

**ANÁLISE PROBABILÍSTICA DO COMPORTAMENTO
AO LONGO DO TEMPO DE ELEMENTOS
PARCIALMENTE PRÉ-MOLDADOS COM ÊNFASE EM
FLECHAS DE LAJES COM ARMAÇÃO TRELIÇADA**

Andrei José Merlin

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: Mounir Khalil El Debs

São Carlos

2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

M565a Merlin, Andrei José
Análise probabilística do comportamento ao longo do
tempo de elementos parcialmente pré-moldados com ênfase
em flechas de lajes com armação treliçada / Andrei José
Merlin. -- São Carlos, 2006.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de São
Carlos-Universidade de São Paulo, 2006.

Área: Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Mounir Khalil El Debs.

1. Análise probabilística. 2. Comportamento ao longo
do tempo. 3. Elementos parcialmente pré-moldados. 4. Laje
pré-moldada. 5. Flecha diferida. I. Título.

*À minha esposa Fabiana e
Ao meu filho Gabriel*

AGRADECIMENTOS

A Deus que me deu coragem e sabedoria para enfrentar todos os obstáculos da minha vida.

Ao professor Mounir Khalil El Debs pela dedicação, compressão e orientação prestadas na elaboração deste trabalho.

A minha família que sempre me incentivou e compreendeu os momentos em que estive ausente.

Ao professor Antonio R. Marí, do Departamento de Engenharia da Universidade Politécnica da Catalunha, por disponibilizar o acesso e utilização do programa computacional CONSNOU, utilizado na análise numérica.

Aos professores João Bento de Hanai e Paulo de Mattos Pimenta pelas sugestões dadas ao trabalho no Exame de Qualificação.

A todos os colegas do Departamento de Estruturas, em especial, Rodrigo Delalibera, Fernando Menezes, Ricardo Carrazedo, Jorge Góes e Gustavo Tristão pelo convívio e amizade desde o curso de mestrado.

Aos professores e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC/USP pela colaboração.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, pela bolsa de estudo concedida.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE TABELAS	vii
RESUMO	xi
ABSTRACT	xiii

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Justificativas	3
1.4 Metodologia	3
1.5 Apresentação do trabalho	4

CAPÍTULO 2: COMPORTAMENTO REOLÓGICO DO CONCRETO

2.1 Considerações iniciais	7
2.2 Modelos reológicos	14
2.2.1 <i>Elementos fundamentais dos modelos reológicos</i>	15
2.2.2 <i>Modelos reológicos básicos</i>	16
2.2.2.1 <i>Modelo de Maxwell</i>	16
2.2.2.2 <i>Modelo de Kelvin</i>	17
2.2.2.3 <i>Modelo de Boltzmann</i>	18
2.2.2.4 <i>Modelo de Burger</i>	19
2.3 Modelos para a previsão da fluência e retração	21
2.3.1 <i>Definições</i>	21
2.3.1.1 <i>Deformação total e deformação por fluência</i>	21
2.3.1.2 <i>Coeficiente de fluência</i>	21
2.3.1.3 <i>Fluência específica</i>	22
2.3.1.4 <i>Função fluência</i>	22
2.3.2 <i>Modelo CEB-90 (1991)</i>	23

2.3.2.1 <i>Fluência</i>	23
2.3.2.2 <i>Retração</i>	26
2.3.3 <i>Modelo ACI-209 (1992)</i>	28
2.3.3.1 <i>Fluência</i>	28
2.3.3.2 <i>Retração</i>	30
2.3.4 <i>Modelo NBR 6118 (2003)</i>	32
2.3.4.1 <i>Fluência</i>	32
2.3.4.2 <i>Retração</i>	36
2.3.5 <i>Comparação entre os modelos</i>	37
2.4 <i>Métodos de análise da fluência</i>	42
2.4.1 <i>Formulação integral</i>	43
2.4.1.1 <i>Método incremental ou método passo a passo</i>	43
2.4.1.2 <i>Método do Módulo Efetivo (EM method)</i>	45
2.4.1.3 <i>Método da Tensão Média</i>	46
2.4.1.4 <i>Método do Módulo Efetivo Ajustado (AAEM method)</i>	47
2.4.2 <i>Formulação diferencial</i>	48
2.4.2.1 <i>Método de Dischinger ou método da razão de fluência (Rate of creep method)</i>	49
2.4.2.2 <i>Método da razão da deformação lenta irreversível (Rate of flow method)</i>	52
2.4.2.3 <i>Método de Dischinger melhorado (Improved Dischinger method)</i>	54
2.4.3 <i>Método dos núcleos degenerados</i>	55

CAPÍTULO 3: ANÁLISE NUMÉRICA

3.1 <i>Considerações iniciais</i>	57
3.2 <i>Propriedades dos materiais</i>	59
3.3 <i>Comportamento diferido do concreto</i>	62
3.4 <i>Elemento finito</i>	63
3.5 <i>Efeito da protensão</i>	66
3.6 <i>Processo construtivo</i>	68
3.7 <i>Solução do algoritmo</i>	71
3.8 <i>Avaliação do modelo</i>	73

3.8.1 Ensaaios de curta duração de lajes contínuas	73
3.8.2 Ensaaios de longa duração de lajes	80
3.8.3 Ensaaios de longa duração de vigas reforçadas á flexão	86

CAPÍTULO 4: ANÁLISE PROBABILÍSTICA

4.1 Considerações iniciais	97
4.2 Conceitos básicos e definições	100
4.3 Simulação de Monte Carlo	109
4.3.1 Parâmetros do sistema e suas propriedades estatísticas	111
4.3.2 Amostragem por Hipercubo Latino	114
4.4 Exemplos	126
4.4.1 Exemplo 1: Viga reforçada à flexão	126
4.4.2 Exemplo 2: Viga reforçada à flexão com continuidade estrutural posterior	131

CAPÍTULO 5: ANÁLISE DAS FLECHAS DIFERIDAS EM LAJES PRÉ-MOLDADAS

5.1 Considerações iniciais	139
5.1.1 Cálculo da flecha	143
5.1.1.1 Cálculo da flecha imediata	144
5.1.1.2 Cálculo da flecha diferida no tempo	146
5.1.2 Combinações de ações	148
5.1.3 Deslocamentos limites	150
5.2 Análise preliminar	153
5.2.1 Características das lajes	153
5.2.2 Processo construtivo da laje pré-moldada	155
5.2.3 Parâmetros adotados	156
5.2.4 Descrição das modelagens numéricas	158
5.2.5 Resultados obtidos	160
5.3 Análise determinística	166
5.3.1 Coeficiente multiplicador básico	166

5.3.2 <i>Influência da umidade relativa e temperatura no coeficiente multiplicador</i>	174
5.4 Análise probabilística	178
5.5 Laje contínua	186
5.6 Exemplos de cálculo	189
5.6.1 <i>Laje com vão pequeno</i>	189
5.6.2 <i>Laje com vão médio</i>	191
5.6.3 <i>Laje com vão grande</i>	193
5.7 Análise dos resultados e comentários	195
CAPÍTULO 6: CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES	199
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	205
APÊNDICE A - Resultados obtidos para a determinação do coeficiente multiplicador básico	
APÊNDICE B - Resultados obtidos para a determinação do coeficiente $\alpha_{U,T}$	

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1	Tipos de água associados ao silicato de cálcio hidratado [MEHTA & MONTEIRO (1994)]	8
FIGURA 2.2	Retração e fluência com o tempo [adaptado de LEONHARDT & MÖNNING (1978)]	13
FIGURA 2.3	(a) Modelo de Maxwell, (b) Modelo de Kelvin, (c) Modelo de Boltzmann, (d) Modelo de Burger	16
FIGURA 2.4	Regime viscoelástico de Maxwell	17
FIGURA 2.5	Regime viscoelástico de Kelvin	18
FIGURA 2.6	Regime viscoelástico de Boltzmann	19
FIGURA 2.7	Regime viscoelástico de Burger	20
FIGURA 2.8	Curvas de função fluência	23
FIGURA 2.9	Variação de $\beta_f(t)$	35
FIGURA 2.10	Variação de $\beta_s(t)$	37
FIGURA 2.11	Influência da idade de aplicação da carga no coeficiente de fluência último; $U = 60\%$ e $A_c/u_{ar} = 250\text{mm}$	38
FIGURA 2.12	Influência da umidade relativa no coeficiente de fluência último; $A_c/u_{ar} = 250\text{mm}$	38
FIGURA 2.13	Influência das dimensões da peça no coeficiente de fluência último; $U = 60\%$	39
FIGURA 2.14	Comparação dos modelos de fluência com resultados de ensaios para a idade de carregamento de sete dias [HASPARYK et al. (2005)]	40
FIGURA 2.15	Comparação dos modelos de fluência com resultados de ensaios para a idade de carregamento de 28 dias [HASPARYK et al. (2005)]	40
FIGURA 2.16	Influência da umidade relativa na deformação por retração última; $A_c/u_{ar} = 250\text{mm}$	41

FIGURA 2.17	Influência das dimensões da peça na deformação por retração última; $U = 60\%$	41
FIGURA 2.18	Evolução da deformação por retração com o tempo; $U = 60\%$ e $A_c/u_{ar} = 250\text{mm}$	42
FIGURA 2.19	Definição dos intervalos para o método incremental [adaptado CEB (1984)] (a) Tensões no decorrer do tempo; (b) Curvas de funções fluência; (c) Função fluência x variação de tensão	44
FIGURA 2.20	Método do módulo efetivo [adaptado CEB (1984)]	45
FIGURA 2.21	Método da tensão média [adaptado CEB (1984)]	47
FIGURA 2.22	Método do módulo efetivo ajustado [adaptado CEB (1984)]	48
FIGURA 2.23	Curvas de função fluência segundo o método da razão de fluência	49
FIGURA 2.24	Relação entre deformação e tempo para uma carga unitária aplicada entre t e t_0 segundo o método da razão de fluência [adaptado DILGER (1982b)]	51
FIGURA 2.25	Relação entre deformação e tempo para uma carga unitária aplicada entre t e t_0 segundo o método da deformação lenta irreversível [adaptado DILGER (1982b)]	53
FIGURA 2.26	Modelo generalizado de Kelvin	56
FIGURA 3.1	Elemento finito	60
FIGURA 3.2	Diagrama tensão x deformação uniaxial do concreto	61
FIGURA 3.3	Diagrama tensão x deformação uniaxial do aço da armadura passiva	61
FIGURA 3.4	Diagrama tensão x deformação uniaxial do aço de protensão	62
FIGURA 3.5	Elemento finito com armadura de protensão	64
FIGURA 3.6	Deformação de um segmento de cabo de protensão	67
FIGURA 3.7	Relaxação com deformação variável	68
FIGURA 3.8	Estrutura construída sequencialmente	70
FIGURA 3.9	Fluxograma simplificado	71
FIGURA 3.10	Características geométricas (dimensões em cm)	74

FIGURA 3.11	Detalhes da vigota, nervura transversal e viga de apoio (dimensões em cm)	74
FIGURA 3.12	Sistema de aplicação do carregamento (dimensões em cm) ..	75
FIGURA 3.13	Deslocamentos experimentais - M15	77
FIGURA 3.14	Deslocamentos experimentais - M40	77
FIGURA 3.15	Deslocamentos experimentais – Mac	78
FIGURA 3.16	Discretização longitudinal (dimensões em cm)	78
FIGURA 3.17	Discretização da seção transversal (dimensões em cm)	78
FIGURA 3.18	Comparação entre os deslocamentos experimentais e da análise numérica – M15	79
FIGURA 3.19	Comparação entre os deslocamentos experimentais e da análise numérica – M40	80
FIGURA 3.20	Comparação entre os deslocamentos experimentais e da análise numérica – Mac	80
FIGURA 3.21	Características geométricas (dimensões em cm)	81
FIGURA 3.22	Valores máximos e mínimos da umidade ambiente	82
FIGURA 3.23	Valores máximos e mínimos da temperatura ambiente	82
FIGURA 3.24	Flechas obtidas durante o ensaio	83
FIGURA 3.25	Discretização longitudinal (dimensões em cm)	84
FIGURA 3.26	Discretização da seção transversal (dimensões em cm)	84
FIGURA 3.27	Evolução da flecha (laje L1)	85
FIGURA 3.28	Evolução da flecha (laje L2)	85
FIGURA 3.29	Evolução da flecha (laje L3)	86
FIGURA 3.30	Características geométricas (dimensões em cm)	87
FIGURA 3.31	Sistema de aplicação do carregamento (dimensões em cm) ..	88
FIGURA 3.32	Evolução da força vertical	89
FIGURA 3.33	Valores da umidade ambiente durante o ensaio	90
FIGURA 3.34	Valores da temperatura ambiente durante o ensaio	90
FIGURA 3.35	Flechas obtidas durante o ensaio	92
FIGURA 3.36	Discretização longitudinal (dimensões em cm)	92
FIGURA 3.37	Discretização da seção transversal (dimensões em cm)	93
FIGURA 3.38	Evolução da força vertical utilizada na análise numérica	93

FIGURA 3.39	Evolução da flecha (viga V1)	94
FIGURA 3.40	Evolução da flecha (viga V2)	95
FIGURA 4.1	Diagrama de Euler ou Venn	100
FIGURA 4.2	Mapeamento de eventos através da variável aleatória X [adaptado ANG & TANG (1975)]	101
FIGURA 4.3	Distribuições de probabilidade [adaptado ANG & TANG (1975)]	103
FIGURA 4.4	Função de densidade de probabilidade da distribuição normal padronizada	105
FIGURA 4.5	Função de probabilidade conjunta	106
FIGURA 4.6	Coefficiente de correlação [ANG & TANG (1975)]	109
FIGURA 4.7	Modelagem das incertezas	110
FIGURA 4.8	Divisão do domínio da variável estatística em intervalos de igual probabilidade	114
FIGURA 4.9	Divisão do domínio da variável estatística em 16 intervalos	116
FIGURA 4.10	Gráficos de probabilidade normal para a flecha	120
FIGURA 4.11	Teste de Kolmogorov-Smirnov [adaptado ANG & TANG (1975)]	121
FIGURA 4.12	Teste de Kolmogorov-Smirnov para a flecha	129
FIGURA 4.13	Limites de confiança para a flecha	130
FIGURA 4.14	Coefficiente de regressão padronizado para a flecha da viga aos 40 e 103 dias	130
FIGURA 4.15	Coefficiente de correlação parcial para a flecha da viga aos 40 e 103 dias	131
FIGURA 4.16	Etapas construtivas da viga	131
FIGURA 4.17	Teste de Kolmogorov-Smirnov para a flecha	134
FIGURA 4.18	Limites de confiança para a flecha	134
FIGURA 4.19	Teste de Kolmogorov-Smirnov para o momento fletor no apoio	135
FIGURA 4.20	Limites de confiança para o momento fletor no apoio	135
FIGURA 4.21	Coefficiente de regressão padronizado para a flecha da viga aos 103 dias	136

FIGURA 4.22	Coeficiente de correlação parcial para a flecha da viga aos 103 dias	136
FIGURA 4.23	Coeficiente de regressão padronizado para o momento fletor no apoio aos 103 dias	137
FIGURA 4.24	Coeficiente de correlação parcial para o momento fletor no apoio aos 103 dias	137
FIGURA 5.1	Laje formada por nervuras pré-moldadas [EL DEBS (2000)]	140
FIGURA 5.2	Seção transversal da vigota treliçada e perspectiva da armação treliçada	142
FIGURA 5.3	Valores do coeficiente β	144
FIGURA 5.4	Seção transversal das lajes (dimensões em cm)	154
FIGURA 5.5	Vigota (dimensões em cm)	154
FIGURA 5.6	Processo construtivo da laje pré-moldada	156
FIGURA 5.7	Discretização da seção transversal das lajes (dimensões em cm)	158
FIGURA 5.8	Discretização longitudinal das lajes de 200 e 250cm	159
FIGURA 5.9	Variação do coeficiente multiplicador para a situação 1	164
FIGURA 5.10	Variação do coeficiente multiplicador para a situação 2	164
FIGURA 5.11	Variação do coeficiente multiplicador para a situação 1	165
FIGURA 5.12	Variação do coeficiente multiplicador para a situação 2	165
FIGURA 5.13	Coeficiente multiplicador	170
FIGURA 5.14	Regressão linear dos resultados	171
FIGURA 5.15	Resíduo da regressão	171
FIGURA 5.16	Coeficiente multiplicador para a laje LT12	172
FIGURA 5.17	Coeficiente multiplicador para a laje LT16	172
FIGURA 5.18	Coeficiente multiplicador para a laje LT20	173
FIGURA 5.19	Coeficiente multiplicador para a laje LT25	173
FIGURA 5.20	Coeficiente multiplicador para a laje LT30	174
FIGURA 5.21	Coeficiente $\alpha_{U,T}$	175
FIGURA 5.22	Regressão não-linear do coeficiente $\alpha_{U,T}$	176
FIGURA 5.23	Regressão linear do coeficiente $\alpha_{U,T}$	177

FIGURA 5.24	Distribuição uniforme no quadrado unitário	180
FIGURA 5.25	Distribuição dos pares de resistências	180
FIGURA 5.26	Coefficiente de regressão padronizado para o coeficiente multiplicador α	181
FIGURA 5.27	Coefficiente de correlação parcial para o coeficiente multiplicador α	181
FIGURA 5.28	Gráficos de probabilidade normal para o coeficiente multiplicador	182
FIGURA 5.29	Regressão do coeficiente $\varphi_{U,T}$ com 95% probabilidade	184
FIGURA 5.30	Regressão do coeficiente $\varphi_{U,T}$ com 90% probabilidade	184
FIGURA 5.31	Regressão do coeficiente $\varphi_{U,T}$ com 85% probabilidade	184
FIGURA 5.32	Relação entre os coeficientes multiplicadores (contínua e biapoiada) – condição 1	187
FIGURA 5.33	Relação entre os coeficientes multiplicadores (contínua e biapoiada) – condição 2	188
FIGURA 5.34	Relação entre os coeficientes multiplicadores (contínua e biapoiada) – condição 3	188
FIGURA 5.35	Seção transversal da laje com vão pequeno (dimensões em cm)	189
FIGURA 5.36	Seção transversal da laje com vão médio (dimensões em cm)	192
FIGURA 5.37	Seção transversal da laje com vão grande (dimensões em cm)	194

LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1	Coeficiente de espessura média	29
TABELA 2.2	Coeficiente de idade para a retração	31
TABELA 2.3	Coeficiente de espessura média	31
TABELA 2.4	Valores da fluência e da retração em função da velocidade de endurecimento do cimento	33
TABELA 2.5	Valores numéricos usuais para a determinação da fluência e da retração	34
TABELA 3.1	Armadura de flexão dos modelos	75
TABELA 3.2	Características mecânicas do concreto	76
TABELA 3.3	Características da armadura negativa	76
TABELA 3.4	Características das lajes	81
TABELA 3.5	Características mecânicas do concreto	83
TABELA 3.6	Disposição da armadura passiva	87
TABELA 3.7	Etapas do ensaio	89
TABELA 3.8	Características mecânicas do concreto	91
TABELA 3.9	Características mecânicas da armadura passiva	91
TABELA 3.10	Características mecânicas da armadura ativa	91
TABELA 4.1	Valores críticos D_N^α no Teste de Kolmogorov-Smirnov [ANG & TANG (1975)]	122
TABELA 4.2	Permutações geradas aleatoriamente dos inteiros 1, 2,..., 16	127
TABELA 4.3	Valores dos parâmetros no centróide dos intervalos	128
TABELA 4.4	Grupo de valores dos parâmetros de entrada gerados aleatoriamente	128
TABELA 4.5	Permutações geradas aleatoriamente dos inteiros 1, 2,..., 16	132
TABELA 4.6	Grupo de valores dos parâmetros de entrada gerados aleatoriamente	133

TABELA 5.1	Coeficiente dependente do instante de aplicação da carga [EF-96 (1997)]	148
TABELA 5.2	Valores de ψ_1 e ψ_2 , segundo NBR 6118 (2003)	150
TABELA 5.3	Limites para deslocamentos segundo NBR 6118 (2003)	151
TABELA 5.4	Valor do coeficiente C definido pela EF-96 (1997)	152
TABELA 5.5	Característica da treliça eletrosoldada (valores em mm)	155
TABELA 5.6	Situações consideradas para cada tipo de laje	157
TABELA 5.7	Variações consideradas para os parâmetros	157
TABELA 5.8	Variações consideradas para os vãos das lajes	158
TABELA 5.9	Pontos de escoramento das lajes (dimensões em cm)	159
TABELA 5.10	Resultados obtidos para a situação 1 da laje LT12	160
TABELA 5.11	Resultados obtidos para a situação 1 da laje LT16	160
TABELA 5.12	Resultados obtidos para a situação 1 da laje LT20	160
TABELA 5.13	Resultados obtidos para a situação 1 da laje LT25	161
TABELA 5.14	Resultados obtidos para a situação 1 da laje LT30	161
TABELA 5.15	Resultados obtidos para a situação 2 da laje LT12	161
TABELA 5.16	Resultados obtidos para a situação 2 da laje LT16	162
TABELA 5.17	Resultados obtidos para a situação 2 da laje LT20	162
TABELA 5.18	Resultados obtidos para a situação 2 da laje LT25	162
TABELA 5.19	Resultados obtidos para a situação 2 da laje LT30	163
TABELA 5.20	Variação do coeficiente multiplicador em porcentagem	163
TABELA 5.21	Casos analisados para a laje LT12	167
TABELA 5.22	Casos analisados para a laje LT16	167
TABELA 5.23	Casos analisados para a laje LT20	168
TABELA 5.24	Casos analisados para a laje LT25	168
TABELA 5.25	Casos analisados para a laje LT30	169
TABELA 5.26	Casos analisados para a determinação de $\alpha_{U,T}$	175
TABELA 5.27	Casos analisados para a determinação de $\alpha_{U,T}$ (análise probabilística)	178
TABELA 5.28	Propriedades estatísticas das variáveis aleatórias	179
TABELA 5.29	Casos analisados para o caso de lajes contínuas	186

TABELA 5.30	Parâmetros considerados para a laje com vão pequeno	190
TABELA 5.31	Resultados obtidos para a laje com vão pequeno (análise determinística)	191
TABELA 5.32	Resultados obtidos para a laje com vão pequeno (análise probabilística)	191
TABELA 5.33	Parâmetros considerados para a laje com vão médio	192
TABELA 5.34	Resultados obtidos para a laje com vão médio (análise determinística)	193
TABELA 5.35	Resultados obtidos para a laje com vão médio (análise probabilística)	193
TABELA 5.36	Coefficientes multiplicadores obtidos para os exemplos realizados	197

RESUMO

MERLIN, A. J. (2006). *Análise probabilística do comportamento ao longo do tempo de elementos parcialmente pré-moldados com ênfase em flechas de lajes com armação treliçada*. São Carlos, 2006. 212p + apêndice. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar um modelo de análise probabilística do comportamento ao longo do tempo de estruturas de concreto. Para isso, é realizada a análise probabilística em conjunto com análise numérica. A análise numérica é realizada através de um programa computacional, baseado no método dos elementos finitos, que considera o comportamento não-linear e dependente do tempo dos materiais, assim como o processo evolutivo da construção. Para determinar o efeito das incertezas dos parâmetros é realizada uma análise probabilística, utilizando o método de amostragem por hipercubo latino.

