

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**UM MODELO DE CONFIABILIDADE E OTIMIZAÇÃO  
APLICADO ÀS ESTRUTURAS DE BARRAS DE CONCRETO  
ARMADO**

***Autor: Eng<sup>o</sup> Caio Gorla Nogueira***

*Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.*

***Orientador: Prof. Tit. Wilson Sérgio Venturini***

*São Carlos, Junho de 2005*

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

*Ao meu avô João Roberto Lemos Nogueira e  
minha bisavó Conceição de Gouveia*

## **Agradecimentos**

**Ao Senhor Jesus Cristo por me conceder a graça da salvação e pelas forças e ensinamentos ao longo da vida e, principalmente, no decorrer deste trabalho;**

**Ao meu orientador, professor Wilson Sérgio Venturini, que sempre esteve presente, foi paciente e jamais negou atenção para a realização do trabalho;**

**Aos meus pais que sempre me ensinaram o caminho a seguir, me acolheram e mostraram o significado do amor e compaixão. Também aos meus irmãos que amo e sei que me amam;**

**A todos os meus familiares, agradeço seu apoio, incentivo, confiança e carinho dispensados em toda a vida;**

**Agradeço a minha querida namorada Camila, pelo amor, convivência, incentivo e grande paciência nos momentos mais difíceis;**

**Aos meus amigos da Comunidade Leão de Judá, pelas orações e preocupações;**

**Aos amigos e companheiros de sala no departamento, César Ataíde, Fernando Fontes e George Colares, porque sei que a amizade será para sempre. Aos demais colegas do departamento pela agradável convivência e companheirismo;**

**Ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, na pessoa dos professores e funcionários que me acolheram em São Carlos e contribuíram para a minha formação;**

**À CAPES, pelo auxílio financeiro nos primeiros meses de mestrado;**

**À FAPESP, pela bolsa concedida durante o mestrado.**

# SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	vii
LISTA DE TABELAS.....	ix
RESUMO.....	x
ABSTRACT.....	xi
<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>12</b>
1.1    GENERALIDADES.....	12
1.2    OBJETIVOS.....	14
1.3    JUSTIFICATIVAS.....	15
1.4    METODOLOGIA.....	17
1.5    ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO.....	18
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>20</b>
2.1    GENERALIDADES.....	20
2.2    SOBRE MODELOS MECÂNICOS E DE MATERIAIS.....	20
2.3    SOBRE CONFIABILIDADE E OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....	24
2.4    COMENTÁRIOS SOBRE A REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	37
<b>3. O MODELO MECÂNICO.....</b>	<b>40</b>
3.1    ASPECTOS GERAIS.....	40
3.2    FORMULAÇÃO PARA O CONCRETO.....	41
3.2.1    Generalidades.....	41
3.2.2    Modelo Constitutivo de Dano proposto por Mazars.....	44
3.2.3    Adaptação do Modelo de Dano para o Problema Probabilístico.....	51
3.3    FORMULAÇÃO PARA O AÇO.....	58
3.3.1    Generalidades.....	58
3.3.2    Modelo Elastoplástico com Encruamento Misto.....	60
3.4    NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA APLICADA A PÓRTICOS PLANOS.....	62
3.4.1    Generalidades.....	62
3.4.2    Formulação Não-Linear Geométrica com Descrição Lagrangeana Atualizada.....	63
3.5    ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS.....	69
3.5.1    Generalidades.....	69
3.5.2    Combinação da NLF com a NLG.....	71
3.5.3    Integração Numérica.....	73
3.5.4    Estratégia de Solução do Problema Não-Linear.....	75
3.6    BUSCA DA CARGA ÚLTIMA DA ESTRUTURA.....	76

3.6.1	<i>Função de Estado Limite</i> .....	76
3.6.2	<i>Algoritmo Proposto</i> .....	78
<b>4.</b>	<b>CONFIABILIDADE ESTRUTURAL.....</b>	<b>80</b>
4.1	GENERALIDADES.....	80
4.2	DISCUSSÃO SOBRE A SEGURANÇA ESTRUTURAL.....	82
4.3	CARACTERÍSTICAS ESTATÍSTICAS DAS VARIÁVEIS DE PROJETO.....	85
4.3.1	<i>Distribuições de Probabilidades</i> .....	86
4.3.2	<i>Variáveis Aleatórias Independentes</i> .....	90
4.3.3	<i>Variáveis Aleatórias Correlacionadas</i> .....	91
4.4	ESTADOS LIMITES.....	93
4.5	PROBABILIDADE DE FALHA.....	95
4.6	MÉTODOS DE SIMULAÇÃO.....	96
4.6.1	<i>Generalidades</i> .....	96
4.6.2	<i>O Método de Monte Carlo</i> .....	97
4.7	O MÉTODO DE SUPERFÍCIE DE RESPOSTA (RSM).....	99
4.7.1	<i>Generalidades</i> .....	99
4.7.2	<i>Planos de Experiência (PE)</i> .....	101
4.7.3	<i>Reestruturação dos Planos de Experiência</i> .....	103
4.7.4	<i>Espaço de Trabalho</i> .....	105
4.7.5	<i>Determinação da Superfície de Resposta Aproximada</i> .....	107
4.7.6	<i>Cálculo do Índice de Confiabilidade</i> .....	110
4.7.7	<i>Cálculo da Probabilidade de Falha</i> .....	113
4.8	CONFIABILIDADE DE SISTEMAS ESTRUTURAIS.....	115
4.8.1	<i>Generalidades</i> .....	115
4.8.2	<i>Sistemas em Série</i> .....	117
4.8.3	<i>Sistemas em Paralelo</i> .....	118
<b>5.</b>	<b>OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL.....</b>	<b>120</b>
5.1	GENERALIDADES.....	120
5.2	FUNDAMENTAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA.....	122
5.2.1	<i>Formulação de um Problema de Otimização</i> .....	122
5.2.2	<i>Modelo Clássico de RBDO</i> .....	124
5.3	O MODELO DESENVOLVIDO.....	126
5.3.1	<i>Considerações Iniciais</i> .....	126
5.3.2	<i>Formulação do Problema de Otimização Determinística</i> .....	127
5.3.3	<i>Formulação do Problema acoplando a Confiabilidade</i> .....	130
<b>6.</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS.....</b>	<b>135</b>
6.1	VIGA ISOSTÁTICA.....	135
6.2	VIGA HIPERESTÁTICA.....	142

6.3	PÓRTICO SIMPLES .....	149
<b>7.</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>154</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>158</b>

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 3.1 – DIAGRAMAS DE TENSÃO REFERENTES AOS ESTÁDIOS DO CONCRETO.....	42
FIGURA 3.2 – FENÔMENO DO “TENSION STIFFENING” NO CONCRETO ARMADO .....	43
FIGURA 3.3 – DIAGRAMAS MOMENTO-CURVATURA PROPOSTOS PELA NBR 6118 E CEB-158.....	44
FIGURA 3.4 – I: COMPORTAMENTO EXPERIMENTAL DO CONCRETO, II: MODELO DE DANO DE MAZARS .....	46
FIGURA 3.5 – PANORAMA DE FISSURAÇÃO NO CONCRETO À TRAÇÃO E À COMPRESSÃO RESPECTIVAMENTE.....	48
FIGURA 3.6 – DIAGRAMAS TEÓRICOS DE TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O CONCRETO.....	50
FIGURA 3.7 – RELAÇÃO CONSTITUTIVA PARA O CONCRETO COMPRIMIDO SEGUNDO A NBR 6118:2003.....	54
FIGURA 3.8 – RELAÇÃO CONSTITUTIVA DO MODELO DE DANO DE MAZARS NA COMPRESSÃO PARA $N=100$ .....	55
FIGURA 3.9 – CURVA ERRO RELATIVO X RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO DO CONCRETO .....	56
FIGURA 3.10 – EVOLUÇÃO DO PARÂMETRO $A_C$ .....	56
FIGURA 3.11 – EVOLUÇÃO DO PARÂMETRO $B_C$ .....	57
FIGURA 3.12 – EVOLUÇÃO DA VARIÁVEL DE DANO $D_C$ .....	57
FIGURA 3.13 – INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS $A_C$ E $B_C$ .....	58
FIGURA 3.14 – LEIS CONSTITUTIVAS DOS MODELOS ELASTOPLÁSTICOS ISÓTROPO E CINEMÁTICO .....	60
FIGURA 3.15 – CONFIGURAÇÃO DESLOCADA DE UM ELEMENTO DE BARRA .....	64
FIGURA 3.16 – ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO PLANO NOS SISTEMAS GLOBAL E LOCAL .....	67
FIGURA 3.17 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES E DISCRETIZAÇÃO DA SEÇÃO –(A) CONCRETO E (B) AÇO .....	74
FIGURA 3.18 – ESQUEMA DE SOLUÇÃO PARA 1 INCREMENTO DE CARGA .....	76
FIGURA 3.19 – ALGORITMO PARA O CÁLCULO DA CARGA CRÍTICA DE UM PÓRTICO .....	79
FIGURA 4.1 – DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE DE UMA VARIÁVEL NORMAL .....	89
FIGURA 4.2 – FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE UMA VARIÁVEL LOG-NORMAL .....	90
FIGURA 4.3 – CASO DE 2 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS NÃO-CORRELACIONADAS .....	91
FIGURA 4.4 – REGIÕES DE DESEMPENHO NO ESPAÇO FÍSICO .....	95
FIGURA 4.5 – SORTEIO DE PONTOS NA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO .....	99
FIGURA 4.6 – PLANOS DE EXPERIÊNCIA ADOTADOS .....	102
FIGURA 4.7 – RSM SEM PONTO DE ADAPTAÇÃO .....	103
FIGURA 4.8 – REDIVISÃO DO PE EM TORNO DO PONTO DE PROJETO.....	104
FIGURA 4.9 – TRANSFORMAÇÃO DAS VARIÁVEIS DO ESPAÇO FÍSICO PARA O ESPAÇO NORMAL PADRÃO .....	105
FIGURA 4.10 – CONVERGÊNCIA PARA O PONTO DE PROJETO $P^*$ .....	112
FIGURA 4.11 – INTERPRETAÇÃO DE $P_F$ PARA O CASO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA .....	114
FIGURA 4.12 – APROXIMAÇÃO FORM A PARTIR DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE.....	114
FIGURA 4.13 – REPRESENTAÇÃO DE UM SISTEMA EM SÉRIE .....	117
FIGURA 4.14 – REPRESENTAÇÃO DE UM SISTEMA EM PARALELO .....	118
FIGURA 5.1 – SEÇÃO TRANSVERSAL SUBMETIDA A MOMENTO FLETOR .....	128
FIGURA 6.1 – ESQUEMA DA VIGA ISOSTÁTICA DO EXEMPLO .....	135
FIGURA 6.2 – SITUAÇÃO GERAL DA ESTRUTURA .....	136
FIGURA 6.3 – DISCRETIZAÇÃO DA VIGA DO EXEMPLO.....	137

FIGURA 6.4 – ISOCURVAS DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO E PONTO ÓTIMO.....	140
FIGURA 6.5 – RESPOSTA MECÂNICA DA ESTRUTURA DIMENSIONADA .....	141
FIGURA 6.6 – EVOLUÇÃO DAS DEFORMAÇÕES NOS MATERIAIS .....	141
FIGURA 6.7 – DISCRETIZAÇÃO E DETALHAMENTO DA VIGA DO EXEMPLO .....	143
FIGURA 6.8 – CONVERGÊNCIA DA FUNÇÃO-OBJETIVO .....	146
FIGURA 6.9 – CARGA ÚLTIMA DA ESTRUTURA AO LONGO DO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO.....	146
FIGURA 6.10 – DEFORMAÇÕES NOS MATERIAIS NAS SEÇÕES DO ENGASTE E DO VÃO DA ESTRUTURA .....	147
FIGURA 6.11 – REDISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS NA ITERAÇÃO 1 .....	148
FIGURA 6.12 – REDISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS NA ITERAÇÃO 4.....	149
FIGURA 6.13 – ESQUEMA DOS PÓRTICOS E DISCRETIZAÇÃO DA MALHA .....	150
FIGURA 6.14 – TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO DO TOPO DA ESTRUTURA.....	151

## LISTA DE TABELAS

TABELA 6.1 – CARACTERÍSTICAS ESTATÍSTICAS DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS .....	137
TABELA 6.2 – PARÂMETROS USADOS NO MODELO DE OTIMIZAÇÃO .....	138
TABELA 6.3 – INFORMAÇÕES SOBRE O PONTO ÓTIMO .....	138
TABELA 6.4 – CONFIGURAÇÕES DA ESTRUTURA E ÍNDICES DE CONFIABILIDADE .....	139
TABELA 6.5 – SOLUÇÃO FINAL DO PROBLEMA .....	139
TABELA 6.6 – DIMENSÕES ÓTIMAS DA VIGA HIPERESTÁTICA NA ITERAÇÃO 1 .....	144
TABELA 6.7 – DIMENSÕES ÓTIMAS DA VIGA HIPERESTÁTICA E RESPECTIVOS ÍNDICES DE CONFIABILIDADE .....	144
TABELA 6.8 – PONTO DE PROJETO E SENSIBILIDADES DAS SOLUÇÕES ÓTIMAS .....	145
TABELA 6.9 – DESLOCAMENTOS DO NÓ 5 DA ESTRUTURA NA ITERAÇÃO 1 E 4 .....	148
TABELA 6.10 – RESPOSTA ESTRUTURAL DOS PÓRTICOS NA SITUAÇÃO ÚLTIMA.....	151
TABELA 6.11 – RESULTADOS DA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE PARA O PÓRTICO A.....	152
TABELA 6.12 – RESULTADOS DA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE PARA O PÓRTICO B.....	152
TABELA 6.13 – RESULTADOS DA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE PARA O PÓRTICO C.....	152
TABELA 6.14 – PROBABILIDADES DE FALHA .....	153

## RESUMO

NOGUEIRA, C.G. (2005). *Um modelo de confiabilidade e otimização aplicado às estruturas de barras de concreto armado*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

Neste trabalho, é apresentado um modelo de otimização acoplado à confiabilidade para a análise de estruturas de barras de concreto armado, de modo que a confiabilidade é adicionada ao processo de otimização como uma restrição. O modelo mecânico permite a consideração da não-linearidade física para o concreto e para o aço, além de levar em conta os efeitos não-lineares geométricos. Esse modelo é utilizado para gerar as respostas mecânicas da estrutura, traduzidas em forma de cargas últimas para os estados limites. Os cenários de falha, na análise probabilística, são descritos pelo esmagamento do concreto e deformação excessiva da armadura para o estado limite último. O estado limite de utilização é verificado para o caso de deslocamentos excessivos dos pontos da estrutura. A função de estado limite é construída com o emprego do Método das Superfícies de Respostas para a determinação do índice de confiabilidade e probabilidade de falha considerando somente o modo mais provável ou primeiro modo de falha. Os processos de otimização e confiabilidade são acoplados de maneira independente gerando um sistema de equações aproximadas resolvido analiticamente. A metodologia de otimização empregada é a minimização da função de custo da estrutura. O modelo acoplado de otimização e confiabilidade é empregado para análise de vigas de concreto armado. As técnicas desenvolvidas, no âmbito da modelagem de estruturas e confiabilidade, também permitem a análise mecânico-probabilística de pórticos planos de concreto armado.

**Palavras-Chave:** Estruturas de Barras de Concreto Armado, Confiabilidade Estrutural, Otimização Estrutural, Elementos Finitos, Análise Não-Linear, Superfícies de Resposta.

## ABSTRACT

NOGUEIRA, C.G. (2005). *A reliability based optimization model for reinforced concrete structures*. M.Sc. Dissertation – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

In this work, a reliability based optimization model is proposed for the analysis of reinforced concrete structures, in which the reliability index is introduced as a constraint. The mechanical model allows to consider the physical non-linearity of the concrete and steel materials, as well as the geometrical non-linear effects. The mechanical model is used to find the structure limit loads. The failure scenarios for the probabilistic analysis are characterized by the concrete ultimate strains in the compressed region of the section and the steel ultimate tensile strains in the reinforcement position. The serviceability limit state is verified for the excessive displacements for the structure bars. The limit state function is build by using the Response Surface Method, computing the reliability index and the failure probability only considering the first failure mode. The optimization and reliability processes are independents built leading two different system of equations that are coupled together to find the final solution. The material cost of the structure was adopted as the objective function to be minimized for the optimization process. The proposed coupled optimization-reliability process is employed to analyse reinforced concrete beams. The developed procedure in the context of reliability methods and reinforced concrete structures analysis can also be applied for reliability analysis of reinforced concrete frames.

**Keywords:** Reinforced Concrete Bars Structures, Structural Reliability, Structural Optimization, Finite Element Method, Non-Linear Analysis, Response Surfaces.

# **1. Introdução**

## **1.1 Generalidades**

Em um projeto estrutural, assim como em qualquer empreendimento de engenharia, procura-se a solução mais econômica e segura possível. Isto significa que a estrutura deve apresentar-se resistente, estável, duradoura e com o menor custo.

Em termos matemáticos, a estrutura deve, durante toda sua vida útil, possuir recursos (resistências) superiores às demandas (ações), seja no âmbito da capacidade resistente dos materiais, bem como no seu aspecto global ou perda de equilíbrio. Com este intuito, a NBR 6118:2003 *Projeto de Estruturas de Concreto* e a NBR 8681:2003 *Ações e Segurança nas Estruturas*, além de diversos códigos internacionais, definem uma série de restrições que se traduzem em critérios de segurança adotados para o projeto de estruturas. São os chamados Estados Limites. De acordo com essa abordagem, estados limites são os estágios a partir dos quais a estrutura apresenta desempenho inadequado às finalidades para as quais foi projetada. Assim, as estruturas são projetadas com o uso de coeficientes parciais de segurança que tem como objetivo suprir todas as incertezas possíveis inerentes às variáveis de projeto. Estes coeficientes parciais são aplicados sobre as resistências dos elementos e ações que atuam na estrutura de modo a garantir certa folga de segurança quanto aos estados limites últimos e colapso estrutural, além de verificar também estados limites de utilização que representam as situações em serviço.

Entretanto, a metodologia atual baseada em coeficientes parciais de segurança não permite o conhecimento adequado dos níveis de segurança de um projeto ou de uma estrutura em serviço. Tal fato é de extrema importância, uma vez que a crescente evolução dos materiais estruturais faz com que as estruturas trabalhem cada vez mais próximas de seus limites. Aliado a esse quadro, não existe ainda normas que abordam o projeto e/ou verificação estrutural em termos totalmente probabilísticos, impossibilitando o conhecimento das

probabilidades de falha das estruturas. Na tentativa de solucionar esses inconvenientes, a Teoria da Confiabilidade Estrutural é empregada com o objetivo de diminuir as incertezas da avaliação da segurança estrutural. As variáveis de projeto são consideradas como aleatórias, com modelagem de suas incertezas por meio de distribuições de probabilidade adequadas.

No âmbito da verificação da segurança de uma estrutura, MOHAMED (1996) define a confiabilidade estrutural como sendo a probabilidade de sobrevivência de um componente ou sistema estrutural, desde que utilizado de acordo com as especificações do projeto. Também pode ser entendida como a transformação da experiência adquirida, durante o desenvolvimento da humanidade, em determinados modelos matemáticos. JCSS (1996) pondera que, em termos teóricos, a confiabilidade requerida corresponde a uma probabilidade máxima de ruína aceita, relacionada a um estado limite particular (fronteira entre o domínio seguro e de falha) ou colapso global da estrutura para um período de tempo específico.

Dentro desse contexto, tanto o modelo confiabilístico quanto o modelo mecânico adotado para representar a estrutura assumem caráter fundamental. Segundo SOARES (2001), usualmente há dois aspectos principais a se considerar em um modelo de projeto adequado para ser aplicado às estruturas de engenharia. O primeiro aspecto consiste na possibilidade do modelo em poder quantificar a confiabilidade das estruturas nos estados limites últimos e de utilização, garantindo assim uma probabilidade de falha pré-definida. O segundo aspecto importante é com relação ao modelo mecânico, onde as condições de equilíbrio e de compatibilidade geométrica devem ser satisfeitas junto com os modelos adotados para descrever o comportamento dos materiais. O modelo mecânico deve ser escolhido de tal forma que represente o mais fielmente possível o comportamento atual da estrutura. Por outro lado, o modelo de confiabilidade deve ser escolhido para estimar precisamente as probabilidades de falha, levando-se em consideração o aspecto computacional, pois este pode restringir a aplicabilidade de tais modelos.

A confiabilidade estrutural constitui-se, portanto, em uma ferramenta valiosa para a análise da segurança das estruturas e alternativas de projeto, fornecendo uma medida mais precisa do grau de segurança de uma determinada obra, visto que se baseia na determinação de probabilidades de falha de eventos específicos traduzidos por estados limites. Também é possível, mediante o emprego dos conceitos de confiabilidade, determinar estados limites mais críticos para uma determinada estrutura em função de seus elementos constituintes, propriedades de resistência e condições de carregamento.

Com a utilização da confiabilidade estrutural e seus princípios estatísticos pode-se atingir a primeira meta de um projeto de engenharia: estruturas mais confiáveis em função de um melhor conhecimento do real nível de segurança. Combinado à segurança ou a um melhor conhecimento da segurança de uma estrutura, cabe agora, incorporar conceitos que permitam o projeto mais econômico respeitando a segurança especificada. É neste contexto que a Otimização Estrutural assume papel fundamental na concepção de um projeto de engenharia: o projeto ótimo. Portanto, na prática, procura-se a solução otimizada que apresente um índice de confiabilidade que esteja de acordo com o recomendável pelas normas. Vale ressaltar que o projeto de uma estrutura otimizada com índice de confiabilidade pré-estabelecido é a própria definição do chamado *nível de segurança 4*.

O caráter econômico está diretamente associado a uma adequada análise dos materiais e das tecnologias construtivas disponíveis para o uso, comparando-se custos de matéria-prima, transporte, consumo de materiais, equipamentos e distribuição de mão-de-obra. A otimização de todos esses insumos e atividades garante a economia do projeto.

Na engenharia estrutural, a estratégia geralmente adotada é a minimização de uma função custo da obra ou equipamento. Para as estruturas de concreto armado, pode-se minimizar uma função que descreve o custo dos elementos estruturais, isto é, volume de concreto, peso de aço e área de fôrmas de madeira. A essa função-objetivo aplicam-se restrições de caráter mecânico, geométrico e em termos do índice de confiabilidade para respeitar o grau de segurança requerido.

A concepção de uma estrutura, buscando o projeto ótimo, consiste, portanto, em um acoplamento de modelos mecânicos e estatísticos com um modelo apropriado de otimização.

## 1.2 Objetivos

O objetivo principal do trabalho é fazer um estudo sobre procedimentos para a obtenção de estruturas de concreto armado otimizadas a índices de confiabilidade pré-estabelecidos. Dessa forma, o processo de otimização é enriquecido com uma nova restrição que traduz a confiabilidade requerida.

Entretanto, outros objetivos intermediários foram estabelecidos visando contribuir com a modelagem mecânico-probabilística de estruturas de concreto armado. A primeira etapa do trabalho consistiu no estudo e implementação de um modelo mecânico não-linear para as estruturas lineares de concreto armado, isto é, para pilares, vigas e pórticos planos. No

próprio modelo mecânico em elementos finitos, foi utilizada a Mecânica do Dano para representar o comportamento não-linear do concreto, no lugar de relações constitutivas de normas, o que significou um avanço do modelo material. Além disso, o emprego de um modelo de dano para o concreto necessitou de uma adaptação ao caso probabilístico, visto que os parâmetros numéricos que descrevem o modelo de dano não são calibrados para quaisquer valores de resistência do concreto. Este fato fez com que uma técnica de calibração do modelo fosse implementada para a obtenção dos valores dos parâmetros de dano, à medida que a resistência do concreto variava segundo uma associação estatística. Com a possibilidade de integração das tensões nos elementos, foi adotado o modelo mecânico baseado na relação tensão-deformação ao invés da relação momento-curvatura. Com o modelo mecânico não-linear, implementou-se a determinação de cargas últimas para estruturas de barras. A partir daí, teve início o estudo da confiabilidade propriamente dita. Primeiramente, foi feito um estudo sobre as simulações de Monte Carlo, e na seqüência, os métodos de Superfícies de Resposta para a obtenção do índice de confiabilidade. Foi realizada uma melhoria nos planos de experiência, para que fosse possível continuar a montagem do plano após a convergência para o ponto de projeto. Significa que, após a convergência do processo de obtenção do ponto de projeto, torna-se possível reestruturar o plano de experiência controlando o erro desejado no processo. Depois de tudo isso, a etapa final foi iniciada com o estudo dos processos de otimização. Implementou-se, em uma primeira fase, somente a otimização mecânica. Após isso, o acoplamento entre confiabilidade e otimização foi realizado a partir da incorporação de uma superfície de confiabilidade, para o estado limite último, no problema inicial de otimização. O estado limite de serviço em deslocamentos excessivos foi verificado posteriormente através de um modelo simplificado.

### **1.3 Justificativas**

A modelagem de uma estrutura, atualmente, ainda é feita no campo determinístico, com parâmetros de projeto definidos também neste campo. Os modelos mecânicos e de materiais envolvidos nesta modelagem são bem elaborados e juntos conseguem representar com precisão o comportamento global de uma estrutura. Portanto, para projetos usuais, pode-se dizer que as ferramentas atuais têm grande precisão refletindo assim a qualidade do projeto. É claro que muito ainda pode ser feito para melhorar a modelagem dos materiais e das

estruturas como um todo. Porém, já é bastante aceitável, na prática, o que se tem desenvolvido hoje.

Entretanto, o uso de coeficientes parciais de segurança não permite o conhecimento das reais chances de ocorrência de uma falha. Neste contexto, a falha é definida como qualquer resultado indesejável que ocorra na estrutura ou parte dela. Isto ocorre porque as incertezas inerentes às variáveis de projeto são representadas de maneira bastante superficial e pouco consistente com a realidade. Portanto, os resultados dessa abordagem são pouco representativos, quando comparados com o grande desenvolvimento dos métodos numéricos utilizados na resolução das equações que descrevem o comportamento mecânico das estruturas. Fica evidente que uma abordagem mais consistente, do ponto de vista científico, é necessária para uma melhor quantificação da segurança das estruturas. Neste ponto, a teoria das probabilidades e a confiabilidade surgem para resolver o problema, pois permitem considerar de uma maneira relativamente simples, o caráter aleatório das variáveis envolvidas no projeto. Isto é perfeitamente possível, uma vez que as distribuições de probabilidades já se encontram bem definidas nos dias de hoje.

Além do que foi colocado, ressalta-se que os modelos mecânico-probabilísticos utilizados na pesquisa representam mais uma etapa na tentativa de precisar probabilidades de ocorrência de estados limites nas estruturas. Com isso, o modelo poderá ser estendido para outros problemas e com novas concepções de estados limites. Convém salientar que, este trabalho representa a continuidade de um esforço que tem sido empregado pelo grupo de confiabilidade do Departamento de Estruturas da EESC-USP na tentativa de obter modelos mais precisos e realistas para as estruturas de edifícios de concreto armado. Os resultados nessa direção têm apresentado sucesso, justificando também a presente proposta.

Além disso, ainda abordam-se modelos de otimização. Estes somente podem ser admitidos na elaboração de um projeto, se a segurança estiver adequadamente tratada. É importante conhecer o que ocorre de fato com as probabilidades de falha quando se submete uma estrutura ou alguns de seus componentes a processos de otimização. Assim, uma abordagem probabilística do problema da segurança estrutural combinada com processos de otimização é, sem sombra de dúvidas, um grande avanço para a engenharia, pois refletem a busca do tão almejado dueto: mínimo custo e máxima segurança.

## 1.4 Metodologia

Para o desenvolvimento do tema, é necessário viabilizar o acoplamento de um modelo mecânico, suficientemente preciso, com um modelo probabilístico que seja capaz de levar em conta a aleatoriedade das variáveis de projeto para avaliar a confiabilidade das estruturas de barras de concreto armado em questão. Para tanto, o modelo mecânico utilizado/implementado baseia-se no Método dos Elementos Finitos para elementos lineares (vigas e pórticos) que leva em conta o efeito da deformação por cisalhamento (Teoria de Timoshenko). A análise das estruturas se processa em caráter não-linear com emprego do modelo de dano de Mazars (1984) para o concreto com o intuito de contemplar a perda de rigidez das barras e teoria da plasticidade com critério elastoplástico com encruamento para o aço das armaduras. Também são levados em conta os efeitos de segunda ordem, no caso de pórticos, por meio da não-linearidade geométrica descrita pela formulação lagrangeana atualizada.

A determinação das tensões resultantes no concreto ao longo da seção transversal é feita pelos métodos de integração numérica de Gauss e Gauss-Lobatto. Nas armaduras, o esforço resultante é calculado assumindo-se a hipótese de perfeita aderência entre o concreto adjacente e as barras de aço. A estratégia de Newton-Raphson é utilizada para resolver o problema não-linear. O processo é realizado em um número de passos finitos, ou seja, um procedimento incremental-iterativo no qual conhecidos os carregamentos e os deslocamentos num determinado instante de tempo, obtém-se as variáveis internas dos modelos elastoplástico e de dano. A matriz de rigidez da estrutura é atualizada a cada iteração do processo incremental com armazenamento das variáveis internas dos modelos ao final de cada passo convergido.

O modelo probabilístico adotado para estimar os índices de confiabilidade da estrutura é o Método de Superfícies de Respostas (RSM) segundo critérios de planos de experiência, que utiliza o conjunto de respostas estruturais obtidos a partir do modelo mecânico para representar a superfície de falha da estrutura. A probabilidade de falha é estimada pelo FORM (*First Order Reliability Method*).

A aleatoriedade das variáveis é levada em consideração a partir de funções de distribuição de probabilidades log-normal e normal.

A otimização é incluída na análise com a minimização da função custo da estrutura, satisfazendo, em uma primeira fase, as restrições mecânicas e, posteriormente, a restrição de

confiabilidade. Desse modo, a otimização e a confiabilidade funcionam como dois processos independentes.

O modelo mecânico desenvolvido permite a análise das estruturas em estado limite último referente à ruptura dos materiais, ou seja, esmagamento do concreto e deformação excessiva do aço, e estado limite de utilização para o caso de deslocamentos excessivos. Assim, é possível determinar cargas últimas para as estruturas adotadas em função desses estados limites. Com os resultados gerados na análise mecânica, os modelos de confiabilidade e otimização são verificados.

Todas as implementações necessárias para a análise mecânico-probabilística das estruturas de concreto armado são realizadas em linguagem computacional de compilação FORTRAN Power Station 6.0.

## **1.5 Organização da Dissertação**

O trabalho engloba conceitos de Mecânica das Estruturas, Confiabilidade e Otimização Estrutural.

A dissertação está dividida em sete capítulos, sendo que três desses capítulos discorrem, cada um, sobre os três temas abordados no trabalho.

O segundo capítulo traz uma revisão bibliográfica sobre os temas referidos. Na primeira parte, são apresentados trabalhos que discutem os diversos modelos mecânicos e de materiais existentes no meio científico. Em seguida, os trabalhos sobre confiabilidade e otimização estrutural são apresentados. A parte final do capítulo destina-se a alguns comentários sobre os trabalhos e um panorama geral sobre o futuro da análise estrutural através de modelos mecânico-probabilísticos.

No terceiro capítulo encontra-se toda a descrição do modelo mecânico utilizado, bem como aspectos teóricos sobre a modelagem do concreto armado e das estruturas sensíveis aos efeitos de segunda ordem. Toda a técnica numérica de solução dos problemas não-lineares e o algoritmo implementado para a determinação da carga última de estruturas de barras de concreto armado também estão descritos nesse capítulo.

O quarto capítulo aborda a confiabilidade estrutural de uma maneira geral. É feita uma breve discussão sobre a segurança estrutural e os conceitos utilizados para determinação dos índices de confiabilidade e probabilidades de falha. O Método das Superfícies de

Respostas é enfatizado, juntamente com a abordagem de reestruturação dos planos de experiência.

A otimização estrutural é descrita no capítulo cinco. São explicitados os conceitos gerais e a formulação do problema para a minimização de uma estrutura de concreto armado. O modelo de acoplamento entre a confiabilidade e otimização é descrito nesse capítulo.

O sexto capítulo é dedicado aos exemplos analisados com as ferramentas desenvolvidas, com o objetivo de ilustrar as possibilidades de aplicações dos modelos para as vigas e pórticos planos de concreto armado.

Finalizando o trabalho, o sétimo capítulo remete-se às conclusões obtidas e possíveis sugestões para pesquisas futuras.

## **2. Revisão Bibliográfica**

### **2.1 Generalidades**

A revisão bibliográfica é composta, essencialmente, de duas partes: modelos mecânicos e de materiais e, confiabilidade e otimização estrutural. Quanto aos modelos mecânicos e de materiais, procurou-se fazer uma breve compilação da literatura sem grande aprofundamento, uma vez que a criação de novos modelos não faz parte da proposta do trabalho. Já em relação à confiabilidade e otimização estrutural procurou-se abordar os principais trabalhos realizados, bem como situar a proposta na linha científica de pesquisas sobre os referidos temas.

### **2.2 Sobre Modelos Mecânicos e de Materiais**

Para que a análise de confiabilidade seja realizada com sucesso, é necessário que o modelo mecânico seja capaz de representar, com suficiente precisão, o comportamento global da estrutura. A partir das respostas geradas na análise mecânica é que são construídas as superfícies resistentes da estrutura, ou seja, as funções de estado limite para a avaliação da confiabilidade. Portanto, é de fundamental importância, a escolha adequada do modelo mecânico.

A definição de modelos não-lineares confiáveis para representar as estruturas é, sem dúvida um tema bastante importante. No âmbito das estruturas de concreto, o problema se torna mais agravante visto que o concreto é um material heterogêneo e com diversas peculiaridades. Por conta disto, o concreto apresenta um comportamento fortemente não-linear.

Com o desenvolvimento da Mecânica das Estruturas, surgiram diversas teorias quantitativas que reproduziam, cada vez melhor, o comportamento dos materiais, do ponto de vista reológico, bem como na determinação de esforços internos e deslocamentos resultantes de carregamentos aplicados às estruturas. Tais avanços no campo mecânico-matemático foram encontrando respaldo com o desenvolvimento dos métodos experimentais que, através das comparações, contribuíram muito para a consolidação de definições e conceitos na engenharia estrutural.

FUSCO (1976) considera que, no âmbito dos materiais, o modelo mecânico é quem estabelece a ponte entre o conhecimento fenomenológico da microestrutura dos materiais e as leis constitutivas macroscópicas expressas pelas relações tensão-deformação. Isto significa que o modelo mecânico adotado deve garantir que a aproximação matemática conduza a uma resposta numérica consistente para a estrutura analisada.

BRANSON (1966) propõe uma alternativa para o cálculo da rigidez equivalente em vigas de concreto armado para uma avaliação da flecha imediata. Trata-se de um modelo empírico que toma como base o fato de que após ser atingido o momento de fissuração em uma viga de concreto armado, não há garantia que todas as seções da estrutura estejam no estágio II, mas sim em uma situação intermediária entre os estádios I e II. Entretanto, a fórmula de Branson apresenta-se bem conservadora, uma vez que a rigidez equivalente se aproxima muito da rigidez no estágio II.

DEBERNARDI (1983) apresenta um modelo para a flexão de estruturas de concreto armado com a consideração da fissuração, fluência, retração, fluência por aderência, enrijecimento à tração, além de descontar o espaço ocupado pela armadura de compressão e aplicabilidade para seções de qualquer forma. O modelo interpola a deformação média da armadura tracionada para levar em consideração a situação intermediária entre os estádios I e II.

No mesmo contexto, GHALI & FAVRE (1986), assim como Branson, propõem uma formulação mais simples baseada na configuração média entre os estádios I e II. A partir dos valores de curvatura e rigidez para a peça não fissurada (estádio I) e para peça fissurada (estádio II), obtém-se a curvatura média e um produto de rigidez médio na flexão,  $EI_m$ . Vale ressaltar que o modelo de Ghali & Favre resulta em um produto de rigidez equivalente maior que o proposto por Branson. Assim, a flecha obtida pelo primeiro é menor que a obtida pelo segundo, respectivamente, tornando o modelo de Ghali & Favre menos conservador que o de

Branson. Todos os modelos citados anteriormente foram propostos em forma de diagramas momento-curvatura.

KENT & PARK (1971) formulam um modelo que considera o efeito do confinamento do concreto produzido pela armadura transversal. O modelo define uma curva tensão-deformação dividida em três partes distintas. A primeira parte descreve o comportamento não-confinado anterior à máxima tensão para deformação de 0.2%, a segunda parte descreve o trecho confinado pós-pico e a última parte descreve o trecho não-confinado pós-pico. Este modelo também se estende para o concreto tracionado.

Muitos trabalhos nesta área de modelagem mecânica de estruturas de concreto armado foram desenvolvidos no Departamento de Estruturas (SET) da EESC-USP empregando alguns dos modelos acima citados, além de outros encontrados na literatura. Dentre eles estão os trabalhos de SOARES (1997), SANCHES JR. (1998), BOTTA (1998), NEVES (2000), OLIVEIRA (2001), SANCHEZ JR. (2003) e NEVES (2004) no âmbito das estruturas de pavimentos de edifícios simulados pela analogia de grelha e CORRÊA (1991), ÁLVARES (1993), SILVA (1996), ÁLVARES (1999), SOARES (2001), PINTO (2002) e BRANCO (2002) no âmbito das estruturas de vigas e pórticos planos de concreto armado. Comentam-se, brevemente a seguir, alguns destes trabalhos.

ÁLVARES (1993) faz um estudo crítico sobre o modelo de dano de Mazars (1984) com a determinação de parâmetros numéricos para o modelo em ensaios de compressão axial e diametral. A análise qualitativa do modelo é feita com base em um confronto de resultados numéricos, via método dos elementos finitos e resultados experimentais de vigas em concreto armado com diferentes taxas de armadura. Verifica-se que o modelo conduz a bons resultados para as vigas normalmente e super armadas. Entretanto, no caso de baixas taxas de armadura, a distribuição de dano é mais esparsa acarretando perda de qualidade nos resultados.

O trabalho de SILVA (1996) trata da modelagem numérica de pórticos de concreto armado. São discutidos, amplamente, os diferentes tipos de teorias mecânico-constitutivas para representar os pórticos, desde a forma mais simples considerando uma análise elástico-linear em primeira ordem até o comportamento rígido-plástico em segunda ordem.

Em seu trabalho, SANCHES JR. (1998) analisa pavimentos de edifícios com a consideração da não-linearidade física do concreto por meio dos modelos de Ghali & Favre (1986) e Debernardi (1983), além de levar em conta a fluência, retração e o concreto entre fissuras. Conclui que o dimensionamento das estruturas de concreto armado pode ser realizado considerando comportamento elástico-linear para os materiais, desde que o

detalhamento das armaduras seja rigorosamente executado conforme a análise estrutural inicial em primeira ordem.

BOTTA (1998) também estuda os pavimentos de edifícios. No entanto, para representar o comportamento não-linear dos materiais utiliza modelos de dano para o concreto e um modelo elastoplástico com encruamento isótropo para as armaduras. O concreto foi representado pelos modelos de dano de Mazars (1984) e de Cervera et al (1996) com aplicação à verificação das peças em estado limite de utilização, com grande ênfase na limitação de fissuras e controle de flechas.

NEVES (2000) avalia o comportamento dos pavimentos de edifícios com a contribuição das deformações por cisalhamento. Foram utilizados diagramas momento-curvatura e o modelo de dano de Mazars (1984). Verifica que a inclusão da distorção é significativa no trecho pós-elástico em vigas curtas.

O trabalho de OLIVEIRA (2001) contém uma vasta descrição de modelos mecânicos para o concreto, bem como diversos critérios de resistência propostos para a sua análise elastoplástica.

PINTO (2002) adota o modelo mecânico proposto por Kent & Park (1971) para estudar as estruturas de contraventamento de edifícios de concreto armado mediante análise não-linear, com o intuito de definir parâmetros de minoração de rigidez para a consideração simplificada, porém consistente, dos efeitos das não-linearidades física e geométrica.

BRANCO (2002) combina o modelo de dano de Mazars (1984) para o concreto, não-linearidade geométrica baseada na formulação lagrangeana atualizada, modelo elastoplástico com encruamento misto para as armaduras com a Teoria de Vigas de Timoshenko para simular o comportamento de pórticos planos de concreto armado. O modelo é aferido com resultados de ensaios de vigas de concreto armado feitos por Álvares (1993). Conclui que o modelo é bastante preciso para casos de vigas com taxas médias e elevadas de armadura.

Em seu trabalho de doutoramento, SANCHES JR (2003) considera as teorias de Timoshenko e Reissner-Mindlin para elementos de barra e placa, respectivamente, na modelagem de pavimentos de edifícios. Em virtude da consideração de maneira independente entre os elementos de vigas e placas, também é implementado o efeito de membrana. Conclui que o uso da mecânica do dano para o concreto e a teoria da plasticidade para a armadura no comportamento à flexão, não são adequadas, quando utilizadas isoladamente, para a modelagem da não-linearidade decorrente do cisalhamento. Isto porque, nessas modelagens,

não são considerados os efeitos de pino e de engrenamento dos agregados que conferem uma resistência adicional ao cisalhamento.

No âmbito da Mecânica de Materiais, com ênfase em modelos de dano para o concreto, destacam-se os trabalhos de PROENÇA (1988), ALVARES (1993), DRIEMEIER (1995), PITUBA (1998), ÁLVARES (1999), PITUBA (2003). No contexto da Mecânica do Dano no Contínuo, destacam-se ainda os trabalhos de PITUBA (1998), ÁLVARES (1999) e PITUBA (2003). O primeiro aborda aspectos relativos à formulação teórica e simulação numérica de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na Mecânica do Dano com o emprego dos modelos de Mazars (1984), Laborderie et al (1991) e Flórez-Lopez (1993). O segundo acopla um modelo de danificação com plastificação localizada em zonas previamente definidas ao longo de elementos estruturais de barras com o objetivo de incluir em um único índice, os efeitos da plastificação e perda de rigidez decorrentes da evolução de microfissuras no concreto. E, finalmente, o terceiro trabalho apresenta uma formulação para meios elásticos anisótropos e bimodulares para incorporar os casos de materiais elásticos com anisotropia e bimodularidade induzidas pelo dano.

### **2.3 Sobre Confiabilidade e Otimização Estrutural**

Procura-se abordar os trabalhos antigos mais importantes que envolvem a confiabilidade estrutural, assim como verificar as publicações mais recentes sobre o referido tema. No campo da otimização baseada em confiabilidade, buscaram-se os trabalhos que tratam sobre o procedimento conhecido como RBOD “*Reliability Based Optimal Design*”, ou “Projeto Ótimo Baseado em Confiabilidade”.

A preocupação em se garantir a segurança das construções já vem de muitos séculos atrás. As civilizações mais antigas já atentavam para proteger os interesses de seus cidadãos mediante um conjunto de regras. O código mais antigo, que se tem conhecimento, que aborda a questão da segurança estrutural é o Código de Hamurabi, rei da Babilônia há cerca de quase 4000 anos atrás. Neste código, previa-se que as responsabilidades eram definidas em termos das conseqüências de uma eventual ruína. O código de Hamurabi pode ser definido por uma única expressão: “*Olho por olho, dente por dente*”.

Segundo NOWAK & COLLINS (2000), as primeiras formulações matemáticas do problema da segurança estrutural são atribuídas a Mayer (1926), Wierzbicki (1936) e Streletzki (1947). Eles concluíram que as cargas e os parâmetros de resistências são variáveis

aleatórias e que, para cada estrutura, há uma probabilidade de falha finita. Com isso, chegou-se à consciência de que nenhuma estrutura é absolutamente segura, isto é, possui probabilidade de falha nula.

FREUDENTHAL (1947), a partir dos conceitos anteriores, compila e discute o uso de teorias estatísticas para avaliação da segurança estrutural. Propõe que a probabilidade de falha deve ser calculada pela integração de uma região caracterizada pelas distribuições de probabilidade das variáveis, chamada de domínio de falha.

As aplicações práticas da análise de confiabilidade somente foram possíveis graças aos trabalhos de CORNELL (1969) e HASOFER & LIND (1974). No primeiro, é proposto o índice de confiabilidade em segundo momento, formulação essa que é usada ainda hoje. O segundo trabalho, talvez constitua um dos trabalhos mais importantes e mais referenciados sobre confiabilidade estrutural até os dias de hoje. Neste trabalho de Hasofer & Lind (1974) propõe-se uma definição de um formato invariante para o índice de confiabilidade  $\beta$  obtido no espaço de variáveis reduzidas. A proposta consiste em avaliar a função de estado limite em um ponto chamado, *ponto de projeto*, ao invés das médias das variáveis. A partir daí, consagrou-se a definição de índice de confiabilidade de Hasofer & Lind, como sendo a distância, em unidades de desvio-padrão, da origem do sistema de coordenadas no espaço reduzido até o ponto de projeto localizado na superfície de falha da estrutura. Essa distância representa uma idéia do grau de segurança de um projeto ou estrutura já executada em relação ao estado limite considerado.

ANG & CORNELL (1974) ponderam que, para representar o caráter aleatório das variáveis envolvidas no projeto, deve-se considerar o valor médio e uma medida de dispersão (variância ou desvio-padrão).

RACKWITZ & FIESSLER (1978) formulam um procedimento numérico iterativo consistente para o cálculo do índice de confiabilidade. Diferentemente dos métodos anteriores, a idéia básica deste procedimento é levar em consideração as funções de probabilidades das variáveis. Além disso, o método propõe que as variáveis aleatórias que não são normalmente distribuídas sejam transformadas, convenientemente, em variáveis normais equivalentes.

GRIGORIU, VENEZIANO & CORNELL (1979) afirmam que a falta de conhecimento sobre as distribuições de probabilidade das variáveis aleatórias é um dos principais problemas na determinação da confiabilidade de uma estrutura. Trata-se, portanto, da falta de informações sobre as variáveis, o que acarreta maiores erros nas análises.

Atualmente, este problema deixou de ser grave, uma vez que já se conhecem diversas distribuições de probabilidades. Em NOWAK & COLLINS (2000) e SOARES (2001) existem recomendações para a consideração adequada de distribuições para variáveis específicas de projeto.

MELCHERS (1983) aplica uma representação em paralelo para avaliar a confiabilidade de sistemas estruturais. Enfatiza a influência das resistências individuais dos elementos na confiabilidade da estrutura como um todo. Com isso, o autor declara a importância de considerar a correlação entre os elementos estruturais para a correta avaliação da probabilidade global do sistema.

DITLEVSEM & BJERAGER (1984) abordam a confiabilidade de sistemas estruturais de alta redundância. Essa determinação é difícil, pois os sistemas apresentam diversas possibilidades de falhas. Dessa forma, existem muitos caminhos de falha possíveis, de modo que a escolha de apenas alguns pode levar a um estimador falso da probabilidade de falha. Para contornar esse problema, o autor sugere o cálculo de limites superiores e inferiores para essa probabilidade.

FRANGOPOL (1985) aborda o problema da otimização com restrições em confiabilidade enfatizando a sensibilidade do ponto ótimo em relação às variáveis de projeto. Para isso, o autor utiliza o método das direções factíveis. Afirma ainda que estudos nessa linha podem ser aplicados aos casos com várias restrições em confiabilidade e outros parâmetros.

MADSEN (1988) define os fatores de sensibilidade na análise de confiabilidade. Esses fatores medem a influência das variáveis aleatórias no valor do índice de confiabilidade, permitindo, assim, determinar quais variáveis são mais importantes no projeto. A importância deste estudo se verifica na diminuição do número de variáveis aleatórias que devem ser consideradas, uma vez que podem ser tratadas como determinísticas, diminuindo, também o tempo de processamento das análises.

CHAKRABARTY (1992) apresenta um modelo para otimização de vigas de concreto armado de seção retangular com armadura simples, a partir da minimização de funções de custo. O autor indica que a formulação proposta pode ser resolvida através de qualquer algoritmo de programação não-linear.

BREITUNG & IBRAHIM (1994) abordam uma questão interessante a respeito dos modelos probabilísticos utilizados na confiabilidade estrutural. Enfatizam que esses modelos negligenciam a inferência estatística na análise dos resultados. Significa que é difícil avaliar a

capacidade dos modelos, uma vez que não se tem uma interação entre os modelos probabilísticos e os dados da realidade para validação dos modelos.

