões corotacionais de Cauchy  ${}^1\sigma^c$

$$\text{previsor elástico: } p^e = {}^0p + K {}^{0-1}E_{ii}^{LN,c}; \quad s_{ij}^{e,c} = {}^0s_{ij}^c + 2G {}^{0-1}E_{ij}^{LN,c} \quad \text{com } {}^{0-1}E_{ij}^{LN,c} = \frac{1}{2} \ln[{}^{0-1}U^2]$$

aplicação do corretor plástico, fornecendo os valores de  ${}^1s_{ij}^c$ ,  ${}^1p$ ,  ${}^1f$ ,  ${}^1\varepsilon^p$

rotação das tensões corotacionais  ${}^1\sigma^c$  através de  ${}^1\sigma = {}^{0-1}R {}^1\sigma^c {}^{0-1}R^T$  obtendo  ${}^1\sigma$

**2.2 Passo Euleriano**

2.2.1 Realocação Nodal

2.2.2 Correção da posição dos nós de contato, se houver

2.2.3 Transferência de dados da malha LA para a malha realocada

**3 AVALIAÇÃO DA DISTORÇÃO E DO ERRO (pós-processamento)**

**4 SE**  ${}^{n+1}t < {}^ft$  **VAI PARA O PASSO 2, SENÃO**

**5 FIM**

## 7.8 APLICAÇÕES

Nesta seção, estudam-se algumas aplicações buscando mostrar as vantagens do emprego de uma formulação LEA e de um programa tridimensional. Estuda-se o dobramento de uma barra retangular, onde se mostra que a aproximação bidimensional é inadequada para simular o problema. Estuda-se também a tração de uma barra de seção quadrada, onde se mostra que o emprego da formulação LEA fornece resultados diferentes da formulação LA. No último caso estudado, o puncionamento de um bloco cúbico por uma esfera rígida, mostra-se que o emprego da formulação LEA permite atingir o final da simulação, o que não ocorre ao empregar a formulação LA, devido à distorção excessiva dos elementos.

### 7.8.1 Dobramento de barra retangular

Este exemplo (Bittencourt, 1994) trata do dobramento de uma barra retangular que se apóia em uma matriz fixa. A barra tem profundidade de 8 mm, altura de 3 mm e comprimento de 48 mm. Ao modelar a barra leva-se em conta a simetria em relação aos planos  $XZ$  e  $YZ$ . A figura 114 mostra uma vista do plano  $YZ$ , onde aparece a malha inicial tracejada, a deformada final em traço cheio e as duas matrizes. A matriz inferior é fixa e a superior móvel, experimentando um deslocamento vertical de 11 mm.

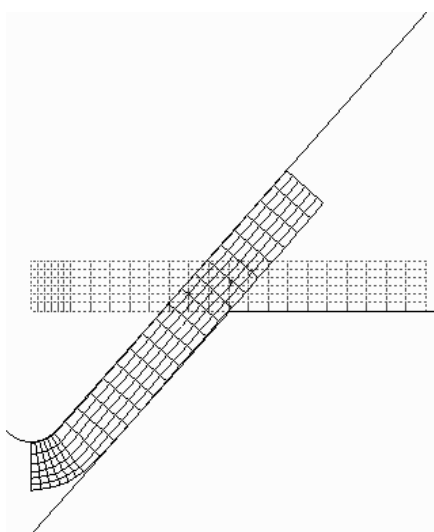


Figura 114: esquema indicando a densidade de malha, as matrizes e as posições inicial e final da malha

As matrizes possuem um ângulo de abertura de  $83^\circ$ . O raio de arredondamento do vértice da matriz superior é de 2 mm, enquanto que o raio na concordância entre os planos da matriz inferior é de 1 mm, este último não indicado na figura 114

As propriedades do material são: módulo de elasticidade  $E = 210$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e tensão de escoamento  $\sigma_y = \sigma_y^0 (1 + h \varepsilon^p)$ , com  $\sigma_y^0 = 400$  MPa e  $h = 210$  MPa. O contato é modelado como sendo do tipo deslizante, empregando-se penalidade normal  $k = 350$  GPa.

Inicialmente, analisa-se o problema como estado plano de deformações, empregando a versão bidimensional do Metafor. Os parâmetros de dano empregados nessa análise foram de  $\alpha_1 = 1,5$ ,  $\alpha_2 = 1,0$ ,  $f_N = 0,04$ ,  $\varepsilon_N = 0,2$  e  $s_N = 0,1$ . Apresentam-se as distribuições de pressão (figura 115), deformação plástica (figura 116) e porosidade (figura 117), empregando formulação LA e o modelo de nucleação deslocada em compressão. Observa-se que a porosidade surge onde se tem deformação plástica e pressão mais altas, sendo originada quase que totalmente por nucleação, já que a deformação plástica final não é tão alta assim em comparação à deformação plástica de nucleação e ocorre em uma zona bastante limitada.

Após, o mesmo problema foi analisado empregando formulação LEA. Os resultados obtidos para pressão (figura 118), deformação plástica (figura 119) e porosidade (figura 120) são apresentados. Observa-se que apesar de alguma diferença encontrada nos valores de pressão e deformação plástica, os valores da porosidade resultam praticamente idênticos para ambas as formulações.

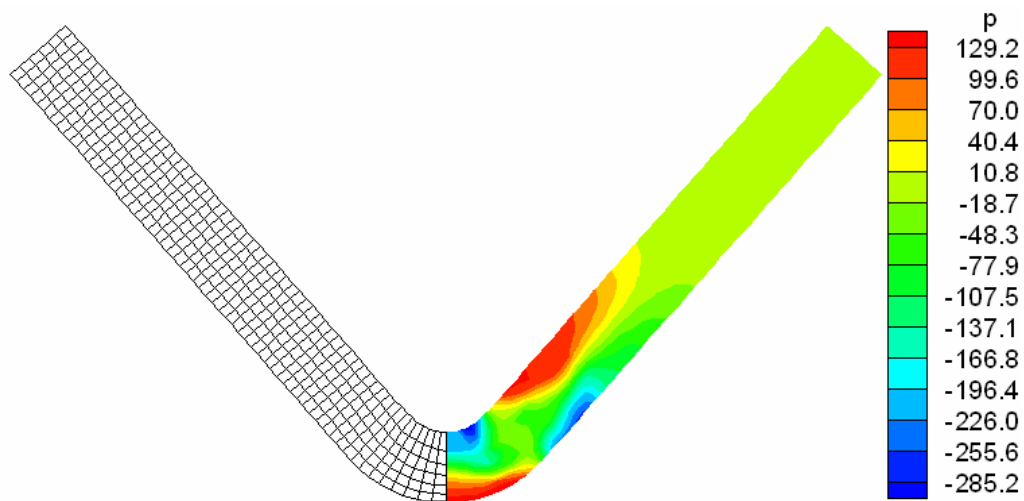


Figura 115: distribuição final de pressão – EPD (LA)

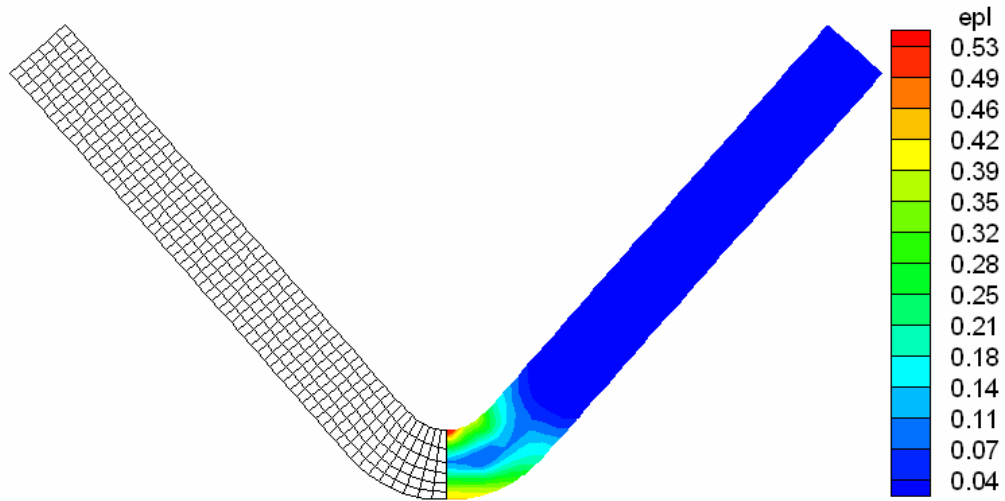


Figura 116: distribuição final de deformação plástica – EPD (LA)

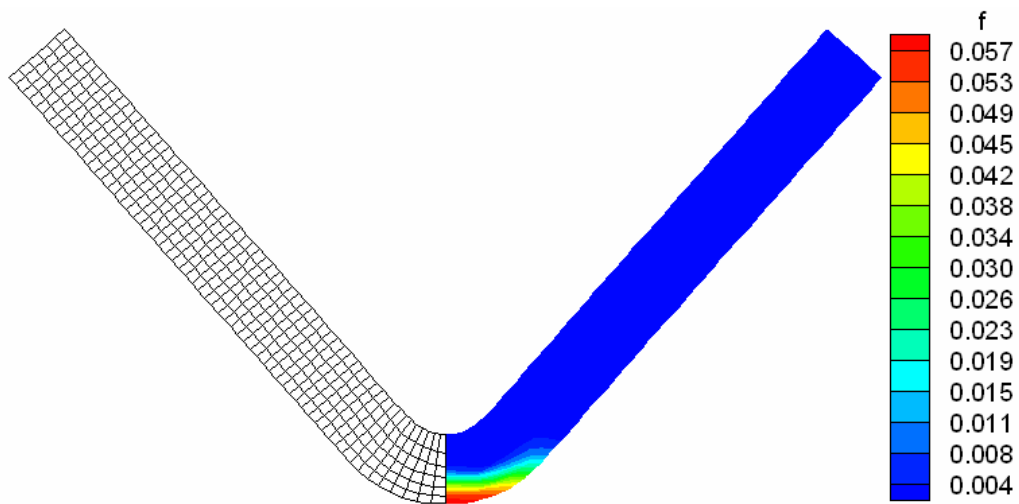


Figura 117: distribuição final de porosidade – EPD (LA)

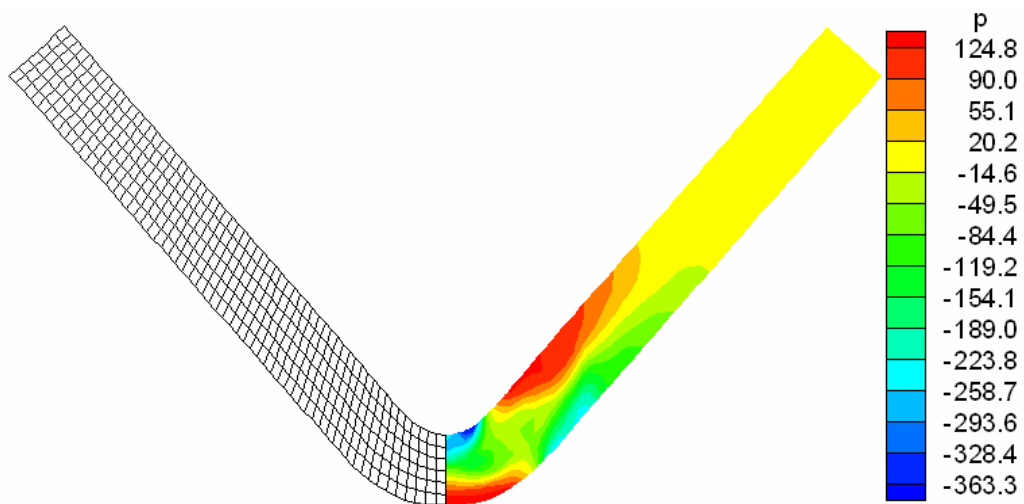


Figura 118: distribuição final de pressão – EPD (LEA)



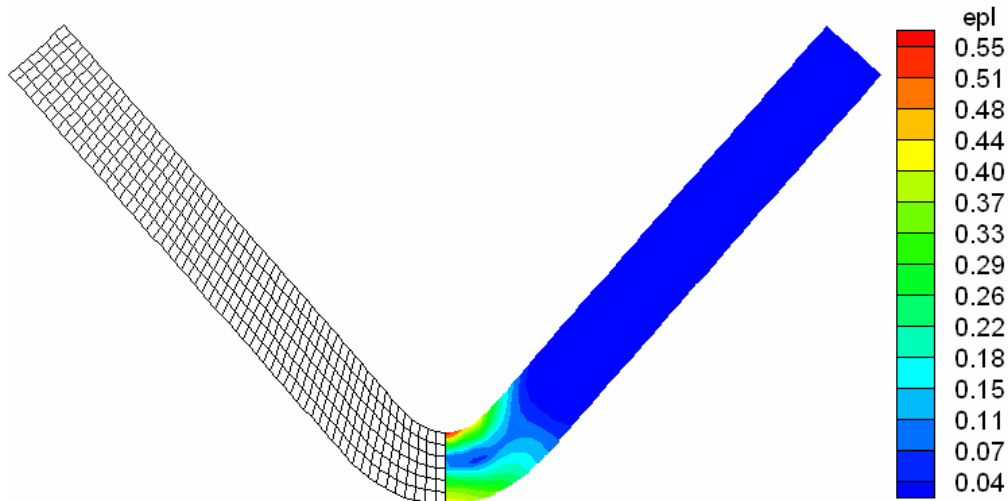


Figura 119: distribuição final de deformação plástica – EPD (LEA)

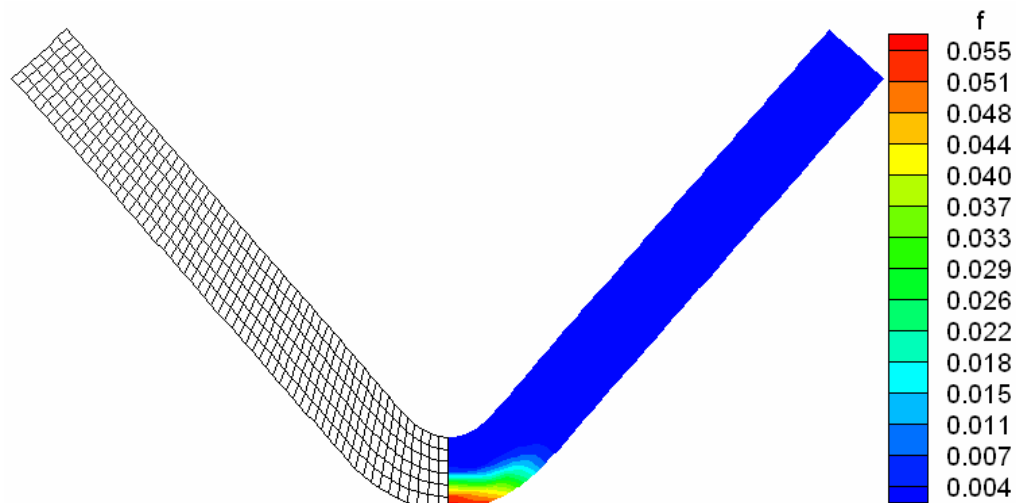


Figura 120: distribuição final de porosidade – EPD (LEA)

A seguir é feita a análise tridimensional, inicialmente empregando a formulação LA sem dano. As restrições em  $X$  situam-se somente na face posterior.

Apresenta-se na figura 121 a deformada final e um detalhe da seção localizada sobre o plano  $XZ$ . Como o problema não está mais confinado na direção  $X$ , a zona comprimida em contato com o vértice da matriz superior tem sua largura aumentada, enquanto que a parte tracionada inferior tem sua largura diminuída. Esse efeito é conhecido como curvatura anticlástica, fazendo com que nem toda a parte superior da barra fique em contato com a matriz superior. Isso se revela na distribuição de pressões (figuras 122 e 123). A falta de restrição em  $X$  na análise tridimensional ocasiona diferença considerável nos valores de

pressão, em relação aos valores obtidos através da análise bidimensional. A distribuição de deformação plástica é apresentada nas figuras 124 e 125.

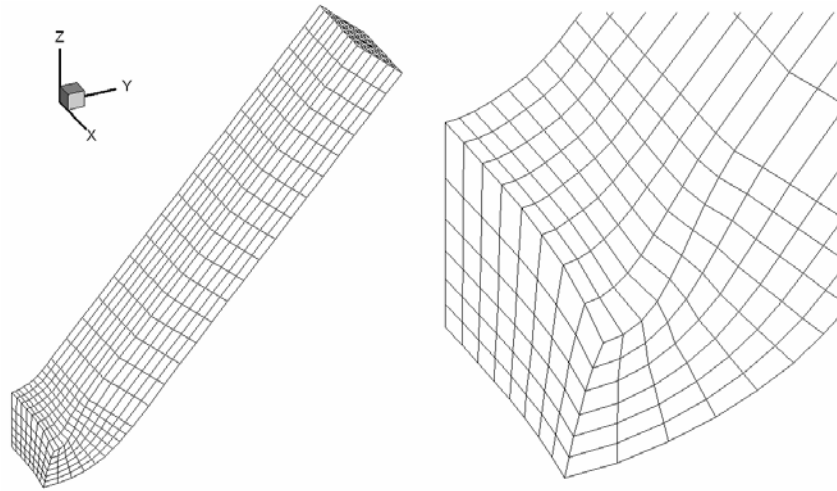


Figura 121: deformada final e detalhe evidenciando a curvatura anticlástica – LA

Os resultados obtidos para pressão (figuras 126 e 127), deformação plástica (figuras 128 e 129) e porosidade (figuras 130 e 131) considerando dano são apresentados a seguir. Observa-se que a porosidade resulta superior em relação àquela obtida na análise bidimensional.

Fica clara a inadequação do emprego de uma aproximação bidimensional para simular este problema. A aproximação bidimensional leva a uma zona de contato entre peça e ferramenta completamente diferente da obtida empregando aproximação tridimensional. Assim os valores de pressão e porosidade também resultam diferentes conforme a aproximação empregada.