O modelo apresentado pode ser aplicado para a análise probabilística do comportamento ao longo do tempo das estruturas de concreto em geral. No entanto, foi aplicado na análise das flechas diferidas de lajes pré-moldadas formadas por vigotas com armação treliçada. Com esta análise, pôde-se propor um coeficiente multiplicador das flechas imediatas para a avaliação das flechas diferidas no tempo.

O coeficiente multiplicador obtido para as lajes pré-moldadas formadas por vigotas com armação treliçada pode alcançar valores muito superiores ao fator α_f recomendado pela NBR 6118 (2003) para o caso de vigas de concreto armado.

Palavras-chaves: Análise probabilística, comportamento ao longo do tempo, elementos parcialmente pré-moldados, laje pré-moldada, flecha diferida.

ABSTRACT

MERLIN, A. J. (2006). *Probabilistic analysis of the long-term behavior of partially precast elements, with emphasis on deflections of slabs with lattice reinforcement*. São Carlos, 2006. 212p + appendix. Thesis (Ph.D.) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

The goal of this research is to present a probabilistic analysis model of the long-term behavior of concrete structures. For that, the probabilistic analysis is carried out together with numerical analysis. The numerical analysis is carried out using a software based on the finite element method that takes into account the nonlinear and time dependent behavior of the materials, as well as the evolutionary construction process. A probabilistic analysis is carried out in order to determine the effects of the uncertainties of the parameters, using latin hypercube sampling method.

The presented model can be applied in the probabilistic analysis of the long-term behavior of concrete structures in general. However, it was applied in the analysis of the long-term deflections of precast slabs made by joist with lattice reinforcement. By this analysis, a multiplier coefficient of immediate deflections to evaluate long-term deflections could be proposed.

The multiplier coefficient obtained for precast slabs made by joist with lattice reinforcement can reach values much higher than the factor α_f recommended by NBR 6118 (2003) for the case of reinforced concrete beams.

Keywords: Probabilistic analysis, long-term behavior, partially precast elements, precast slab, long-term deflection.

1.1 Considerações iniciais

Nos dias de hoje pode-se observar um alto nível de refinamento empregado na análise estrutural, sendo cada vez mais comum a utilização de modelos que consideram a não linearidade física dos materiais, fissuração, fluência e retração do concreto, comportamento elasto-plástico da armadura, relaxação da armadura de protensão, além da influência do processo construtivo no comportamento da estrutura.

Esta evolução nos processos de análise se deve ao grande desenvolvimento computacional ocorrido nas últimas décadas, principalmente o aumento de capacidade de processamento dos microcomputadores de uso pessoal (PC). Este fato permitiu realizar, de forma eficiente, a análise dos mais complexos problemas de engenharia.

Apesar de todo esse avanço, a análise estrutural ainda é normalmente realizada considerando os parâmetros de entrada do problema com base em valores determinísticos, ou seja, não é considerada a variabilidade estatística dos parâmetros. No entanto, a variabilidade estatística deveria ser considerada a fim de minimizar o risco de ocorrência de efeitos significativos para a segurança estrutural [BAZANT & BAWEJA (1995a)].

Portanto, devido às incertezas causadas pela variabilidade estatística dos parâmetros de entrada, a análise estrutural deveria ser realizada considerando tais parâmetros como variáveis aleatórias que possuem um determinado valor médio, uma certa medida de dispersão (desvio padrão) e uma distribuição de probabilidade.

E assim, a resposta da estrutura (deslocamento, reação de apoio, tensão no concreto, por exemplo) também seria uma variável aleatória, que pode ser caracterizada por um valor esperado, desvio padrão e uma distribuição de probabilidade. E a partir da análise da distribuição de probabilidade da resposta, as estruturas seriam projetadas para que certos efeitos extremos, tal como deslocamento máximo ou tensão máxima, tivessem pequena probabilidade especificada de serem ultrapassados.

A partir do exposto acima, o que se pretende com esse trabalho é realizar a análise ao longo do tempo, considerando a variabilidade estatística dos parâmetros de entrada, de elementos estruturais pré-moldados que recebem um concreto moldado no local para completar a seção transversal, ou seja, elementos parcialmente pré-moldados. O modelo apresentado não se aplica somente às estruturas de concreto pré-moldado, mas para a análise dos deslocamentos e esforços ao longo do tempo das estruturas de concreto em geral.

Neste trabalho, o modelo apresentado foi empregado para a análise das flechas de lajes nervuradas formadas por vigotas pré-moldadas com armação treliçada.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é apresentar um modelo para análise do comportamento ao longo do tempo de estruturas de concreto, considerando os parâmetros do problema como variáveis aleatórias, ou seja, mediante análise probabilística.

Os objetivos específicos são:

- Apresentar um modelo para análise probabilística dos deslocamentos e esforços ao longo do tempo de elementos estruturais parcialmente pré-moldados;
- Estudar os efeitos das incertezas estatísticas dos modelos de fluência e retração do concreto nas flechas diferidas de lajes formadas por vigotas pré-moldadas com armação treliçada;

- Fornecer indicações de projeto para lajes formadas por vigotas treliçadas, através da proposta de um coeficiente multiplicador das flechas imediatas para avaliação das flechas diferidas.

1.3 Justificativas

Os avanços da tecnologia dos materiais e das técnicas de análise estrutural proporcionaram uma redução das seções transversais das vigas e das espessuras das lajes. Com isso, embora se tenha obtido uma maior eficiência desses elementos, os pavimentos vêm se tornando cada vez mais flexíveis, e os problemas de deslocamentos excessivos, mais comuns. A necessidade de se efetuar uma avaliação consistente dos deslocamentos passou, então, a ser fundamental para o bom desempenho das estruturas em serviço.

Quando se trata de pavimentos constituídos por lajes pré-moldadas, a questão é ainda mais preocupante, pois este tipo de laje apresenta deformações ainda maiores quando comparada com as lajes maciças. E isto se torna ainda mais crítico quando se considera as deformações ao longo do tempo devidas aos efeitos reológicos do concreto.

Estes aspectos já justificam a importância e relevância de um trabalho de pesquisa desenvolvido para analisar as deformações em lajes pré-moldadas, no entanto, vale ressaltar ainda que não se conhece o efeito da variabilidade estatística dos modelos de fluência e retração do concreto no comportamento de lajes pré-moldadas formadas por vigotas com armação treliçada. Na realidade, as incertezas estatísticas não são consideradas na análise das estruturas de concreto em geral.

1.4 Metodologia

A análise estrutural é realizada utilizando o programa computacional denominado CONSNOU desenvolvido em linguagem FORTRAN pelo Professor Antonio R. Marí do Departamento de Engenharia da Universidade Politécnica da Catalunha, situada em Barcelona – Espanha. Este programa computacional, baseado

no método dos elementos finitos, divide a seção transversal dos elementos em número discreto de filamentos de concreto e aço e a integração das áreas dos filamentos é feita considerando o comportamento não-linear e dependente do tempo dos materiais, assim como o processo evolutivo da construção.

Para determinar o efeito da variabilidade estatística dos parâmetros é realizada uma análise probabilística, utilizando o método de simulações de Monte Carlo. Inicialmente, gera-se um grupo de valores (amostragem) das variáveis aleatórias de acordo com suas correspondentes distribuição de probabilidade, utilizando o método de amostragem por hipercubo latino sugerido por MCKAY et al. (1979). Então, aplica-se a análise estrutural para cada uma das amostras geradas. Cada análise, feita desta forma, chama-se de uma simulação. Após a realização de N simulações, tem-se à disposição um conjunto de dados representando uma resposta da estrutura (deslocamento, reação de apoio, tensão no concreto), que também pode ser tratado como uma variável aleatória, da qual se conhece uma amostra de N componentes. Mediante uma análise estatística desta amostra, torna-se possível caracterizar os principais momentos e o tipo de distribuição de probabilidade desta variável aleatória. Assim, pode-se determinar como a dispersão dos parâmetros da estrutura influencia a variação da resposta.

1.5 Apresentação do trabalho

Esta tese está dividida em seis capítulos, cujo conteúdo é apresentado sucintamente a seguir:

O *capítulo 1* apresenta a introdução do trabalho, objetivos, justificativas e metodologia empregada.

O *capítulo 2* descreve sobre o comportamento reológico do concreto, apresentado ainda os modelos para a previsão da fluência e retração, contidos no CEB-90 (1991), ACI-209 (1992) e NBR 6118 (2003), além dos métodos de análise da fluência.

No *capítulo 3*, são apresentadas as bases do programa computacional CONSNOU, fundamentado no método dos elementos finitos, que foi empregado na

análise numérica. Ainda neste capítulo, é feita uma avaliação do programa computacional através da simulação de modelos reais analisados em laboratório.

O *capítulo 4* detalha o modelo empregado na análise probabilística. O modelo probabilístico é baseado no método de simulação de Monte Carlo, utilizando amostragem por hipercubo latino.

No *capítulo 5*, são apresentadas as lajes formadas por elementos pré-moldados com armação treliçada. Neste capítulo, encontra-se ainda a análise probabilística das flechas diferidas deste tipo de laje. Com esta análise, pôde-se propor um coeficiente multiplicador das flechas imediatas para a avaliação das flechas diferidas no tempo.

Por fim, no *capítulo 6*, apresentam-se as conclusões obtidas com o trabalho, algumas considerações finais e sugestões para pesquisas futuras.

COMPORTAMENTO REOLÓGICO DO CONCRETO

2 CAPÍTULO

2.1 Considerações iniciais

Quando uma carga é aplicada em uma peça de concreto, ocorre uma deformação instantânea seguida de uma deformação com o tempo. Esse aumento da deformação com o tempo sob a ação de cargas permanentes é chamado de *fluência*. Como esse aumento de deformação pode ser várias vezes maior do que a deformação no momento do carregamento, a fluência tem considerável importância no comportamento das estruturas [NEVILLE (1997)]. No entanto, conjuntamente com o comportamento viscoelástico do concreto acontece o fenômeno de *retração por secagem*. Assim, para definir fluência, deve-se considerar duas peças de concreto idênticas sujeitas às mesmas condições ambientais, sendo uma peça carregada e a outra sem carga. A diferença de deformação dessas duas peças define a deformação instantânea mais a deformação por fluência.

As causas dessas variações não-elásticas de deformações estão na microestrutura da matriz de argamassa.

A matriz de argamassa é a pasta de cimento endurecida que envolve e aglutina os agregados. O elemento básico da matriz de argamassa é o gel de cimento. A água contida no gel de cimento apresenta-se de várias formas, sendo que a classificação da água em diversos tipos está baseada no grau de dificuldade ou facilidade com a qual ela pode ser removida. MEHTA & MONTEIRO (1994) classificam a água existente na pasta nos seguintes estados:

a) **Água capilar:** está é a água presente nos vazios maiores que 5 nm. Pode ser descrita como o volume de água que está livre da influência das forças de atração exercidas pela superfície sólida. Na realidade, do ponto de vista do comportamento da pasta, é aconselhável dividir a água capilar em duas categorias: a água em vazios grandes, de diâmetro maior que 50 nm, a qual pode ser considerada como água livre, uma vez que a sua remoção não causa qualquer variação de volume e a água retirada por tensão capilar em capilares pequenos (5 a 50 nm), cuja remoção pode causar a retração do sistema.

b) **Água adsorvida:** é a água que está próxima à superfície do sólido, isto é, sob a influência de forças de atração, as moléculas estão fisicamente adsorvidas na superfície dos sólidos na pasta. Desde que as energias de ligação de moléculas individuais de água diminuem com a distância em relação à superfície do sólido, uma porção da água adsorvida pode ser perdida por secagem, resultando na retração da pasta.

c) **Água interlamelar:** esta é a água associada à estrutura do silicato de cálcio hidratado (C-S-H). A água interlamelar é perdida somente por secagem forte. A estrutura do C-S-H retrai consideravelmente quando a água interlamelar é perdida.

d) **Água quimicamente combinada:** é a água integrante da estrutura de vários produtos hidratados do cimento. Está água não é perdida na secagem. Os diferentes tipos de água associados ao C-S-H estão ilustrados na figura 2.1.

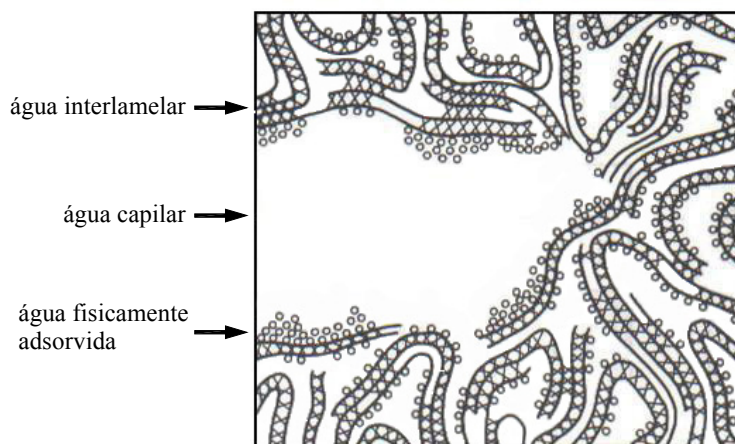


FIGURA 2.1 – Tipos de água associados ao silicato de cálcio hidratado
[MEHTA & MONTEIRO (1994)]

Portanto, o fenômeno da retração por secagem está associado à contração da massa do gel, por ocasião da evaporação da água não fixada quimicamente do gel de cimento. Isso ocorre nas peças de concreto, independentemente do estado de tensões existente, dependendo principalmente dos seguintes fatores:

a) **Características dos agregados:**

A retração no concreto ocorre devido às modificações de volume da pasta de cimento; entretanto, as restrições existentes a essas mudanças de volume alteram o valor das deformações [HASPARYK et al. (2005)]. Segundo NEVILLE (1997), a maior influência é exercida pelo agregado, que restringe a quantidade de retração que poderia efetivamente ocorrer.

A granulometria e dimensão máxima do agregado, por si mesmos, não têm influência sobre a magnitude da retração, mas agregados maiores permitem misturas mais pobres, resultando, portanto, menor retração [NEVILLE (1997)]. De modo semelhante, para uma mesma resistência, um concreto com trabalhabilidade baixa contém maior teor de agregado do que outro com trabalhabilidade alta, com agregado do mesmo tamanho, e, em consequência, o primeiro terá menor retração.

Com relação ao efeito de contenção da retração exercido pelo agregado, as propriedades elásticas do agregado determinam o grau de contenção e, como exemplificado por NEVILLE (1997), agregado de aço resulta uma retração um terço menor do que os agregados comuns.

b) **Teor de cimento e relação água/cimento:**

A influência do consumo de cimento e água no concreto sobre a retração não é direta, pois, à medida que se aumenta a pasta, há um decréscimo na quantidade de agregado, fazendo com que haja um aumento na retração [MEHTA & MONTEIRO (1994)].

O uso de aditivos plastificantes e superplastificantes, em concretos com a mesma composição, faz com que as deformações por retração sejam maiores. Entretanto, com a redução da relação água/cimento conseguida com o uso desses aditivos, o efeito é contrário, pois, para uma mesma resistência desejada, será necessário menos água e, conseqüentemente, haverá menor deformação.

Já as propriedades do cimento têm pequena influência sobre a retração do concreto, segundo NEVILLE (1997). Relatando ainda que uma maior retração da pasta de cimento não significa necessariamente uma retração maior do concreto.

c) Espessura da peça de concreto:

Para que a água no interior do concreto possa migrar para a superfície de um determinado elemento, a espessura da peça influencia a retração aumentando ou diminuindo o caminho a ser percorrido pela água. Quanto menor a distância percorrida, menor será a dificuldade de migração da água e maior a probabilidade de retração [HASPARYK et al. (2005)].

d) Umidade relativa do ambiente:

A umidade relativa do ambiente que circunda o concreto tem muita influência sobre a retração, segundo NEVILLE (1997). Espera-se que um aumento na umidade atmosférica torne mais lenta a taxa relativa do fluxo de umidade do interior para as superfícies externas do concreto [MEHTA & MONTEIRO (1994)].

Peças de concreto seladas, ou seja, peças que não haja troca de umidade com o meio ambiente apresentam uma pequena retração denominada de *retração autógena*, causada pela redução da umidade relativa no interior dos poros em decorrência da evolução da reação de hidratação do cimento. A retração autógena tem valor pequeno para concretos convencionais, sendo mais significativa para concretos de alto desempenho, como destacado por REIS (2003).

Na fluência de peças de concreto submetidas a tensões permanentes, a água não fixada quimicamente, existente nos microporos do gel de cimento, é comprimida nos capilares e eliminada, provocando uma contração do gel.

MEHTA & MONTEIRO (1994) destacam a distinção entre dois tipos de fluência, a *fluência básica* e a *fluência por secagem*, sendo a fluência total a soma dessas duas. A fluência básica representa a deformação que o concreto, em condições de elevada umidade (~ 100%), sofre sob carga constante. Já a fluência por secagem ocorre quando o concreto perde umidade para o ambiente e está submetido simultaneamente a um carregamento no tempo. Entretanto, é prática comum ignorar a distinção entre as fluências básica e por secagem, e fluência é simplesmente

considerada como a deformação sob carga além da soma da deformação elástica e da deformação livre por secagem.

Vários são os fatores que interferem na fluência, estando muitas vezes inter-relacionados e ocorrendo simultaneamente, podendo ser dividido em: características dos materiais e tipo de concreto, níveis de resistência, fatores temporais, condições ambientais, dimensões e geometria da peça entre outros.

a) Características dos materiais e tipo de concreto:

Em função de o concreto ser um material compósito constituído por diferentes materiais com características distintas, cada um desses materiais influenciará de maior ou menor forma na fluência. Dentre os principais fatores que afetam a fluência podem ser destacados: teor da pasta de cimento, relação água/cimento, proporção entre os materiais na dosagem, características do cimento e agregados e o grau de compactação.

Uma vez constatado que o que sofre fluência é a pasta de cimento hidratada, o agregado terá a função apenas de contê-la [HASPARYK et al. (2005)]. Assim, similarmente à retração, a fluência é função do volume de pasta e aumenta à medida que o volume de pasta aumenta [MEHTA & MONTEIRO (1994)].

A relação água/cimento também afeta a fluência. Para concretos com um determinado consumo de cimento, o aumento da relação água/cimento pode ocasionar um maior volume de vazios permeáveis, aumentando a fluência [MEHTA & MONTEIRO (1994)].

Entre as várias características do agregado, o seu teor empregado é o que mais afeta a fluência, quando comparado com a sua granulometria, dimensão máxima e forma do grão, desde que o adensamento do concreto seja pleno [NEVILLE (1997)]. Quando maior o volume de agregado empregado menor será a fluência. Ainda de acordo com NEVILLE (1997), certas propriedades do agregado podem alterar a fluência do concreto, sendo seu módulo de elasticidade o mais importante desses fatores, pois quanto maior o módulo de elasticidade, maior o efeito de contenção oferecido pelo agregado à fluência da pasta. Adicionalmente, a porosidade do agregado também afeta a fluência em função de conferir um módulo de elasticidade mais baixo ao agregado.

Segundo NEVILLE (1997), o tipo de cimento também interfere no valor da fluência, na medida em que influencia a resistência do concreto no momento de aplicação da carga.

HASPARYK et al. (2005) destacam que diferentes tipos de concreto refletem em grandes variações no valor da fluência, verificando que um concreto de alto desempenho (CAD) apresenta menor fluência quando comparado com concreto convencional.

b) Níveis de resistência e tensão aplicada:

A resistência afeta de forma considerável a fluência [MEHTA & MONTEIRO (1994)]. De acordo com NEVILLE (1997), dentro um grande intervalo, a fluência é inversamente proporcional à resistência do concreto no momento da aplicação da carga. Já a tensão aplicada possui uma proporcionalidade direta com a fluência, exceção feita para peças carregadas a idades muito pequenas [NEVILLE (1997)]. Não existe um limite inferior da proporcionalidade porque o concreto é passível de fluência mesmo sob tensões muito pequenas. O limite superior de proporcionalidade é alcançado quando surgem no concreto microfissuras sérias; isso ocorre a uma tensão expressa como fração da resistência, ficando usualmente entre 0,4 e 0,6.

c) Fatores temporais:

A idade na qual o concreto é submetido a um carregamento constante pode afetar o resultado da fluência. Quanto mais jovem o concreto é submetido a um carregamento, maior será a sua fluência total em função de sua menor maturidade [HASPARYK et al. (2005)].

d) Condições ambientais:

Segundo NEVILLE (1997), a umidade relativa do ambiente que envolve o concreto é um dos fatores mais importantes que atuam sobre a fluência. Quanto menor a umidade do ambiente, mais favorável se tornará o processo de secagem do concreto, refletindo maior fluência [MEHTA & MONTEIRO (1994)].