ENEVOLDSEN, FABER & SORENSEN (1994) propõem um algoritmo adaptativo baseado no método da superfície de resposta para a estimativa do índice de confiabilidade  $\beta$  em casos de funções de estados limite especiais. O método é empregado para funções de estados limites que envolvem ruídos, problemas com mínimos locais e descontinuidades na primeira derivada. A técnica é formulada empregando-se apenas o plano de experiência composto e é dividida em duas etapas. Na primeira etapa, o domínio que contém o ponto mais provável de falha é determinado em um processo de busca global. Na segunda etapa, uma superfície de resposta mais precisa é encontrada em torno do mesmo ponto de falha definido na etapa anterior, caracterizando um processo de busca local. A chave do algoritmo, segundo os autores, consiste no fato de que após o cálculo do ponto de projeto da próxima iteração do RSM, verifica-se se o ponto encontrado está no domínio definido por uma distância máxima entre o centro do plano composto e o ponto de canto que constitui o plano. Se o ponto encontrado estiver fora dos limites definidos por essa distância máxima, reinicia-se o processo com uma nova distância máxima. Procedendo dessa forma, os autores afirmam que se obtém estabilidade numérica no processo de busca do ponto mais provável de falha e, conseqüentemente, na estimativa do índice de confiabilidade.

SELLIER, PINGLOT, LORRAIN & MEBARKI (1994) apresentam um método de nível 3 baseado em simulações de Monte Carlo. O método CDC (*Conditioning and Dissociation Coupling*) combina os princípios da dissociação e do condicionamento para melhorar a convergência das simulações. Na verdade, o que se propõe com o método é diminuir o número de simulações, realizando-as fora da hipersfera de raio  $\beta$ . Com isso, obtém-se boas aproximações para probabilidades de falha pequenas (da ordem de  $10^{-5}$ ), desde que sejam problemas com poucas variáveis aleatórias. O método, no artigo, é aplicado para resolver estruturas simples, tais como, colunas e vigas biapoiadas de concreto armado, comparando os resultados com valores exatos, métodos de nível 2 e o método do hipercone. Com a utilização do método CDC, concluem que somente uma região restrita do domínio de falha, localizada perto do ponto de projeto é realmente importante. É justamente, essa região que tem a maior importância no valor final da probabilidade de falha. Dessa forma, justifica-se um maior número de simulações nessa região, podendo, assim, diminuir o número total de simulações. Além disso, verifica-se que a aproximação da superfície de estado limite por um hiperplano no ponto de projeto conduz a valores aceitáveis da probabilidade de falha.

TURK, RAMIREZ & COROTIS (1994) fazem uma abordagem simples sobre o método da superfície de resposta, enfatizando suas vantagens sobre os métodos tradicionais de confiabilidade, tais como as simulações de Monte Carlo e os métodos de segundo momento com aproximações em primeira ordem. Enfatizam a importância da escolha da quantidade de resposta, isto é, os valores obtidos nas análises mecânico-probabilísticas, que servem para comparar com os valores limites que caracterizam a fronteira entre os domínios de falha e de segurança. Além disso, os autores relatam a influência do caráter não-linear das estruturas na obtenção de respostas precisas para a estimativa da superfície de estado limite e posterior probabilidade de falha da estrutura.

BUCHER & SCHUELLER (1994) comentam diversos métodos correntes no contexto da análise de confiabilidade aplicados à análise de sistemas estruturais. Relatam que na avaliação da probabilidade de falha de sistemas estruturais, o modelo mecânico exerce um papel fundamental, no sentido de conseguir prever os caminhos de falha que conduzirão a estrutura ao colapso. Comparam ainda o RSM com a simulação de Monte Carlo e comentam sobre as possibilidades de utilização de métodos de árvore de falha.

DUPRAT, PINGLOT & LORRAIN (1994) avaliam a confiabilidade de colunas de concreto armado utilizando simulação de Monte Carlo. O estado limite considerado é a flambagem da coluna e o modelo mecânico leva em conta, além dos efeitos de segunda ordem a não-linearidade dos materiais. Ponderam, entretanto, que os métodos de simulação do tipo Monte Carlo não permitem uma análise de sensibilidade dos parâmetros de projeto. Em função disso, os autores variam de maneira determinística, os parâmetros de taxa de armadura, índice de esbeltez e tipos de vinculação das colunas. Concluem, principalmente, que a resistência à compressão do concreto é a variável mais importante nesses tipos de estruturas.

MAHADEVAN & CRUSE (1994) fazem considerações sobre a forma de avaliar a confiabilidade de sistemas estruturais discretos com elementos frágeis e dúcteis. Baseando-se nessas técnicas, propõem um método capaz de considerar a danificação progressiva em um meio contínuo com aplicações em sistemas de propulsão espaciais, como parte de um projeto desenvolvido pela NASA. O modelo proposto separa os modos de falha do sistema e os modos de danificação progressiva, de modo que o sistema possa falhar após vários estágios de danificação. A grande vantagem do método, segundo os autores, é que os engenheiros podem impor qualquer nível de danificação correspondente a um determinado modo de degradação do sistema e avaliar seu efeito na probabilidade de falha de toda a estrutura.

SRIVIDYA & RANGANATHAN (1995) aplicam o procedimento do projeto ótimo baseado em confiabilidade (RBOD) para minimizar custos de pórticos de concreto armado mediante índices de confiabilidade pré-fixados. Na verdade, as restrições são baseadas nas probabilidades de falha dos componentes individuais dos pórticos, modo de falha dominante e falha do sistema. As estruturas são modeladas considerando-se comportamento elastoplástico perfeito. Com a minimização do custo da estrutura, são obtidos os momentos resistentes ótimos das seções consideradas e, assim, as respectivas dimensões dos elementos estruturais e da armadura.

KIM & NA (1997) propõem uma melhoria para o método da superfície de resposta. Segundo os autores, o método proposto determina os novos pontos amostrais, isto é, os pontos do plano de experiência, através da técnica do vetor projetado. Os pontos são posicionados próximo à função de estado limite original pela projeção dos pontos amostrais convencionais sobre a superfície de resposta obtida na iteração anterior. Com isso, tem-se uma ligeira perturbação desses pontos próximos do ponto de projeto na superfície de falha. Procedendo dessa forma, os autores garantem que funções lineares para aproximar a superfície de falha podem ser utilizadas no lugar de polinômios quadráticos, bem como métodos de primeira ordem para o cálculo do índice de confiabilidade. Além disso, a técnica permite diminuir o erro existente entre a superfície de falha aproximada e a função de estado limite real do problema.

BORGES (1997) critica os códigos normativos no sentido de que estes indicam que seguem abordagens probabilísticas para definir os coeficientes parciais de segurança, quando na verdade, não relacionam os valores obtidos para os coeficientes com as respectivas probabilidades de falha associadas aos estados limites verificados. Conclui ponderando que, estudos minuciosos de calibração baseados nos princípios probabilísticos devem ser realizados para que se possa justificar os valores dos coeficientes de segurança propostos por tais códigos.

LEMAIRE (1997) discute os princípios do projeto estrutural e a importância em se desenvolver e empregar os conceitos da análise de confiabilidade e sensibilidade na avaliação das variáveis e comportamento das estruturas. Salienta que as normas e códigos de projeto fornecem ferramentas para uma espécie de prática recomendada em projeto de estruturas, porém não mencionam nada a respeito dos riscos assumidos. Aplica os conceitos de sensibilidade e confiabilidade para escolher o melhor esquema estrutural de contraventamento de um pórtico.

SOARES (1997) propõe um algoritmo para pré-dimensionamento ótimo do conjunto de vigas de um pavimento através de um método de aproximações combinadas. A otimização é feita para as seções mais solicitadas das vigas. As variáveis envolvidas no processo de otimização são as alturas das vigas e as áreas de aço. O autor parte do princípio que o somatório dos mínimos locais interagidos representam o mínimo global da estrutura.

ANG & LEON (1997) abordam de maneira mais realística a determinação da confiabilidade-alvo para o projeto e reforço de estruturas com aplicação à segurança contra terremotos. O método consiste em formular um critério capaz de quantificar os riscos que a estrutura estará sujeita ao longo de sua vida útil ou por um período de tempo pré-determinado. Procura-se obter os riscos aceitáveis ou índices de confiabilidade ótimos, baseando-se no controle de danificação e prevenção de colapso no projeto ou reforço de estruturas contra os terremotos. Concluem que, com o desenvolvimento do critério (obtenção de várias curvas de confiabilidade versus custo), é possível obter uma probabilidade de falha que corresponde ao mínimo custo ao longo de toda a vida útil da estrutura.

O'CONNOR (1998) explica como são obtidos, nas mais altas categorias mundiais, os níveis de confiabilidade e segurança para as estruturas. Segundo o autor, tais níveis devem ser obtidos pela utilização de princípios de excelência em projetos, nos processos de produção, assistência e manutenção que, com o contínuo aperfeiçoamento, conduzem à redução de custos. Pondera ainda que, quase sempre, as causas das falhas são resultados de erros humanos. Conclui que, aproximações padronizadas são errôneas e não produtivas, devendo ser substituídas por uma filosofia baseada na realidade do desempenho humano.

No contexto da análise de risco, NILSEN et al. (1998) discutem o uso de métodos desenvolvidos para a avaliação da confiabilidade de estruturas como uma ferramenta geral para calcular probabilidades no contexto da análise quantitativa de risco. Para aplicar estes métodos o analista precisa modelar o sistema, as incertezas e os parâmetros de correlação separadamente e de forma sistemática. Isto é assegurado ao se modelar sistemas por combinações lógicas de funções de estado limite e modelar incertezas por fixações de distribuições de probabilidade marginal e medidas de correlação adequadas. Essas propriedades podem permitir ao analista incluir mais conhecimentos na análise, comparados a modelos tradicionalmente empregados em análise de risco.

KAYMAZ, MCMAHON & MENG (1998) propõem um novo algoritmo que combina o método da superfície de resposta com simulação de Monte Carlo. Substitui-se a função de estado limite real do problema por um polinômio aproximador, no caso a superfície

de resposta, determinado por um número reduzido de chamadas do modelo de elementos finitos. A busca do índice de confiabilidade e o processo de otimização são feitos através de simulações de Monte Carlo sobre a superfície de resposta. Na verdade, a simulação é quem determina o índice de confiabilidade para que seja utilizada no processo de otimização. Como método de otimização, os autores utilizam aproximações lineares sucessivas combinadas com o método simplex.

BERNARDO (1999) determina índices de confiabilidade para estruturas em grelhas de concreto armado em relação aos estados limites último e de utilização com o uso de métodos de simulação Monte Carlo. O autor também discute sobre alguns aspectos importantes a respeito da necessidade de se considerar o coeficiente  $\gamma_c$  não como um valor fixo, mas como função de variáveis básicas como, a resistência do concreto, o grau de hiperstaticidade da estrutura e as dimensões dos elementos estruturais. Conclui que o coeficiente parcial de segurança  $\gamma_c$  deve ser determinado individualmente para cada sistema estrutural, considerando as cargas, as propriedades dos materiais, os dados geométricos e as incertezas do modelo. Dessa forma, é possível obter índices de confiabilidade mais uniformes em todos os componentes da estrutura. Esse trabalho é o primeiro a ser desenvolvido na EESC-USP no âmbito da confiabilidade estrutural.

SEXSMITH (1999) trata das vantagens e desvantagens da abordagem probabilística da segurança. Segundo o autor, as principais vantagens dessa abordagem são: a racionalidade, uma vez que as incertezas podem ser tratadas por meio de probabilidades; o forte embasamento teórico para que seja assumida a responsabilidade técnica sobre o projeto e a facilidade de adaptação desses modelos com quaisquer modelos mecânicos, tornando as análises mais realistas e confiáveis. Em relação às desvantagens, estão: a dificuldade de obtenção de dados em problemas onde as probabilidades finais são pequenas, bem como a falta de uniformização dessas metodologias já existentes inviabilizando o seu uso em normas e códigos de projeto.

RACKWITZ (2001) apresenta um estado da arte dos métodos e dificuldades no âmbito da confiabilidade estrutural. Apresenta os métodos FORM/SORM e suas possibilidades de uso, bem como suas desvantagens. Enfatiza que o erro cometido com o uso desses métodos é perfeitamente aceitável comparado às incertezas dos modelos mecânico e probabilístico, além de serem muito mais eficientes que os métodos de simulação puros, como Monte Carlo. O autor ainda pondera que a pergunta: “Quão seguro deve ser um projeto estrutural” é uma questão crucial quando se aplica qualquer método probabilístico, devendo

ser amplamente discutida, principalmente, quando se utiliza otimização com restrições em confiabilidade, ou seja, a minimização do custo global da estrutura sujeita a índices de confiabilidade pré-fixados. Segundo o autor, o futuro do projeto estrutural está nesse acoplamento entre confiabilidade e otimização estrutural.

SOARES (2001) desenvolve modelos elaborados acoplando o Método dos Elementos Finitos com o Método de Superfície de Resposta (RSM) para análise de pórticos planos de concreto armado. Com o desenvolvimento de tais ferramentas, pode-se realizar análises completas de colunas e pórticos planos de concreto armado, bem como o dimensionamento dessas estruturas a partir de índices de confiabilidade pré-fixados. O autor, em seu trabalho, ainda faz um estudo sobre a sensibilidade das variáveis aleatórias no projeto estrutural.

ROYSET, DER KIUREGHIAN & POLAK (2001) desenvolvem uma abordagem robusta e flexível para resolver de maneira aproximada problemas de otimização baseados em confiabilidade aplicada aos sistemas estruturais em série. O sistema em série é definido em termos de um conjunto de funções de estados limites que envolvem as variáveis aleatórias e os parâmetros a serem otimizados. A abordagem reformula o problema de otimização substituindo as restrições em confiabilidade por restrições determinísticas que imponham a não negatividade das funções de estados limites dentro de domínios representados por circunferências cujo raio é o próprio índice de confiabilidade requerido. Com isso o problema de otimização se torna determinístico. As variáveis a serem otimizadas fazem parte das funções de desempenho dos modos de falha, sendo que, para cada conjunto de valores otimizados, a positividade das funções de desempenho dos modos de falha é avaliada e, com isso, determinam-se os índices de confiabilidade de cada componente e do sistema como um todo. Os autores garantem que a reformulação do problema atinge a solução idêntica ao problema original se as restrições de confiabilidade forem expressas em termos dos índices de confiabilidade.

MOHAMED, SOARES & VENTURUNI (2001) fazem um estudo sobre a variação do índice de confiabilidade em pilares de concreto armado considerando comportamento não-linear físico e geométrico. Empregam o RSM para representar a função de estado limite. Concluem que o projeto de estruturas de concreto armado, mediante coeficientes parciais de segurança, apresenta índices de confiabilidade não uniformes para diferentes elementos estruturais de concreto armado, ou seja, não é possível estimar um único coeficiente parcial para o concreto. Por outro lado, os autores propõem que os coeficientes parciais sejam

determinados a partir de índices de confiabilidade pré-fixados, com variação dos parâmetros de projeto dos pilares, tais como excentricidade, taxas de armadura e índice de esbeltez.

MELCHERS & AHAMMED (2001) apresentam duas técnicas iterativas para busca do ponto de intersecção de funções de estado limite não-lineares e determinação da probabilidade conjunta. Trata-se de uma tentativa de se considerar múltiplos pontos de projeto na determinação da probabilidade de falha global de um sistema em paralelo. Uma das técnicas é chamada Técnica de Aproximações Sequenciais Sucessivas que consiste em buscar o novo ponto de projeto a partir do ponto de projeto anterior, que é convertido na origem do sistema. Portanto, a cada iteração do método, a origem do espaço normal padrão é modificada para o último ponto de projeto encontrado, com determinação do novo ponto a partir dos métodos tradicionais de confiabilidade. Segundo os autores, as técnicas obtêm uma boa precisão com baixo custo computacional.

ROYSET, DER KIUREGHIAN & POLAK (2001) discutem e estendem o problema do projeto ótimo baseado em confiabilidade (RBOD) através do desacoplamento entre os processos de otimização e confiabilidade. O método permite a resolução de três problemas específicos: minimização do custo do projeto sujeita a restrições estruturais e em confiabilidade, maximização da confiabilidade sujeita a restrições estruturais e de custo e, ainda, minimização do custo inicial do projeto acrescido do custo de uma eventual falha da estrutura sujeita a restrições estruturais e de confiabilidade. A grande vantagem do desacoplamento entre os processos, segundo os autores, é o fato de que é possível escolher qualquer algoritmo para resolver o problema da otimização, bem como o da confiabilidade.

ARAÚJO & REAL (2002) empregam o método de simulação de Monte Carlo para a análise de pilares de concreto armado, adotando-se diferentes definições para o índice de confiabilidade (margem de segurança e coeficientes de segurança). Como variáveis aleatórias são admitidas as dimensões das seções transversais dos pilares, a tensão de escoamento e o módulo de elasticidade do aço, a posição das armaduras e a carga axial. As propriedades do concreto (resistência à compressão simples e à tração, bem como o módulo de elasticidade longitudinal) são representadas como campos estocásticos Gaussianos. Os autores criticam os procedimentos que somente consideram as propriedades do concreto como variáveis aleatórias, uma vez que não são satisfatórios para uma análise de confiabilidade porque predeterminam a seção onde ocorrerá a ruptura.

SOARES, MOHAMED, VENTURINI & LEMAIRE (2002) apresentam um método probabilístico para avaliação da confiabilidade de pórticos de concreto armado em regime

não-linear físico e geométrico. A análise de confiabilidade é realizada por meio do acoplamento do modelo mecânico em elementos finitos e do método da superfície de resposta. Apresentam relações entre os coeficientes parciais de segurança e os níveis de confiabilidade para pilares e pórticos de concreto armado. Concluem, através de uma análise paramétrica de colunas de concreto armado, que o forte comportamento não-linear é muito importante na estimativa da confiabilidade, o que pode ocasionar oscilações em torno do ponto de projeto, dificultando bastante a obtenção dos referidos coeficientes parciais de segurança.

CASTILLO, CONEJO, MÍNGUEZ & CASTILLO (2003) propõem uma extensão do método Fator de Segurança-Probabilidade de Falha (FPSF) com duas características: evitar o uso do fator de relaxação, fixado experimentalmente e possibilitar a análise de sensibilidade das variáveis da função-objetivo. O método FPSF, em uma primeira etapa, resolve o problema clássico da otimização com restrição fornecendo medidas de sensibilidade da função-objetivo. Na segunda etapa, o método avalia os valores dos índices de confiabilidade para todos os modos de falha escolhidos, bem como as respectivas sensibilidades dos  $\beta_i$ . Finalmente, na terceira etapa, o método atualiza os fatores de segurança baseado nos valores das variáveis obtidas nas etapas anteriores. O algoritmo proposto permite acoplar em um único processo, as três etapas anteriores e ainda obter as medidas de sensibilidade da função custo com relação aos fatores parciais de segurança. Os autores concluem que a proposta é adequada uma vez que elimina o uso do fator de relaxação, melhora a convergência do processo e consegue abordar as duas filosofias de segurança (fatores de segurança e probabilidades de falha) com suas respectivas sensibilidades.

FRANGOPOL & MAUTE (2003) fazem um levantamento do estado da arte dos métodos de otimização estrutural baseados em confiabilidade (RBDO). Apresentam a evolução desses métodos, desde sua criação com o uso restrito aos problemas determinísticos até o emprego na resolução de problemas de otimização baseados em confiabilidade com a consideração da variação da confiabilidade no tempo e previsão de tempo de vida útil da estrutura. Os autores enfatizam a utilização do RBDO em aplicações para resolução de estruturas civis e aeroespaciais. Concluem que os custos de inspeção, manutenção e até eventuais reparos devem ser adicionados aos problemas de otimização baseados em confiabilidade para que as estruturas sejam projetadas para um máximo tempo de vida útil.

GAYTON, BOURINET & LEMAIRE (2003) propõem uma técnica para modificação do RSM baseada na introdução do conhecimento do especialista com o intuito de

diminuir o tempo de processamento do método. A técnica é baseada na associação do domínio de segurança a um intervalo chamado de “intervalo de confiança”. Esse intervalo é verificado na nova iteração, que adiciona pontos aos pontos iniciais do plano de experiência.

NEVES, MOHAMED & VENTURINI (2004) comparam o desempenho do método de simulação de Monte Carlo com o RSM na resolução de uma estrutura composta por três barras paralelas unidas por uma barra rígida na extremidade. A função de estado limite local é escrita em função da deformação de escoamento das barras com critério elastoplástico. O estado limite global é definido em função da carga crítica do sistema. Verificam que o RSM fornece uma probabilidade de falha muito próxima do valor encontrado pela simulação de Monte Carlo, com a vantagem de empregar um tempo computacional muito menor. Chamam a atenção, entretanto, que o uso e convergência do RSM sempre dependem do plano de experiência escolhido.

GOMES & AWRUCH (2004) fazem um amplo estudo comparativo entre diferentes técnicas para a análise da confiabilidade estrutural. Utilizam, basicamente, métodos de simulação de Monte Carlo puro e com amostragem por importância, superfícies de resposta com polinômios quadráticos completos e incompletos (sem termos cruzados) e as Redes Neurais com Percéptron Multicamada e função de Base Real. Os exemplos analisados são uma viga de concreto armado em balanço verificada no estado limite de deslocamento excessivo na ponta do balanço e uma viga biengastada submetida a carregamento distribuído. Os autores concluem que o melhor resultado para a estimativa da probabilidade de falha para os casos estudados, no tocante ao valor do índice de confiabilidade mais próximo do valor de referência, menor número de avaliações da função de estado limite e menor tempo gasto no ajuste da função aproximada foi obtido pela técnica da superfície de resposta com polinômios quadráticos sem termos cruzados usando a técnica da projeção de vetores com o esquema de amostragem de Bucher & Bourgund (1990). No artigo, os autores não descrevem o esquema de Bucher & Bourgund. Além disso, afirmam que mais estudos devem ser realizados no âmbito das Redes Neurais, pois consideram uma técnica bastante promissora.

FALSONE & IMPOLLONIA (2004) fazem uma avaliação sobre a precisão de um novo método de superfície de resposta. Na verdade, esta nova metodologia, também proposta pelos mesmos autores, considera como função de desempenho, uma relação entre os graus de liberdade do elemento finito escolhido na análise e os coeficientes do polinômio aproximador da superfície de resposta. Nessa análise, os autores desconsideram o termo cruzado do polinômio de segundo grau. Concluem que a técnica é exata para estruturas estaticamente

determinadas e que, para as estruturas hiperestáticas, o método apresenta precisão bastante significativa não importando o número de hiperestaticidades da estrutura.

GUPTA & MANOHAR (2004) discutem casos onde existem múltiplos pontos de projeto e sua importância no cálculo da probabilidade de falha global. Para isto, propõem um método baseado nas técnicas de superfície de resposta que é capaz de identificar pontos ou regiões sobre a superfície limite que contribuem, significativamente, no valor da probabilidade de falha. Define-se, portanto, uma superfície de resposta global unindo-se os diversos pontos de projeto. A probabilidade de falha é estimada a partir de simulações de Monte Carlo sobre a superfície delimitada. O estudo também propõe um conjunto de medidas de importância, que servem para classificar as variáveis aleatórias de projeto de acordo com sua influência sobre a superfície de falha global. Essas medidas podem auxiliar na escolha de quais variáveis serão determinísticas e probabilísticas na análise de segurança estrutural.

STREICHER & RACKWITZ (2004) propõem um modelo para otimização estrutural baseado em confiabilidade com variação no tempo. O algoritmo maximiza uma função-objetivo considerando o benefício da obra, os custos de construção e manutenção e, também, uma parcela de custos referentes a uma possível falha da estrutura. Além da obtenção da estrutura ótima, o modelo permite a previsão dos intervalos de manutenção para que a estrutura atinja um determinado índice de confiabilidade. O problema é formulado no espaço reduzido com utilização do FORM para a previsão da probabilidade de falha em sistemas em série. O problema de otimização é resolvido com a aplicação de um novo algoritmo baseado em gradiente chamado JOINT 5. O algoritmo necessita das segundas derivadas da função de estado limite. Entretanto, determina-se a matriz hessiana somente na segunda iteração, pois na primeira iteração esta é nula. A partir da segunda iteração, a hessiana é mantida constante até a convergência.

QU & HAFTKA (2004) apresentam uma abordagem diferente para modelar as restrições de confiabilidade em problemas de otimização baseados em confiabilidade (RBOD). Propõem que as restrições sejam formuladas através de fatores de suficiência probabilística (FSP) ao invés de probabilidades de falha ou índices de confiabilidade. O FSP é definido como um limite para o fator de segurança tradicional que permite ao projetista conhecer qual é a situação da estrutura em termos de segurança em relação ao nível de confiabilidade alvo ou requerido no projeto. Assim, quando o fator de suficiência probabilística é igual à unidade, significa que a confiabilidade da estrutura é igual à confiabilidade requerida. O FSP é empregado como a restrição de confiabilidade na

otimização das dimensões de uma viga em balanço. A análise de confiabilidade no processo de otimização é feita por simulações de Monte Carlo e Superfícies de Resposta. Concluem que o RSM com restrição em confiabilidade dada pelo FSP é mais preciso e converge mais rápido para o ótimo do que as abordagens utilizando probabilidades de falha e índices de confiabilidade. A principal vantagem de se empregar fatores de suficiência probabilística em análises de otimização acopladas à confiabilidade é que o FSP permite que o projetista altere as dimensões da estrutura para que se atinja a confiabilidade alvo. Para FSP igual a 0.9, por exemplo, o projetista deve aumentar a capacidade resistente da estrutura de  $1/0.9$ , atingindo, com isso, a segurança desejada.

CHAVES (2004) formula um algoritmo para determinação ótima de seções transversais de pilares de concreto armado com a respectiva minimização do custo da estrutura. As restrições são de ordem prática, de modo que o problema resulta na solução de um sistema de equações não-lineares que fornece as seções transversais adequadas dos pilares e as respectivas armaduras. Para isso, a autora utiliza o método dos multiplicadores de Lagrange e as condições de Kuhn-Tucker. Após a otimização da estrutura, o índice de confiabilidade é avaliado pelo método das superfícies de resposta.

NEVES (2004) desenvolve um modelo mecânico-probabilístico para a análise aproximada de grelhas de concreto armado considerando a influência de vários modos de falha importantes na confiabilidade do sistema. A técnica desenvolvida permite determinar a aproximação da função de desempenho de cada modo de falha importante, de modo a criar uma superfície composta por essas superfícies dos modos independentes e, com isso, determinar a confiabilidade do sistema por meio de simulações de Monte Carlo sobre o domínio composto. A grande vantagem dessa abordagem, segundo o autor, é que um grande número de simulações pode ser realizado, uma vez que não requer mais a chamada ao modelo mecânico, fato esse que diminui consideravelmente o tempo de processamento final.

## **2.4 Comentários sobre a Revisão Bibliográfica**

No campo da modelagem mecânica das estruturas, atualmente, verificou-se que os modelos propostos são capazes de prever, com relativa precisão, o comportamento dos materiais e das estruturas. Embora não haja uma lei constitutiva generalista para o concreto, não resta dúvida que a modelagem moderna das estruturas de concreto armado seja eficiente. As respostas não-lineares tanto do concreto quanto do aço são adequadamente representadas

por teorias sofisticadas como, plasticidade e suas respectivas combinações (elasto-viscoplasticidade, por exemplo), mecânica do dano e do fraturamento, etc. Dentro desse contexto, vale ressaltar que, para bem representar materiais frágeis como o concreto, são recomendados modelos que contemplem a perda de rigidez e resistência em função da fissuração progressiva devido ao carregamento. Isto ocorre porque a fissuração é a principal responsável pelo comportamento não-linear físico do concreto. Assim, modelos de dano são fortes candidatos a esse papel. Por esse motivo e também porque as pesquisas em modelos de dano são expressivas no departamento de estruturas da EESC-USP, tais modelos tiveram destaque na revisão bibliográfica. Em relação às armaduras, a teoria da plasticidade é capaz de representar muito satisfatoriamente a resposta mecânica do aço, sendo já bastante consolidada nesse aspecto.

No campo da confiabilidade estrutural, verificou-se ao longo da pesquisa bibliográfica, a grande quantidade de trabalhos publicados por diversos autores, refletindo a importância do tema, bem como a preocupação dos pesquisadores em quantificar adequadamente a segurança estrutural. Com as discussões de Freudenthal (1947), as teorias estatísticas começaram a ser empregadas na avaliação da segurança estrutural, com a definição de uma região chamada de domínio de falha. Com isso, a probabilidade de falha ficou definida como a integral da função de distribuição de probabilidade conjunta sobre o domínio de falha. A partir daí, os pesquisadores voltaram-se para o estudo teórico dos conceitos estatísticos aplicados à segurança estrutural com o objetivo de expandir as idéias e desenvolver metodologias eficazes na previsão da segurança de estruturas. Destacam-se nesse contexto, os trabalhos de Cornell (1969), Hasofer & Lind (1974) e de Rackwitz & Fiessler (1978) que formularam de maneira consistente o cálculo do índice de confiabilidade no espaço normal padrão.

Verificou-se que após a etapa de estudos conceituais, as aplicações dos métodos começaram a se desenvolver no âmbito de pequenas estruturas e elementos estruturais. Os métodos foram sendo aplicados para estruturas mais complexas até que novas dificuldades surgiram, dentre as quais o tempo de processamento. Diante dessa barreira, os esforços do meio científico se concentraram na tentativa de desenvolver formulações alternativas para diminuir o tempo de processamento, no que se refere, principalmente, à quantidade de chamadas dos modelos mecânicos. Entre os métodos propostos, destacaram-se os Métodos de Superfície de Respostas (RSM) que proporcionaram considerável redução no tempo de processamento com boa precisão, entretanto com desvantagens relacionadas à construção das

amostras determinísticas para o cálculo da função representativa do estado limite e, conseqüentemente, do domínio de falha.

Atualmente, o meio técnico já aceita com facilidade as incertezas inerentes às variáveis do projeto estrutural, o que virá a tornar mais fácil e corrente o emprego dos métodos probabilísticos na resolução de problemas de engenharia civil. Aliado ao sucesso da confiabilidade na previsão da segurança de estruturas, observou-se, com base em alguns trabalhos publicados, que a otimização acoplada à confiabilidade constituirá em uma forte ferramenta para o projeto de estruturas. Streicher & Rackwitz (2004), em seu artigo, relatam que o cálculo de probabilidades de falha ou índices de confiabilidade para um determinado conjunto de variáveis já é bem conhecido. Da mesma forma, os algoritmos de otimização já estão bem consolidados para a grande maioria dos problemas. O que resta ainda fazer é justamente desprender esforços para unir essas duas ferramentas (confiabilidade e otimização) em metodologias consistentes e viáveis do ponto de vista computacional. Esse fato é especialmente almejado no âmbito das estruturas de concreto armado, visto que a grande maioria dos trabalhos sobre otimização ainda trata de estruturas metálicas. Assim, a busca pelo projeto que apresente o menor custo satisfazendo aos requisitos de confiabilidade abre, sem dúvida, mais caminhos para trabalhos e pesquisas nessa área.

Conclui-se, com base na revisão bibliográfica, que há um intenso crescimento das aplicações de confiabilidade e otimização baseada em confiabilidade no projeto e previsão da segurança de sistemas estruturais. Fica evidente também que a metodologia de projeto de estruturas tende a seguir o mesmo caminho, isto é, projetar uma estrutura ou elemento estrutural significará minimizar uma função custo apropriada sujeita a restrições mecânicas, geométricas e de confiabilidade.

### **3. O Modelo Mecânico**

#### **3.1 Aspectos Gerais**

A avaliação de esforços e deslocamentos em edifícios depende, sem dúvida, do comportamento dos materiais que compõem os elementos estruturais e das cargas externas que atuam sobre a estrutura. Os deslocamentos horizontais gerados pelas forças de vento e desaprumo, em situações reais, sofrem acréscimos decorrentes da ação simultânea das cargas verticais dos pavimentos. Tais efeitos geram novos esforços sobre a estrutura, sendo conhecidos como efeitos de segunda ordem, pois são obtidos através do equilíbrio da estrutura na posição deformada. Dessa forma, as estruturas de pórticos de edifícios devem ser analisadas considerando a posição final de equilíbrio. A análise não-linear geométrica torna-se, portanto, uma ferramenta essencial para a análise de edifícios.

O outro fator determinante na resposta global das estruturas, diz respeito ao modelo de comportamento do material. No caso do concreto, o diagrama tensão-deformação não é linear. Isto significa que o módulo de elasticidade do material não é constante. Além disso, o momento de inércia das seções transversais dos elementos varia com o nível de fissuração do concreto. Assim, os efeitos da não-linearidade física devem ser analisados a partir de um modelo constitutivo que seja capaz de levar em conta perdas de rigidez e resistência por conta da fissuração.

Foram estudados diversos modelos para a representação do comportamento mecânico das estruturas de concreto armado dentre os quais se destacaram os trabalhos de: SILVA (1996), SANCHES JR. (1998), BOTTA (1998), NEVES (2000), OLIVEIRA (2001), SOARES (2001), BRANCO (2002) e SANCHES JR. (2003).

Para contemplar todas estas particularidades que envolvem as estruturas de concreto armado, o modelo mecânico utilizado neste trabalho baseia-se no algoritmo implementado por

BRANCO (2002). Emprega-se o Método dos Elementos Finitos com a implementação do elemento de pórtico plano considerando as hipóteses de Bernoulli e Timoshenko. Para representar o comportamento não-linear físico dos materiais, são utilizados o Modelo de Dano de Mazars (1984) para o concreto e modelos elastoplásticos com encruamento no caso das armaduras. A não-linearidade geométrica também é considerada através da formulação lagrangeana atualizada. Assim, o modelo permite a realização de análises de estruturas apertadas planas com ou sem a consideração do comportamento não-linear dos materiais, bem como a influência das tensões de cisalhamento.

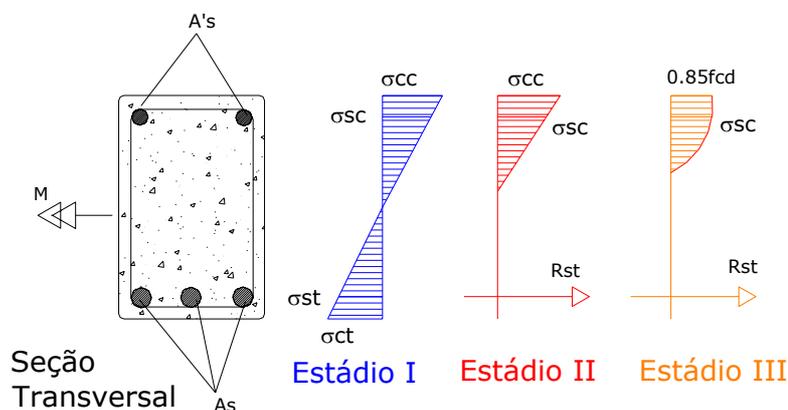
É importante chamar a atenção que o modelo mecânico adotado, por levar em consideração a perda de rigidez dos elementos estruturais de concreto através da mecânica do dano, torna-se naturalmente mais caro do ponto de vista computacional. SOARES (2001), ao tratar de pórticos planos de concreto armado, considerou, para o concreto, relações constitutivas fechadas propostas pelo CEB MC 90 e pela NBR 6118, consumindo menor tempo de processamento.

## **3.2 Formulação para o Concreto**

### **3.2.1 Generalidades**

O concreto é um material composto por uma matriz de cimento (argamassa) e os agregados graúdos. A interface que se forma entre a matriz de cimento e a superfície dos agregados, segundo MEHTA & MONTEIRO (1994), é chamada de zona de transição. Esta região de transição é caracterizada por apresentar cristais de resistência muito baixa, formando, na própria fase de hidratação do cimento, microfissuras e microporos antes mesmo de atuar qualquer tipo de carregamento sobre a estrutura. Por conta desses fenômenos inerentes ao material, o concreto apresenta um forte caráter não-linear. A situação se agrava à medida que o concreto passa a ser solicitado. Com o aumento dos níveis de tensão de tração, as fissuras começam a se expandir deixando a zona de transição e atingindo a matriz de cimento. Ocorre, portanto, o aumento das áreas fissuradas ocasionando perda de área resistente do material. O trabalho de BOTTA (1998) apresenta uma descrição mais detalhada sobre a expansão da microfissuração com o aumento das tensões. A consequência de todo esse processo culmina na resposta não-linear observada na curva tensão-deformação do concreto.

Existem três situações que procuram descrever os estágios de tensão em uma seção de concreto armado, formulando hipóteses para o dimensionamento e verificação em serviço de peças de concreto armado: são os chamados estádios de comportamento e podem ser vistos na Fig. (3.1).



**Figura 3.1 – Diagramas de tensão referentes aos estádios do concreto**

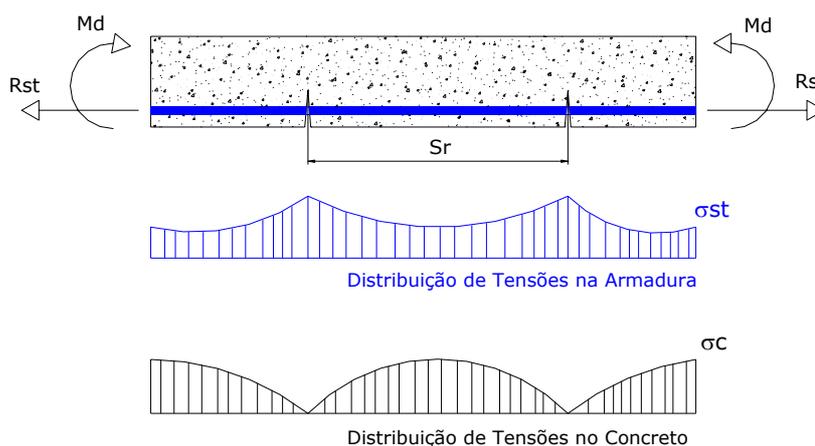
Quando uma seção de concreto armado é submetida a baixas solicitações, o concreto ainda resiste às tensões de tração e a região situada abaixo da linha neutra da seção não se encontra fissurada. Esta situação é denominada de Estádio I de comportamento do material.

O Estádio II é caracterizado quando as tensões na região tracionada superam a resistência à tração do concreto. O concreto, abaixo da linha neutra, encontra-se fissurado e não contribui para resistir às tensões de tração. Admite-se ainda que a distribuição das tensões de compressão seja linear.

Com o aumento do carregamento, atinge-se, em determinado instante, o limite de resistência da seção definido pelo momento máximo suportado. Nessa situação, caracteriza-se o Estádio III com o concreto já plastificado. A NBR 6118:2003 prescreve que a consideração desses limites se torna importante para verificação das estruturas em serviço e em seu dimensionamento.

A fissuração numa peça de concreto armado ocorre nas seções de maiores tensões de tração. Dessa forma, as seções da peça não apresentam um estágio único de comportamento. De acordo com NEVES (2000), algumas seções entre as fissuras permanecem não fissuradas, gerando, assim, um mecanismo particular de absorção de esforços. Isto ocorre devido ao fato de ser nula a tensão de tração no concreto na seção fissurada, ao passo que nas demais seções entre duas fissuras consecutivas, as tensões tem valores diferentes de zero e crescentes à medida que a seção se afasta da fissura. Tal fato se justifica pela presença da armadura na

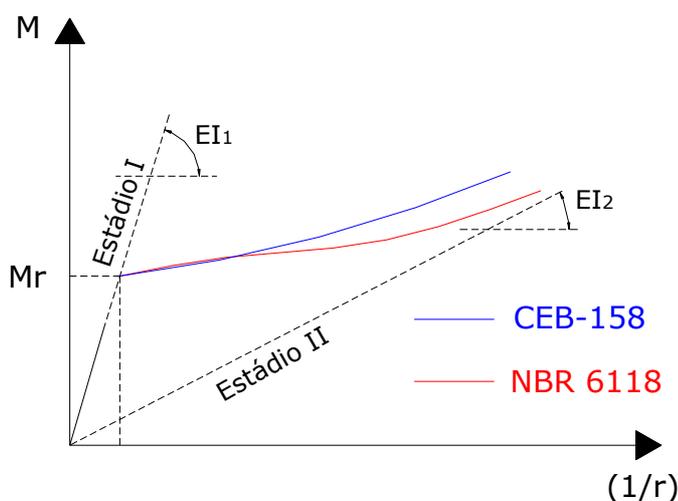
região tracionada da seção transversal. Para manter o equilíbrio, a armadura recebe o esforço que deveria ser resistido pelo concreto, havendo assim um aumento local da tensão de tração na região da armadura que atravessa a fissura. Diante desse fato, um elemento estrutural de concreto armado pode ter seu comportamento melhor descrito por uma situação intermediária entre os estádios de tensão previamente considerados. A Fig. (3.2) retrata esse efeito, denominado de “*tension stiffening*”.



**Figura 3.2 – Fenômeno do “tension stiffening” no concreto armado**

Diante desse modelo de comportamento, esclarece-se porque o concreto apresenta um mecanismo resistente tão complexo. Verifica-se que a distribuição de tensões é diferente para cada seção de uma peça de concreto armado e que, na verdade, o comportamento real em serviço é definido por uma situação intermediária entre os estádios I e II.

Os modelos mecânicos baseados na relação momento-curvatura são bastante interessantes para ilustrar essa situação intermediária de comportamento. Basicamente, esses modelos admitem estágio I até que o momento fletor solicitante atinja o valor do momento de fissuração da seção. A partir daí, existem várias propostas para considerar o estágio intermediário do concreto, tais como Branson (1966), Debernardi (1983), Ghali & Favre (1986). A NBR 6118:2003 indica que o dimensionamento das estruturas de concreto armado deve ser feito baseado nas hipóteses do estágio III, enquanto que as verificações em serviço são feitas considerando o estágio II. A norma brasileira ainda permite, para o caso de verificações de flechas, a utilização do modelo proposto por Branson (1996). O CEB-158 propõe um modelo momento-curvatura menos conservador que o modelo adotado pela norma brasileira, uma vez que o valor da rigidez  $EI$  do CEB não se aproxima tanto do valor correspondente ao estágio II, Fig (3.3).



**Figura 3.3 – Diagramas momento-curvatura propostos pela NBR 6118 e CEB-158**

Por outro lado, modelos mecânicos baseados nas relações tensão-deformação também podem ser empregados com bastante sucesso na análise de estruturas de concreto armado. Na verdade, tanto relações tensão-deformação como momento-curvatura, desde que formuladas adequadamente, podem conduzir a bons resultados. Entretanto, modelos escritos em função das relações tensão-deformação apresentam caráter mais geral. Por conta disso, o modelo mecânico adotado no trabalho é escrito em termos de tensão-deformação para uma seção de concreto armado, com obtenção dos esforços através de processos de integração numérica.

### 3.2.2 Modelo Constitutivo de Dano proposto por Mazars

De acordo com ÁLVARES (1993), o conceito de dano foi proposto por Kachanov (1958) na tentativa de modelar o efeito da fissuração distribuída na ruptura frágil em metais após um período de deformação lenta. Posteriormente, a denominada Mecânica do Dano no Contínuo foi formalizada com base na termodinâmica dos processos irreversíveis por Lemaitre & Chaboche (1985).

A mecânica do dano foi desenvolvida com o intuito de analisar o efeito da deterioração do material nas propriedades dos sólidos solicitados por ações mecânicas ou térmicas. Por conta disso, a teoria de dano é, sem dúvida, capaz de formular modelos realísticos para representar o concreto, uma vez que este material apresenta um comportamento fortemente não-linear em virtude da microfissuração (processo de

deterioração do concreto). Esse processo de deterioração é relativo à fissuração que, por sua vez, causa união e crescimento das microfissuras e outros tipos de cavidades com distribuição e orientação não uniformes. Com isso, os principais efeitos do dano no comportamento mecânico macroscópico são a redução da rigidez (módulo de elasticidade) e da resistência (“softening”).

DRIEMEIER (1995) afirma que o desenvolvimento do dano no concreto, associado à microfissuração pode ser considerado contínuo e se inicia com baixas tensões ou deformações. Além disso, as deformações permanentes são também devidas ao processo de evolução de microfissuras, podendo-se acoplar os efeitos da plastificação e danificação em um único modelo. A autora também considera solicitações cíclicas e faz uma extensão do modelo de Mazars através da adoção de um parâmetro obtido pela calibração da curva de carregamento cíclico de modo que seja capaz de reproduzir a envoltória da curva tensão-deformação obtida por carregamento monotônico.

Para maiores detalhes sobre a evolução dos modelos de dano ao longo do tempo, o trabalho de BOTTA (1998) traz um bom histórico sobre a mecânica do dano e suas aplicações estudadas por vários pesquisadores na análise do comportamento de estruturas.

Dentre os modelos de dano encontrados na literatura, o modelo de Mazars pode ser considerado como sendo um dos mais simples, porém com boa adequação à modelagem de estruturas de barras de concreto armado. Os trabalhos de PITUBA (1998), BOTTA (1998), NEVES (2000) e BRANCO (2002) atestam a eficiência do referido modelo de dano nas modelagens propostas para o presente trabalho. A seguir, descreve-se o modelo de dano de Mazars.

#### **Hipóteses Fundamentais do Modelo**

- a) O concreto, na evolução do dano, apresenta comportamento elástico. Isto significa que as deformações permanentes evidenciadas em comportamento experimental, em situação de descarregamento são desprezadas, Fig (3.4);
- b) O dano é causado somente pela existência de alongamentos ao menos ao longo de uma das direções principais de deformação. Significa dizer que a danificação ocorre por deformações de tração;
- c) Análises experimentais evidenciam que o dano conduz, de um modo geral, a um estado de anisotropia induzida do concreto. Para reduzir o número de variáveis internas, o modelo é simplificado considerando-se que o dano seja isótropo, ou seja, o estado de danificação num ponto é definido por uma única grandeza escalar;

- d) O dano é representado localmente por uma variável escalar  $D$  que pode variar de 0 a 1. Quando  $D = 0$ , tem-se material totalmente íntegro isento de qualquer defeito e quando  $D = 1$ , significa que o material se encontra totalmente deteriorado. A evolução da variável de dano ocorre quando um determinado valor de referência para o alongamento equivalente é superado pela deformação equivalente, que é função do estado de deformações da estrutura.

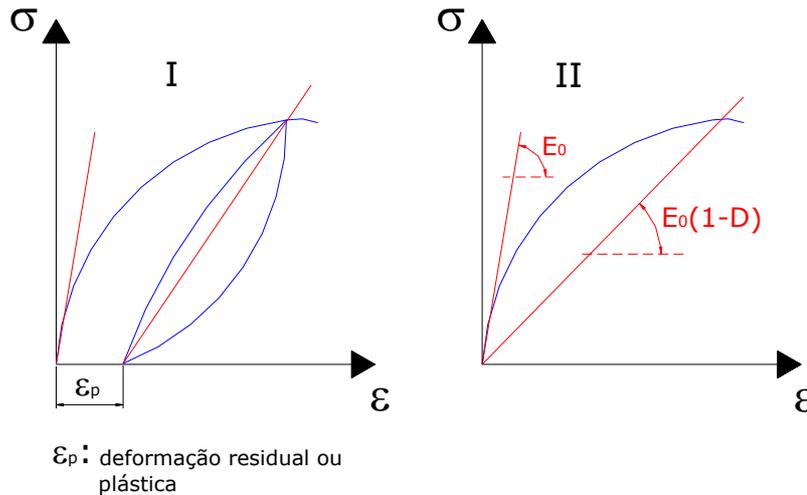


Figura 3.4 – I: Comportamento Experimental do Concreto, II: Modelo de Dano de Mazars

### Deformação Equivalente

Para representar o estado de alongamento em um determinado ponto da estrutura, define-se a grandeza deformação equivalente a partir de:

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{(\epsilon_1)_+^2 + (\epsilon_2)_+^2 + (\epsilon_3)_+^2} \quad (3.1)$$

onde os  $(\epsilon_i)_+^2$  representam as componentes positivas do vetor de deformações principais, dadas por:

$$(\epsilon_i)_+^2 = \frac{1}{2} \cdot [\epsilon_i + |\epsilon_i|] \quad (3.2)$$

$$\text{com } (\epsilon_i)_+ = \begin{cases} \epsilon_i & \Rightarrow \epsilon_i > 0 \\ 0 & \Rightarrow \epsilon_i < 0 \end{cases}$$

O modelo admite que o início da danificação acontece quando o valor da deformação equivalente atingir o valor inicial de deformação. O valor inicial de deformação é definido como o valor correspondente ao pico de tensão em um ensaio uniaxial de tração, representado por  $\epsilon_{d0}$ . Em situações em que não se têm resultados de ensaios de tração uniaxial em corpos

de prova de concreto, pode-se obter o valor de  $\varepsilon_{d0}$  a partir da resistência característica à compressão do concreto como segue:

*Ensaio de compressão simples em corpos de prova do concreto:  $f_{ck}$  [MPa];*

*Resistência à tração: A NBR 6118:2003 prescreve que na falta de resultados de ensaios de resistência à tração indireta e resistência à tração na flexão, pode-se considerar um valor médio para a resistência à tração do concreto, definido por,*

$$f_{ct,m} = 0.3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad (3.3)$$

$$f_{ctk,inf} = 0.7 \cdot f_{ct,m} \quad (3.4)$$

$$f_{ctk,sup} = 1.3 \cdot f_{ct,m} \quad (3.5)$$

*Assim, a favor da segurança, considera-se que a resistência à tração do concreto seja dada pela Eq. (3.4). Todos os valores fornecidos e obtidos nas Eq. (3.3), (3.4) e (3.5) são expressos em MPa.*

*Módulo de elasticidade longitudinal do concreto:  $E_{ci}$  [MPa] dado por,*

$$E_{ci} = 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (3.6)$$

*Valor inicial de deformação:  $\varepsilon_{d0}$  dado por,*

$$\varepsilon_{d0} = \frac{f_{ctk,inf}}{E_{ci}} \quad (3.7)$$

### **Critério de Danificação**

Partindo-se da hipótese que a danificação seja iniciada a partir de deformações equivalentes maiores que  $\varepsilon_{d0}$ , pode-se definir o seguinte critério de danificação:

$$f(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - \hat{S}(D) \leq 0 \quad (3.8)$$

onde  $\hat{S}(D)$  representa a deformação equivalente em função do dano. Significa que a danificação terá início somente quando  $f(\tilde{\varepsilon}, D) > 0$ . Na primeira iteração do processo incremental, a variável  $\hat{S}(D)$  receberá o valor da deformação inicial  $\varepsilon_{d0}$ .