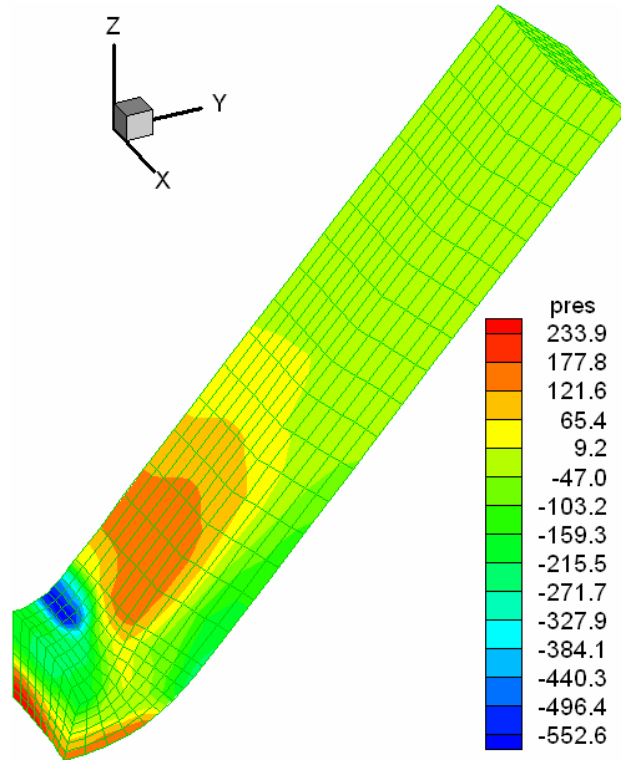


Figura 122: distribuição final de pressão – LA sem dano

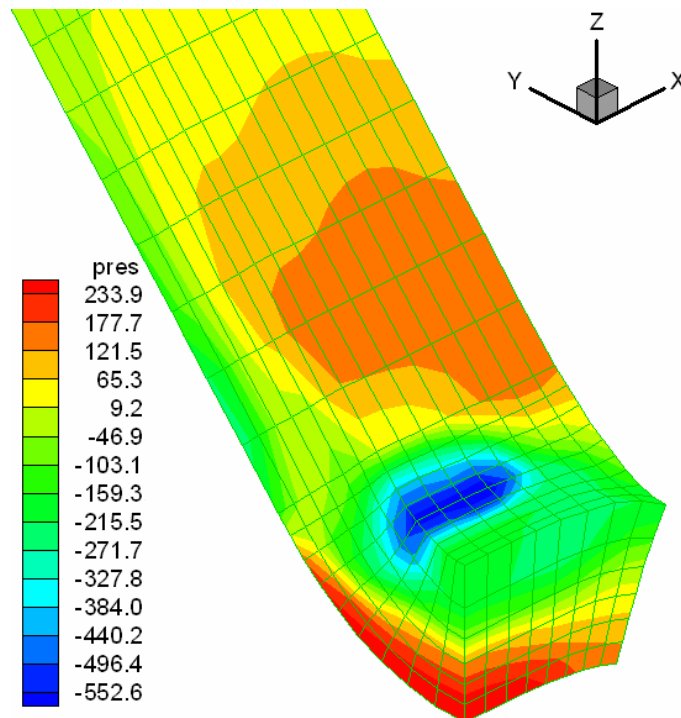


Figura 123: detalhe da distribuição final de pressão – LA sem dano

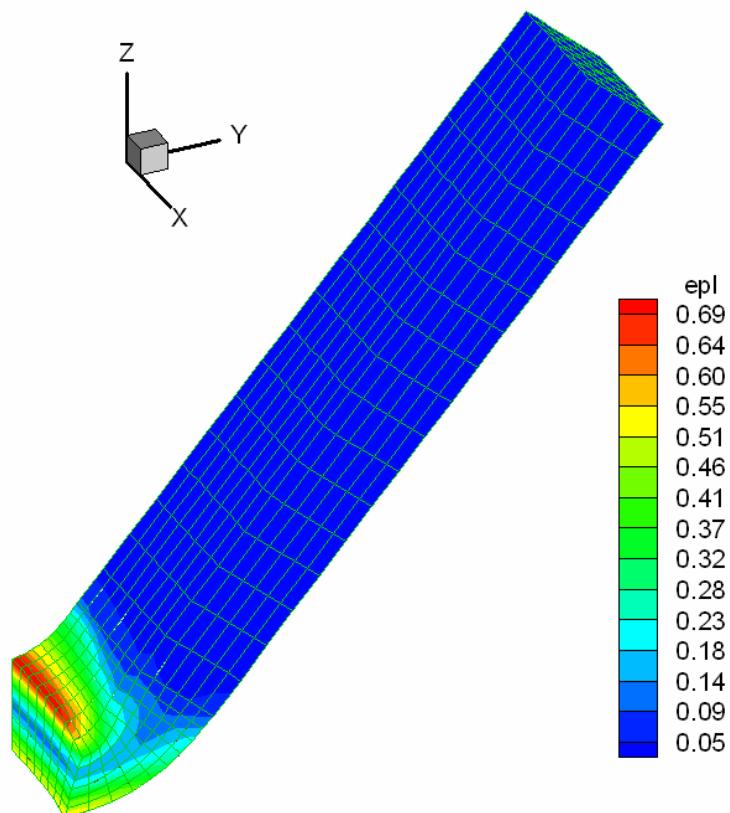


Figura 124: distribuição final de deformação plástica – LA sem dano

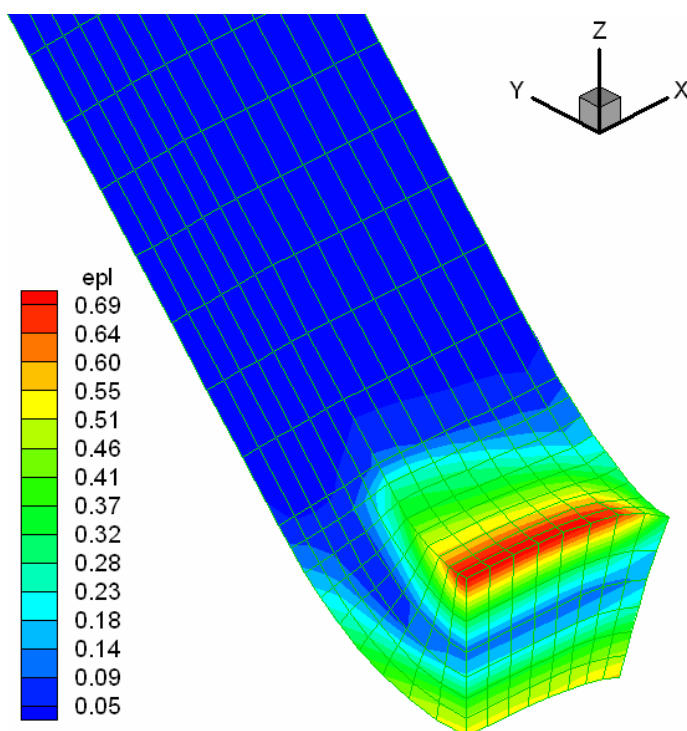


Figura 125: detalhe da distribuição final de deformação plástica – LA sem dano

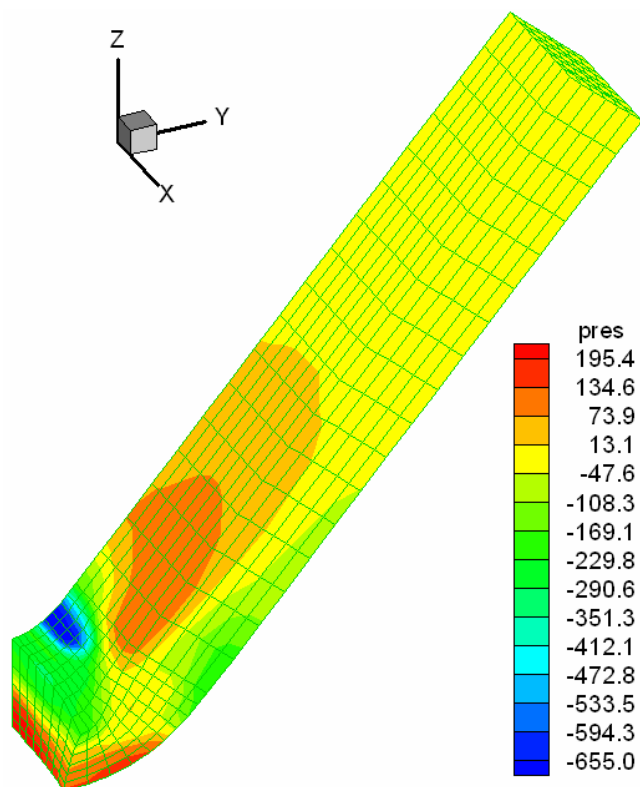


Figura 126: distribuição final de pressão – LA com dano

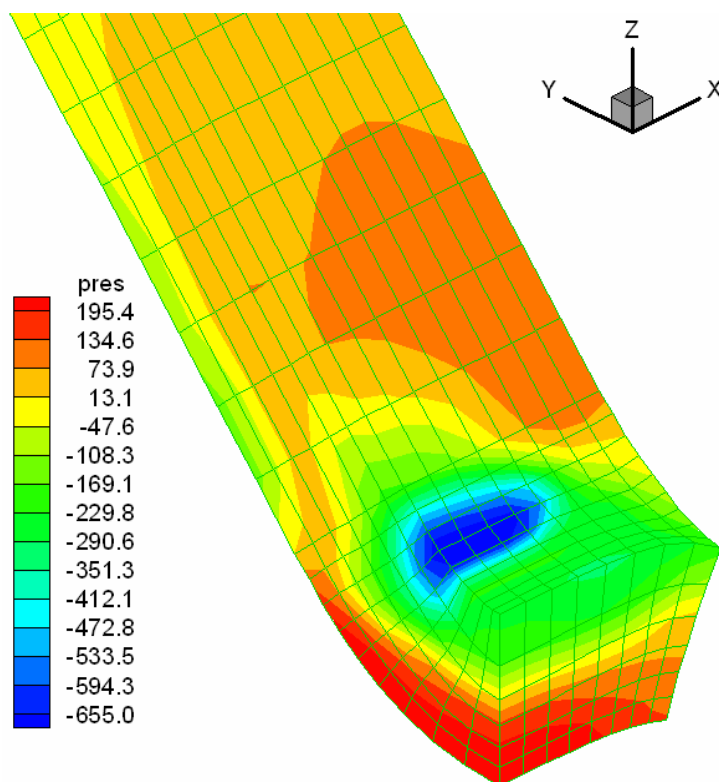


Figura 127: detalhe da distribuição final de pressão – LA com dano

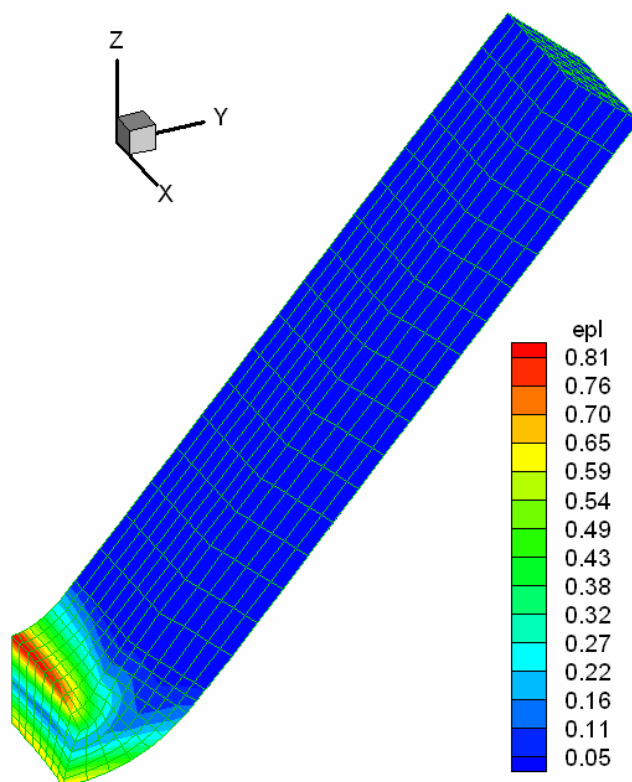


Figura 128: distribuição final de deformação plástica – LA com dano

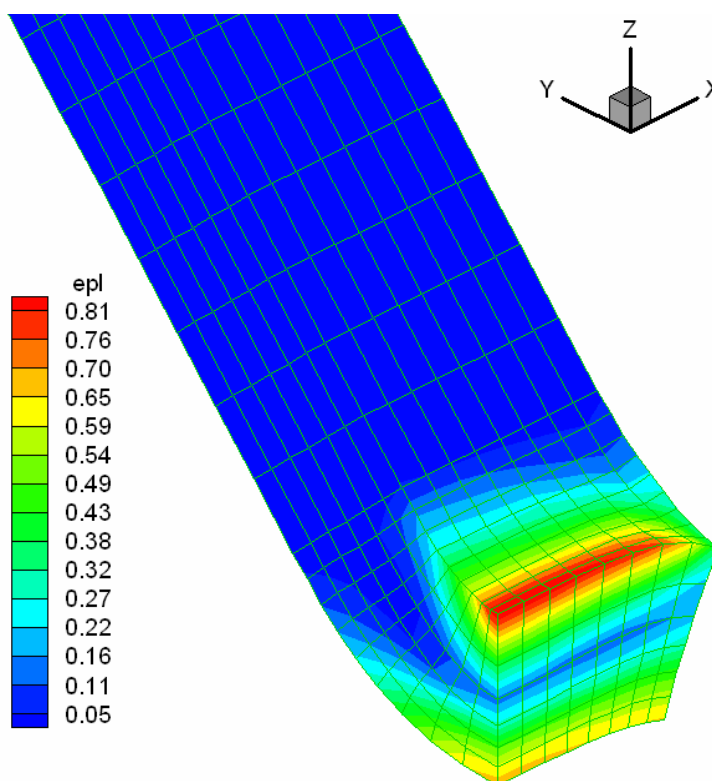


Figura 129: detalhe da distribuição final de deformação plástica – LA com dano

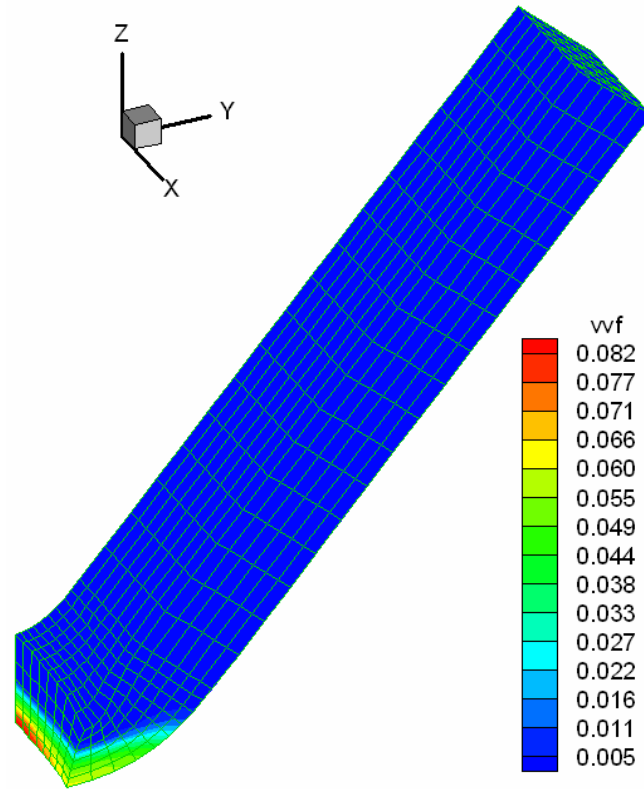


Figura 130: distribuição final de porosidade – LA com dano

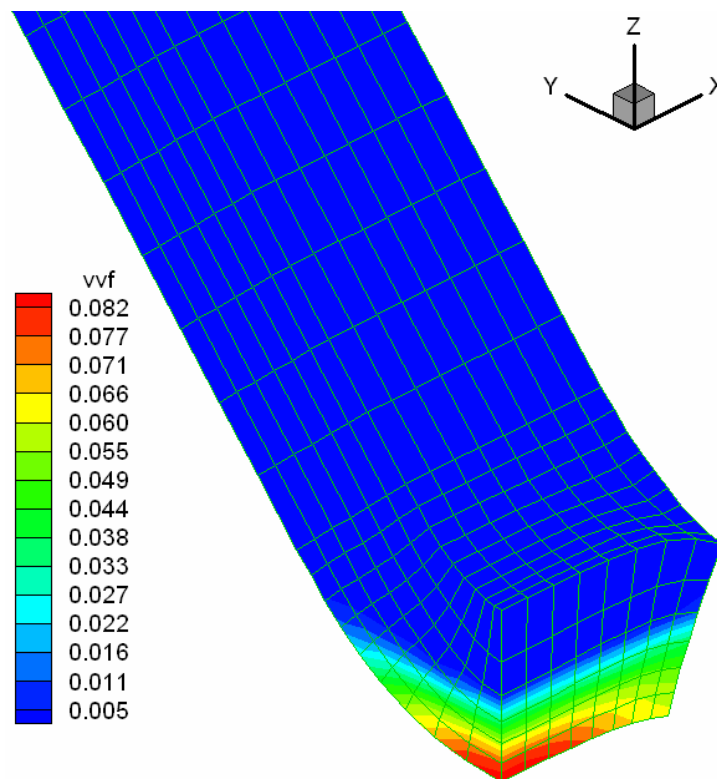


Figura 131: detalhe da distribuição final de porosidade – LA com dano

### 7.8.2 Tração em barra de seção quadrada

Este exemplo trata da tração axial de uma barra de seção quadrada. A barra tem seção transversal de 2 x 2 mm e altura 8 mm. Devido à simetria em relação a três planos ortogonais é possível discretizar apenas 1/8 da barra. O material da barra apresenta módulo de elasticidade  $E = 210$  GPa e tensão de escoamento dada por  $\sigma_y = \sigma_y^o + (\sigma_y^\infty - \sigma_y^o)(1 - e^{-\delta \bar{\epsilon}^p})$ , com  $\sigma_y^o = 500$  MPa,  $\sigma_y^\infty = 700$  MPa e  $\delta = 16,93$ . As constantes de dano utilizadas são:  $\alpha_1 = 1,5$ ;  $\alpha_2 = 1,0$ ;  $f_N = 0,05$ ;  $\epsilon_N = 0,3$ ;  $s_N = 0,1$ ;  $f_C = 0,15$  e  $\Delta \epsilon = 0,3$ .

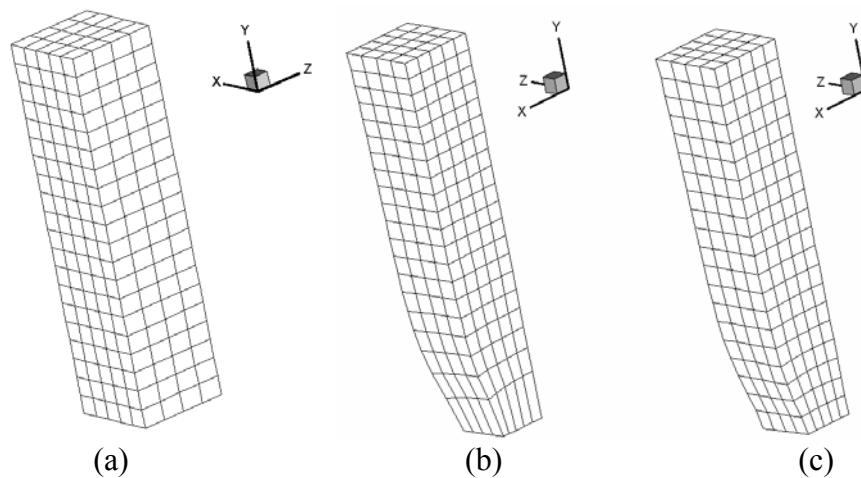


Figura 132: malhas inicial, final (LA) e final (LEA)

As distribuições de deformação plástica (figura 134), pressão (figura 135) e fração volumétrica de vazios (figura 136) correspondem à última configuração equilibrada obtida, que se dá níveis diferentes de deslocamento, como se pode ver pela figura 133, que mostra as curvas carga *versus* deslocamento para análises Lagrangiana Atualizada (LA) e Lagrangiana Euleriana Arbitrária (LEA).

Observa-se que, empregando a formulação LA, os elementos na zona de estricção apresentam uma menor qualidade (figura 132b) em relação aos obtidos empregando a formulação LEA (figura 132c). A distribuição de deformação plástica final (figura 134) se mostra algo diferente conforme a formulação empregada, mais uniforme quando se emprega formulação LEA. No caso do emprego de formulação LA, os valores mais elevados de deformação plástica não se encontram sobre o eixo longitudinal. Salienta-se que as configurações apresentadas na figura 134 referem-se a níveis de sollicitação diferentes.



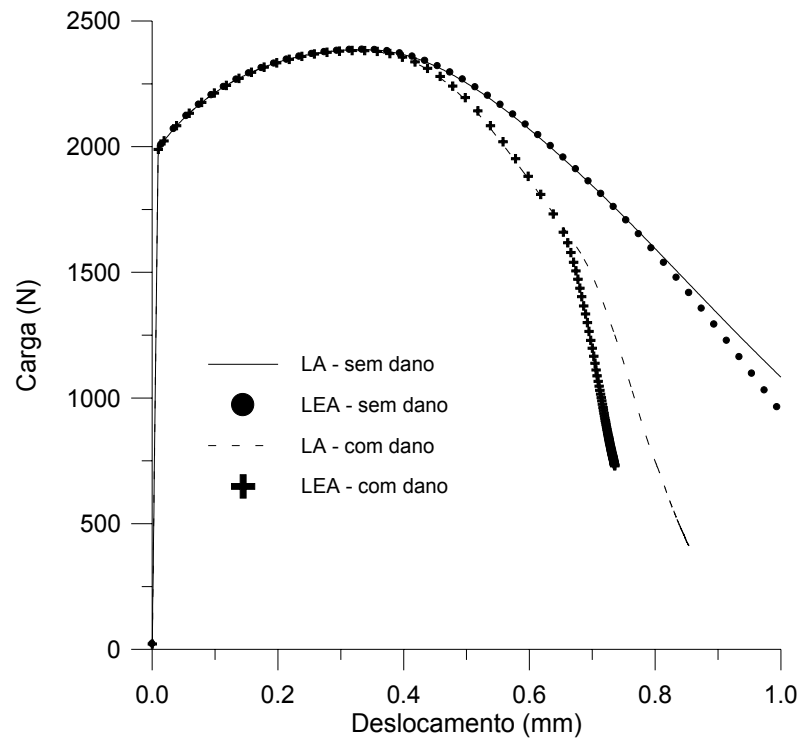


Figura 133: curvas carga *versus* deslocamento (LA e LEA)

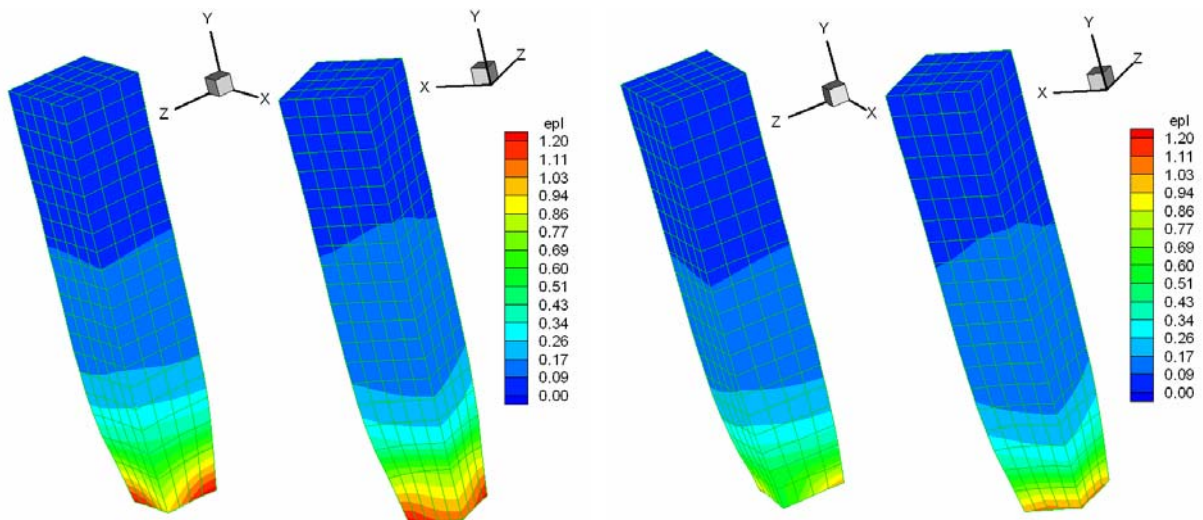


Figura 134: deformação plástica final (LA e LEA)

A distribuição de pressão (figura 135) na seção de estricção, nas formulações LA e LEA, se mostra dependente da fração volumétrica de vazios, ou seja, onde a porosidade é baixa (material menos degradado) a pressão é alta. Em zonas de porosidade alta o material se encontra degradado, incapaz de resistir a solicitações, levando a uma pressão baixa.

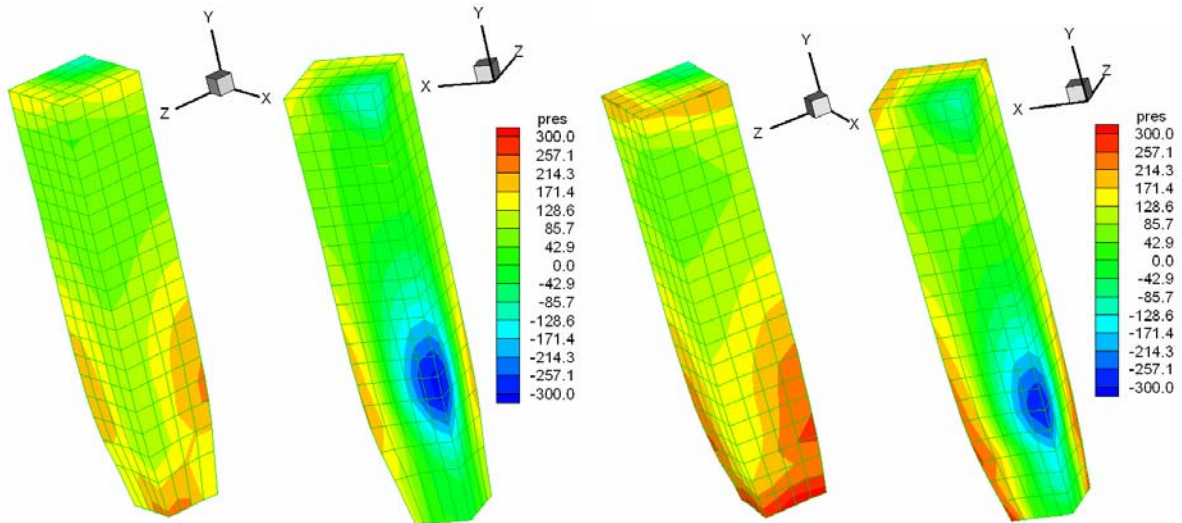


Figura 135: pressão final (LA e LEA)

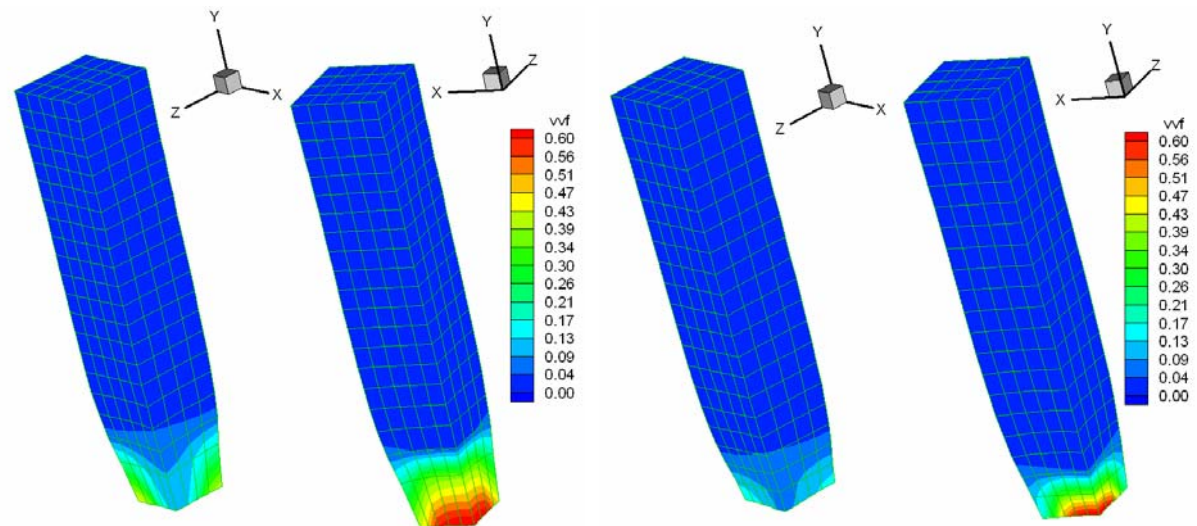


Figura 136: fração volumétrica de vazios final (LA e LEA)

A distribuição de porosidade (figura 136) mostra que no caso da formulação LA esta encontra-se mais disseminada ao longo do eixo longitudinal da barra. No caso da formulação LEA, há uma concentração de porosidade na seção de estricção. Tal fato está ligado à posição dos pontos de Gauss dos elementos conectados à seção de estricção. Na formulação LA, onde os elementos resultam mais alongados, os pontos de Gauss afastam-se da seção de estricção, levando a uma distribuição da porosidade ao longo do eixo longitudinal da barra analisada.