Já a temperatura a qual o concreto é exposto pode ter dois efeitos opostos sobre a fluência, de acordo com MEHTA & MONTEIRO (1994). Se uma peça de concreto é exposta a uma temperatura maior do que a normal como parte do processo de cura, antes de ser carregada, a resistência aumentará e a deformação por fluência

será menor do que aquela de um concreto correspondente armazenado a uma temperatura mais baixa. No entanto, a exposição à alta temperatura, durante o período em que está carregada, pode aumentar a fluência.

e) **Dimensões e geometria da peça:**

Quanto maior a dimensão da peça, maior a dificuldade de migração de água do seu interior para o exterior em virtude do maior caminho a percorrer, e conseqüentemente menor será a fluência. Desta forma, no caso de concretos selados, a dimensão não afeta a fluência [NEVILLE (1997)].

No que diz respeito à geometria da peça, admite-se que a fluência é função da sua relação volume e área superficial. A influência da forma tem menor importância que da dimensão da peça [NEVILLE (1997)].

A deformação por fluência diminui com o passar do tempo, atingindo uma paralisação após um longo período de tempo e, para o caso de descarregamento, a deformação por fluência é parcialmente reversível, ou seja, após uma recuperação elástica ocorre uma recuperação posterior da deformação com o tempo, como mostrado na figura 2.2.

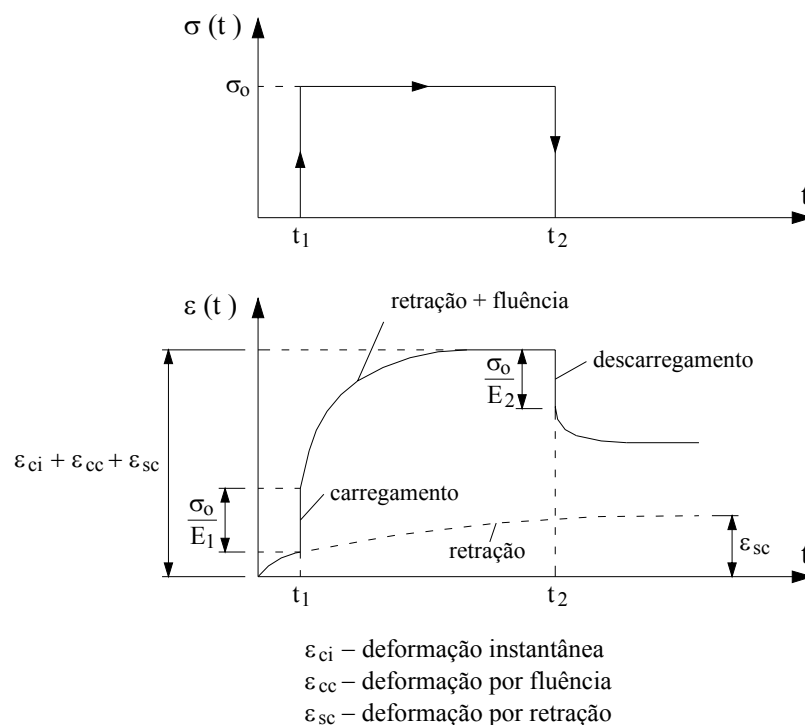


FIGURA 2.2 – Retração e fluência com o tempo [adaptado de LEONHARDT & MÖNNING (1978)]

Portanto, em uma peça de concreto submetida a uma compressão uniaxial, a deformação total $\varepsilon_c(t)$ na idade t pode ser expressa por:

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_{ci}(t) + \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{sc}(t) + \varepsilon_T(t) = \varepsilon_{c\sigma}(t) + \varepsilon_{cn}(t) \quad 2.1$$

onde:

- $\varepsilon_{ci}(t)$ – deformação instantânea;
- $\varepsilon_{cc}(t)$ – deformação devido à fluência;
- $\varepsilon_{sc}(t)$ – deformação devido à retração;
- $\varepsilon_T(t)$ – deformação devido à variação térmica;
- $\varepsilon_{c\sigma}(t)$ – deformação dependente de tensão (instantânea e fluência);
- $\varepsilon_{cn}(t)$ – deformação independente de tensões (retração e variação térmica).

2.2 Modelos reológicos

A reologia consiste no estudo da relação entre tensões e deformações por meio de modelos de representação que consideram o comportamento elástico, viscoso e plástico dos materiais.

Diversas tentativas já foram realizadas para simular o comportamento das deformações do concreto ao longo do tempo através de modelos reológicos constituídos de elementos representando deformações específicas de cada componente ou fase do concreto [NEVILLE (1997)]. Essa aproximação é em grande parte empírica e seu sucesso depende da habilidade em atribuir a cada parte da deformação do concreto um determinado elemento do modelo. Em outras tentativas, elementos reológicos são combinados simplesmente para se aproximarem de ensaios reais de deformação sem considerar seu significado físico, sendo apenas um método de ajuste de equações.

A seguir são apresentados os elementos fundamentais que formam os modelos reológicos assim como a combinação entre esses elementos para formar modelos mais complexos.

2.2.1 Elementos fundamentais dos modelos reológicos

O comportamento reológico do concreto, ou seja, a sua capacidade de deformação ao longo do tempo pode ser estimado pela criação de modelos reológicos baseados em dois elementos fundamentais com propriedades reológicas ideais: um segmento de mola e um segmento de pistão lubrificado. Para o segmento de mola, a relação entre tensão e deformação é dada pela lei de Hooke, ou seja, elasticidade linear perfeita:

$$\sigma(t) = E \cdot \varepsilon(t) \quad 2.2$$

onde:

E – módulo de elasticidade.

A lei de Hooke estabelece que as tensões são diretamente proporcionais às deformações, variando linearmente com o módulo de elasticidade E . A resposta da mola à tensão é imediata; em consequência, quando uma tensão, σ_0 , é mantida constante, a deformação será σ_0 / E , constante ao longo do tempo.

O pistão lubrificado pode ser visualizado como um macaco que desloca um fluido viscoso em um cilindro com fundo vazado. Usando a lei de Newton, ou seja, viscosidade linear perfeita:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad 2.3$$

onde:

$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$ – taxa de deformação;

η – coeficiente de viscosidade.

A lei de Newton estabelece que a taxa de deformação é proporcional à tensão, variando linearmente de acordo com o coeficiente de viscosidade η . Assim, quando uma tensão, σ_0 , é mantida constante, o pistão irá deformar continuamente a uma taxa constante.

2.2.2 Modelos reológicos básicos

Formulações complexas do comportamento viscoelástico dos materiais podem ser obtidas pela associação dos elementos fundamentais (mola e pistão), resultando em modelos compostos ou conjugados. Esta associação é feita com os elementos fundamentais arranjados em série ou em paralelo.

Os modelos compostos mais típicos são os modelos de Maxwell, Kelvin, Boltzmann e Burger, conforme figura 2.3.

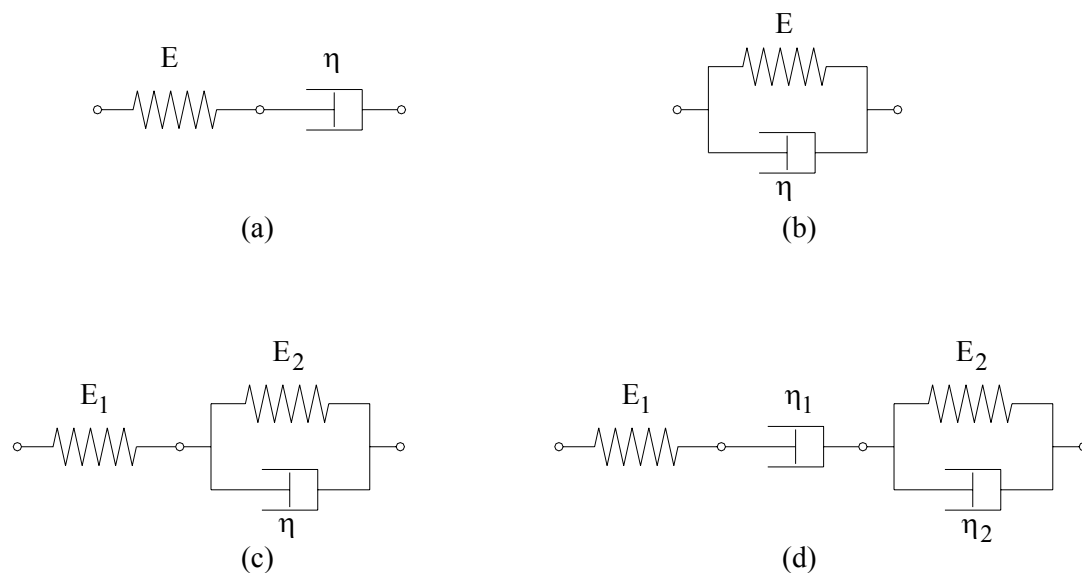


FIGURA 2.3 – (a) Modelo de Maxwell (b) Modelo de Kelvin
(c) Modelo de Boltzmann (d) Modelo de Burger

2.2.2.1 Modelo de Maxwell

O modelo de Maxwell compreende um segmento de mola e um segmento de pistão lubrificado conectados em série, como mostra a figura 2.3 (a). As seguintes equações se aplicam a esse modelo:

$$\sigma_E(t) = \sigma_\eta(t) = \sigma(t) \quad \text{equação de equilíbrio} \quad 2.4$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_E(t) + \varepsilon_\eta(t) \quad \text{equação de compatibilidade} \quad 2.5$$

$$\sigma_E(t) = E \cdot \varepsilon_E(t) \quad \text{equação constitutiva (mola)} \quad 2.6$$

$$\sigma_\eta(t) = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_\eta(t) \quad \text{equação constitutiva (pistão lubrificado)} \quad 2.7$$

Das equações anteriores, obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad 2.8$$

Da integração da equação diferencial do modelo e considerando tensão constante $\sigma(t) = \sigma_0$, obtém-se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} \cdot t \quad 2.9$$

O modelo de Maxwell, conforme figura 2.4, prevê o aumento da deformação sem limites e em uma situação de descarregamento no tempo t_1 , a deformação elástica σ_0 / E é recuperada instantaneamente, enquanto a deformação permanente $(\sigma_0 / \eta) \cdot t_1$ permanece no pistão.

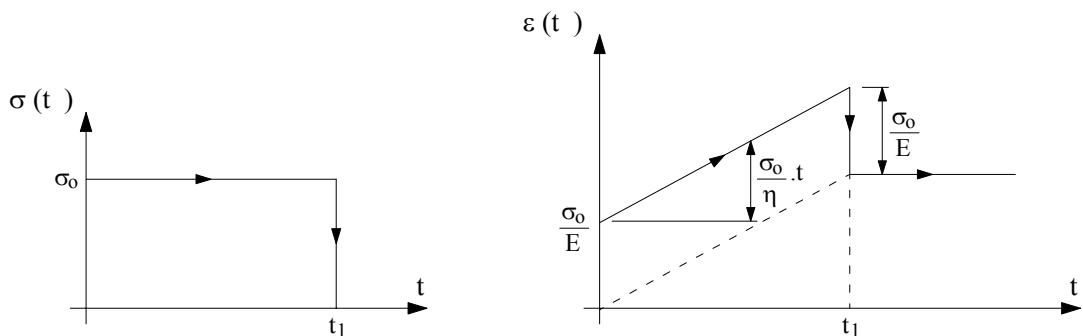


FIGURA 2.4 – Regime viscoelástico de Maxwell

2.2.2.2 Modelo de Kelvin

O modelo de Kelvin combina um segmento de mola e um pistão em paralelo, como mostra a figura 2.3 (b). As seguintes equações se aplicam a esse modelo:

$$\sigma(t) = \sigma_E(t) + \sigma_\eta(t) \quad \text{equação de equilíbrio} \quad 2.10$$

$$\varepsilon_E(t) = \varepsilon_\eta(t) = \varepsilon(t) \quad \text{equação de compatibilidade} \quad 2.11$$

$$\sigma_E(t) = E \cdot \varepsilon_E(t) \quad \text{equação constitutiva (mola)} \quad 2.12$$

$$\sigma_\eta(t) = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_\eta(t) \quad \text{equação constitutiva (pistão lubrificado)} \quad 2.13$$

Resultando na equação diferencial:

$$\sigma(t) = E \cdot \varepsilon(t) + \eta \cdot \dot{\varepsilon}(t) \quad 2.14$$

Da integração da equação diferencial do modelo e considerando tensão constante $\sigma(t) = \sigma_0$, obtém-se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot (1 - e^{-E \cdot t / \eta}) \quad 2.15$$

Pelo modelo de Kelvin, conforme figura 2.5, a deformação aumenta a uma taxa decrescente e tem um valor assintótico de σ_0 / E . Na fase de carregamento, o pistão armazena toda a energia e a transfere para a mola com o decorrer do tempo e em uma posterior fase de descarregamento, as deformações são totalmente reversíveis ao longo do tempo.

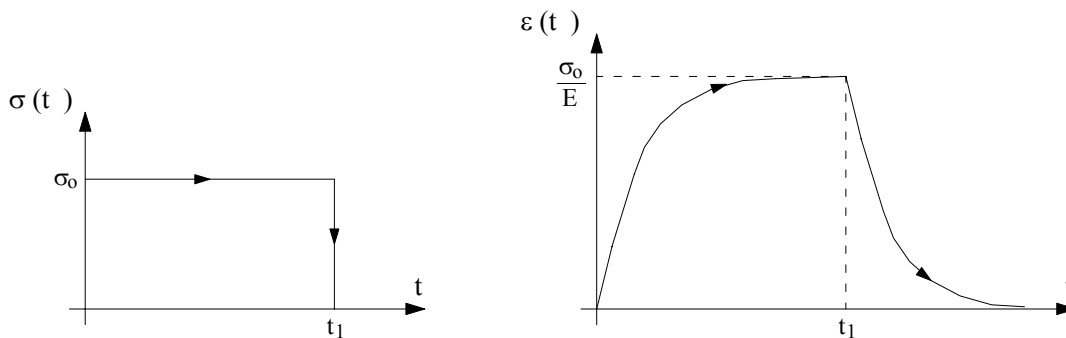


FIGURA 2.5 – Regime viscoelástico de Kelvin

2.2.2.3 Modelo de Boltzmann

No modelo de Boltzmann, também conhecido por modelo de três parâmetros, uma mola é conectada em série com um elemento de Kelvin, como mostra a figura 2.3 (c). Assumindo ε_1 e ε_2 a deformação da mola e do elemento de Kelvin, respectivamente, aplicam-se as seguintes equações:

$$\sigma_1(t) = \sigma_2(t) = \sigma(t) \quad \text{equação de equilíbrio} \quad 2.16$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) \quad \text{equação de compatibilidade} \quad 2.17$$

$$\sigma_1(t) = E_1 \cdot \varepsilon_1(t) \quad \text{equação constitutiva (mola)} \quad 2.18$$

$$\sigma_2(t) = E_2 \cdot \varepsilon_2(t) + \eta \cdot \dot{\varepsilon}_2(t) \quad \text{equação constitutiva (Kelvin)} \quad 2.19$$

Resultando na equação diferencial:

$$\eta.E_1.\dot{\varepsilon}(t) + E_1.E_2.\varepsilon(t) = \eta.\dot{\sigma}(t) + (E_1 + E_2).\sigma(t) \quad 2.20$$

Da integração da equação diferencial do modelo e considerando tensão constante $\sigma(t) = \sigma_0$, obtém-se:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot \left[\frac{E_1 + E_2}{E_1.E_2} - \frac{1}{E_2} \cdot e^{-E_2.t/\eta} \right] \quad 2.21$$

Pelo modelo de Boltzmann, conforme figura 2.6, a deformação é proporcional a σ_0 , mudando de σ_0/E_1 no tempo $t=0$ para $\sigma_0 \cdot [(E_1 + E_2)/(E_1.E_2)]$ no tempo $t = \infty$. Em uma situação de descarregamento, a deformação elástica é recuperada instantaneamente, enquanto que a deformação viscoelástica é recuperada ao longo do tempo.

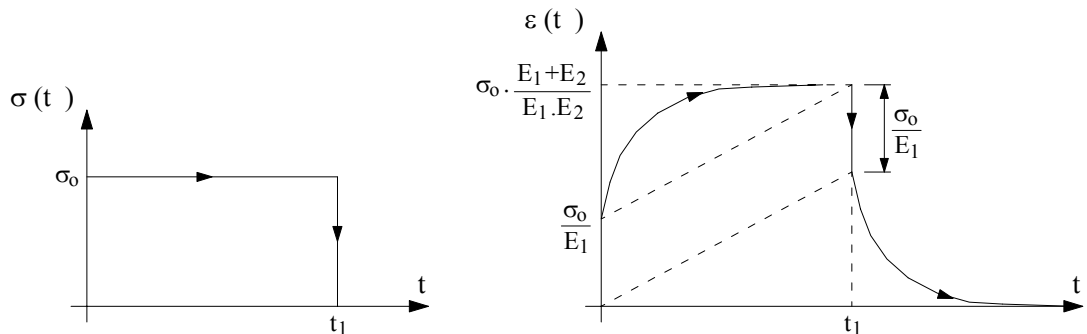


FIGURA 2.6 – Regime viscoelástico de Boltzmann

2.2.2.4 Modelo de Burger

No modelo de Burger, um elemento de Maxwell combina com um elemento de Kelvin em série, como mostra a figura 2.3 (d). Assumindo ε_1 e ε_2 a deformação do elemento de Maxwell e do elemento de Kelvin, respectivamente, aplicam-se as seguintes equações:

$$\sigma_1(t) = \sigma_2(t) = \sigma(t) \quad \text{equação de equilíbrio} \quad 2.22$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) \quad \text{equação de compatibilidade} \quad 2.23$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(t) &= E_1 \cdot \varepsilon_{E_1}(t) \\ \sigma_1(t) &= \eta_1 \cdot \dot{\varepsilon}_{\eta_1}(t) \end{aligned} \right\} \text{equação constitutiva (Maxwell)} \quad 2.24$$

$$\sigma_2(t) = E_2 \cdot \varepsilon_2(t) + \eta_2 \cdot \dot{\varepsilon}_2(t) \quad \text{equação constitutiva (Kelvin)} \quad 2.25$$

Da integração da equação diferencial do modelo e considerando tensão constante $\sigma(t) = \sigma_0$, obtém-se:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{\eta_1} \cdot t + \frac{\sigma_0}{E_2} \cdot \left[1 - e^{-E_2 \cdot t / \eta_2} \right] \quad 2.26$$

Pelo modelo de Burger, conforme figura 2.7, em uma situação de descarregamento, a deformação elástica é recuperada instantaneamente, enquanto que a deformação viscoelástica é recuperada ao longo do tempo e a deformação viscosa permanece no sistema.

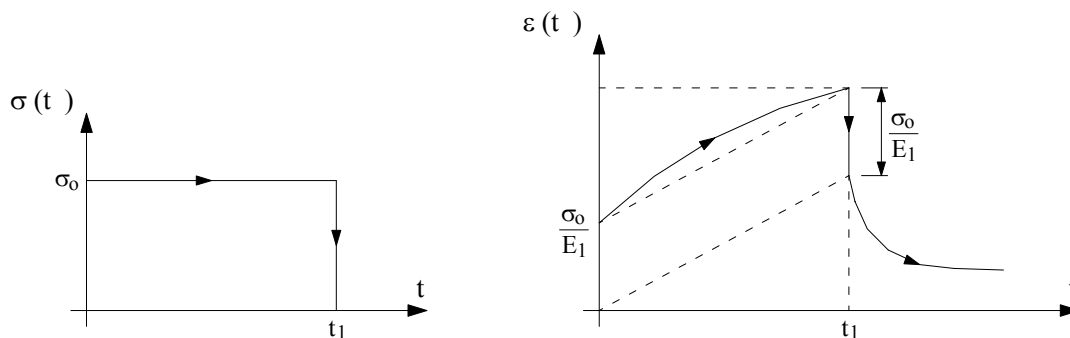


FIGURA 2.7 – Regime viscoelástico de Burger

Como alertado por NEVILLE (1997), os modelos reológicos não fazem nada mais que expressar as funções de deformação de uma forma alternativa, mas úteis para visualizar os efeitos da fluência e especialmente a superposição das deformações. Frequentemente, modelos reológicos são ajustados a resultados experimentais pela inclusão de parâmetros empíricos de forma que, na realidade, são os dados reais que darão origem ao modelo e não vice e versa.

2.3 Modelos para a previsão da fluência e retração

Quando não são disponíveis dados experimentais, é necessário lançar mão de um modelo para a previsão da fluência e retração, que usualmente represente o consenso comum. Neste contexto, apresentam-se a seguir as recomendações para a previsão da fluência e retração contidas no CEB-90 (1991), ACI-209 (1992) e NBR 6118 (2003). Os modelos de fluência de tais normas são baseados em coeficientes de fluência, que são funções das propriedades do concreto, condições ambientais e propriedades geométricas da peça. Enquanto que para a retração, baseiam-se na umidade relativa, nas dimensões e composição da peça de concreto.

2.3.1 Definições

2.3.1.1 Deformação total e deformação por fluência

A deformação total na idade t , causada por uma tensão constante $\sigma(t_0)$, atuante desde a idade t_0 , será:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \frac{\sigma(t_0)}{E_c(t_0)} + \varepsilon_{cc}(t, t_0) \quad 2.27$$

onde:

$\frac{\sigma(t_0)}{E_c(t_0)}$ – deformação instantânea no concreto, na idade t_0 ;

$\varepsilon_{cc}(t, t_0)$ – deformação por fluência no concreto, na idade t ;

$E_c(t_0)$ – módulo de deformação longitudinal do concreto na idade t_0 .