A variável escalar do dano D apresenta lei de evolução definida em taxas de variação no tempo, dada por:

$$\dot{D} = 0 \text{ se } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ e } \dot{f} < 0 \quad (3.9)$$

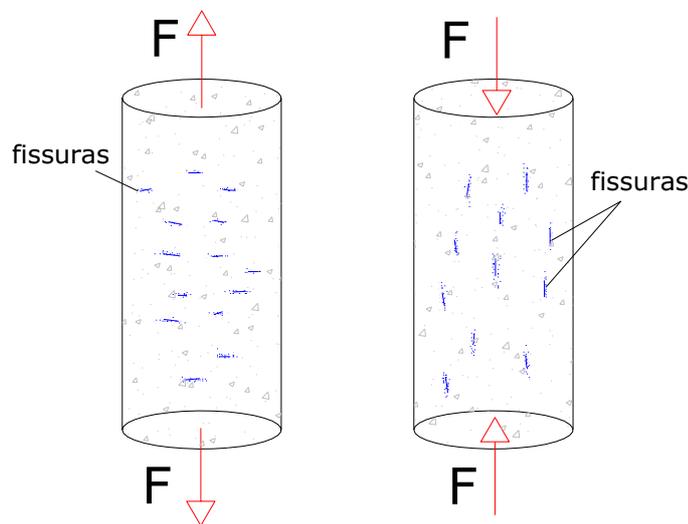
$$\dot{D} = F(\tilde{\varepsilon}) \cdot (\dot{\tilde{\varepsilon}})_+ \text{ se } \dot{f} = 0 \text{ e } \dot{f} = 0 \quad (3.10)$$

onde a função  $F(\tilde{\varepsilon})$  é contínua e positiva, baseada em resultados experimentais de modo a reproduzir as curvas de ensaios uniaxiais de tração e compressão corpos de prova de concreto. Estas funções são escritas em termos de parâmetros numéricos internos do modelo que tem o objetivo de capturar, da melhor forma possível, a curva tensão-deformação obtida nos ensaios. Vale ressaltar a correspondência entre a variação de deformação e a variação do dano, como mostra:

$$\dot{\tilde{\varepsilon}} \geq 0 \Rightarrow \dot{D} \geq 0 \quad (3.11)$$

### Leis de Evolução

O modelo de dano de Mazars define duas variáveis independentes,  $D_T$  e  $D_C$ , que representam os ramos não lineares das curvas tensão-deformação do concreto à tração e à compressão respectivamente. O procedimento é perfeitamente justificável, uma vez que o comportamento do concreto é totalmente diferenciado em situações de tração e compressão, com desenvolvimento diferenciado do processo de fissuração. Na tração, as fissuras se desenvolvem numa direção perpendicular à direção da carga, ao passo que na compressão, as fissuras surgem paralelas à direção da carga, Fig (3.5).



**Figura 3.5 – Panorama de fissuração no concreto à tração e à compressão respectivamente**

Além disso, uma das características do modelo de Mazars é a formulação para carregamento crescente, de modo que em problemas nos quais descarregamentos possuem influência significativa, há a necessidade de se considerar o comportamento unilateral do concreto, isto é, fenômeno de recuperação da rigidez provocado pelo fechamento das fissuras

quando uma peça de concreto é tracionada e posteriormente comprimida. Portanto, definem-se as taxas para as variáveis de dano como segue:

$$\dot{D}_T = F_T(\tilde{\varepsilon}) \cdot (\dot{\tilde{\varepsilon}})_+ \quad (3.12)$$

$$\dot{D}_C = F_C(\tilde{\varepsilon}) \cdot (\dot{\tilde{\varepsilon}})_+ \quad (3.13)$$

Integrando-se as Eq. (3.12) e (3.13) em relação ao tempo, obtém-se os valores de  $D_T$  e  $D_C$  dados por:

$$D_T = 1 - \frac{\varepsilon_{d0} \cdot (1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{\exp[B_T \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (3.14)$$

$$D_C = 1 - \frac{\varepsilon_{d0} \cdot (1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_C}{\exp[B_C \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (3.15)$$

onde os valores  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $A_C$ ,  $B_C$  e  $\varepsilon_{d0}$  são parâmetros internos do modelo, identificados experimentalmente ou através de ajustes teóricos das expressões das variáveis de dano com formulações de normas, de modo a aproximar ao máximo possível a curva tensão-deformação obtida nos ensaios ou com as leis constitutivas propostas pelas normas e códigos de projeto. Mazars propõe limites de variação para os parâmetros do modelo baseado nas análises experimentais, de tal forma que:

$$\begin{aligned} 0.7 \leq A_T \leq 1 \quad ; \quad 1 \leq A_C \leq 1.5 \quad ; \quad 10^{-5} \leq \varepsilon_{d0} \leq 10^{-4} \\ 10^4 \leq B_T \leq 10^5 \quad ; \quad 10^3 \leq B_C \leq 2 \cdot 10^3 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Na Fig. (3.6) encontram-se as curvas teóricas para os casos uniaxiais de tração e compressão, na qual pode ser verificada a inexistência de deformações permanentes no modelo teórico, bem como a diminuição da rigidez nas retas de descarregamento.

O modelo propõe que a variável de dano seja composta por uma parcela de dano correspondente à tração e outra parcela correspondente à compressão. Assim, o cálculo da variável de dano  $D$ , é dado por:

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (3.17)$$

Os valores de  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$  são obtidos em função do tipo de solicitação sobre a estrutura, ou seja:

$$\text{Tração uniaxial: } \alpha_T = 1; \alpha_C = 0; D = D_T$$

$$\text{Compressão uniaxial: } \alpha_T = 0; \alpha_C = 1; D = D_C$$

Estado multiaxial:  $\alpha_T + \alpha_C = 1$ ;  $D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C$

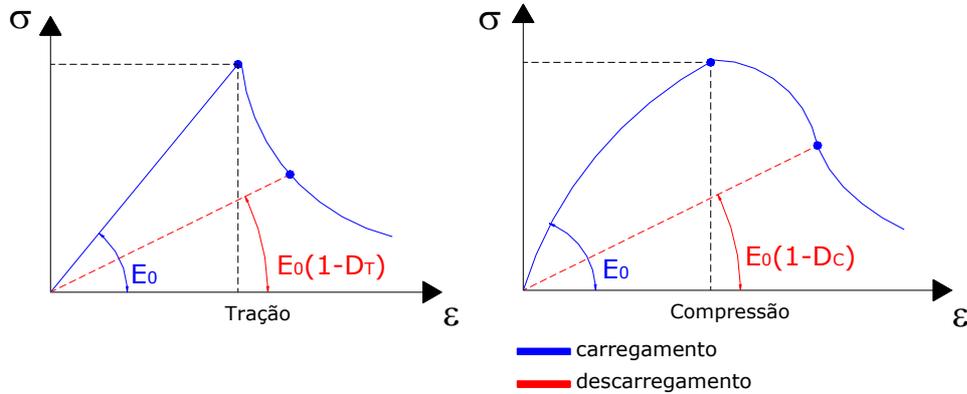


Figura 3.6 – Diagramas teóricos de tensão-deformação para o concreto

### Tensor de Tensões e Tensor de Deformações

As deformações são calculadas a cada iteração do processo incremental-iterativo nas fibras correspondentes aos pontos de Gauss ao longo da seção transversal dos elementos. Na seqüência, utilizando a Lei de Hooke, calcula-se o tensor de deformações principais em cada ponto de Gauss. Ao relacionar o tensor de deformações principais com o tensor de constantes elásticas  $\underline{\underline{D}}_0$ , obtém-se o tensor de tensões principais da iteração também em cada ponto, conforme segue:

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \underline{\underline{D}}_0 \cdot \underline{\varepsilon} \quad (3.18)$$

Por conta do comportamento distinto do concreto à tração e à compressão, o tensor representado pela Eq. (3.18) é decomposto em uma parcela positiva e outra negativa, de acordo com:

$$\underline{\tilde{\sigma}}_i = (\underline{\sigma}_i)_+ + (\underline{\sigma}_i)_- \quad (3.19)$$

$$(\underline{\sigma}_i)_+ = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_i + |\sigma_i|) \quad (3.20)$$

$$(\underline{\sigma}_i)_- = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_i - |\sigma_i|) \quad (3.21)$$

Verifica-se, portanto que o tensor  $(\underline{\sigma})_+$  é composto somente de parcelas positivas, enquanto o tensor  $(\underline{\sigma})_-$  somente pelas parcelas negativas, sendo que os demais termos, em ambos os tensores, são todos nulos.

O mesmo raciocínio pode ser adotado para o tensor de deformações principais, decompondo-o em duas partes, de modo que uma parte represente as deformações por tração (alongamento) e a outra, as deformações por compressão (encurtamento), como segue:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_T + \underline{\underline{\varepsilon}}_C \quad (3.22)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_T = \frac{1+\nu}{E} \cdot (\underline{\underline{\sigma}})_+ - \frac{\nu}{E} \cdot \left( \sum \underline{\underline{\sigma}}_i \right)_+ \cdot \underline{\underline{I}} \quad (3.23)$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_C = \frac{1+\nu}{E} \cdot (\underline{\underline{\sigma}})_- - \frac{\nu}{E} \cdot \left( \sum \underline{\underline{\sigma}}_i \right)_- \cdot \underline{\underline{I}} \quad (3.24)$$

onde  $\underline{\underline{I}}$  é um tensor identidade de quarta ordem,  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson do material correspondente.

Como os tensores  $\underline{\underline{\varepsilon}}_T$  e  $\underline{\underline{\varepsilon}}_C$  podem conter valores positivos e negativos, o modelo separa-os em partes positivas e negativas dadas por  $(\underline{\underline{\varepsilon}}_T)_+$  e  $(\underline{\underline{\varepsilon}}_C)_+$ . A partir daí define-se:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_V^+ = (\underline{\underline{\varepsilon}}_{Ti})_+ + (\underline{\underline{\varepsilon}}_{Ci})_+ \quad (3.25)$$

Com isso é possível calcular os valores dos coeficientes  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$  como segue:

$$\alpha_T = \frac{\sum (\underline{\underline{\varepsilon}}_{Ti})_+}{\underline{\underline{\varepsilon}}_V^+} \quad (3.26)$$

$$\alpha_C = \frac{\sum (\underline{\underline{\varepsilon}}_{Ci})_+}{\underline{\underline{\varepsilon}}_V^+} \quad (3.27)$$

### **Relação Constitutiva**

Conhecidos os coeficientes  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$ , e os parâmetros  $D_T$  e  $D_C$ , calcula-se a variável  $D$  e, conseqüentemente, com a relação constitutiva, determina-se o tensor de tensões reais, conforme segue:

$$\underline{\underline{\sigma}} = (1 - D) \cdot \underline{\underline{D}}_0 \cdot \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.28)$$

### 3.2.3 Adaptação do Modelo de Dano para o Problema Probabilístico

Conforme já foi visto, o modelo de dano de Mazars depende de cinco parâmetros básicos:  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $A_C$ ,  $B_C$  e  $\varepsilon_{d0}$ . Esses parâmetros são variáveis internas do modelo que procuram reproduzir, da maneira mais fiel possível, a curva tensão-deformação de ensaios à

tração ( $A_T$  e  $B_T$ ) e à compressão ( $A_C$  e  $B_C$ ) do concreto. ÁLVARES (1993) fez uma identificação paramétrica do modelo de Mazars para concretos com resistência média à compressão aos 21 dias de 25.509 MPa e desvio padrão de 2.785 MPa. O autor identificou os parâmetros  $A_C$  e  $B_C$  baseando-se na região pós-pico da curva tensão-deformação do ensaio de compressão simples. As leituras foram feitas por extensômetros internos para que a fissuração externa não interferisse nas medidas. Para os valores de deformação limite à tração  $\varepsilon_{d0}$ , foram realizados ensaios de compressão diametral em corpos de prova cilíndricos, com diâmetro de 15 cm e espessura de 7.5 cm. Quanto aos parâmetros  $A_T$  e  $B_T$ , por razões numéricas, foram obtidos indiretamente a partir de indicações bibliográficas e de uma correlação com a energia de fratura em uma análise plana. É importante ressaltar que todos esses ensaios foram realizados para concretos com resistência média de 25.509 MPa. Portanto, a identificação paramétrica proposta por Álvares (1993) é válida somente para concretos com resistência à compressão simples de  $25.509 \pm 2.785 MPa$ .

A análise mecânico-probabilística de estruturas tem como requisito fundamental, a escolha adequada do modelo mecânico. Este, por sua vez, tem a responsabilidade de representar, da maneira mais fiel possível, as estruturas em questão. Os modelos de dano são uma ótima opção para as estruturas de concreto armado, por levarem em consideração a perda de rigidez por conta da fissuração. Entretanto, os modelos de dano têm o inconveniente de dependerem de parâmetros numéricos consistentes para representar o comportamento não-linear do concreto tanto na tração como na compressão. Esses parâmetros, conforme já citado anteriormente, são obtidos através de ensaios de tração e compressão em corpos de prova de concreto, sendo válidos para a resistência especificada. Ocorre que, na análise probabilística, a resistência do concreto pode ser tomada como uma variável aleatória, assim como diversas outras variáveis do problema. Para avaliar a confiabilidade de um sistema, escolhe-se uma função estado limite, de modo que seja possível comparar grandezas de referência e avaliar essa função, caracterizando falha ou segurança. A determinação da resistência do sistema estrutural acontece por meio de inúmeras chamadas do modelo mecânico em elementos finitos, o qual depende de uma série de parâmetros que descrevem o sistema tais como, dimensões da estrutura, carregamentos e resistência dos materiais (concreto e aço). Para cada chamada do modelo mecânico, uma resistência do concreto é definida mediante critérios determinísticos gerados por modificações sobre seu valor médio. Assim, cada resposta mecânica está associada a um valor da resistência do concreto. Essa resposta mecânica pode ser, por exemplo, a carga última da estrutura.

A resistência do concreto é uma variável aleatória, ou seja, é caracterizada por incertezas sobre seu valor. Na análise da mesma estrutura, várias resistências do concreto são geradas e, assim, várias respostas de cargas últimas são também encontradas. Cada valor de carga última depende do caráter não-linear do concreto que, por sua vez, é governado pelo modelo de dano de Mazars. Portanto verifica-se que, os parâmetros que descrevem o modelo de dano exercem forte influência sobre a resposta da estrutura e, conseqüentemente, sobre o valor da carga última. Assim, somente um conjunto de parâmetros de dano não é suficiente para estudar o comportamento mecânico-probabilístico das estruturas do concreto, uma vez que os parâmetros do modelo dependem diretamente da resistência à compressão do concreto.

Surge então, a necessidade de obter um conjunto de parâmetros  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $A_C$ ,  $B_C$  e  $\varepsilon_{d0}$  para cada valor de resistência do concreto.

### **Metodologia para obtenção dos Parâmetros do Modelo de Dano**

Diante do fato de que os parâmetros de dano não devem ser constantes na análise de confiabilidade, adotou-se o mesmo procedimento de ÁLVARES (1993) para identificação paramétrica do modelo. A diferença é que Álvares calibrou os parâmetros em função dos ensaios de compressão simples e compressão diametral e, no presente trabalho, devido à impossibilidade de se realizar ensaios para todas as resistências plausíveis do concreto, a calibração foi feita baseando-se no modelo constitutivo para o concreto comprimido proposto pela NBR 6118:1978 e adotado por SOARES (2001), conforme segue:

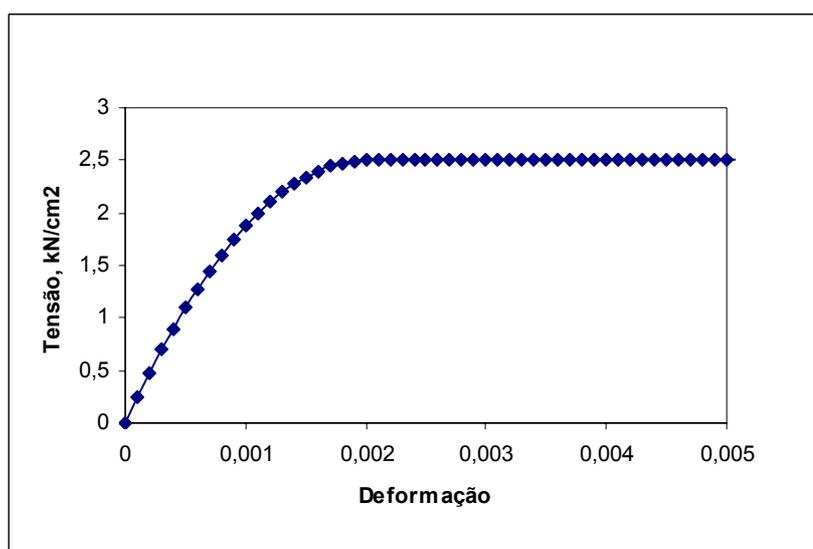
$$\sigma_C = -f_{cm} \cdot \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \Leftrightarrow \varepsilon < \varepsilon_0$$

$$\sigma_C = -f_{cm} \quad \Leftrightarrow \varepsilon > \varepsilon_0 \quad (3.29)$$

onde  $f_{cm}$  é o valor médio da resistência à compressão do concreto obtido em ensaios uniaxiais,  $\sigma_C$  é a tensão no concreto,  $\varepsilon_0$  é a deformação correspondente à tensão máxima, ( $\varepsilon_0 = -0.002$ ) e  $\varepsilon_c$  é a deformação no concreto. Preferiu-se adotar o modelo constitutivo para o concreto baseado na norma antiga, porque o cálculo da tensão no concreto depende diretamente de sua resistência média, ao passo que na NBR 6118:2003, a mesma relação constitutiva é escrita em função de  $f_{cd}$ . Assim, a calibração é feita em função da resistência média e não de um valor ponderado já duas vezes (resistência média para resistência característica que, por sua vez, se transforma em resistência de cálculo). Convém deixar claro que mesmo baseando-se em um modelo de norma para a calibração, ainda assim,

o modelo constitutivo representa um modelo de dano, que por natureza, expressa de maneira mais realista o comportamento do material. Entretanto, ressalta-se que o modo ideal de calibrar o modelo e obter seus parâmetros deve ser realizado através de um conjunto de diagramas tensão-deformação, oriundos de ensaios em laboratório para um determinado conjunto de resistências médias em corpos de prova de concreto.

Verifica-se pela Eq. (3.29) que o concreto apresenta comportamento não-linear para  $\varepsilon < \varepsilon_0$  e comportamento plástico para  $\varepsilon > \varepsilon_0$ , Fig. (3.7).



**Figura 3.7 – Relação constitutiva para o concreto comprimido segundo a NBR 6118:1978**

Os parâmetros a serem calibrados são somente os parâmetros que descrevem a compressão,  $A_C$  e  $B_C$ . Para calibrar os parâmetros  $A_T$  e  $B_T$ , ÁLVARES (1993) pondera que é necessário levar em consideração a energia dissipada localmente para a evolução dos defeitos. Assim, pode-se calibrar  $B_T$  fixando-se  $A_T$  igual a 1, de modo que a energia dissipada ou energia de fratura por unidade de área passe a ser considerada como uma variável do modelo. Vale ressaltar que os parâmetros  $A_T$  e  $B_T$  influenciam a inclinação inicial e o sinal do trecho não-linear à tração, bem como o valor da assíntota horizontal e o valor de pico do diagrama tensão-deformação à tração. Dessa forma, os parâmetros de tração  $A_T$  e  $B_T$  foram considerados constantes e adotados conforme a literatura para o presente trabalho.

A estratégia adotada consiste em minimizar uma função erro, escrita como um critério para avaliar a resposta numérica em relação à resposta experimental. No caso, o critério é comparar as respostas obtidas pela relação constitutiva da norma brasileira, Eq. (3.29) com a relação tensão-deformação penalizada pela variável de dano, Eq. (3.28) com  $D = D_C$ . A função erro pode ser escrita como segue:

$$E = E(y^c(x, \underline{a}), y^s(x)) = E(\underline{a}) \quad (3.30)$$

onde  $\underline{a}$  é o vetor dos  $n$  parâmetros a serem identificados, no caso  $A_C$  e  $B_C$ ,  $y^c(x, \underline{a})$  é a resposta numérica fornecida pelo modelo de dano dependente dos parâmetros  $\underline{a}$  e  $y^s(x)$  é a resposta experimental, que no caso, é a resposta fornecida pela relação constitutiva da norma brasileira.

A função erro é definida como uma integral ou uma somatória sobre um intervalo de observação pré-fixado. No caso, fixou-se inicialmente o intervalo em 100 passos, variando a deformação  $\varepsilon_C$  de zero até 0.01. Deste modo, a Eq. (3.30) passa a ser escrita como um somatório, uma vez que a resposta numérica é fornecida em passos discretos, como segue:

$$E(a_i) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [y_k^c(x_k, a_k) - y_k^s(x_k)]^2 \quad (3.31)$$

onde  $N$  é o número de passos.

Após a definição da função erro, o problema da identificação consiste em determinar o vetor de parâmetros que resulta no menor erro, ou seja, a resposta numérica descrita pelo modelo de dano que melhor representa a relação constitutiva proposta pela NBR 6118:1978. Como a deformação máxima do concreto comprimido na flexão é de 3.5 ‰, optou-se por restringir o número de passos, porém mantendo-se a variação de deformação em 0.0001. Isto significa que ao invés de  $N = 100$ , têm-se  $N = 35$ , o que melhora o intervalo significativo de comparação entre os modelos.

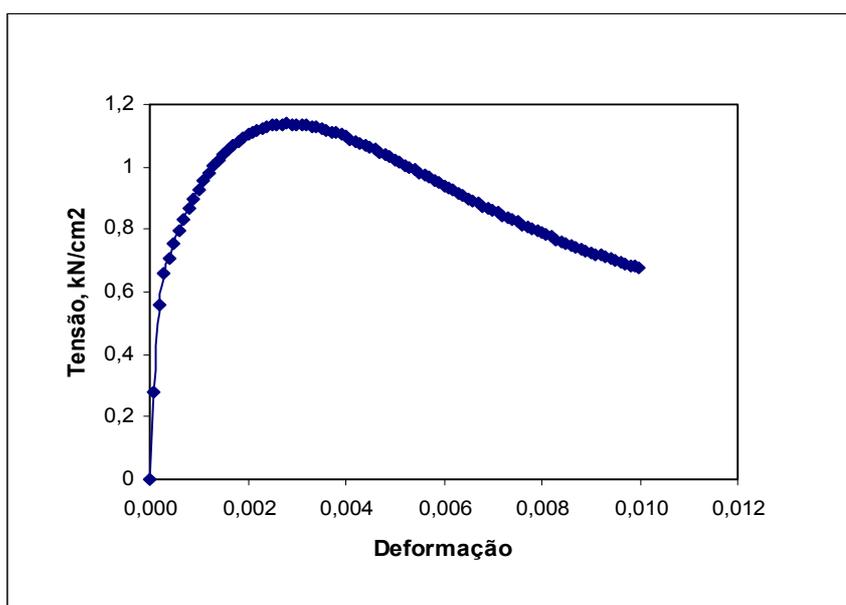


Figura 3.8 – Relação constitutiva do modelo de dano de Mazars na compressão para  $N=100$

A seguir são mostradas as curvas que relacionam a variação do erro e dos parâmetros  $A_C$  e  $B_C$  em função da resistência à compressão do concreto. Verificou-se que o erro se mantém aproximadamente constante, em torno de 5%, até resistências do concreto de 30 MPa, aumentando significativamente, quando a resistência aumenta a partir desse valor, Fig. (3.9). Isto ocorre porque a variável de dano apresenta uma certa instabilidade logo no início do processo de danificação, por conta, provavelmente, do comportamento altamente frágil do concreto à medida que sua resistência aumenta. Logo depois, verifica-se que o dano evolui gradativamente, de forma estável, com o aumento da deformação conforme Fig. (3.12). Conseqüentemente, as tensões sofrem oscilações em torno desses pontos dificultando a representação do diagrama da norma brasileira, o que aumenta o erro.

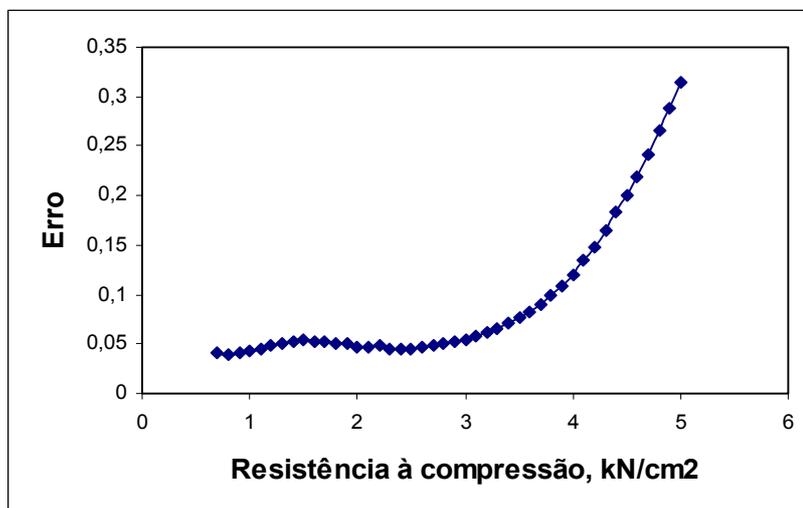


Figura 3.9 – Curva erro relativo x resistência à compressão do concreto

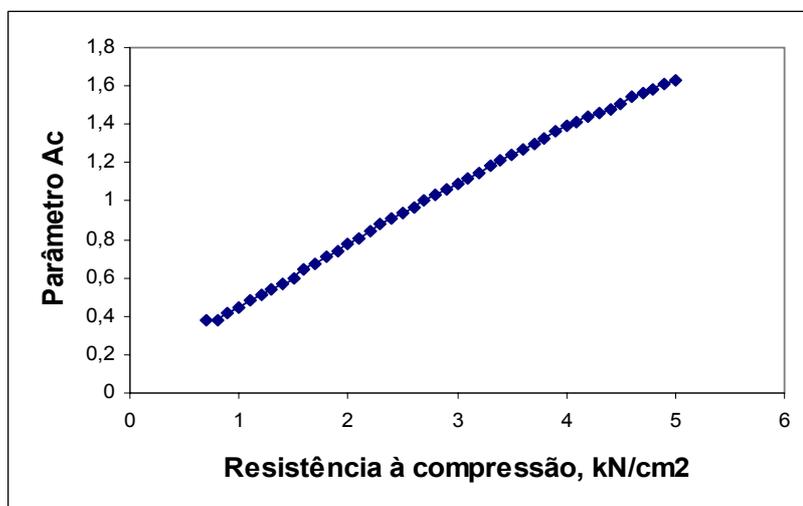
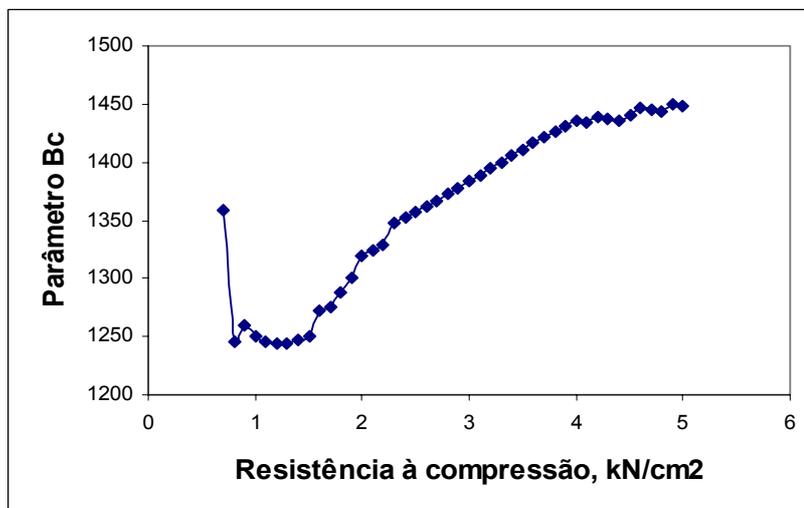
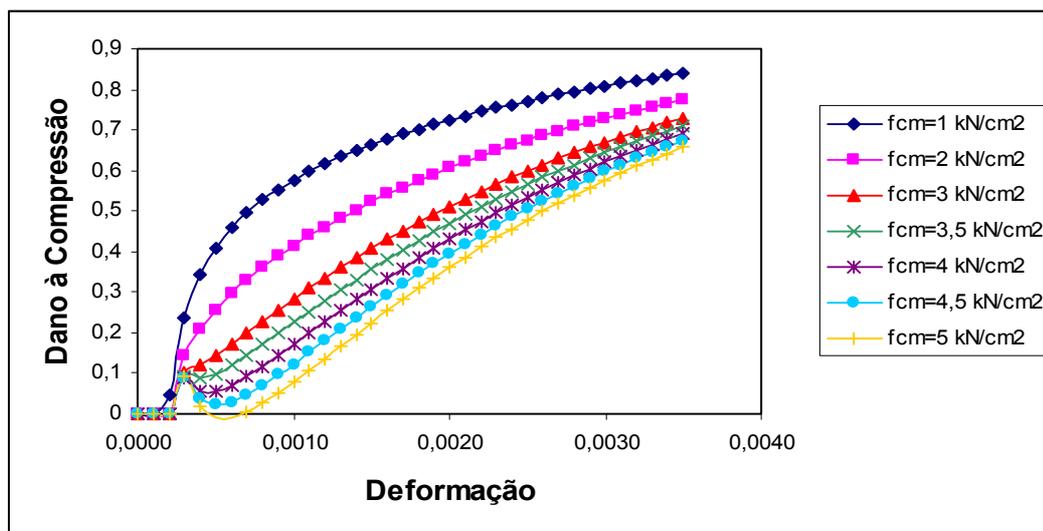


Figura 3.10 – Evolução do parâmetro  $A_C$

Figura 3.11 – Evolução do parâmetro  $B_C$ Figura 3.12 – Evolução da variável de dano  $D_C$ 

Os parâmetros foram implementados como variáveis aleatórias discretas dependentes da resistência à compressão do concreto sendo alocados a cada chamada do modelo mecânico. Com isso, obteve-se a adaptação do modelo de dano determinístico para a forma probabilística com  $A_C$ ,  $B_C$  e  $\varepsilon_{d0}$  como variáveis aleatórias discretas.

A seguir mostra-se a influência dos parâmetros  $A_C$  e  $B_C$  sobre a curva tensão-deformação do concreto comprimido.

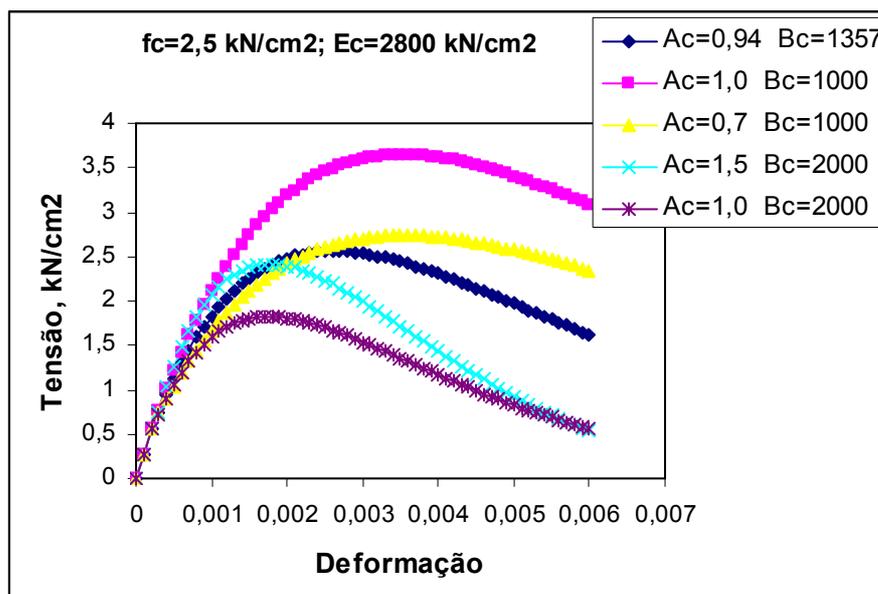


Figura 3.13 – Influência dos parâmetros  $A_c$  e  $B_c$

Verifica-se, na Fig (3.13), a importância em obter os valores de  $A_c$  e  $B_c$  de maneira adequada a cada resistência do concreto. Todas as curvas foram determinadas para a resistência à compressão do concreto de 25 MPa variando-se os parâmetros de dano. Conclui-se que a parametrização do modelo de dano é muito importante na representação adequada do comportamento do material e, principalmente, quando se trata de um problema probabilístico, no qual se tem variação da resistência do concreto.

### 3.3 Formulação para o Aço

#### 3.3.1 Generalidades

Diferente do concreto, a resposta mecânica do aço frente às solicitações normais é bastante previsível. Isto ocorre por conta do melhor controle de produção dos aços, com garantia de homogeneidade do material, o que acarreta baixa variabilidade em suas propriedades mecânicas. Os estudos da microestrutura dos metais indicam que, sob determinados estados de tensão ocorrem discordâncias, isto é, movimentos entre os cristais do metal, sem que haja perda de coesão ou ruptura interna. Esse fenômeno pode ser observado após ser atingido o limite de escoamento do material, a partir do qual a relação de proporcionalidade entre tensões e deformações não coincide mais com a inicial. Ocorre um

rearranjo na estrutura interna do material conferindo-lhe novo comportamento quando solicitado novamente.

Por conta desse tipo de comportamento, a Teoria da Plasticidade revela-se apropriada para descrever o comportamento dos metais, uma vez que a plastificação após o escoamento e a ductilidade são características marcantes nos metais. Os modelos propostos pela teoria da plasticidade para representar o aço baseiam-se no surgimento e acúmulo de deformações residuais ou plásticas permanentes. Além disso, em virtude do bom comportamento do aço, os modelos elastoplásticos uniaxiais são muito interessantes para simular o material.

A modelagem do comportamento uniaxial do aço define alguns aspectos da relação constitutiva elastoplástica que devem ser citados. Primeiramente, a deformação correspondente a um certo nível de tensão é dependente da “história” do carregamento, que é registrada pela deformação plástica acumulada  $\varepsilon^P$ . Nos modelos elastoplásticos não se tem perda de rigidez do material como nos modelos de dano, mas sim o acúmulo de deformações residuais. Diz-se também que o comportamento elastoplástico é dissipativo, uma vez que a energia de deformação é parcialmente recuperada num ciclo de carga-descarga. Significa que no descarregamento, a parcela de deformação elástica do material é totalmente recuperada permanecendo somente a deformação plástica. Finalmente, existe a possibilidade de o material assumir um comportamento chamado de encruamento positivo ou “*hardening*” que consiste em uma nova fase onde o material já escoou com perda de rigidez, porém continua a resistir às tensões em uma nova etapa de carregamento.

Como na plasticidade trabalha-se com histórias de carregamentos, é conveniente que os modelos sejam formulados em taxas. As grandezas são apresentadas em taxas porque são definidas em função de sua derivada em relação ao tempo. No aspecto computacional, os modelos não são descritos em taxas, mas sim em passo finito com as deformações aplicadas em incrementos discretos.

Neste contexto, vale a pena citar os trabalhos de OWEN & HINTON (1980), PROENÇA (1988) e DRIEMEIER (1995). O primeiro aborda a teoria da plasticidade no âmbito do método dos elementos finitos, o segundo apresenta formulações de modelos elastoplásticos inclusive com aplicações para o concreto e, o terceiro trabalho trata do comportamento de metais frente a situações que provocam fadiga, com ênfase na propagação de trincas até a ocorrência da fadiga.

### 3.3.2 Modelo Elastoplástico com Encruamento Misto

Para representar o comportamento do aço das armaduras, podem ser utilizados modelos do tipo elastoplástico perfeito, elastoplástico com encruamento isótropo linear positivo e com encruamento cinemático Fig. (3.14). A associação dos dois modelos de encruamento (isótropo e cinemático) caracteriza o modelo elastoplástico com encruamento misto e a degeneração dos mesmos modelos (anulando-se os módulos de encruamento isótropo e cinemático do material) caracteriza o modelo elastoplástico perfeito.

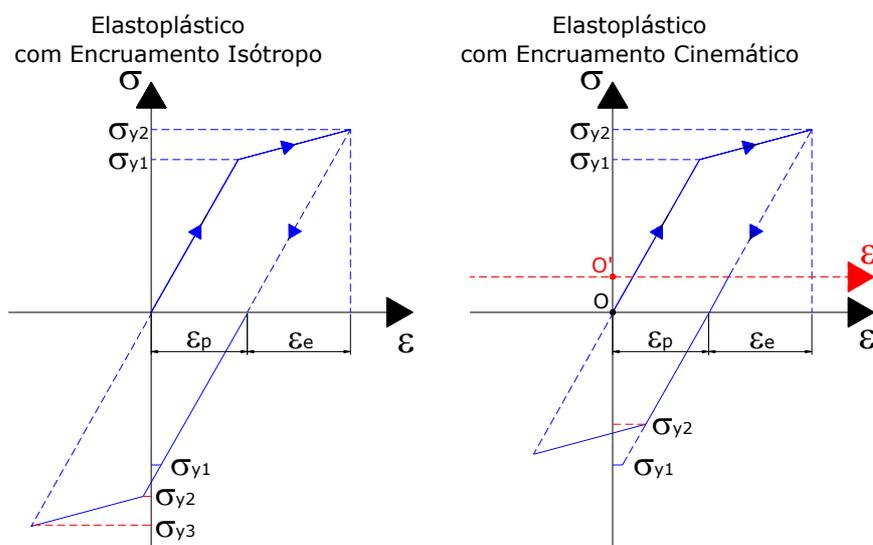


Figura 3.14 – Leis constitutivas dos modelos elastoplásticos isótropo e cinemático

Por conta de sua generalidade, o modelo adotado para representar as armaduras é o modelo elastoplástico com encruamento misto, formulado a seguir:

#### Tensão no Passo Atual ou Previsão Elástica

$$\sigma_{n+1} = E \cdot (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^P) \quad (3.32)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do aço,  $\varepsilon$  é a deformação total no passo  $n+1$ ,  $\varepsilon^P$  é a deformação plástica no passo  $n+1$ .

#### Deformação no Passo Atual

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n \quad (3.33)$$

onde  $\Delta\varepsilon$  é o incremento de deformação total.

#### Critério de Plastificação

$$f_{n+1} = |\sigma_{n+1} - q_{n+1}| - (\sigma_y + K\alpha_{n+1}) \leq 0 \quad (3.34)$$

onde  $q$  é uma variável interna relacionada com a nova posição do centro do intervalo elástico no passo  $n+1$ ,  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento do aço,  $K$  é o módulo plástico de encruamento isotrópico do aço e  $\alpha$  é uma medida da deformação plástica no estado de tensão no passo  $n+1$ .

**Condição de Consistência**

$$\Delta\lambda \cdot f_{n+1} = 0 \quad (3.35)$$

onde  $\Delta\lambda$  é a variação da deformação plástica.

**Deformação Plástica Atual**

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda \cdot \text{sign}(\sigma_{n+1} - q_{n+1}) \quad (3.36)$$

com  $\text{sign} = \begin{cases} +1 \Leftrightarrow \sigma > 0 \\ -1 \Leftrightarrow \sigma < 0 \end{cases}$ .

**Lei de Encruamento Isotrópico**

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\lambda \quad (3.37)$$

**Lei de Encruamento Cinemático**

$$q_{n+1} = q_n + \Delta\lambda \cdot H \cdot \text{sign}(\sigma_{n+1} - q_{n+1}) \quad (3.38)$$

onde  $H$  é o módulo plástico de encruamento cinemático.

**Variação de Deformação Plástica**

$$\Delta\lambda = \frac{E \cdot \Delta\varepsilon_n \cdot \text{sign}(\sigma_n - q_n)}{(E + K + H)} \quad (3.39)$$

**Módulo Elastoplástico Corrigido**

$$E_s = \frac{E \cdot (K + H)}{E + K + H} \quad (3.40)$$

**Relação Constitutiva quando houver Deformação Plástica**

$$\sigma_{n+1} = \frac{E \cdot (K + H)}{E + K + H} \cdot \varepsilon_{n+1} \quad \text{se } \Delta\lambda > 0 \quad (3.41)$$

Para computar o efeito da plastificação dos elementos na análise incremental da estrutura, substitui-se o módulo de elasticidade pelo respectivo módulo elastoplástico corrigido nas parcelas da matriz de rigidez referentes aos elementos plastificados.

### 3.4 Não-Linearidade Geométrica aplicada a Pórticos Planos

#### 3.4.1 Generalidades

A abordagem probabilística na análise de estruturas só faz sentido quando se emprega um modelo mecânico que seja capaz de representar adequadamente as respostas da estrutura. Dessa forma, para o caso de pórticos de edifícios, além do comportamento dos materiais, o engenheiro deve levar em conta aspectos referentes à modelagem da estabilidade global da estrutura, uma vez que esta é solicitada, simultaneamente, por ações verticais e horizontais. Não se deve esquecer que, de fato, as ações adicionais provenientes dos deslocamentos horizontais da estrutura podem provocar o aparecimento de acréscimos de esforços capazes de levá-la ao colapso. Portanto, uma análise que considere o equilíbrio na posição deslocada, isto é, que incorpore os efeitos de segunda ordem, é estritamente necessária para estruturas aporricadas, o que faz com que a análise não-linear geométrica seja empregada. Os efeitos de segunda ordem ganham importância à medida que a rigidez da estrutura diminui. Por conta disso, a NBR 6118:2003 classifica as estruturas em estruturas de nós fixos e de nós móveis mediante parâmetros que ponderam a importância dos efeitos de segunda ordem sobre os de primeira ordem.

Os efeitos de segunda ordem podem ser avaliados mediante a aplicação de métodos simplificados (métodos do tipo P-Delta) ou modelos mais elaborados. Nos métodos P-Delta, os efeitos da não-linearidade geométrica são considerados através da aplicação de forças horizontais equivalentes provenientes da interação do carregamento vertical com os deslocamentos horizontais da estrutura. Nesses casos, a não-linearidade física é considerada utilizando-se valores equivalentes de rigidez dos elementos, também de uma maneira simplificada. PINTO (2002) utiliza a análise não-linear física (NLF) e geométrica (NLG) de maneira rigorosa, para obter estimativas confiáveis e simples dos seus efeitos em estruturas de contraventamento de edifícios de concreto armado. Tal metodologia é importante, pois procura estabelecer métodos simplificados para a consideração da NLF e NLG na prática de projetos de maneira mais consistente. Vale ressaltar que, apesar de sua simplicidade, esses métodos podem levar a resultados insatisfatórios dependendo do grau de deslocabilidade da estrutura.

Nos métodos mais elaborados, a consideração da não-linearidade geométrica se faz através de formulações que levam em conta a modificação de posição da estrutura, combinada

ao comportamento não-linear dos materiais. Esses efeitos são incorporados na matriz de rigidez e no vetor de esforços internos da estrutura, de modo a contemplar de maneira consistente os efeitos do comportamento dos materiais e deslocamentos da estrutura na análise equilíbrio global.

O grau de precisão dos resultados também depende das aproximações adotadas na formulação do problema, isto é, aproximações em segunda ordem com regime de pequenos deslocamentos, hipótese de grandes deslocamentos, etc. Uma boa discussão sobre estes aspectos pode ser encontrada no trabalho de RACHID & MORI (1989).

É importante esclarecer que devido à natureza não-linear do problema, o princípio da superposição de efeitos não é mais válido, uma vez que não existem mais relações lineares entre esforços e deslocamentos na estrutura. Por conta disso, substitui-se o cálculo não-linear por uma sucessão de cálculos lineares realizados de uma forma incremental-iterativa em que, no decorrer de cada passo de carga, as variáveis não-lineares são mantidas constantes e atualizadas no início do próximo passo.

### 3.4.2 Formulação Não-Linear Geométrica com Descrição Lagrangeana Atualizada

Todo o desenvolvimento teórico descrito neste item foi embasado nos trabalhos de SOARES (2001) e BRANCO (2002).

Para considerar os efeitos da não-linearidade geométrica nas estruturas de pórticos planos de concreto armado, utiliza-se a descrição lagrangeana atualizada na análise do equilíbrio com hipótese de pequenos deslocamentos. Considera-se, incorporada à lei constitutiva, a deformação de Green (forma quadrática) no lugar da deformação linear  $e$ , de maneira consistente, emprega-se o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie. O objetivo da formulação é obter a matriz de rigidez tangente e o vetor de esforços internos da estrutura.

#### **Campo de Deslocamentos**

Considerando um ponto  $P(x,y)$  em um sólido qualquer, um deslocamento arbitrário em função das componentes horizontal e vertical pode ser escrito por:

$$u_p(x,y) = u(x) - y \cdot \text{sen } \theta \quad (3.42)$$

$$v_p(x,y) = v(x) - y + y \cdot \text{cos } \theta \quad (3.43)$$

onde  $v(x)$  é o deslocamento do ponto de referência dado pela expressão:

$$v = v_F + v_C \quad (3.44)$$

onde  $v_F$  e  $v_C$  são as parcelas de deslocamento à flexão e ao cisalhamento, respectivamente.

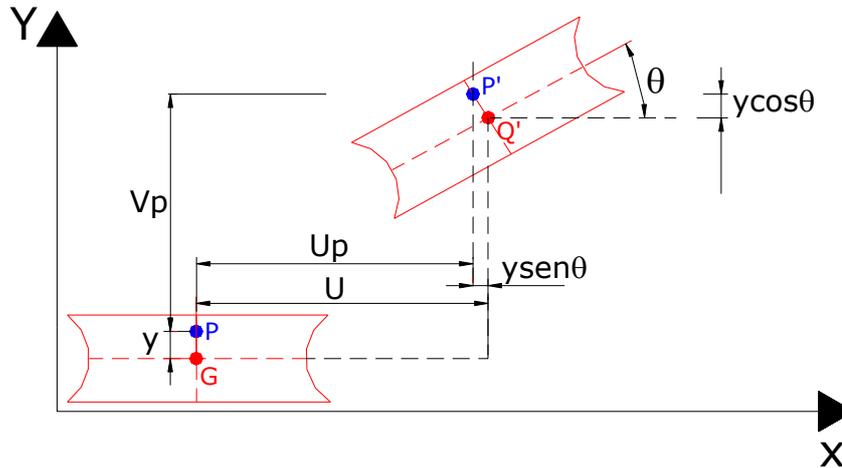


Figura 3.15 – Configuração deslocada de um elemento de barra

A aproximação em 2ª ordem permite escrever:

$$\text{sen } \theta = \theta \quad (3.45)$$

$$\text{cos } \theta = 1 - \frac{v'^2}{2} \quad (3.46)$$

Portanto, o campo de deslocamentos do ponto  $P$  pode ser reescrito como:

$$u_P = u - y \cdot v' \quad (3.47)$$

$$v_P = v - y \cdot \frac{v'^2}{2} \quad (3.48)$$

### Campo de Deformações

Como se trata da análise de estruturas de barras, o tensor de deformações é composto somente por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_X & \gamma_{XY} \\ \gamma_{XY} & \varepsilon_Y \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

onde cada componente é representada por:

$$\varepsilon_X = \frac{\partial u_P}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \frac{\partial u_P}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_P}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (3.50)$$

$$\gamma_{XY} = \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x} + \left( \frac{\partial u_P}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x} \cdot \frac{\partial v_P}{\partial y} \right) \quad (3.51)$$

$$\varepsilon_Y = 0 \quad (3.52)$$

onde  $\varepsilon_X$  e  $\gamma_{XY}$  são as deformações longitudinal e tangencial, respectivamente. Essas deformações possuem termos de 2<sup>a</sup> ordem justamente para considerar a NLG.