### 7.8.3 Puncionamento de bloco

Este exemplo trata do puncionamento axial de um bloco cúbico metálico por uma esfera rígida. Olmi (1997) e Aymone (2000) estudam problema semelhante, porém comprimindo um cilindro com uma esfera. O bloco possui altura de 100 mm e seção quadrada de 140 mm de lado. O punção esférico possui raio de 50 mm, deslocando-se verticalmente segundo o eixo vertical. O deslocamento previsto para a esfera é de 50 mm. Neste caso, devido à dupla simetria do problema, apenas  $\frac{1}{4}$  do bloco é modelado.

O contato entre o punção rígido e o bloco é admitido como sendo do tipo deslizante, com penalidade normal de 618 MN/m. Os parâmetros do material constituinte do bloco são:  $E = 206$  GPa,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 7500$  kg/m<sup>3</sup>,  $\sigma_y = \sigma_y^0 + h\varepsilon^p$ ,  $\sigma_y^0 = 346,4$  MPa,  $h = 138$  MPa,  $\alpha_1 = 1,5$ ,  $\alpha_2 = 1,0$ ,  $f_N = 0,04$ ,  $\varepsilon_N = 0,5$ ,  $s_N = 0,1$ ,  $f_C = 0,15$  e  $\Delta\varepsilon = 0,3$ .

O contato com o punção se dá na face superior do bloco. As condições de contorno na face inferior do bloco correspondem a deslocamento vertical nulo e deslocamento horizontal livre. Modela-se apenas  $\frac{1}{4}$  do bloco, impondo como condição de contorno nos planos de simetria deslocamentos normais a estes nulos.

Inicialmente, é feita uma análise elastoplástica empregando a formulação LA, situação em que o problema não avança além de 82 % do deslocamento total previsto para o punção, devido à distorção excessiva dos elementos. Empregando a formulação LEA o problema prossegue até o final. Na figura 137, apresenta-se a deformada final, obtida empregando espelhamento duplo da malha correspondente à aplicação da formulação LEA. Na figura 138a, é mostrada a malha LA correspondente a 82% de deslocamento do punção e na figura 138b, a malha LEA correspondente a 100% de deslocamento do punção.

Na zona onde se dá o contato com o punção, a malha apresenta elementos com uma forma bastante melhor quando se emprega a formulação LEA (figura 138b) em relação ao resultado obtido empregando a formulação LA (figura 138a). No caso do emprego da formulação LA, outro problema se manifesta: devido ao afastamento muito grande entre os nós da malha LA na zona de contato, esta começa a fugir da forma esférica, assumindo uma forma poliédrica.

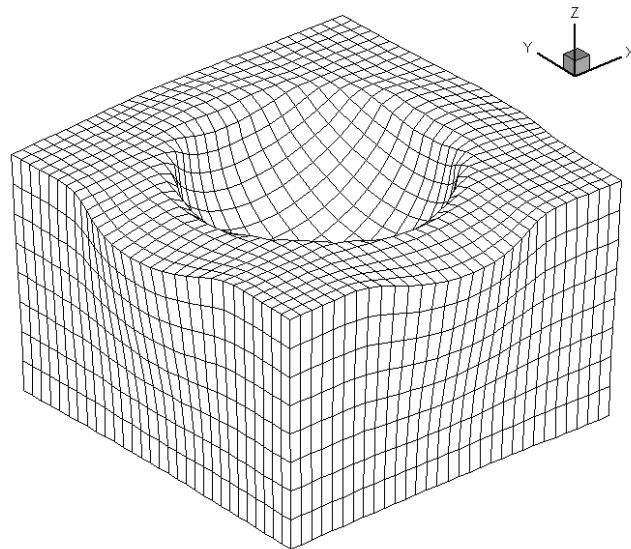


Figura 137: deformada final (LEA)

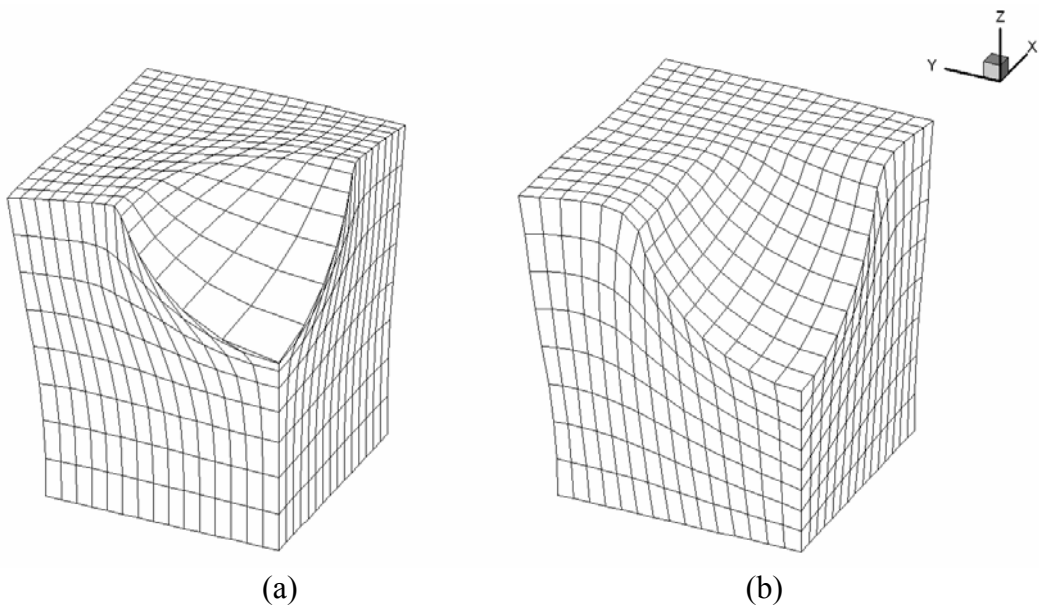


Figura 138: deformadas finais empregando formulações LA e LEA

Apresenta-se na figura 139 a pressão e deformação plástica atingidas, a 82% do deslocamento previsto do punção para a formulação LA e na figura 140 as mesmas grandezas para 100% do deslocamento do punção para formulação LEA. Observa-se que, apesar de corresponderem a níveis de puncionamento diferentes, as distribuições de deformação plástica guardam semelhança, apresentando deformações plásticas elevadas na zona de contato com o punção. O pico de deformação plástica presente na figura 139 muito provavelmente se deve à

distorção excessiva dos elementos da malha correspondente à formulação LA, uma vez que não se manifesta na figura 140.

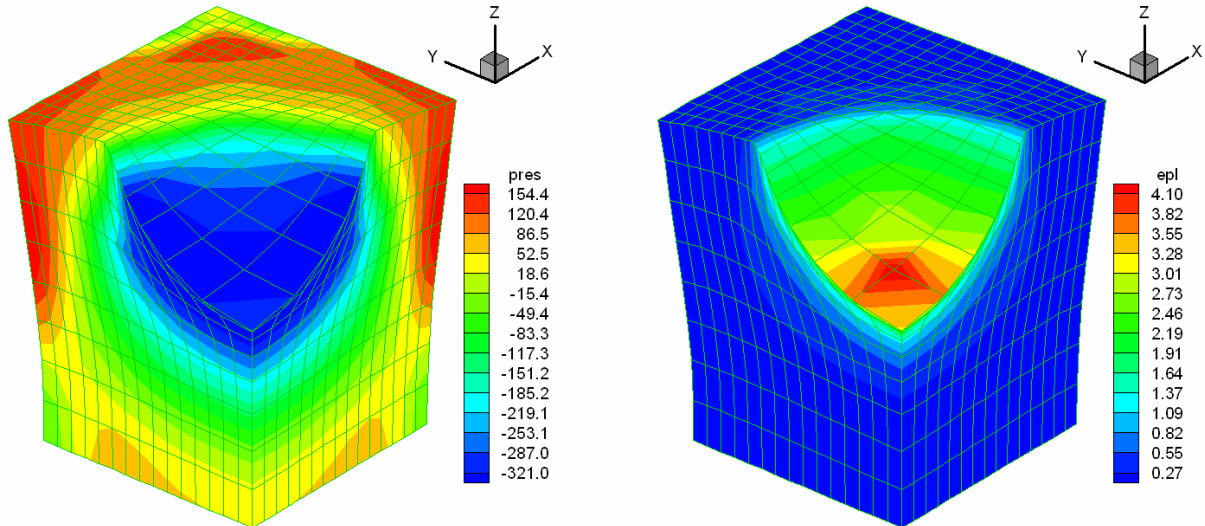


Figura 139: pressão e deformação plástica a 82% do puncionamento previsto (LA)

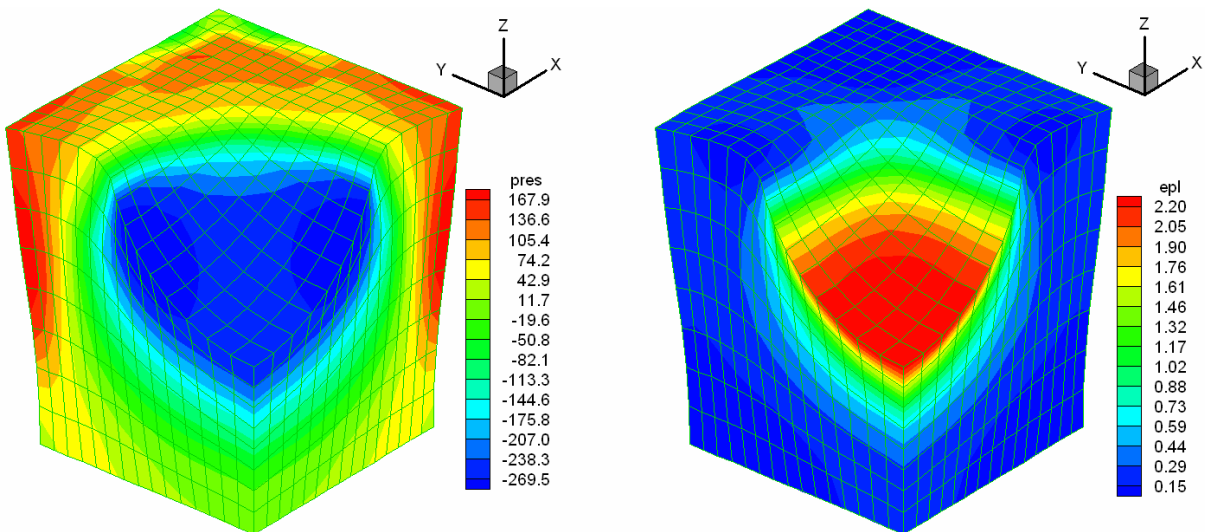


Figura 140: pressão e deformação plástica finais (LEA)

A análise com dano é realizada empregando-se os modelos de nucleação deslocado, simétrico e com nucleação somente em tração. Quando se emprega formulação LA na análise com dano, o problema só admite de 78% (modelo simétrico) a 80% (modelos deslocado e com nucleação somente em tração) de deslocamento do punção. Com a formulação LEA é possível atingir 100% do deslocamento previsto para o punção, com qualquer dos modelos utilizados. Apresentam-se, nas figuras 141 e 142, os valores de pressão e deformação plástica

com dano empregando formulação LA e modelo de nucleação simétrico. Com os outros modelos de nucleação empregados não há alteração na distribuição de pressão. Quanto à deformação plástica, a distribuição é a mesma, apenas o valor do pico se altera. Saliente-se que tal pico é um valor espúrio que aparece devido à distorção excessiva dos elementos na zona de contato. A diferença em seu valor é considerada irrelevante, uma vez que sua presença já caracteriza erro. Nas figuras 143, 144 e 145 apresentam-se as distribuições de porosidade para os modelos de nucleação simétrico, deslocado e com nucleação somente em tração.

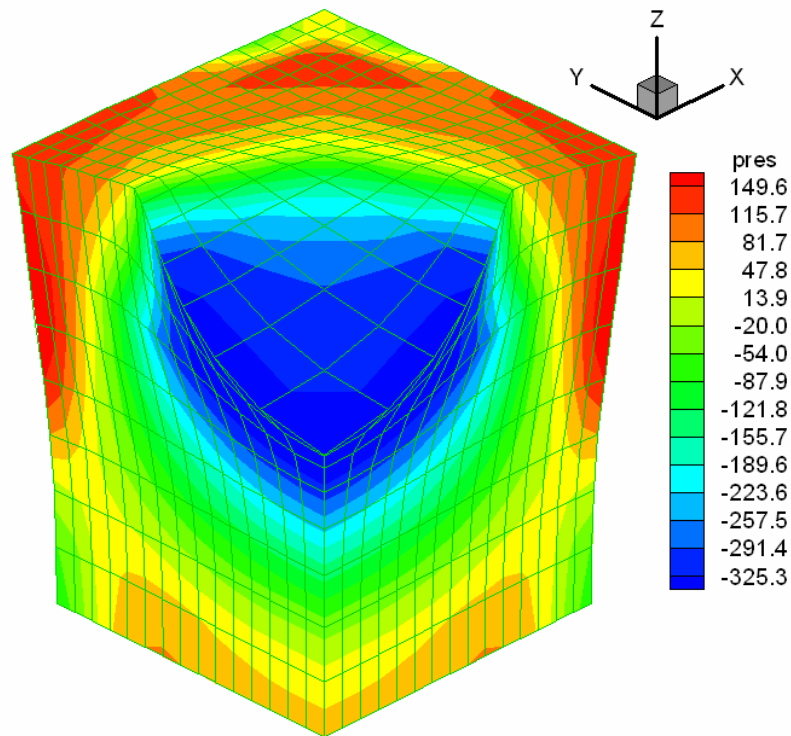


Figura 141: pressão a 78% do puncionamento previsto, nucleação simétrica (LA)

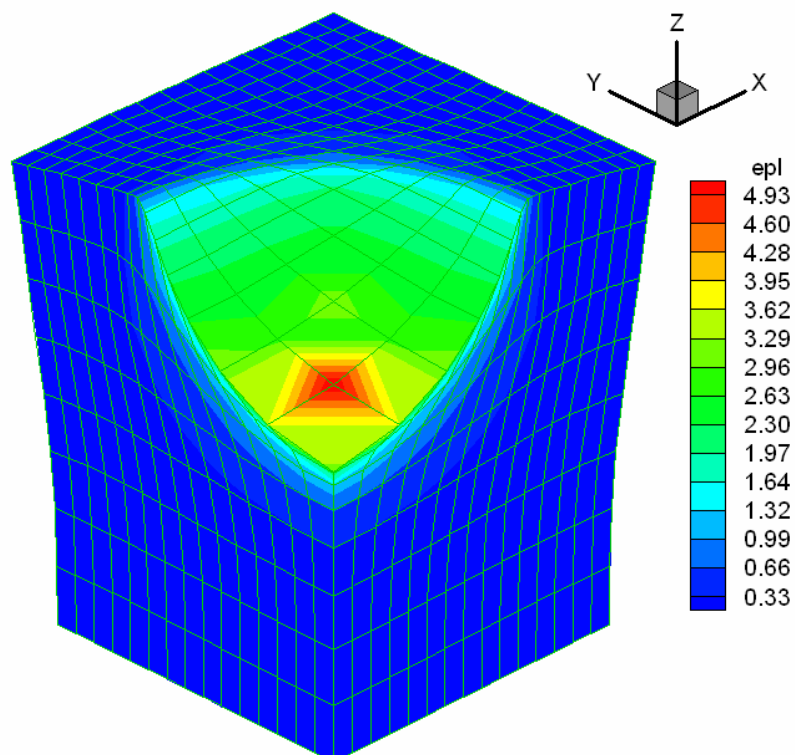


Figura 142: deformação plástica a 78% do puncionamento previsto, nucleação simétrica (LA)

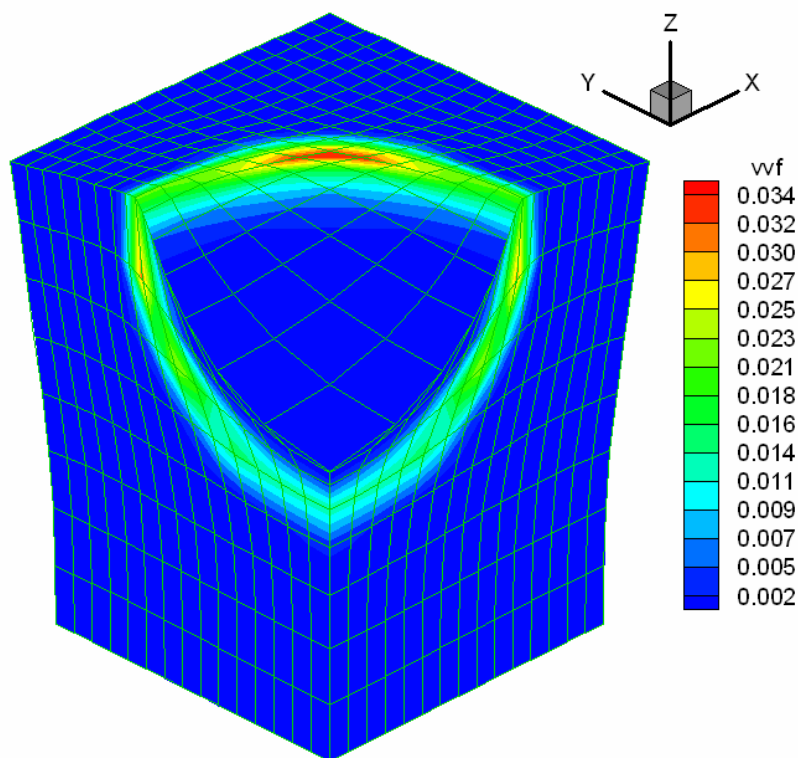


Figura 143: porosidade final, nucleação simétrica (LA)

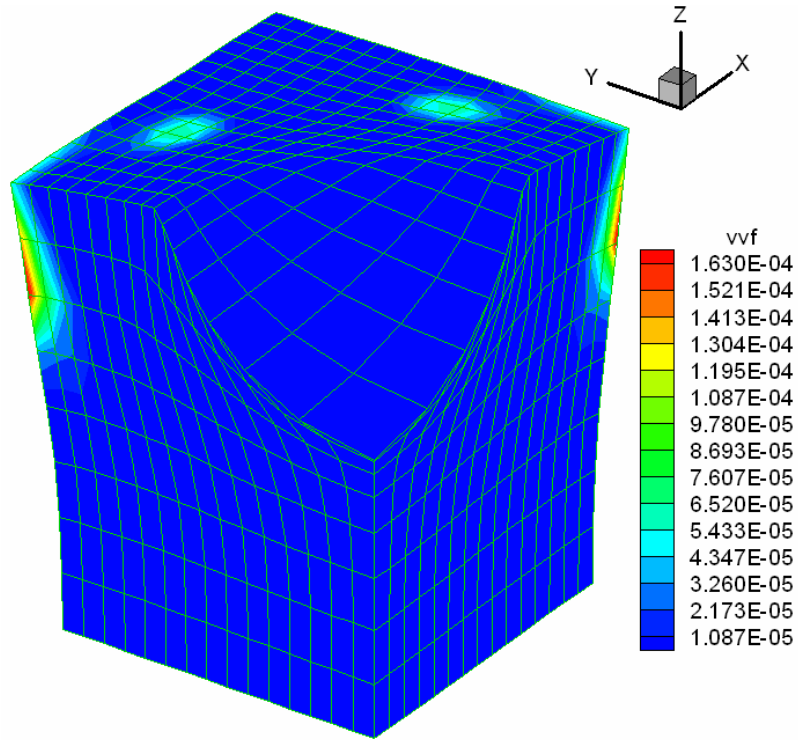


Figura 144: porosidade final, nucleação deslocada (LA)

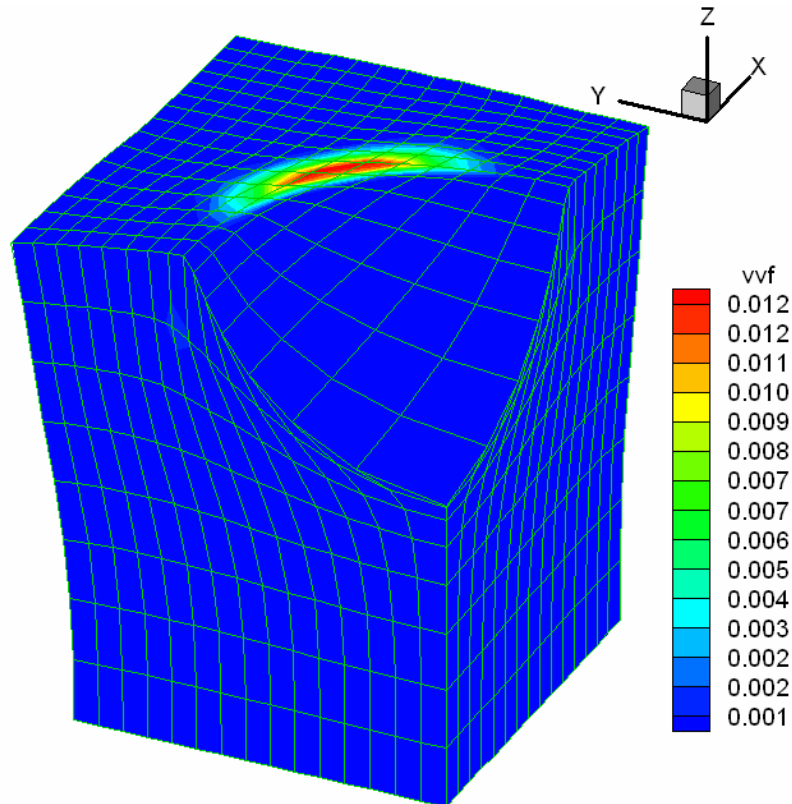


Figura 145: porosidade final, nucleação somente em tração (LA)



Empregando formulação LEA as distribuições de pressão e deformação plástica são quase idênticas para qualquer dos modelos de nucleação empregados. A deformação plástica se mostra quase uniforme na zona de contato com a esfera, sem a presença do pico verificado ao empregar formulação LA. Os resultados obtidos concordam em sentido qualitativo com os resultados para punção de cilindro por esfera, sem dano, obtidos empregando simulação tridimensional e formulação LEA por Aymone (2000) e mediante emprego de remalhamento em simulação bidimensional por Olmi (1997) e Stainier (1996). Apresentam-se, nas figuras 146 e 147, as distribuições de pressão e deformação plástica obtidas empregando o modelo deslocado.

Os resultados de porosidade dependem do modelo de nucleação empregado. Pode-se dizer que a porosidade obtida com a formulação LEA (figuras 148 a 150) é uma evolução da porosidade obtida com a formulação LA (figuras 143 a 145). Quando o modelo de nucleação simétrico é empregado, tem-se como que uma casca enfraquecida abaixo da zona de contato (figuras 143 e 148). O modelo com nucleação somente em tração (figuras 145 e 150) origina porosidade em uma zona mais limitada que a verificada empregado o modelo simétrico. Na zona onde se tem porosidade máxima ao empregar o modelo com nucleação somente em tração (figura 150), também se tem um nível razoável de porosidade ao empregar o modelo simétrico (figura 148).