2.3.1.2 Coeficiente de fluência

Há duas definições para o coeficiente de fluência:

a) relação entre a deformação por fluência no tempo t e a deformação inicial no tempo t_0 (modelo do ACI).

$$\varphi_0(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cc}(t, t_0)}{\sigma(t_0)/E_c(t_0)} \quad 2.28$$

b) relação entre a deformação por fluência no tempo t e a deformação inicial para tensões aplicadas aos 28 dias (modelo do CEB e NBR 6118).

$$\varphi_{28}(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cc}(t, t_0)}{\sigma(t_0)/E_{28}} \quad 2.29$$

onde E_{28} é o módulo de deformação inicial para a idade de 28 dias.

2.3.1.3 Fluência específica

A fluência específica é a razão entre o coeficiente de fluência e o módulo de deformação do concreto. Representa-se por:

$$C(t, t_0) = \frac{\varphi_0(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad \text{para o ACI} \quad 2.30$$

$$C(t, t_0) = \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}} \quad \text{para CEB e NBR 6118} \quad 2.31$$

2.3.1.4 Função fluência

A função fluência representa a deformação total na idade t , para uma tensão unitária atuante desde a idade t_0 . Assim,

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + C(t, t_0) \quad 2.32$$

E com isso, tem-se:

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi_0(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad \text{para o ACI} \quad 2.33$$

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}} \quad \text{para CEB e NBR 6118} \quad 2.34$$

A figura 2.8 apresenta curvas esquemáticas típicas de função fluência para início de carregamento em diversas idades.

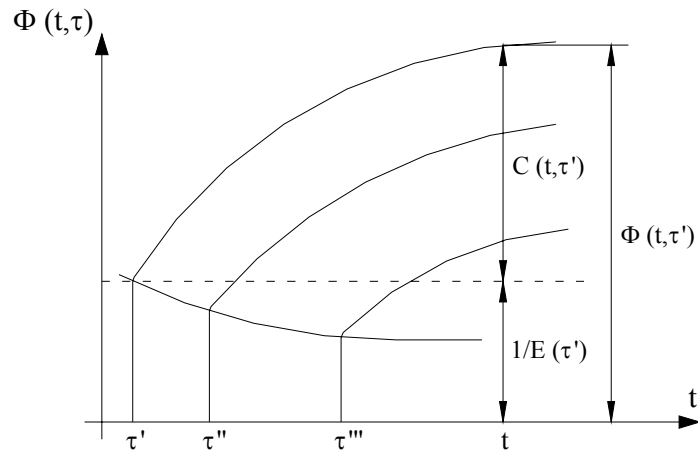


FIGURA 2.8 – Curvas de função fluência

2.3.2 Modelo CEB-90 (1991)

2.3.2.1 Fluência

Segundo CEB-90 (1991), o coeficiente de fluência $\varphi(t, t_0)$ é dado por:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t - t_0) \quad 2.35$$

onde:

φ_0 – coeficiente de fluência básico conforme expressão 2.36;

β_c – coeficiente que descreve o desenvolvimento da fluência com o tempo, após o carregamento, de acordo com a equação 2.41;

t – idade do concreto, em dias;

t_0 – idade do concreto ao ser carregado, em dias.

O coeficiente de fluência básico pode ser estimado por:

$$\varphi_0 = \varphi_U \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad 2.36$$

com:

$$\varphi_U = 1 + \frac{1 - U/U_0}{0,46 \cdot (h_{fic}/h_0)^{1/3}} \quad 2.37$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{5,3}{(f_{cm}/f_{cmo})^{0,5}} \quad 2.38$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + (t_0/t_1)^{0,2}} \quad 2.39$$

onde:

$$h_{fic} = \frac{2 \cdot A_c}{u_{ar}} \quad (\text{espessura fictícia do elemento, em mm}) \quad 2.40$$

A_c – área da seção transversal do elemento;

u_{ar} – perímetro do elemento em contato com o ar;

f_{cm} – resistência média à compressão, aos 28 dias, em MPa;

$f_{cm0} = 10 \text{ MPa}$;

U – umidade relativa do ambiente, em %;

$U_o = 100\%$;

$h_o = 100 \text{ mm}$;

$t_1 = 1 \text{ dia}$.

O desenvolvimento da fluência com o tempo é dado por:

$$\beta_c(t - t_o) = \left[\frac{(t - t_o)/t_1}{\beta_H + (t - t_o)/t_1} \right]^{0,3} \quad 2.41$$

com:

$$\beta_H = 150 \cdot \left\{ 1 + \left(1,2 \cdot \frac{U}{U_o} \right)^{18} \right\} \cdot \frac{h_{fic}}{h_o} + 250 \leq 1500 \quad 2.42$$

• Efeito do tipo de cimento

O efeito do tipo de cimento no coeficiente de fluência pode ser levado em conta como uma modificação da idade no ato do carregamento, t_o , de acordo com a equação:

$$t_o = t_{o,T} \cdot \left[\frac{9}{2 + (t_{o,T}/t_{1,T})^{1/2}} + 1 \right]^\alpha \geq 0,5 \text{ dias} \quad 2.43$$

onde:

$t_{o,T}$ – idade do concreto ajustada à temperatura, de acordo com a equação 2.44;

$t_{1,T} = 1 \text{ dia}$;

- α – coeficiente que depende do tipo de cimento, assumindo os seguintes valores:
- 1 – para cimento de endurecimento lento;
 - 0 – para cimento de endurecimento normal ou rápido;
 - 1 – para cimento de endurecimento rápido e de alta resistência.

• **Efeito de temperaturas altas ou baixas, antes e durante o carregamento**

O efeito de temperaturas elevadas ou reduzidas na maturidade do concreto pode ser considerado, calculando uma idade ajustada no ato do carregamento pela expressão:

$$t_{o,T} = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot e^{-\left[\frac{4000}{273+T(\Delta t_i)/T_0} - 13,65 \right]} \quad 2.44$$

onde:

$t_{o,T}$ – idade do concreto ajustada à temperatura, em dias;

$T(\Delta t_i)$ – temperatura em °C, durante o período Δt_i ;

Δt_i – número de dias que se verifica a temperatura T ;

$T_0 = 1^\circ\text{C}$.

As equações 2.45 a 2.48 descrevem o efeito da temperatura, quando o elemento estiver sob carregamento, para valores de temperatura diferentes de 20°C .

O efeito da temperatura sobre o desenvolvimento da fluência é considerado, substituindo-se o parâmetro β_H da equação 2.41 por $\beta_{H,T}$, que é dado por:

$$\beta_{H,T} = \beta_H \cdot \beta_T \quad 2.45$$

com:

$$\beta_T = e^{\left[\frac{1500}{273+(T/T_0)} - 5,12 \right]} \quad 2.46$$

O efeito da temperatura no coeficiente φ_0 é considerado, substituindo-se φ_U da equação 2.36 por $\varphi_{U,T}$, que é calculado pela expressão:

$$\varphi_{U,T} = \varphi_T + (\varphi_U - 1) \cdot \varphi_T^{1,2} \quad 2.47$$

com:

$$\varphi_T = e^{[0,015 \cdot (T/T_0 - 20)]} \quad 2.48$$

Se a temperatura variar enquanto a peça está sob carga, a fluência pode ser estimada pela seguinte expressão:

$$\varphi(t, t_0, T) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t - t_0) + \Delta\varphi_{T,var} \quad 2.49$$

com:

$$\Delta\varphi_{T,var} = 0,0004 \cdot (T/T_0 - 20)^2 \quad 2.50$$

• Efeito de altas tensões

Para níveis de tensão variando de $0,4 \cdot f_{cm}(t_0) < |\sigma_c| < 0,6 \cdot f_{cm}(t_0)$, a fluência cresce não linearmente e pode ser considerada pela seguinte expressão:

$$\varphi_{0,k} = \varphi_0 \cdot e^{[1,5 \cdot (k_0 - 0,4)]} \quad \text{para } 0,4 < k_0 \leq 0,6 \quad 2.51a$$

$$\varphi_{0,k} = \varphi_0 \quad \text{para } k_0 \leq 0,4 \quad 2.51b$$

onde:

$\varphi_{0,k}$ – coeficiente de fluência básico, não linear, que substitui φ_0 na equação 2.35;

k_0 – relação tensão normal / resistência $|\sigma_c|/f_{cm}$

2.3.2.2 Retração

A deformação específica por retração ou expansão, ocorrida em um intervalo de tempo $(t - t_0)$, é dada por:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{cso} \cdot [\beta_s(t - t_0)] \quad 2.52$$

onde:

ε_{cso} – coeficiente de retração básica, de acordo com a expressão 2.53;

β_s – coeficiente que representa o desenvolvimento da retração no decorrer do tempo, calculado através da equação 2.57;

- t – idade do concreto, em dias;
 t_o – idade do concreto, em dias, no instante em que o efeito da retração ou expansão começa a ser considerado.

O coeficiente de retração básica pode ser obtido pela expressão:

$$\varepsilon_{\text{cso}} = \varepsilon_c(f_{\text{cm}})\beta_U \quad 2.53$$

com:

$$\varepsilon_c(f_{\text{cm}}) = [160 + 10\beta_{\text{sc}}(9 - f_{\text{cm}}/f_{\text{cmo}})]10^{-6} \quad 2.54$$

onde:

β_{sc} – coeficiente que depende do tipo de cimento, assumindo os seguintes valores:

- 4 – para cimento de endurecimento lento;
- 5 – para cimento de endurecimento normal ou rápido;
- 8 – para cimento de endurecimento rápido e de alta resistência.

E,

$$\beta_U = -1,55\beta_{\text{sU}} \quad \text{para } 40\% \leq U < 99\% \quad 2.55a$$

$$\beta_U = +0,25 \quad \text{para } U \geq 99\% \quad 2.55b$$

onde:

$$\beta_{\text{sU}} = 1 - \left(\frac{U}{U_o}\right)^3 \quad 2.56$$

O desenvolvimento da retração com o tempo é dado por:

$$\beta_s(t - t_o) = \left[\frac{(t - t_o)/t_1}{350.(h_{\text{fic}}/h_o)^2 + (t - t_o)/t_1} \right]^{0,5} \quad 2.57$$

onde h_{fic} é definido na equação 2.40.

As equações 2.58 a 2.60 descrevem o efeito da temperatura do concreto na secagem para valores diferentes de 20°C.

O efeito da temperatura sobre o coeficiente β_s é considerado, substituindo-se o produto $350.(h_{\text{fic}}/h_o)^2$ da equação 2.57 por $\alpha_{\text{s,T}}$, que é dado por:

$$\alpha_{s,T} = 350 \cdot \left(\frac{h_{fic}}{h_o} \right)^2 \cdot e^{[-0,06 \cdot (T/T_o - 20)]} \quad 2.58$$

O efeito da temperatura sobre o coeficiente de retração básica é considerado, substituindo-se β_U da equação 2.53 por $\beta_{U,T}$, que é calculado pela expressão:

$$\beta_{U,T} = \beta_U \cdot \beta_{sT} \quad 2.59$$

com:

$$\beta_{sT} = 1 + \left[\frac{8}{103 - 100 \cdot (U/U_o)} \right] \cdot \left[\frac{(T/T_o) - 20}{40} \right] \quad 2.60$$

2.3.3 Modelo ACI-209 (1992)

2.3.3.1 Fluência

Segundo ACI-209 (1992), o coeficiente de fluência é expresso por uma função produto:

$$\varphi_o(t, t_o) = \varphi_\infty(t_o) \cdot \frac{(t - t_o)^{0,6}}{10 + (t - t_o)^{0,6}} \quad 2.61$$

com:

$$\varphi_\infty(t_o) = 2,35 \cdot \gamma_t^c \cdot \gamma_U^c \cdot \gamma_d^c \cdot \gamma_S^c \cdot \gamma_F^c \cdot \gamma_A^c \quad 2.62$$

onde : γ_t^c , γ_U^c , γ_d^c , γ_S^c , γ_F^c , γ_A^c são fatores de correção para o cálculo da fluência.

O coeficiente γ_t^c , que considera idade de carregamento diferente de sete dias para cura úmida e diferente de três dias para cura a vapor, é calculado pelas seguintes expressões:

$$\gamma_t^c = 1,25 \cdot t_o^{-0,118} \quad \text{para concreto com cura úmida} \quad 2.63a$$

$$\gamma_t^c = 1,13 \cdot t_o^{-0,094} \quad \text{para concreto com cura a vapor} \quad 2.63b$$

O coeficiente de umidade γ_U^c é calculado pela expressão:

$$\gamma_U^c = 1,27 - 0,0067.U \quad \text{para } U \geq 40\% \quad 2.64$$

Dois métodos são recomendados para a determinação do coeficiente de espessura da peça γ_d^c :

a) Espessura média d

A espessura média é calculada por $d = 4.v/s$, sendo “ v ” o volume da peça e “ s ” a superfície, em mm.

Se a espessura média for menor que 150 mm, o coeficiente de espessura γ_d^c é fornecido pela tabela 2.1.

TABELA 2.1 – Coeficiente de espessura média

Espessura média (mm)	50	75	100	125	150
γ_d^c	1,30	1,17	1,11	1,04	1,00

Se a espessura média ficar entre 150 e 380 mm, usam-se as expressões:

$$\gamma_d^c = 1,14 - 0,00092.d \quad \text{para } t - t_0 \leq 1 \text{ ano} \quad 2.65a$$

$$\gamma_d^c = 1,10 - 0,00067.d \quad \text{para } t - t_0 > 1 \text{ ano} \quad 2.65b$$

b) Relação volume / superfície (quando $d > 380$ mm)

$$\gamma_d^c = 2/3 \cdot \left[1 + 1,13 \cdot e^{(-0,0213 \cdot v/s)} \right] \quad 2.66$$

sendo v/s em mm.

Os coeficientes que dependem da composição do concreto são:

– coeficiente que considera a consistência da mistura (γ_S^c):

$$\gamma_S^c = 0,82 + 0,00264.S \quad 2.67$$

sendo S o valor do SLUMP do concreto fresco em mm.

- coeficiente que considera a influência do agregado miúdo (γ_F^c):

$$\gamma_F^c = 0,88 + 0,0024.F \quad 2.68$$

sendo F a relação em massa de agregado miúdo / agregado total, em %.

- coeficiente que considera o conteúdo de ar incorporado no volume concreto (γ_A^c):

$$\gamma_A^c = 0,46 + 0,09.A \geq 1 \quad 2.69$$

sendo A o índice de vazios, em %, no volume de concreto.

2.3.3.2 Retração

A deformação específica do concreto, por retração, depende do tipo de cura e é calculada através da expressão:

- para cura úmida:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \frac{t - t_0}{35 + (t - t_0)} \cdot \varepsilon_{cs\infty} \quad 2.70$$

- para cura a vapor:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \frac{t - t_0}{55 + (t - t_0)} \cdot \varepsilon_{cs\infty} \quad 2.71$$

com:

$$\varepsilon_{cs\infty} = 780 \cdot 10^{-6} \cdot \gamma_t^s \cdot \gamma_U^s \cdot \gamma_d^s \cdot \gamma_S^s \cdot \gamma_B^s \cdot \gamma_F^s \cdot \gamma_A^s \quad 2.72$$

onde : γ_t^s , γ_U^s , γ_d^s , γ_S^s , γ_B^s , γ_F^s , γ_A^s são fatores de correção para o cálculo da retração.

O coeficiente γ_t^s , que considera o período de cura úmida diferente de sete dias, é fornecido na tabela 2.2.

TABELA 2.2 – Coeficiente de idade para a retração

Período de cura úmida (dias)	1	3	7	14	28	90
γ_t^s	1,2	1,1	1,0	0,93	0,86	0,75

O coeficiente de umidade γ_U^s é calculado pelas expressões:

$$\gamma_U^s = 1,40 - 0,010.U \quad \text{para } 40\% \leq U \leq 80\% \quad 2.73a$$

$$\gamma_U^s = 3,00 - 0,030.U \quad \text{para } 80\% < U \leq 100\% \quad 2.73b$$

Dois métodos são recomendados para estimar o coeficiente de espessura da peça γ_d^s :

a) Espessura média d

Se a espessura média for menor que 150 mm, o coeficiente de espessura γ_d^s é fornecido pela tabela 2.3.

TABELA 2.3 – Coeficiente de espessura média

Espessura média (mm)	50	75	100	125	150
γ_d^s	1,35	1,25	1,17	1,08	1,00

Se a espessura média ficar entre 150 e 380 mm, usam-se as expressões:

$$\gamma_d^s = 1,23 - 0,0015.d \quad \text{para } t - t_0 \leq 1 \text{ ano} \quad 2.74a$$

$$\gamma_d^s = 1,17 - 0,00114.d \quad \text{para } t - t_0 > 1 \text{ ano} \quad 2.74b$$

b) Relação volume / superfície (quando $d > 380$ mm)

$$\gamma_d^s = 1,2.e^{(-0,00472.v/s)} \quad 2.75$$

sendo v/s em mm.

Os coeficientes que dependem da composição do concreto são: γ_S^s , γ_B^s , γ_F^s e γ_A^s .

$$\gamma_S^s = 0,89 + 0,00161.S \quad 2.76$$

$$\gamma_B^s = 0,75 + 0,00061.B \quad 2.77$$

$$\gamma_F^s = 0,30 + 0,014.F \quad \text{para } F \leq 50 \quad 2.78a$$

$$\gamma_F^s = 0,90 + 0,002.F \quad \text{para } F > 50 \quad 2.78b$$

$$\gamma_A^s = 0,95 + 0,008.A \quad 2.79$$

onde:

S – valor do SLUMP do concreto fresco, em mm;

B – massa de cimento no volume de concreto (kg/m^3);

F – relação em massa de agregado miúdo / agregado total, em %;

A – índice de vazios, em %, no volume de concreto.

2.3.4 Modelo NBR 6118 (2003)

2.3.4.1 Fluência

Segundo NBR 6118 (2003), o coeficiente de fluência $\varphi(t, t_o)$, válido também para a tração, é dado por:

$$\varphi(t, t_o) = \varphi_a + \varphi_{f\infty} \cdot [\beta_f(t) - \beta_f(t_o)] + \varphi_{d\infty} \cdot \beta_d \quad 2.80$$

onde:

t – idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias;

t_o – idade fictícia do concreto ao ser feito o carregamento, em dias;

φ_a – coeficiente de deformação rápida;

$\varphi_{f\infty}$ – valor final do coeficiente de deformação lenta irreversível;

$\varphi_{d\infty}$ – valor final do coeficiente de deformação lenta reversível, que é considerado igual a 0,4;

β_f – coeficiente relativo à deformação lenta irreversível, função da idade do concreto (ver figura 2.9);

β_d – coeficiente relativo à deformação lenta reversível, função do tempo $(t - t_o)$ decorrido após o carregamento.

A idade fictícia, em dias, quando o endurecimento se faz à temperatura ambiente de 20°C e, nos demais casos, quando não houver cura a vapor, a idade a considerar é a idade fictícia dada por:

$$t = \alpha \cdot \sum_i \frac{T_i + 10}{30} \cdot \Delta t_{ef,i} \quad 2.81$$

onde:

- α – coeficiente dependente da velocidade de endurecimento do cimento; na falta de dados experimentais permite-se o emprego dos valores constantes da tabela 2.4;
- T_i – temperatura média diária do ambiente, em graus Celsius;
- $\Delta T_{ef,i}$ – período, em dias, durante o qual a temperatura média diária do ambiente, T_i , pode ser admitida constante.

TABELA 2.4 – Valores da fluência e da retração em função da velocidade de endurecimento do cimento

Cimento Portland (CP)	α	
	Fluência	Retração
De endurecimento lento (CP III e CP IV, todas as classes de resistência)	1	1
De endurecimento normal (CP I e CP II, todas as classes de resistência)	2	
De endurecimento rápido (CP V - ARI)	3	
onde: CP I e CP I-S – cimento Portland comum; CP II-E, CP II-F e CP II-Z – cimento Portland composto; CP III – cimento Portland de alto forno; CP IV – cimento Portland pozolânico; CP V - ARI – cimento Portland de alta resistência inicial; RS – cimento Portland resistente a sulfatos (propriedade específica de alguns dos tipos de cimento citados).		

O coeficiente de deformação rápida é calculado pela expressão:

$$\varphi_a = 0,8 \cdot \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right] \quad 2.82$$

onde $f_c(t_0)/f_c(t_\infty)$ é a função do crescimento da resistência do concreto com a idade.

O coeficiente β_d relativo à deformação lenta reversível é expresso por:

$$\beta_d = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70} \quad 2.83$$

O valor final do coeficiente de deformação lenta irreversível é dado por:

$$\varphi_{f\infty} = \varphi_{1c} \cdot \varphi_{2c} \quad 2.84$$

onde:

φ_{1c} – coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente U, em %, e da consistência do concreto dada pela tabela 2.5;

φ_{2c} – coeficiente dependente da espessura fictícia h_{fic} da peça.

O coeficiente φ_{2c} relativo à deformação lenta irreversível é dado por:

$$\varphi_{2c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}} \quad 2.85$$

onde h_{fic} é a espessura fictícia da peça, em centímetros.

Define-se como espessura fictícia o seguinte valor:

$$h_{fic} = \gamma \cdot \frac{2 \cdot A_c}{u_{ar}} \quad 2.86$$

onde:

γ – coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente (ver tabela 2.5);

A_c – área da seção transversal da peça;

u_{ar} – parte do perímetro externo da seção transversal da peça em contato com o ar.