Combinando as Eq. (3.50) e (3.51) com as expressões (3.47) e (3.48) e desprezando-se os termos com produtos de ordem superior, obtém-se os campos de deformações longitudinais e tangenciais para um elemento de pórtico plano, conforme segue:

$$\varepsilon_X = u' + \frac{1}{2} \cdot (u')^2 + \frac{1}{2} \cdot (v')^2 - y \cdot v'' \cdot (1 + u') \quad (3.53)$$

$$\gamma_{XY} = v' - \phi - u' \cdot v' - \frac{v'^3}{2} \quad (3.54)$$

onde  $\phi$  é a rotação de uma seção transversal devida à flexão.

### **Relação entre os Tensores de Tensão e Deformação**

Uma outra forma de calcular as deformações é empregando o conceito de estiramento  $\lambda$ , dado por:

$$\lambda = \frac{ds}{dx} = \sqrt{\left( \frac{du + dx}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2} \quad (3.55)$$

onde  $ds$  é o comprimento infinitesimal de uma fibra qualquer do corpo na posição deslocada e  $dx$  é o comprimento da mesma fibra na posição indeslocada.

As medidas de deformação de Green e Linear são representadas respectivamente por:

$$\varepsilon_G = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.56)$$

$$\varepsilon_L = \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{du}{dx} + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2} - 1 \quad (3.57)$$

A consistência na formulação é verificada conjugando o tensor de deformação de Green com um tensor de tensão compatível, no caso o tensor de Piola-Kirchhoff de 2<sup>a</sup> espécie, representado por:

$$S = \begin{Bmatrix} S_{XX} \\ S_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_X}{\lambda} \\ \frac{\tau_{XY}}{\lambda} \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

Nos problemas em regime de pequenas deformações, o estiramento assume um valor unitário ( $\lambda = 1$ ). Assim, a matriz de propriedades elásticas do material da Lei de Hooke (medida de deformação linear) coincide com a matriz que relaciona a deformação de Green com o tensor de tensão de piola-Kirchhoff de 2ª espécie, de modo que:

$$D_0 = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\text{com } G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}.$$

O tensor de tensão consistente com a formulação fica então representado por:

$$S = \underline{\underline{D_0}} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_G \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

### **Matriz de Rigidez Tangente e Vetor de Esforços Internos**

O elemento finito utilizado no trabalho é o elemento de pórtico plano com três graus de liberdade por nó e considerando as hipóteses de Timoshenko, Fig. (3.16). A formulação também pode ser degenerada para análise que considera somente as hipóteses de Euler-Bernoulli para flexão.

O vetor de esforços internos que considera a não-linearidade geométrica é obtido levando-se em consideração as parcelas de esforços longitudinais e tangenciais, conforme segue:

$$F^{\text{int}} = \int_{V_0} \underline{B}_{XX} \cdot S_{XX} \cdot dV_0 + \int_{V_0} \underline{B}_{XY} \cdot S_{XY} \cdot dV_0 \quad (3.61)$$

onde  $\underline{B}_{XX}$  e  $\underline{B}_{XY}$  são as matrizes de incidência que contém as derivadas das funções de forma do problema.

As matrizes  $\underline{B}_{XX}$  e  $\underline{B}_{XY}$  podem ser escritas como:

$$\underline{B}_{XX} = A^T + (A^T u)A^T + (B^T u)B^T - yC^T - y(C^T u)A^T - y(A^T u)C^T \quad (3.62)$$

$$\underline{B}_{XY} = D^T - (B^T u)A^T - (A^T u)B^T - \frac{3}{2}(B^T u)B^T(B^T u) \quad (3.63)$$

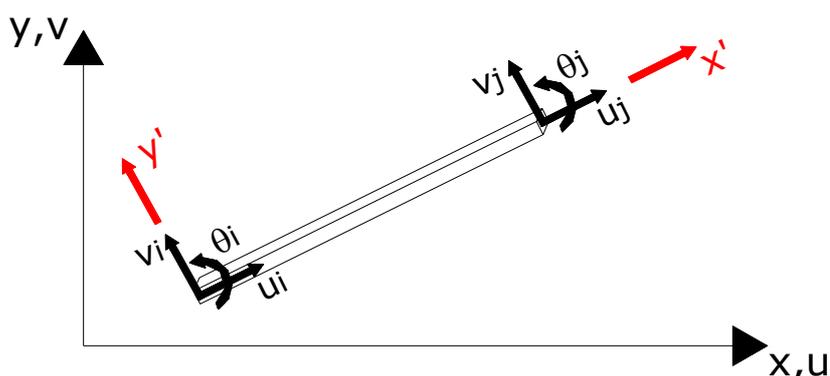


Figura 3.16 – Elemento finito de pórtico plano nos sistemas global e local

Os termos  $A^T$ ,  $B^T$ ,  $C^T$  e  $D^T$  são vetores que relacionam as deformações dadas pelas Eq. (3.53) e (3.54) com os deslocamentos nodais dos elementos, como segue:

$$u'(x) = [N1'(x) \ 0 \ 0 \ N2'(x) \ 0 \ 0] \cdot u = A^T u \quad (3.64)$$

$$v'(x) = [0 \ N3'(x) \ N4'(x) \ 0 \ N5'(x) \ N6'(x)] \cdot u = B^T u \quad (3.65)$$

$$v''(x) = [0 \ N3''(x) \ N4''(x) \ 0 \ N5''(x) \ N6''(x)] \cdot u = C^T u \quad (3.66)$$

$$\gamma_L = \left[ 0 \ \frac{-2g}{(1+2g)L_0} \ \frac{-g}{(1+2g)} \ 0 \ \frac{2g}{(1+2g)L_0} \ \frac{-g}{(1+2g)} \right] \cdot u = D^T u \quad (3.67)$$

onde  $g$  é a constante para a viga de Timoshenko. Esta constante está inserida no termo correspondente à parcela do cisalhamento no polinômio interpolador para o campo de deslocamentos transversais do elemento finito. O valor da constante  $g$  pode ser obtido por:

$$g = \frac{6EI}{kGAL^2} \quad (3.68)$$

onde  $k$  é o fator de forma da seção transversal dado por:

$$\frac{1}{1.2} \Rightarrow \text{seções retangulares} ; \frac{1}{0.9} \Rightarrow \text{seções circulares}$$

Finalmente, assumem-se funções de forma para interpolar o campo de deslocamentos ao longo do eixo do elemento finito a partir de seus deslocamentos nodais. Define-se, respectivamente, o vetor de deslocamentos do eixo de cada elemento e a matriz que contém as funções de forma para cada grau de liberdade do elemento:

$$d_0 = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix} = \underline{\phi}(x) \cdot u \quad (3.69)$$

$$\underline{\phi}(x) = \begin{bmatrix} N1(x) & 0 & 0 & N2(x) & 0 & 0 \\ 0 & N3(x) & N4(x) & 0 & N5(x) & N6(x) \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

As funções de forma dadas por:

$$N1(x) = \left(1 - \frac{x}{L_0}\right) \quad (3.71)$$

$$N2(x) = \left(\frac{x}{L_0}\right) \quad (3.72)$$

$$N3(x) = \frac{1}{1+2g} \cdot \left[ (1+2g) - 2g\left(\frac{x}{L_0}\right) - 3\left(\frac{x}{L_0}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L_0}\right)^3 \right] \quad (3.73)$$

$$N4(x) = \frac{L_0}{1+2g} \cdot \left[ (1+g)\left(\frac{x}{L_0}\right) - (2+g)\left(\frac{x}{L_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{L_0}\right)^3 \right] \quad (3.74)$$

$$N5(x) = \frac{1}{1+2g} \cdot \left[ 2g\left(\frac{x}{L_0}\right) + 3\left(\frac{x}{L_0}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L_0}\right)^3 \right] \quad (3.75)$$

$$N6(x) = \frac{L_0}{1+2g} \cdot \left[ -g\left(\frac{x}{L_0}\right) - (1-g)\left(\frac{x}{L_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{L_0}\right)^3 \right] \quad (3.76)$$

A matriz de rigidez tangente é composta por uma parcela de flexão ( $K_{Tf}$ ) e uma parcela de cisalhamento ( $K_{Tc}$ ). A matriz é obtida a partir de um processo de linearização da equação não-linear do PTV com a utilização do método de Newton-Raphson, o que resulta em:

$$K_T = K_{Tf} + K_{Tc} \quad (3.77)$$

$$K_{Tf} = \int_{V_0} \underline{B}_{XX}^T \cdot E \cdot \underline{B}_{XX} \cdot dV_0 + \int_{V_0} \underline{G}_{XX} \cdot S_{XX} \cdot dV_0 \quad (3.78)$$

$$K_{Tc} = \int_{V_0} \underline{B}_{XY}^T \cdot G \cdot \underline{B}_{XY} \cdot dV_0 + \int_{V_0} \underline{G}_{XY} \cdot S_{XY} \cdot dV_0 \quad (3.79)$$

onde as matrizes  $\underline{G}$  são as matrizes de incidência da não-linearidade geométrica e são dadas por:

$$\underline{G}_{XX} = AA^T + BB^T - yAC^T - yCA^T \quad (3.80)$$

$$\underline{G}_{XY} = -BA^T - AB^T - 3(B^T u)BB^T \quad (3.81)$$

### **Forma Lagrangeana Atualizada**

A formulação lagrangeana atualizada é caracterizada por descrever a situação da estrutura em relação à última configuração equilibrada, ou seja, todas as informações necessárias para o próximo passo de carga da estrutura são retiradas do passo anterior convergido. Para que a implementação computacional seja adequada, são necessárias duas atualizações.

A primeira consiste em atualizar continuamente as coordenadas cartesianas nodais, acrescentando o vetor de deslocamentos incrementais à última configuração de equilíbrio. Assim, no início do próximo incremento de carga, a estrutura estará com novas coordenadas nodais e, portanto, na posição deslocada.

$$\{X\} = \{X_0\} + \{\Delta u\} \quad (3.82)$$

onde  $\{X_0\}$  é o vetor que contém as coordenadas cartesianas nodais atualizadas.

A segunda atualização é feita sobre o tensor de tensões, pois na descrição atualizada, a mudança contínua de referencial impõe que o tensor de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie ( $S$ ) seja transformado para a nova configuração. A maneira adequada de realizar essa transformação é utilizar o tensor de Cauchy relacionando-o com o tensor de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie. Entretanto, para pequenas deformações, o tensor de Cauchy na configuração atual coincide com o tensor de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie da configuração anterior. Dessa forma, a cada passo de carga, adiciona-se um incremento de tensão  $\Delta S$  à tensão  $S_0$ , da seguinte forma:

$$S = S_0 + \Delta S \quad (3.83)$$

Com isso, tem-se a matriz de rigidez tangente e o vetor de esforços internos da análise não-linear geométrica para o elemento de pórtico plano com consideração da deformação por cisalhamento.

## **3.5 Análise Não-Linear de Pórticos Planos**

### **3.5.1 Generalidades**

O Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) é uma ferramenta bastante eficiente para formular o problema não-linear das estruturas. A vantagem do PTV sobre os métodos da

energia e do equilíbrio é que, através de uma única equação escalar é possível escrever o equilíbrio para todo o corpo em estudo. Portanto, o PTV é a ferramenta utilizada para descrever o equilíbrio da estrutura na posição deslocada, considerando assim, os efeitos não-lineares já descritos neste trabalho.

Em uma abordagem não-linear, além das deformações elásticas oriundas da análise linear da estrutura, existem parcelas de deformações residuais e perda de rigidez dos elementos. Isto significa que, por conta do comportamento não-linear da estrutura, as forças internas não resultam iguais às forças externas após um incremento de carga direto. Surge com isso, resíduos de força que “sobram” na estrutura, fazendo com que o equilíbrio não seja verificado diretamente. A solução para esse problema consiste em formular uma função-resíduo e reaplicá-la sobre a estrutura, tantas vezes quanto forem necessárias até atingir o equilíbrio. A função-resíduo é formulada a cada iteração do processo incremental-iterativo mediante a diferença entre as forças internas e as forças externas, de modo que seja reaplicada sobre a estrutura assumindo o papel de uma variação de força externa. Este processo é encerrado quando se atinge o equilíbrio a menos de uma tolerância pré-estabelecida.

Pelo PTV, o trabalho virtual é dado pela soma da energia de deformação interna  $\delta U$ , com o trabalho virtual das cargas externas  $\delta W$ . A variação do trabalho virtual total  $\delta T$  pode ser escrita como:

$$\delta T = \delta U + \delta W \quad (3.84)$$

Por outro lado, é possível, pelo PTV, definir o trabalho virtual de um campo de deslocamentos virtuais  $\delta u$ , que seja compatível e homogêneo nas condições de contorno sobre uma função-resíduo  $r$ , descrita em unidades de força, ao longo de um elemento infinitesimal na posição atual, conforme:

$$\delta T = \int_V r \cdot \delta u \cdot dV \quad (3.85)$$

Combinando as Eq. (3.84) e (3.85) tem-se:

$$\int_V r \cdot \delta u \cdot dV = \delta U + \delta W \quad (3.86)$$

A parcela referente à energia interna da estrutura na Eq. (3.86) é escrita em termos do trabalho das componentes de tensão sobre as respectivas componentes de deformação, ou seja:

$$\delta U = \int_V \sigma \cdot \delta \varepsilon \cdot dV \quad (3.87)$$

A outra parcela refere-se à energia desenvolvida sobre a estrutura proveniente dos carregamentos externos, que podem atuar sobre o volume ou sobre determinada área da estrutura:

$$\delta W = \int_V b \cdot \delta u \cdot dV + \int_A t \cdot \delta u \cdot dA \quad (3.88)$$

onde  $b$  é o vetor de forças por unidade de volume e  $t$  é o vetor de forças por unidade de área atuando sobre a estrutura ou parte dela.

Portanto, a Eq. (3.86) passa a ser escrita como:

$$\int_V r \cdot \delta u \cdot dV = \int_V \sigma \cdot \delta \varepsilon \cdot dV - \int_V b \cdot \delta u \cdot dV - \int_A t \cdot \delta u \cdot dA \quad (3.89)$$

Os parâmetros  $V$  (volume) e  $A$  (área superficial) estão definidos para a posição atual deformada. Porém, esses parâmetros são desconhecidos na posição deformada, o que torna inviável o uso do PTV. Por conta disso, reescreve-se a expressão anterior em termos dos parâmetros na posição inicial indeformada, como segue:

$$\int_{V_0} r \cdot \delta u \cdot dV_0 = \int_{V_0} S \cdot \delta \varepsilon \cdot dV_0 - \int_{V_0} b_0 \cdot \delta u \cdot dV_0 - \int_{A_0} t_0 \cdot \delta u \cdot dA_0 \quad (3.90)$$

Note que, na forma do PTV dada pela Eq. (3.90), as tensões na parcela de energia interna são dadas pelo tensor de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie, o que caracteriza de maneira consistente, a forma lagrangeana. Além disso, vale lembrar que, na descrição lagrangeana, o estado do corpo é formulado em termos das coordenadas iniciais conhecidas do ponto. Ainda dentro desse contexto, a forma lagrangeana atualizada permite que uma configuração conhecida seja tomada como um estado inicial sendo continuamente atualizada no decorrer da análise. Portanto a Eq. (3.90) prescreve de maneira consistente a forma lagrangeana atualizada do PTV.

### 3.5.2 Combinação da NLF com a NLG

Para considerar os efeitos da não-linearidade geométrica e física (modelo de dano de Mazars) na análise de estruturas de pórticos de concreto armado, deve-se combinar adequadamente o modelo de dano com a NLG. BRANCO (2002) apresenta um procedimento para que esta operação seja feita com sucesso. O problema consiste em montar a matriz de rigidez tangente e o vetor de esforços internos considerando os efeitos combinados da NLF e NLG.

Quando se considera também a influência das deformações por cisalhamento, o elemento de pórtico plano da Fig. (3.16) é solicitado por um estado bidimensional de tensões. Dessa forma, o cálculo da deformação equivalente do modelo de dano de Mazars, Eq. (3.1) necessita das deformações principais para que seja possível obter o valor da variável escalar de dano. Na seqüência, obtém-se o tensor de tensões corrigido pelo dano. Entretanto, por conta da distorção considerada, o tensor de tensões é dividido em uma parcela longitudinal e outra parcela transversal não-nula. Esse fato faz com que a equação do PTV (Eq. 3.90) seja escrita de outra forma, de modo que se considere a taxa de variação da tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie. Essa taxa de tensão, por sua vez, é calculada em função da taxa de variação do dano de Mazars, o que combina no tensor de tensões, os efeitos da NLG e do modelo de dano.

Após essas considerações, obtém-se a matriz de rigidez tangente e o vetor de esforços internos para o elemento de pórtico plano com dano de Mazars, não-linearidade geométrica e influência do cisalhamento, na forma:

$$K_T = \int_{V_0} \underline{B}^T (1-D) \underline{D}_0 \underline{B} dV_0 + \int_{V_0} \underline{B}^T \eta \underline{D}_0 \varepsilon \underline{B} dV_0 + \int_{V_0} \underline{G} S dV_0 \quad (3.91)$$

$$F^{\text{int}} = \int_{V_0} \underline{B}^T S dV_0 \quad (3.92)$$

onde  $\eta$  é uma função que leva em conta as derivadas da deformação equivalente em relação às componentes de deformações, expressa por:

$$\eta = F(\tilde{\varepsilon}) \cdot \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \quad (3.93)$$

$$F(\tilde{\varepsilon}) = \alpha_T F(\tilde{\varepsilon})_T + \alpha_C F(\tilde{\varepsilon})_C \quad (3.94)$$

$$F(\tilde{\varepsilon})_T = 1 - \frac{\varepsilon_{d0} \cdot (1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}^2} - \frac{A_T B_T}{\exp[B_T \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (3.95)$$

$$F(\tilde{\varepsilon})_C = 1 - \frac{\varepsilon_{d0} \cdot (1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}^2} - \frac{A_C B_C}{\exp[B_C \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (3.96)$$

A derivada da deformação equivalente, em relação à parte longitudinal do tensor de deformações, depende do sentido de deformação das fibras, ou seja:

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_X} = 1 \Rightarrow \text{tração} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_X} = -\nu \sqrt{2} \Rightarrow \text{compressão}$$

Como se trata de estruturas de pórticos planos, ou seja, elementos finitos de barras, as integrais no volume dadas pelas Eq. (3.91) e (3.92) podem ser escritas em função do comprimento de cada elemento bem como da altura com base constante, na forma:

$$K_T = b \int_L \int_h \underline{B}^T (1-D) \underline{D} \underline{B} dh dx + b \int_L \int_h \underline{B}^T \eta \underline{D} \underline{\varepsilon} \underline{B} dh dx + b \int_L \int_h \underline{G} \underline{S} dh dx \quad (3.97)$$

$$F^{\text{int}} = b \int_L \int_h \underline{B}^T \underline{S} dh dx \quad (3.98)$$

### 3.5.3 Integração Numérica

Como o diagrama tensão-deformação dos materiais é não-linear, a integração analítica se torna praticamente inviável, sendo possível somente para casos particulares. Verifica-se também que a distribuição de tensões ao longo da seção transversal dos elementos não é linear, assumindo uma forma qualquer desconhecida. Assim, a integração numérica torna-se bastante interessante, uma vez que permite obter qualquer distribuição de tensões na seção e com isso, generalizar os procedimentos.

As técnicas adotadas neste trabalho são as quadraturas de Gauss e Gauss-Lobatto. A diferença entre elas é que no método de Gauss-Lobatto consideram-se os pontos extremos e o ponto médio do intervalo de integração, ao passo que no método de Gauss não. O princípio desses métodos é a substituição das integrais analíticas por somatórios, cuja precisão depende do número de pontos alocados. Dessa forma, a quantidade de pontos deve ser suficiente para aproximar a função a ser integrada de modo que, o erro tenda a zero, Fig. (3.17). Em análises com linearidade física, para a integração das tensões ao longo da altura da seção transversal, 2 pontos são suficientes, pois a distribuição de tensões é linear. Quando se considera a não-linearidade física, como o modelo de dano de Mazars, a distribuição de tensões assume uma forma qualquer na seção transversal impossibilitando o cálculo analítico. BRANCO (2002) recomenda que devem ser adotados pelo menos 10 pontos de Gauss na altura para o modelo de dano de Mazars para o concreto. Da mesma forma, para a formulação lagrangeana atualizada, PAULA (2001) sugere pelo menos 6 pontos ao longo do comprimento do elemento. Com isso, a matriz de rigidez da estrutura também é montada a partir da contribuição dos pontos de Gauss do comprimento e da altura dos elementos, nos quais são calculadas as deformações, bem como todas as variáveis internas dos modelos dos materiais.

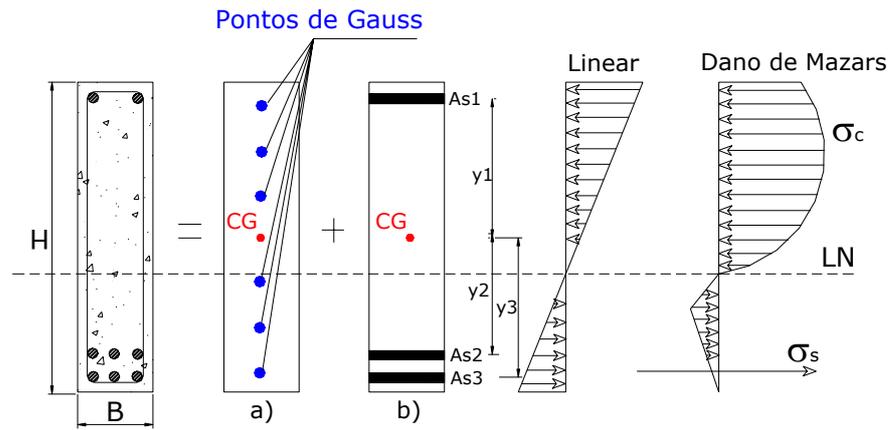


Figura 3.17 – Distribuição de tensões e discretização da seção –(a) concreto e (b) aço

Com isso, a parcela que representa a contribuição do concreto na matriz de rigidez da estrutura é dada por:

$$K_C = \sum_{i=1}^{nl} \left[ \sum_{j=1}^{nh} \left( \underline{B}_{ij}^T (1 - D_{ji}) \underline{D}_0 \underline{B}_{ij} + \underline{B}_{ij}^T \eta_{ij} \underline{D}_0 \underline{B}_{ij} + \underline{G}_{ij} S_{ij} \right) \frac{bh}{2} w_{y_j} \right] \frac{L}{2} w_{x_i} \quad (3.99)$$

onde os \$w\_y\$ e \$w\_x\$ são os pesos ponderadores da integração numérica na seção e no comprimento dos elementos respectivamente.

Da mesma forma, pode-se escrever a contribuição do concreto no vetor de esforços interno como sendo:

$$F_C^{int} = \sum_{i=1}^{nl} \left[ \sum_{j=1}^{nh} \left( \underline{B}_{ij}^T S_{ij} \right) \frac{bh}{2} w_{y_j} \right] \frac{L}{2} w_{x_i} \quad (3.100)$$

A contribuição das armaduras longitudinais também é baseada nas quadraturas de Gauss e Gauss-Lobatto para integração numérica ao longo do comprimento, ao passo que na altura a contribuição ocorre para no máximo 3 camadas de armadura, Fig. (3.17).

Assim, as parcelas de contribuição da armadura na matriz de rigidez e no vetor de esforços internos são dadas, respectivamente por:

$$K_S = \sum_{i=1}^{nl} \left[ \sum_{j=1}^3 \left( \underline{B}_{ij}^T E_S \underline{B}_{ij} + \underline{G}_{ij} \sigma_{S_{ij}} \right) A_{S_j} \right] \frac{L}{2} w_{x_i} \quad (3.101)$$

$$F_S^{int} = \sum_{i=1}^{nl} \left[ \sum_{j=1}^3 \left( \underline{B}_{ij}^T \sigma_{S_{ij}} \right) A_{S_j} \right] \frac{L}{2} w_{x_i} \quad (3.102)$$

Finalmente, a matriz de rigidez tangente final e o vetor de esforços internos da estrutura são obtidos pela soma algébrica das parcelas de contribuição do concreto e do aço de cada elemento finito.

### 3.5.4 Estratégia de Solução do Problema Não-Linear

O problema não-linear é caracterizado quando o trabalho, definido na Eq. (3.85), resulta diferente de zero. Isto significa que o trabalho das forças internas não é igual ao trabalho das forças externas, gerando um vetor de resíduos. Em termos de energia, o vetor de resíduos pode ser entendido como a parcela de energia de deformação não absorvida pela estrutura para um nível de deslocamentos. Para que o equilíbrio seja atingido, o vetor de resíduos deve ser aplicado sobre a estrutura na forma de carregamentos nodais. Esta etapa gera modificações na matriz de rigidez global da estrutura, provenientes da não verificação dos critérios de plastificação das armaduras e danificação do concreto que, por sua vez, são função dos deslocamentos residuais oriundos da aplicação do vetor de resíduos. Todo esse processo tem caráter não-linear e pode ser representado por:

$$\{[K] + [K(u)]\} \times \{u\} = \{F\} \quad (3.103)$$

onde  $[K]$  é a parte linear da matriz de rigidez,  $[K(u)]$  é a parte não-linear da matriz de rigidez que depende dos deslocamentos residuais,  $\{u\}$  é o vetor de deslocamentos nodais e  $\{F\}$  é o vetor de forças externas aplicadas sobre a estrutura.

O carregamento total que atua sobre a estrutura é dividido em um número finito de partes iguais e aplicado em incrementos individuais de carga. Assim, a resolução do problema não-linear consiste em linearizar o processo em um conjunto de iterações lineares sucessivas para cada incremento de carga, até que se atinja o estado estrutural equilibrado no incremento. Para isso, utiliza-se a técnica incremental-iterativa de Newton-Raphson com atualização da matriz de rigidez a cada iteração.

A matriz de rigidez é atualizada a cada iteração sofrendo a influência dos modelos constitutivos do aço e do concreto, bem como da não-linearidade-geométrica. Esses efeitos não-lineares provocam o desequilíbrio entre as forças internas e externas gerando o vetor de resíduos. O vetor de resíduos é aplicado sobre a estrutura, conforme já citado, até que o equilíbrio seja atingido, isto é, quando a norma do vetor de resíduos resultar menor ou igual a uma tolerância pré-estabelecida. Quando isso ocorre, diz-se que a resultante de forças sobre a estrutura é nula e que o processo atingiu a convergência. Aplica-se um novo incremento de carga e repete-se todo o procedimento até completar todo o carregamento externo atuante sobre a estrutura.

A Fig. (3.18) retrata o procedimento iterativo de Newton-Raphson para 1 incremento genérico de carga salientando a atualização da matriz de rigidez a cada iteração, o que garante

maior velocidade de convergência. O equilíbrio ocorre, no caso, quando o resíduo verifica a relação:

$$\Delta r_i = F_i^{\text{int}} - F^{\text{ext}} \leq \text{tolerância} \quad (3.104)$$

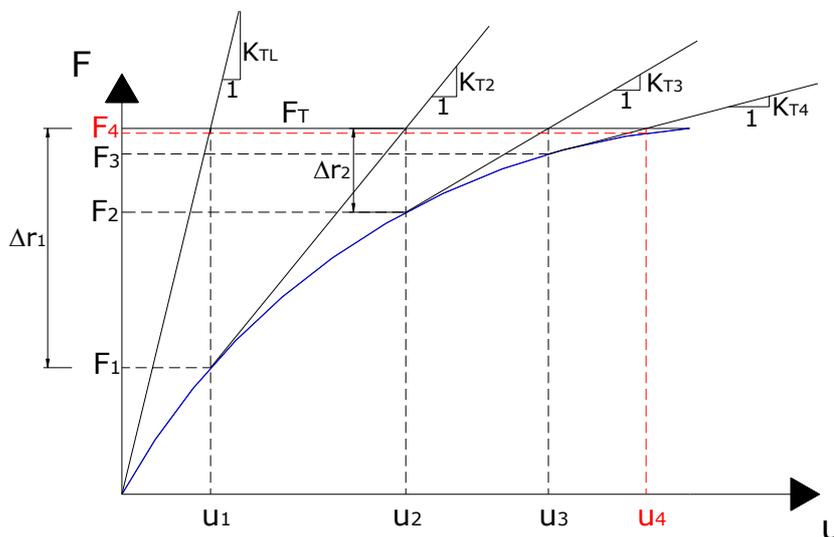


Figura 3.18 – Esquema de solução para 1 incremento de carga

## 3.6 Busca da Carga Última da Estrutura

### 3.6.1 Função de Estado Limite

A NBR 8681:2003 define estado limite como sendo um estado a partir do qual a estrutura apresenta desempenho inadequado às finalidades da construção. No contexto da confiabilidade, um estado limite corresponde à fronteira entre o desempenho desejado e indesejado da estrutura, isto é, uma função matemática que define se a estrutura apresenta uma falha ou está segura. Vale ressaltar que, na análise de segurança estrutural, a falha pode ser definida de várias maneiras, sendo que, para cada modo de falha, pode-se associar uma função de estado limite.

Neste trabalho, o que caracteriza a falha da estrutura é a própria falha dos materiais que a compõem, no caso, o concreto e o aço. Assim, o estado limite adotado corresponde ao estado de ruptura dos materiais, controlado pelas deformações limites que cada material pode suportar. Para o concreto adotam-se as deformações limites de 2.0‰ e 3.5‰ e para o aço, a deformação limite de 10 ‰.

Portanto, a função de estado limite local fica definida em termos do concreto e do aço, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G_C &= \varepsilon_C - \varepsilon_{C_{LIM}} \\ G_S &= \varepsilon_S - \varepsilon_{S_{LIM}} \end{aligned} \quad (3.105)$$

onde  $G_C$  e  $G_S$  representam, respectivamente, os estados limite no concreto e no aço em cada ponto de Gauss na altura dos elementos,  $\varepsilon_C$  e  $\varepsilon_S$  são as deformações no concreto e no aço também definidas em cada ponto de Gauss na altura dos elementos e  $\varepsilon_{LIM}$  são os valores limites de deformação para o concreto e o aço.

É importante salientar que o modelo implementado de busca da carga última verifica as deformações em todos os pontos de Gauss definidos na seção transversal dos elementos e das faixas de armadura que, por sua vez, são definidos em cada ponto de Gauss ao longo do comprimento dos mesmos. Dessa forma, em cada iteração do processo incremental, são feitas  $(ne \cdot npgl \cdot npgh)$  verificações para o concreto e  $(ne \cdot npgl \cdot nf)$  verificações para o aço. Portanto, a precisão do valor da carga última depende diretamente do número de elementos finitos da malha ( $ne$ ), do número de pontos de Gauss na altura ( $npgh$ ), no comprimento ( $npgl$ ) e do número de camadas de armadura ( $nf$ ).

A carga última da estrutura é definida como:

$$P_{crit} = P\{mim[(G_C^i \leq 0)ou(G_S^i \leq 0)]\} \quad (3.106)$$

Diante disso, verifica-se que a carga última da estrutura é obtida quando pelo menos uma das duas condições da Eq. (3.105) é desrespeitada, ou seja,  $G > 0$ , o que caracteriza um ponto no domínio de falha do concreto ou do aço. Dessa forma, a carga última determinada corresponde ao primeiro modo de falha ou modo mais provável de falha. Cada realização de carga última, no contexto deste trabalho, caracteriza uma resposta mecânica do modelo de elementos finitos.

Além das verificações do estado limite último, também foi implementada a busca da carga última para o estado limite de utilização com verificação dos deslocamentos em todos os pontos da estrutura. Assim, a carga última é alcançada quando algum nó da estrutura ultrapassa a condição limite de deslocamento imposta pelas normas. Por conta disso, a função de estado limite local fica definida como:

$$G = d_N - d_{LIM} \quad (3.107)$$

onde  $d_N$  corresponde ao deslocamento do nó na direção desejada e  $d_{LIM}$  é o deslocamento limite imposto. O procedimento de busca da carga última é exatamente igual ao descrito para o estado limite último.

Apresenta-se a seguir, o algoritmo proposto para obtenção das cargas últimas de uma estrutura apertada de concreto armado avaliando, em cada iteração do processo incremental, a função de estado limite local definida pelas Eq. (3.105).

### 3.6.2 Algoritmo Proposto

O modelo mecânico utilizado permite considerar carregamentos externos fixos e carregamentos variáveis, ou seja, que serão divididos e aplicados por incrementos. O modelo ainda considera os efeitos não-lineares geométricos, bem como a não-linearidade dos materiais em um procedimento incremental-iterativo. A cada iteração, atualiza-se a matriz de rigidez da estrutura, obtida mediante a contribuição de todos os pontos de Gauss dos elementos finitos e resolve-se o sistema de equações, dado por:

$$[K]_T \{u\} = \{F\} \quad (3.108)$$

De uma maneira geral, o modelo permite obter os deslocamentos e os esforços internos nos nós dos elementos finitos ao final de cada incremento convergido. Assim, toda a trajetória de equilíbrio da estrutura em caráter não-linear pode ser obtida, refinando-se os resultados do processo à medida que se aumenta o número de passos de carga. Isto ocorre porque com incrementos de ordem menor, as previsões elásticas sempre resultam mais próximas da resposta real, fazendo com que as correções não-lineares sejam menores e mais rápidas.

Para a obtenção de cargas últimas em pórticos de concreto armado, adapta-se o referido modelo mecânico, de modo que, a cada iteração, seja verificado o estado limite último de ruptura dos materiais. Aumenta-se o carregamento total sobre a estrutura através da aplicação dos incrementos de carga até que em um determinado ponto de Gauss (concreto ou faixa de armadura), seja atingida uma deformação limite. Considera-se que, nesse momento, ocorre a falha. As deformações sempre são verificadas ao final de cada iteração. Já a atualização das variáveis do modelo só é realizada após a convergência do processo iterativo. Dessa forma garante-se que, em nenhum ponto da estrutura, ocorrerá uma deformação maior que os limites estipulados para os materiais.

Quando se atinge o estado limite último no concreto ou no aço, o processo é interrompido e reiniciado com um incremento de carga menor, obtido da divisão do passo de carga atual por um escalar pré-definido, no caso dividido por 10. Todas as variáveis da última iteração do passo anterior são armazenadas e reutilizadas no início do novo passo de carga, repetindo a análise via elementos finitos para a décima parte do incremento anterior. Todo esse processo é repetido até que o novo incremento de carga seja desprezível quando comparado com o passo de carga inicial da estrutura. Esta condição de parada do algoritmo ocorre quando a norma dos novos incrementos for menor que uma tolerância, no caso,  $10^{-3}$ .

A carga última da estrutura é obtida pela soma de todos os incrementos de carga até que a tolerância seja atingida. O fluxograma do modelo mecânico (obtenção de respostas mecânicas da estrutura) pode ser visto na Fig. (3.19).

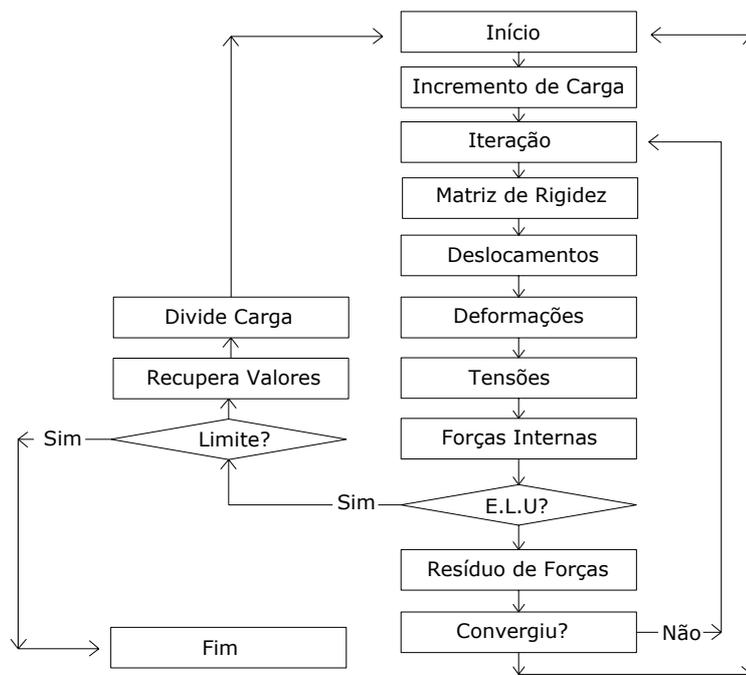


Figura 3.19 – Algoritmo para o cálculo da carga crítica de um pórtico

## **4. Confiabilidade Estrutural**

### **4.1 Generalidades**

Com o grande avanço computacional, os métodos numéricos passaram a constituir uma ferramenta muito útil na engenharia. Dentre eles, destaca-se o Método dos Elementos Finitos que permite realizar, atualmente, análises estruturais de grande complexidade, considerando milhares de tipos estruturais e graus de liberdade. No mesmo passo, os pesquisadores vêm aperfeiçoando cada vez mais os materiais estruturais conseguindo melhorias significativas no seu desempenho. A Mecânica das Estruturas, da mesma forma, conseguiu grandes avanços nos últimos anos principalmente, no que se refere aos modelos de materiais. Assim, os modelos que representam o comportamento do concreto estrutural e dos aços sofreram melhorias sensíveis em suas formulações, reduzindo o número de simplificações e aproximando o comportamento teórico idealizado do experimental.

Todas essas ferramentas têm proporcionado, nos dias de hoje, melhores condições de verificar e projetar as estruturas. Essas melhorias teóricas combinadas com materiais mais resistentes têm resultado fundamentalmente, na diminuição das dimensões dos elementos estruturais, o que resulta em estruturas trabalhando mais próximas de sua capacidade máxima. Diante desse panorama, a avaliação adequada da segurança estrutural dos projetos de engenharia torna-se imprescindível.

Para garantir a segurança das estruturas, as normas e códigos de projeto especificam conjuntos de regras que determinam limites para as ações e para as reações que ocorrem nessas estruturas. Esses limites são o resultado de todos os avanços na engenharia, conforme já comentado, e sofrem constantes modificações. Apesar de todo esse desenvolvimento no estudo das estruturas e dos materiais, a maioria dos avanços não considera a natureza aleatória das variáveis envolvidas nos projetos estruturais. A metodologia de projeto ainda é baseada na

abordagem determinística que, apesar de representar satisfatoriamente o comportamento estrutural, não leva em conta de maneira adequada, o grau de incerteza presente nas variáveis, o que pode causar situações indesejáveis não previstas inicialmente. Essas incertezas são inerentes às variáveis, uma vez que não existe certeza absoluta sobre as ações e capacidade resistente dos elementos estruturais.

A confiabilidade está, portanto, inserida nesse contexto, ou seja, na tentativa de avaliar as incertezas nas variáveis de projeto e sua influência na segurança estrutural. Seu principal objetivo é determinar uma probabilidade de ocorrência de um cenário de falha qualquer na estrutura. Esse procedimento é perfeitamente justificável, uma vez que a presença das incertezas nos parâmetros de resistência e carregamento das estruturas impossibilita que uma determinada estrutura apresente segurança absoluta. Causa impacto à primeira vista, quando se fala que sempre haverá uma probabilidade não-nula de que uma estrutura venha a falhar. Cabe comentar nesse momento que falha não significa necessariamente o colapso estrutural, mas sim a presença de um comportamento não desejado da estrutura.

Assim, a confiabilidade estrutural é definida como a habilidade de uma estrutura em desempenhar adequadamente, durante sua vida útil, a função para a qual foi projetada. Portanto, a confiabilidade deve medir a probabilidade da estrutura de violar um determinado estado limite. Em termos estatísticos, a confiabilidade,  $C$  é definida como o complemento da probabilidade de falha,  $P_f$ , dada por:

$$C = 1 - P_f \quad (4.1)$$

Vale ressaltar que a ordem de grandeza da probabilidade de falha nas estruturas civis é de  $10^{-3}$  a  $10^{-6}$ . Isso significa que a confiabilidade varia de 0.99 a 0.999999. Usualmente, na engenharia de estruturas trabalha-se com a probabilidade de falha ao invés do valor da confiabilidade.

Quando se trata de estruturas de concreto armado, as variáveis usualmente consideradas são as resistências do concreto e do aço, módulos de elasticidade, a geometria das seções transversais dos elementos, as cargas externas, a quantidade e posição das armaduras entre outras. Como existem incertezas associadas a essas variáveis, pode ocorrer que uma determinada combinação das mesmas resulte em uma condição de falha. Por conta disso, a confiabilidade tem se tornado uma ferramenta indispensável para a adequada avaliação da segurança estrutural. Além disso, a confiabilidade pode ser empregada para calibrar normas de projeto, análise de estruturas existentes, revisão de planos de inspeções,

avaliação da segurança de novas concepções estruturais, bem como na escolha das melhores alternativas de projeto.

A tendência natural hoje no cálculo da confiabilidade é o acoplamento de um modelo probabilístico com o Método dos Elementos Finitos. Dessa forma, torna-se possível analisar uma estrutura considerando a variabilidade de seus parâmetros e, determinar quais são os parâmetros mais importantes no desempenho dessa estrutura, bem como o nível de segurança em relação aos estados limites considerados. Portanto, a confiabilidade é a ferramenta ideal para medir qual é a real distância que separa uma estrutura em serviço, de um possível estado de falha.

## **4.2 Discussão sobre a Segurança Estrutural**

O projeto de uma estrutura, de um modo geral, envolve um conjunto de etapas que passa desde a concepção estrutural até a fase de detalhamento e arranjo final dos elementos. Ao final de todo esse processo, existe a preocupação de que a estrutura concebida desempenhe todas as funções a que se destina com o máximo de economia e eficiência.

Segundo ZAGOTTIS (1974), o conceito de segurança estrutural está vinculado à capacidade que uma determinada estrutura apresenta em suportar as diversas ações que vierem a solicitá-la durante sua vida útil, continuando a preencher, de modo satisfatório, as condições funcionais destinadas à sua construção. Verifica-se aqui, a forte ligação do conceito de segurança estrutural com a definição de confiabilidade da seção anterior.

Diante desse fato, uma estrutura será considerada segura quando houver um grau de convicção suficiente de que, durante a sua vida útil, não serão atingidos estados de falha. Associa-se, dessa forma, aos possíveis estados que podem comprometer seu desempenho, uma probabilidade de falha como medida de segurança. Vale ressaltar que essa premissa é aceita atualmente e caracteriza a verdadeira noção de segurança estrutural. Entretanto, ao se considerar a probabilidade de falha como um indicador eficaz da segurança, salienta-se naturalmente que, o problema da segurança de estruturas deve ser tratado de maneira probabilística.

Na tentativa de quantificar a segurança estrutural, foram propostos diversos métodos antes de se chegar à abordagem estatística. A necessidade de quantificar a segurança surgiu a partir da evolução dos materiais de construção e da concepção de estruturas mais ousadas, fato esse que não admitia mais a construção de estruturas sem uma análise real, na medida do

possível, de sua segurança. FUSCO (1976) faz um resumo sobre a evolução dos critérios de segurança em estruturas, partindo dos métodos chamados *intuitivos*, nos quais os construtores limitavam-se a copiar as construções anteriormente executadas, cuja resistência estrutural tivesse sido considerada, por consenso geral como satisfatória, até o início da abordagem do problema sob a ótica probabilística.

O Método das Tensões Admissíveis foi uma boa tentativa de quantificar a segurança no projeto de estruturas. O método estabelecia um valor limite de tensão, chamado de tensão admissível, para o material, de modo que a somatória de todos os efeitos provenientes das ações externas, avaliados em tensões, não ultrapassasse o limite admissível do material. A tensão admissível era obtida minorando-se a tensão última do material por um coeficiente de segurança. Entretanto, o método apresenta uma série de desvantagens, sendo que a principal delas consiste no fato de que não é possível estabelecer uma medida de distância entre o regime de serviço da estrutura e a sua condição limite, além de considerar sempre comportamento elástico-linear entre forças e deslocamentos. De acordo com SANTOS (1977), o método das tensões admissíveis perdurou na história do concreto armado até por volta de 1930. A partir daí, o método de cálculo no regime de ruptura ou cálculo no estágio III passou a ser empregado no dimensionamento de estruturas de concreto armado.

Segundo MALITE & GIONGO (1999), a partir de 1960, duas correntes poderosas de mudança no procedimento de introdução da segurança no projeto estrutural começaram a se fazer sentir: o projeto em estados limites e a idéia de que os parâmetros de cálculo poderiam ser racionalmente quantificados através da teoria de probabilidade. Com isso, surgiu a primeira geração de normas de cálculo baseadas na capacidade última, e eventualmente, conhecidas como normas de cálculo em estados limites.

As normas adotaram então duas linhas comuns de desenvolvimento para a verificação da segurança estrutural: modelos teóricos para avaliação da capacidade de elementos estruturais baseados em pesquisas recentes e que os fatores de ponderação que consideram as incertezas das variáveis ação e resistência devem ser determinados por consenso e calibração com as normas correspondentes em tensões admissíveis.

No Método dos Estados Limites, a segurança é verificada pela comparação das solicitações majoradas com a correspondente capacidade resistente minorada. Essas majorações e minorações são feitas considerando coeficientes parciais de segurança que têm como objetivo, cobrir as incertezas presentes nas variáveis de projeto. A principal crítica que se pode fazer ao método dos estados limites consiste em além da premissa de que o

comportamento estrutural é um fenômeno determinístico, o método também considera que os parâmetros mecânicos e geométricos da estrutura também assumem comportamento determinístico. A hipótese de que o comportamento estrutural seja um fenômeno determinístico é lógica e, inclusive, verificada experimentalmente. Porém, a hipótese de que os parâmetros mecânicos e geométricos são determinísticos não é verificada nos ensaios. Verifica-se nos ensaios que existe, para um dado material, uma densidade de probabilidade para os valores da resistência  $R$ . Significa que para qualquer ação aplicada, que também é aleatória, haverá uma probabilidade  $p$  de que se atinja a ruína ou uma falha da estrutura.

Portanto somente com a consideração da resistência  $R$  e das ações  $S$  como variáveis aleatórias e a utilização de um método totalmente probabilístico, o problema da segurança estrutural será definitivamente solucionado. Assim, levando em conta essas definições, sob o aspecto econômico, caberá ao engenheiro tomar uma decisão perante as incertezas, fixando a probabilidade de falha com que vai projetar e construir uma determinada estrutura, além de considerar os custos de construção e o montante dos danos decorrentes de uma eventual falha da mesma.

O Método Probabilístico Puro é caracterizado pelo cálculo da probabilidade de falha da estrutura levando-se em conta todas as configurações de ruína que se tornam possíveis pela aleatoriedade das características mecânicas e geométricas da estrutura, e não apenas levando em conta a configuração de ruína determinada por uma análise determinística. Atualmente, já existem pesquisas que procuram capturar vários modos de falha de uma estrutura, não ficando restritas somente ao primeiro modo de falha. Com isso, é possível por conta da aleatoriedade das propriedades mecânicas dos materiais, obter a falha de uma seção onde não atua o esforço máximo avaliado na análise determinística. Apesar de ser cientificamente a maneira perfeita para tratar o problema da segurança, esses conceitos ainda não são familiares aos profissionais do meio técnico, além de necessitarem de maior desenvolvimento. Trata-se de um belo campo de pesquisa a ser explorado.

Por conta dessas restrições, propôs-se o Método Semiprobabilístico com o intuito de introduzir a segurança no projeto estrutural considerando a conceituação probabilística, embora, mantivesse, pelo menos em parte, a utilização de coeficientes semelhantes aos de segurança. A idéia básica do método semiprobabilístico é definir, no cálculo estrutural, valores das ações que tenham pouca probabilidade de serem ultrapassados e valores das resistências dos materiais que tenham pouca probabilidade de não serem alcançados, de modo que se introduza, para cada estado limite último, uma certa distância entre as ações atuantes e

as capacidades resistentes das peças. Assim, é possível esperar que os estados limites últimos tenham probabilidades muito baixas de serem atingidos. No entanto, cada análise de estado limite deve ser feita no campo determinístico. Para isso são definidos coeficientes de segurança que ponderam as ações, os esforços solicitantes e as resistências dos materiais, porém esses coeficientes são aplicados sobre os chamados valores característicos, ou seja, valores que já sofreram um tratamento estatístico.