Já o modelo deslocado mostra uma distribuição de porosidade (figuras 144 e 149) diferente dos demais. Os maiores valores de porosidade encontram-se na superfície externa do bloco em uma zona tracionada mas pouco deformada plasticamente, o que justificaria os baixos valores de porosidade observados. Chama atenção a ausência de porosidade na zona onde se tem a porosidade máxima no caso do modelo de nucleação somente em tração.

A diferença na distribuição de porosidade, conforme o modelo de nucleação empregado, sugere a necessidade de uma investigação metalográfica detalhada, que pode fornecer elementos para avaliar a qual o modelo de nucleação mostra-se mais adequado para simular esse problema.

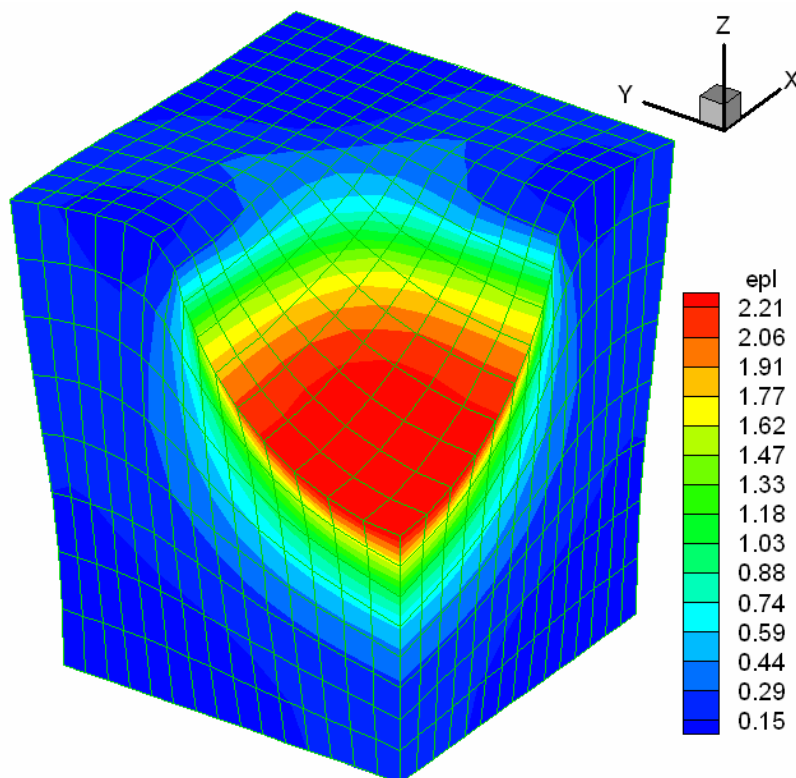


Figura 146: deformação plástica final, nucleação simétrica (LEA)

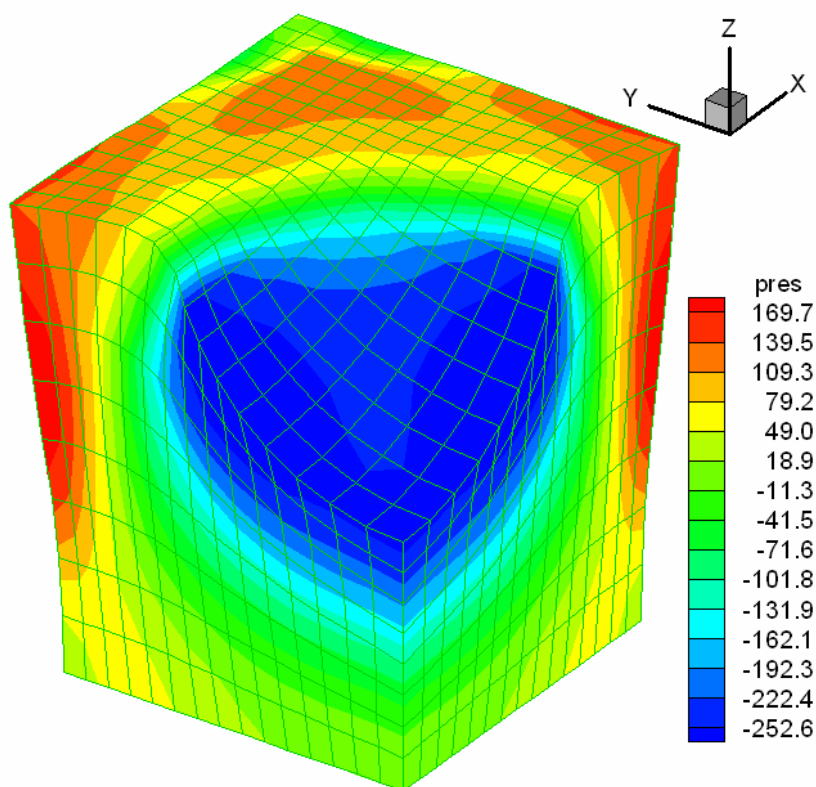


Figura 147: pressão final, nucleação simétrica (LEA)

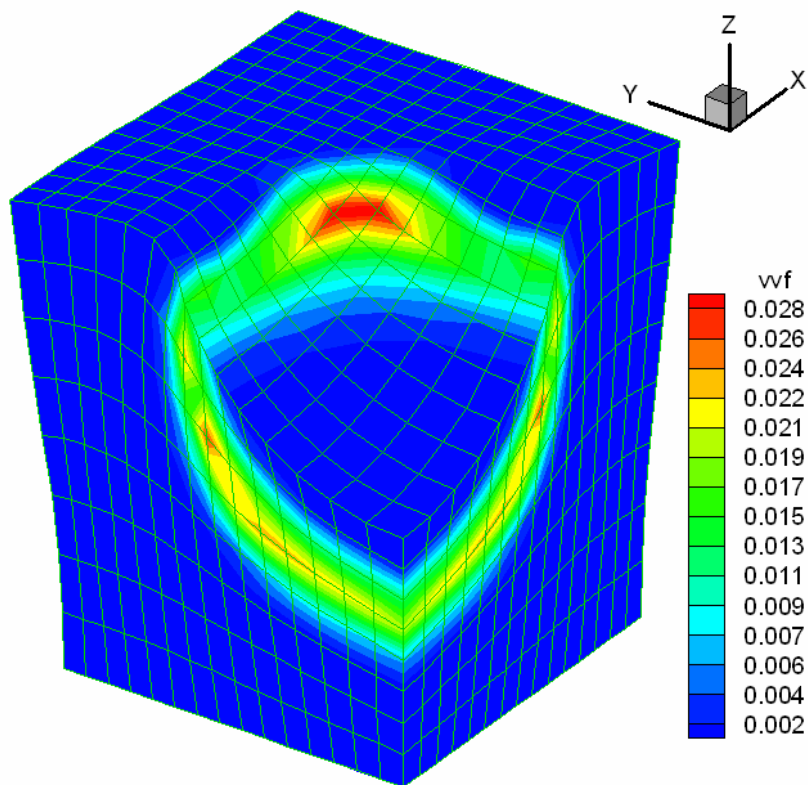


Figura 148: porosidade final, nucleação simétrica (LEA)

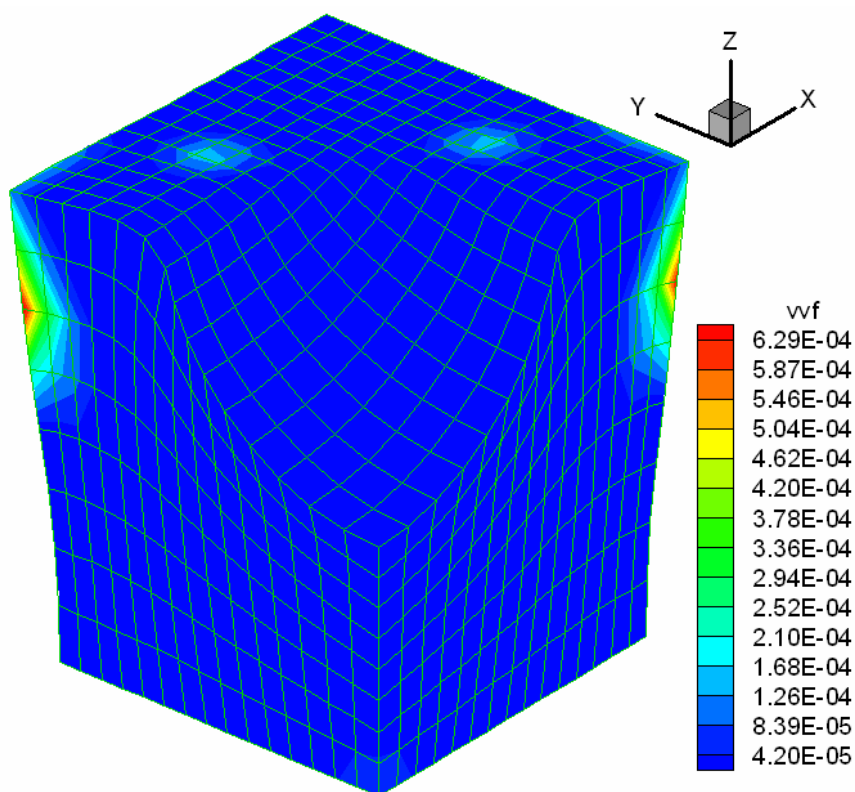


Figura 149: porosidade final, nucleação deslocada (LEA)

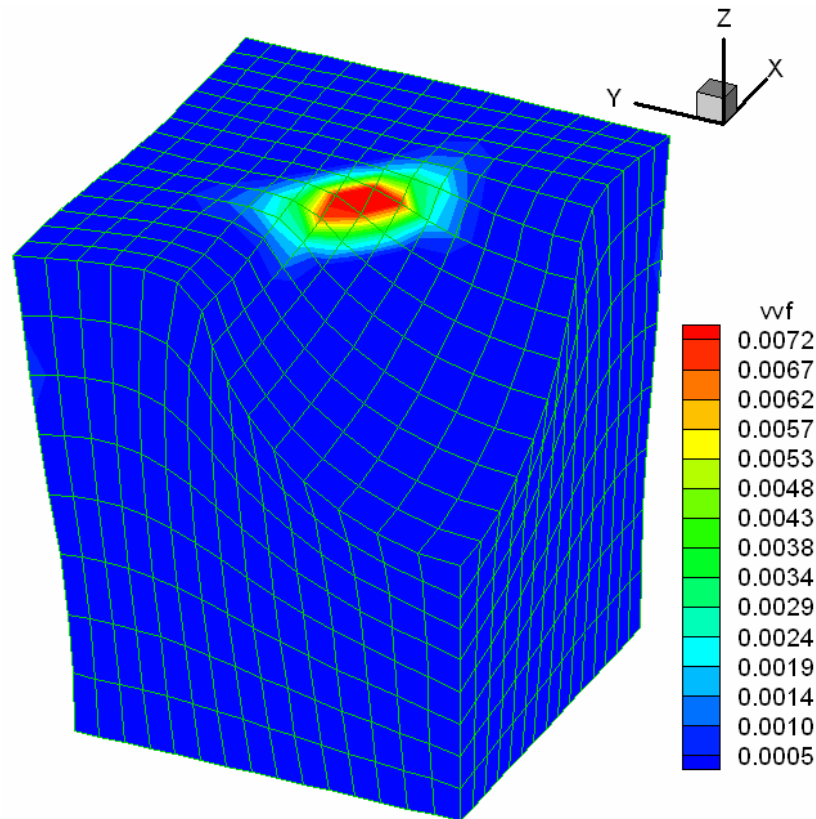


Figura 150: porosidade final, nucleação somente em tração (LEA)

## 7.9 CONCLUSÕES

A possibilidade de empregar uma simulação tridimensional é altamente benéfica, podendo modelar situações que a aproximação bidimensional não consegue resolver, ou resolve de forma inadequada, como no caso do dobramento da barra retangular.

A formulação LEA em alguns casos mostra-se muito vantajosa, como no caso do funcionamento do bloco, possibilitando que a simulação prossiga até o final, o que não ocorre com o emprego da formulação LA. No estudo do dobramento de barra retangular modelada em 2D, o emprego da formulação LEA não trouxe ganho, até por que a distorção dos elementos não se mostrou grande.

## 8 APLICAÇÃO A ESPUMAS METÁLICAS

Entende-se por espuma metálica o material composto por uma matriz metálica com vazios internos. Uma espuma metálica pode ser formada por células abertas (figuras 151a e 152) ou fechadas (figura 151b), conforme o processo de produção adotado.

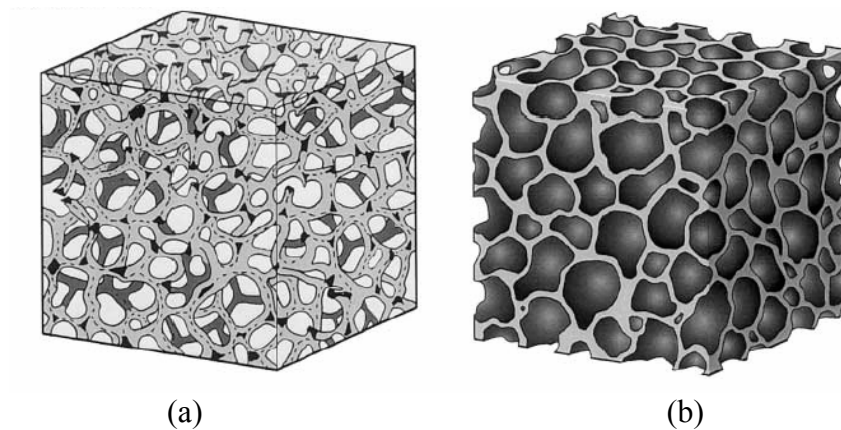


Figura 151: espumas metálicas – (a) célula aberta, (b) célula fechada (Queheillalt *et al.*, 2002)

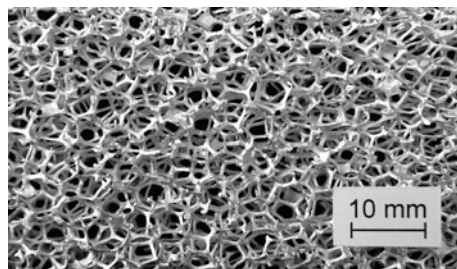


Figura 152: espuma de alumínio (DUOCEL<sup>®</sup>) (Öchsner e Lamprecht, 2003)

Espumas metálicas têm comportamento mecânico e propriedades físicas que diferem fortemente dos materiais sólidos. Apresentam combinações interessantes de propriedades, como por exemplo, altas rigidez e resistência combinadas com peso específico baixo, permeabilidade a gases combinada com alta condutividade térmica.

Segundo Queheillalt *et al.* (2002), as propriedades de uma espuma metálica dependem do tipo de célula, se aberta ou fechada, do metal componente da matriz metálica, da densidade e da maneira como o metal se distribui na célula. Espumas metálicas de célula fechada têm como propriedades alta rigidez e alta resistência em relação à baixa densidade. Além disso,

apresentam excelente isolamento acústico e baixa condutibilidade térmica, quando se toma por referência o metal que dá origem à espuma. Espumas de célula aberta têm como propriedades valores menores de rigidez e resistência quando comparadas às espumas de célula fechada, apresentando uma propriedade interessante: admitem a passagem de fluidos pela estrutura aberta, podendo ser empregadas para dissipar calor.

Evans *et al.* (1999) apresentam como propriedades das espumas metálicas, além das descritas antes, baixo custo de produção, durabilidade frente a intempéries e retardo na propagação de incêndios.

Em função das propriedades mencionadas, as espumas metálicas têm sido crescentemente empregadas na indústria automotiva, especialmente como parte dos equipamentos de segurança passiva, atuando como absorvedoras de impacto. As características de baixo peso, isolamento acústico, baixa condutibilidade térmica e amortecimento de vibrações são bem-vindas.

Na indústria aeroespacial, os painéis sanduíche contendo espumas metálicas (figura 153) têm sido empregados em substituição aos painéis do tipo *honeycomb*, pela economia e pela flexibilidade de forma (Banhart, 2001).

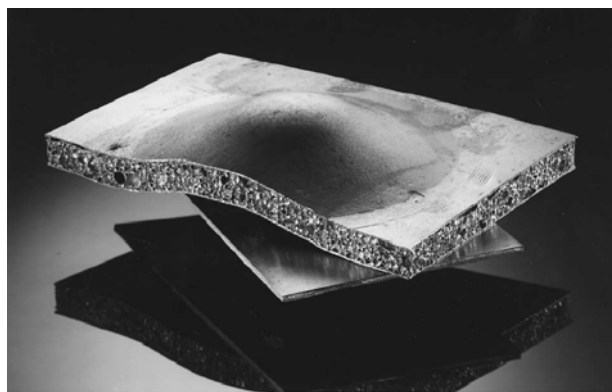


Figura 153: painel sanduíche com espuma metálica em seu interior (Banhart, 2001)

A característica das espumas metálicas de célula aberta de permitirem passagem de fluido em seu interior possibilita que sejam usadas em trocadores de calor. Podem servir para resfriar um equipamento ou aquecer um fluido.

Na figura 154, mostra-se uma curva tensão *versus* deformação genérica para uma

espuma metálica em compressão. Identifica-se uma zona 1, onde o comportamento é do tipo elástico linear. Aumentando a deformação, segue-se uma zona de transição (zona 2), onde se tem plasticidade. Após, identifica-se um patamar (zona 3) que cobre um amplo espectro de deformação, no qual a tensão se mantém mais ou menos constante. Esse patamar, em caso de impacto, possibilita uma grande absorção de energia a tensão constante. Após (zona 4), verifica-se um aumento da densidade e da resistência da espuma metálica.

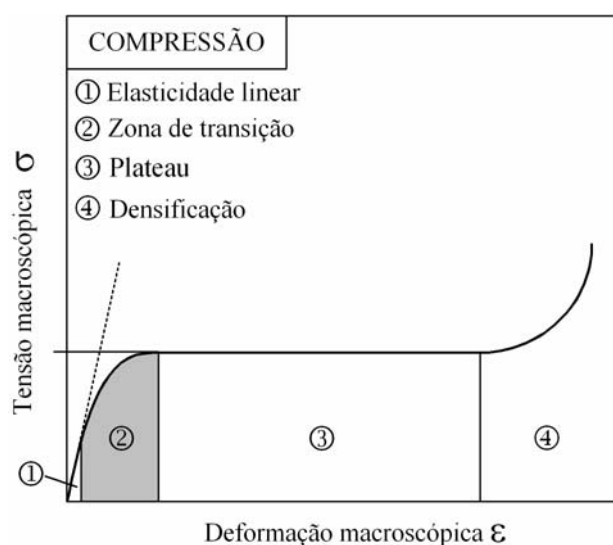


Figura 154: curva tensão–deformação típica para espuma metálica (Öchsner *et al.*, 2003)

Para empregar tal tipo de material como componente em estruturas de proteção é necessário dispor de métodos numéricos confiáveis, além de relações constitutivas desenvolvidas e testadas empregando procedimentos experimentais que levem em conta a variedade de propriedades mecânicas, geométricas e físicas da espuma e da matriz.

Este capítulo apresenta os resultados iniciais de um convênio firmado entre a UFRGS e a Universidade de Aveiro, apoiado pelo convênio CAPES/GRICES, que busca desenvolver relações constitutivas apropriadas para simular o comportamento mecânico de espumas metálicas, incluindo dano.

A seção 8.1 trata do estudo do dano em um material metálico maciço, através da simulação de um ensaio de tração cíclica sobre um corpo de prova cilíndrico. Nesse caso, o interesse é verificar se o modelo de Gurson reproduz a queda na rigidez esperada em presença de dano, verificando o comportamento da relação tensão-deformação no corpo de prova, relação esta avaliada de forma global.

Na seção 8.2, procura-se aplicar a mesma metodologia empregada na seção 8.1 a uma célula de um metal celular empregada como aproximação inicial para melhor entender o comportamento de espumas metálicas.

## 8.1 DETERMINAÇÃO DE DANO VIA SOLICITAÇÃO CÍCLICA

Uma das manifestações mais visíveis da degradação do material por dano é a variação das constantes elásticas, especialmente do módulo de elasticidade (Lemaitre, 1988). À medida que o material se degrada, o módulo de elasticidade diminui. Para avaliar de forma experimental esse efeito, normalmente um corpo de prova é submetido à carregamento cíclico, com carga crescente, até a ruptura. Em tal situação, é esperado um comportamento como o da figura 155.

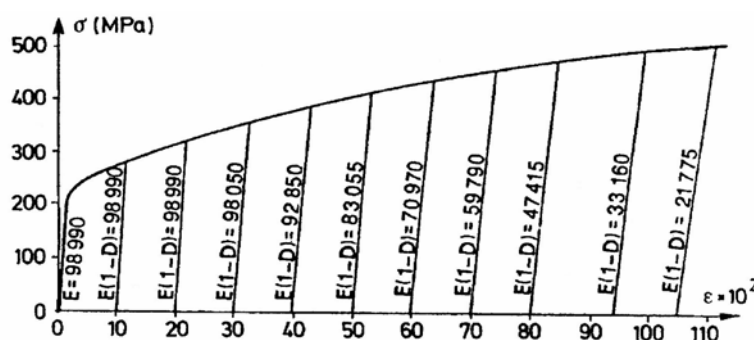


Figura 155: variação no módulo de elasticidade com carga cíclica (Lemaitre, 1988)

Para verificar a capacidade do modelo de Gurson em reproduzir tal comportamento, é estudado o comportamento de uma barra cilíndrica submetida a tração, sendo o carregamento aplicado de forma cíclica.

### 8.1.1 Análise de um ensaio cíclico de tração em barra cilíndrica

Estuda-se o problema de uma barra cilíndrica sujeita à tração, sendo o carregamento aplicado de forma cíclica. O diâmetro da barra é de 10 mm e a altura de 40 mm. Considerando simetria axial, o problema é modelado empregando-se elementos finitos axissimétricos. A malha empregada é mostrada na figura 156. Emprega-se um entalhe na seção central para dar



origem à estricção. As propriedades do material são  $E = 75 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_y^0 = 250 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_y = \sigma_y^0(1 + k\varepsilon^P)^m$ ,  $k = 345$ ,  $m = 0,1$ ,  $f_N = 0,04$ ,  $\varepsilon_N = 0,3$ ,  $s_N = 0,1$ ,  $\alpha_1 = 1,5$ ,  $\alpha_2 = 1,0$ ,  $f_C = 0,15$  e  $\Delta\varepsilon = 0,6$ .

A carga é introduzida por meio de um deslocamento prescrito  $\delta$  na face superior da barra, aplicado de forma cíclica e crescente, chegando a um valor de 5 mm. Esse deslocamento permite calcular uma deformação macroscópica  $\varepsilon = \ln(1 + \delta/L_0)$ , onde  $\delta$  é o deslocamento aplicado no topo da barra e  $L_0$  o comprimento inicial desta. Na figura 156 são apresentados resultados finais de pressão, tensão de von Mises, deformação plástica e porosidade.