TABELA 2.5 – Valores numéricos usuais para a determinação da fluência e da retração

Ambiente	U %	Fluência φ_{1c}			Retração $10^4 \cdot \varepsilon_{1s}$			γ
		Abatimento de acordo com a NBR NM 67 cm						
		0 – 4	5 – 9	10 – 15	0 – 4	5 – 9	10 – 15	
Na água	-	0,6	0,8	1,0	+ 1,0	+ 1,0	+ 1,0	30,0
Em ambiente muito úmido imediatamente acima da água	90	1,0	1,3	1,6	- 1,0	- 1,3	- 1,6	5,0
Ao ar livre, em geral	70	1,5	2,0	2,5	- 2,5	- 3,2	- 4,0	1,5
Em ambiente seco	40	2,3	3,0	3,8	- 4,0	- 5,2	- 6,5	1,0

O coeficiente β_f relativo à deformação lenta irreversível pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$\beta_f = \frac{t^2 + A.t + B}{t^2 + C.t + D} \quad 2.87$$

onde:

$$A = 42.h^3 - 350.h^2 + 588.h + 113;$$

$$B = 768.h^3 - 3060.h^2 + 3234.h - 23;$$

$$C = -200.h^3 + 13.h^2 + 10990.h + 183;$$

$$D = 7579.h^3 - 31916.h^2 + 35343.h + 1931$$

h – espessura fictícia, em metros; para valores de h fora do intervalo $(0,05 \leq h \leq 1,6)$, adotam-se os extremos correspondentes;

t – tempo, em dias ($t \geq 3$).

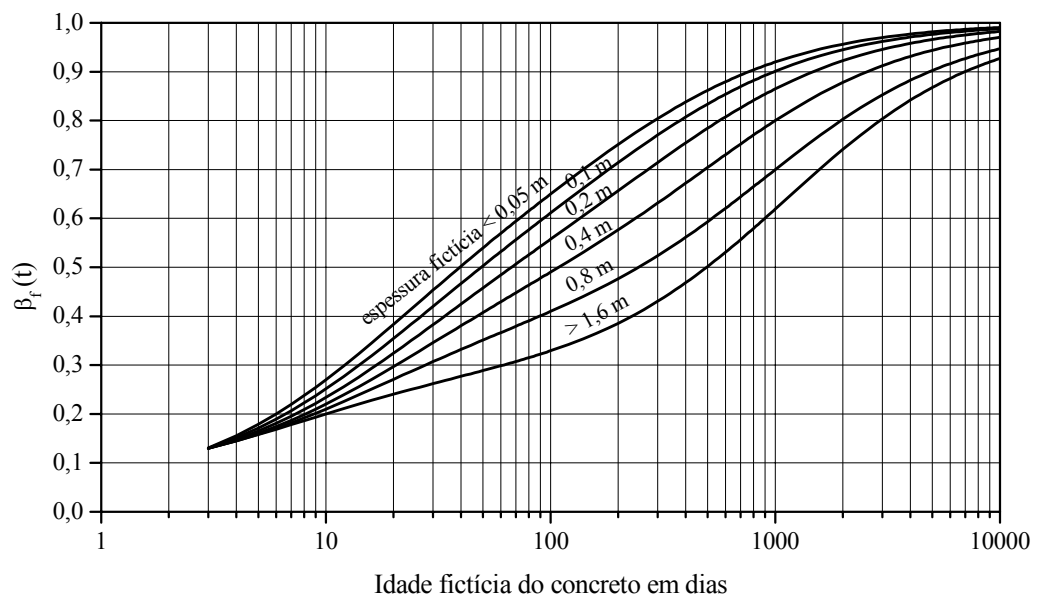


FIGURA 2.9 – Variação de $\beta_f(t)$

2.3.4.2 Retração

A deformação por retração, entre os instantes t_0 e t , é dada por:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{cs\infty} \cdot [\beta_s(t) \beta_s(t_0)] \quad 2.88$$

onde:

- t – idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias;
- t_0 – idade fictícia do concreto no instante em que o efeito da retração na peça começa a ser considerado, em dias;
- $\varepsilon_{cs\infty}$ – valor final da retração;
- $\beta_s(t)$ – coeficiente relativo à retração, no instante t ou t_0 (ver $\beta_s(t_0)$ figura 2.10).

O valor final da retração é dado por:

$$\varepsilon_{cs\infty} = \varepsilon_{1s} \cdot \varepsilon_{2s} \quad 2.89$$

onde:

- ε_{1s} – coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente e da consistência do concreto (ver tabela 2.5);
- ε_{2s} – coeficiente dependente da espessura fictícia da peça.

O coeficiente ε_{2s} relativo à retração é dado por:

$$\varepsilon_{2s} = \frac{33 + 2 \cdot h_{fic}}{20,8 + 3 \cdot h_{fic}} \quad 2.90$$

O coeficiente β_s relativo à retração é dado por:

$$\beta_s = \frac{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + A \cdot \left(\frac{t}{100}\right)^2 + B \cdot \left(\frac{t}{100}\right)}{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + C \cdot \left(\frac{t}{100}\right)^2 + D \cdot \left(\frac{t}{100}\right) + E} \quad 2.91$$

onde:

$$A = 40 ;$$

$$B = 116 \cdot h^3 - 282 \cdot h^2 + 220 \cdot h - 4,8 ;$$

$$C = 2,5 \cdot h^3 - 8,8 \cdot h + 40,7 ;$$

$$D = -75 \cdot h^3 + 585 \cdot h^2 + 496 \cdot h - 6,8$$

$$E = -1639.h^4 + 88.h^3 + 584.h^2 - 39.h + 0,8$$

h – espessura fictícia, em metros; para valores de h fora do intervalo $(0,05 \leq h \leq 1,6)$, adotam-se os extremos correspondentes;

t – tempo, em dias ($t \geq 3$).

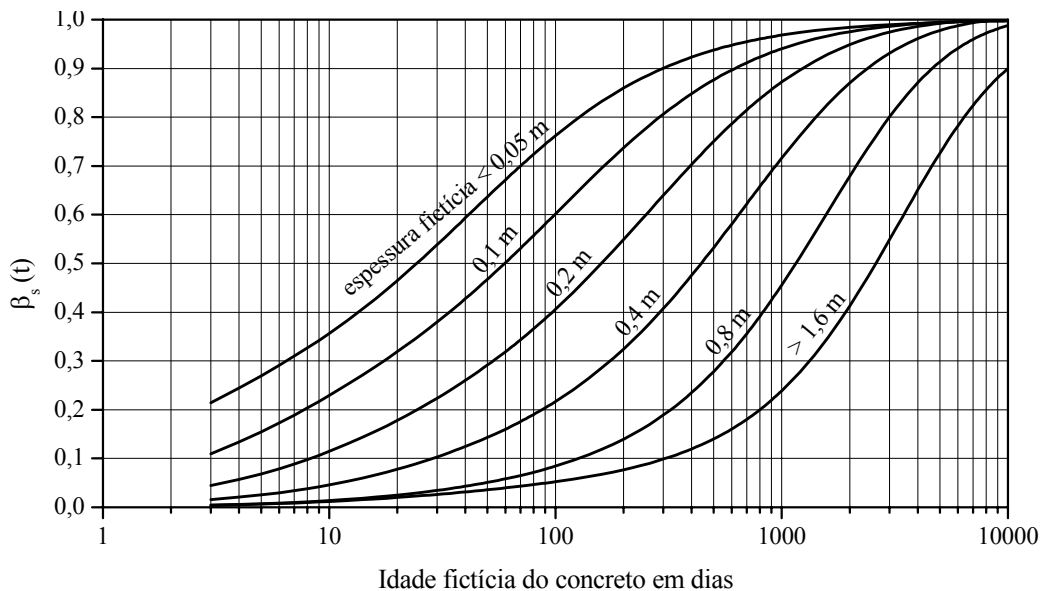


FIGURA 2.10 – Variação de $\beta_s(t)$

2.3.5 Comparação entre os modelos

Vale ressaltar que os modelos para a previsão da fluência e retração do concreto são baseados no ajuste de dados experimentais, sendo, portanto, pelo menos em parte empíricos. No entanto, por mais complexa que seja a formulação matemática empregada, o modelo desenvolvido apresentará certas incertezas e condições restritas de uso, e conseqüentemente, se um modelo tiver excelente concordância com determinados dados de ensaio, não significa que este modelo vai satisfazer todos os eventuais ensaios realizados no futuro [NEVILLE et al. (1983)]. Portanto, qualquer modelo desenvolvido tem que ter precisão suficiente, contudo, é necessário considerar na análise estrutural as incertezas envolvidas neste modelo, para se obter estruturas de concreto mais racionais [TSUBAKI (1993)].

A seguir, comparações entre os modelos de fluência são apresentadas nas figuras 2.11, 2.12 e 2.13, averiguando, respectivamente, a influência da idade de

aplicação da carga, umidade relativa e dimensões da peça no coeficiente de fluência último $\varphi(\infty, t_0)$. Pelas figuras, pode-se observar que houve diferenças significativas entre os modelos, principalmente, para concretos carregados a pequenas idades, ambientes secos e elementos com seção transversal reduzida, ficando os modelos do CEB-90 (1991) e da NBR 6118 (2003) mais próximos entre si.

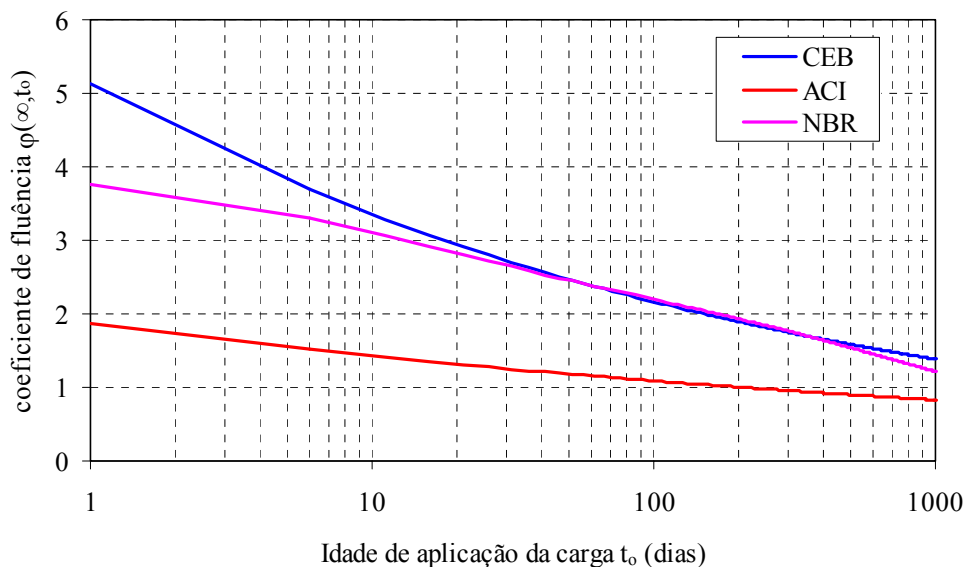


FIGURA 2.11 – Influência da idade de aplicação da carga no coeficiente de fluência último;
 $U = 60\%$ e $A_c/u_{ar} = 250\text{mm}$

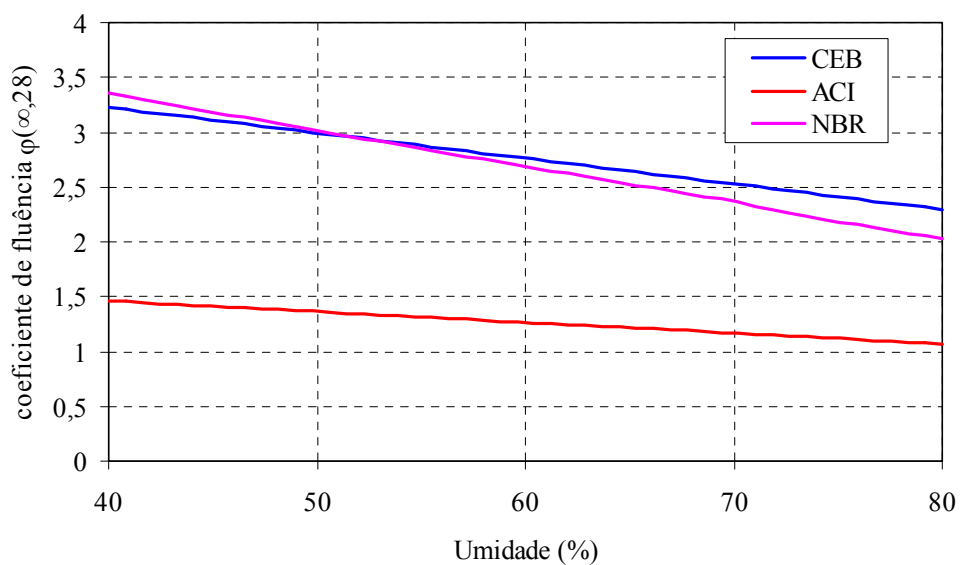
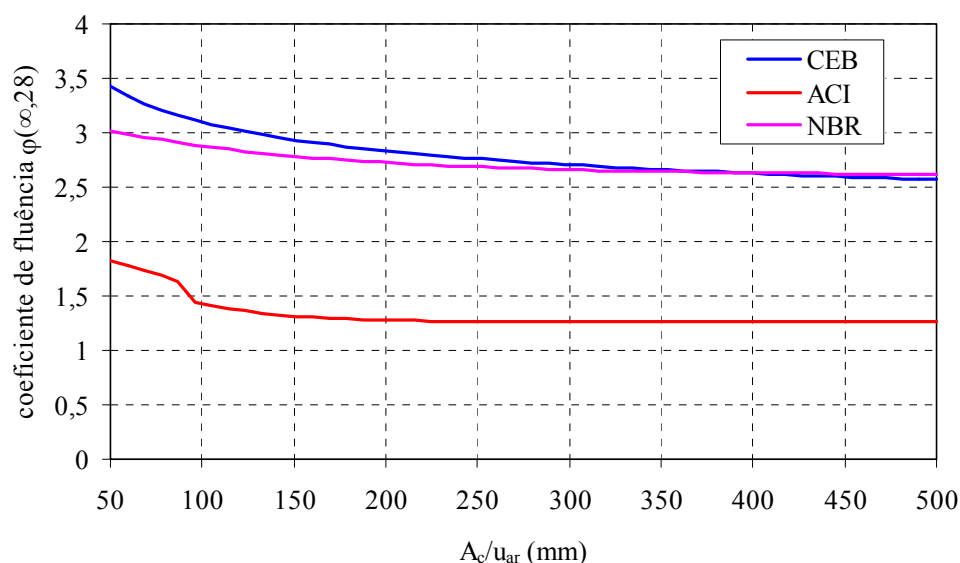


FIGURA 2.12 – Influência da umidade relativa no coeficiente de fluência último; $A_c/u_{ar} = 250\text{mm}$

FIGURA 2.13 – Influência das dimensões da peça no coeficiente de fluência último; $U = 60\%$

Para fins de exemplificação dos três modelos de fluência, é feita a comparação dos modelos com resultados de ensaios. Foi utilizado na comparação, conforme figuras 2.14 e 2.15, resultado de ensaios realizados por HASPARYK et al. (2005) no Laboratório de Concreto de Furnas Centrais Elétricas S.A., baseados em um concreto convencional, com 496 kg/m^3 de cimento, agregado do tipo litológico quartzo-micaxisto e relação a/c igual a 0,43.

Para os exemplos em questão, os modelos de fluência do ACI-209 (1992) e da NBR 6118 (2003) superestimaram os resultados do ensaio para as duas idades de carregamento avaliadas. O modelo do CEB-90 (1991) apresentou comportamento subestimado para a idade de carregamento de sete dias, tendendo a aproximar-se dos resultados de ensaio para idades mais avançadas. Já para a idade de 28 dias, o modelo do CEB-90 (1991) superestima o resultado da fluência como os outros, porém mais próximo dos valores de ensaio.

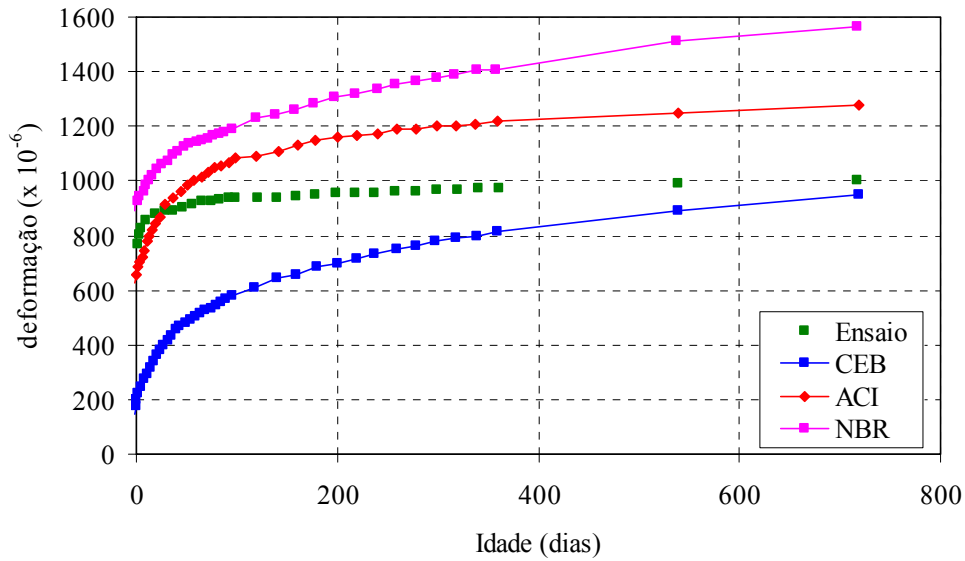


FIGURA 2.14 – Comparação dos modelos de fluência com resultados de ensaios para a idade de carregamento de sete dias [HASPARYK et al. (2005)]

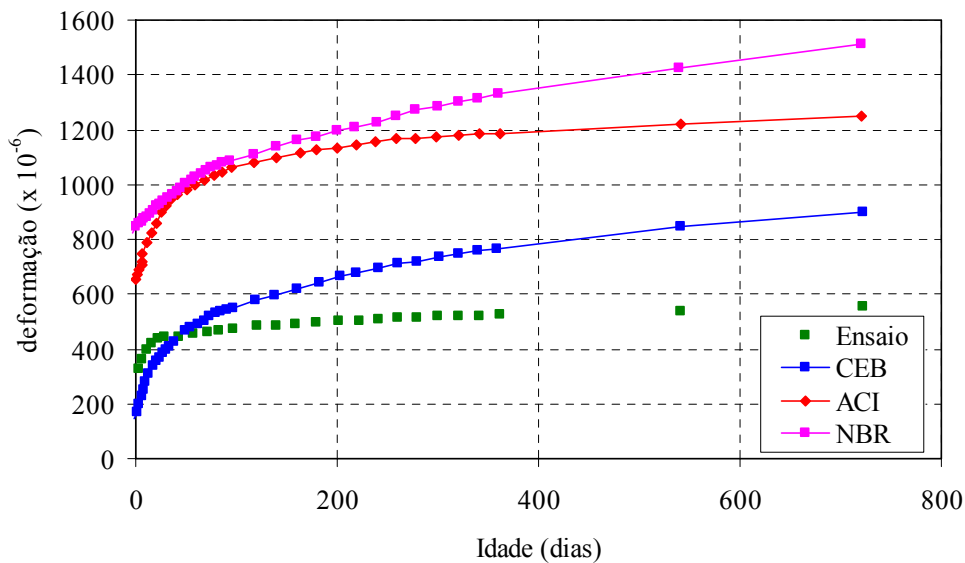


FIGURA 2.15 – Comparação dos modelos de fluência com resultados de ensaios para a idade de carregamento de 28 dias [HASPARYK et al. (2005)]

Apresentam-se nas figuras 2.16 e 2.17 comparações entre os modelos de retração, avaliando, respectivamente, a influência da umidade relativa e dimensões da peça no valor da deformação por retração última, com a consideração do início do efeito da retração aos três dias $\varepsilon(\infty,3)$. Assim como para a fluência, houve diferenças

significativas entre os modelos de retração, principalmente, para ambientes secos e elementos com seção transversal elevada.

Os valores da retração última no modelo do CEB-90 (1991) são praticamente constantes com a variação de A_c/u_{ar} , conforme mostra a figura 2.17, porque tal valor entra na equação de desenvolvimento da retração com o tempo, $\beta_s(t-t_0)$, e quando $t \rightarrow \infty$, $\beta_s \rightarrow 1$ qualquer que seja o valor de A_c/u_{ar} .