Atualmente, nas normas de projeto de estruturas de concreto armado vigora o método dos estados limites. Esse método pode ser considerado como um método semiprobabilístico com consideração das incertezas por meio de coeficientes parciais de segurança. Entretanto, deve-se fazer uma observação importante sobre o método. Como já se reconhece que as ações, seus efeitos e as resistências dos materiais são todas quantidades aleatórias cujos valores reais são conhecidos somente através das suas respectivas distribuições de probabilidade individuais, os coeficientes de ponderação das ações e das resistências devem ser, convenientemente, determinados através de métodos de confiabilidade, a fim de garantir ao produto final (construção), índices de confiabilidade aproximadamente uniformes. No trabalho de SOARES (2001) encontra-se uma boa discussão sobre esse assunto, no qual o autor faz diversas análises em pilares de concreto armado variando os coeficientes parciais de segurança e o desvio padrão do concreto para verificar a uniformidade dos índices de confiabilidade.

Vale ressaltar que o projeto de uma estrutura deve sempre garantir mínimos custos com segurança estrutural adequada. Seguindo esse princípio, a união dos métodos de confiabilidade e otimização pode trazer grandes avanços e benefícios para a engenharia estrutural.

### **4.3 Características Estatísticas das Variáveis de Projeto**

A idéia de que as variáveis ação e resistência são quantidades aleatórias é aceita pelos engenheiros estruturais. Dessa forma, não é possível definir um único valor fixo para as variáveis de projeto. Para exemplificar de maneira simples essa questão, basta considerar um ensaio de corpos de prova de concreto submetidos à compressão simples. Ao se considerar as mesmas dimensões dos elementos, o mesmo traço para toda a moldagem e o mesmo equipamento controlado para aplicação da força, teoricamente, todos os corpos de prova deveriam apresentar a mesma resistência. Esse é o princípio determinístico. Entretanto não é o

que ocorre. Cada corpo de prova apresenta uma determinada resistência à compressão após os ensaios. Obtém-se com esses ensaios um conjunto de resultados possíveis para a variável resistência do concreto. Portanto, ao conjunto de resultados possíveis de um experimento dá-se o nome de espaço amostral.

Ocorre que é possível, utilizando os conceitos estatísticos, definir para um espaço amostral, um valor médio de resistência e um valor que quantifique o grau de dispersão dos resultados em torno do valor médio. Essas medidas são chamadas de primeiro (média) e segundo (variância) momento estatístico.

Em um projeto estrutural pode-se dizer que todas as variáveis são aleatórias. Desde as dimensões dos elementos estruturais até as suas propriedades mecânicas apresentam dispersões. Desse modo, sempre haverá uma probabilidade finita de que ocorra uma falha.

O modo de tratar esse problema consiste em considerar não somente um valor fixo para as variáveis, mas sim um valor médio e um desvio padrão. Pode-se utilizar ainda o coeficiente de variação como medida de dispersão no lugar do desvio padrão. Além disso, é preciso avaliar qual é o modo de variação de cada uma dessas variáveis, ou seja, definir um intervalo possível de valores, no qual as variáveis possam assumir qualquer valor. Por conta disso, para caracterizar uma variável aleatória é preciso definir seu valor médio, medida de dispersão e sua respectiva distribuição de probabilidades. A essa transformação de uma variável de natureza determinística para natureza probabilística, chama-se associação estatística. CASTRO (1997) alerta que as especificações em estados limites reconhecem que as ações, os efeitos das ações e as resistências são quantidades aleatórias cujos valores reais são conhecidos somente através da distribuição de probabilidade dessas quantidades individuais. A seguir apresenta-se o conceito das funções básicas de distribuição de probabilidade, bem como as funções utilizadas neste trabalho.

#### 4.3.1 Distribuições de Probabilidades

De um modo geral, as funções básicas consideradas na análise de confiabilidade de estruturas são as funções densidade de probabilidade (FDP) e as funções cumulativas de probabilidade (FCP). Essas funções avaliam, respectivamente, a probabilidade de que a variável assuma um valor contido dentro de um intervalo pré-definido e de que a variável assuma um valor menor ou igual a um valor de referência. A representação matemática dessas funções de probabilidades é expressa por:

$$FDP: P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (4.2)$$

$$FCP: F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(x) dx \quad (4.3)$$

onde  $X$  é a variável aleatória,  $a$  e  $b$  são os limites do intervalo considerado,  $f_X(x)$  é a função densidade de probabilidade e  $F_X(x)$  é a função cumulativa de probabilidade.

Existem algumas grandezas que servem para descrever uma variável aleatória. Essas grandezas são definidas no contexto de espaços amostrais. No caso da análise de estruturas de concreto armado, neste trabalho, as resistências do concreto e do aço são consideradas variáveis aleatórias. Essas grandezas são descritas por:

*Valor médio, ou média, ou valor esperado:* significa o valor mais provável que a variável aleatória pode assumir no intervalo considerado.

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (4.4)$$

*Variância:* mede a dispersão dos valores da variável em torno da média.

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \quad (4.5)$$

*Desvio padrão:* também mede o grau de dispersão dos valores da variável em torno da média.

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \quad (4.6)$$

*Coefficiente de variação:* mede de forma adimensional (ao contrário da variância) a dispersão dos dados da variável aleatória em torno da média. Coeficientes de variação baixos indicam que os valores da variável aleatória estão distribuídos próximos à média, enquanto que valores altos indicam uma forte dispersão em torno da média.

$$V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (4.7)$$

Atualmente, várias funções de distribuição são conhecidas, cabendo ao engenheiro escolher a função mais adequada para representar as variáveis aleatórias consideradas na análise. O uso prático dessas funções depende de sua capacidade para representar estatisticamente um fenômeno que está sendo investigado. Para as propriedades mecânicas do concreto e do aço, as funções de distribuição normal e log-normal são as mais indicadas. De

acordo com SOARES (2001), as ações permanentes também podem ser representadas por distribuições normais ou log-normais. Já as ações variáveis, segundo NOWAK & COLLINS (2000) devem ser representadas por funções do tipo Gamma. O trabalho de SOARES (2001) traz uma lista das diversas funções de distribuição de probabilidade para as variáveis aleatórias no projeto estrutural.

### **Distribuição Normal**

A distribuição normal ou de Gauss é, provavelmente, a distribuição mais importante na teoria da confiabilidade estrutural. Essa distribuição tem somente como parâmetros a média  $\mu_X$  e o desvio padrão  $\sigma_X$  da variável aleatória. A função densidade de probabilidade de uma variável normal é representada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \quad (4.8)$$

Já a função cumulativa não dispõe de uma forma fechada como a Eq. (4.8), porém pode ser avaliada por integração numérica ou por meio de tabelas para o caso de média nula e desvio padrão unitário.

Uma alternativa equivalente e bastante interessante para representar uma variável normal é através da introdução de uma variável auxiliar conhecida como variável reduzida, definida como:

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (4.9)$$

Ao substituir a Eq. (4.9) na Eq. (4.8) e considerando média nula e desvio padrão unitário obtém-se a conhecida distribuição normal padrão de probabilidades, dada por:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(z)^2\right] = f_Z(z) \quad (4.10)$$

A função cumulativa de probabilidade da distribuição normal padrão é avaliada por:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z f_Z(z) dz = F_Z(z) \quad (4.11)$$

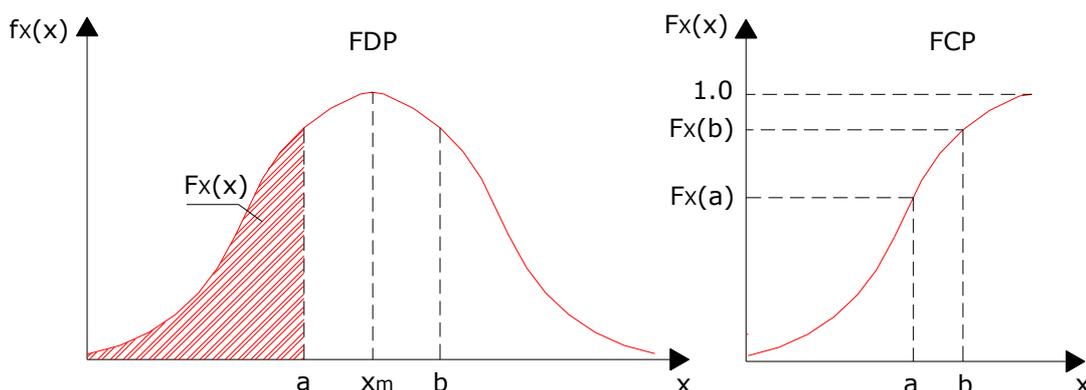


Figura 4.1 – Distribuições de probabilidade de uma variável normal

Esse tipo de transformação permite aproveitar as informações probabilísticas das variáveis normais padrão para obter os valores de FDP e FCP das variáveis normais. Assim, por meio de uma simples transformação de coordenadas é possível relacioná-las como segue:

$$X = \mu_X + Z\sigma_X \quad (4.12)$$

$$\text{FCP: } F_X(x) = P(X \leq x) = P(\mu_X + Z\sigma_X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (4.13)$$

$$z = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \therefore P(Z \leq z) \quad (4.14)$$

$$F_X(x) = F_Z(z) = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (4.15)$$

$$\text{FDP: } f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{\sigma_X} \phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (4.16)$$

### **Distribuição Log-normal**

Uma variável aleatória  $X$  tem uma distribuição log-normal quando, estatisticamente,  $\ln(X)$  pode ser representado por uma distribuição normal. A distribuição log-normal é definida somente para valores positivos de  $x$ . A FDP de uma variável log-normal é definida como:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\xi\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x) - \lambda}{\xi}\right)^2\right] \quad (4.17)$$

onde os parâmetros  $\lambda$  e  $\xi$  são respectivamente, a média e o desvio padrão da variável normal  $\ln(x)$ , dados por:

$$\xi^2 = \sigma_{\ln x}^2 = \ln \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_X}{\mu_X} \right)^2 \right] \quad (4.18)$$

$$\lambda = \mu_{\ln x} = \ln(\mu_X) - \frac{1}{2} \xi^2 \quad (4.19)$$

A distribuição cumulativa log-normal pode ser comparada com a FCP de uma variável normal, uma vez que  $\ln(x)$  é normal, ou seja:

$$F_X(x) = F_{\ln x}(\ln(x)) = \Phi \left( \frac{\ln(x) - \mu_{\ln x}}{\sigma_{\ln x}} \right) \quad (4.20)$$

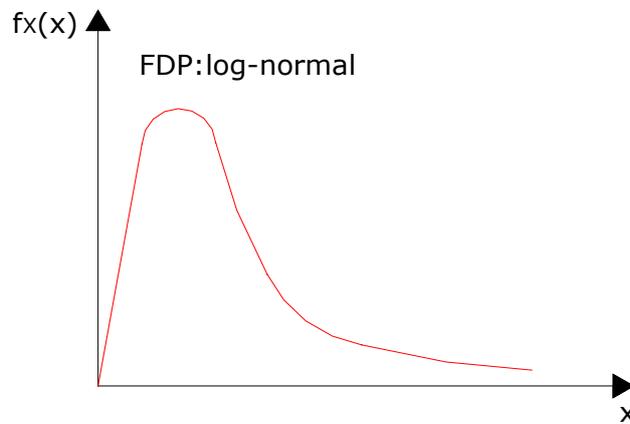


Figura 4.2 – Função densidade de probabilidade de uma variável log-normal

### 4.3.2 Variáveis Aleatórias Independentes

Variáveis aleatórias estatisticamente independentes ou não-correlacionadas são aquelas cujas características estatísticas não se alteram devido à presença de uma outra variável. Isto significa que a realização de uma variável não depende ou influi na realização da outra variável. Em geral, a maioria das variáveis da análise estrutural pertence a este grupo. Neste trabalho, consideram-se como variáveis aleatórias e independentes as resistências à compressão do concreto e do aço.

A vantagem de se trabalhar com variáveis independentes é que a transformação isoprobabilística para o espaço normal padrão é feita para cada variável de maneira independente, o que torna o processo mais rápido e simples.

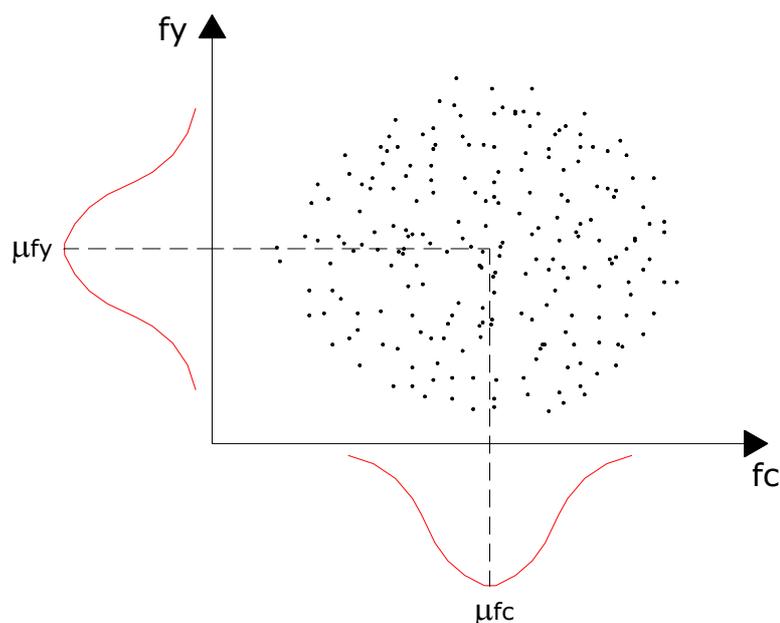


Figura 4.3 – Caso de 2 variáveis aleatórias não-correlacionadas

### 4.3.3 Variáveis Aleatórias Correlacionadas

As variáveis aleatórias são ditas dependentes ou correlacionadas quando têm suas características alteradas com a presença de uma outra variável. Para exemplificar pode-se citar a resistência do aço e o grau de corrosão da armadura ou ainda a rigidez do concreto e o grau de fissuração das peças. A correlação é considerada como um dos complicadores da análise de confiabilidade porque estabelece dependências estatísticas entre as variáveis. Essas dependências estatísticas, por sua vez, são definidas por meio de coeficientes de correlação que podem ser determinados através de ensaios em laboratório.

Estatisticamente, o coeficiente de correlação  $\rho_{XY}$  entre as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é obtido pelo conceito de covariância. A covariância entre  $x$  e  $y$  pode ser expressa por:

$$COV(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X) \cdot (y - \mu_Y) \cdot f_{XY}(x, y) dx dy \quad (4.21)$$

onde  $\mu_X$  e  $\mu_Y$  são as médias das variáveis aleatórias e  $f_{XY}$  é a distribuição de probabilidades conjunta.

O coeficiente de correlação é definido por:

$$\rho_{XY} = \frac{COV(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (4.22)$$

O valor de  $\rho_{XY}$  indica o grau de dependência linear entre duas variáveis aleatórias, no caso  $X$  e  $Y$ , assumindo valores entre  $-1$  e  $1$ . Vale ressaltar que para valores do módulo de  $\rho_{XY}$  iguais a  $1$  significa que as variáveis são perfeitamente correlacionadas. Para os casos em que  $\rho_{XY}$  é nulo, significa que pode haver uma correlação entre as variáveis aleatórias, embora essa correlação não seja linear, o que não significa que as variáveis sejam independentes.

Quando se trabalha com diversas variáveis aleatórias é mais conveniente utilizar a matriz dos coeficientes de correlação, dada por:

$$[\rho_{ij}] = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & \rho_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

A matriz de correlação é simétrica e, para o caso de variáveis não-correlacionadas, os termos da diagonal principal são todos iguais à unidade.

É possível também obter uma estimativa do coeficiente de correlação para conjuntos de dados aleatórios observados em um experimento. No caso da confiabilidade, o experimento corresponde a um conjunto de valores provenientes da geração determinística das variáveis aleatórias, no caso com o uso de planos de experiência. A partir dos dados iniciais de cada variável considerada, obtém-se um vetor com várias combinações dessas variáveis, no caso valores de resistência do concreto e do aço. Para cada par de resistências, o modelo mecânico avalia a estrutura e determina um valor de carga última gerando um vetor de cargas últimas. Com isso é possível realizar uma estimativa estatística do coeficiente de correlação entre a variável de carga última e cada uma das resistências, verificando assim, a influência de cada resistência no valor da carga última da estrutura. O coeficiente de correlação é calculado por:

$$\rho_{XY} = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (4.24)$$

onde  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são as médias das variáveis aleatórias e  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$  são os respectivos desvios padrão.

Ao se determinar o coeficiente de correlação entre as resistências do concreto e do aço verifica-se que o resultado é nulo, ou seja, são variáveis aleatórias não-correlacionadas. Entretanto, para pilares de concreto armado submetidos à compressão centrada, o coeficiente de correlação da carga última de um pilar em relação à resistência do concreto vale

aproximadamente 1, ao passo que quando calculado em relação à resistência do aço, o coeficiente de correlação resulta quase nulo. Isto significa que a carga última, quanto à ruptura dos materiais, de um pilar de concreto armado submetido à compressão centrada depende quase que totalmente da resistência à compressão do concreto.

A consideração da correlação entre as variáveis aleatórias implica na utilização de transformações isoprobabilísticas especiais para a obtenção das variáveis reduzidas no cálculo da confiabilidade. Indica-se nesses casos, as transformações de Rosenblatt ou a de Nataf. Segundo MOHAMED (1997) apud SOARES (2001), a transformação de Rosenblatt é a melhor solução, porém necessita do conhecimento da lei de distribuição conjunta do vetor das variáveis aleatórias, que na maioria dos casos, não é conhecida. Em geral, são conhecidos os valores das médias, desvios padrão, matriz de correlação e funções marginais de probabilidade das variáveis aleatórias. Nesses casos, utiliza-se a transformação de Nataf.

No presente trabalho não é considerada a correlação entre as variáveis aleatórias utilizadas, uma vez que não há dependência estatística entre a resistência do concreto e do aço.

#### **4.4 Estados Limites**

Um estado limite pode ser definido como a fronteira entre o desempenho desejado e o indesejado de uma estrutura. Existem diversos estados limites a serem considerados em um projeto estrutural. Segundo a NBR 8681:2003, os estados limites últimos se referem a ocorrências que determinam a paralisação total ou parcial de uma construção. Dentre eles podem citar-se: ruptura dos materiais (esmagamento do concreto comprimido, alongamento excessivo da armadura), instabilidade global, ruptura das ligações, ruptura por cisalhamento e colapsos progressivos. Já os estados limites de utilização são aqueles que causam efeitos estruturais que não respeitam as condições especificadas para o uso normal da construção, ou que são indícios de comprometimento da durabilidade da mesma. Dentre eles estão deslocamento excessivo, vibração excessiva, deformações permanentes, formação e abertura de fissuras.

Na análise de confiabilidade, a representação dos estados limites é feita por meio das chamadas funções de estado limite. Essas funções, de um modo geral, podem ser expressas em termos de uma margem de segurança, isto é, uma função que expresse a diferença entre a

capacidade resistente da estrutura e as ações ou efeitos dos carregamentos que agem sobre a mesma. Define-se, portanto, uma função de estado limite como:

$$G(x_i) = R(x_i) - S(x_i) \quad (4.25)$$

onde  $x_i$  são as diversas variáveis aleatórias que influem sobre o desempenho da estrutura,  $G(x_i)$  é a função de desempenho ou estado limite,  $R(x_i)$  é a resistência ou capacidade resistente da estrutura em função das variáveis de projeto e  $S(x_i)$  é a ação ou solicitação atuante sobre a estrutura.

Em projetos estruturais deseja-se que todos os elementos, bem como a estrutura como um todo tenha desempenho adequado para todas as especificações consideradas. Geometricamente, no espaço das variáveis de projeto, existe uma região que contém as diversas situações que verificam todas as especificações de projeto, isto é,  $G(x_i) > 0$ . A esta região dá-se o nome de domínio de segurança simbolizada por  $\Omega_S$ , ou seja, a estrutura encontra-se segura. Entretanto, existe uma região que, por conta das incertezas das variáveis, provoca uma situação estrutural não desejada, isto é, a estrutura ultrapassa a condição de estado limite com  $G(x_i) < 0$ . A esta região dá-se o nome de domínio de falha simbolizada por  $\Omega_F$ . A fronteira entre as regiões de segurança e de falha consiste na função de estado limite representada por  $G(x_i) = 0$ .

É importante comentar que a Eq. (4.25) expressa o caso geral, ou seja, tanto a resistência quanto a solicitação depende das variáveis aleatórias, o que as torna variáveis aleatórias. Entretanto, é possível realizar a análise de confiabilidade considerando somente a resistência ou a solicitação como variável aleatória. O presente trabalho faz a análise de confiabilidade de estruturas de concreto armado considerando apenas a capacidade resistente da estrutura como variável aleatória. Dessa forma, as forças externas ou os efeitos dos carregamentos que atuam sobre a estrutura são considerados como variáveis determinísticas.

Com a Eq. (4.25) é possível verificar a condição de segurança de uma estrutura estabelecendo as regiões seguras e as regiões de falha, conforme a Fig. (4.4).

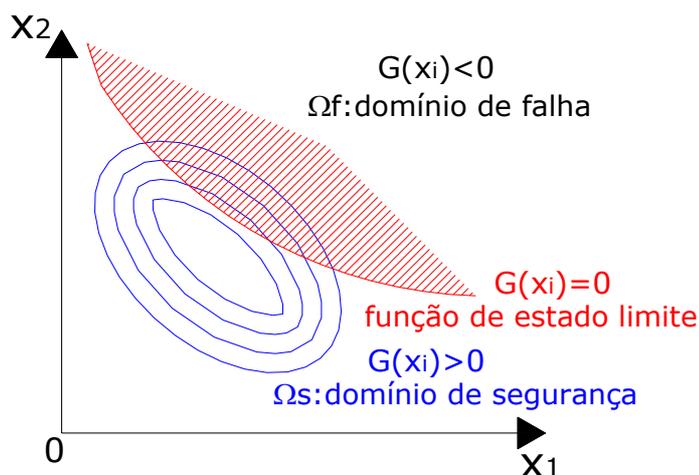


Figura 4.4 – Regiões de desempenho no espaço físico

## 4.5 Probabilidade de Falha

O problema básico ou caso fundamental da confiabilidade consiste em comparar um efeito de carregamento  $S$  com uma resistência  $R$  de um elemento estrutural. Essa definição não perde generalidade, podendo ser estendida também para uma estrutura como um todo. Cada uma das variáveis  $R$  e  $S$  são aleatórias e descritas por uma distribuição de probabilidades  $f_R(\cdot)$  e  $f_S(\cdot)$  respectivamente. A função de estado limite pode ser escrita pela Eq. (5.25), de modo que a probabilidade de falha para um elemento estrutural é dada pelo conjunto de realizações que proporcionam que o efeito  $S$  resulte superior à resistência  $R$ , ou seja:

$$P_f = P(R \leq S) = P(R - S \leq 0) = P[G(R, S) \leq 0] \quad (4.26)$$

O conjunto de realizações que verificam a Eq. (4.26) constitui o domínio de falha. Assim, a probabilidade de falha deve ser o somatório de todos os pontos que se encontram no domínio de falha que, no espaço físico, resulta da integral da função de probabilidade conjunta  $f_{RS}(\cdot)$  sobre o domínio de falha. Portanto, a probabilidade de falha é definida como:

$$P_f = P(R - S) \leq 0 = \int_{\Omega_F} f_{RS}(r, s) dr ds \quad (4.27)$$

onde  $r$  e  $s$  são valores de resistência e solicitação, respectivamente, para uma determinada realização.

A integral da Eq. (4.27) possui solução analítica somente para alguns casos simples. Nos problemas práticos de engenharia, a maioria das variáveis aleatórias é correlacionada, assim como as distribuições de probabilidade são complexas, fazendo com que a integração

exata da probabilidade de falha se torne praticamente impossível. Nesse contexto, a utilização de métodos alternativos para quantificar a probabilidade de falha se faz necessária. A solução para o problema pode então ser a adoção de métodos de simulação ou de métodos aproximados onde a probabilidade de falha é obtida por meio de índices de confiabilidade.

Existe ainda uma simplificação que pode ser introduzida ao considerar que as variáveis aleatórias são não-correlacionadas. Assim, no caso fundamental, a probabilidade de falha resulta:

$$P_f = P(R - S) \leq 0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^r f_R(r) \cdot f_S(s) dr ds \quad (4.28)$$

É importante observar que a probabilidade de falha é diretamente influenciada pela forma das distribuições de probabilidade, bem como pelo grau de dispersão das respectivas variáveis aleatórias. Quanto maior for o coeficiente de variação das variáveis, maior será a probabilidade de falha. Essa conclusão é lógica, uma vez que coeficientes de variação elevados indicam maiores incertezas sobre as variáveis. Com isso, a redução da probabilidade de falha de uma estrutura de concreto armado está diretamente associada a uma melhoria dos processos de fabricação e controle dos materiais, no caso o concreto, e dos processos construtivos com a diminuição das incertezas quanto às dimensões dos elementos estruturais. Procedendo desse modo seria possível diminuir as incertezas sobre a variável de resistência  $R$  da Eq. (4.25). Conseqüentemente, a região sobreposta à curva de sollicitação seria menor, o que diminuiria a probabilidade de falha da estrutura.

## 4.6 Métodos de Simulação

### 4.6.1 Generalidades

As técnicas de simulação podem ser utilizadas como uma maneira alternativa para avaliar a probabilidade de falha de uma estrutura. A idéia básica das simulações nada mais é do que repetir diversas vezes um determinado fenômeno e observar os eventos de interesse que possam ocorrer. As simulações, no âmbito da confiabilidade estrutural, possuem caráter numérico e podem ser amplamente realizadas por conta do seu baixo custo e da grande disponibilidade dos recursos atuais de informática. Entretanto, o inconveniente das simulações reside no fato de que necessitam de um número muito grande de realizações para

que atinjam valores confiáveis de probabilidade de falha. Cada realização implica em uma resposta do modelo mecânico e avaliação da função de estado limite da estrutura. A necessidade do uso de modelos não-lineares complexos associados a valores muito pequenos de probabilidades de falha, da ordem de  $10^{-3}$  a  $10^{-6}$  nos problemas de engenharia, muitas vezes impossibilita a utilização dos métodos de simulação, pois o custo computacional se torna altíssimo. Mesmo diante dessas desvantagens, os métodos de simulação são considerados os mais eficientes, pois permitem a avaliação da probabilidade de falha de qualquer tipo de estrutura sendo largamente utilizados para aferir métodos aproximados de confiabilidade.

#### 4.6.2 O Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo é um dos métodos de simulação mais utilizados quando se deseja obter uma estimativa precisa da probabilidade de falha. Para sua utilização, é necessário que as variáveis aleatórias tenham distribuição de probabilidades conhecida. O método está baseado no processo de inúmeras repetições onde em cada uma delas é gerado um conjunto de valores aleatórios para as variáveis obtidos mediante suas respectivas distribuições de probabilidades. Cada repetição resulta em uma chamada do modelo mecânico fornecendo, assim, uma solução para a estrutura. Dessa forma, ao final do processo de simulação é obtido um conjunto de soluções ou respostas mecânicas da estrutura que devem ser comparadas com a função de estado limite.

Deve-se comentar que as gerações aleatórias são feitas embasando-se em parâmetros de entrada das variáveis aleatórias. Por esse motivo e pela utilização de funções determinísticas pelos computadores, os valores obtidos não são aleatórios, mas sim pseudo-aleatórios.

Para gerar-se uma seqüência que obedeça a uma distribuição de probabilidades qualquer, deve-se, primeiramente, gerar uma seqüência que obedeça a uma distribuição normal e depois efetuar a transformação adequada para a distribuição desejada. NOWAK & COLLINS (2000) apresentam um procedimento simples para a geração de valores de qualquer distribuição de probabilidades. O primeiro passo consiste em gerar uma amostra de valores  $q_i$  de probabilidades que obedecem uma distribuição uniforme com valores entre zero e um. Essa geração é feita a partir de um conjunto de operações determinísticas realizadas pelo computador truncando-se a quantidade de casas decimais que forem necessárias. No segundo passo, calcula-se a correspondente variável normal padrão referente a  $q_i$  através de

uma transformação isoprobabilística inversa, ou seja,  $u_i = \Phi^{-1}(q_i)$ . Finalmente, pode-se obter a respectiva variável física mediante uma transformação para o espaço físico dada por,  $x_i = F_X^{-1}(\Phi(u_i))$ . Através dessa realização no espaço físico são obtidas todas as variáveis aleatórias envolvidas no processo para determinar a resposta mecânica da estrutura. Assim, o método de Monte Carlo procura substituir a Eq. (4.27) por um estimador da probabilidade de falha com o cálculo da expectância matemática da variável aleatória  $I(x)$  da seguinte forma:

$$P_f = \int_{\Omega_F} f_X(x) dx = \int_{R^n} I(x) f_X(x) dx = E[I(x)] \quad (4.29)$$

onde  $E[I(x)]$  é a expectância matemática da variável aleatória  $I(x)$ . Define-se o estimador  $I(x)$  por:

$$I(X) = \begin{cases} 1 \rightarrow x \in \Omega_f \\ 0 \rightarrow x \notin \Omega_f \end{cases} \quad (4.30)$$

Repetindo as análises para um grande número de simulações  $n_S$ , a média empírica dos valores de  $I(x)$  é um estimador da probabilidade de falha. Significa que:

$$P_f = \frac{1}{n_S} \cdot \sum_{r=1}^{n_S} I(x_r) \quad (4.31)$$

A variância do estimador  $I(x)$  é dada por:

$$\sigma_{I(x)}^2 = \frac{1}{n_S^2} \cdot \left[ n \sum_{r=1}^{n_S} I^2(x_r) - \left( \sum_{r=1}^{n_S} I(x_r) \right)^2 \right] \quad (4.32)$$

Graficamente é fácil visualizar o método de Monte Carlo, Fig. (4.5). Cada simulação produz uma resposta mecânica, no caso um valor de carga última, que se encontra no domínio de segurança ou no domínio de falha. Assim, a probabilidade de falha é obtida somando-se os eventos de falha e relacionando-os com todos os eventos possíveis.

A grande vantagem das simulações de Monte Carlo é que permitem substituir o cálculo de integrais complexas que não possuem soluções analíticas fechadas. A simulação entra exatamente nesse ponto, ou seja, produz como resultado, um valor para a integral que tende a se estabilizar em torno da média à medida que o número de simulações se aproxima do infinito.

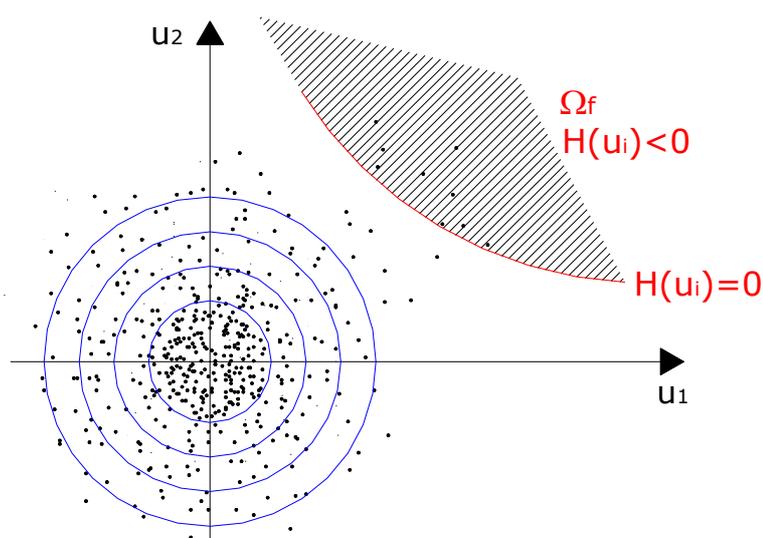


Figura 4.5 – Sorteio de pontos na simulação de Monte Carlo

Entretanto a grande desvantagem do método está relacionada ao número excessivo de simulações necessárias para que se possa estimar com precisão a probabilidade de falha. Em geral, para estimar uma probabilidade de falha da ordem de  $10^{-n}$ , o número de simulações não deve ser inferior a  $10^{(n+2)}$  e  $10^{(n+3)}$ . Significa que nas estruturas civis, de um modo geral, com probabilidade de falha de  $10^{-3}$  a  $10^{-6}$ , são necessárias  $10^5$  a  $10^9$  simulações. Dessa forma, com a utilização dos modelos não-lineares de representação do comportamento das estruturas, o método de Monte Carlo não é dos mais eficazes. Além disso, o método de Monte Carlo não fornece nenhuma informação adicional sobre o ponto de projeto e a sensibilidade da probabilidade de falha em relação às variáveis aleatórias. Trata-se, portanto de um método útil para aferir modelos não-aleatórios, pois oferece boa precisão em seus resultados.

Entre os métodos de simulação ainda existem os métodos que utilizam amostra por importância. A ideia desse método é reduzir o número de simulações necessárias ao utilizar o método de Monte Carlo. Uma discussão mais aprofundada sobre esses métodos é encontrada no trabalho de SOARES (2001) e NEVES (2004).

## 4.7 O Método de Superfície de Resposta (RSM)

### 4.7.1 Generalidades

A avaliação direta da probabilidade de falha por meio da integral da Eq. (4.27) ou através de métodos de simulação é na grande maioria dos casos, uma tarefa bastante

demorada, quando não impossível. Para contornar esses problemas e expandir as aplicações da teoria das probabilidades na análise de segurança estrutural, os pesquisadores passaram a buscar métodos aproximados. Esses métodos utilizam aproximações analíticas baseadas em índices de confiabilidade para determinar a probabilidade de falha. Dentre os métodos aproximados destaca-se o Método de Superfície de Resposta (RSM).

Uma das vantagens do RSM em relação aos métodos de simulação é permitir a construção de uma função de estado limite e a determinação do ponto de projeto. A possibilidade de construir uma função de estado limite da estrutura é bastante importante porque dependendo da complexidade do problema, a determinação explícita dessa função é uma tarefa muito difícil de ser executada. Esse é o caso típico das estruturas de concreto armado no que se refere ao estado limite último, pois o comportamento fortemente não-linear físico e geométrico, aliado ao grau de hiperestaticidade faz com que a função de estado limite último dessas estruturas seja implícita. Desse modo, o RSM substitui a função de estado limite real por uma função aproximada na vizinhança do ponto de projeto baseado em um processo iterativo. Nota-se que o método garante a aproximação da superfície de falha da estrutura somente em torno do ponto de projeto, o que torna o processo mais rápido do ponto de vista computacional. Essa característica faz com que o custo computacional das análises pelo RSM seja bastante reduzido comparado às simulações, o que torna o método bastante eficaz desse ponto de vista.

De um modo geral, o RSM determina uma aproximação da função de estado limite da estrutura em torno do ponto de projeto. Esse ponto define o primeiro modo de falha ou modo mais provável de falha da estrutura. Os outros modos de falha são negligenciados obtendo-se somente a probabilidade de falha do primeiro modo. O ponto de projeto é determinado através de sucessivas iterações do RSM, nas quais são gerados conjuntos de valores determinísticos das variáveis aleatórias por meio de planos de experiência. Cada conjunto de valores gerado corresponde a uma configuração da estrutura segundo suas variáveis aleatórias e conduz a uma resposta estrutural definida. Com o conjunto de valores das variáveis aleatórias (pontos do plano de experiência) e as respectivas respostas mecânicas, constrói-se a superfície de resposta através do cálculo dos coeficientes da função de aproximação adotada por meio de um método de regressão. O grau de aproximação depende do nível de conhecimento do ponto de projeto e do grau de não-linearidade da função de estado limite analisada. De posse da superfície em torno do ponto de projeto, calcula-se o índice de confiabilidade definido como a mínima distância entre a origem do sistema de

coordenadas do espaço normalizado e o ponto de projeto. A partir do índice de confiabilidade, determina-se a probabilidade de falha com uso de métodos analíticos como o FORM (*First Order Reliability Method*) e o SORM (*Second Order Reliability Method*).

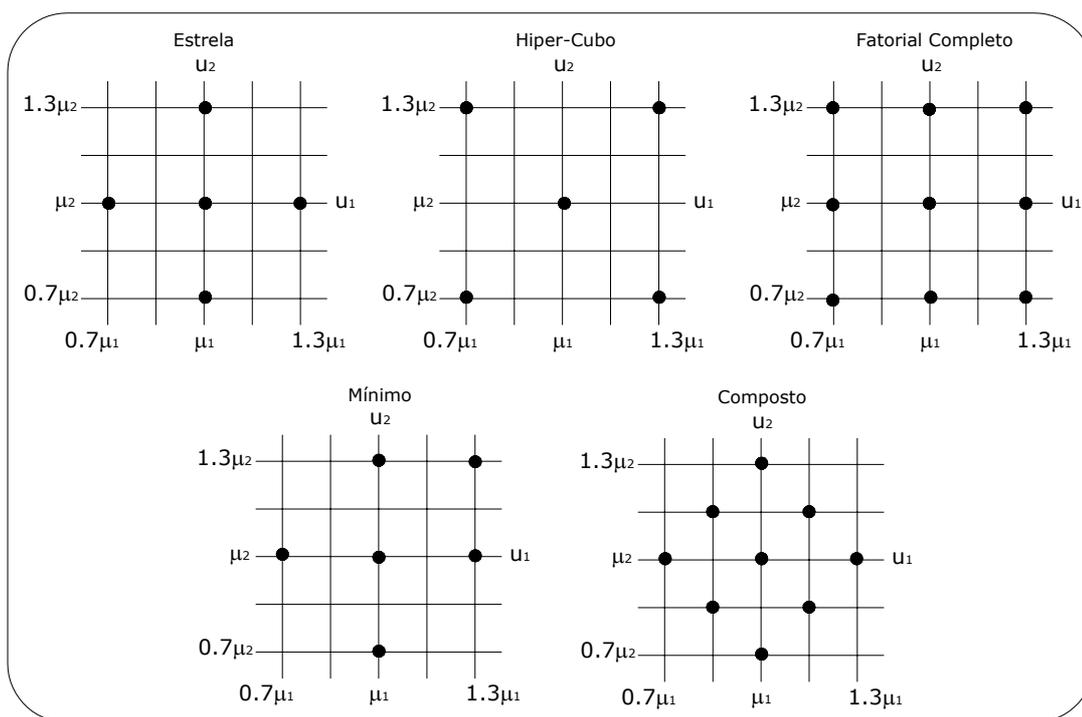
Portanto, os dois grandes problemas do RSM estão relacionados com a forma da superfície de resposta adotada, isto é o tipo de função aproximadora com o respectivo cálculo de seus coeficientes e o desenvolvimento da superfície em torno do ponto de projeto.

#### 4.7.2 Planos de Experiência (PE)

Na análise de confiabilidade pelo RSM, além de um modelo mecânico adequado capaz de representar as estruturas, é essencial a escolha de um plano de experiência conveniente para fornecer as respostas mecânicas da estrutura. São os planos de experiência que determinam as variações das variáveis aleatórias de projeto para que o modelo mecânico possa determinar as respectivas respostas estruturais. Assim, os planos de experiência são os principais responsáveis pela convergência do processo de busca do ponto de projeto e, conseqüentemente, pelo custo computacional da análise.

A determinação do ponto de projeto é feita através da convergência de superfícies de resposta (aproximações da função de estado limite) em um processo iterativo. Cada superfície é obtida mediante um conjunto de valores das variáveis aleatórias determinados pelos planos de experiência. Na verdade, cada ponto de um plano de experiência é definido por um fator que age sobre a média da variável aleatória a ser ponderada. Esse fator de ponderação provém de uma relação entre o desvio padrão e a média da respectiva variável aleatória. Dessa forma, de acordo com o plano de experiência adotado, gera-se um conjunto de valores determinísticos de cada variável aleatória considerada na análise que serão utilizados para a determinação da aproximação da função de estado limite em cada iteração do RSM.

Neste trabalho são adotados cinco planos de experiência, embora existam numerosas propostas na literatura técnica. Trata-se de planos numéricos, isto é, determinísticos, o que significa que para duas experiências com dados idênticos, ao utilizar um desses planos, os resultados serão idênticos. A Fig. (4.6) ilustra os planos de experiência adotados nesta pesquisa.



**Figura 4.6 – Planos de experiência adotados**

Vale ressaltar que não é possível afirmar qual plano de experiência é o melhor, pois a utilização de um único plano para qualquer tipo estrutural é impossível. A escolha do melhor PE para uma determinada estrutura deve ser feita através de testes iniciais de convergência do ponto de projeto e número de respostas mecânicas necessárias na análise, ou seja, deve ser feita caso a caso.

A evolução das superfícies aproximadas geradas a partir dos pontos dos planos de experiência pode ser feita através do emprego ou não de pontos de adaptação. Quando se usa ponto de adaptação, elimina-se apenas um ponto do PE de uma iteração para a outra. O ponto eliminado é o ponto que gera a resposta mecânica mais afastada das demais na iteração anterior. Com isso, para gerar a nova aproximação da superfície de estado limite necessita-se apenas de um único ponto. O novo ponto consiste exatamente no ponto de projeto obtido na iteração anterior do RSM.

A estratégia sem ponto de adaptação consiste em eliminar todos os pontos da iteração anterior. Define-se o PE novamente gerando todos os seus pontos para a próxima iteração da análise. O ponto médio do PE assume as características do ponto de projeto da última iteração, ou seja, todos os outros pontos são determinados seguindo a mesma regra do plano adotado com centro no ponto de projeto anterior, Fig. (4.7).

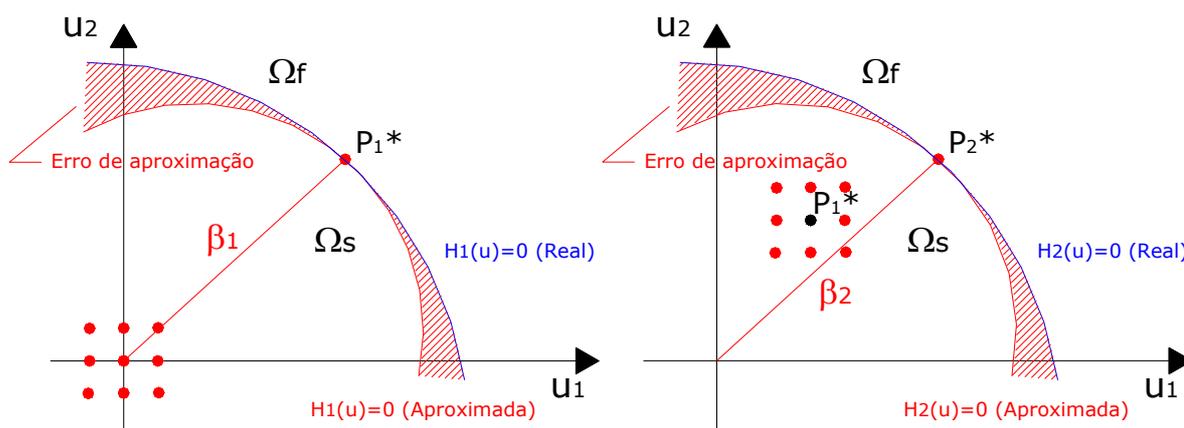


Figura 4.7 – RSM sem ponto de adaptação

Optou-se neste trabalho pelos planos de experiência sem ponto de adaptação, pois permitem que se faça uma reestruturação do plano aproximando ainda mais a precisão do ponto de projeto. Verifica-se na Fig. (4.7) que a superfície aproximada deixa de representar a superfície de estado limite real à medida que as afasta do ponto de projeto.

#### 4.7.3 Reestruturação dos Planos de Experiência

Conforme já mencionado, os planos de experiência (PE) são os principais responsáveis pela convergência do RSM e, assim pelo custo computacional da análise mecânico-probabilística. Entretanto, os planos de experiência podem conduzir a singularidades no sistema, que para serem solucionadas, podem precisar de mais pontos. Além disso, cada plano possui uma certa disposição no espaço das variáveis normalizadas, o que não confere uniformidade aos índices de confiabilidade obtidos por planos diferentes. Essa é uma característica importante, pois a mesma estrutura pode apresentar índices de confiabilidade distintos para cada plano de experiência utilizado. Dessa forma, a escolha do plano adequado varia para cada caso, sendo impossível generalizar um plano único para todos os tipos de estruturas.

Resumidamente, o procedimento do algoritmo iterativo de busca do ponto de projeto consiste em obter uma aproximação da função de estado limite, a partir de um conjunto de respostas mecânicas da estrutura, determinado por uma variação das quantidades aleatórias. Essa variação é determinística e coordenada pelos planos de experiência. Assim, em cada iteração, os ponderadores do plano de experiência modificam as variáveis aleatórias com o objetivo de gerar pontos para a construção da curva aproximada do estado limite considerado. O procedimento é repetido até que a convergência aconteça, conforme já explicado.

O que se propõe nesta seção aplica-se a partir do momento em que o ponto de projeto foi encontrado. A técnica consiste em subdividir o plano de experiência a partir do ponto de projeto, ou seja, uma vez que ocorre a convergência, uma nova iteração é realizada com o PE centrado no ponto de projeto. Os novos pontos para as chamadas ao modelo mecânico são definidos subdividindo-se o plano inicial em um plano menor, de modo que os novos pontos se aproximem do centro do PE e, conseqüentemente, do ponto de projeto. Com isso, é possível controlar o erro da aproximação, reduzindo-o cada vez mais em relação ao ponto de projeto inicial. Depois disso, o índice de confiabilidade é calculado novamente.

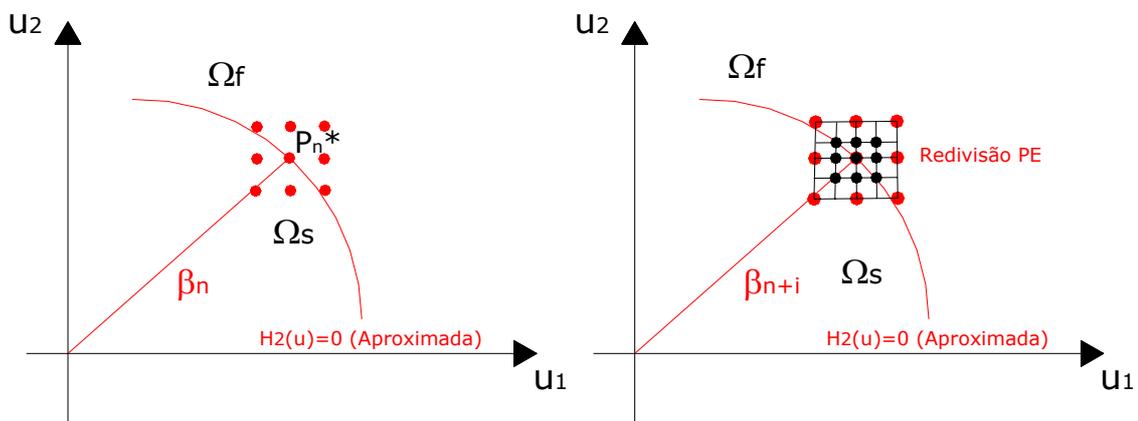


Figura 4.8 – Redivisão do PE em torno do ponto de projeto

O número de redivisões é controlado de acordo com o erro desejado, de modo que podem, a princípio, ser feitas quantas redivisões forem necessárias.

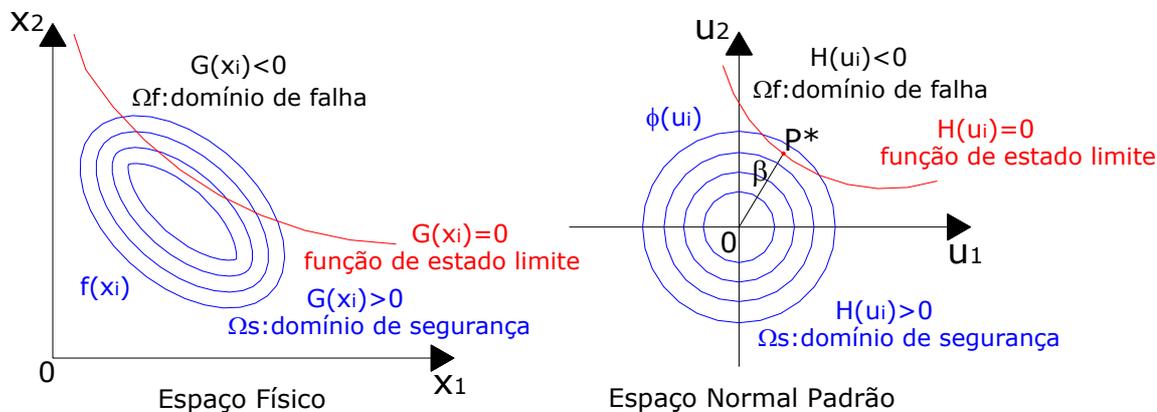
Existem duas desvantagens desse procedimento. A primeira delas consiste no aumento do custo computacional, visto que cada nova divisão do PE requer novas chamadas ao modelo de elementos finitos. A segunda desvantagem ocorre por conta da alta sensibilidade dos modelos, pois para uma pequena perturbação imposta aos valores das variáveis de projeto, é possível a alteração completa do cenário de falha anterior. Isto ocorre por conta dos novos pontos considerados após a convergência para a determinação do novo ponto de projeto mais preciso. Essa característica se torna mais evidente quando ocorrem, simultaneamente, modos de falha variados, ou seja, não há predominância de um determinado modo de falha sobre outro.