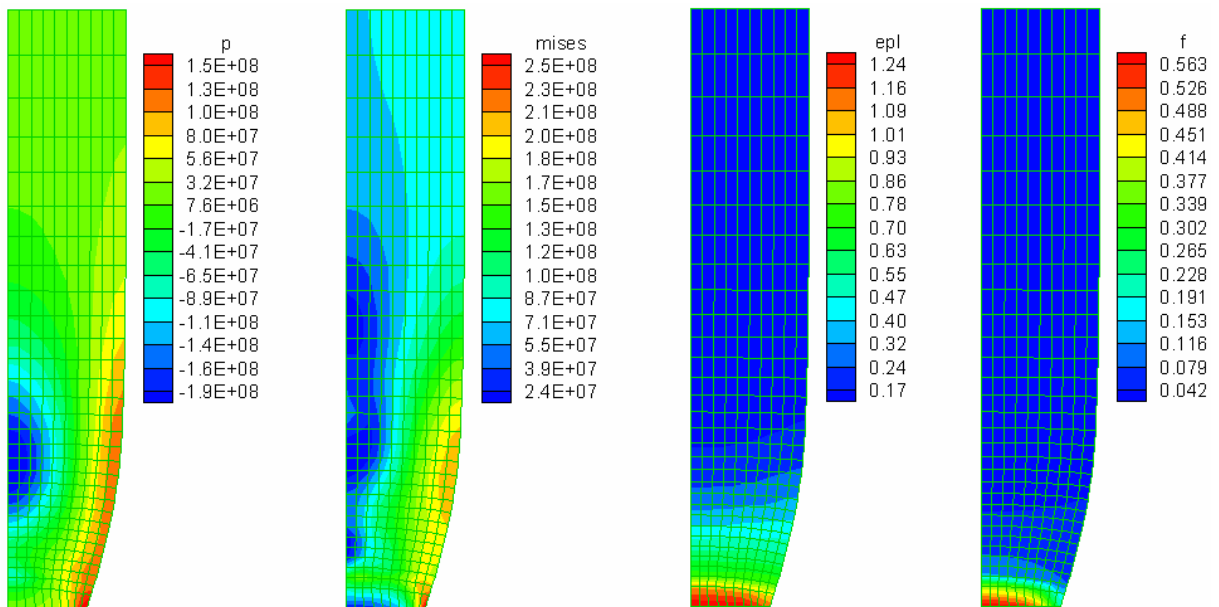


Figura 156: pressão, tensão de von Mises, deformação plástica e porosidade finais

A figura 157 mostra a variação da tensão macroscópica  $\sigma$  em função da deformação macroscópica  $\varepsilon$ , definida acima. A tensão macroscópica é calculada considerando a área da seção transversal indeformada. A mudança no módulo de elasticidade aparente é difícil de perceber visualmente na figura 157, em parte devido à escala.

Os valores do módulo de elasticidade aparente (figura 158), calculado como sendo a relação entre a tensão macroscópica  $\sigma$  e a deformação macroscópica  $\varepsilon$ , foram obtidos a partir da soma das de reações de apoio verticais e do deslocamento  $\delta$  imposto no topo, publicados pelo Metafor. No cálculo do módulo de elasticidade aparente, considerou-se a média entre os

valores verificados na carga e na descarga.

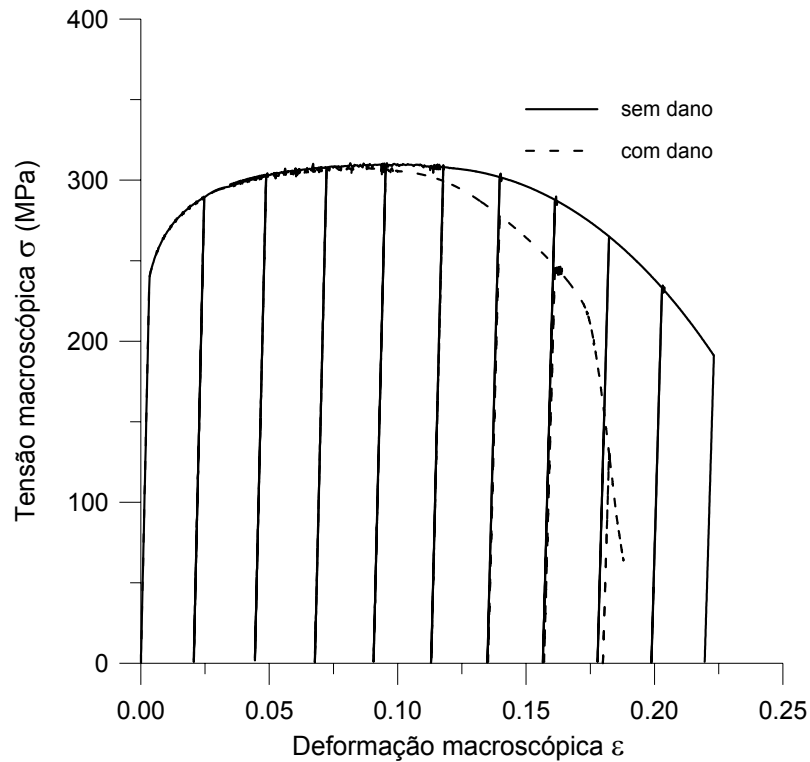


Figura 157: tensão macroscópica *versus* deformação macroscópica (barra cilíndrica)

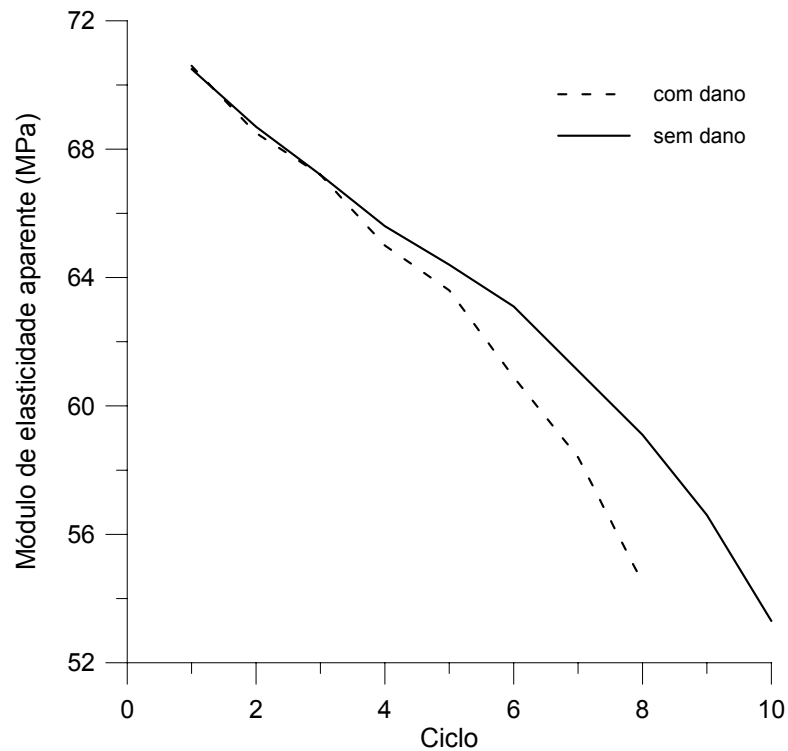


Figura 158: módulo de elasticidade aparente (barra cilíndrica)

## 8.2 DETERMINAÇÃO DO DANO EM ESPUMAS METÁLICAS

As propriedades das espumas metálicas podem ser controladas durante o processo de produção, especialmente variando a geometria da célula, se aberta ou fechada, e a densidade relativa da espuma em relação ao material da matriz.

As espumas metálicas exibem uma estrutura randômica (figura 152). É possível determinar a geometria exata usando tomografia computadorizada (*CT-scan*) e modelar tal geometria com uma malha densa de elementos finitos, como mostrado na figura 159a. Tal abordagem leva a malhas com enorme número de graus de liberdade, implicando em enorme esforço computacional.

Outra possibilidade, adotada neste trabalho, é simular um metal celular com estrutura regular, como na figura 159b. Admite-se que, se o tipo de célula do metal celular e sua densidade relativa forem semelhantes aos da espuma que se quer estudar, haverá boa correlação entre as propriedades do metal celular e da espuma. Neste caso, deve-se empregar também o conceito de RVE (*representative volume element*), quando se admite que a partir da simulação de uma região do material (figura 159c) é possível estimar o comportamento deste, se a região for representativa. O número de células necessárias para que se tenha um volume representativo do comportamento do material ainda está sendo definido. Por simplicidade, estuda-se nesta etapa inicial o comportamento de uma célula. Neste caso, considerando as simetrias existentes, é possível obter bons resultados com malhas com número de graus de liberdade moderado.

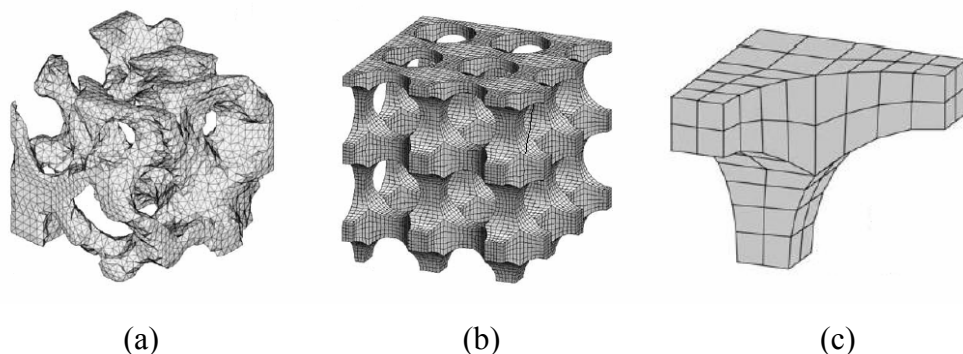


Figura 159: malhas empregadas para representar espuma metálica e metal celular (Öchsner e Lamprecht, 2003)

Além do mais, a idéia de substituir a espuma metálica por um metal celular permite

construir modelos com a geometria regular e testá-los em laboratório, com o objetivo de levantar parâmetros a serem empregados no modelo numérico.

A figura 160 mostra um corpo de prova de metal celular em estado plano de tensão, instrumentado para ensaio.

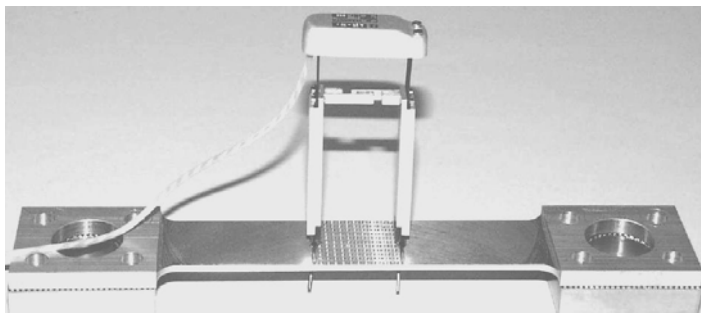


Figura 160: placa de metal celular instrumentada (Öchsner, 2002)

### 8.2.1 Aplicação das condições de contorno

Um aspecto importante a ser levado em conta na modelagem de uma célula de metal celular é quanto às condições de contorno a serem empregadas, que devem representar o comportamento médio da espuma. Quando um deslocamento vertical é aplicado na face superior (figura 161), as faces verticais devem permanecer verticais, enquanto que o afastamento entre elas pode mudar.

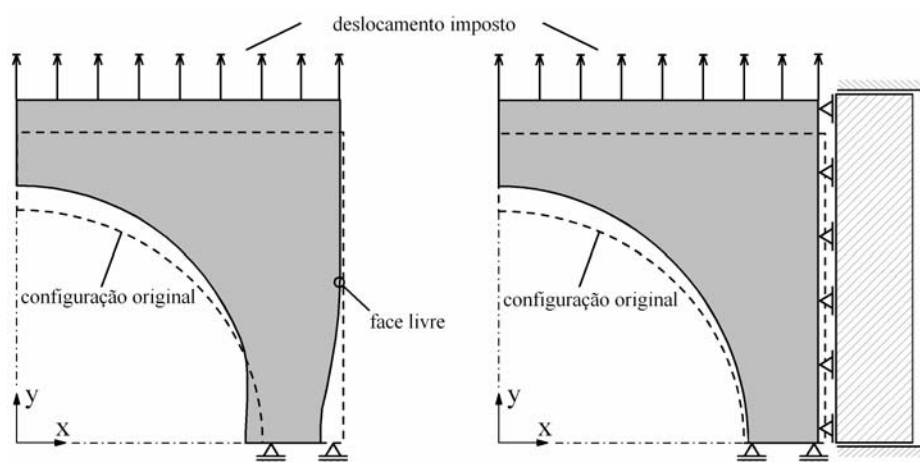


Figura 161: resultados de diferentes condições de contorno aplicadas à face direita (Öchsner e Lamprecht, 2003)

Este comportamento pode ser imposto computacionalmente de várias formas, dentre elas empregando molas internas. Para simular faces verticais que se deslocam horizontalmente permanecendo verticais, os graus de liberdade horizontais são conectados dois a dois com molas internas (representadas na figura 161 como apoios simples) que só atuam quando há deslocamento horizontal relativo entre os nós conectados. Tais molas atuam como forças restitutivas que mantêm as faces retas.

### 8.2.2 Análise numérica de uma célula de metal celular

A seguir estuda-se (Cunda *et al.*, 2005) o comportamento de uma célula de uma placa de metal celular como mostrado na figura 160. A placa contém furos com 1,5 mm de diâmetro, com distância de 0,64 mm entre as bordas dos furos. A presença dos furos simula um metal celular com densidade relativa de 0,6152. Para estudar uma célula deste metal, considerando simetria, um oitavo da célula é discretizada, empregando o Metafor tridimensional. As condições de contorno e a malha empregada são mostradas na figura 162.

A carga é introduzida através de um deslocamento vertical (direção  $y$ ) imposto na face superior da célula. Com este deslocamento é calculada uma deformação macroscópica  $\varepsilon = \ln(1 + \delta/L_0)$ , onde  $\delta$  é o deslocamento aplicado e  $L_0$  a altura inicial da célula.

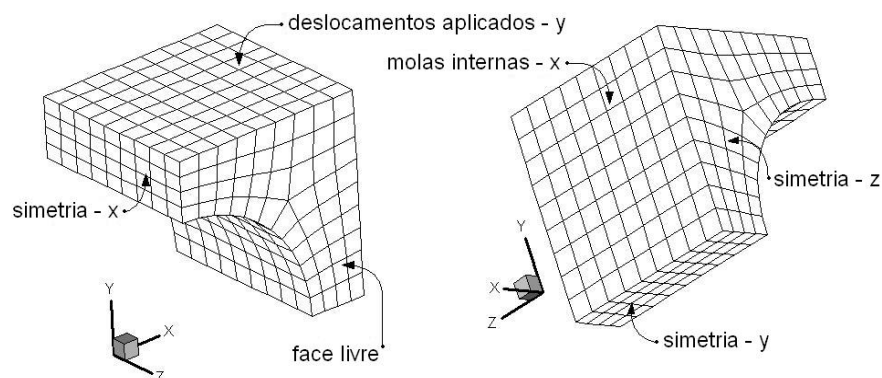


Figura 162: malha e condições de contorno para um oitavo de célula

A matriz metálica tem como propriedades:  $E = 72,7$  GPa,  $\nu = 0,34$ ,  $\sigma_y^0 = 250$  MPa,  $\sigma_y = \sigma_y^0 + (\sigma_y^\infty - \sigma_y^0)[1 - \exp(-k\varepsilon^P)]$ ,  $\sigma_y^0 = 250$  MPa,  $\sigma_y^\infty = 410$  MPa,  $k = 25$ ,  $f_0 = 0,05$ ,  $\alpha_1 = 1,5$ ,  $\alpha_2 = 1,0$ ,  $f_C = 0,25$  e  $\Delta\varepsilon = 0,3$ .

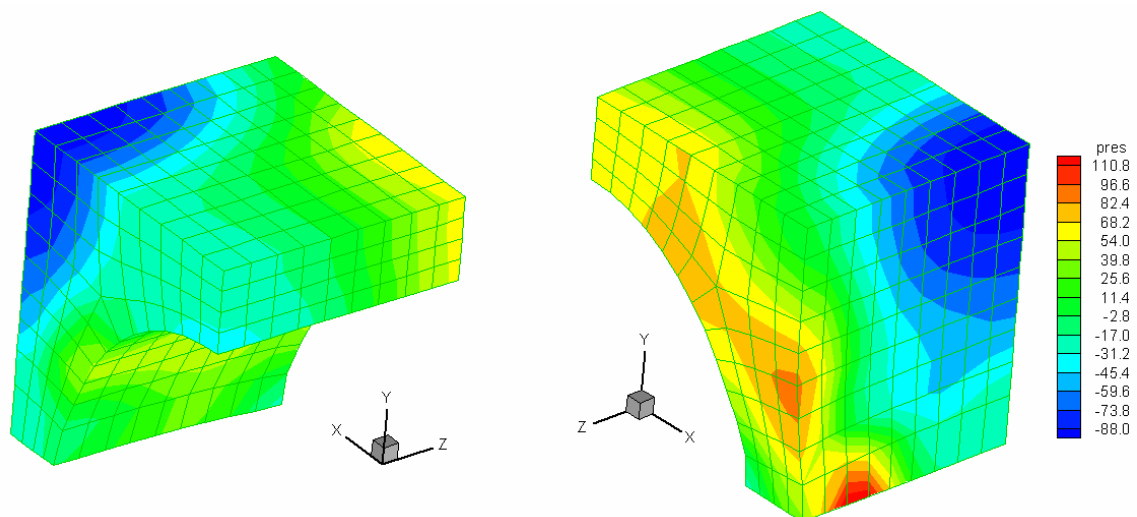


Figura 163: pressão final, análise com dano

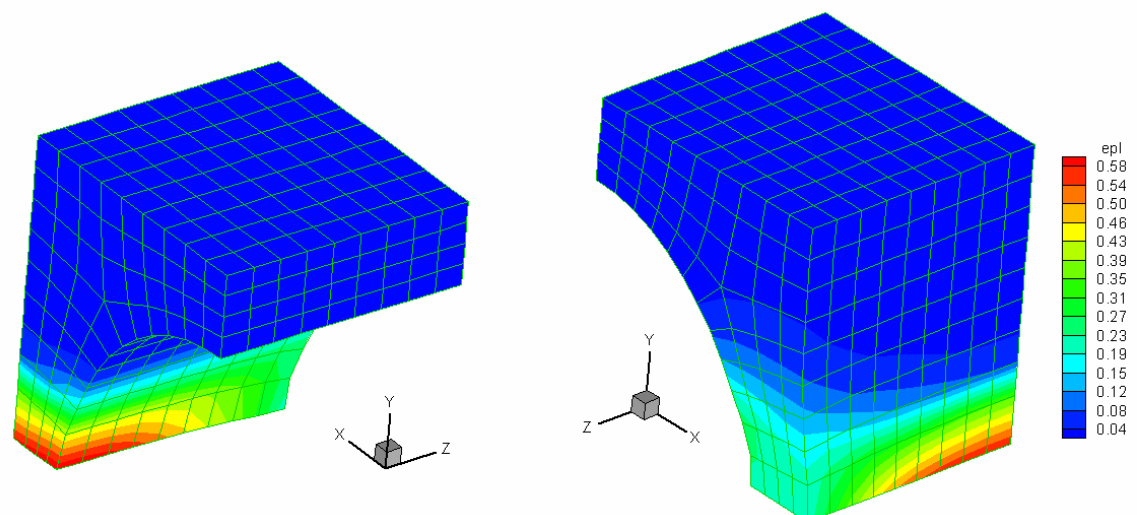


Figura 164: deformação plástica final, análise com dano

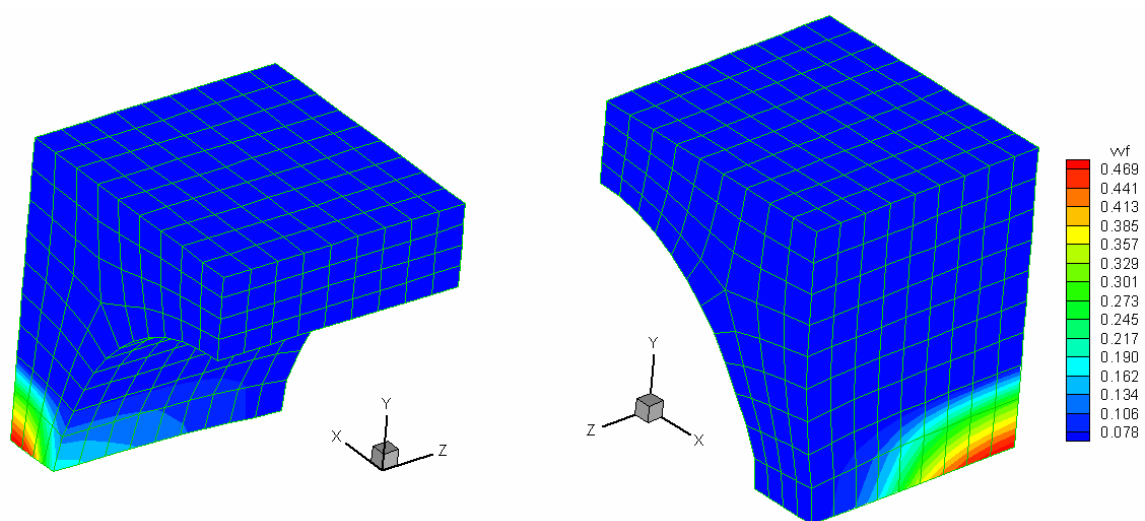


Figura 165: fração volumétrica de vazios final

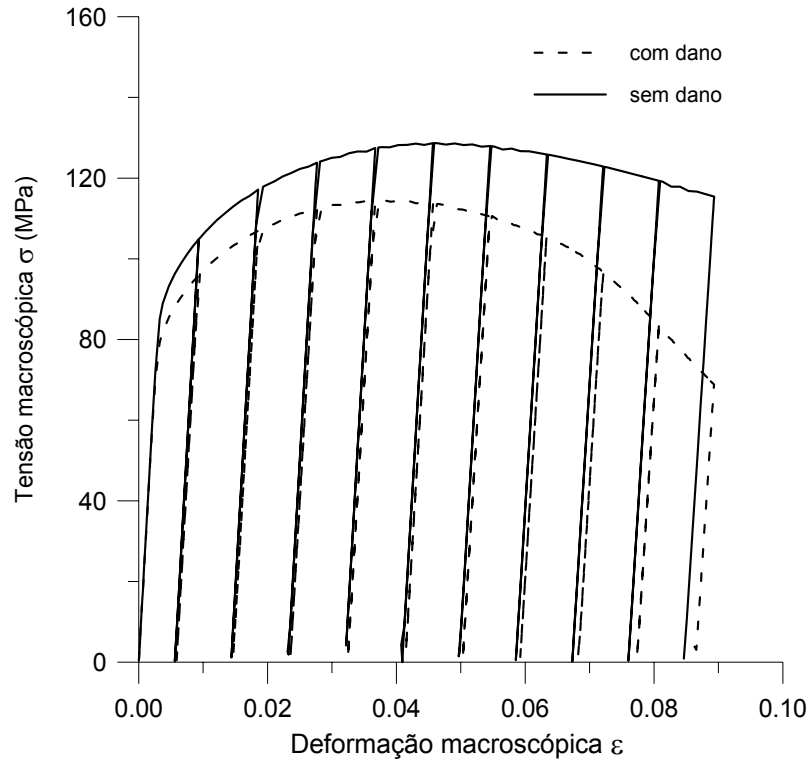


Figura 166: tensão macroscópica *versus* deformação macroscópica (espuma)

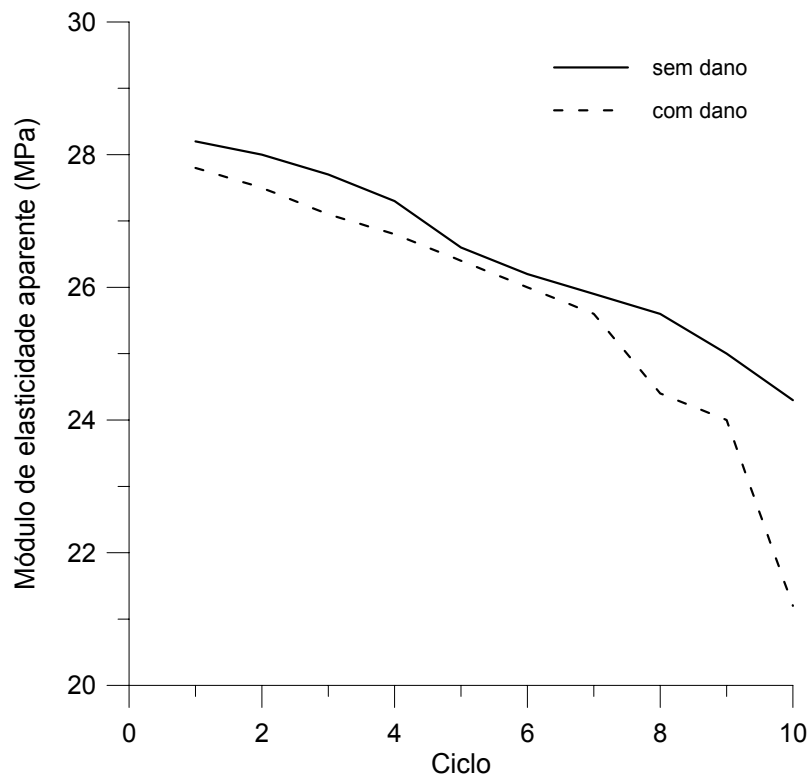


Figura 167: módulo de elasticidade aparente (espuma)

Observando a figura 166 é possível perceber que o efeito do dano começa logo após o escoamento, devido à consideração de porosidade inicial ao invés de nucleação, como considerado para obter a figura 157. A queda no módulo de elasticidade aparente (figura 167) foi obtida da mesma forma que a da figura 158, e é maior após o sexto ciclo, devido ao dano crescente.