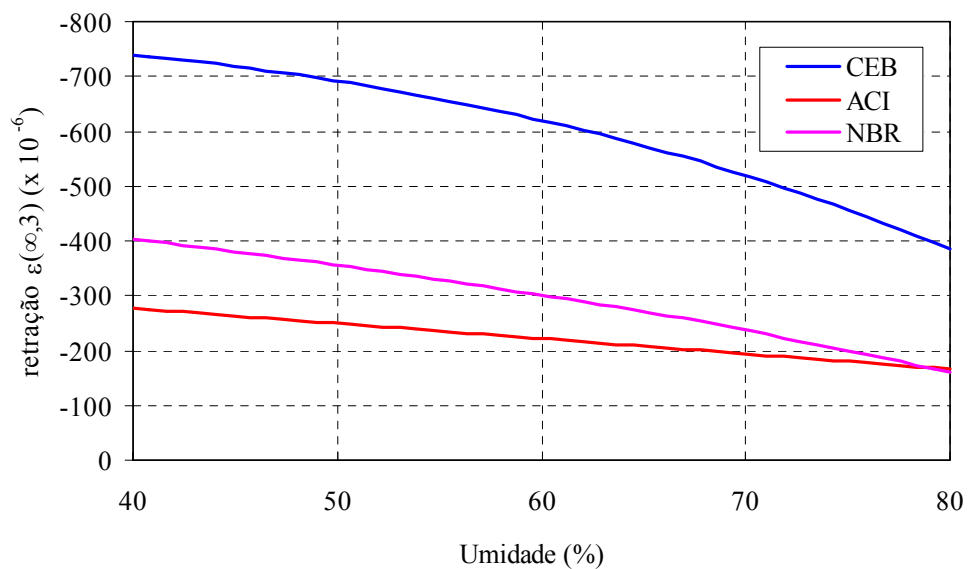


FIGURA 2.16 – Influência da umidade relativa na deformação por retração última; $A_c/u_{ar} = 250\text{mm}$

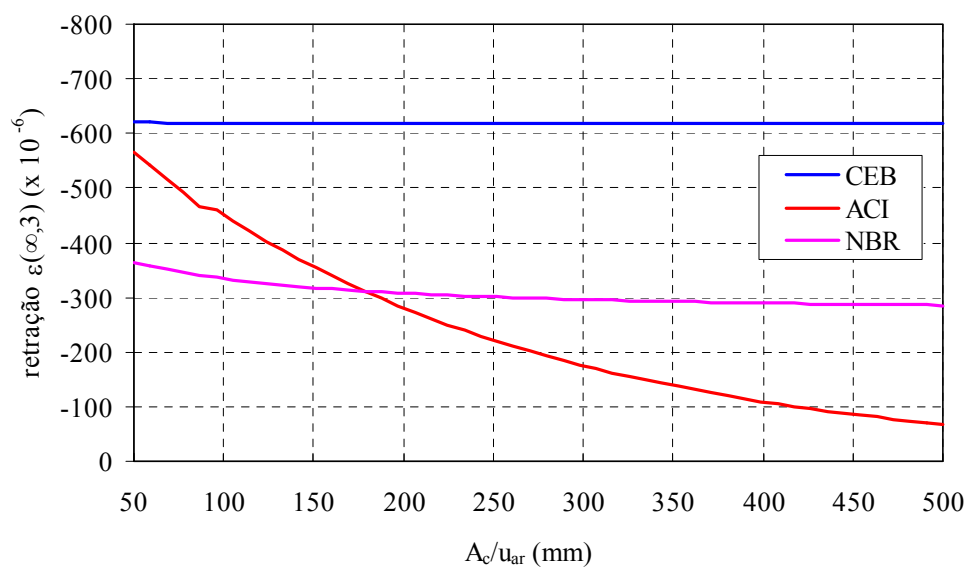


FIGURA 2.17 – Influência das dimensões da peça na deformação por retração última; $U = 60\%$

Na figura 2.18, apresenta-se a evolução da retração com o tempo para os três modelos de retração. Pela figura, nota-se que os modelos do CEB-90 (1991) e da NBR 6118 (2003) ficaram mais próximos entre si, no entanto, a partir de 2000 dias a diferença entre os modelos começa a crescer. Próximo de 10000 dias, os valores da retração para os modelos do ACI-209 (1992) e da NBR 6118 (2003) começam a se manter constantes, enquanto o modelo do CEB-90 (1990) continua aumentando.

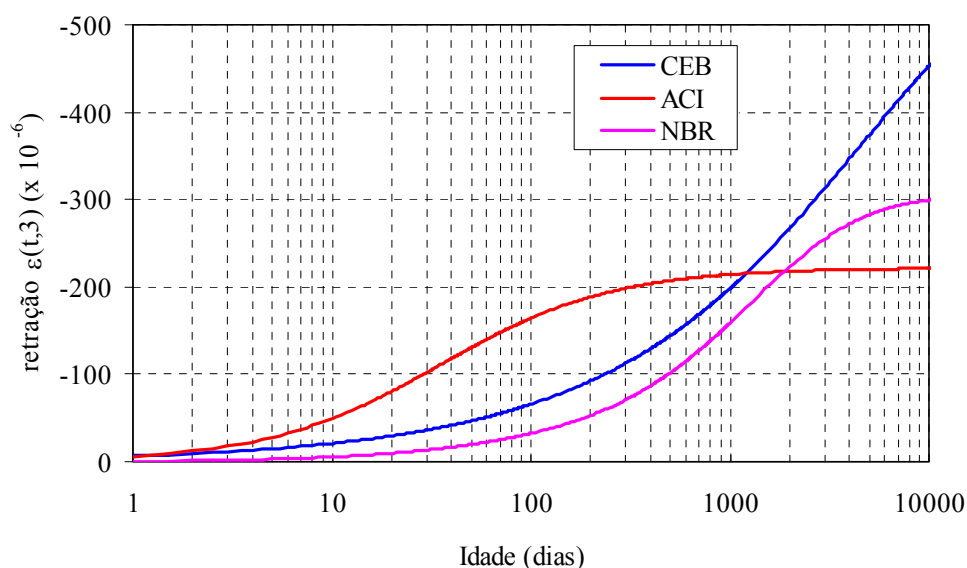


FIGURA 2.18 – Evolução da deformação por retração com o tempo; $U = 60\%$ e $A_c/u_{ar} = 250\text{mm}$

2.4 Métodos de análise da fluência

Para se estimar a deformação em um dado tempo em peças de concreto em que a carga não é mantida constante é necessário empregar métodos de análise que considerem todo o histórico de tensões. A característica comum em todos os métodos de análise da fluência é que todos são baseados na hipótese de que a fluência varia linearmente com a tensão e, conseqüentemente, obedecem ao princípio da superposição dos efeitos. Pelo princípio da superposição, postulado por McHENRY¹ *apud* MEHTA & MONTEIRO (1994), admite-se que as deformações

¹ McHENRY, D. (1943). A new aspect of creep in concrete and its application to design. *Proc. ASTM.*, v.43, p.1069-86. *apud* MEHTA, P.K.; MONTEIRO, P.J.M. (1994). *Concreto: estrutura, propriedades e materiais*. São Paulo, Pini.

produzidas no concreto em um tempo t qualquer, por um acréscimo de tensão em um tempo t_0 qualquer, são independentes dos efeitos de qualquer tensão aplicada tanto antes quanto depois de t_0 .

Portanto, pelo princípio da superposição a resposta para uma soma de duas histórias de tensões é a soma das respostas obtidas para cada uma delas separadamente. Conseqüentemente, a deformação devido a um histórico de tensão $\sigma(t)$ pode ser obtida considerando o histórico como uma soma de incrementos $d\sigma(\tau)$ aplicados em tempos $\tau \in (0, t)$ e somando as correspondentes deformações, dadas por $d\sigma(\tau)\Phi(t, \tau)$. Com isso chega-se na integral de superposição ou integral de Stieltjes, dada por:

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \int_0^t \Phi(t, \tau) d\sigma(\tau) \quad 2.92$$

Vale ressaltar, entretanto, que o princípio da superposição só é válido sob as seguintes condições:

- a) O nível de tensões estiver dentro das condições de serviço. O CEB-90 (1991) estabelece o limite em $0,4.f_{cm}(t_0)$, enquanto que o ACI-209 (1992) entre $0,4$ e $0,5.f_c$, já a NBR 6118 (2003) em $0,5.f_c$;
- b) Somente para acréscimo de tensões. Quando as tensões decrescem, o princípio da superposição pode ser aplicado desde que o decréscimo de tensão seja pequeno;
- c) Quando a peça não sofrer mudanças significativas no teor de umidade;
- d) Quando não houver aumentos exagerados de tensões logo após o carregamento inicial.

2.4.1 Formulação integral

2.4.1.1 Método incremental ou método passo a passo

O Método incremental consiste em resolver a integral de Stieltjes dividindo o tempo total de análise em pequenos intervalos discretos $t_1, t_2, \dots, t_1, \dots$,

t_k e tomando-se os sub-intervalos $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, como indicado na figura 2.19. Assim, a integral de Stieltjes, representada pela área do diagrama da figura 2.19 (c), pode ser resolvida de maneira aproximada utilizando a forma retangular ou a forma trapezoidal.

$$\varepsilon_{\sigma}(t_k) = \sum_{i=1}^k \Phi(t_k, t_i) \Delta \sigma_i \quad \text{aprox. retangular} \quad 2.93a$$

$$\varepsilon_{\sigma}(t_k) = \sum_{i=1}^k \frac{\Phi(t_k, t_i) + \Phi(t_k, t_{i-1})}{2} \Delta \sigma_i \quad \text{aprox. trapezoidal} \quad 2.93b$$

Segundo DILGER (1982b), se for tomado um intervalo de tempo muito grande, pode-se utilizar a regra de Simpson para se obter um resultado mais preciso.

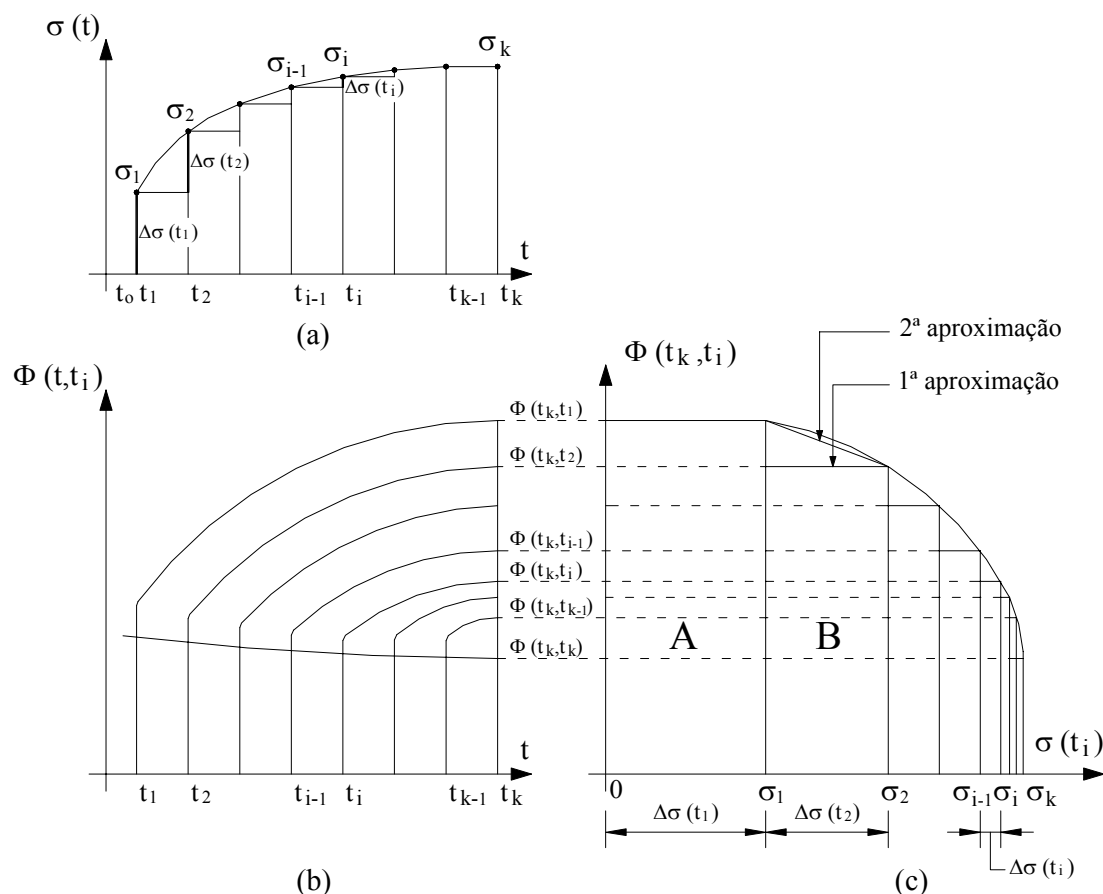


FIGURA 2.19 – Definição dos intervalos para o método incremental [adaptado CEB (1984)]

(a) Tensões no decorrer do tempo; (b) Curvas de funções fluência;

(c) Função fluência x variação de tensão

2.4.1.2 Método do Módulo Efetivo (EM method)

O Método do Módulo Efetivo proposto em 1927 por FABER² *apud* BAZANT (1982) constitui numa aproximação menos refinada para o cálculo da integral de Stieltjes e consiste na aplicação da regra retangular em um único intervalo de tempo $t - t_0$.

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \sigma(t_0) \cdot \Phi(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) d\sigma(\tau) \quad 2.94$$

Porém,

$$\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) d\sigma(\tau) = [\sigma(t) - \sigma(t_0)] \Phi(t, t_0) \quad 2.95$$

E assim, como ilustrado na figura 2.20.

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \sigma(t) \cdot \Phi(t, t_0) \quad 2.96$$

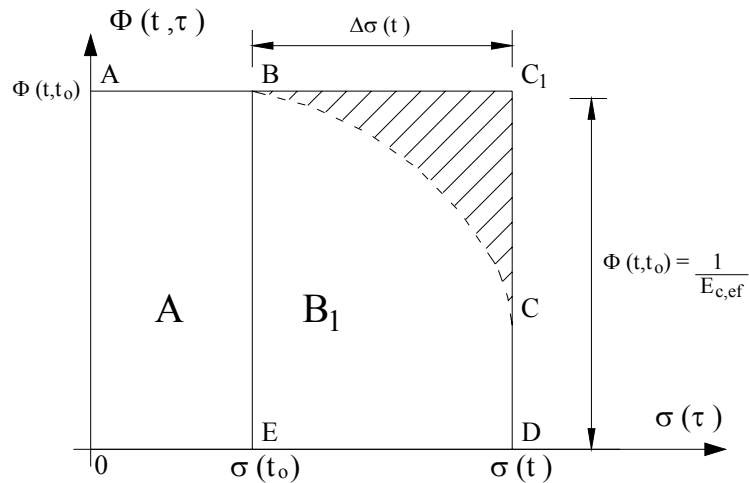


FIGURA 2.20 – Método do módulo efetivo [adaptado CEB (1984)]

² FABER, H. (1927). Plastic yield, shrinkage and other problems of concrete and their effect on design, *Minutes Proc. Inst. Civ. Eng.*, v.225, p.27-76. *apud* BAZANT, Z.P. (1982). Mathematical models for creep and shrinkage of concrete. In: BAZANT, Z.P.; WITTMANN, F.H., eds. *Creep and shrinkage in concrete structures*. New York, John Wiley & Sons. Cap. 7, p.163-256.

Introduzindo a função fluência $\Phi(t, t_0)$, tem-se:

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \sigma(t) \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}} \right] \quad 2.97$$

$$\text{Tomando-se: } \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}} \right] = \Phi(t, t_0) = \frac{1}{E_{c,ef}}, \text{ tem-se:}$$

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \frac{\sigma(t)}{E_{c,ef}} \quad 2.98$$

Quando se considera o módulo de elasticidade constante com o tempo, por razões de simplificação, tem-se:

$$E_{c,ef} = \frac{E_c(t_0)}{1 + \varphi_{28}(t, t_0)} \quad 2.99$$

Segundo o método do módulo efetivo, a deformação por fluência na idade t depende exclusivamente do valor da tensão instantânea, sendo que o histórico de tensões não é considerado. Portanto, este método apresenta resultados satisfatórios somente quando a tensão no concreto não varia significativamente e quando a influência da idade do concreto não for expressiva, caso dos concretos de idade avançada. Em situações de tensões decrescentes, as deformações por fluência são subestimadas e sob tensões crescentes, são superestimadas.

2.4.1.3 Método da Tensão Média

O Método da Tensão Média trata-se de uma melhor aproximação para o cálculo da integral de Stieltjes e consiste na aplicação da regra trapezoidal em um único intervalo de tempo $t - t_0$, como mostra a figura 2.21.

$$\varepsilon_{\sigma}(t) = \sigma(t_0) \cdot \Phi(t, t_0) + \Delta\sigma(t, t_0) \cdot \frac{\Phi(t, t) + \Phi(t, t_0)}{2} \quad 2.100$$

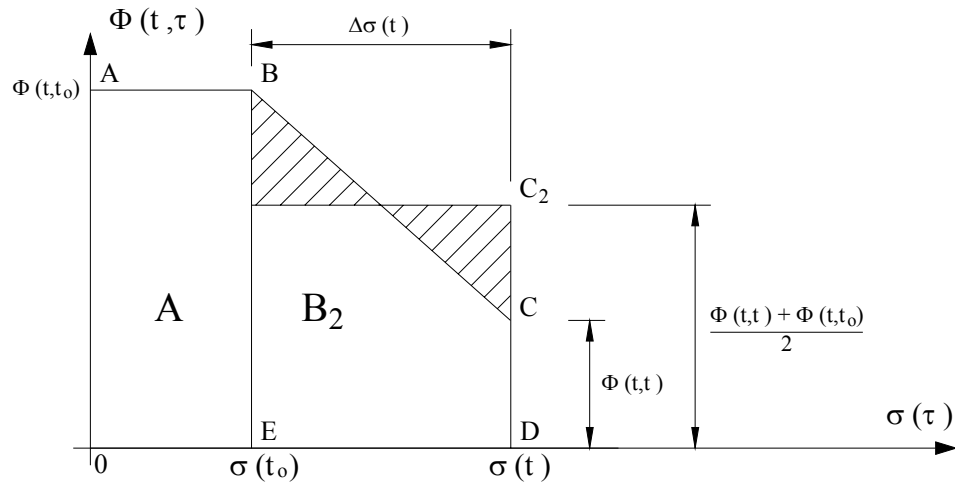


FIGURA 2.21 – Método da tensão média [adaptado CEB (1984)]

2.4.1.4 Método do Módulo Efetivo Ajustado (AAEM method)

O método do módulo efetivo ajustado, também conhecido por método de Trost-Bazant, foi desenvolvido em 1967 por TROST³ apud DILGER (1982b) e melhorado posteriormente por BAZANT (1972). Este método consiste em aplicar uma fórmula de enquadramento mais refinada para substituir o cálculo da integral de superposição através de um fator de correção.

$$\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) d\sigma(\tau) = [\sigma(t) - \sigma(t_0)] \mu(t, t_0) \Phi(t, t_0) \tag{2.101}$$

O coeficiente $\mu(t, t_0)$ é um fator de redução conveniente a ser aplicado na deformação $\Delta\sigma(t) \cdot \Phi(t, t_0)$. Este fator é introduzido através de um multiplicador $\chi(t, t_0)$ conhecido como coeficiente de envelhecimento, como apresentado na figura 2.22. Assim, a integral de superposição torna-se:

$$\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) d\sigma(\tau) = [\sigma(t) - \sigma(t_0)] \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \chi(t, t_0) \cdot \frac{\Phi_{28}(t, t_0)}{E_{c28}} \right] \tag{2.102}$$

³ TROST, H. (1967). Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech und Relaxations probleme bei Beton und Spannbeton. *Beton. Stahlbeton.*, v.62, n.10, p.230-8; n.11, p.261-9. apud DILGER, W.H. (1982b). Methods of structural creep analysis. In: BAZANT, Z.P.; WITTMANN, F.H., eds. *Creep and shrinkage in concrete structures*. New York, John Wiley & Sons. Cap. 9, p.305-340.

2.4.2.1 Método de Dischinger ou método da razão de fluência (Rate of creep method)

As bases do método de Dischinger, também chamado de método da razão de fluência, foram estabelecidas em 1930 por GLANVILLE⁴ *apud* DILGER (1982b). Posteriormente, em 1932, WHITNEY⁵ *apud* DILGER (1982b) desenvolveu as formulações matemáticas para o método, sendo que, em 1937, DISCHINGER⁶ *apud* DILGER (1982b) aplicou suas formulações para a resolução de problemas estruturais mais complexos.

O método de Dischinger é baseado na hipótese de que a velocidade de desenvolvimento (razão ou taxa) de fluência é independente da idade de aplicação do carregamento, ou seja, as curvas de fluência são paralelas para todas as idades de aplicação da carga, sendo obtidas por translação paralela ao eixo vertical, conforme a figura 2.23.

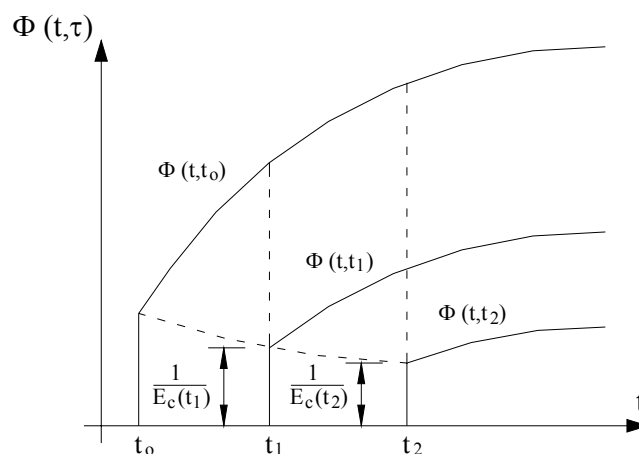


FIGURA 2.23 – Curvas de função fluência segundo o método da razão de fluência

⁴ GLANVILLE, W.H. (1930). Studies in reinforced concrete, III – creep or flow of concrete under load. *Building Research Tech. Pap.*, n.12. *apud* DILGER, W.H. (1982b). Methods of structural creep analysis. In: BAZANT, Z.P.; WITTMANN, F.H., eds. *Creep and shrinkage in concrete structures*. New York, John Wiley & Sons. Cap. 9, p.305-340.

⁵ WHITNEY, C.S. (1932). Plain and reinforced concrete arches. *Journal of American Concrete Institute*, v.28, p.479-519. *apud* DILGER, W.H. (1982b). Methods of structural creep analysis. In: BAZANT, Z.P.; WITTMANN, F.H., eds. *Creep and shrinkage in concrete structures*. New York, John Wiley & Sons. Cap. 9, p.305-340.

⁶ DISCHINGER, F. (1937). Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken. *Der Bauingenieur*, v.18, n.33/34, p.487-520; n.35/36, p.539-52; n.39/40, p.595-621. *apud* DILGER, W.H. (1982b). Methods of structural creep analysis. In: BAZANT, Z.P.; WITTMANN, F.H., eds. *Creep and shrinkage in concrete structures*. New York, John Wiley & Sons. Cap. 9, p.305-340.