### 4.7.4 Espaço de Trabalho

Após a escolha de um plano de experiência deve-se, primeiramente, definir o espaço de trabalho onde a superfície será realmente construída. Existem duas possibilidades: espaço físico e espaço normal padrão.

Para o estudo da confiabilidade, o espaço normal padrão é mais indicado, pois se trabalha com variáveis adimensionais, o que permite a definição de um índice adimensional para medir a segurança das estruturas, no caso o índice de confiabilidade. Além disso, a utilização do espaço físico necessitaria que os profissionais tivessem um bom conhecimento do comportamento da estrutura em torno do ponto de falha, para que a estimativa dos pontos físicos conduzisse a realizações da estrutura próximas do ponto de projeto. Com pontos muito distantes do ponto de projeto, certamente haveria problemas sérios na convergência das análises. Portanto, a definição do ponto de projeto e do índice de confiabilidade é feita no espaço normal padrão não-correlacionado.

O problema é resolvido fazendo uma transformação isoprobabilística (Fig. 4.9) para a definição do ponto de falha mais provável e do respectivo índice de confiabilidade.



**Figura 4.9 – Transformação das variáveis do espaço físico para o espaço normal padrão**

A transformação do espaço físico para o espaço normalizado no caso de variáveis aleatórias independentes é dada por:

$$T(X) \Rightarrow u_i = \Phi^{-1} [F_{X_i}(x_i)] \tag{4.33}$$

Para voltar ao espaço físico aplica-se a transformação inversa:

$$T^{-1}(U) \Rightarrow x_i = F_{X_i}^{-1} [\Phi(u_i)] \tag{4.34}$$

No caso de variáveis normais e independentes, a redução é feita empregando a Eq. (4.33), o que resulta em:

$$u_i = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \quad (4.35)$$

onde  $u_i$  são os valores da variável aleatória  $x_i$  no espaço padronizado.

No caso de variáveis aleatórias com distribuições de probabilidades diferentes da distribuição normal, o procedimento consiste em transformar a variável em uma normal equivalente e, depois, transformar para o espaço normal padrão. Para isso, deve-se encontrar os parâmetros da distribuição normal equivalente, ou seja, média e desvio padrão, em relação à distribuição original. O procedimento é descrito a seguir:

Primeiramente deve-se igualar as funções de distribuição acumuladas para a variável normal equivalente e a variável original:

$$\Phi\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) = F_{X_i}(x_i) \quad (4.36)$$

$$\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} = \Phi^{-1}\left[F_{X_i}(x_i)\right] \quad (4.37)$$

onde  $\mu_i$  e  $\sigma_i$  são, respectivamente, a média e o desvio padrão da variável normal equivalente.

Derivando a expressão anterior em relação a  $x_i$  tem-se a igualdade das funções de densidade no mesmo ponto:

$$\frac{1}{\sigma_i} \varphi\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) = f_{X_i}(x_i) \quad (4.38)$$

Combinando as Eq. (4.37) e (4.38) tem-se uma expressão para o desvio padrão da variável normal equivalente:

$$\sigma_i = \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}\left[F_{X_i}(x_i)\right]\right)}{f_{X_i}(x_i)} \quad (4.39)$$

E finalmente, a média da distribuição normal equivalente pode ser obtida por:

$$\mu_i = x_i - \sigma_i \Phi^{-1}\left[F_{X_i}(x_i)\right] \quad (4.40)$$

A partir dos valores da média e desvio padrão da variável normal equivalente, procede-se da mesma forma para transformá-la para o espaço normal padrão. Assim, a superfície de estado limite aproximada passa a ser determinada no espaço normalizado adquirindo um caráter adimensional.

#### 4.7.5 Determinação da Superfície de Resposta Aproximada

A forma da superfície de resposta depende das informações disponíveis sobre o comportamento da estrutura. Entretanto, na grande maioria das vezes, não se dispõem dessas informações. Nesses casos, a superfície aproximada deve ser construída em função das respostas mecânicas conhecidas para determinados pontos dados pelo plano de experiência. Isto se justifica por conta da hiperstaticidade e comportamento não-linear das estruturas de concreto armado, fato que impede o conhecimento prévio de suas superfícies de falha.

O custo computacional ainda é um dos maiores problemas para se calcular a confiabilidade de uma estrutura de concreto armado quando são considerados os efeitos não-lineares da estrutura e dos materiais. Cada resposta mecânica corresponde a uma chamada do modelo de elementos finitos e envolve todo um processo incremental-iterativo. Portanto, torna-se imprescindível que a aproximação da função de estado limite seja construída com um número mínimo de pontos, ou seja, de respostas mecânicas.

LEMAIRE (1998) considera que o desenvolvimento construído por uma expansão polinomial é o mais eficiente quando não há informações suficientes sobre a função de estado limite. Assim, polinômios do segundo grau são uma boa solução, desde que seja incluído um possível cálculo de curvaturas da função de estado limite. SOARES (2001) conclui que é aconselhável trabalhar com superfícies de resposta com polinômios de ordem baixa, no caso segunda ou terceira ordem. SOARES et al (2002) restringem ainda mais ao afirmar que, geralmente polinômios de segundo grau são suficientes para aproximar a solução em torno do ponto de projeto.

Adotando-se um polinômio de segundo grau, conhecendo-se os pontos do plano de experiência e as respostas mecânicas referentes a cada um desses pontos determina-se, através de um método de regressão, os coeficientes do polinômio aproximador. O método utilizado neste trabalho é o Método dos Mínimos Quadrados. Assim, minimiza-se o quadrado das distâncias entre as respostas mecânicas reais e aquelas aproximadas pelo polinômio. Vale ressaltar que a superfície de resposta é construída no espaço normal padrão, portanto as variáveis aleatórias são transformadas para o respectivo espaço. As respostas mecânicas, por sua vez, permanecem no espaço físico, pois influenciam somente nas ordenadas da superfície de resposta. A seguir apresenta-se a formulação para obtenção dos coeficientes para um polinômio de segundo grau.

Representa-se o polinômio por  $Q(X)$  e as respostas ou pontos que originam a regressão por  $R_i$ , que no caso, equivalem às respostas mecânicas da estrutura. O polinômio pode ser representado por:

$$Q(X) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j \quad (4.41)$$

onde  $n$  é o número de variáveis que define a dimensão do polinômio.

A regressão consiste em minimizar a distância entre os pontos e a superfície aproximada (incógnita do problema). Trata-se de um problema de otimização escrito da seguinte forma:

$$\min_d = \min \sum_{k=1}^{np} (Q(X^k) - R^k)^2 \quad (4.42)$$

onde  $np$  é o número de respostas ou pontos conhecidos.

O polinômio  $Q(X)$  também pode ser escrito pela forma:

$$Q(X) = \{A\}^t \{X\} \quad (4.43)$$

onde  $\{A\}^t$  é o vetor de coeficientes (incógnitas) do polinômio a ser determinado e  $\{X\}^t$  é o vetor dos termos do polinômio, representados por:

$$\{A\}^t = \{a_0, a_1, \dots, a_n, b_{11}, \dots, b_{nn}, b_{12}, \dots, b_{(n-1)n}\} \quad (4.44)$$

$$\{X\}^t = \{1, x_1, \dots, x_n, x_1^2, \dots, x_n^2, x_1 x_2, \dots, x_{(n-1)} x_n\} \quad (4.45)$$

Com isso, a função de minimização passa a ser escrita como:

$$d = \min \sum_{k=1}^{np} \left( \left( \{A\}^t \{X^k\} - R^k \right) \left( \{X^k\}^t \{A\} - R^k \right) \right) \quad (4.46)$$

Desenvolvendo os termos da Eq. (4.46) tem-se:

$$d = \min \sum_{k=1}^{np} \left( \{A\}^t \{X^k\} \{X^k\}^t \{A\} - 2R^k \{A\}^t \{X^k\} + R^{k^2} \right) \quad (4.47)$$

O ponto de mínimo é obtido anulando-se o gradiente de  $d$  em relação aos coeficientes  $a_i$  do vetor  $\{A\}$ :

$$\nabla d(A) = \frac{\partial d(A)}{\partial \{A\}^t} = 0 \quad (4.48)$$

Desenvolvendo a Eq. (4.48) tem-se:

$$\nabla d(A) = \sum_{k=1}^{np} \left( 2\{X^k\}\{X^k\}^t \{A\} - 2R^k \{X^k\} \right) = 0 \quad (4.49)$$

A equação anterior ainda pode ser escrita na forma:

$$\nabla d(A) = \sum_{k=1}^{np} \left( \{X^k\}\{X^k\}^t \{A\} - R^k \{X^k\} \right) = 0 \quad (4.50)$$

A partir da Eq. (4.50) pode-se escrever:

$$[P] = \sum_{k=1}^{np} \left( \{X^k\}\{X^k\}^t \right) \quad (4.51)$$

$$\{V\} = \sum_{k=1}^{np} \left( R^k \{X^k\} \right) \quad (4.52)$$

Assim, obtém-se um sistema de equações que permite calcular os coeficientes do polinômio aproximador da superfície de resposta, contidos no vetor  $\{A\}$ , da seguinte forma:

$$[P]\{A\} = \{V\} \quad (4.53)$$

Ou ainda:

$$\{A\} = \{P\}^{-1} \{V\} \quad (4.54)$$

Com isso determina-se a superfície de resposta em torno do ponto de projeto na iteração  $i$ . Significa que se determinou a resistência  $R$  da estrutura considerando todo o comportamento não-linear e as incertezas das variáveis de projeto consideradas. Entretanto, essa não é a função de estado limite ou superfície de falha da estrutura, uma vez que a solicitação ainda não foi aplicada.

A superfície de falha da estrutura, no espaço físico e padronizado respectivamente, é facilmente construída fazendo:

$$\begin{aligned} FS &= RS - P_{appl} \\ FS &= H(u) - \lambda \end{aligned} \quad (5.55)$$

onde  $P_{appl}$  é a força ou solicitação que atua sobre a estrutura,  $RS$  é a superfície de resposta ou resistência da estrutura,  $H(u)$  é a superfície aproximada no espaço padronizado e  $\lambda$  é o coeficiente adimensional de carga última.

#### 4.7.6 Cálculo do Índice de Confiabilidade

HASOFER & LIND (1974) definem o índice de confiabilidade  $\beta$  como a menor distância entre a origem do espaço normal padrão e a função de estado limite. A proposta desses autores é que o cálculo do índice de confiabilidade seja realizado no ponto de projeto, ao invés das médias das variáveis aleatórias envolvidas na função de estado limite. Aliado a esse fato tem-se que a grande maioria das funções de estado limite possui caráter não-linear, principalmente nas estruturas de concreto armado. Diante disso, como não se conhece a posição do ponto de projeto no espaço normal padrão e a função de falha é não-linear, deve-se utilizar um processo iterativo para o cálculo do índice de confiabilidade.

A cada iteração, determina-se uma superfície de resposta e procura-se a menor distância entre ela e a origem do sistema, ou seja, o ponto de projeto. Dessa forma, define-se o problema de busca do índice de confiabilidade como um processo de otimização descrito como:

$$\beta = \min \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} \quad (4.56)$$

$$\text{restrição: } H(u_i) \leq 0$$

A solução do problema de otimização fornece o valor do índice de confiabilidade, a coordenada  $u_i^*$  do ponto de projeto  $P^*$  e o co-seno diretor  $\alpha_i$  da direção do ponto de projeto que é uma medida da sensibilidade do índice de confiabilidade em relação às variáveis aleatórias consideradas. Entretanto essas informações somente são garantidas quando ocorre a convergência em direção a um mínimo global.

Como qualquer caso de otimização, o cálculo do índice de confiabilidade enfrenta problemas. Esses problemas estão relacionados a situações em que a função pode apresentar vários mínimos locais e, principalmente, pelo fato de não se conhecer a superfície real de falha da estrutura, o que acarreta na falta de conhecimento sobre a possibilidade de se calcular gradientes e hessianas da função-objetivo (superfície de falha) e nem quanto tempo será gasto na realização desses cálculos. No caso das estruturas de concreto armado, as funções de estado limite não são explícitas em decorrência dos modelos mecânicos não-lineares. Por conta disso, existe a possibilidade de que o problema não apresente convergência.

O problema de otimização pode ser resolvido empregando-se diversas técnicas da literatura, tais como gradiente projetado, método de Newton, algoritmo de Abdo & Rackwitz,

algoritmo de Rackwitz & Fiessler, etc. Dentre as diversas técnicas de otimização, adotou-se a técnica de Rackwitz & Fiessler descrita na seqüência.

### Algoritmo de Rackwitz & Fiessler

Este método é, sem dúvida, um dos métodos de otimização mais conhecidos e utilizados no campo da confiabilidade. Consiste em uma adaptação de um algoritmo de otimização de primeira ordem para o problema de busca do ponto mais provável de falha. O algoritmo de Rackwitz & Fiessler necessita do cálculo dos gradientes da superfície de falha em relação a cada variável aleatória no espaço normal padrão. No presente trabalho, a função de falha apresenta duas variáveis aleatórias, o que faz com que o cálculo das derivadas parciais da função de falha seja bastante rápido e, assim, o processo apresenta bom desempenho quanto à convergência. O algoritmo de Rackwitz & Fiessler começa a apresentar dificuldades de convergência para casos em que são consideradas muitas variáveis aleatórias.

Todo o processo é feito no espaço normal padrão considerando que a reta entre a origem do sistema de coordenadas  $U$  e o ponto de projeto é normal à superfície de falha da estrutura, ou seja:

$$u_i^* = \beta \alpha_i^* \quad (4.57)$$

O algoritmo é descrito nos seguintes passos:

1 – Escolha do ponto inicial  $\{u_i^0\}$ . Usualmente adota-se a origem do espaço normal padrão:

$$\{u_i^0\} = \{0\} \quad (4.58)$$

2 – Cálculo da função de estado limite no ponto  $\{u_i^k\}$ :

$$H^k = H(u_1^k, u_2^k, \dots, u_n^k) \quad (4.59)$$

3 – Cálculo do vetor gradiente da função de estado limite,  $\{\nabla H_i^k\}$  e sua respectiva norma,  $\|\nabla H\|^k$ :

$$\{\nabla H_i^k\} = \left. \frac{\partial H(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_i} \right|^k \quad (4.60)$$

$$\|\nabla H\|^k = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + \dots + (u_n)^2}^k \quad (4.61)$$

4 – Cálculo do vetor de co-senos diretores,  $\{\alpha_i^k\}$  e do índice de confiabilidade,  $\beta^k$ :

$$\{\alpha_i^k\} = \frac{\nabla H_i^k}{\|\nabla H\|^k} \quad (4.62)$$

$$\beta^k = \frac{H^k - \{\nabla H_i^k\}^T \{u_i^k\}}{\|\nabla H\|^k} \quad (4.63)$$

5 – Cálculo do próximo ponto,  $\{u_i^{k+1}\}$ :

$$\{u_i^{k+1}\} = -\beta^k \{\alpha_i^k\} \quad (4.64)$$

6 – Repetem-se os passos 2 a 5 até a convergência, isto é, quando dois valores de índice de confiabilidade consecutivos forem iguais ou satisfizerem a uma tolerância pré-estabelecida, em geral erro menor que 1%. A convergência também pode ser verificada através da norma do vetor  $\{u\}$ :

$$Err_\beta = \left| \frac{\beta^{k+1} - \beta^k}{\beta^{k+1}} \right| \quad (4.65)$$

$$\|\{u\}^{k+1} - \{u\}^k\| \leq \varepsilon \quad (4.66)$$

Verifica-se que depois da convergência, a função de estado limite no ponto de projeto resulta aproximadamente nula.

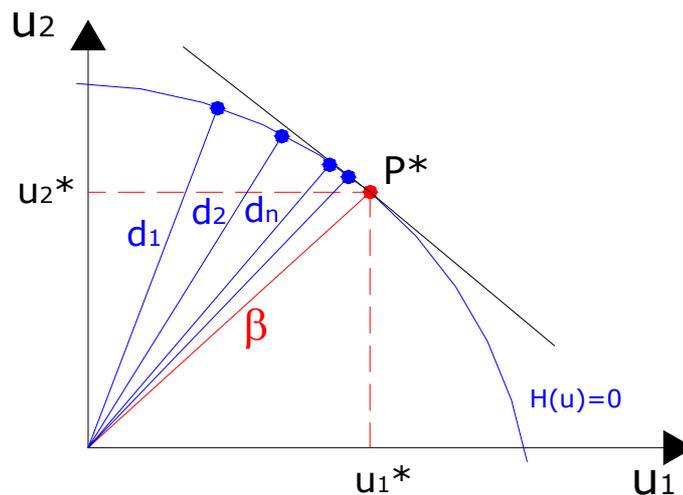


Figura 4.10 – Convergência para o ponto de projeto  $P^*$

O algoritmo de Rackwitz & Fiessler é bastante utilizado nas análises de confiabilidade, pois permite determinar, além do índice de confiabilidade, os valores de sensibilidade e do ponto de projeto com boa convergência.

#### 4.7.7 Cálculo da Probabilidade de Falha

O valor da probabilidade de falha de uma estrutura em relação a um determinado estado limite é o “ponto final” de qualquer análise de confiabilidade. Com os métodos aproximados, como o RSM, não se obtém diretamente a probabilidade de falha, mas sim uma medida relacionada a ela (índice de confiabilidade). Assim, deve-se ainda relacionar de algum modo o índice de confiabilidade com a probabilidade de falha de uma estrutura.

Neste contexto, são utilizadas novas aproximações sobre a função de estado limite na vizinhança do ponto de projeto para obter a probabilidade de falha. Essas aproximações podem ser lineares ou quadráticas, o que caracteriza os métodos FORM e SORM respectivamente. Em essência, o FORM e o SORM são métodos que aproximam a probabilidade de falha em função do índice de confiabilidade já conhecido. Existem erros nesses processos, porém são aceitáveis frente às incertezas dos modelos mecânicos e probabilísticos utilizados.

##### **Aproximação do tipo FORM**

O método de confiabilidade de primeira ordem ou FORM fornece uma estimativa da probabilidade de falha da estrutura linearizando a função de estado limite no ponto de projeto no espaço normal padrão. A linearização se faz através de um hiper-plano tangente à superfície de falha no ponto de projeto. Dessa forma obtém-se a seguinte relação entre o índice de confiabilidade e a probabilidade de falha:

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (4.67)$$

onde  $\Phi(\cdot)$  é a distribuição cumulativa de probabilidades. Vale lembrar que não existem formas explícitas e fechadas para o cálculo da função  $\Phi$ , de modo que a Eq. (4.67) deve ser calculada numericamente.

A equação do hiper-plano tangente à função de estado limite no ponto de projeto é dada por:

$$hp(u) = \sum_i \alpha_i u_i + \beta = 0 \quad (4.68)$$

Para os casos de apenas uma variável aleatória o FORM pode ser facilmente entendido. Na situação de falha, o índice de confiabilidade se confunde com o valor da abscissa no espaço normal padrão com o sinal traçado, Fig. (4.11).

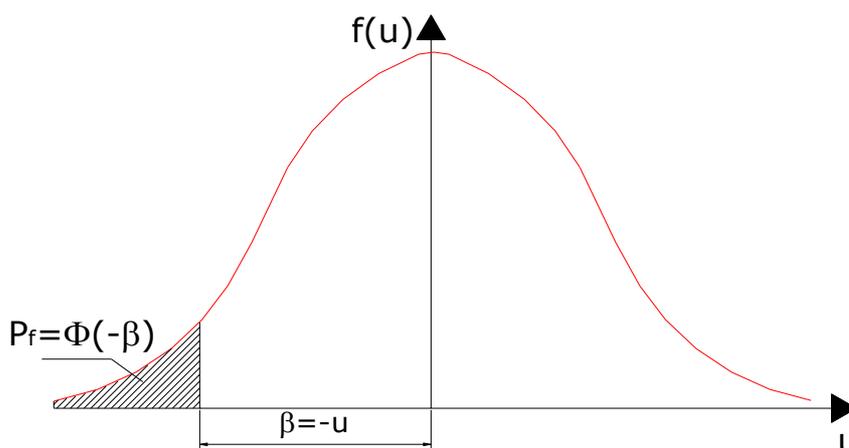


Figura 4.11 – Interpretação de  $P_f$  para o caso de uma variável aleatória

A aproximação FORM é suficientemente precisa para os casos em que a curvatura da superfície de falha é pequena e a probabilidade de falha tem um valor pequeno. Além disso, o erro nesse tipo de aproximação depende da concavidade da superfície de falha, ou seja, para superfícies côncavas, a aproximação é a favor da segurança, ao passo que para superfícies convexas, o FORM resulta contra a segurança, Fig. (4.12).

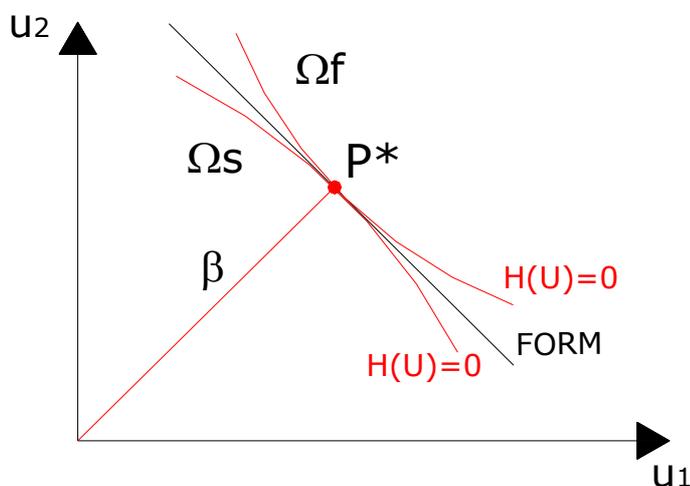


Figura 4.12 – Aproximação FORM a partir do índice de confiabilidade

### Aproximação do tipo SORM

O SORM é uma tentativa de melhorar a aproximação da probabilidade de falha baseado em maiores informações sobre a superfície de falha da estrutura. O princípio é exatamente o mesmo da aproximação FORM, porém requer um melhor conhecimento sobre a geometria da função de estado limite na vizinhança do ponto de projeto. Nesse tipo de aproximação, a função de estado limite é tratada como uma hiper-superfície de grau 2 ao invés do hiper-plano tangente. As informações adicionais sobre a função de estado limite são

suas curvaturas principais, além do índice de confiabilidade. O método exige que no ponto de projeto, a superfície quadrática aproximadora seja contínua e que seja duas vezes diferenciável, além de ter o mesmo plano tangente e a mesma curvatura principal que a função de estado limite real. Existem várias aproximações quadráticas disponíveis na literatura técnica para a forma da hiper-superfície empregada no SORM. A escolha depende da precisão requerida bem como do tempo disponível de processamento. Entre as diversas opções para o SORM estão: aproximação por uma hiper-esfera centrada, hiper-esfera excêntrica e aproximações assintóticas.

FALSONE & IMPOLLONIA (2004) chamam a atenção no sentido de que o método dos elementos finitos para análises lineares e não-lineares de estruturas acoplado com métodos aproximados e algoritmos do tipo FORM ou SORM é aplicado com bastante sucesso nas análises de confiabilidade. Porém, tais técnicas são realmente eficientes quando se tratam de probabilidades de falha muito pequenas. Quando são aplicadas a problemas cuja probabilidade de falha não é muito pequena, esses métodos podem conduzir a aproximações muito distantes dos reais valores do problema, o que se torna contra a segurança. Vale ressaltar que, na maioria dos problemas de engenharia, a ordem de grandeza das probabilidades de ruína varia de  $10^{-3}$  a  $10^{-6}$ , fato esse que viabiliza o uso das aproximações do tipo FORM ou SORM.

## **4.8 Confiabilidade de Sistemas Estruturais**

### **4.8.1 Generalidades**

Do ponto de vista mecânico, um sistema estrutural pode ser definido como uma combinação de elementos estruturais individuais dispostos de determinada maneira com o objetivo de desempenhar uma função mecânica. Assim, a falha global de um sistema é definida a partir da ocorrência de uma determinada situação que combine as falhas de seus componentes. Dessa forma, quando se deseja determinar a confiabilidade de um sistema é importante verificar que a falha de um componente individual pode ou não representar a falha do sistema. Por conta disso, a confiabilidade de um membro estrutural pode não representar a confiabilidade da estrutura como um todo.

Uma das grandes vantagens das estruturas de concreto armado é sua grande capacidade de redistribuir os esforços quando algum tipo de situação indesejada ocorre. É o

caso das estruturas hiperestáticas que apresentam, dependendo de seu grau de redundância, uma grande capacidade extra (reserva) de resistir aos esforços. Assim, em uma estrutura hiperestática, a formação de uma rótula plástica não significa a ruína da estrutura. É nesse contexto que se insere a abordagem da confiabilidade aplicada a sistemas estruturais. Essa abordagem se torna muito interessante e necessária quando se deseja quantificar a probabilidade de falha global (colapso estrutural) de soluções em projetos estruturais para cada estado limite último. Portanto, a análise de confiabilidade de um sistema estrutural aborda tanto a definição dos vários estados limites possíveis como também o cálculo da probabilidade de se atingir um desses estados isoladamente.

Toda a teoria descrita até aqui permite determinar índices de confiabilidade e probabilidades de falha de componentes individuais, quando estes violam um determinado estado limite. Essa condição é, portanto, verificada em um componente do sistema. Entretanto, para que se possa estimar probabilidades globais de falha, é preciso estudar a confiabilidade dos vários elementos estruturais que podem, por conta de uma realização específica, conduzem o sistema ao colapso. Assim, uma abordagem global só pode ser realizada quando se consideram outros modos de falha e não somente o primeiro modo ou modo de falha mais provável. Diante desse contexto, uma simples viga isostática de concreto armado constitui um sistema estrutural do ponto de vista da confiabilidade. Isto ocorre porque a estrutura pode vir a falhar tanto pelo esmagamento do concreto comprimido quanto pela deformação excessiva da armadura, fato esse que caracteriza modos de falha bem diferentes. É justamente sobre esse comportamento que as análises de confiabilidade do presente trabalho se aplicam, pois é possível, por exemplo, determinar qual é a probabilidade de falha de que o concreto ou aço falhe isoladamente em uma estrutura.

Com o objetivo de se definir os caminhos possíveis que podem conduzir um sistema a um colapso, várias técnicas de confiabilidade de sistemas foram desenvolvidas. Entre elas estão as Árvores de Eventos (ETA) e as Árvores de Falha (FTA). Na técnica de árvore de eventos, a análise é feita verificando as conseqüências ou seqüências de falha do sistema logo após a ocorrência do evento inicial de falha. A cada uma dessas seqüências associa-se uma probabilidade de falha, estimando, com isso, as chances de uma falha global. Já a técnica da árvore de falha é empregada para determinar a confiabilidade de um sistema em função da confiabilidade de seus componentes. Com isso torna-se possível determinar os possíveis modos de falha que conduzirão o sistema à falha global. Os trabalhos de PAPAOGLOU

(1998), NOWAK & COLLINS (2000), MELCHERS & AHAMMED (2001) e NEVES (2004) abordam com mais detalhes esses temas.

Para estudar a confiabilidade de sistemas estruturais, faz-se uso de idealizações esquemáticas de comportamento global da estrutura, ou seja, a estrutura pode ser representada por uma idealização em série ou em paralelo, conforme é descrito a seguir.

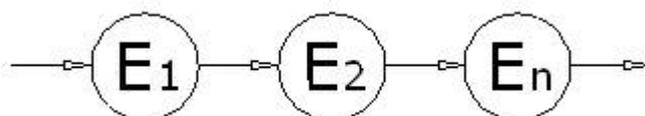
#### 4.8.2 Sistemas em Série

Nos sistemas em série, a falha de um componente conduz à falha imediata de todo o sistema estrutural. Dessa forma, um sistema em série é muitas vezes referenciado em função de seu componente mais fraco, pois sua falha está diretamente ligada à falha do elo mais fraco. Assim, a confiabilidade de um sistema em série é medida pela confiabilidade do seu componente mais frágil. As estruturas isostáticas configuram exemplos de sistemas em série, uma vez que a falha de um único vínculo conduz à falha de todo o sistema.

No caso de uma estrutura estaticamente determinada de concreto armado, a confiabilidade da estrutura será a confiabilidade do elemento mais fraco, o que pode ser definido pelo concreto ou pelo aço das armaduras. Essa definição está associada à condição de que não haja nenhuma correlação entre as probabilidades dos elementos, isto é, os eventos devem ser independentes. Portanto, a probabilidade do sistema é escrita considerando a união dos eventos possíveis de falha dos componentes, ou seja:

$$P_f = P(E_A \cup E_C) \quad (4.69)$$

onde  $E_A$  representa a falha do aço e  $E_C$  a falha do concreto.



**Figura 4.13 – Representação de um sistema em série**

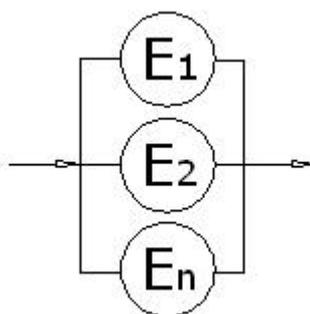
É importante lembrar que cada modo de falha é representado por uma função de estado limite. Assim, ao se considerar muitos modos de falha, a probabilidade de falha de um sistema em série será dada pela integral da função densidade conjunta sobre a união dos domínios de falha representativos de cada um dos modos de falha isolados.

As abordagens realizadas no presente trabalho se baseiam em modelos de confiabilidade para sistemas em série, uma vez que a confiabilidade do sistema é medida pela

violação de um estado limite qualquer (falha no concreto ou no aço), o que caracteriza sempre o ponto mais frágil. Essa abordagem é pertinente, pois as normas recomendam que as estruturas sejam projetadas para que em nenhuma das suas seções ocorra um estado limite, mesmo que a violação desse estado não conduza a estrutura ao colapso.

### 4.8.3 Sistemas em Paralelo

Um sistema estrutural é classificado como paralelo quando os elementos que o compõem estão ligados de tal maneira, que a falha de um elemento não corresponde à falha do sistema. Quando ocorre essa situação, diz-se que o sistema é redundante e, que sua falha só ocorrerá se muitos ou até mesmo todos os elementos falharem.



**Figura 4.14 – Representação de um sistema em paralelo**

Estruturas fortemente hiperestáticas apresentam grande reserva de capacidade de carga, o que faz com que apresentem grande confiabilidade, pois possuem muitas seções possíveis de falha. Assim, o colapso dessas estruturas acontece somente depois de várias seções atingirem sua situação limite. Os sistemas paralelos podem ainda ser classificados em sistemas com elementos dúcteis e de elementos frágeis.

Um sistema estrutural em paralelo com  $n$  elementos dúcteis atinge um estado de falha quando todos os  $n$  elementos falharem. Assim, a resistência do sistema será composta pela soma das resistências individuais de todos os seus componentes. Nesses casos, a confiabilidade do sistema é maior do que a confiabilidade de seus componentes e, quanto maior o número de componentes, maior será a confiabilidade do sistema. De acordo com o Teorema do Limite Central, quando  $n$  tende ao infinito, a soma das variáveis aleatórias independentes tende a uma distribuição normal de probabilidades, desde que nenhuma das variáveis aleatórias predomine sobre a soma. Por conta desse teorema, é razoável assumir que a resistência do sistema é uma variável aleatória normalmente distribuída, desde que o

número de componentes não seja muito pequeno. Dessa forma, a falha de cada componente corresponde à situação em que a solicitação é maior do que sua resistência. Assim, a probabilidade de falha de um sistema em paralelo com  $n$  elementos dúcteis pode ser calculada por:

$$P_f = P[(R_1 < S_1) \cap (R_2 < S_2) \cap \dots \cap (R_n < S_n)] \quad (4.70)$$

onde  $R_n$  e  $S_n$  são, respectivamente, a resistência e a solicitação no elemento  $n$ .

Desde que todas as resistências dos elementos sejam consideradas variáveis aleatórias independentes, a Eq. (4.70) pode ser reescrita na forma de probabilidades diretas, ou seja:

$$P_f = \prod_{i=1}^n P_{fi} \quad (4.71)$$

Conforme já comentado, existe ainda a possibilidade de um sistema paralelo ser tratado como um sistema de elementos frágeis. Para esse tipo de sistema, se um dos elementos falhar, então esse elemento perde completamente a capacidade de contribuir com a capacidade resistente do sistema. Dessa forma, os esforços devem ser redistribuídos para os demais elementos remanescentes. Se após a redistribuição, o sistema não vier a falhar, o carregamento pode ser incrementado até que o próximo elemento falhe e assim por diante. Esse processo de falha e redistribuição continua até que todos os elementos do sistema falhem. Assim, as características individuais de cada elemento do sistema são bastante importantes, pois a falha global ocorrerá apenas quando todos os elementos atingirem um estado limite. A probabilidade de falha é então determinada pela integral da função de densidade conjunta sobre a intersecção dos domínios de falha de cada componente ou modo de falha independente.

## **5. Otimização Estrutural**

### **5.1 Generalidades**

Um projeto estrutural é, sem dúvida, uma atividade bastante complexa e exigente. Antes da fase de dimensionamento dos elementos estruturais, a concepção da estrutura, bem como o arranjo estrutural e seu lançamento constituem fases preliminares de grande importância no contexto geral do projeto. Nessas fases, as variáveis consideradas são muitas, uma vez que exercem influência significativa no desempenho final da estrutura. Como exemplo, pode-se citar o posicionamento dos pilares, que certamente, afetam significativamente os esforços na estrutura. Além disso, a arquitetura é fator decisivo na concepção estrutural, pois determina, na grande maioria dos casos, as larguras de vigas, embutimento de pilares, altura máxima das vigas, etc. Portanto, o projeto estrutural pode ser entendido como um processo iterativo, no qual as variáveis de projeto são determinadas através de inúmeras aproximações sucessivas até atingirem valores aceitáveis dentro de intervalos possíveis.

Diante de todas essas dificuldades, existe ainda a preocupação com os custos das obras, ou seja, os projetos estruturais devem, além de garantir a segurança satisfatória, proporcionarem os menores custos. A redução de custos, mesmo que pequena, naturalmente já ocorre quando se consideram os efeitos benéficos que uma estrutura pode proporcionar. Quando se trata das estruturas de concreto armado, esse fato pode ser explorado, uma vez que as estruturas hiperestáticas permitem redistribuição de esforços. Com isso, os materiais podem ser mais bem aproveitados, como é o caso do aço das armaduras quando considerados em regime de plastificação. Aliado a essas características, o posicionamento ótimo dos elementos e, com isso, a diminuição das dimensões desses elementos estruturais garante também custos menores para as estruturas. Por conta disso, a otimização matemática constitui-se em uma

ferramenta valiosa para elaboração de projetos estruturais. Esse tratamento é perfeitamente possível, uma vez que o comportamento físico de uma estrutura pode ser escrito em termos de um conjunto de funções matemáticas. Assim, as técnicas de otimização podem ser empregadas para buscar valores extremos dessas funções.

Pode-se classificar a otimização de estruturas de acordo com os seguintes objetivos: otimização de seções transversais dos elementos estruturais, otimização geométrica e otimização topológica. A primeira procura o menor peso ou custo da estrutura a partir de reduções das seções transversais dos elementos. A otimização geométrica possibilita a variação no comprimento de cada elemento pela mudança nas coordenadas nodais. A otimização topológica é a mais complexa das três, pois além dos objetivos comuns tanto à otimização de seção transversal e à otimização geométrica, visa também a determinação de um número e disposição ótimos dos elementos. O trabalho de KRIPKA (1998) aborda a questão da otimização geométrica aplicada às grelhas de concreto armado, em função do posicionamento ótimo dos apoios. Assim, busca-se, pela mudança nas posições inicialmente idealizadas, a redistribuição dos esforços no pavimento pela modificação da rigidez relativa dos elementos. Com isso o autor garante que há maior uniformização dos esforços e, conseqüentemente, maior economia no consumo dos materiais. No mesmo contexto, KHARMANDA (2003) discute essas três filosofias de otimização, enfocando também o acoplamento com a confiabilidade estrutural para atingir um projeto ótimo que atende aos requisitos de segurança pré-fixados. Entretanto, restringe a aplicação do modelo às estruturas de aço.

Uma publicação bastante interessante e que reforça a necessidade de mais pesquisas relacionadas à prática da otimização na engenharia é o trabalho de COHN, FELLOW & DINOVITZER (1994). Nesse trabalho, os autores enfatizam, com base em mais de 500 exemplos retirados de artigos e livros publicados no período de maior evolução da otimização estrutural, a excessiva preocupação dos pesquisadores com os aspectos matemáticos e técnicas numéricas da otimização. Assim, o número de exemplos de otimização estrutural é muito pequeno quando comparado com a grande quantidade de artigos e publicações já disponíveis. Além disso, a grande maioria dos trabalhos que têm aplicação na engenharia estrutural trata de otimização de seções transversais de estruturas de aço. Isto significa que a aplicação às estruturas de concreto armado ainda é bastante pequena carecendo de maior atenção, visto que o concreto armado, de um modo geral, é o material mais utilizado nas construções civis. Entretanto, nos dias atuais, já se encontram trabalhos que trazem aplicações

mais práticas tais como pórticos, treliças e grelhas, fato que torna a otimização matemática muito mais interessante para os profissionais da engenharia.

No campo da otimização matemática, existem ainda diversos modos de abordagem dos problemas estruturais. Esses modos de abordagem identificam e classificam o projeto ótimo quanto à sua natureza, isto é, se as considerações de projeto são determinísticas ou probabilísticas, restringem ou não o domínio de soluções, entre outros. Vale ressaltar que à medida que se busca representar melhor a realidade, o problema de otimização também aumenta em complexidade e tamanho, dificultando ainda mais a obtenção de uma solução.

Com o desenvolvimento da teoria da confiabilidade e suas aplicações na engenharia, a quantificação mais consistente da segurança tornou-se possível. A partir daí, muitos estudos passaram a ser desenvolvidos na tentativa de combinar os conceitos de otimização com os métodos de confiabilidade, dando origem aos chamados métodos de otimização baseados em confiabilidade (RBDO). Por um lado, a confiabilidade estrutural concentra-se em descrever os fenômenos de maneira probabilística e aplicar os conceitos à segurança de estruturas. Por outro lado, as pesquisas em otimização buscam desenvolver métodos cada vez mais eficientes para a localização de pontos ótimos dos sistemas estruturais utilizando restrições determinísticas. Assim, no projeto de elementos estruturais isolados, já é possível estabelecer uma conexão entre a otimização e a confiabilidade.

## **5.2 Fundamentação da Otimização Matemática**

### **5.2.1 Formulação de um Problema de Otimização**

Todo o problema de otimização precisa ser tratado mediante um conjunto de etapas específicas. Em primeiro lugar, é necessário que seja definido um objetivo, isto é, alguma medida quantitativa que seja capaz de representar o desempenho do sistema analisado. Em geral, no campo da otimização de seções transversais de elementos estruturais, esse objetivo é representado pelo custo ou peso da estrutura. O objetivo, ou o que se anseia do sistema, é representado por uma função matemática, de modo a computar um determinado número de características do sistema que influenciam seu desempenho. Essas características do sistema são as chamadas variáveis ou incógnitas que se desejam obter para resolver o problema de otimização. Entretanto, em problemas de engenharia, existem limites para essas variáveis. Esses limites são, na verdade, restrições que as variáveis devem obedecer para que o sistema

possa operar segundo o desejado e com o objetivo extremado. São problemas típicos de otimização em engenharia de estruturas, por exemplo, a obtenção das dimensões que garantem o mínimo peso de uma treliça, ou a disposição ótima dos apoios de um pavimento para que haja melhor distribuição de esforços, e até mesmo, cálculo das dimensões de seções transversais de elementos de concreto armado para que o custo seja mínimo. Assim, todo esse processo inicial de conhecimento do objetivo, da identificação das variáveis importantes e restrições que devem ser obedecidas constitui a chamada fase de modelagem de um problema de otimização. Certamente a fase de modelagem é uma das mais importantes em todo o processo, pois somente com a construção de um modelo adequado é que se torna possível representar o real desempenho de um sistema considerado.

Finalizada a etapa de modelagem, parte-se para a busca de um algoritmo ou método que seja capaz de encontrar a solução do sistema. Nesse âmbito existem diversos tipos de algoritmos com particularidades, de modo que a escolha de um único algoritmo universal de otimização é totalmente impossível. Cada problema possui características próprias que devem ser analisadas para uma boa escolha do algoritmo ou método adequado. Uma boa discussão sobre esses temas está no trabalho de NOCEDAL & WRIGHT (1999).

Matematicamente, a otimização resume-se à minimização ou maximização de uma função sujeita a restrições em suas variáveis. O problema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \underset{x \in \mathcal{R}^n}{\text{mim}} f(x) \\ & \text{sujeito à: } \begin{cases} h_i(x) = 0 & i = 1 \dots n \\ g_j(x) \leq 0 & j = 1 \dots m \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde  $f(x)$  é a função objetivo que se deseja extremar,  $h_i(x)$  são as restrições de igualdade,  $g_j(x)$  são as restrições de desigualdade e  $x$  é o vetor de incógnitas.

Diante disso, fica evidente que uma medida da complexidade de um problema de otimização é seu tamanho, avaliado em termos do número de variáveis e do número de restrições. Com o avanço da tecnologia computacional, a capacidade de resolver os problemas em otimização aumentou consideravelmente. Isto tem proporcionado a resolução de problemas de grande escala com maior eficácia. Na verdade, a literatura classifica os problemas de otimização em três escalas distintas, de acordo com o número de variáveis e restrições que eles apresentam. São os problemas de pequena escala, que possuem até cinco variáveis e restrições, média escala com variáveis e restrições entre cinco e cem e problemas

de grande escala, com mais de cem variáveis e restrições. Essa classificação não é totalmente rígida, mas oferece aproximadamente uma idéia do tipo de abordagem que os problemas devem ser tratados. Para o presente trabalho, o problema considerado é classificado como sendo de média escala, pois a otimização ocorre em duas etapas. Além disso, o índice de confiabilidade é tratado como uma restrição de desigualdade, em função de sua superfície definida em termos das variáveis de projeto, isto é, as variáveis que estão sendo otimizadas.

Em relação às restrições de desigualdade, estas podem ser ativas e inativas. Para que uma restrição de desigualdade seja ativa em um ponto  $x$  é preciso que, no ponto, a restrição seja nula, ou seja,  $g_j(x) = 0$ . Se  $g_j(x) < 0$  então tem-se que a restrição de desigualdade é inativa. As restrições de igualdade são consideradas sempre ativas em qualquer ponto possível de solução, ou seja, pontos que se encontram na região provável ou factível de solução. É importante destacar que, as restrições inativas não influenciam nas restrições do problema. Por conta disso, pode-se considerar em cada ponto somente as restrições ativas ou de igualdades. Depois de encontrado o ponto ótimo, este deve satisfazer todas as restrições, inclusive as de desigualdade que estavam inativas no problema.

### 5.2.2 Modelo Clássico de RBDO

Tradicionalmente, o modelo de projeto ótimo com base em confiabilidade (*Reliability Based Design Optimization – RBDO*) é formulado em dois espaços separados: o espaço das variáveis de projeto, denominado como espaço físico e o espaço gaussiano das variáveis aleatórias, conhecido como espaço normalizado. Trata-se da resolução de dois problemas de otimização, isto é, a minimização da função-objetivo e a obtenção dos índices de confiabilidade.

De uma maneira geral, o algoritmo de RBDO se desenvolve a partir de uma estimativa inicial para as variáveis de projeto. A função-objetivo é avaliada para esse conjunto de variáveis, bem como todas as restrições determinísticas do problema. A partir daí, a análise de confiabilidade é desenvolvida no espaço normalizado das variáveis aleatórias. É importante destacar que as variáveis de projeto (a serem otimizadas) não são as mesmas variáveis adotadas como aleatórias. Caso as variáveis fossem as mesmas, o problema se resumiria à chamada otimização estocástica. Verifica-se, depois de calculado o índice de confiabilidade para o conjunto de valores das variáveis de projeto, se este satisfaz a restrição em confiabilidade definida por um índice pré-fixado. Caso essa restrição não seja satisfeita, o

processo iterativo faz a atualização das variáveis de projeto e reinicia-se o algoritmo até que a restrição em confiabilidade seja satisfeita. Matematicamente, o problema do projeto ótimo com base em confiabilidade pode ser escrito como:

*Problema 1:*

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{mim}} f(x) \\ & \text{sujeito a: } \left\{ \begin{array}{l} g_j(x) \leq 0 \\ \beta(x,u) - \beta_o \geq 0 \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde  $\beta(x,u)$  é o índice de confiabilidade da estrutura e  $\beta_o$  corresponde ao índice de confiabilidade requerido.

Dentro do processo descrito pela Eq. (5.2) encontra-se o cálculo do índice de confiabilidade  $\beta(x,u)$  para o conjunto de valores de projeto da iteração. Esse processo também é um processo de otimização já definido na seção 4.7.6 deste trabalho, mas aqui repetido por conveniência, conforme a Eq. (5.3):

*Problema 2:*

$$\begin{aligned} & \underset{u}{\text{mim}} d(u) \\ & \text{sujeito a: } H(x,u) \leq 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde  $d(u)$  é a distância entre a origem do espaço normalizado ao ponto de projeto (própria definição do índice de confiabilidade) e  $H(x,u)$  é a função de estado limite da estrutura.

A resolução clássica do RBDO é desenvolvida a partir da construção dos respectivos lagrangeanos de cada problema e sua posterior minimização. Significa reescrever os problemas 1 e 2 incorporando as restrições em uma expressão única combinada com a função-objetivo. A minimização é reescrita da seguinte forma:

$$\underset{x,\lambda}{\text{mim}} L_1(x,u,\lambda) = f(x) + \lambda_\beta [\beta_o - \beta(x,u)] + \sum_j \lambda_j g_j(x) \quad (5.4)$$

$$\underset{u,\lambda_H}{\text{mim}} L_2(x,u,\lambda_H) = d(u) + \lambda_H H(x,u) \quad (5.5)$$

onde  $\lambda_j, \lambda_\beta, \lambda_H$  são, respectivamente, os multiplicadores de Lagrange das restrições determinísticas, do índice de confiabilidade e da função de estado limite.

A partir dos lagrangeanos, as condições de otimalidade do problema ficam escritas conforme segue:

*Problema 1:*

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda_\beta \frac{\partial \beta}{\partial x_i} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_\beta} = \beta_o - \beta(x, u) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_\beta = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_j} = g_j(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_j = 0 \quad (5.8)$$

*Problema 2:*

$$\frac{\partial L_2}{\partial u_k} = \frac{\partial d}{\partial u_k} + \lambda_H \frac{\partial H}{\partial u_k} = 0 \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_H} = H(x, u) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_H = 0 \quad (5.10)$$

O processo é iterativo, uma vez que a análise deve ser realizada fazendo um “loop” para a otimização e para a confiabilidade. No espaço das variáveis aleatórias, a análise de confiabilidade necessita de várias chamadas ao modelo mecânico para a construção da superfície de estado limite, enquanto que, no espaço físico, a procura da solução ótima modifica a configuração da estrutura que, por sua vez, requer nova análise de confiabilidade. Segundo KHARMANDA (2003), a solução para esses problemas pode ser obtida com o emprego de algoritmos de programação não-linear tais como a técnica de SQP (*Sequential Quadratic Programation*) ou até mesmo com funções de penalidade. É importante destacar que essa abordagem requer um elevado número de iterações ao longo do processo. Assim, a eficácia desse procedimento é pequena. Em função disso, atualmente, diversos pesquisadores tem se preocupado em desenvolver métodos mais eficientes, principalmente do ponto de vista computacional. Esse princípio é o que também justifica o modelo do presente trabalho.