### 8.3 COMENTÁRIOS FINAIS

Este capítulo apresenta os resultados iniciais de um trabalho que se encontra em andamento. Tal trabalho busca simular o efeito de dano em espumas metálicas, através do estudo do comportamento de uma célula de um metal celular. Mostra-se que o efeito do dano pode ser modelado numericamente empregando o modelo de Gurson.

A simulação do comportamento de espumas metálicas terá continuação, incluindo a determinação de parâmetros do modelo de Gurson que ajustem resultados experimentais obtidos em ensaios a serem realizados na Universidade de Aveiro.



## 9 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A seguir são apresentadas as principais contribuições e resultados deste trabalho.

No capítulo 2, mostra-se a influência dos diversos parâmetros do modelo na resposta. Demonstra-se que a perda de capacidade de carga depende não apenas da fração volumétrica de vazios, mas também da pressão. A perda de capacidade de carga só ocorre com porosidade  $f_U$  caso a pressão seja nula. À medida que a pressão cresce, a ruptura se dá com porosidade menor. Tal dependência não foi encontrada em forma clara na bibliografia consultada.

A seção 2.2.1 apresenta um critério que relaciona os valores de deformação de nucleação  $\varepsilon_N$  e desvio-padrão  $s_N$  para que haja efetiva nucleação da fração volumétrica de vazios  $f_N$  prevista. No contexto da bibliografia consultada, tal recomendação revela-se inédita, sendo inclusive violada em alguns trabalhos consultados.

O capítulo 3 apresenta um algoritmo para solução de problemas não-lineares através de controle de incremento de trabalho, que é implementado e fornece resultado satisfatório nos casos aplicados. Salienta-se que a implementação do referido algoritmo não modificou substancialmente o código Metafor original, construído para trabalhar com o método de Newton-Raphson, tendo acrescentado versatilidade ao *software*.

No capítulo 4, é apresentado um esquema de integração de equações constitutivas para um material do tipo Gurson, que é implementado. O algoritmo mostra-se bastante robusto, fornecendo resposta considerada boa a despeito do tamanho de incremento utilizado na solução.

Nesse mesmo capítulo, comentam-se os resultados obtidos com a implementação de um procedimento de “eliminação” de elementos, quando estes atingem uma condição crítica. Salienta-se que os elementos não são eliminados da malha de elementos finitos, sendo no entanto calculados de uma forma alternativa após atingirem nível alto de dano, o que equivale a eliminá-los. O procedimento, da forma como está implementado, presta-se a tratar elementos na borda da peça, de modo a simular uma trinca em modo I, como no exemplo apresentado. O resultado obtido mostrou-se adequado, devendo no entanto ser investigado em

maior profundidade, variando-se a geometria das peças, densidade de malha, etc...

No estudo de problemas que envolvem solicitações elevadas a ponto de conduzirem o material a um estado de ruptura iminente, é desejável avaliar a validade do emprego de considerações de simetria. É sabido que no caso de barras tracionadas a ruptura (*cup-cone*) não é axissimétrica. Também é sabido que a tensão de ruptura cai à medida que aumenta o tamanho da estrutura considerada, o chamado efeito de escala. A possibilidade de representar o efeito de escala empregando o modelo de Gurson não é investigada neste trabalho, também não sendo abordada na bibliografia consultada.

No capítulo 5, mostra-se como a consideração do acoplamento termo-mecânico permite simular o ensaio de tração em uma barra cilíndrica sem o emprego de imperfeições, que acabam por alterar a solução final. Também se mostra que o comportamento físico de fragilização a baixas temperaturas se faz presente quando se combina o modelo de Gurson considerando análise termo-mecânica.

No capítulo 6, é discutida a influência da pressão na nucleação. A maioria das aplicações do modelo de Gurson é feita em situações de carregamento monótono que levam a pressões positivas. Para aplicações práticas (geometria e carregamento complexos), não é possível garantir que a pressão não sofra variação de sinal ao longo do processo de solicitação. Procura-se chamar atenção para resultados incoerentes que podem ser obtidos quando há alternância do sinal da pressão durante o processo de nucleação. Assim, parece interessante empregar um modelo de nucleação que leve em conta a possibilidade de, durante o processo de nucleação, a pressão ter seu sinal alterado.

São feitas algumas propostas simples de alterações no modelo de nucleação empregado, que no entanto fazem com que o comportamento de tal modelo seja mais factível em caso de reversão de sinal da pressão. Espera-se que tais propostas em conjunto com ensaios adequados de laboratório possam melhorar as condições de aplicação do modelo de Gurson, especialmente quanto à descrição da nucleação. Cabe aqui a proposta de implementação de endurecimento cinemático, especialmente para o tratamento de carga cíclica.

O capítulo 7 trata da implementação do modelo de Gurson no Metafor 3D, o que abre o leque de geometrias passíveis de análise. Também se mostra que em alguns casos o

emprego da formulação Lagrangiana Euleriana Arbitrária leva a resultados bem diferentes em relação à formulação Lagrangiana Atualizada, sendo que a malha de elementos finitos mantém um aspecto melhor, devido às redefinições de malha ao longo do processo.

O capítulo 8 apresenta os resultados iniciais de um trabalho que terá continuação, buscando a determinação de parâmetros do modelo de Gurson que ajustem resultados experimentais a serem obtidos. Os resultados iniciais indicam que é viável empregar o modelo de Gurson para simular a degradação nas propriedades mecânicas das espumas metálicas devido ao dano.

Dentro do convênio CAPES-GRICES entre a Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e a Universidade de Aveiro (Portugal) os estudos de modelamento de dano em espumas metálicas e de acoplamento termo-mecânico terão prosseguimento, incluindo a determinação de parâmetros do modelo de dano, combinando simulação numérica e ensaios de laboratório.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABAQUS. **Theory manual**, v 5.2, Providence, RI, USA: Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 1992.
- ALEGRE, J. M.; GUTIÉRREZ-SOLANA, F. A Gurson-Tvergaard based model to simulate the fracture of aged duplex stainless steels. **Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures**, v. 27, p.1171-1182, 2004.
- ALVES, J.L.D. **Análise transiente de grandes deformações em computadores de arquitetura vetorial paralela**. Rio de Janeiro, 1991. 123 p. Tese de doutorado em Engenharia, Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- ARAVAS, N. On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.24, p.1395-1416, 1987.
- ARAVAS, N.; McMEEKING, R. M. Microvoid growth and failure in the ligament between a hole and a blunt crack tip. **International Journal of Fracture**, v. 29, p.21-38, 1985.
- ARGYRIS, J.H.; DOLSTINIS, J.S. On the natural formulation and analysis of large deformation coupled thermomechanical problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.25, p.195-253, 1981.
- AYMONE, J.L.F. **Remanejamento de malhas em problemas tridimensionais de grandes deformações**. Porto Alegre, 2000. 138 p. Tese de doutorado em Engenharia (Estruturas), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- BANHART, J. Manufacture, characterization and application of cellular metals and metal foams. **Progress in Materials Science**, v.46, p.559-632, 2001.
- BATHE, K.J. **Finite element procedures**, Upper Saddle River, New Jersey:Prentice-Hall, 1996. 1037 p.
- BATHE, K.J.; DVORKIN, E.N. On the automatic solution of nonlinear finite element equations. **Computers and Structures**, v.17, n.5-6, p.871-879, 1983.
- BAZANT, Z. P.; OH, B. H. Crack band theory for fracture of concrete. **Materials and Structures**, RILEM, v.16, p.155-177, 1983.
- BECKER, R.; NEEDLEMAN, A.; RICHMOND, O.; TVERGAARD, V. Void growth and failure in notched bars. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v.36, p.317-351, 1988.
- BENSON, D. J. An efficient, accurate, simple ALE method for nonlinear FE programs. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.72, p.305-350, 1989.
- BERGAN, P. G.; HERRIGMOE, G.; KRÅKELAND, B.; SØREIDE, T.H. Solution techniques for non-linear finite element problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.12, p.1677-1696, 1978.
- BERGAN, P. G. Solution algorithms for nonlinear structural problems. **Computers and Structures**, v.12, p.497-509, 1980.

- BESSON, J.; GUILLEMER-NEEL, C. An extension of the Green and Gurson models to kinematic hardening. **Mechanics of Materials**, v.35, p.1-18, 2003.
- BINER, S. B.; SPITZIG, W. A. Densification of iron compacts with various initial porosities under hydrostatic pressure. **Acta Metallurgica et Materialia**, v. 38, n. 4, p.603-610, 1990.
- BITTENCOURT, E. **Tratamento do problema de contato e impacto em grandes deformações pelo método dos elementos finitos**. Porto Alegre, 1994. 223 p. Tese de doutorado em Engenharia (Estruturas), Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- BITTENCOURT, E.; CREUS, G. J.; AYMONE, J. L. F.; CUNDA, L.A.B Simulação do processo de hidro-conformação. In: **Conferência Nacional de Conformação de Chapas**, 1, 1998, Porto Alegre. Anais. Porto Alegre, Brasil, 199-209 (1998).
- BROWN, L. M.; EMBURRY, J. D. The initiation and growth of voids at second phase particles. In: **3rd. Int. Conf. on Strength of Metals and Alloys, Proc...** Londres: Institute of Metals, 1973. p.164-169.
- CEDERGREN, J.; MELIN, S.; LIDSTRÖM, P. Numerical modeling of P/M steel bars subjected to fatigue loading using an extended Gurson model. **European Journal of Mechanics A/Solids**, v.23, p.899-908, 2004.
- CHEN, H.; BLANDFORD, G. E. Work-increment-control method for non-linear analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.36, p.909-930, 1993.
- CHIMISSO, F.E.G. **Um modelo de dano contínuo para materiais com comportamento elasto-plástico**. Rio de Janeiro, 1994. 128 p. Tese de doutorado em Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- CHU, C. C.; NEEDLEMAN, A. Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. **ASME Journal of Engineering Materials and Technology**, v.102, p.249-256, 1980.
- CORIGLIANO, A.; MARIANI, S.; ORSATTI, B. Identification of Gurson-Tvergaard material model parameters via Kalman filtering technique. I. Theory. **International Journal of Fracture**, v.104, p.349-373, 2000.
- CRISFIELD, M. A. A fast modified Newton-Raphson iteration. **Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.20, p.267-278, 1979.
- CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. **Computers and Structures**, v.13, p.55-62, 1981.
- CRISFIELD, M. A. An arc-length method including line searches and accelerations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.19, p.1269-1289, 1983.
- CUNDA, L.A.B.; BITTENCOURT, E.; CREUS, G.J. Tratamento do dano dúctil em problemas termo-mecânicos através do MEF. In: CONGRESSO IBERO-LATINOAMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA (XVIII CILAMCE), 18., 1997, Brasília. **Anais**. UnB, 1997. v.3, p. 1193-1200.

- CUNDA, L.A.B.; BITTENCOURT, E.; CREUS, G.J. Analysis of ductile damage coupled with thermoplasticity by the FEM. In: E. OÑATE, S.R. IDELSOHN (Eds.) **Computational Mechanics - New Trends and Applications**, CIMNE, Barcelona, Espanha, 1998.
- CUNDA, L.A.B.; CREUS, G.J. A note on damage analyses in processes with nonmonotonic loading. **Computer Modeling and Simulation in Engineering**, v.4, n.4, p. 300-303, 1999a.
- CUNDA, L.A.B.; CREUS, G.J. Modelling of damage nucleation and growth under cyclic loading. In: CONGRESSO IBERO-LATINOAMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA (XX CILAMCE), 20., 1999, São Paulo. **Computational Methods in Engineering 99**. 1999b. p. 10501-10518.
- CUNDA, L.A.B.; ÖCHSNER, A.; CREUS, G.J. Damage in metallic foams. In: CONGRESSO IBERO-LATINOAMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA (XXVI CILAMCE), 26., 2005, Guarapari, ES. **Anais**. 2005. Trabalho CIL25-146 (em CD).
- DOGHRI, I. Numerical implementation and analysis of a class of metal plasticity models coupled with ductile damage. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.38, p.3403-3431, 1995.
- DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J. P. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.33, n.1-3, p.689-723, 1982.
- DYM, C.L.; SHAMES, I.H. **Solid mechanics – A variational approach**, New York:Mc-Graw-Hill, 1973. 556 p.
- ESCHE, S.K.; KINZEL, G.L.; ALTAN, T. Issues in convergence improvement for non-linear finite element programs. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.40, p.4577-4594, 1997.
- EVANS, A. G.; HUTCHINSON, J. W.; ASHBY, M. F. Multifunctionality of cellular metal systems. **Progress in Materials Science**, v.43, p.171-221, 1999.
- FLANAGAN, D.P.; BELYTSCHKO, T. Eigenvalues and stable time steps for the uniform strain hexahedron and quadrilateral. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v. 51, p.35-40, 1984.
- FLECK, N.A.; OTOYO, H.; NEEDLEMAN, A. Indentation of porous solids. **International Journal of Solids and Structures**, v.29, n.13, p.1613-1636, 1992.
- GADALA, M. S.; WANG, J. ALE formulation and its application in solid mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.167, p.33-55, 1998.
- GADALA, M. S.; WANG, J. Simulation of metal forming processes with finite element methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 44, p. 1397-1428, 1999.
- GARCÍA-GARINO, C.G.; MIRASSO, A.; RAICHMAN, S.R.; GOICOLEA, J.M. Simulación numérica del ensayo de tracción simple. In: G. ETSE, B. LUCCIONI (Eds.) **Mécanica Computacional**, v. XVII, Tucumán, Argentina, 1996a. p. 425-436.

- GARCÍA-GARINO, C.G.; MIRASSO, A.; RAICHMAN, S.R.; GOICOLEA, J.M. Estricción de barras metálicas cilíndricas: sensibilidad frente al tamaño y tipo de las imperfecciones. In: G. ETSE, B. LUCCIONI (Eds.) **Mécanica Computacional**, v. XVII, Tucumán, Argentina, 1996b. p. 437-444.
- GARCÍA-GARINO, C.G.; MIRASSO, A.; RAICHMAN, S.R.; GOICOLEA, J.M. Imperfection sensitivity analysis of necking instability in circular cylindrical bars. In: D.R.J. OWEN, E. OÑATE, E. HINTON (Eds.) **Computational Plasticity – Fundamentals and Applications**, Barcelona, 1997. p. 759-764.
- GÉRADIN, M.; IDELSOHN, S.; HOGGE, M. Computational strategies for the solution of large nonlinear problems via quasi-Newton methods. **Computers and Structures**, v.13, p.73-81, 1981.
- GOLOGANU, M.; LEBLOND, J.B.; PERRIN, G. A micromechanically based Gurson-type model for ductile porous metals including strain gradient effects, **ASME Net Shape Processing of Powder Materials – Applied Mechanics Division AMD**, v.216, p.47-56, 1995.
- GOODS, S. H.; BROWN, L. M. The nucleation of cavities by plastic deformation. **Acta Metallurgica**, v.27, p.1-15, 1979.
- GOVINDARAJAN, R.M.; ARAVAS, N. Pressure-dependent plasticity models: loading-unloading criteria and the consistent linearization of an integration algorithm. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v.11, p.339-345, 1995.
- GOYA, M.; NAGAKI, S.; SOWERBY, R. Yield criteria for ductile porous solids. **JSME International Journal**, v.35, n.3, p.310-318, 1992.
- GRATACOS, P.; MONTMITONET, P.; CHENOT, J.L. An integration scheme for Prandtl-Reuss elastoplastic constitutive relations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.33, p.943-961, 1992.
- GURSON, A. L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: part I- yield criteria and flow rules for porous ductile media. **ASME Journal of Engineering Materials and Technology**, v.99, p.2-15, 1977.
- HABER, R. B. A mixed eulerian-lagrangian displacement model for large-deformation analysis in solid mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.43, n.3, p.277-297, 1984.
- HACKENBERG, H.P. Large deformation finite element analysis with inelastic constitutive models including damage. **Computational Mechanics**, v. 16, p. 315-327, 1995.
- HANSEN, N. R.; SCHREYER, H. L. A thermodynamically consistent framework for theories of elastoplasticity coupled with damage. **International Journal of Solids and Structures**, v.31, n.3, p.359-389, 1994.
- HINTON, E.; ROCK, T.; ZIENKIEWICZ, O.C. A note on mass lumping and related processes in the finite element method. **Earthquake-Engineering and Structural Dynamics**, v.4, p.245-249, 1976.
- HOGGE, M.; PONTHOT, J.P. Metal forming analysis via eulerian-lagrangian FEM with adaptive mesh. **Latin American Research**, v. 21, p. 217-224, 1991.

- HOGGE, M.; PONTHOT, J.P.; QUOIRIN, D. METAFOR: Logiciel Eulérien-Lagrangien pour l'analyse de la mise à forme et des grandes déformations de matériaux. In: P. LAVADEZES et al. (Eds.) **New Advances in Computational Structural Mechanics**, Giens, 1991. p. 657-664.
- HUANG, YU.; CHANDRA, A.; LY, N. Y. Void-nucleation vs. Void-growth controlled plastic flow localization in materials with nonuniform particle distributions. **International Journal of Solids and Structures**, v.35, n.19, p.2475-2486, 1998.
- HUETNIK, J.; VAN DER LUGT, J. Thermal mechanically coupled finite element analysis in metal forming processes. **Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering**, v.54, p.145-160, 1986.
- HUETNIK, J.; VREEDE, P. T.; VAN DER LUGT, J. Progress in mixed eulerian-lagrangian finite element simulation of forming processes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 30, p. 1441-1457, 1990.
- HUGHES, T.J.R.; LIU, W.K.; ZIMMERMANN, T.K. Lagrangian-eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. **Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering**, v.29, n.3, p.329-349, 1981.
- JOHNSON, J. N. Dynamic fracture and spallation in ductile solids. **Journal of Applied Physics**, v.52, p.2812-2825, 1981.
- KACHANOV, L.M., **Time to rupture process under creep conditions**, IVZ Akad Nauk, S.S.R., Otd. Tech Nauk, n. 8, 1958.
- KIKUCHI, M.; MIYAMOTO, H.; OTOYO, H.; KURODA, M. Ductile fracture of aluminum alloys. **JSME International Journal**, v.34, n.1, p.90-97, 1991.
- KLEIBER, M. Computational coupled non-associative thermo-plasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.90, p.943-967, 1991.
- KLÖCKER, H.; TVERGAARD, V. Growth and coalescence of non-spherical voids in metals deformed at elevated temperature. **International Journal of Mechanical Sciences**, v.45, p.1283-1308, 2003.
- KOPLIK, J.; NEEDLEMAN, A. Void growth and coalescence in porous plastic solids. **International Journal of Solids and Structures**, v.24, p.835-853, 1988.
- KOPPENHOEFER, K.C.; DODDS, R.H. Ductile crack growth in pre-cracked CVN specimens: numerical studies. **Nuclear Engineering and Design**, v.180, p.221-241, 1998.
- LEBLOND, J.B.; PERRIN, G.; DEVAUX, J. Bifurcation effects in ductile metals with nonlocal damage. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v.1, n.2, p.236-242, 1994.
- LEE, B.J.; MEAR, M.E. An evaluation of Gurson's theory of dilatational plasticity. **ASME Journal of Engineering Materials and Technology**, v.115, p.339-344, 1993.
- LEE, E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v. 36, p.1-6, 1969.
- LEE, E.H. Some comments on elastic-plastic analyses. **International Journal of Solids and Structures**, v. 17, p.859-872, 1981.



- LEE, J.H. Accuracies of numerical solution methods for the pressure-modified von Mises model. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.26, p.453-465, 1988.
- LEE, J.H.; ZHANG, Y. A finite-element work-hardening plasticity model of the uniaxial compression and subsequent failure of porous cylinders including effects of void nucleation and growth – part 1: plastic flow and damage. **ASME Journal of Engineering Materials and Technology**, v.116, p.69-79, 1994.
- LEMAITRE, J. ; CHABOCHE, J.L. **Mécanique des matériaux solides**, Paris: Dunod, 1988. 544 p.
- LIEVERS, W.B.; PILKEY, A.K.; LLOYD, D.J. Using incremental forming to calibrate a void nucleation model for automotive aluminum sheet alloys. **Acta Materialia**, v.52, p.3001-3007, 2004.
- LIU, W. K.; BELYTSCHKO, T.; CHANG, H. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method path-dependent materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.58, n.2, p.227-245, 1986.
- LIU, W. K.; CHANG, H.; CHEN, J-S.; BELYTSCHKO, T. Arbitrary lagrangian-eulerian Petrov-Galerkin finite elements for nonlinear continua. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.68, p.259-310, 1988.
- MACKENZIE, J.K. The elastic constants of a solid containing spherical holes. **Proc. Phys. Soc.**, v. 63B, p. 2-11, 1959.
- MAGNUSSON, A.; SVENSSON, I. Numerical treatment of complete load-deflection curves. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.41, p.955-971, 1998.
- MAHNKEN, R. Aspects on the finite-element implementation of the Gurson model including parameter identification. **International Journal of Plasticity**, v.15, p.1111-1137, 1999.
- MALKUS, D.S.; HUGHES, T.J.R. Mixed finite element methods – reduced and selective integration techniques: a unification of concepts. **Computer Methods in Applied Mechanics Engineering**, v.15, p.63-81, 1978.
- MALVERN, L.E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1969. 713 p.
- MANDELL, J. Sur la définition de la vitesse de déformation élastique et sa relation avec la vitesse de contrainte. **International Journal of Solids and Structures**, v. 17, p.873-878, 1981.
- MATHUR, K.K.; NEEDLEMAN, A.; TVERGAARD, V. Ductile failure analyses on massively parallel computers. **Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.119, p.283-309, 1994.
- McCLINTOCK, F.A. A criterion for ductile fracture by the enlargement of holes. **Journal of Applied Mechanics**, v.35, p.363-371, 1968.
- MIEHE, C. Aspects of the formulation and the finite element implementation of large strain isotropic elasticity. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, p.1981-2004, 1994.