Para o instante t_0 de aplicação da carga, a função fluência assume a seguinte forma:

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + C(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] \quad 2.104$$

Considerando agora um caso em que a carga é aplicada em um instante $t_1 > t_0$, tem-se:

$$\Phi(t, t_1) = \frac{1}{E_c(t_1)} + \frac{1}{E_c(t_0)} \cdot [\varphi(t, t_0) - \varphi(t_1, t_0)] \quad 2.105$$

Aplicando estas equações para o cálculo da deformação total no instante t devido uma tensão σ_0 entre t_0 e t_1 (ver figura 2.24), tem-se:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot [\Phi(t, t_0) - \Phi(t, t_1)] \quad 2.106$$

Ou ainda,

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \cdot \left[\frac{1}{E_c(t_0)} - \frac{1}{E_c(t_1)} + \frac{1}{E_c(t_0)} \cdot \varphi(t_1, t_0) \right] \quad 2.107$$

Fazendo-se $E_c(t_1) = E_c(t_0)$, a deformação no instante $t > t_1$ será:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_c(t_0)} \cdot \varphi(t_1, t_0) \quad 2.108$$

Um ponto importante a ser observado é que a deformação após a remoção do carregamento permanece constante (figura 2.24), o que significa que a recuperação por fluência observada em experimentos após a remoção de carga não é representada de maneira adequada por esse método.

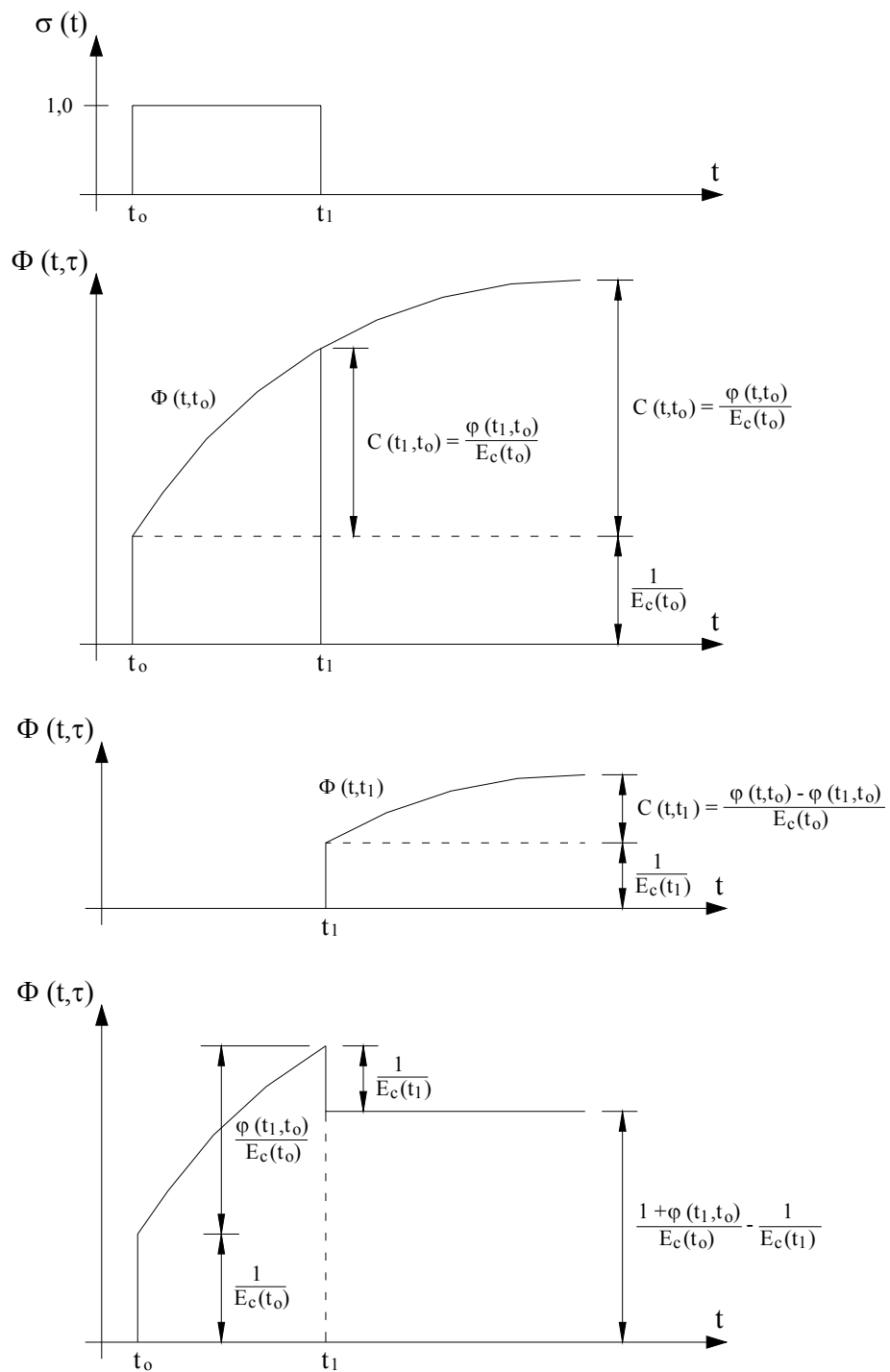


FIGURA 2.24 – Relação entre deformação e tempo para uma carga unitária aplicada entre t e t_0 segundo o método da razão de fluência [adaptado DILGER (1982b)]

O método da razão de fluência conduz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma(t)}{E_c(t_0)} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{E_c(t)} \cdot \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\varepsilon_{sc}}{dt} \quad 2.109$$

A suposição de que as curvas de fluência são paralelas implica que a fluência decresce rapidamente com o acréscimo da idade de aplicação do carregamento, tornando-se nula quando o concreto for carregado em idade muito avançada. Isto faz com a haja, no caso de tensões decrescentes, uma superestimativa da deformação por fluência. Mas como destacado por BAZANT (1988), o método da razão de fluência apresenta bons resultados para cargas aplicadas em concretos novos, em contraste com o método do módulo efetivo cuja aplicação é adequada para concretos de idades avançadas.

2.4.2.2 Método da razão da deformação lenta irreversível (*Rate of flow method*)

A fim de suprir as deficiências apresentadas pelo método de Dischinger, em 1965, ENGLAND & ILLSTON⁷ *apud* DILGER (1982b) propuseram representar a função fluência como a soma de três componentes: a deformação elástica (ε_{el}), a deformação lenta reversível (ε_d), deformação lenta irreversível (ε_f). Os autores concluíram através de experimentos que a deformação lenta reversível independe da idade de aplicação do carregamento e atinge o seu valor final muito antes da fluência lenta irreversível. A fluência lenta irreversível representa o componente irreversível da fluência total, e é considerada da mesma forma que o método da razão de fluência considera a deformação por fluência total, ou seja, a razão da fluência lenta irreversível é a mesma em qualquer idade.

Utilizando a função fluência com a carga inicial aplicada na idade t_0 , tem-se:

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + C_d(t - t_0) + C_f(t) - C_f(t_0) \quad 2.110$$

⁷ ENGLAND, G.L.; ILLSTON, J.M. (1965). Methods of computing stress in concrete from a history of measured strain. *Civil Engineering, London. apud* DILGER, W.H. (1982b). Methods of structural creep analysis. In: BAZANT, Z.P.; WITTMANN, F.H., eds. *Creep and shrinkage in concrete structures*. New York, John Wiley & Sons. Cap. 9, p.305-340.

ou

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi_d(t - t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi_f(t) - \varphi_f(t_0)}{E_c(t_0)} \quad 2.111$$

E para cargas subseqüentes aplicadas em um instante $t' > t_0$, tem-se:

$$\Phi(t, t') = \frac{1}{E_c(t')} + \frac{\varphi_d(t - t')}{E_c(t')} + \frac{\varphi_f(t) - \varphi_f(t')}{E_c(t_0)} \quad 2.112$$

Para uma tensão unitária aplicada na idade t_0 e removida na idade t_1 , como mostrada na figura 2.25, a deformação no instante t será:

$$\varepsilon(t) = [\Phi(t, t_0) - \Phi(t, t_1)] \quad 2.113$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{1}{E_c(t_0)} \cdot \varphi_d(t - t_0) + \frac{1}{E_c(t_0)} [\varphi_f(t_1) - \varphi_f(t_0)] - \frac{1}{E_c(t_1)} - \frac{1}{E_c(t_1)} \cdot \varphi_d(t - t_1) \quad 2.114$$

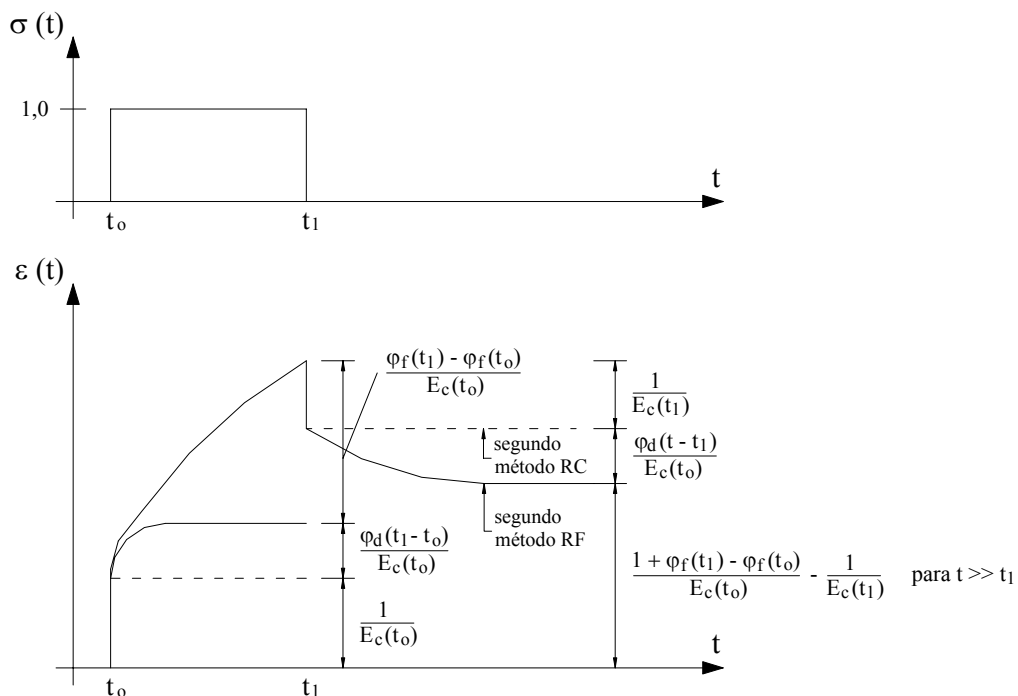


FIGURA 2.25 – Relação entre deformação e tempo para uma carga unitária aplicada entre t e t_0 segundo o método da deformação lenta irreversível [adaptado DILGER (1982b)]

Para um tempo $t \gg t_1$, observa-se a completa recuperação do componente da deformação lenta reversível. Assim, a deformação por fluência deve ser expressa da seguinte forma:

$$\varepsilon(t) = \frac{1 + \varphi_f(t_1) - \varphi_f(t_0)}{E_c(t_0)} - \frac{1}{E_c(t_1)} \quad 2.115$$

2.4.2.3 Método de Dischinger melhorado (*Improved Dischinger method*)

Para possibilitar um tratamento analítico mais simples, em 1970, NIELSEN⁸ *apud* DILGER (1982b) propôs adicionar a parcela de deformação lenta reversível à parcela de deformação elástica instantânea, e tratar a parcela de deformação lenta irreversível da mesma maneira como o método da razão de fluência considera a deformação por fluência total. Com estas considerações, tem-se que, para uma carga inicial aplicada na idade t_0 , a função fluência pode ser expressa da seguinte forma:

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{E_d} + \frac{\varphi_f(t) - \varphi_f(t_0)}{E_c(t_0)} \quad 2.116$$

onde:

$$\frac{1}{E_d} = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi_d}{E_c(t_0)} \quad 2.117$$

Para cargas subseqüentes aplicadas em um instante $t' > t_0$, tem-se:

$$\Phi(t, t') = \frac{1}{E_d} + \frac{\varphi_f(t) - \varphi_f(t')}{E_c(t_0)} \quad 2.118$$

com

$$\frac{1}{E_d} = \frac{1}{E_c(t')} + \frac{\varphi_d}{E_c(t_0)} \quad 2.119$$

O método melhorado de Dischinger constitui um método composto pelo método do módulo efetivo e pelo método da razão de fluência. A vantagem do

⁸ NIELSEN, L.F. (1970). Kriechen und Relaxation des Betons. *Beton. Stahlbeton.*, v.65, p.272-5. *apud* DILGER, W.H. (1982b). Methods of structural creep analysis. In: BAZANT, Z.P.; WITTMANN, F.H., eds. *Creep and shrinkage in concrete structures*. New York, John Wiley & Sons. Cap. 9, p.305-340.

método melhorado de Dischinger, como salientado por DILGER (1982b), está na simplicidade do tratamento analítico e dos bons resultados obtidos para os casos práticos, em que o tempo de aplicação de carga excede de três meses. Contudo, em concreto de idade avançada, a fluência é subestimada como no caso do método da razão de fluência.

A equação diferencial pelo método melhorado de Dischinger será:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma(t)}{E_c(t_0)} \frac{d\varphi_f}{dt} + \frac{1 + \varphi_d}{E_c(t)} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\varepsilon_{sc}}{dt} \quad 2.120$$

2.4.3 Método dos núcleos degenerados

Como já foi visto, a integral de Stieltjes pode ser resolvida dividindo o tempo total de análise em passos de tempo Δt . E assim, a integral de Stieltjes pode ser aproximada por uma soma finita envolvendo acréscimos incrementais de tensão sobre os passos de tempo. No entanto, este método exige o armazenamento de todo o histórico de tensão. Isso pode ser contornado aproximando a função fluência $\Phi(t, \tau)$ por uma série de exponenciais reais conhecida por série de Dirichlet ou série de Prony, dada por:

$$\Phi(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i(\tau)} \left[1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau_i}} \right] \quad 2.121$$

em que τ_i são coeficientes chamados de tempos de estabilização e $E_i(\tau)$ são os coeficientes dependentes de τ e que têm a dimensão do módulo de elasticidade. Estes coeficientes podem ser determinados ajustando a série de Dirichlet aos valores experimentais ou fórmulas empíricas, como aquelas recomendadas por normas, através do método dos mínimos quadrados.

BAZANT & WU (1973) mostra que a série de Dirichlet representa a solução do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \sum_{i=1}^n \dot{\varepsilon}_i \quad 2.122$$

$$\dot{\varepsilon}_i = \sigma_i/\eta_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad 2.123$$

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_i + E_i \cdot \dot{\varepsilon}_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad 2.124$$

Este sistema de equações que corresponde ao modelo reológico mostrado na figura 2.26, com variáveis E , E_i e η_i , é conhecido como modelo generalizado de Kelvin.

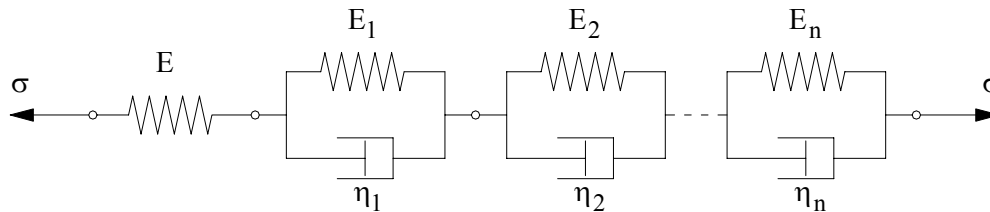


FIGURA 2.26 – Modelo generalizado de Kelvin

Quando a função fluência, representada pela série de Dirichlet, é introduzida na integral de Stieltjes, o integrando se degenera em um produto de uma função de τ e uma função de t . A função resultante não envolve a variável de integração e pode ser extraída da integral, restando apenas uma integração de funções que são independentes de t . Portanto, para cada novo passo de tempo, é necessário somente considerar a mudança no valor da integral do último passo de tempo ao invés de todo o histórico de tensão, como é exigido no caso geral.

3.1 Considerações iniciais

A análise de estruturas de concreto é um problema consideravelmente complexo devido às dificuldades causadas por muitos fatores, podendo citar entre eles, a consideração do comportamento conjunto de dois ou mais materiais com propriedades distintas, os efeitos da história de carregamento aplicado, não linearidade da resposta devido à fissuração e a influência dos efeitos diferidos provocados pela fluência e retração do concreto e a relaxação do aço de protensão. Além disso, maiores dificuldades são adicionadas se for considerado a influência do processo construtivo, tais como, a mudança das características resistentes da seção, incorporação de novas partes à estrutura, ou ainda, variação nas condições de contorno devido, por exemplo, aos processos de cimbramento e descimbramento.

A consideração desses fatores terá especial importância na determinação dos deslocamentos, distribuição de tensões e fissuração das distintas partes da estrutura, além de influenciar na evolução das tensões e deformações ao longo do tempo.

Devido ao comportamento característico dos materiais constituintes das estruturas de concreto (fluência, retração, relaxação, fissuração), pode haver significativas redistribuições de tensões, variações nas reações de apoio e dos esforços internos no caso de estruturas hiperestáticas, sendo que a importância desses fenômenos é mais destacável no caso de construções realizadas por etapas.

Muitos métodos, baseado na seção transformada, foram propostos para levar em consideração os efeitos dependentes do tempo em seções compostas não

fissuradas, como aqueles desenvolvidos por DILGER (1982a), GHALI & FAVRE (1986), GILBERT (1989) e NEVILLE et al. (1983). Além disso, empreendeu-se muito esforço na análise ao longo do tempo de seções fissuradas, podendo citar os trabalhos desenvolvidos por BRADFORD & GILBERT (1992), GHALI & FAVRE (1986), RAO et al. (1994) e SMERDA & KRISTEK (1988).

Foram desenvolvidos ainda muitos modelos analíticos para a previsão da resposta não linear e dependente do tempo de estruturas de concreto, tais como CRUZ et al. (1998), JENDELE & PHILLIPS (1992), JURKIEWIEZ et al. (1999), KANG & SCORDELIS (1980), KWAK & SEO (2000) e MARÍ (2000), baseados no método dos elementos finitos com aproximação do elemento de viga em camadas ou filamentos.

Já os modelos desenvolvidos por CAROL & MURCIA (1989), DEZI & TARANTINO (1993), GILBERT & BRADFORD (1995) e TORRES (2001), baseiam-se na extensão dos métodos matriciais, não necessitando a discretização em elementos de menor dimensão nem o emprego de funções de forma, reduzindo o grau de liberdade do problema e obtendo-se sistemas com menor número de equações. No entanto, deve-se efetuar a integração ao longo do elemento, necessitando de regras numéricas adequadas.

Os efeitos do processo construtivo no esquema estrutural foram incluídos nos modelos desenvolvidos por GHALI & ELBADRY (1989), TRADOS et al. (1979), VAN ZYL & SCORDELIS (1979), SHUSHKEWICH (1986), HERKENHOFF (1994), DEZI & TARANTINO (1991) e CRUZ et al. (1998).

Para o desenvolvimento deste trabalho, a análise estrutural é realizada utilizando o programa computacional denominado CONSNOU desenvolvido em linguagem FORTRAN pelo Professor Antonio R. Marí do Departamento de Engenharia da Universidade Politécnica da Catalunha, situada em Barcelona – Espanha. Este programa computacional, baseado no método dos elementos finitos, divide a seção transversal dos elementos em número discreto de filamentos de concreto e aço e a integração das áreas dos filamentos é feita considerando o comportamento não-linear e dependente do tempo dos materiais, assim como o processo evolutivo da construção.

A seguir, são apresentadas as bases do programa computacional CONSNOU, assim como uma avaliação do mesmo através da simulação de estruturas reais analisadas em laboratório.

3.2 Propriedades dos materiais

A fim de incorporar propriedades de materiais variados dentro da estrutura, o elemento é dividido em um número discreto de filamentos de concreto e aço, como mostrado na figura 3.1, assumindo que cada um dos filamentos apresente um estado uniaxial de tensão. Assume-se ainda que as seções planas permanecem planas e são desprezadas as deformações por cisalhamento. A deformação total em um determinado tempo e ponto da estrutura $\varepsilon(t)$, é obtida diretamente pela soma das parcelas da deformação mecânica $\varepsilon^m(t)$ e deformação não mecânica $\varepsilon^{nm}(t)$. Ou seja,

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^m(t) + \varepsilon^{nm}(t) \quad 3.1$$

$$\varepsilon^{nm}(t) = \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_T(t) \quad 3.2$$

onde:

$\varepsilon_{cc}(t)$ – deformação devido à fluência do concreto;

$\varepsilon_{cs}(t)$ – deformação devido à retração do concreto;

$\varepsilon_T(t)$ – deformação devido à variação térmica.

A contribuição do concreto tracionado entre fissuras (tension stiffening) é introduzida no modelo através da equação constitutiva do concreto na tração. Quando a deformação mecânica de um filamento de concreto atinge a deformação correspondente à sua resistência à tração, ocorre a fissuração. Então, a tensão não se anula imediatamente, mas diminui gradualmente enquanto a deformação aumenta, como mostrada na figura 3.2, de acordo com a curva proposta por CARREIRA & CHU (1986) que é dada por:

$$\sigma_t(\varepsilon) = f_t \cdot \left[\frac{\beta \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_t} \right)}{\beta - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_t} \right)^\beta} \right] \quad 3.3$$

onde:

f_t – resistência do concreto à tração;

ε_t – deformação correspondente à tensão f_t ;

β – parâmetro que depende da forma do diagrama tensão x deformação.

Existe um grande número de trabalhos que fizeram a consideração da contribuição do concreto tracionado entre fissuras através da modificação do diagrama constitutivo do concreto tracionado, podendo citar entre eles, ALWIS et al. (1994), BAZANT & OH (1984), CERVENKA (1985), HSU & ZHANG (1996), HU & SCHNOBRICH (1990), LEIBENGOOD et al. (1986), MASSICOTTE et al. (1990), OWEN et al. (1983), RAJASHEKHAR & ELLINGWOOD (1995), SATHURAPPAN et al. (1992), SUN et al. (1993) e TORRES (2001).