## 5.3 O Modelo Desenvolvido

### 5.3.1 Considerações Iniciais

O objetivo principal do presente trabalho é minimizar o custo de um elemento linear fletido, ou seja, de uma viga em concreto armado sujeito a restrições mecânicas e uma

restrição de confiabilidade. Trata-se, portanto de um problema que procura acoplar otimização e confiabilidade para obter o dimensionamento de vigas de concreto armado. O modelo desenvolvido é dividido em duas etapas. A primeira etapa consiste na otimização pura dos elementos, ou seja, a seção transversal é obtida através da minimização de uma função objetivo que expressa o custo de uma seção transversal de concreto armado submetida a restrições de equilíbrio, taxas de armadura e de ordem prática. Na segunda etapa, a restrição em confiabilidade é gerada a partir dos índices de confiabilidade obtidos pelas variações em torno do ponto ótimo encontrado na primeira etapa. Essa nova restrição em confiabilidade, juntamente com uma restrição de equilíbrio é imposta ao problema, de modo que se obtenha o dimensionamento ótimo respeitando a segurança requerida.

O equacionamento para o problema de otimização de uma seção transversal de concreto armado submetido à flexão foi baseado no modelo proposto por SOARES (1997). A grande vantagem dessa formulação se deve ao fato de que não necessita de um processo iterativo para solucionar o problema, uma vez que os resultados são encontrados através do Método dos Multiplicadores de Lagrange para extremização de funções não-lineares sujeitas às condições de otimalidade. Assim, o sistema de equações gerado é resolvido analiticamente, eliminando o processo iterativo e, conseqüentemente, o exaustivo trabalho de busca do método ideal para resolver o problema.

As variáveis a serem otimizadas são as alturas das vigas, bem como as áreas de armadura tracionada e comprimida obtidas pelo dimensionamento à flexão em função da maior solicitação da cada viga. Na formulação foi considerado somente o momento fletor por ser o esforço predominante nas vigas e, conseqüentemente, o maior determinante no dimensionamento de uma seção transversal, por conta do braço de alavanca necessário para resistir ao esforço solicitante.

### 5.3.2 Formulação do Problema de Otimização Determinística

Esta seção corresponde ao desenvolvimento da primeira etapa do modelo, isto é, a minimização da função de custo de uma seção transversal de uma viga de concreto armado considerando somente restrições de equilíbrio, taxa de armadura e uma restrição que limita a quantidade de armadura de compressão em função da armadura de tração. Esta última restrição é de caráter prático, uma vez que se procura evitar o congestionamento de barras de

aço na superfície das vigas, de modo a não dificultar a passagem do vibrador de agulha durante a concretagem das peças.

A Fig. (5.1) ilustra o esquema da seção transversal considerada para a formulação das restrições.

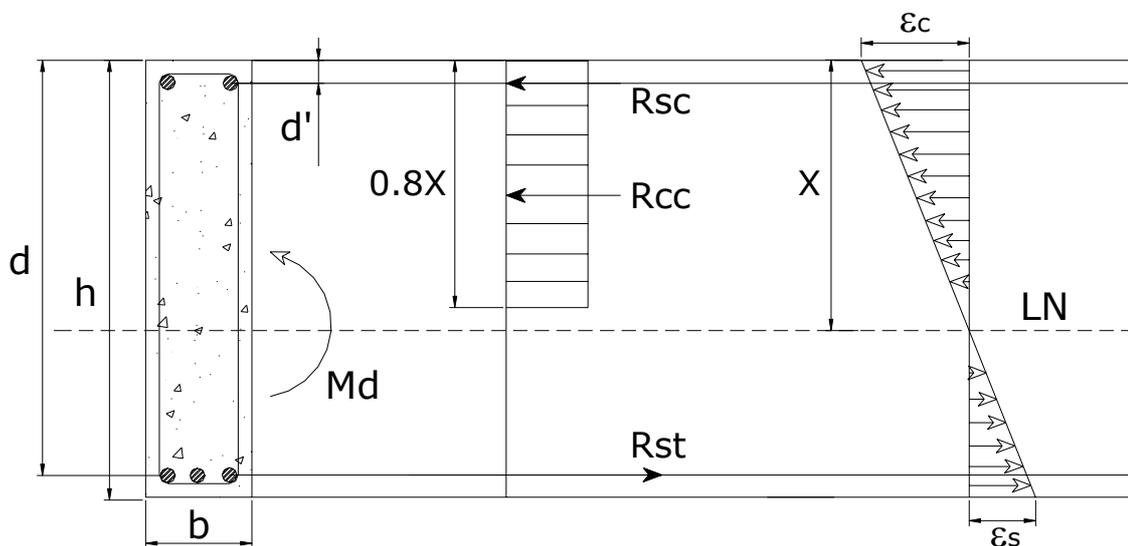


Figura 5.1 – Seção transversal submetida a momento fletor

A função-objetivo do problema é definida pelo custo da seção transversal. Assim, para se obter o custo total do elemento estrutural deve-se multiplicar o valor unitário pelo seu comprimento.

*Função-Objetivo:*

$$F(x_1, x_2, x_3) = b \cdot (x_1 + d') \cdot C_c + (b + 2x_1) \cdot C_f + (x_2 + x_3) \cdot \gamma_s \cdot C_s \quad (5.11)$$

onde  $x_1 = d$  (altura útil da viga),  $x_2 = A_s$  (armadura tracionada),  $x_3 = A_{sc}$  (armadura comprimida),  $\gamma_s$  é o peso específico do aço,  $C_c, C_f, C_s$  são, respectivamente, os custos unitários do concreto, da madeira e do aço.

O equilíbrio da seção é imposto fazendo com que a somatória de forças normais e momentos fletores resulte nula. A equação de compatibilidade, ou seja, a relação entre a posição da linha neutra e as deformações dos materiais, também é escrita para que a posição da linha neutra seja eliminada do equacionamento, de modo que sejam utilizadas somente as deformações dos materiais. Assim, as equações de equilíbrio e compatibilidade resultam em duas restrições que garantem significado físico ao problema de otimização.

*Restrições de Equilíbrio e Compatibilidade:*

$$K_1 \cdot x_1 + \sigma_{sc} \cdot x_3 - \sigma_s \cdot x_2 = 0 \quad (5.12)$$

$$K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2 + \sigma_{sc} \cdot x_3 \cdot (x_1 - d') - M_d = 0 \quad (5.13)$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  são constantes que reúnem os termos provenientes das equações de equilíbrio e de compatibilidade. São dadas por:

$$K_1 = 0.8 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} \cdot 0.85 \cdot f_{cd} \cdot b \quad (5.14)$$

$$K_2 = 1 - 0.4 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} \quad (5.15)$$

As outras restrições dizem respeito à quantidade máxima de armadura em relação à área de concreto (taxa máxima) e disposição construtiva que limita a quantidade de armadura comprida em 50% da armadura tracionada.

*Restrições em Taxa de Armadura e Construtiva:*

$$\frac{x_2 + x_3}{b \cdot x_1} \leq \% \max \quad (5.16)$$

$$\frac{x_3}{x_2} \leq 0.5 \quad (5.17)$$

Com o intuito de diminuir o número de restrições de igualdade e, conseqüentemente, o número de variáveis do problema, explicita-se a variável  $x_3$  em função das demais através da Eq. (5.13).

$$x_3 = \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma_{sc} \cdot (x_1 - d')} \quad (5.18)$$

Para resolver o problema, aplica-se o Método dos Multiplicadores de Lagrange, de modo que a função-objetivo e as restrições são incorporadas em uma única equação definida como o lagrangeano do problema. O método consiste em minimizar o lagrangeano sem restrições, igualando o seu gradiente a zero para a obtenção do sistema de equações. Os pontos de mínimo são determinados com a resolução do sistema de equações resultante. A grande vantagem desse método é que o processo iterativo é eliminado, uma vez que a resolução do sistema é puramente analítica.

O lagrangeano do problema é escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 F(x, \lambda) = & b \cdot (x_1 + d') \cdot C_c + (b + 2x_1) \cdot C_f + \left( x_2 + \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma_{sc} \cdot (x_1 - d')} \right) \cdot \gamma_s \cdot C_s + \\
 & + \lambda_1 \cdot \left[ K_1 \cdot x_1 + \sigma_{sc} \cdot \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma_{sc} \cdot (x_1 - d')} - \sigma_s \cdot x_2 \right] + \\
 & + \lambda_2 \cdot \left[ x_2 + \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma_{sc} \cdot (x_1 - d')} - \% \max \cdot b \cdot x_1 \right] + \\
 & + \lambda_3 \cdot \left[ \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{\sigma_{sc} \cdot (x_1 - d')} - 0.5 \cdot x_2 \right]
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

O sistema de equações resulta da seguinte condição:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = 0$$

O sistema oferece três soluções possíveis. A primeira solução ativa a restrição (5.17) e inativa a restrição (5.16), isto é,  $\lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$ . A segunda solução ativa a restrição (5.16) e inativa a restrição (5.17), isto é,  $\lambda_3 = 0, \lambda_2 \neq 0$ . E finalmente, a terceira solução é aquela em que nenhuma das restrições (5.16) e (5.17) estão ativas, ou seja,  $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ . A solução encontrada deve ainda verificar as respectivas restrições inativas para que seja um ponto de mínimo.

O problema fica então resolvido, de modo que ao final desse processo, é obtido um valor ótimo para a altura do elemento estrutural e para as armaduras correspondentes.

### 5.3.3 Formulação do Problema acoplando a Confiabilidade

A segunda etapa do modelo consiste na determinação da superfície de confiabilidade para que esta seja incorporada ao problema de otimização. Ao final da primeira etapa, têm-se os valores ótimos das variáveis de projeto que minimizam a função custo. Para que a confiabilidade possa ser adicionada ao problema, é necessária que esta seja escrita em termos das variáveis de projeto. Por simplificação, a armadura comprimida determinada no processo de otimização anterior é mantida constante.

O procedimento para o cálculo da superfície de confiabilidade é também baseado no RSM, que está descrito na seção 4.7 do texto. Assim, adota-se um plano de experiência para as variáveis de projeto (somente altura do elemento e armadura tracionada), cujo centro é o ponto ótimo obtido no processo anterior, para que a superfície seja calculada. No presente trabalho, adotou-se o plano de experiência estrela por conta da sua simplicidade e poucas chamadas ao modelo de confiabilidade, entretanto outros planos podem ser incorporados facilmente ao modelo. Com isso, são obtidas variações para a altura do elemento estrutural e para a armadura tracionada. É interessante destacar que, ao variar-se a altura no plano de experiência, a respectiva armadura não é dimensionada, mas sim mantida constante. Da mesma forma, quando a armadura tracionada sofre variação, a altura também é mantida constante. Esse procedimento foi adotado para que fosse possível manter a forma do plano, ou seja, de uma estrela, fato que não ocorreria se a cada altura, a respectiva armadura fosse dimensionada. Além disso, dessa forma é possível, para cada ponto do plano (a armadura comprimida também foi considerada nas respostas mecânicas mesmo sendo mantida constante), obter uma resposta diferente da estrutura. Significa que para qualquer configuração da seção, existirá um esforço resistente que pode ser absorvido, mesmo que a seção resulte sub-armada ou super-armada.

De posse dos pontos do plano de experiência (cada ponto corresponde a um valor de altura, de armadura tracionada e o valor constante de armadura comprimida), faz-se uma chamada ao modelo mecânico-probabilístico (MEF + RSM) para cada ponto. Assim, em cada ponto do plano tem-se um índice de confiabilidade, que representa o grau de segurança da corresponde configuração da estrutura. Ao final desse processo, obtém-se um vetor com as variações das variáveis de projeto e um vetor de respostas da estrutura composto pelos índices de confiabilidade. Aplica-se o método dos mínimos quadrados e determina-se a superfície de confiabilidade. Dessa forma, a superfície que descreve a confiabilidade da estrutura é um polinômio de segundo grau escrito em função das variáveis  $x_1$  e  $x_2$  do problema anterior de otimização.

Após a obtenção da superfície de confiabilidade, o problema de otimização é reescrito em função somente de duas variáveis, altura do elemento e armadura tracionada. Para a armadura comprimida, adota-se o valor obtido na primeira etapa do processo de otimização. A formulação assume a seguinte forma:

Minimizar:

$$F(x_1, x_2) = b \cdot x_1 \cdot C_c + (b + 2x_1) \cdot C_f + (x_2 + c) \cdot \gamma_s \cdot C_s \quad (5.20)$$

Sujeito a:

$$K_1 \cdot (x_1 - d') + \sigma_{sc} \cdot c - \sigma_s \cdot x_2 = 0 \quad (5.21)$$

$$\beta_o - \left( a_o + a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot x_2^2 + a_3 \cdot x_1 + a_4 \cdot x_1^2 \right) \leq 0 \quad (5.22)$$

onde os  $a_i$  são os coeficientes da superfície de confiabilidade,  $c$  corresponde ao valor da armadura comprimida e  $\beta_o$  é o índice de confiabilidade requerido. É importante ressaltar que, nessa segunda etapa da otimização, a variável  $x_1$  não é mais a altura útil da seção, mas sim a altura total. Esse procedimento foi adotado para que a superfície de confiabilidade fosse determinada em função da altura total da seção transversal. Com isso, a restrição (5.21) foi corrigida para que o termo que multiplica o fator  $K_1$  continue sendo a altura útil da seção.

Da mesma forma, é possível diminuir o número de restrições de igualdade explicitando a variável  $x_2$  na Eq. (5.21).

$$x_2 = \frac{K_1 \cdot (x_1 - d') + \sigma_{sc} \cdot c}{\sigma_s} \quad (5.23)$$

Substituindo a Eq. (5.23) em (5.20) e (5.22) tem-se o novo problema de otimização em função somente da altura da seção.

A solução do problema é alcançada procedendo-se da mesma maneira que a primeira etapa, ou seja, formula-se o lagrangeano do problema, os respectivos gradientes e resolve-se o sistema de equações analiticamente. Assim, o valor da altura ótima da seção é calculado pela restrição de confiabilidade e a armadura é obtida pela Eq. (5.23).

*Solução do Problema:*

$$x_1 = \frac{-Z_2 \pm \sqrt{Z_2^2 - 4 \cdot Z_1 \cdot Z_3}}{2 \cdot Z_1} \quad (5.24)$$

$$Z_1 = -a_2 \cdot K_1^2 - a_4 \cdot \sigma_s^2 \quad (5.25)$$

$$Z_2 = -a_1 \cdot \sigma_s \cdot K_1 + 2 \cdot a_2 \cdot K_1^2 \cdot d' - 2 \cdot a_2 \cdot K_1 \cdot \sigma_{sc} \cdot c - a_3 \cdot \sigma_s^2 \quad (5.26)$$

$$Z_3 = \beta_0 \cdot \sigma_s^2 - a_0 \cdot \sigma_s^2 + a_1 \cdot \sigma_s \cdot K_1 \cdot d' - a_1 \cdot \sigma_s \cdot \sigma_{sc} \cdot c - a_2 \cdot K_1^2 \cdot d'^2 +$$

$$+ 2 \cdot a_2 \cdot K_1 \cdot d' \cdot \sigma_{sc} \cdot c - a_2 \cdot \sigma_{sc}^2 \cdot c^2 \quad (5.27)$$

$$\lambda_1 = \frac{-b \cdot C_c \cdot \sigma_s - 2 \cdot C_f \cdot \sigma_s - K_1 \cdot \gamma_s \cdot C_s}{\sigma_s \cdot (2 \cdot Z_1 \cdot x_1 + Z_2)} \quad (5.28)$$

Ao se fixar a restrição em confiabilidade, ou seja, para chegar exatamente ao valor do índice de confiabilidade pré-fixado, é necessário que se faça um processo iterativo. Significa que ao final de uma iteração do modelo, o índice de confiabilidade pode resultar menor que o requerido ou até mesmo muito maior. Nesses casos, reinicia-se o processo somente a partir da segunda etapa, isto é, não é mais necessário fazer a otimização determinística. Dessa forma, o ponto ótimo obtido na primeira iteração torna-se o centro do plano de experiência para a segunda iteração e assim sucessivamente até que o índice de confiabilidade requerido seja atingido com uma tolerância desejada. Portanto, a busca das dimensões da estrutura que resulte no índice de confiabilidade desejado requer esse processo iterativo.

O modelo desenvolvido pode ser aplicado para o estado limite último e também para o estado limite de utilização, uma vez que a superfície de confiabilidade pode ser calculada para qualquer estado. Entretanto, o ponto ótimo resultante da primeira etapa da otimização pode produzir na estrutura deslocamentos bastante superiores aos limites impostos pelos códigos normativos. Isto é perfeitamente justificável, visto que nenhuma restrição em deslocamentos foi considerada no processo de otimização. Assim, ao se tentar construir a superfície de confiabilidade para o estado limite de deslocamentos excessivos, os índices de confiabilidade podem resultar em valores baixos gerando problemas numéricos na solução.

Com o intuito de resolver esse problema, um modelo simplificado foi desenvolvido. Após a primeira etapa da otimização, com o ponto ótimo obtido, verificam-se os deslocamentos da estrutura. A nova altura é obtida através de um coeficiente ponderador sobre a altura ótima. Este coeficiente é calculado por uma relação entre o deslocamento obtido com o programa e o deslocamento limite. A relação é expressa da seguinte forma:

$$h_{i+1} \geq h_i \cdot \sqrt[3]{\frac{\delta_i}{\delta_{lim}}} \quad (5.29)$$

onde  $h_i$  é o valor da altura da seção transversal do elemento na iteração  $i$ ,  $\delta_i$  é o deslocamento máximo da estrutura e  $\delta_{lim}$  corresponde ao deslocamento limite imposto pelas

normas. Essa relação estabelece o valor mínimo para a altura da peça para que os seus deslocamentos sejam admissíveis.

Com o valor da altura, faz-se o mesmo procedimento descrito anteriormente para montagem da superfície de confiabilidade e otimização.

## **6. Exemplos Numéricos**

### **6.1 Viga Isostática**

Este exemplo tem como principal objetivo obter as dimensões ótimas para uma viga isostática em concreto armado segundo os critérios de confiabilidade. As análises são feitas primeiramente para o estado limite último e, posteriormente, para o estado limite de utilização em deslocamentos. Além disso, o exemplo também é utilizado para verificar o modelo mecânico desenvolvido, bem como o modelo de confiabilidade.

A viga faz parte da estrutura de sustentação de uma cobertura convencional idealizada, isto é, um telhado de uma folha composto por madeiramento e telhas cerâmicas. Assim, a análise deve propor as dimensões para essa viga em concreto armado que resultem no mínimo custo, desde que sejam atendidos os requisitos de segurança em confiabilidade. A viga é constituída por uma única barra com seção transversal retangular de 15 cm x  $h$  cm, apoiada em dois pilares em seus extremos formando um vão de 900 centímetros e submetida a cargas verticais conforme Fig. (6.1).

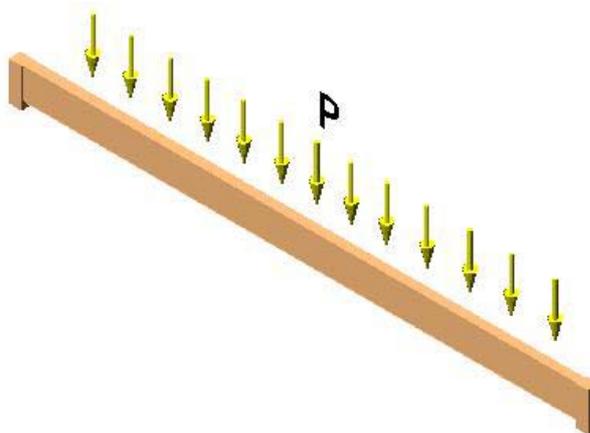
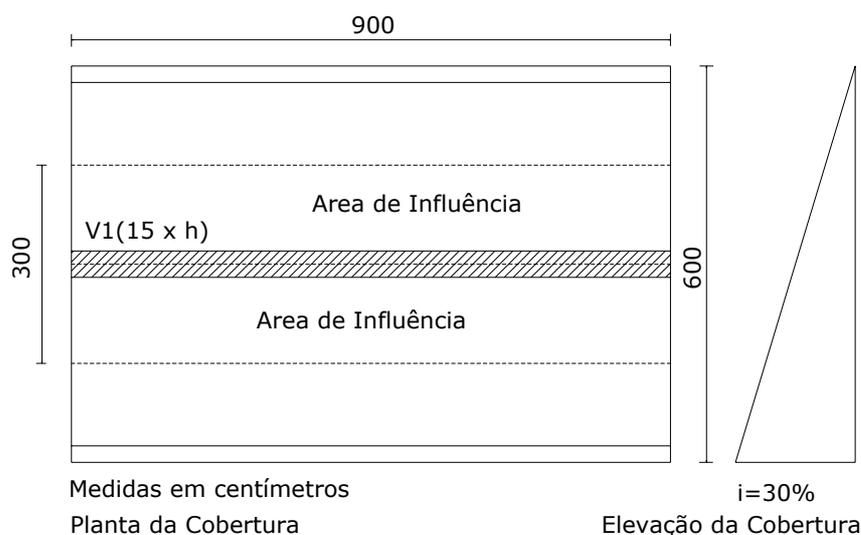


Figura 6.1 – Esquema da viga isostática do exemplo

A estrutura é calculada utilizando-se as hipóteses de flexão de Euller-Bernoulli com a consideração da não-linearidade física do concreto e do aço, respectivamente, pelos modelos de dano de Mazars e modelo elastoplástico com encruamento cinemático. Para a obtenção dos esforços internos solicitantes, utiliza-se a integração numérica por quadratura de Gauss ao longo do comprimento (6 pontos) e da altura (20 pontos) dos elementos finitos.

O carregamento sobre a estrutura é estimado a partir de um modelo de áreas de influência sobre a projeção em planta da cobertura conforme Fig. (6.2).



**Figura 6.2 – Situação geral da estrutura**

Agem sobre a estrutura, as cargas da cobertura (telhas cerâmicas e madeiramento), do peso-próprio da viga e de utilização (sobrecarga variável). O peso-próprio da estrutura é estimado considerando-se uma altura inicial de 50 cm para a viga. Os valores dos carregamentos são:

- Carga de cobertura com telhas cerâmicas e madeiramento:  $1.2 \text{ kN/m}^2$ . Sobre a viga resulta em  $3.6 \text{ kN/m}$ ;
- Peso-próprio do concreto armado:  $25.0 \text{ kN/m}^3$ . Sobre a viga resulta em  $1.88 \text{ kN/m}$ ;
- Sobrecarga de utilização:  $0.90 \text{ kN/m}^2$ . Sobre a viga resulta em  $2.7 \text{ kN/m}$ .

Portanto a carga distribuída total que atua sobre a viga é de  $8.18 \text{ kN/m}$ . Esse valor deve ser utilizado para verificar o estado limite último da estrutura. Distribuindo esse carregamento sobre os treze nós internos da estrutura discretizada, que corresponde aproximadamente à posição de cada caibro de madeira, as ações resultam em forças concentradas aplicadas sobre os nós de  $5.66 \text{ kN/nó}$ . Para verificar o estado limite de utilização em deslocamentos excessivos, a sobrecarga de utilização é minorada pelo coeficiente parcial

equivalente a 0.3. Assim, o carregamento final assume o valor de 6.29 kN/m, o que corresponde a 4.35 kN/nó.

A discretização da estrutura é composta por uma rede de 14 elementos finitos de pórtico plano, conforme Fig. (6.3).

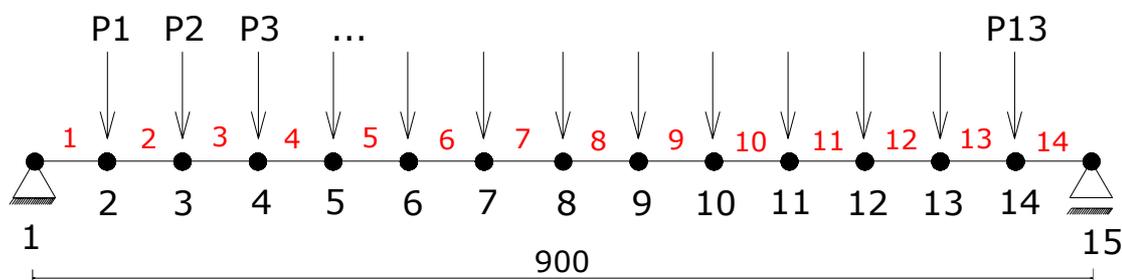


Figura 6.3 – Discretização da viga do exemplo

Admite-se que tanto a resistência do concreto quanto a resistência do aço são variáveis aleatórias gaussianas com distribuições estatísticas iguais em todo o comprimento da estrutura. Assim, todos os elementos finitos apresentam o mesmo concreto e o mesmo aço.

As características estatísticas do concreto e do aço estão dispostas na Tab. (6.1).

Tabela 6.1 – Características estatísticas das variáveis aleatórias

Parâmetro	Média (kN/cm <sup>2</sup> )	Desvio-Padrão (kN/cm <sup>2</sup> )	Distribuição
Concreto, $f_c$	2.705	0.55	Normal
Aço, $f_y$	50.00	3.00	Normal

A resistência média do concreto é fixada dessa forma, pois se deseja simular um concreto com resistência característica,  $f_{CK}$  de 18 MPa, obtido pela expressão:

$$f_{CK} = f_{CM} - 1.645\sigma_C \quad (6.1)$$

onde  $f_{CM}$  é a resistência média do concreto e  $\sigma_C$  é o respectivo desvio-padrão. Portanto, o concreto apresenta um coeficiente de variação de 20% e o aço de 6%.

A análise probabilística é feita através de superfícies de respostas que aproximam a função de estado limite último da estrutura por polinômios quadráticos em torno do ponto de projeto. O estado limite último, para uma primeira análise, é caracterizado quando se atinge em algum ponto da estrutura, um valor de deformação limite para o concreto ou para o aço. As deformações limites são dadas para o concreto e aço respectivamente por -0.35% e 1.00%. Já o estado limite de utilização é verificado considerando o limite de deslocamento proposto pela NBR 6118:2003 dado por  $L / 250$ , o que resulta em um deslocamento máximo de 3.6 cm.

Nesta análise não estão sendo considerados os efeitos de deformação diferida no tempo provenientes da deformação lenta do concreto. O plano de experiência adotado é o plano estrela, o que caracteriza que para cada superfície de resposta gerada são necessárias cinco chamadas ao modelo mecânico de elementos finitos.

Para o modelo de otimização são adotadas as seguintes características:

**Tabela 6.2 – Parâmetros usados no modelo de otimização**

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$\varepsilon_c$	0,0035	$E_s$	19600 kN/cm <sup>2</sup>
$d'$	3,0 cm	$C_c$	R\$ 230,00/m <sup>3</sup>
%Max. de Armadura	4 %	$C_f$	R\$ 32,00/m <sup>2</sup>
$\gamma_s$	0,000075 kN/cm <sup>3</sup>	$C_s$	R\$ 2,80/kg

Com isso, a primeira etapa do modelo de otimização foi desenvolvida para o estado limite último, ou seja, para o dimensionamento ótimo da estrutura.

A Tab. (6.3) ilustra os resultados obtidos com o modelo de otimização determinística para o projeto ótimo da estrutura considerada:

**Tabela 6.3 – Informações sobre o ponto ótimo**

$M_k$	$h$	$A_s$	$A_{sc}$	$V_{CONC.}$	Custo	Custo <sub>ToT.</sub>	Função
(kN.cm)	(cm)	(cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>2</sup> )	(m <sup>3</sup> )	(R\$/m)	(R\$)	Objetivo
8860,0	44,93	8,77	1,03	0,60655	69,65	626,85	0,696507

Assim, o ponto ótimo é dado pelo conjunto (44,93; 8,77; 1,03). De posse do ponto ótimo, inicia-se a segunda etapa do processo de otimização. A construção da superfície de confiabilidade é feita utilizando o RSM e plano de experiência estrela. O centro do plano é colocado exatamente sobre o ponto ótimo do processo de otimização anterior. Assim, são obtidas as seguintes variações para as variáveis de projeto, bem como os índices de confiabilidade.

Tabela 6.4 – Configurações da estrutura e índices de confiabilidade

Ponto do PE	h (cm)	A <sub>S</sub> (cm <sup>2</sup> )	A <sub>SC</sub> (cm <sup>2</sup> )	β
1	44,93	8,77	1,03	3,783
2	51,67	8,77	1,03	4,197
3	38,19	8,77	1,03	3,157
4	44,93	10,08	1,03	3,864
5	44,93	7,45	1,03	3,784

As variações das variáveis de projeto são feitas com a minoração ou majoração do ponto ótimo em 15%.

A superfície de confiabilidade assume a seguinte forma:

$$\beta(h, A_S) = -2.832277 - 0.386767 \cdot A_S + 0.023798 \cdot A_S^2 + 0.286829 \cdot h - 0.002333 \cdot h^2$$

Para o estado limite último, o índice de confiabilidade requerido neste exemplo é de 3.8. Portanto, para este caso,  $\beta_o = 3.8$ .

A segunda etapa do processo de otimização conduz aos seguintes resultados:

Tabela 6.5 – Solução final do problema

M <sub>k</sub>	h	A <sub>S</sub>	A <sub>SC</sub>	V <sub>CONC.</sub>	Custo	Custo <sub>TOT.</sub>	Função	β
(kN.cm)	(cm)	(cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>2</sup> )	(m <sup>3</sup> )	(R\$/m)	(R\$)	Objetivo	
8860,0	45,13	8,81	1,03	0,60912	69,99	629,91	0,699103	3,802

É interessante destacar que, apesar de a solução final ter resultado em um custo maior em relação à otimização determinística, satisfaz à restrição em confiabilidade, fato que é prioritário. Assim, a configuração final da estrutura satisfaz aos requisitos requeridos de segurança para o estado limite último. Para a convergência do processo, para este caso, foi necessária somente uma iteração do modelo. Acredita-se que pelo fato de a estrutura ser isostática e, portanto, sem redistribuição de esforços, o modelo convergiu na primeira iteração. Além disso, ao final da otimização da primeira etapa, o índice de confiabilidade da estrutura ótima já resultou muito próximo do limite desejado, o que certamente também foi um fator importante na convergência do processo.

Para verificar o comportamento da estrutura dimensionada, foi realizada uma análise mecânica em regime não-linear físico. A carga foi aplicada em 25 incrementos iguais resultando, ao final do processo incremental-iterativo, no carregamento total de 5,66 kN/nó.

Verificou-se que as deformações nos materiais (Fig. 6.6) para o carregamento aplicado ficaram abaixo dos limites especificados tanto para o concreto quanto para o aço. Isto significa que a carga de serviço é bem inferior à capacidade resistente da viga, refletindo a condição de segurança especificada no projeto. O índice de confiabilidade de 3.802 resulta em uma probabilidade de falha da ordem de  $7,081 \cdot 10^{-5}$ .

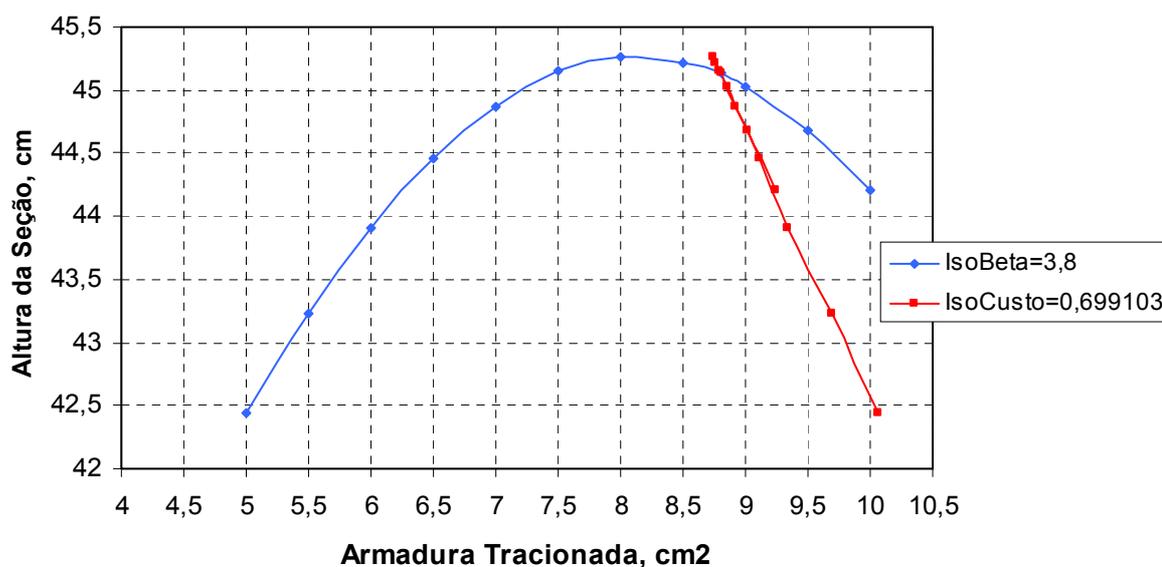


Figura 6.4 – Isocurvas do problema de otimização e ponto ótimo

A Fig. (6.4) ilustra as isocurvas de confiabilidade e do mínimo custo referentes ao problema. A curva em azul corresponde à projeção da superfície de confiabilidade somente com valor para o índice de confiabilidade igual a 3.8. Da mesma forma, a curva em vermelho, corresponde aos pares de altura e armadura tracionada que possuem o custo mínimo encontrado. Como a restrição em confiabilidade é o fator decisivo na análise, o ponto ótimo é exatamente a intersecção entre as duas isocurvas.

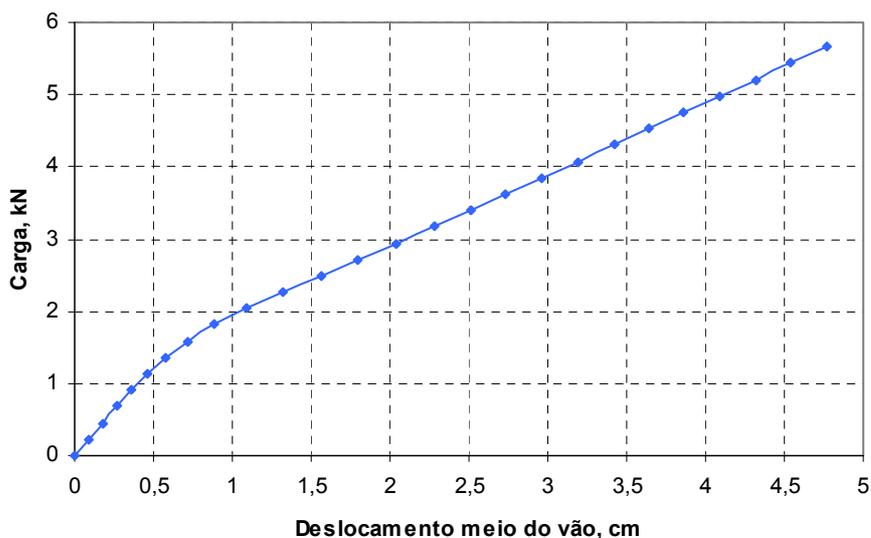


Figura 6.5 – Resposta mecânica da estrutura dimensionada

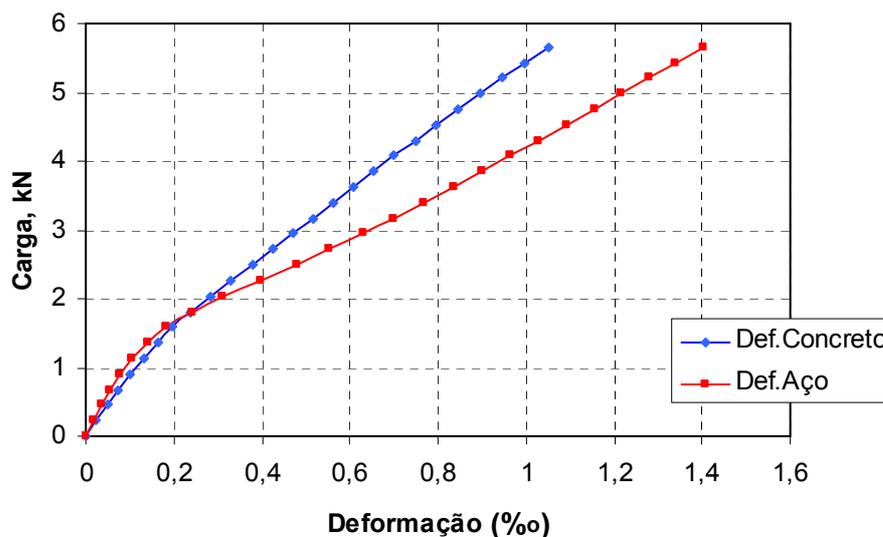


Figura 6.6 – Evolução das deformações nos materiais

O coeficiente de carga última da estrutura resultou em 1.746, ou seja, a carga última que a estrutura pode suportar assume o valor de 9.8876 kN/nó. Esse fato explica a folga dos materiais em serviço.

Em relação ao estado limite de utilização em deslocamentos excessivos (para carregamento de 4.35 kN/nó), verificou-se que as dimensões obtidas no processo de otimização resultaram em um deslocamento máximo da ordem de 3.47 cm. Esse valor é inferior ao limite estabelecido pela NBR 6118:2003, que para este caso, corresponde a 3.6 cm. Para o estado limite de utilização, o índice de confiabilidade requerido é de 1.5, o que

corresponde a uma probabilidade de falha de  $6.768 \cdot 10^{-2}$ . Significa que para cada 100 vigas como esta, aproximadamente 7 vigas resultarão em uma falha. A falha neste contexto implica em deslocamento superior ao limite imposto pela norma. O índice de confiabilidade obtido para o ponto ótimo resultou em 1.958, com probabilidade de falha de  $2.533 \cdot 10^{-2}$ . Portanto, a estrutura atende aos requisitos de segurança especificados no projeto.

Diante do que foi apresentado neste exemplo, verificou-se que o modelo conduziu a resultados satisfatórios, mostrando que o modelo mecânico-probabilístico apresentou desempenho bastante adequado. Entretanto, é preciso salientar que para a avaliação dos deslocamentos da estrutura, não foram considerados os efeitos da fluência do concreto. Sem dúvida, ao se considerar a deformação lenta e o processo não-linear, os deslocamentos aumentariam consideravelmente, fato que conduziria a um aumento substancial da altura da viga. Em pesquisas futuras, a fluência deve ser um ponto bastante interessante para explorar no contexto do acoplamento entre confiabilidade e otimização. Além disso, deve-se atentar para o fato de que as variáveis consideradas no processo de otimização não são as mesmas variáveis que sofreram um tratamento estatístico para considerar suas incertezas, que no caso foi a resistência do concreto e do aço. Com isso, mesmo com as dimensões ótimas, ainda existe a possibilidade de haver falha por conta das próprias incertezas das resistências dos materiais. Finalmente, um último comentário se faz no sentido de que, com a formulação proposta, não há garantia de que a estrutura resultante seja sempre sub-armada. Como o concreto é a variável mais sensível na função de custo e não existe nenhuma restrição que garanta a ductilidade da estrutura, o modelo faz o equilíbrio da seção, mas sempre tentando o máximo de economia do concreto. Dessa forma, resultam estruturas muitas vezes super-armadas. Esse fato, para este exemplo, se verificou na análise de confiabilidade, uma vez que após o processo de otimização completo, a falha predominante se deu no concreto.

## 6.2 Viga Hiperestática

Neste exemplo é analisada uma viga estaticamente indeterminada com o objetivo de verificar o comportamento do modelo de otimização para estruturas hiperestáticas somente considerando o estado limite último. Como a viga possui um grau de hiperestaticidade, a redistribuição de esforços é o fator preponderante no comportamento global da estrutura. Diante disso, existe uma reserva de resistência que certamente produz uma diminuição na probabilidade de falha da estrutura.

A estrutura é discretizada em 16 elementos finitos de pórtico plano e submetida a duas cargas concentradas de 50 kN cada uma (nós 5 e 13). São dois tramos com quatro metros de comprimento cada um e seção transversal de 15 cm por  $h$  cm. A discretização e o detalhamento da viga estão mostrados na Fig. (6.7).

Para o modelo de otimização, adotou-se um concreto com  $f_{CK} = 23MPa$ , o que corresponde a uma resistência média à compressão de 30 MPa e desvio-padrão de 4.2 MPa. As armaduras foram simuladas com CA-50 e módulo de elasticidade longitudinal 210000 MPa. A associação estatística para o aço foi feita considerando resistência média de 500 MPa e desvio-padrão de 30 MPa. Tanto o concreto quanto o aço foram adotados respeitando a distribuição normal de probabilidades. A verificação do estado limite último foi realizada pela comparação entre as deformações da estrutura e as deformações limites para o concreto comprimido (-0.0035) e armadura tracionada (0.010). A estrutura foi analisada em regime não-linear físico para o concreto e aço, através dos modelos de dano de Mazars e modelo elastoplástico, respectivamente. O modelo de dano foi calibrado para simular um concreto de 23 MPa de acordo com a curva da NBR 6118:1978, o que resultou nos seguintes parâmetros:  $\varepsilon_{d0} = 0.000063$ ,  $A_T = 0.995$ ,  $B_T = 8000$ ,  $A_C = 0.88$  e  $B_C = 1347$ . Os valores dos custos unitários dos materiais, bem como taxa máxima de armadura são exatamente os mesmos do exemplo anterior.

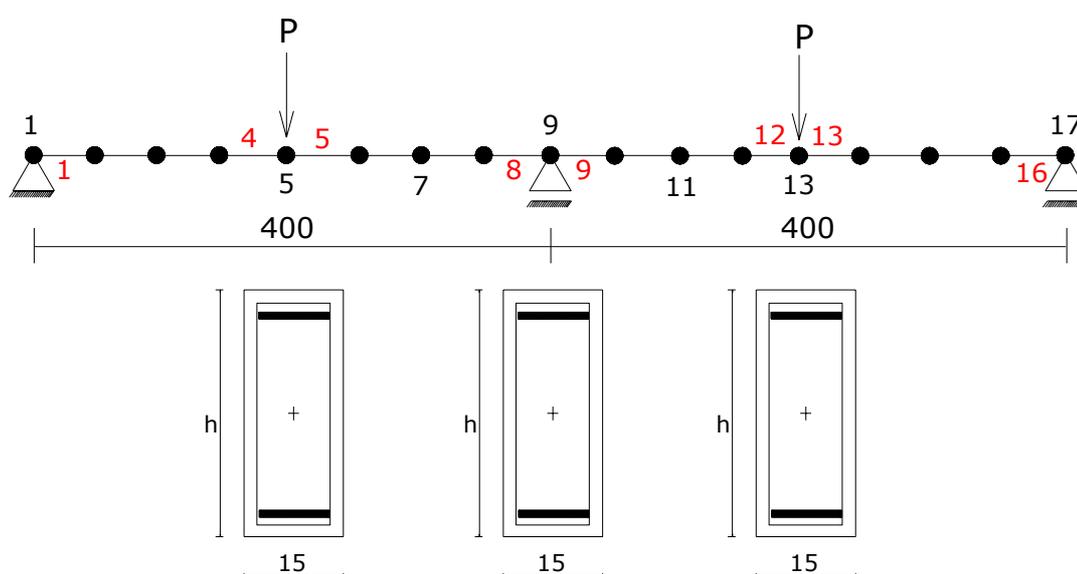


Figura 6.7 – Discretização e detalhamento da viga do exemplo

Na primeira etapa da análise, foi realizada a otimização determinística para obter as dimensões ótimas iniciais da estrutura. Como o apoio central (nó 9) corresponde à seção de

maior momento fletor, a otimização foi realizada para esta seção transversal. As seções intermediárias (nós 5 e 13) foram dimensionadas posteriormente com o valor da altura determinada para o apoio central.

**Tabela 6.6 – Dimensões ótimas da viga hiperestática na iteração 1**

Engaste (nó 9)				Vão (nó 5 e 13)		
$M_k$	$h$	$A_s$	$A_{sc}$	$h$	$A_s$	$A_{sc}$
(kN.cm)	(cm)	(cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>2</sup> )	(cm)	(cm <sup>2</sup> )	(cm <sup>2</sup> )
3740,0	32,11	5,78	0,00	32,11	3,92	0,00

Para efeitos de construção, foi considerada uma armadura porta-estribos de 1,00 cm<sup>2</sup>. Com esses valores, construiu-se a superfície de confiabilidade para o estado limite último utilizando o plano estrela. O índice de confiabilidade requerido, mais uma vez, corresponde ao valor de 3.9. Assim, na segunda etapa do processo de otimização, a restrição em confiabilidade foi incorporada ao problema.

A Tab. (6.7) mostra o desempenho do modelo aplicado à viga hiperestática. Observa-se que não houve a convergência logo na primeira iteração do método como ocorreu para a estrutura isostática do exemplo anterior. Isto se deve ao processo de absorção de esforços que ocorre na estrutura hiperestática que é diferente em relação à estrutura isostática. Assim, nas estruturas hiperestáticas, existe uma capacidade maior de absorção de esforços por conta das possíveis redistribuições de momentos fletores, que ocorrem dos engastes para os vãos adjacentes. Com isso, existe um certo alívio nas seções mais solicitadas que é compensado pelas seções adjacentes desde que estas seções tenham capacidade efetiva para absorver esses acréscimos de esforços.

**Tabela 6.7 – Dimensões ótimas da viga hiperestática e respectivos índices de confiabilidade**

Engaste (nó 9)			Vão (nó 5 e 13)		
Iteração	$h$ (cm)	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$h$ (cm)	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$\beta$
1	32,11	5,78	32,11	3,92	7,102
2	25,45	6,44	25,45	5,78	5,096
3	23,64	6,00	23,64	6,19	4,278
4	23,06	5,86	23,06	6,34	3,908

Tabela 6.8 – Ponto de projeto e sensibilidades das soluções ótimas

Iteração	$\beta$	$u_c^*$	$u_s^*$	$\alpha_c$	$\alpha_s$	$P_f$
1	7,102	-1,257	-6,991	3,13 %	96,87 %	$9,298 e^{-13}$
4	3,908	-3,866	-0,571	97,86 %	2,14 %	$4,711 e^{-5}$

Na primeira iteração, o índice de confiabilidade resultou em um valor elevado, indicando um alto nível de segurança para a estrutura. Este fato é justificável, uma vez que a armadura foi a principal responsável pela falha na estrutura, ou seja, a confiabilidade dependeu muito mais da armadura em relação ao concreto. Assim, como o aço é um material produzido com elevado controle de qualidade, seu coeficiente de variação é baixo comparado com o concreto. Com isso, as cargas últimas da estrutura apresentaram baixo nível de dispersão, já que o aço é o principal responsável pela segurança da estrutura. Já na última iteração, o comportamento geral da viga foi diferente. Para que o índice de confiabilidade se aproximasse do valor requerido, foi necessário diminuir a altura da seção transversal e, ao mesmo tempo, não aumentar a quantidade de armadura na seção do engaste. Esta atitude fez com que as deformações na armadura da seção do engaste resultassem maiores do que as mesmas deformações para a estrutura da primeira iteração. Dessa forma, a perda de capacidade resistente na seção do engaste se deu mais rapidamente transferindo os esforços para as seções dos vãos adjacentes, que por sua vez possuíam armadura suficiente. Além disso, como a altura da viga resultou menor, também houve uma diminuição do braço de alavanca na seção para resistir aos mesmos esforços (carga de 50 kN), fato que provocou um aumento considerável nas forças de compressão no concreto. Diante desse cenário, o concreto passou a representar papel fundamental na resistência da estrutura. Com isso, o índice de confiabilidade diminuiu, já que o concreto apresenta maior dispersão em suas propriedades do que o próprio aço. É interessante destacar que o modelo de confiabilidade é avaliado considerando somente o primeiro modo de falha. Significa que, o primeiro modo de falha ocorrerá justamente na seção de maior esforço. Portanto, em estruturas hiperestáticas, para que o índice de confiabilidade diminua é preciso que nessas seções, a capacidade resistente também diminua. Diante desse contexto, fica claro que em estruturas hiperestáticas sujeitas a processos de otimização com restrição em confiabilidade, a redistribuição de esforços torna-se vital e mais intensa, uma vez que outras seções passam a desempenhar um grande papel na absorção dos esforços provenientes das seções mais enfraquecidas. Além disso, em estruturas otimizadas com base na confiabilidade, a possibilidade de formação de rótulas plásticas é

maior, sendo importante verificar os múltiplos modos de falha e sua influência na probabilidade de falha global da estrutura.

As Fig. (6.8) e (6.9) ilustram a função-objetivo para a seção do engaste da viga e a carga última referente ao final de cada iteração do processo de otimização. Verifica-se que o custo converge para um mínimo satisfazendo a restrição confiabilidade e também que a capacidade resistente da estrutura tende a se aproximar da carga aplicada refletindo menor confiabilidade.