- MONDKAR, D.P.; POWELL, G.H. Evaluation of solution schemes for nonlinear structures. **Computers and Structures**, v.9, p.223-236, 1978.
- NAGTEGAAL, J.C. On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.33, p.469-484, 1982.
- NEEDLEMAN, A.; RICE, J.R. Limits to ductility set by plastic flow localization. In: KOISTINEN, D.P. et al. (Eds.) **Mechanics of Sheet Metal Forming**, New York: Plenum Press, 1978. p.237-267.
- NEEDLEMAN, A.; TVERGAARD, V. Mesh effects in the analysis of dynamic ductile crack growth. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 47, n.1, p.75-91, 1994.
- NEMAT-NASSER, S. Decomposition of strain measures and their rates in finite deformation elastoplasticity. **International Journal of Solids and Structures**, v. 15, p.155-166, 1979.
- NEMAT-NASSER, S. On finite deformation elastoplasticity. **International Journal of Solids and Structures**, v. 18, p.857-872, 1982.
- NOOR, A.K.; NEEDLEMAN, A.; PETERS, J.M. Sensitivity analysis for failure and damage in dynamically loaded tensile bars. **Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.151, p.461-478, 1998.
- ÖCHSNER, A. **Experimentelle und numerische untersuchung des elasto-plastischen verhaltens zellularer modellwerkstoffe**. Erlangen-Nuremberg, Alemanha, 2002. 128 p. Tese de Doutorado (em alemão), Universidade de Erlangen-Nuremberg.
- ÖCHSNER, A.; LAMPRECHT, K. On the uniaxial compression behavior of regular shaped cellular metals. **Mechanics Research Communications**, v.30, p.573-579, 2003.
- ÖCHSNER, A.; WINTER, W.; KUHN, G. On an elastic-plastic transition zone in cellular metals. **Archive of Applied Mechanics**, v.73, p.261-269, 2003.
- OLMI, F. **Uma técnica de remalhamento iterativo aplicada a problemas de grandes deformações elastoplásticas**. Porto Alegre, 1997. Dissertação de mestrado em Engenharia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- ORTIZ, M.; POPOV, E.P. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.21, p.1561-1576, 1985.
- PAI, P.F.; PALAZOTTO, A.N.; GREER JR., J.M. Polar decomposition and appropriate strains and stresses for nonlinear structural analyses. **Computers and Structures**, v.66, n.6, p.823-840, 1998.
- PERZYNA, P. Internal state variable description of dynamic fracture of ductile solids. **International Journal of Solids and Structures**, v.22, n.7, p.797-818, 1986.
- PONTHOT, J. P. **Méthodologie eulérienne-lagrangienne et tests par elements finis pour l'étude des grandes déformations thermomécaniques**; Application aux problèmes de mise en forme. Liège, Bélgica: Université de Liège, Faculté de Sciences Appliquées, 1990. p. irr. (Relatório interno LTAS-TF8).
- PONTHOT, J. P. **Mode d'emploi pour la version pilote de METAFOR, module de calcul en grandes déformations**. Liège, Bélgica: Université de Liège, Faculté de Sciences Appliquées, 1992. 120 p. (Relatório interno LTAS-TM04).

- PONTHOT, J. P. **Traitement unifié de la mécanique des milieux continus solides en grandes transformations par la méthode des éléments finis**. Liège, Bélgica, 1995. Tese de doutorado (em francês), Faculdade de Ciências Aplicadas, Universidade de Liège.
- POWELL, G.; SIMONS, J. Improved iteration strategy for nonlinear structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.17, p.1455-1467, 1981.
- QUEHEILLALT, D. T.; SYPECK, D. J.; WADLEY, H. N. G. Ultrasonic characterization of cellular metal structures. **Materials Science and Engineering A**, v.323, p.138-147, 2002.
- RAGAB, A.R. A model for ductile fracture based on internal necking of spheroidal voids. **Acta Materialia**, v.52, p.3997-4009, 2004a.
- RAGAB, A.R. Application of an extended void growth model with strain hardening and void shape evolution to ductile fracture under axisymmetric tension. **Engineering Fracture Mechanics**, v.71, p.1515-1534, 2004b.
- RAGAB, A.R. Prediction of ductile fracture using isotropic and kinematic hardening rules including void nucleation. **Fatigue and fracture of Engineering Materials and Structures**, v.27, p.99-110, 2004c.
- RAGAB, A.R.; SALEH, Ch. A.R. Evaluation of constitutive models for voided solids. **International Journal of Plasticity**, v.15, p.1041-1065, 1999.
- RAMASWAMY, S.; ARAVAS, N. Finite element implementation of gradient plasticity models Part I: Gradient-dependent yield functions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.163, p.11-32, 1998a.
- RAMASWAMY, S.; ARAVAS, N. Finite element implementation of gradient plasticity models Part I: Gradient-dependent evolution equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.163, p.33-53, 1998b.
- REUSCH, F.; SVENDSEN, B.; KLINGBEIL, D. A non-local extension of Gurson-based ductile damage modeling. **Computational Materials Science**, v.26, p.219-229, 2003.
- REUSCH, F.; SVENDSEN, B.; KLINGBEIL, D. Local and non-local Gurson-based ductile damage and failure modelling at large deformation. **European Journal of Mechanics A/Solids**, v.22, p.779-792, 2003a.
- RICE, J.R.; TRACEY, D.M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v.17, p.201-217, 1969.
- RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International Journal of Solids and Structures**, v.15, p.529-551, 1979.
- RISTINMAA, M. Void growth in cyclic loaded porous plastic solid. **Mechanics of Materials**, v.26, p.227-245, 1997.
- ROZENWALD, D. **Modélisation thermomécanique des grandes déformations. Application aux problèmes de mise à forme des métaux, des élastomères et des structures mixtes métal-élastomère**. Liège, Bélgica, 1997. 403 p. Tese de doutorado (em francês), Faculdade de Ciências Aplicadas, Universidade de Liège.

- RUNESSON, K.; SAMUELSSON, A.; BERNSPÅNG, L. Numerical technique in plasticity including solution advancement control. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.22, p.769-788, 1986.
- RUNESSON, K.; STURE, S.; WILLAM, K. Integration in computational plasticity. **Computers and Structures**, v.30, n.1/2, p.119-130, 1988.
- SCHREURS, P. J. G.; VELDPAUS, F. E.; BREKELMANS, W. A. M. Simulation of forming processes using the arbitrary eulerian-lagrangian formulation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.58, n.1, p.19-36, 1986.
- SIMO, J.C. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part I: continuum formulation. **Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering**, v.66, p.199-219, 1988a.
- SIMO, J.C. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part II: continuum formulation. **Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering**, v.68, p.1-31, 1988b.
- SIMO, J.C.; MIEHE, C. Associative coupled thermoplasticity at finite strains: formulation, numerical analysis and implementation. **Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering**, v.98, p.41-104, 1992.
- SKALLERUD, B.; ZHANG, Z.L. On numerical analysis of damage evolution in cyclic elastic-plastic crack growth problems. **Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures**, v.23, p.81-86, 2001.
- SPRINGMANN, M.; KUNA, M. Identification of material parameters of the Gurson-Tvergaard-Needleman model by combined experimental and numerical techniques. **Computational Materials Science**, v.32, p.544-552, 2005.
- SRIKANTH, A.; ZABARAS, N. A computational model for the finite element analysis of thermoplasticity coupled with ductile damage at finite strains. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 45, p.1569-1605, 1999.
- STAINIER, L. **Modélisation numérique du comportement irréversible des métaux ductiles soumis à grandes déformations avec endommagement**. Liège, Bélgica, 1996. 158 p. Tese de doutorado (em francês), Faculté de Sciences Appliquées, Université de Liège.
- STAINIER, L.; PONTHOT, J.P. An improved one-point integration method for large strain elastoplastic analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics Engineering**, v.118, p.163-177, 1994.
- STEINMANN, P.; MIEHE, C.; STEIN, E. Comparison of different finite deformation inelastic damage models within multiplicative elastoplasticity for ductile materials. **Computational Mechanics**, n.13, p.458-474, 1994.
- STEVENSON, W.J. **Estatística Aplicada à Administração**, São Paulo:Harper & Row do Brasil, 1981. 495 p.
- THOMASON, P.F. Three-dimensional models for the internal neckings at incipient failure of intervoid matrix in ductile porous solids. **Acta Metallurgica**, v.33, n.6, p.1079-1085, 1985a.

- THOMASON, P.F. A three-dimensional model for ductile fracture by the growth and coalescence of microvoids. **Acta Metallurgica**, v.33, n.6, p.1087-1095, 1985b.
- TVERGAARD, V. Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. **International Journal of Fracture**, v.17, p.389-407, 1981.
- TVERGAARD, V. On localization in ductile materials containing spherical voids. **International Journal of Fracture**, v.18, p.237-252, 1982a.
- TVERGAARD, V. Material failure by void coalescence in localized shear bands. **International Journal of Solids and Structures**, v.18, n.8, p.659-672, 1982b.
- TVERGAARD, V. Ductile fracture by cavity nucleation between larger voids. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v.30, n.4, p.265-286, 1982c.
- TVERGAARD, V.; NEEDLEMAN, A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. **Acta Metallurgica**, v.32, n.1, p.157-169, 1984.
- TVERGAARD, V. Material failure by void growth to coalescence. **Advances in Applied Mechanics**, v.27, p.83-151, 1990.
- TVERGAARD, V.; NEEDLEMAN, A. Effects of nonlocal damage in porous plastic solids. **International Journal of Solids and Structures**, v.32, n.8/9, p.1063-1077, 1995.
- VOYIADJIS, G.Z.; KATTAN, P.I. A plasticity-damage theory for large deformation of solids– I. theoretical formulation. **International Journal of Engineering Science**, v.30, n.9, p.1089-1108, 1992.
- WANG, P.T. Thermomechanical deformation of powder-based porous aluminium Part II. Constitutive model including densification hardening. **Powder Technology**, v.66, p.21-32, 1991.
- WEN, J.; HUANG, Y.; HWANG, K.C.; LIU, C.; LI, M. The modified Gurson model accounting for the void size effect. **International Journal of Plasticity**, v.21, p.381-395, 2005.
- WORSWICK, M.J.; PICK, R.J. Void growth and constitutive softening in a periodically-voided solid. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v.38, p.601-625, 1990.
- WORSWICK, M.J.; PICK, R.J. Void growth in plastically deformed free-cutting brass. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v.58, p.631-638, 1991.
- WORSWICK, M.J.; PICK, R.J. Void growth and coalescence during high velocity impact. **Mechanics of Materials**, v.19, p.293-309, 1995.
- WRIGGERS, P.; MIEHE, C.; KLEIBER, M.; SIMO, J.C. On the coupled thermo-mechanical treatment of necking problems via finite element methods. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, v.33, p.869-883, 1992.
- YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, v.28, n.12, p.2110-2116, 1990.
- ZAVALIANGOS, A.; ANAND, L. Thermal aspects of shear localization in microporous viscoplastic solids. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.33, p.595-634, 1992.

- ZHANG, Z.L. On the accuracies of numerical integration algorithms for Gurson-based pressure-dependent elastoplastic constitutive models. **Computer Methods in Applied Mechanics Engineering**, v.121, p.15-28, 1995a.
- ZHANG, Z.L. Explicit consistent tangent moduli with a return mapping algorithm for pressure dependent elastoplasticity models. **Computer Methods in Applied Mechanics Engineering**, v.121, p.29-44, 1995b.
- ZHANG, Z.L. A sensitivity analysis of material parameters for the Gurson constitutive model. **Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures**, v.19, n.5, p.561-570, 1996.
- ZHANG, Z.L.; NIEMI, E. A class of generalized mid-point algorithms for the Gurson-Tvergaard material model. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.38, p.2033-2053, 1995a.
- ZHANG, Z.L.; NIEMI, E. A new failure criterion for the Gurson-Tvergaard dilatational constitutive model. **International Journal of Fracture**, v.70, p.321-334, 1995b.
- ZIENKIEWICZ, O.C. Incremental displacement in non-linear analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.3, p.587-588, 1971.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method**, London:Mc-Graw-Hill, 1989. 648 p.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L.; TOO, J.M. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.3, p.275-290, 1971.

## **APÊNDICE A – ELEMENTOS DE MECÂNICA DOS SÓLIDOS**

Este apêndice contém alguns conceitos importantes sobre medidas de tensão e deformação em presença de deslocamentos finitos. Maiores detalhes podem ser obtidos em Malvern (1969) e Ponthot (1990; 1995).

Em problemas onde os deslocamentos são pequenos, é indiferente estabelecer o equilíbrio na configuração inicial ou na configuração deformada, visto que elas estão muito próximas. Sendo assim, não existe dúvida quanto às medidas de tensão e deformação a serem empregadas.

Para problemas onde se admite a presença de deslocamentos finitos, o equilíbrio deve ser estabelecido na configuração deformada, pois esta pode ser bastante diferente da configuração inicial. Em função da existência de pelo menos duas configurações relevantes, a configuração inicial e a configuração deformada, e infinitas configurações intermediárias entre estas, surgem diversas definições de tensores de tensão e deformação passíveis de emprego (Pai *et al.*, 1998). Na seção A.1, são feitas breves considerações sobre medidas de deformação em presença de deslocamentos finitos. Na seção A.2, trata-se das medidas de tensão, sendo abordado o conceito de objetividade.

## A.1 MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO

### A.1.1 O tensor gradiente de deformação

Seja um ponto material, parte de um meio contínuo. A configuração do meio contínuo antes de qualquer deformação é chamada configuração de referência. A posição inicial do ponto, na configuração de referência, pode ser expressa por um vetor  $\mathbf{X}$ . Neste apêndice emprega-se negrito para indicar vetor ou tensor. Após o meio contínuo sofrer deformação, o ponto que na configuração de referência ocupava a posição  $\mathbf{X}$  passa a uma posição  $\mathbf{x}$  na configuração atual. A posição  $\mathbf{x}$  do ponto material na configuração deformada é função da posição de referência  $\mathbf{X}$  e do instante de tempo considerado  $t$ .



$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (256)$$

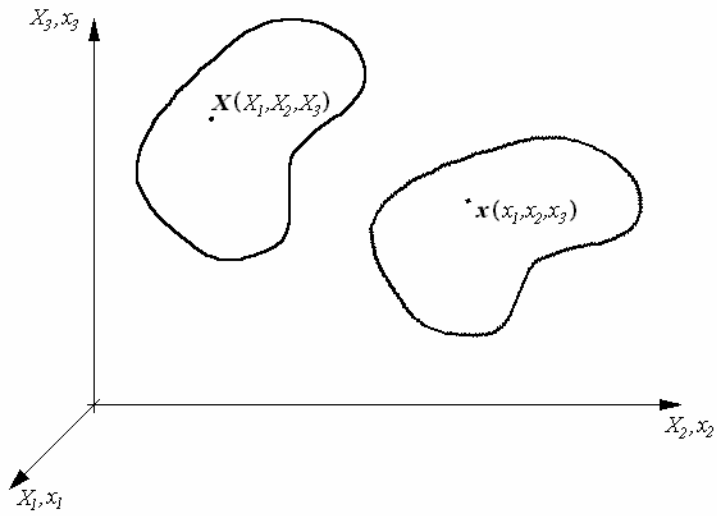


Figura 168: configuração de referência e configuração atual

O deslocamento, a velocidade e a aceleração podem ser definidos respectivamente por

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (257)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (258)$$

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \quad (259)$$

Considerando-se um segmento de magnitude  $d\mathbf{x}$ , sua variação de comprimento é dada por

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}^2} d\mathbf{X}^2 + \dots \quad (260)$$

Para um segmento bastante pequeno, é possível reter apenas os termos de primeira ordem,

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} \quad (261)$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (262)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{ou} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (263)$$

onde  $\mathbf{F}$  é o chamado gradiente de deformação entre as configurações de referência e atual, não necessariamente simétrico. A condição que  $\mathbf{F}$  deve satisfazer é que seu determinante jacobiano  $J$  seja positivo, para que a transformação seja válida.

$$\det \mathbf{F} = J > 0 \quad (264)$$

A variação de volume associada à transformação é dada por

$$dv = J dV \quad (265)$$

ficando claro que o determinante jacobiano  $J$  só pode assumir valores positivos. O gradiente de deformação pode ser decomposto de forma única em uma rotação pura ( $\mathbf{R}$ ) e em uma deformação pura ( $\mathbf{U}$  ou  $\mathbf{V}$ ) através da decomposição polar

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (266)$$

onde  $\mathbf{R}$  é um tensor ortogonal ( $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ ;  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ ).  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são chamados tensores de

deformação direita e esquerda, respectivamente. Esses tensores são simétricos e positivo-definidos.  $U$  é uma deformação aplicada na configuração original, enquanto que  $V$  é uma deformação aplicada na configuração rotada. Os tensores  $U$  e  $V$  relacionam-se por

$$V = R U R^T \quad (267)$$

$$U = R^T V R \quad (268)$$

### A.1.2 Tensores de deformação usuais

Seja um segmento de comprimento  $dS$ , onde

$$dS^2 = d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} \quad (269)$$

Quando o contínuo que contém o segmento sofre uma deformação, o segmento muda de comprimento, passando a

$$ds^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} \quad (270)$$

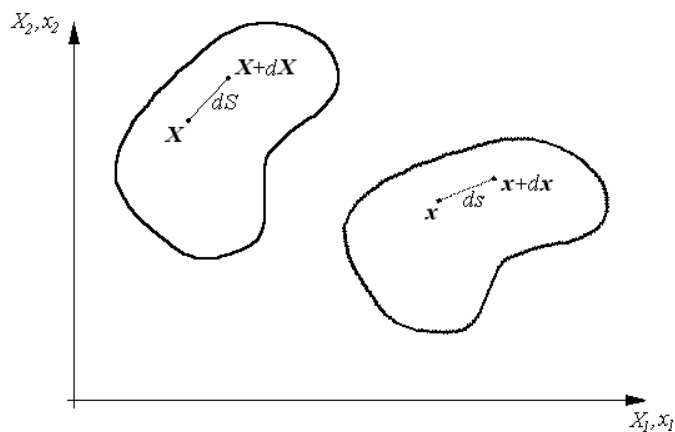


Figura 169: variação de comprimento de segmento

Considerando a relação existente entre a posição atualizada e a posição de referência (equação 262),

$$ds^2 = d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (271)$$

$$dS^2 = d\mathbf{x}^T \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \quad (272)$$

e subtraindo o comprimento do segmento antes da deformação

$$ds^2 - dS^2 = d\mathbf{X}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} \quad (273)$$

$$ds^2 - dS^2 = d\mathbf{x}^T (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) d\mathbf{x} \quad (274)$$

As quantidades entre parênteses podem ser consideradas medidas de deformação de  $dS$ , sendo nulas em caso de movimentos de corpo rígido. A partir daí, definem-se alguns tensores empregados para medir deformações.

$$\mathbf{E}^B = \mathbf{U} - \mathbf{I} \quad (275)$$

$$\mathbf{E}^G = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (276)$$

$$\mathbf{E}^A = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (277)$$

onde

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (278)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (279)$$

O tensor  $\mathbf{C}$  é conhecido por tensor de Cauchy-Green à direita, enquanto que o tensor  $\mathbf{B}$  é conhecido como tensor de Cauchy-Green à esquerda, ou tensor de deformação de Finger. Ambos são objetivos, ou seja, independem de movimentos de rotação. O tensor  $\mathbf{E}^B$  é o chamado tensor de deformações de Biot. O tensor  $\mathbf{E}^G$  é o tensor de deformação de Green-Lagrange, representando uma deformação definida a partir da configuração de referência enquanto que o tensor de deformação de Almansi  $\mathbf{E}^A$ , ou de Euler-Almansi, representa uma deformação definida a partir da configuração atualizada. Outro tensor de deformação empregado é o chamado tensor de deformações logarítmicas ou natural

$$\mathbf{E}^N = \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \quad (280)$$

Os tensores de deformação anteriores relacionam-se por

$$\mathbf{E}^A = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E}^G \mathbf{F}^{-1} \quad (281)$$

$$\mathbf{E}^N = \frac{1}{2} \ln(2\mathbf{E}^G + \mathbf{I}) \quad (282)$$

Cabe salientar que para movimentos de corpo rígido, os tensores de deformação  $\mathbf{E}^B$ ,  $\mathbf{E}^G$ ,  $\mathbf{E}^A$  e  $\mathbf{E}^N$  se anulam, enquanto que  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  transformam-se na matriz identidade  $\mathbf{I}$ . Para deformações pequenas, os tensores de deformação de Green-Lagrange, Euler, Biot e logarítmico apresentam valores muito próximos.

### A.1.3 O tensor gradiente de velocidade

O tensor gradiente de velocidade  $\mathbf{L}$  é definido na configuração deformada como

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (283)$$

podendo ser decomposto em uma parte simétrica e outra anti-simétrica,

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (284)$$

onde  $\mathbf{D}$  é a taxa de deformação, dada por

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (285)$$

e  $\mathbf{W}$  é a taxa de rotação dada por

$$\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (286)$$

O tensor taxa de deformação relaciona-se com a taxa do tensor deformações de Green-Lagrange por

$$\mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F} = \dot{\mathbf{E}}^G \quad (287)$$

observando-se que o tensor taxa de deformação é referido à configuração atual, enquanto que a taxa do tensor de deformações de Green-Lagrange é referida à configuração de referência.

Em procedimentos incrementais do tipo lagrangeano atualizado, onde se toma como referência a última configuração equilibrada conhecida, e as configurações de referência e atualizada são próximas, pode-se dizer que

$$\mathbf{F} \cong \mathbf{I} \quad (288)$$

$$\mathbf{U} \cong \mathbf{I} \quad (289)$$

$$\mathbf{R} \cong \mathbf{I} \quad (290)$$

Neste caso, não é difícil mostrar que

$$\mathbf{D} \cong \dot{\mathbf{U}} \quad (291)$$

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}} \quad (292)$$

#### A.1.4 O tensor velocidade angular

Seja o vetor  $\mathbf{n}$  que gira sem se deformar. No instante inicial ( $t = t_0$ ),  $\mathbf{n}$  assume o valor  $\mathbf{N}$ . Assim,

$$\mathbf{n} = \mathbf{R}\mathbf{N} \quad (293)$$

com  $\mathbf{R}_{t=t_0} = \mathbf{I}$ . Derivando a expressão anterior em relação ao tempo

$$\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{N} \quad (294)$$

$$\dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{n} \quad (295)$$

O tensor velocidade angular  $\boldsymbol{\Omega}$  é definido como

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}^{-1} \quad (296)$$

o que faz com que a derivada temporal de  $\boldsymbol{n}$  fique

$$\dot{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{n} \quad (297)$$

Considerando a definição do tensor velocidade angular  $\boldsymbol{\Omega}$ , pode-se decompor o tensor gradiente de velocidade  $\boldsymbol{L}$  em

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\Omega} \quad (298)$$

com

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}^T \quad (299)$$

No caso de um movimento de corpo rígido, onde  $\boldsymbol{D}$  é nulo e  $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}$ , temos  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{W}$ . Entretanto, se existe deformação,  $\boldsymbol{W}$  e  $\boldsymbol{\Omega}$  podem ser bastante diferentes. Quando se tomam configurações de referência e atualizada próximas, é possível dizer que

$$\boldsymbol{\Omega} \cong \boldsymbol{W} \quad (300)$$

## A.2 MEDIDAS DE TENSÃO

Em função da existência de duas configurações geométricas envolvidas, conforme a solicitação atuante esteja referida a uma ou a outra configuração, surgem diversas medidas de tensão passíveis de emprego. Dentre elas, opta-se pelas tensões de Cauchy. Tal escolha se



justifica quando se consideram algumas propriedades do tensor de tensões de Cauchy:

- a) tensor simétrico, com autovalores reais e autovetores ortogonais entre si;
- b) são as tensões verdadeiras que atuam no corpo deformado;
- c) tensor em função das quais estão escritos a maioria dos critérios de escoamento e das leis constitutivas.