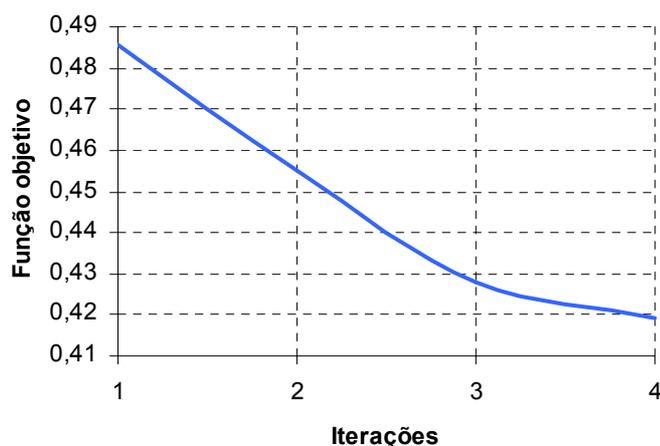


Figura 6.8 – Convergência da função-objetivo

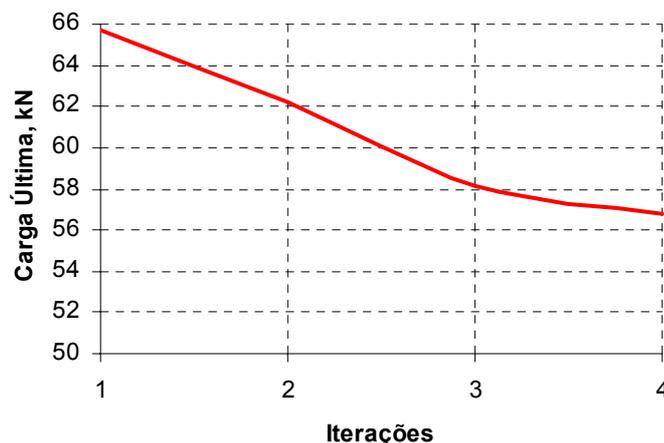


Figura 6.9 – Carga última da estrutura ao longo do processo de otimização

Para a verificação do comportamento estrutural da viga mediante os resultados da primeira e quarta iteração, foi realizada uma análise mecânica não-linear com o objetivo de avaliar as deformações dos materiais para a carga aplicada. O carregamento de 50 kN foi aplicado em 20 passos de carga com o registro das deformações dos materiais na seção do

engaste (nó 9) e na seção do vão (nó 5). A legenda utilizada na Fig. (6.10) possui o seguinte significado: C (concreto); A (aço); v (vão); e (engaste); iter1 (iteração 1) e iter4 (iteração 4).

As deformações máximas dos materiais nas seções do engaste e do vão da estrutura refletem o comportamento global da viga mediante o carregamento de serviço. Verificou-se que para uma altura de viga de 23,06 cm, a quantidade de armadura necessária naturalmente seria maior do que a armadura obtida de 5,86 cm<sup>2</sup> na seção do engaste da iteração 4. Isto ocorreu para que fosse possível obter o índice de confiabilidade requerido já que esta seção é mais solicitada. Diante disso, é possível verificar que a deformação na armadura na seção do engaste da iteração 4 é cerca de 38 % maior que as respectivas deformações da iteração 1. Como existe menos armadura e a força de tração é maior em virtude da diminuição da altura (perda de braço de alavanca), as deformações também devem ser maiores na estrutura resultante da iteração 4 em relação à primeira iteração. Este comportamento, sem dúvida, provoca uma redistribuição de esforços, de modo que as seções dos vãos passam a absorver mais carga. Por conta disso, também há um aumento considerável (da ordem de 93 %) da deformação no concreto da iteração 4 em relação à iteração 1. Este fato também é bastante coerente, uma vez que com o diminuição da altura da seção, existe menos área para resistir aos mesmos esforços normais oriundos do carregamento.

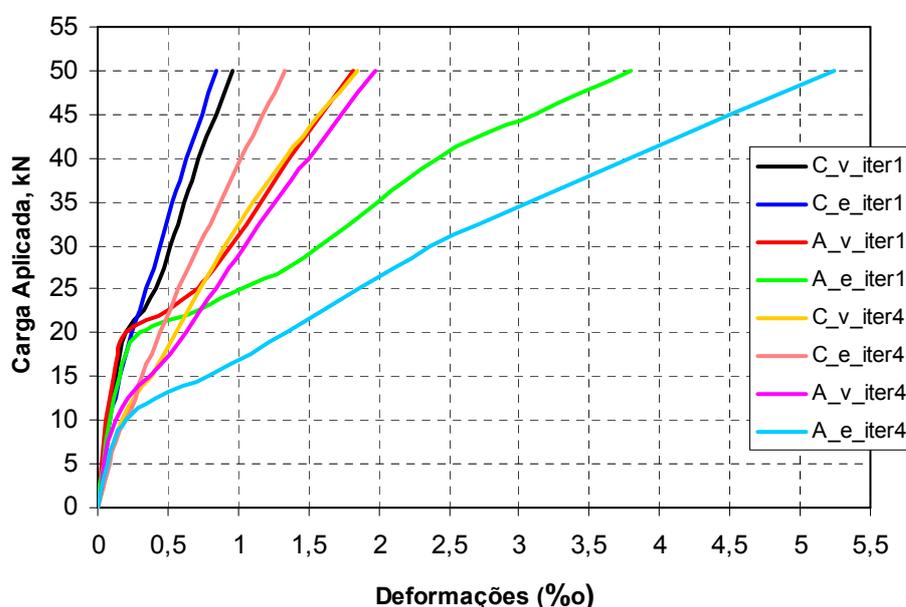


Figura 6.10 – Deformações nos materiais nas seções do engaste e do vão da estrutura

A redistribuição de esforços pode ser observada nas Fig. (6.11) e (6.12) a partir da mudança de inclinação das curvas no momento em que ocorrem as redistribuições. É interessante destacar que para a estrutura resultante da iteração 1, a redistribuição de esforços

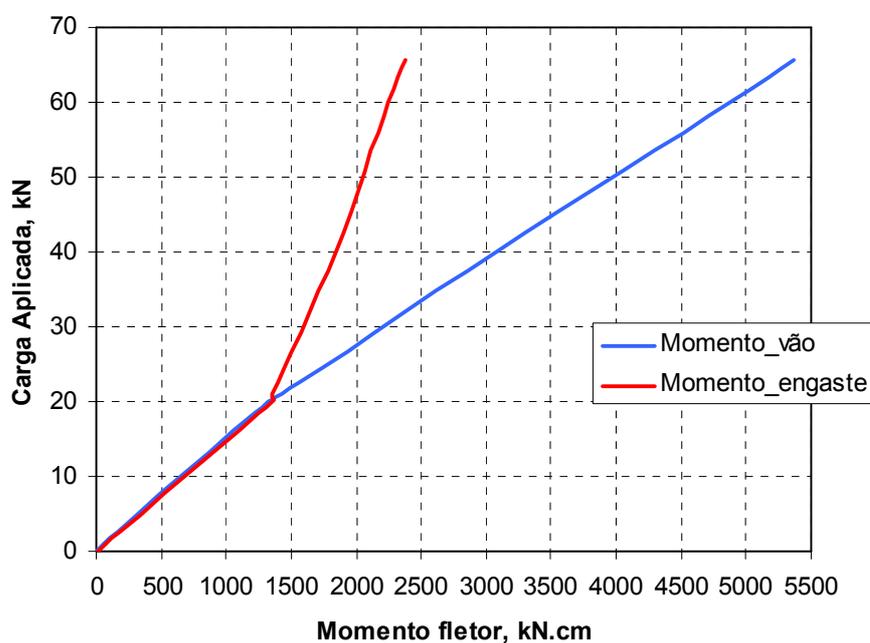
ocorre a partir de 20 kN, ao passo que a estrutura resultante da iteração 4 começa a redistribuir os esforços do engaste para os vãos quando a carga atinge em torno de 10 kN.

Ressalta-se que não foram realizadas análises para o estado limite de utilização em deslocamentos excessivos para este exemplo. Entretanto, foram obtidos os deslocamentos do nó 5 (vão) da estrutura para a iteração 1 e para a iteração 4.

**Tabela 6.9 – Deslocamentos do nó 5 da estrutura na iteração 1 e 4**

<b>Iteração</b>	<b>Deslocamento do Nó 5 (cm)</b>
1	1.014
4	2.012

O limite imposto pela NBR 6118:2003 para este caso é de 1,60 cm. Assim, a estrutura resultante da iteração 1 certamente possui um índice de confiabilidade adequado para o estado limite de utilização. Todavia, a estrutura resultante da iteração 4, na análise mecânica, apresentou comportamento inadequado quanto aos deslocamentos, o que deve conduzir a um índice de confiabilidade incompatível para o estado limite.



**Figura 6.11 – Redistribuição de esforços na iteração 1**

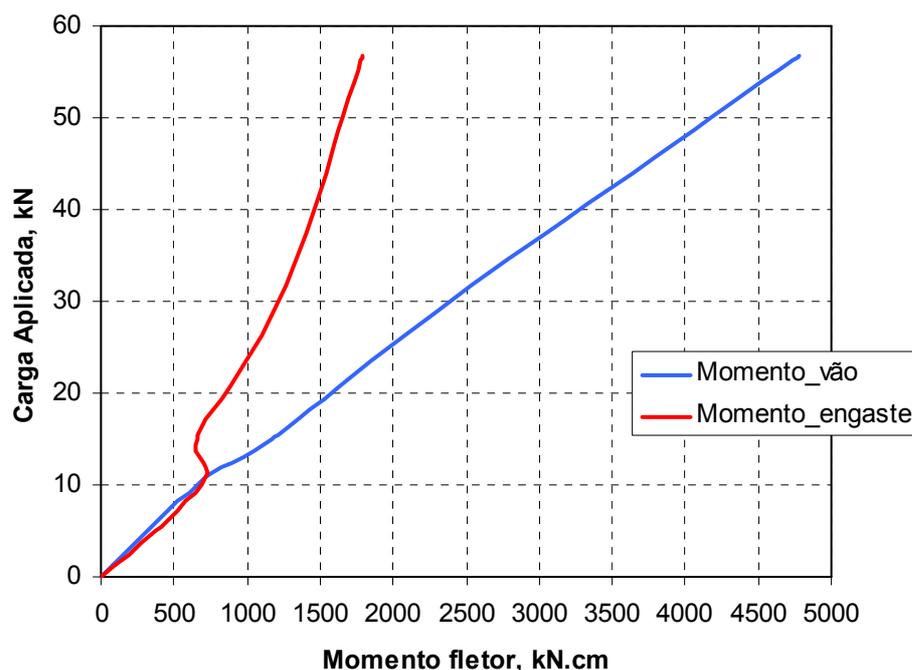


Figura 6.12 – Redistribuição de esforços na iteração 4

Os resultados desta análise serviram para verificar o desempenho do modelo de otimização acoplado à confiabilidade para o caso de vigas hiperestáticas. Conclui-se que ao se otimizar uma estrutura, a probabilidade de falha tende a aumentar, o que pode conduzir a estados contra a segurança em projetos. Além disso, para esse caso, constatou-se que a otimização da estrutura provocou uma sensível alteração no seu comportamento global, principalmente, em relação à sensibilidade dos materiais. Assim, em estruturas de barras otimizadas onde o esforço predominante é a flexão, o concreto pode vir a desempenhar um papel cada vez mais importante no mecanismo resistente global.

### 6.3 Pórtico Simples

Os pórticos são estruturas, basicamente, formadas pela associação de vigas e pilares com a finalidade de suportar as ações verticais, bem como as horizontais. Assim, são estruturas que também funcionam como sistema de contraventamento dos edifícios. Existem alguns modelos clássicos para simular o comportamento dos edifícios, tais como vigas contínuas, pórticos planos e pórticos tridimensionais. Dentre eles, o modelo que melhor traduz a realidade é o pórtico tridimensional, entretanto associações de pórticos planos podem ser utilizadas com bons resultados. A estrutura deste exemplo representa um pórtico plano de um pavimento submetido às ações verticais e uma força horizontal aplicada no topo do pilar

esquerdo. O objetivo do exemplo é verificar a confiabilidade desse pórtico quando analisado com vinculações diferentes, ou seja, qual a probabilidade de que o estado limite último de ruptura dos materiais seja violado em algum ponto da estrutura. Para isso, o mesmo pórtico foi verificado considerando ambas as bases engastadas (pórtico A), uma base apoiada e outra engastada (pórtico B) e ambas apoiadas (pórtico C), conforme Fig. (6.13).

O concreto foi considerado como uma variável aleatória de média 30 MPa e coeficiente de variação igual a 15%. O aço das armaduras também foi tratado como uma variável aleatória, com média 500 MPa e coeficiente de variação de 6%. Ambas as variáveis foram admitidas como variáveis de distribuição normal de probabilidades.

O plano de experiência escolhido foi o composto, o que representa, a cada iteração do RSM, nove respostas mecânicas da estrutura. A estrutura foi analisada considerando a não-linearidade física dos materiais, bem como a não-linearidade geométrica, segundo as teorias já descritas neste trabalho. Tanto as ações verticais quanto a ação horizontal apresentam o mesmo valor de 69,25 kN, aplicado em 20 incrementos iguais de carga. Portanto, para os três casos de vinculação, as ações são exatamente as mesmas, pois, assim, torna-se possível compará-las quanto à confiabilidade e respectivas respostas mecânicas.

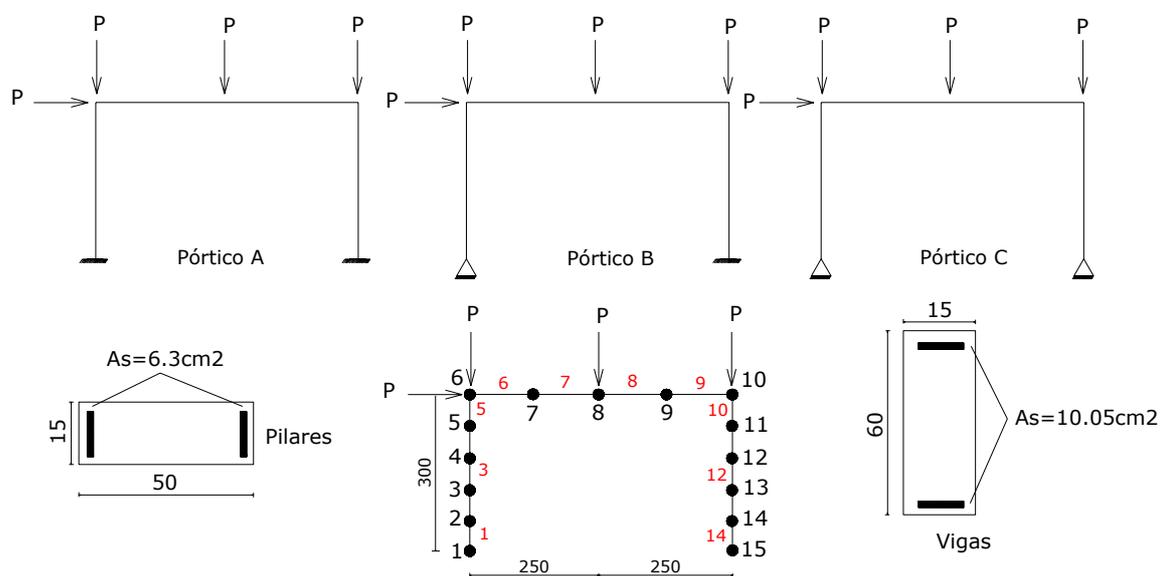


Figura 6.13 – Esquema dos pórticos e discretização da malha

A análise mecânica foi realizada considerando a resistência característica do concreto da ordem de 22,6 MPa, obtida a partir dos respectivos valores de resistência média e coeficiente de variação. A Fig. (6.14) ilustra o comportamento do topo do pórtico para os três casos de vinculação considerados.

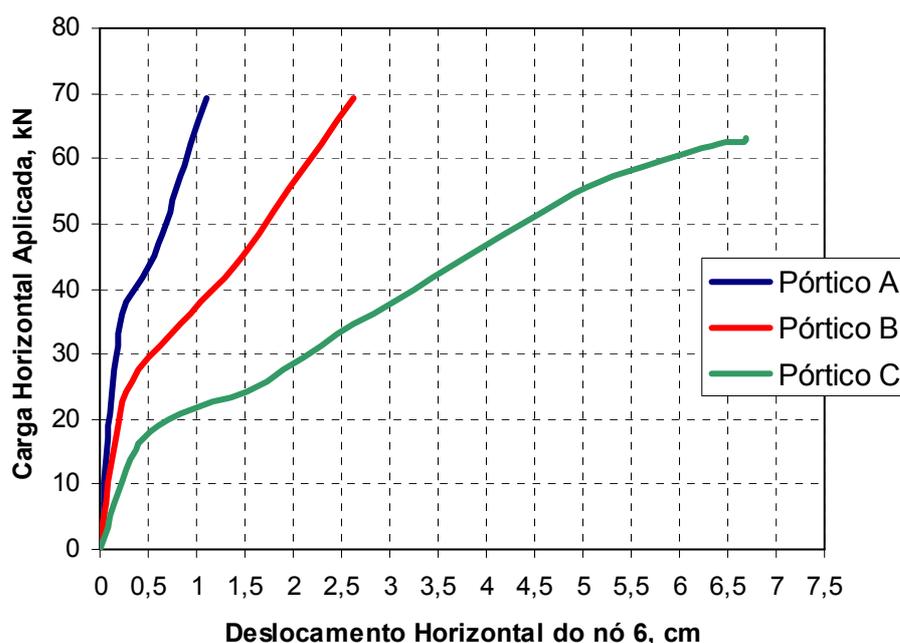


Figura 6.14 – Trajetória de equilíbrio do topo da estrutura

Verifica-se que a estrutura biengastada é bem mais rígida que as outras estruturas refletindo a influência da vinculação sobre o seu comportamento global. No pórtico C, correspondente à situação biapoioada, verifica-se que para uma força de 58 kN, a armadura do nó escoou, o que explica a mudança de inclinação da curva carga x deslocamento. É interessante notar que, mediante as ações consideradas, os pórticos A e B não apresentaram escoamento da armadura.

Os pórticos também foram carregados até a violação do estado limite último, o que resultou em cargas últimas. A falha foi atingida na seção do engaste esquerdo (concreto do nó 1) para o pórtico A, na seção do engaste direito (concreto do nó 15) para o pórtico B e na seção de encontro do pilar esquerdo com a viga (concreto do nó 6). Assim, em estruturas com maior flexibilidade nos apoios, a responsabilidade dos nós de pórtico aumenta, tornando-se os trechos mais solicitados da estrutura. A seguir, apresenta-se a tabela com os valores de cargas últimas e respectivos deslocamentos horizontais do nó 6 na situação limite.

Tabela 6.10 – Resposta estrutural dos pórticos na situação última

Estrutura	Carga Última, kN	Deslocamento do Nó 6, cm
Pórtico A	122.00	2.635
Pórtico B	96.97	4.571
Pórtico C	63.02	6.696

A análise de confiabilidade realizada na seqüência resultou em índices de confiabilidade menores para o pórtico C. Isto ocorreu por conta da maior deslocabilidade observada nessa estrutura em função de sua vinculação, o que tornou maior os efeitos de segunda ordem sobre a estrutura e, conseqüentemente, os deslocamentos e as deformações nos materiais. Assim, o estado limite último foi atingido mais facilmente. Vale ressaltar que a falha no concreto da seção do nó 6 do pórtico C resulta no aparecimento de uma rótula plástica na ligação entre a viga e o pilar. Esse fato, aliado à isostaticidade desse pórtico, provoca o colapso da estrutura. Portanto, para o caso C, tem-se a verdadeira probabilidade de colapso, ao passo que nas outras situações, a falha ainda não proporciona a ruína da estrutura.

Tabela 6.11 – Resultados da análise de confiabilidade para o Pórtico A

<b>Índice de Confiabilidade <math>\beta</math></b>	5.358
<b>Coordenadas do Ponto de Projeto no Espaço Reduzido</b>	$u_C = -5.351$ $u_Y = 0.269$
<b>Sensibilidade das Variáveis Aleatórias</b>	$\alpha_C = 0.998$ $\alpha_Y = -0.051$

Tabela 6.12 – Resultados da análise de confiabilidade para o Pórtico B

<b>Índice de Confiabilidade <math>\beta</math></b>	4.808
<b>Coordenadas do Ponto de Projeto no Espaço Reduzido</b>	$u_C = -4.806$ $u_Y = -0.142$
<b>Sensibilidade das Variáveis Aleatórias</b>	$\alpha_C = 0.999$ $\alpha_Y = 0.029$

Tabela 6.13 – Resultados da análise de confiabilidade para o Pórtico C

<b>Índice de Confiabilidade <math>\beta</math></b>	1.987
<b>Coordenadas do Ponto de Projeto no Espaço Reduzido</b>	$u_C = -1.923$ $u_Y = -0.499$
<b>Sensibilidade das Variáveis Aleatórias</b>	$\alpha_C = 0.967$ $\alpha_Y = 0.251$

Comparando a sensibilidade das variáveis aleatórias nos três casos, verifica-se que a falha predominante ocorreu no concreto. Entretanto, a importância da armadura na absorção

de esforços cresceu à medida que a estrutura se tornou mais flexível (maior sensibilidade do aço para o pórtico C).

**Tabela 6.14 – Probabilidades de falha**

<b>Estrutura</b>	<b>Probabilidade de Falha, %</b>
Pórtico A	0.0005075
Pórtico B	0.009025
Pórtico C	2.359

Com esses resultados, o exemplo mostrou que a confiabilidade também pode ser empregada para avaliar a segurança de diversos sistemas estruturais, comparando sua eficiência, bem como as variáveis que mais influenciam no comportamento global da estrutura.

## **7. Conclusão**

Nos dias atuais, a teoria da confiabilidade já se encontra bastante desenvolvida com diversas aplicações em vários ramos da ciência. Com os conceitos estatísticos e a abordagem de confiabilidade, atualmente, já é possível considerar de uma maneira consistente, as incertezas inerentes às variáveis envolvidas no projeto. Na engenharia estrutural, a confiabilidade é empregada para quantificar probabilidades de ocorrência de estados indesejáveis nas diversas estruturas como pontes, edifícios e outras. Dessa forma, é possível realizar uma análise de segurança mais criteriosa e assim, obter informações mais confiáveis sobre o comportamento em serviço das estruturas. Portanto, a teoria de confiabilidade é capaz de fornecer excelentes subsídios para a verificação da segurança das estruturas e na concepção de projetos estruturais.

Atualmente, o desenvolvimento de modelos baseados em confiabilidade é uma atividade bastante interessante e que vem crescendo muito. As aplicações dos métodos se dão tanto no âmbito de elementos estruturais, assim como em sistemas como um todo. Métodos mais sofisticados que permitem percorrer os diversos caminhos de falha até o colapso estrutural, bem como a influência de múltiplos modos de falha na probabilidade final da estrutura, vem sendo desenvolvidos e aplicados aos problemas de engenharia estrutural.

Um dos maiores problemas na análise de confiabilidade ainda é o tempo de processamento, principalmente quando se deseja utilizar modelos mecânicos mais complexos. Por conta disso, os pesquisadores têm se preocupado em desenvolver métodos confiabilísticos utilizando algoritmos com convergência mais rápida e menos chamadas aos modelos mecânicos. Assim, qualquer metodologia proposta que reduza o número de chamadas aos modelos mecânicos é bem aceita no meio científico. Diante disso, verifica-se que a utilização dos métodos confiabilísticos evolui paralelamente ao avanço da tecnologia dos processadores computacionais.

Com relação à modelagem mecânica, foram estudados diversos modelos com ênfase nos modelos de dano para o concreto. Nesse âmbito, o trabalho apresenta contribuições, pois explora modelos mais sofisticados para simular o comportamento do concreto. O modelo é baseado na relação tensão-deformação com rigidez devidamente penalizada pela variável de dano. Além disso, a não-linearidade geométrica é abordada de maneira consistente com a formulação lagrangeana atualizada. O modelo mecânico resultou em uma ferramenta bastante interessante para representar o comportamento das estruturas de barras de concreto armado. Assim, o modelo é capaz de simular elementos como vigas e pilares, assim como sistemas de pórticos planos de múltiplos pavimentos.

A adaptação implementada no modelo de dano de Mazars foi necessária para que fosse possível considerar a resistência do concreto como uma variável aleatória. O procedimento descrito de calibração dos parâmetros do modelo é bastante consistente, embora a utilização de um diagrama tensão-deformação proposto por norma para servir como base de calibração não seja a maneira mais adequada. Isto ocorre porque as propostas de normas sempre são curvas aproximadas e com certos graus de simplicidade. Fica evidente que a melhor maneira de resolver o problema da calibração adequada dos parâmetros é a utilização de respostas experimentais de diversas resistências de concreto. Assim, torna-se possível obter os parâmetros que realmente traduzem numericamente a resposta experimental do concreto. Entretanto, vale ressaltar que ainda assim, trata-se de um modelo de dano que certamente proporciona simulações mais realísticas do concreto, pois considera a perda de rigidez do material de maneira bem mais consistente que os modelos fechados. Por conta disso, o tempo de processamento das análises sofreu um acréscimo já que os modelos de materiais são mais sofisticados.

Toda a modelagem mecânica foi adaptada para o processo de obtenção de cargas últimas das estruturas. Essa abordagem permite capturar a carga ou conjunto de cargas que conduzem a estrutura à violação de um estado limite. O fato de se utilizar cargas últimas como respostas estruturais para verificação dos métodos de confiabilidade, faz com que seja possível um tratamento adequado do ponto de vista de qualquer estado limite. Com isso, dependendo do modelo, é possível obter as cargas que provocam ruptura dos materiais, deslocamentos excessivos, fissuração excessiva, instabilidade entre outros estados.

A confiabilidade das estruturas foi avaliada a partir de métodos aproximados. Os métodos empregados foram baseados nas superfícies de resposta com aproximação da função de estado limite a partir de polinômios de segundo grau. Constatou-se na literatura que

polinômios de ordem baixa são os mais indicados. Foram consideradas como variáveis aleatórias, a resistência do concreto e do aço. Vale ressaltar que quanto mais variáveis aleatórias são consideradas no problema, melhores são as informações extraídas a respeito das probabilidades de falha das estruturas. Porém, à medida que o número de variáveis aleatórias cresce, também aumenta a complexidade das análises, o que pode tornar o problema bastante complexo do ponto de vista mecânico e computacional. A consideração somente de duas variáveis aleatórias neste trabalho foi suficiente para representar estruturas simples constituídas com o mesmo material. O sistema de planos de experiência foi utilizado para a construção das superfícies de falha. Verificou-se que o forte comportamento não-linear das estruturas de concreto armado é capaz de exercer grande influência na convergência para o ponto de projeto, uma vez que o método depende fortemente dos planos de experiência. Muitas vezes, simples alterações nas variáveis produziram mudanças significativas nos cenários de falha, assim como, em outras ocasiões, destruíram a convergência do método de superfícies de respostas.

A reestruturação dos planos de experiência apresentou-se como uma melhoria na precisão do ponto de projeto e, conseqüentemente, no índice de confiabilidade. O princípio é bastante simples e conduz a erros menores quando comparado ao método convencional. A grande desvantagem desse procedimento consistiu no fato de ser bastante sensível no momento da divisão do plano em torno do ponto de projeto. Com isso, muitas redivisões podem conduzir à instabilidade numérica e perda de convergência.

Com relação ao modelo de confiabilidade acoplada à otimização, verificou-se que apesar de simples, conduziu a resultados satisfatórios do ponto de vista de dimensionamento de vigas de concreto armado. É possível nesse tipo de abordagem ativar ou desativar a restrição em confiabilidade, de modo a obter exatamente o índice requerido. A análise de uma viga isostática permitiu verificar que após o modelo de otimização determinística ser aplicado, a estrutura resultante apresentou uma probabilidade de falha bastante próxima da probabilidade requerida. Como não há redistribuição de esforços, quando se otimizou a estrutura com as restrições de equilíbrio e compatibilidade, naturalmente a configuração ótima resultou em um índice de confiabilidade em torno do índice mínimo para o estado limite último proposto pelo CEB que é da ordem de 3.8. Assim, apenas uma iteração foi suficiente para o fim do processo. O mesmo comportamento não foi observado nas estruturas hiperestáticas. A viga analisada no exemplo 6.2 mostrou que após a otimização da estrutura a partir da seção mais solicitada, o índice de confiabilidade ainda resultou elevado. Esse

fenômeno é explicado por conta da grande redistribuição de esforços presente nesses tipos de estruturas. Foram necessárias mais iterações para a convergência do modelo para as dimensões ótimas. Verificou-se que em estruturas hiperestáticas, após a otimização fixando a confiabilidade, é possível que ocorra uma mudança total dos cenários de falha, uma vez que as seções são modificadas para atender a confiabilidade requerida, produzindo grandes alterações nos processos de transmissão de esforços. Desse modo, ao se otimizar uma estrutura, é possível que ocorra um considerável aumento nas probabilidades de falha, o que pode conduzir a estados contra a segurança.

Constatou-se ao longo de toda a pesquisa que a tendência é a busca cada vez maior do acoplamento entre confiabilidade e otimização para a análise de estruturas de engenharia. Assim, é possível que em um futuro não muito distante, os métodos estejam adequadamente desenvolvidos juntamente com a tecnologia da informática, de modo que o projeto de uma estrutura será realizado a partir da minimização do seu custo total, incluindo possíveis reparos decorrentes de falhas, com o grau de segurança desejado pelo cliente.

Os temas para pesquisas futuras relacionados à seqüência desta mesma linha são diversos. Com relação ao modelo mecânico, existe a possibilidade de incorporar modelos que representem mais adequadamente o comportamento dos materiais, como por exemplo, a consideração de modelos de dano mais sofisticados que contemplem a anisotropia e comportamento bimodular do concreto. Além disso, a consideração de melhorias nas hipóteses de aderência perfeita entre o aço e o concreto, assim como o embricamento dos agregados e o efeito de pino da armadura de flexão também podem conduzir a bons campos de pesquisa.

A extensão de modelos que avaliem os múltiplos modos de falha na confiabilidade de pórticos tridimensionais também constitui uma promissora linha de pesquisa. Da mesma forma, a melhoria no acoplamento entre a confiabilidade e otimização, de modo a resolver o problema em um único “loop” aliada às probabilidades dos vários modos de falha, certamente, deve ser também uma proposta muito interessante.

Finalmente, a elaboração de modelos que avaliem com precisão a confiabilidade de sistemas estruturais complexos e os diversos caminhos de falha apresenta-se também como uma importante extensão.

## Referências Bibliográficas

ÁLVARES, M.S. (1993). *Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.

ÁLVARES, M.S. (1999). *Contribuição ao estudo e emprego de modelos simplificados de dano e plasticidade para a análise de estruturas de barras em concreto armado*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

ANG, A.H.-S.; CORNELL, C.A. (1974). *Reliability bases of structural safety and design*. Journal of the Structural Division, ASCE, v.100, n.ST9, september, p.1755-1769.

ANG, A.H.-S.; DE LEON, D. (1997). *Determination of optimal target reliabilities for design and upgrading of structures*. Structural Safety, v.19, n.1, p.91-103.

ARAUJO, J.M.; REAL, M.V. (2002). *Formulações para avaliação da confiabilidade no projeto de pilares de concreto armado*. In: XXX Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural, 27 a 31 de maio, Universidade de Brasília, Brasília, DF-Brasil.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2003). *NBR 6118*: Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento. Rio de Janeiro.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2003). *NBR 8681*: Ações e Segurança nas Estruturas - Procedimento. Rio de Janeiro.

BANGASH, M.Y.H. (1989). *Concrete and concrete structures: numerical modelling and applications*. Elsevier Science Publishers LTD, England, 1989.

BARBOSA, A.F.; RIBEIRO, G.O. (2000). *Modelagem de estruturas de concreto para análise não-linear pelo método dos elementos finitos*. In: IV SIMMEC: Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, Uberlândia, anais p. 370-377.

BERNARDO, T.R.R. (1999). *Contribuição à análise da confiabilidade em pavimentos de edifícios de concreto armado*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

BORGES, J.F. (1997). *Probability based structural codes: past and future*. In: Probabilistic Methods for Structural Design, C. Guedes Soares, Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands, p. 339-350.

BOTTA, A.S. (1998). *Calculo de esforços e deslocamentos em estruturas reticuladas considerando a mecânica do dano no contínuo para a modelagem do concreto armado*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

BRANCO, A.L.L.V. (2002). *Análise não-linear de pórticos planos considerando os efeitos do cisalhamento no cálculo dos esforços e deslocamentos*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

BRANSON, D.E. (1966). *Deflections of reinforced concrete flexural members*. ACI Journal, June.

BREITUNG, K.; IBRAHIM, Y. (1994). *Problems of statistical inference in structural reliability*. Structural Safety & Reliability. In: Schueller, Shinozuka & Yao, Balkema, Rotterdam, p.1223-1226.

BUCHER, C.G.; BOURGUND, U. (1990). *A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems*. Structural Safety, v.7, p.57-66.

BUCHER, C.G.; SCHUELLER, G.I. (1994). *Systems reliability: Revisited*. Structural Safety & Reliability. In: Schueller, Shinozuka & Yao, Balkema, Rotterdam, p.1227-1231.

CASTILLO, E.; CONEJO, A.J.; MINGUEZ, R.; CASTILLO, C. (2003). *An alternative approach for addressing the failure probability – safety factor method with sensitivity analysis*. Reliability Engineering & Safety System, v82, p.207-216.

CASTRO, L.A. (1997). *Análise da segurança no projeto de estruturas: método dos estados limites*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

CHAKRABARTY, B.K. (1992). *A model for optimal design of reinforced concrete beam*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.118, n.11, novembro, p. 3238-3242.

CHAVES, I.A. (2004). *Otimização de pilares de concreto armado mediante uniformização do índice de confiabilidade*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

CHEN, W.; YAMAGUCHI, E.; KOTSOVOS, M.D.; PAN, A.D. (1991). *Constitutive models*. In: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures II – Proceedings of the International Workshop. Edited by J. Isenberg, charmain, ASCE/ACI 477, New York 1991.

CILONI, A.D. (1993). *Sobre o comportamento em serviço de estruturas planas de concreto armado*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.

COHN, M.Z.; FELLOW; DINOVTIZER, A.S. (1994). *Application of structural optimization*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.120, n.2, p. 617-650, Feb.

COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON (1990). *CEB-FIP model code 1990*. Bulletin d'Information 203 e 204.

COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON (1995). *New Developments in Non-Linear Analysis Methods*. Bulletin d'Information 229.

COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON. *Design Manual Cracking and Deformations*. Bulletin d'Information 158<sup>e</sup>.

CORNELL, C.A. (1969). *A probability-based structural code*. ACI Journal, p.974-985.

CORREA, M.R.S. (1991). *Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

DEBERNARDI, P.G. (1983). *La Deformazione Differita in C. A. Sogette a Fessurazione: Considerazione sui metodi Approssimati di Calcolo*. L'Industria italiana del cemento. Roma. V.7/8, p. 499-510.

DITLEVSEN, O.; & BJERAGER, P. (1984). *Reliability of highly redundant plastic structures*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, v.110, n. 5, maio, p. 671-693.

DRIEMEIER, L. (1995). *Considerações sobre a fadiga em metais e o comportamento do concreto sob solitação cíclica*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1995.

DUPRAT, F.; PINGLOT, M.; LORRAIN, M. (1994). *Reliability analysis of reinforced concrete columns*. Structural Safety & Reliability. In: Schueller, Shinozuka & Yao, Balkema, Rotterdam, p.1249-1255.

ENEVOLDSEN, I.; FABER, M.H.; SORENSEN, J.D. (1994). *Adaptive response surface techniques in reliability estimation*. Structural Safety & Reliability. In: Schueller, Shinozuka & Yao, Balkema, Rotterdam, p.1257-1264.

FALSONE, G.; IMPOLLONIA, N. (2004). *About accuracy of a novel response surface method for the analysis of finite element modeled uncertain structures*. Probabilistic Engineering Mechanics, v19, p.53-63.

FRANGOPOL, D.M. (1985). *Sensitivity of reliability-based optimum design*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.111, n. 8, agosto, p. 1703-1721.

FRANGOPOL, D.M.; MAUTE, K. (2003). *Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures*. Computers & Structures, v.81, p. 397-410.

FREUDENTHAL, A.M. (1947). *The safety of structures*. Transactions of ASCE, v112, p.125-180.

FUSCO, P.B. (1974). *Contribuição ao estudo da verificação da segurança das estruturas de concreto*. Livre Docência (Tese) – Escola Politécnica de São Paulo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1974.

FUSCO, P.B. (1976). *Estruturas de concreto. Fundamentos do projeto estrutural*. São Paulo. Mcgraw-Hill do Brasil. Editora da Universidade de São Paulo, 1976.

FUSCO, P.B. (1977). *Estruturas de concreto. Fundamentos estatísticos da segurança das estruturas*. Brasil, Mcgraw-Hill, 1977.

GALVÃO, A.S.; SILVEIRA, R.A.M. (2000). *Formulações geometricamente não-lineares para sistemas reticulados esbeltos*. In: IV SIMMEC: Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, Uberlândia, anais p. 449-457.

GAYTON, N.; BOURINET, J.M.; LEMAIRE, M. (2003). *CQ2RS: a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis*. Structural Safety, v. 25, issue 1, janeiro, p. 99-121.

GHALI, A. & FAVRE, R. (1986). *Concrete structures: structures and deformation*. London, Chapman & Hall.

GIONGO, J.S. (2002). *Concreto Armado: Projeto Estrutural de Edifícios*. Notas de Aula - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

GIONGO, J.S.; MALITE, M. (1999). *Segurança nas estruturas de concreto armado*. In: Nova Normalização Brasileira para o Concreto Estrutural, Emil Sanchez, Universidade Federal de Juiz de Fora, Capítulo 05, p. 71-101.

GOMES, H.M.; AWRUCH, A.M. (2004). *Comparações entre diferentes técnicas para a análise da confiabilidade estrutural*. In: XXXI Jornadas Sud-Americanas de Ingeniería Estructural, 17 a 21 de maio, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina.

GRIGORIU, M.; VENEZIANO, D.; CORNELL, C.A. (1979). *Probabilistic modeling as decision making*. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.105, n.EM4, august, p.585-596.

GUPTA, S.; MANOHAR, C.S. (2004). *An improve response surface method for the determination of failure probability and importance measures*. Structural Safety, v.26, p. 123-139.

HASOFER, A.M.; LIND, N.C. (1974). *Exact and invariant second moment code format*. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, v.100, n.EM1, february, p.111-121.

HENRIQUES, A.A.R. (1998). *Texto de apoio à disciplina Segurança Estrutural*. Curso de Mestrado em Estruturas de Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Portugal, 1998.

JCSS – Joint Committee on Structural Safety. *Background Documentation*. Eurocode 1 (ENV 1991). Part 1: Basis of Design. Working Document. March, n.94, edition 1, 1996.

KACHANOV, L.M. (1958). *On the time to failure under creep conditions*. IZV. Akad. Nauk. SSR, Otd. Tekhn. N.8, p. 26-31, 1958.

KANDA, J.; ADACHI, T. (2001). *Influence of probability distribution of loads on optimum reliability*. Reliability Engineering & System Safety, v. 73, issue 3, setembro, p. 197-204.

KAYMAZ, I.; MCMAHON, C.; MENG, X. (1998). *Reliability based structural optimization using the response surface method and Monte Carlo simulation*. In: 8<sup>th</sup> International Machine Design and Production Conference, Ankara, Turkey.

KENT, D.C.; PARK, R. (1971). *Flexural members with confined concrete*. Journal of Structural Division (ASCE) v.97, n. ST7, p. 1969-1990, July.

KHARMANDA, M.G. (2003). *Optimization et CAO des structures faibles*. Clermont Ferrant, 2003. European Ph.D. Thesis, Ecole Doctorale Sciences pour L'Ingenieur de Clermont Ferrant, Université Blaise Pascal – Clermont II.

KIM, S.-H.; NA, S.-W. (1997). *Response surface method using vector projected sampling points*. Structural Safety, v.19, n.1, p.3-19.

KRIPKA, M. (1998). *Determinação do posicionamento ótimo dos apoios em edificações analisadas pelo modelo de gralha*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

LABBANE, M.; SAHA, N.K.; TINGE, C. (1993). *Yield criterion and loading function for concrete plasticity*. International Journal of Solids & Structures, v.30, p. 1269-1288.

LABEYRIE, J. (1997). *Response Surface Methodology in structural reliability*. In: Probabilistic Methods for Structural Design, C. Guedes Soares, Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands, p. 39-58.

LEMAIRE, M. (1997). *Reliability and Mechanical Design*. Reliability Engineering & System Safety, v.55, n.1, p. 163-170.

LEMAIRE, M. (1998). *Finite element and reliability: combined methods by response surface*. G.N. Frantziskonis (ed.), PROBAMAT – 21<sup>st</sup> Century: Probability and Materials, p. 317-331.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.C. (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Paris, Dunod-Bordas.

MADSEN, H.O. (1988). *Omission sensitivity factors*. Structural Safety, v.5, issue 1, january, p.34-45.

MAHADEVAN, S.; CRUSE, T.A. (1994). *System reliability computational under progressive damage*. Structural Safety & Reliability. In: Schueller, Shinozuka & Yao, Balkema, Rotterdam, p.1287-1292.

MAZARS, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6, Paris, 1984.

MAZZILI, C.E.N. (1986). *Comportamento não-linear de pórticos planos em regime elástico-linear*. In: Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, 7, São Carlos, anais v.1, p. 381-395.

MEHTA, P.K.; MONTEIRO, P.J.M. (1994). *Concreto: estruturas, propriedades e materiais*. Editora Pini, São Paulo, 1994.

- MELCHERS, R.E. (1983). *Reliability of parallel structural systems*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.109, n.11, november, p.2651-2665.
- MELCHERS, R.E.; AHAMMED, M. (2001). *Estimation of failure probabilities for intersections of non-linear limit states*. Structural Safety, v.23, issue 2, p. 123-135.
- MOHAMED, A. (1996). *RYFES Theoretical manual version 1.0*. LaRAMA – Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée. Clermont Ferrant, France, 1996.
- MOHAMED, A. (1999). *RYFES Theoretical manual version 1.0*. LaRAMA – Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée. Clermont Ferrant, France, 1999.
- MOHAMED, A.; SOARES, R.C.; VENTURINI, W.S. (2001). *Partial safety factors for homogeneous reliability of nonlinear reinforced concrete columns*. Structural Safety, v.23, issue 2, p.137-156.
- NEVES, R.A. (2000). *Cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas de pisos de edifícios considerando-se a influência das tensões cisalhantes*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.
- NEVES, R.A. (2004). *Desenvolvimento de modelos mecânico-probabilísticos para estruturas de pavimentos de edifícios*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- NEVES, R.A.; MOHAMED, A.; VENTURINI, W.S. (2004). *Análise de confiabilidade em estruturas de barras com não-linearidade física utilizando método de Monte Carlo e RSM*. In: XXXI Jornadas Sud-Americanas de Ingeniería Estructural, 17 a 21 de maio, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina.
- NEVILLE, A.M. (1923). *Propriedades do Concreto*. Tradução: Salvador Giammusso, 2ª edição, revisão atual, São Paulo, Pini, 1997.
- NILSEN, T.; GUDMESTAD, O.T.; DALANE, J.I.; RETTEDAL, W.K.; AVEN, T. (1998). *Utilization of principles from structural reliability in quantitative risk analysis: example of an offshore transport problem*. Reliability Engineering & System Safety, v.60, n.1-2, p.127-137.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S.J. (1999). *Numerical optimization*. In: Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag New York.
- NOWAK, A.S.; COLLINS, K.R. (2000). *Reliability of structures*. Michigan: MacGraw Hill.
- O'CONNOR, P. (1998). *Standards in Reliability and Safety Engineering*. Reliability Engineering & System Safety, v.60, n.2, p.173-178.
- OLIVEIRA, R.S. (2001). *Análise de pavimentos de edifícios de concreto armado com a consideração da não-linearidade física. Modelagem e metodologia de aplicação à projetos*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.
- OWEN, D.R.J.; HINTON, H. (1980). *Finite elements in plasticity*. Swansea, U.K, Pineridge Press.

- PAPAZOGLU, I.A. (1998). *Fuctional block diagrams and automated construcion of event trees*. Reliability Engineering & System Safety, v.61, n.3, p.185-214.
- PAULA, C.F. (2001). *Contribuição ao estudo das respostas numéricas não-lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.
- PEREZ, G.P.; VASCONCELOS FILHO, A. (2000). *Comparação de modelos clássicos para cálculo da estrutura de um edifício de andares múltiplos*. In: IV SIMMEC: Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, Uberlândia, anais p. 259-266.
- PIMENTA, P.M. (1986). *Aspectos da análise não-linear de estruturas reticuladas*. In: Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, 7, São Carlos, anais v.1, p. 449-464.
- PINTO, R.S. (2002). *Análise não-linear das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.
- PITUBA, J.J.C. (1998). *Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto, fundamentados na Mecânica do Dano Contínuo*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.
- PITUBA, J.J.C. (2003). *Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- PROENÇA, S.P.B. (2001). *Análise Não-Linear de Estruturas*. Notas de Aula - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.
- PROENÇA, S.P.B. (1988). *Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.
- RACHID, M.; MORI, D.D. (2000). *Instabilidade: Conceitos – Aplicação na flambagem por flexão*. Notas de Aula - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo.
- RACKWITZ, R. (2001). *Reliability analysis – a review and some perspectives*. Structural Safety, v.23, issue 4, p. 365-395.
- RACKWITZ, R.; FIESSLER, B. (1978). *Structural reliability under combined random load sequences*. Computer and Structures, v.9, p.489-494.
- REAL, M.V.; CAMPOS FILHO, A. (2000). *Análise probabilística de estruturas de concreto armado*. Teoria e Prática na Construção Civil, número 1, p. 37-46.
- ROYSET, J.O.; DER KIUREGHIAN, A.; POLAK, E. (2001). *Reliability-based optimal structural design by the decoupling approach*. Reliability Engineering & System Safety, v.73, p. 213-221.

- ROYSET, J.O.; DER KIUREGHIAN, A.; POLAK, E. (2001). *Reliability-based optimal design of series structural systems*. Journal of Engineering Mechanics, v.127, n.6, June, p.607-614.
- SALES, J.J.; MALITE, M.; GONÇALVES, R.M. (2004). *Segurança nas Estruturas*. Notas de Aula - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, São Paulo.
- SANCHES JUNIOR, F. (1998). *Cálculo dos esforços e deslocamentos em pavimentos de edifícios considerando-se modelos próprios para o concreto armado*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.
- SANCHES JUNIOR, F. (2003). *Desenvolvimento de modelos numéricos para a análise de estruturas de pavimentos de edifícios*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- SANTOS, L.M. (1977). *Cálculo de concreto armado segundo a NB-1/76 e o CEB/72*. São Paulo, Edgard Blucher, v.1, 1977.
- SELLIER, A.; PINGLOT, M.; LORRAIN, M.; MÉBARKI, A. (1994). Structural Safety & Reliability. In: Schueller, Shinozuka & Yao, Balkema, Rotterdam, p.1329-1336.
- SILVA, R.M. (1996). *Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado: modelagem numérica e avaliação dos métodos aproximados*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.
- SOARES, R.C. (1997). *Otimização de seções transversais de concreto armado sujeitas à flexão: aplicação à pavimentos*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.
- SOARES, R.C. (2001). *Um estudo sobre modelos mecânico-probabilísticos para pórticos de concreto armado*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.
- SOARES, R.C.; MOHAMED, A.; VENTURINI, W.S. LEMAIRE, M. (2002). *Reliability Analysis of Non-Linear Reinforced Concrete Frames using the Response Surface Method*. Reliability Engineering & System Safety, v.75, p.1-16.
- SRIVIDYA, A.; RANGANATHAN, R. (1995). *Reliability based optimal design of reinforced concrete frames*. Computers & Structures, v.57, issue 4, p.651-661.
- STREICHER, H.; RACKWITZ, R. (2004). *Time-variant reliability-oriented structural optimization and a renewal model for life-cycle costing*. Probabilistic Engineering Mechanics, v.19, p. 171-183.
- TURK, G.; RAMIREZ, M.R.; COROTIS, R.B. (1994). *Structural reliability analysis of nonlinear systems*. Structural Safety & Reliability. In: Schueller, Shinozuka & Yao, Balkema, Rotterdam, p.1345-1352.
- ZAGOTTIS, D. A. (1974). *Introdução da segurança no projeto estrutural*. Construção pesada. São Paulo.



# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)