Justificada a escolha do tensor de tensões de Cauchy como medida de tensões, passemos a discussão da chamada objetividade.

### A.2.1 O conceito de objetividade

O chamado “princípio da objetividade” diz que as equações que representam os fenômenos físicos devem ser independentes do movimento do sistema de referência. Note-se que o princípio da objetividade representa um passo adiante da chamada “invariância tensorial”, que relaciona dois tensores medidos em diferentes sistemas coordenados fixos, pois envolve a possibilidade de movimento dos sistemas de referência envolvidos.

Para que se obtenha uma lei objetiva, esta deve ser formulada envolvendo apenas grandezas objetivas, isto é, que possuem um significado físico independente do movimento do sistema de referência.

Seja uma função

$$f(A, B_i, C_{ij}) = 0 \quad (301)$$

medida em um referencial que sofre um movimento genérico descrito por

$$x_i = Q(t)_{ij} X_j + C_i \quad (302)$$

onde  $Q(t)_{ij}$  é um tensor ortogonal de segunda ordem função do tempo e  $C_i$  um vetor qualquer. A função  $f$  será objetiva se os tensores  $A$ ,  $B_i$  e  $C_{ij}$  se transformarem como a seguir.

$$A' = A \quad (303)$$

$$B'_i = Q(t)_{ij} B_j \quad (304)$$

$$C'_{ij} = Q(t)_{ik} C_{kl} Q(t)_{lj} \quad (305)$$

onde se emprega o apóstrofo como superíndice para indicar o tensor medido na posição atualizada do referencial.

A taxa de deformação  $D$  é uma grandeza objetiva, assim como o tensor de tensões de Cauchy  $\sigma$ .

$$D' = QDQ^T \quad (306)$$

$$\sigma' = Q\sigma Q^T \quad (307)$$

No entanto, o tensor taxa de tensões de Cauchy  $\dot{\sigma}$  transforma-se como

$$\dot{\sigma}' = \dot{Q}\sigma Q^T + Q\dot{\sigma}Q^T + Q\sigma\dot{Q}^T \quad (308)$$

não sendo objetivo e, portanto, inadequado para ser empregado em formulações que envolvam deslocamentos finitos.

## A.2.2 Taxas de tensão objetivas

Uma das formas de se tratar problemas envolvendo plasticidade é o emprego das chamadas formulações em taxas (hipoelasticidade), quando se relaciona uma taxa de tensão a uma taxa de deformação através do emprego de uma lei constitutiva. Assim, não basta trabalhar com um tensor de tensões objetivo, devendo-se tomar a precaução de que a derivada temporal do tensor de tensões adotado também seja objetiva. Busca-se, então, uma taxa de tensões que seja objetiva e de alguma forma relacionada com o tensor de tensões de Cauchy.

Seja um sistema de eixos que gira com uma velocidade angular  $\theta$  com relação a um referencial fixo, de forma que a derivada temporal da matriz de rotação da transformação vale

$$\dot{\eta} = \theta \eta \quad (309)$$

onde  $\eta$  é uma matriz ortogonal e  $\theta$  uma matriz anti-simétrica. Aplicando uma rotação ao tensor de tensões de Cauchy, resulta

$$\sigma' = \eta^T \sigma \eta \quad (310)$$

ficando a derivada temporal da equação 310

$$\dot{\sigma}' = \dot{\eta}^T \sigma \eta + \eta^T \dot{\sigma} \eta + \eta^T \sigma \dot{\eta} \quad (311)$$

Substituindo a equação 309 na equação 311 é possível escrever

$$\dot{\sigma}' = \eta^T (\dot{\sigma} - \theta \sigma + \sigma \theta) \eta \quad (312)$$

ou ainda

$$\dot{\sigma}' = \eta^T \overset{\nabla}{\sigma} \eta \quad (313)$$

onde

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \dot{\sigma} - \theta \sigma + \sigma \theta \quad (314)$$

é denominada taxa de tensão corrotacional. O sistema de eixos rotados, definido por  $\eta$ , é chamado sistema de eixos corrotacional. É possível então reescrever as equações 310 e 312, ficando

$$\sigma^c = \eta^T \sigma \eta \quad (315)$$

$$\dot{\sigma}^c = \eta^T \overset{\nabla}{\sigma} \eta \quad (316)$$

onde  $\dot{\sigma}^c$  é chamada taxa corrotacional de Cauchy, que é objetiva.

### A.3 LEIS CONSTITUTIVAS EM GRANDES DEFORMAÇÕES

A lei constitutiva em forma de taxas para materiais hipoeelásticos sujeitos a pequenas deformações pode ser escrita,

$$\dot{\sigma} = C \dot{\varepsilon} \quad (317)$$

onde  $C$  é o tensor constitutivo. É possível estendê-la a problemas envolvendo grandes deformações, desde que se considerem medidas adequadas de tensão e deformação. Como medida de tensões, empregar-se-ão tensões de Cauchy, através do emprego da taxa

corrotacional de Cauchy, que é objetiva. O tensor taxa de deformação  $\mathbf{D}$  também é uma grandeza objetiva. É necessário apenas expressá-lo no mesmo sistema de referência que a taxa corrotacional de Cauchy, ou seja, o referencial corrotacional. Isso pode ser feito mediante uma transformação como abaixo

$$\mathbf{D}^c = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\eta} \quad (318)$$

O tensor constitutivo para um material isótropo será dado por

$$\mathbf{C}^c = \boldsymbol{\eta}^T (\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\eta}) \boldsymbol{\eta} \quad (319)$$

onde se está considerando que o tensor constitutivo depende apenas de  $\boldsymbol{\sigma}$

$$\mathbf{C}^c(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}^c) \quad (320)$$

A lei constitutiva expressa no sistema corrotacional pode ser escrita então como

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^c = \mathbf{C}^c \mathbf{D}^c \quad (321)$$

onde o superíndice  $c$  está associado ao referencial corrotacional.

Como a taxa de tensão calculada nos eixos iniciais (configuração de referência) é também uma grandeza corrotacional, é possível empregar uma equação do tipo

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \mathbf{D} \quad (322)$$

para obter as tensões. O processo de integração será diverso caso seja empregada como relação constitutiva a equação para  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$  ou para  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^c$ , mas para qualquer das leis é possível obter

as tensões de Cauchy, que é o objetivo final.

Diferentes taxas corrotacionais presentes na literatura podem ser obtidas escolhendo diferentes valores para  $\theta$  e  $\eta$ . Por exemplo, pode-se adotar o tensor anti-simétrico genérico  $\theta$  como sendo igual à velocidade angular  $\Omega$ , que é também um tensor anti-simétrico.

$$\Omega = \dot{R}R^T \quad (323)$$

com  $R$  proveniente da decomposição polar. Neste caso, a equação 309 fica

$$\dot{\eta} = \dot{R} = \Omega R \quad (324)$$

o que leva à taxa corrotacional de Green-Naghdi

$$\overset{\nabla^{GN}}{\sigma} = \dot{\sigma} - \Omega\sigma + \sigma\Omega \quad (325)$$

Outra alternativa é escolher  $\theta$  como sendo igual à taxa de rotação  $W$ . Assim, a equação 309 fica

$$\dot{\eta} = \dot{Q} = WQ \quad (326)$$

e a taxa corrotacional reproduzida é a taxa de Jaumann

$$\overset{\nabla^J}{\sigma} = \dot{\sigma} - W\sigma + \sigma W \quad (327)$$

A escolha mais conveniente para  $\theta$  é aquela que permite uma rotação tal que faz com que os eixos corrotacionais acompanhem a deformação de corpo, de sorte que um observador ligado a estes eixos não note rotações rígidas do corpo. De modo intuitivo, adota-se  $\eta = R$ ,

com  $\mathbf{R}$  proveniente da decomposição polar, pois todo o efeito de rotação da transformação  $\mathbf{F}$  está contido em  $\mathbf{R}$ . Realizando-se a operação a seguir

$$\mathbf{D}^c = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R} \quad (328)$$

e considerando as equações 266, 283 e 285 chega-se a

$$\mathbf{D}^c = \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} \quad (329)$$

Assim, um observador ligado aos eixos corrotacionais definidos por  $\mathbf{R}$  observa apenas a deformação da matéria. Considerando um procedimento incremental lagrangeano atualizado, onde a configuração atualizada está próxima à de referência (última configuração equilibrada conhecida), tem-se que

$$\dot{\mathbf{R}} \cong \mathbf{W} \quad (330)$$

o que permite afirmar que os resultados serão próximos, a despeito da forma adotada para  $\boldsymbol{\eta}$ , escolhida dentre as equações anteriores, equações 324 ou 326.

**APÊNDICE B – DECOMPOSIÇÃO DO TENSOR TAXA DE  
DEFORMAÇÃO**



Este apêndice contém detalhes da decomposição do tensor taxa de deformação quando se admite termoplasticidade e deslocamentos finitos. Maiores detalhes podem ser obtidos em Rozenwald (1996) e Ponthot (1990; 1995).

Quando se trabalha com termoplasticidade em pequenas deformações é usual decompor as deformações em três parcelas – elástica, plástica e térmica. Neste apêndice emprega-se negrito para representar vetores ou tensores.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p + \boldsymbol{\varepsilon}^{th} \quad (331)$$

Em grandes deformações tal procedimento não é admissível. Deve-se, isso sim, fazer a decomposição do gradiente de deformação, empregando uma decomposição multiplicativa (Wriggers *et al.*, 1992)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \mathbf{F}^{th} \quad (332)$$

onde ficam evidentes as parcelas elástica  $\mathbf{F}^e$ , plástica  $\mathbf{F}^p$  e térmica  $\mathbf{F}^{th}$ . Esta decomposição foi proposta inicialmente por Lee (1969, 1981), considerando apenas as parcelas elástica e plástica. Lee (1969) admite a existência de uma configuração intermediária, obtida por descarga elástica, sujeita apenas a deformações plásticas. Considera-se um ponto que na configuração atualizada possui coordenadas  $\mathbf{x}$  e um ponto vizinho com coordenadas  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ . Admite-se a possibilidade de aplicar uma descarga elástica nessa região do corpo, de forma que se elimine a deformação elástica, permanecendo apenas a parcela plástica. As novas posições dos pontos vizinhos passam a  $\mathbf{x}^p$  e  $\mathbf{x}^p + d\mathbf{x}^p$ . Pode-se estabelecer uma relação ligando  $d\mathbf{x}$  e  $d\mathbf{x}^p$ , dada por

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}^e d\mathbf{x}^p \quad (333)$$

Considerando a configuração inicial  $\mathbf{X}$  livre de tensões, que se relaciona com a configuração atualizada  $\mathbf{x}$  por

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (334)$$

é fácil ver que

$$d\mathbf{x}^p = (\mathbf{F}^e)^{-1} \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (335)$$

$$\mathbf{F}^p = (\mathbf{F}^e)^{-1} \mathbf{F} \quad (336)$$

e finalmente

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (337)$$

$$d\mathbf{x}^p = \mathbf{F}^p d\mathbf{X} \quad (338)$$

A decomposição anterior, empregada entre outros por Simo (1988a e 1988b), pode ser estendida ao caso anisotérmico (Wriggers *et al.*, 1992; Srikanth e Zabarar, 1999), desde que se entenda o conceito de descarga elástica como descarga reversível, onde se elimina a deformação reversível, ou seja, as deformações elástica e térmica, o que equivale a fazer com que as temperaturas retornem a seus valores iniciais.

Interessa-nos o efeito da decomposição anterior (equação 332) sobre os tensores taxa de deformação  $\mathbf{D}$  e taxa de rotação  $\mathbf{W}$ . Para se chegar a tal efeito, considera-se antes uma decomposição do tensor gradiente de deformação térmica  $\mathbf{F}^{th}$  em duas parcelas: uma a volume constante  $\bar{\mathbf{F}}^{th}$  que dá a mudança de forma, e outra puramente dilatacional  $J^{th}$ , dando a variação de volume.

$$\mathbf{F}^{th} = (J^{th})^{1/3} \bar{\mathbf{F}}^{th} \quad (339)$$

com

$$\bar{J}^{th} = \det(\bar{\mathbf{F}}^{th}) = 1 \quad (340)$$

Adotando-se a hipótese clássica (Simo e Miehe, 1992; Wriggers *et al.*, 1992) de a deformação térmica ocasionar unicamente mudança de volume, sem mudança de forma, resulta

$$\bar{\mathbf{F}}^{th} = \mathbf{I} \quad (341)$$

o que permite concluir que a expressão final do tensor gradiente de deformação térmica pode ser escrita

$$\mathbf{F}^{th} = (J^{th})^{1/3} \mathbf{I} \quad (342)$$

ficando a expressão do tensor gradiente de deformação

$$\mathbf{F} = (J^{th})^{1/3} \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (343)$$

Lembrando a definição do tensor gradiente de velocidade  $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \quad (344)$$

e sua decomposição em partes simétrica e anti-simétrica, que dá origem aos tensores taxa de deformação  $\mathbf{D}$  e tensor taxa de rotação  $\mathbf{W}$

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (345)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (346)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (347)$$

e considerando o valor de  $\mathbf{F}$  resulta

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{d[(J^{th})^{1/3}]}{dt} \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p + (J^{th})^{1/3} (\dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^p + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p) \quad (348)$$

e

$$\mathbf{F}^{-1} = (J^{th})^{-1/3} (\mathbf{F}^p)^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1} \quad (349)$$

ficando o tensor gradiente de velocidade  $\mathbf{L}$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}^{th} (\mathbf{F}^{th})^{-1} + \dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p)^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1} \quad (350)$$

Definindo

$$\mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1} \quad (351)$$

$$\mathbf{L}^p = \dot{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p)^{-1} \quad (352)$$

$$\mathbf{L}^{th} = \dot{\mathbf{F}}^{th} (\mathbf{F}^{th})^{-1} \quad (353)$$

o gradiente de velocidade pode ser escrito

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{F}^e \mathbf{L}^p (\mathbf{F}^e)^{-1} + \mathbf{L}^{th} \quad (354)$$

Fica claro, então, que o tensor gradiente de velocidade não pode se decompor aditivamente como uma soma de parcelas elástica, plástica e térmica, estando o termo plástico acoplado com a parte elástica do tensor gradiente de deformações. Se, no entanto, admite-se que a parcela elástica da deformação é suficientemente pequena de modo que

$$\mathbf{F}^e \cong \mathbf{I} \quad (355)$$

então

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p + \mathbf{L}^{th} \quad (356)$$

e assim, decompondo as parcelas do gradiente de velocidade em partes simétrica e anti-simétrica

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p + \mathbf{D}^{th} \quad (357)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^e + \mathbf{W}^p \quad (358)$$

onde a parcela anti-simétrica devido à temperatura se anula, visto a simetria de  $\mathbf{F}^{th}$ .

A teoria desenvolvida acima tomando por base a decomposição multiplicativa de Lee (1969, 1981) não é unânime (Miehe, 1994; Mandell, 1981). O principal defeito estaria relacionado à expressão que envolve as parcelas do gradiente de velocidade

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{F}^e \mathbf{L}^p (\mathbf{F}^e)^{-1} + \mathbf{L}^{th} \quad (359)$$

parcelas estas expressas em configurações diferentes: as parcelas elástica  $L^e$  e térmica  $L^{th}$  na configuração atualizada e a parcela plástica  $L^p$  na configuração intermediária. Os termos  $F^e$  e  $(F^e)^{-1}$  têm por objetivo exprimir a parcela plástica na configuração atualizada. Quando  $(F^e)^{-1}$  for próxima da matriz identidade, as configurações intermediária e atualizada são próximas, e se pode admitir a decomposição aditiva do gradiente de velocidade.

Para fugir dessa limitação, foram desenvolvidas outras formulações (Nemat-Nasser, 1979; Nemat-Nasser, 1982) para o caso isotérmico, sempre procurando recair em uma decomposição aditiva do tensor taxa de deformação, válida para qualquer magnitude de deformações elásticas. Tais formulações além de também possuem inconvenientes (Rozenwald, 1996), são mais difíceis de estender ao caso anisotérmico.

Ponthot (1995) propõe escolher como configuração de referência a configuração atualizada ao invés da configuração inicial. Dessa forma, a configuração intermediária, situada entre as configurações de referência e atualizada, acaba se confundindo com estas. Matematicamente resulta

$$F = F^e F^p F^{th} \quad (360)$$

com

$$F = F^e = F^p = F^{th} = I \quad (361)$$

permanecendo as derivadas temporais

$$\dot{F} = \dot{F}^e + \dot{F}^p + \dot{F}^{th} \quad (362)$$

de onde se conclui que

$$L = \dot{F}F^{-1} = \dot{F}^e + \dot{F}^p + \dot{F}^{th} = D + W \quad (363)$$

o que leva às decomposições exatas

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p + \mathbf{D}^{th} \quad (364)$$

com

$$\mathbf{D}^e = (\dot{\mathbf{F}}^e + \dot{\mathbf{F}}^{eT})/2 \quad (365)$$

$$\mathbf{D}^p = (\dot{\mathbf{F}}^p + \dot{\mathbf{F}}^{pT})/2 \quad (366)$$

$$\mathbf{D}^{th} = (\dot{\mathbf{F}}^{th} + \dot{\mathbf{F}}^{thT})/2 \quad (367)$$

e também

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^e + \mathbf{W}^p \quad (368)$$

com

$$\mathbf{W}^e = (\dot{\mathbf{F}}^e - \dot{\mathbf{F}}^{eT})/2 \quad (369)$$

$$\mathbf{W}^p = (\dot{\mathbf{F}}^p - \dot{\mathbf{F}}^{pT})/2 \quad (370)$$

$$\mathbf{W}^{th} = 0 \quad (371)$$

## **APÊNDICE C – ÁREAS SOB A CURVA NORMAL DE GAUSS**



Neste apêndice mostra-se como utilizar as tabelas que fornecem a área sob a curva de Gauss, entre duas linhas verticais correspondentes a determinado número de desvios-padrões.

Cada valor da tabela 1 indica a proporção da área total sob a curva normal contida no segmento delimitado por uma perpendicular levantada na média e uma perpendicular levantada à distância de  $z$  desvios-padrões.

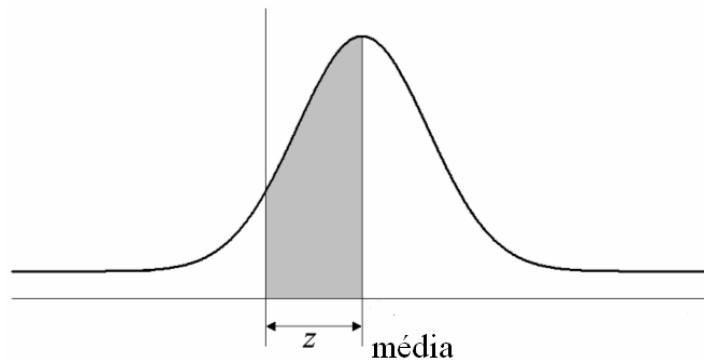


Figura 170: distribuição normal padronizada

Ilustrando, 43,57% da área sob uma curva normal de Gauss estão entre a ordenada máxima e um ponto 1,52 desvios-padrões atrás.

Tabela 1: áreas sob a cauda esquerda da distribuição normal padronizada

$z$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,5000	0,5000	0,5000
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Fonte: Stevenson, 1981, p. 461.

**APÊNDICE D – COEFICIENTES EMPREGADOS NA INTEGRAÇÃO  
DE TENSÕES**

Neste apêndice apresentam-se os coeficientes empregados pelo algoritmo de Zhang e Niemi (1995a) na integração de tensões e variáveis internas. As diferenças de sinal em relação à referência devem-se à definição empregada para a pressão hidrostática.

$$A_{11} = -P - \alpha \Delta E_p \left[ \frac{\partial P}{\partial p_{n+\alpha}} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial \Delta E_p} + \frac{\partial P}{\partial \mathbf{H}_{n+\alpha}} : \frac{\partial \mathbf{H}_{n+1}}{\partial \Delta E_p} \right] + \alpha \Delta \varepsilon_q \left[ \frac{\partial Q}{\partial p_{n+\alpha}} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial \Delta E_p} + \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{H}_{n+\alpha}} : \frac{\partial \mathbf{H}_{n+1}}{\partial \Delta E_p} \right] \quad (372)$$

$$A_{12} = Q + \alpha \Delta E_p \left[ \frac{\partial P}{\partial q_{n+\alpha}} \frac{3}{2} \frac{(s_{ij})_{n+\alpha}}{q_{n+\alpha}} : \frac{\partial (s_{ij})_{n+1}}{\partial \Delta E_q} + \frac{\partial P}{\partial \mathbf{H}_{n+\alpha}} : \frac{\partial \mathbf{H}_{n+1}}{\partial \Delta E_q} \right] +$$

$$- \alpha \Delta \varepsilon_q \left[ \frac{\partial Q}{\partial q_{n+\alpha}} \frac{3}{2} \frac{(s_{ij})_{n+\alpha}}{q_{n+\alpha}} : \frac{\partial (s_{ij})_{n+1}}{\partial \Delta E_q} + \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{H}_{n+\alpha}} : \frac{\partial \mathbf{H}_{n+1}}{\partial E_q} \right] \quad (373)$$

$$A_{21} = \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial p_{n+1}} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial \Delta E_p} + \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \mathbf{H}_{n+1}} : \frac{\partial \mathbf{H}_{n+1}}{\partial \Delta E_p} \quad (374)$$

$$A_{22} = \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial q_{n+1}} \frac{\partial q_{n+1}}{\partial \Delta E_q} + \frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial \mathbf{H}_{n+1}} : \frac{\partial \mathbf{H}_{n+1}}{\partial \Delta E_q} \quad (375)$$

$$b_1 = P \Delta E_p - Q \Delta E_q \quad (376)$$

$$b_2 = -\Phi_{n+1} \quad (377)$$

onde

$$\frac{\partial(H_i)_{n+1}}{\partial\Delta E_p} = w_{ij} \left( \frac{\partial(h_j)_{n+\alpha}}{\partial\Delta E_p} + \frac{\partial(h_j)_{n+\alpha}}{\partial p_{n+\alpha}} \frac{\partial p_{n+\alpha}}{\partial\Delta E_p} \right) \quad (378)$$

$$\frac{\partial(H_i)_{n+1}}{\partial\Delta E_q} = w_{ij} \left( \frac{\partial(h_j)_{n+\alpha}}{\partial\Delta E_q} + \frac{\partial(h_j)_{n+\alpha}}{\partial q_{n+\alpha}} \frac{\partial q_{n+\alpha}}{\partial\Delta E_q} \right) \quad (379)$$

e sendo  $w_{ij}$  a inversa de

$$\delta_{ij} - \alpha \frac{\partial(h_i)_{n+\alpha}}{\partial(H_j)_{n+\alpha}} \quad (380)$$

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)