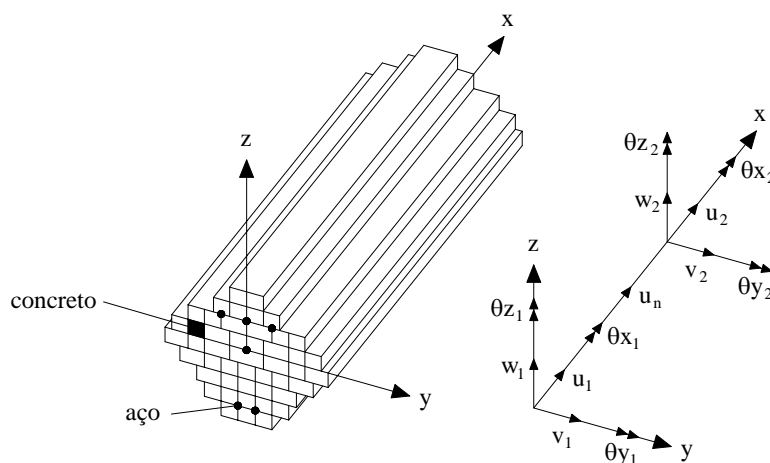


FIGURA 3.1 – Elemento finito

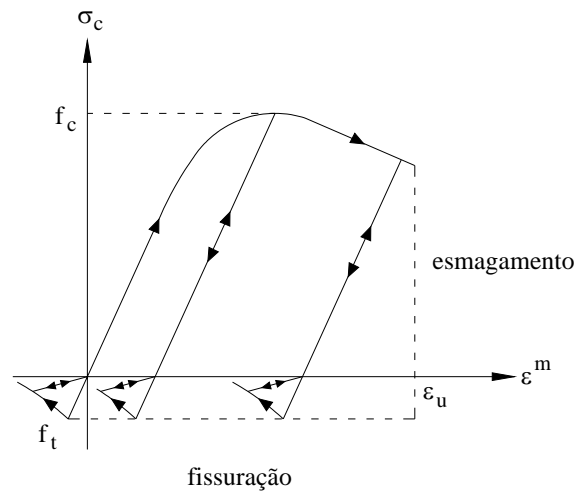


FIGURA 3.2 – Diagrama tensão x deformação uniaxial do concreto

Para o aço da armadura passiva, assume-se uma relação tensão x deformação bilinear, conforme figura 3.3. Enquanto que para o aço de protensão é usada uma curva tensão x deformação multilinear, como mostrado na figura 3.4.

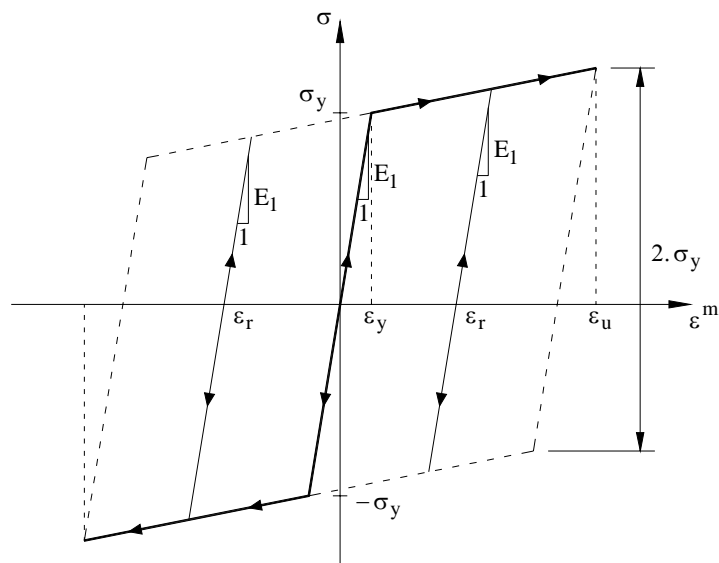


FIGURA 3.3 – Diagrama tensão x deformação uniaxial do aço da armadura passiva

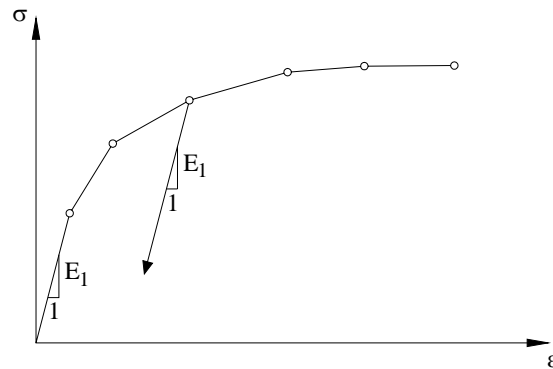


FIGURA 3.4 – Diagrama tensão x deformação uniaxial do aço de protensão

3.3 Comportamento diferido do concreto

A deformação por fluência do concreto $\varepsilon_{cc}(t)$ é avaliada através da solução da integral de superposição dada por:

$$\varepsilon_{cc}(t) = \int_0^t C(t, \tau) d\sigma(\tau) \quad 3.4$$

onde $C(t, \tau)$ é a fluência específica, dependente da idade τ em que começou agir a tensão $\sigma(\tau)$.

Como já foi visto, a análise da fluência pode ser feita dividindo o intervalo de tempo total em intervalos de tempo Δt , separados por passos de tempo. Com isso, a integral anterior pode ser aproximada por uma soma finita envolvendo acréscimos incrementais de tensão sobre os passos de tempo. A forma adotada para a fluência específica é a série de Dirichlet, dada por:

$$C(t, \tau) = \sum_{i=1}^m a_i(\tau) \left[1 - e^{-\lambda_i \cdot (t-\tau)} \right] \quad 3.5$$

em que os coeficientes m , λ_i e $a_i(\tau)$ são obtidos mediante um ajuste, pelo método dos mínimos quadrados, aos valores experimentais ou fórmulas empíricas, como aquelas recomendadas por normas.

Foram utilizados três termos da série de Dirichlet, ou seja, $m = 3$ e adotou-se $\lambda_i = 10^{-i}$. Além disso, a curva utilizada para o ajuste da série de Dirichlet foi obtida através das recomendações do CEB-90 (1991).

Substituindo a fluência específica, representada pela série de Dirichlet, na equação 3.4 e assumindo variação linear de tensão $\sigma(t)$ e dos valores $a_i(t)$ dentro de cada passo de tempo $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$, obtém-se a seguinte relação recursiva para o valor do incremento de deformação por fluência $\Delta \varepsilon_{cc}(t_n)$, no intervalo Δt_n :

$$\Delta \varepsilon_{cc}(t_n) = \sum_{i=1}^m A_{i,n} \left(1 - e^{-\lambda_i \cdot \Delta t_n}\right) + \Delta \sigma_n \cdot \Psi_1 \quad 3.6$$

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^m a_i(t_{n-1}) \cdot B_i + b_i(t_n) \left(\frac{\lambda_i \cdot \Delta t_n}{2} - B_i\right) \quad 3.7$$

$$B_i = 1 - \frac{\lambda_i - e^{-\lambda_i \cdot \Delta t_n}}{\lambda_i \cdot \Delta t_n}; \quad b_i(t_n) = \frac{a_i(t_n) - a_i(t_{n-1})}{\lambda_i \cdot \Delta t_n} \quad 3.8$$

$$A_i(t_n) = A_i(t_{n-1}) \cdot e^{-\lambda_i \cdot \Delta t_n} + [a_i(t_{n-1}) \cdot (1 - B_i) + b_i(t_{n-1}) \cdot B_i] \Delta t_n \quad 3.9$$

$$A_i(t_0) = 0 \quad 3.10$$

Como o incremento de deformação por fluência $\Delta \varepsilon_{cc}(t_n)$ para o intervalo Δt_n depende da mudança da tensão $\Delta \sigma_n$, na equação 3.6 esta relação deve ser avaliada iterativamente em cada passo de tempo. Este fato, contudo, não introduz uma modificação substancial no esquema de solução, já que iterações são necessárias para resolver o problema não linear. A relação recursiva das equações 3.6 a 3.10 evita o armazenamento de todo o histórico de tensão, sendo necessário armazenar apenas a tensão e uma variável interna do último passo de tempo, como já foi ressaltado no capítulo anterior.

3.4 Elemento finito

A análise da estrutura é realizada utilizando elementos de finitos unidos entre si. Cada elemento tem um comprimento e uma seção transversal prismática de

forma arbitrária, composta por um certo número de filamentos de concreto e aço, como mostrado na figura 3.1. Cada filamento é geometricamente definido por sua área e posição em relação ao eixo local da seção. Cada filamento pode ser constituído de diferentes tipos de concreto ou aço, podendo, com isso, estudar os efeitos de distribuições arbitrárias de deformações por retração ou térmicas. Para cada elemento finito, considera-se a armadura passiva constante ao longo do elemento e paralelo ao seu eixo longitudinal.

Existe a possibilidade ainda de considerar a atuação de um número discreto de cabos protendidos na estrutura, cada um tendo um perfil e área da seção transversal constante ao longo do seu comprimento. Cada cabo de protensão é composto por um número discreto de segmentos retilíneos, sendo que a localização dos dois pontos extremos de um segmento é definida pelas excentricidades locais e_y e e_z em cada extremo, como mostrado na figura 3.5.

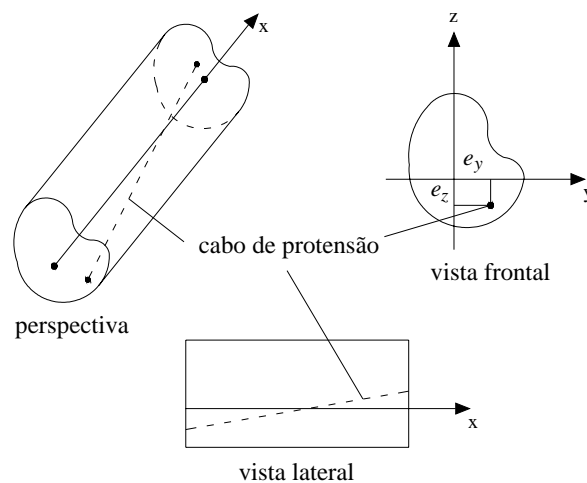


FIGURA 3.5 – Elemento finito com armadura de protensão

O elemento finito utilizado possui seis graus de liberdade, três deslocamentos e três rotações, associados a cada nó extremo, e um deslocamento axial associado a um nó interno localizado na metade do comprimento do elemento. O campo de deslocamentos considerado para o elemento é de polinômios cúbicos para os deslocamentos transversais e rotações na extremidade do elemento, funções lineares para os deslocamentos axiais e rotações na extremidade do elemento e

quadrática para o grau de liberdade axial intermediário. Estas funções de forma levam a uma solução exata nos deslocamentos e deformações para o caso de vigas prismática, com seção transversal constante, carregadas nos nós extremos. E para o caso da análise de vigas de seção variável, deveria ser usados polinômios de maior grau. Contudo, vigas de seção variável poderiam ser analisadas com uma aproximação razoável utilizando as funções de forma descritas anteriormente se fossem divididas em um número suficiente de pequenos elementos prismáticos com seções transversais diferentes.

A deformação axial ε_x para qualquer ponto dentro do elemento pode ser obtida assumindo a hipótese cinemática de Euler – Navier – Bernoulli de que seções transversais planas e ortogonais ao eixo antes da deformação permanecem planas, indeformadas e normais ao eixo após a deformação. A matriz de rigidez elástica do elemento é obtida pela seguinte expressão:

$$K_e = \int_V B^T \cdot E \cdot B \, dV \quad 3.11$$

onde

E – módulo tangente do material;

B – matriz que relaciona deformações aos deslocamentos nodais.

O vetor de cargas internas devido às tensões nos filamentos de concreto e aço, pode ser avaliado por:

$$R^{int} = \int_V B^T \cdot \sigma \, dV + \int_L B_\theta \cdot T_x \, dx \quad 3.12$$

onde

T_x – momento tissor da viga;

B_θ – componente da matriz B associado ao grau de liberdade a torção.

O vetor de cargas equivalentes devido à deformação não mecânica ε^{nm} é calculado pela seguinte equação:

$$R^{nm} = \int_V B^T \cdot E \cdot \varepsilon^{nm} \, dV \quad 3.13$$

As propriedades dos materiais do concreto e aço para qualquer tempo ou nível de carga dependem da relação tensão x deformação não-linear, fissuração e esmagamento do concreto e escoamento da armadura. A matriz de rigidez do elemento e as forças internas para qualquer tempo são avaliadas pela integração sobre o volume do elemento considerando a contribuição de cada filamento de concreto ou aço na seção transversal e cada segmento de aço de protensão dentro do elemento. A integração numérica é realizada utilizando quadratura gaussiana com dois pontos de Gauss.

3.5 Efeito da protensão

O efeito da protensão é introduzido na análise da estrutura como um vetor de cargas equivalentes obtido pelo equilíbrio das forças nos cabos.

Pode-se determinar o incremento de deformação $\Delta\varepsilon_p$ de um segmento de aço de protensão aderido ao concreto para qualquer estágio de análise, dividindo o incremento de comprimento do segmento pelo seu comprimento original. O valor do incremento de comprimento é obtido dos deslocamentos e rotações de ambas as extremidades do elemento, como mostrado na figura 3.6. E assim, a deformação ε_p para qualquer estágio é obtida da soma de $\Delta\varepsilon_p$ com a deformação total do estágio anterior. A tensão σ_p correspondente à deformação ε_p é obtida através da relação tensão x deformação do aço de protensão. A tensão para qualquer estágio é então computada subtraindo a tensão de relaxação da tensão obtida no estágio anterior.

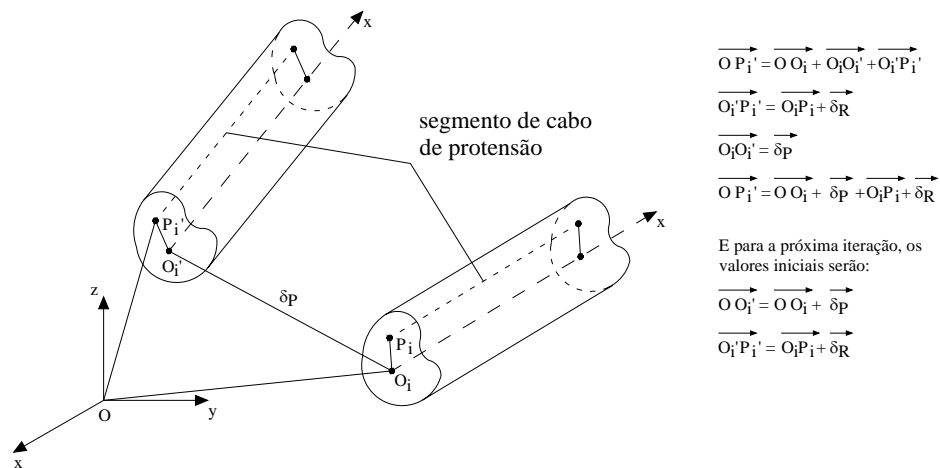


FIGURA 3.6 – Deformação de um segmento de cabo de protensão

As variações de tensão no aço de protensão produzidas pela relaxação são levadas em conta em conjunto com o resto das deformações produzidas nos passos de carga ou de tempo por compatibilidade com o concreto desta fibra mediante o método da tensão fictícia inicial. Quando no começo de um intervalo de tempo, ocorre a mudança na tensão no cabo, devido a outras causas que não a relaxação, define-se uma tensão fictícia inicial de modo que esta tensão inicial produziria, no instante atual, a tensão conhecida se fosse considerada uma curva de relaxação pura. E então, a relaxação da tensão durante o intervalo de tempo atual é calculada usando a curva de relaxação pura através da seguinte equação desenvolvida por MAGURA et al. (1964), baseada em dados experimentais.

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_{pi}} = 1 - \frac{\log_{10} t}{10} \cdot \left(\frac{\sigma_{pi}}{\sigma_{py}} - 0,55 \right), \quad \frac{\sigma_{pi}}{\sigma_{py}} \geq 0,55 \quad 3.14$$

onde

σ_{pi} – tensão fictícia inicial: aquela com que se deve iniciar o cabo para que sua tensão no tempo t seja σ_p ;

σ_p – tensão atual no cabo de protensão: é a diferença entre a tensão inicial e as perdas (por relaxação e por deformações elásticas);

σ_{py} – tensão máxima no aço de protensão.

Portanto, como mostrado na figura 3.7, sendo σ_{pi} a tensão inicial aplicada no instante t_i , no instante t_1 a tensão terá variado como consequência da

relaxação ($\Delta\sigma_{pr1}$) e das demais deformações. Mediante a equação 3.14, pode-se calcular a tensão fictícia inicial $\sigma_{pi,1}$ que se fosse aplicado em t_i teria conduzido a σ_{p1} no instante t_1 . Usando $\sigma_{pi,1}$ pode-se determinar a perda por relaxação no período de tempo entre t_1 e t_2 . E assim por diante pode-se aplicar esta seqüência a qualquer intervalo de tempo em um método passo a passo.

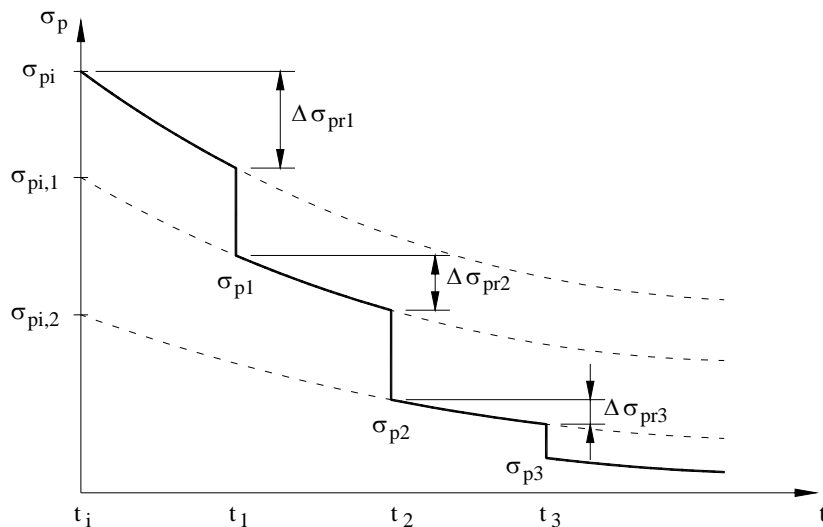


FIGURA 3.7 – Relaxação com deformação variável

3.6 Processo construtivo

As estruturas de engenharia são construídas seqüencialmente, ou seja, durante o período de construção, a geometria e o peso da estrutura se modificam com a adição de uma nova parte. Simultaneamente, as restrições dos deslocamentos podem modificar, devido à mudança na natureza, número ou localização dos apoios. Esta evolução da rigidez, esquema estático e peso da estrutura conduzem a mudanças repentinas na distribuição de tensões e deslocamentos instantâneos. Se o comportamento dos materiais constituintes for dependente do tempo, estas mudanças podem causar significativa redistribuição dos esforços internos e deslocamentos diferidos durante a vida útil da estrutura. Como conseqüência, as condições de segurança e utilização podem ser afetadas devido à fissuração inesperada ou deslocamento excessivo, por exemplo.

A fim de considerar as mudanças estruturais que possa ocorrer durante o processo construtivo e ao longo de toda a vida útil das estruturas, a estrutura é analisada em estágios. Para cada estágio ou fase construtiva, pode-se considerar as mudanças na geometria longitudinal e transversal da estrutura pela adição ou remoção de elementos ou filamentos. Os cabos podem sofrer protensão, desprotensão ou serem removidos a qualquer instante. E os apoios externos ou as uniões entre elementos também podem ser modificados a qualquer momento.

Cada filamento da seção transversal de um dado elemento pode ser constituído de diferentes tipos de concreto, sendo especificado o instante de moldagem ou demolição, para cada tipo de concreto, no início do processamento. Similarmente, para cada filamento de aço, é especificado o instante em que começa atuar na estrutura ou o instante de sua remoção. Quando um filamento de concreto ou aço começa atuar no elemento, sua rigidez é incluída na rigidez do elemento; quando esse filamento é removido, sua rigidez e sua contribuição no vetor de cargas internas não são mais levadas em conta na análise. Neste caso, aparecerá um vetor de cargas desequilibradas no próximo passo de tempo, isto é automaticamente introduzido no procedimento iterativo até o equilíbrio ser obtido.

Variações nas condições de contorno também são reconhecidas pelo modelo, permitindo reproduzir os processos de cimbramento, descimbramento, execução de novos apoios e eliminação dos existentes. Não havendo nenhum problema especial quando um novo apoio é introduzido devido ao procedimento incremental; contudo, a liberação de uma restrição é realizada pela introdução, sobre o novo sistema estrutural, de uma força de igual valor e sentido oposto à reação do apoio removido. Nesses casos, também aparecerão cargas desequilibradas, fazendo com que a análise iterativa restabeleça o equilíbrio na estrutura.

A ligação interna entre elementos pode ser mudada no decorrer do processo construtivo. Ao restringir um grau de liberdade, o problema é solucionado pela adequada consideração da matriz de rigidez do elemento e funções de forma. No caso da liberação da ligação exige também a introdução de forças na extremidade do elemento correspondente ao grau de liberdade liberado, como cargas desequilibradas.

Para cada cabo de protensão, o instante em que ocorre a protensão, reprotensão ou desprotensão também é especificado no começo do processamento,

sendo que as variações na força nos cabos são introduzidas como forças externas na correspondente fase construtiva.

E assim, o programa computacional pode ser utilizado para a análise de estruturas construídas seqüencialmente, ou seja, estruturas formadas por elementos que são ligados entre si, podendo receber uma nova camada de concreto para completar a seção transversal, com apoios provisórios ou não, como ilustrado na figura 3.8.

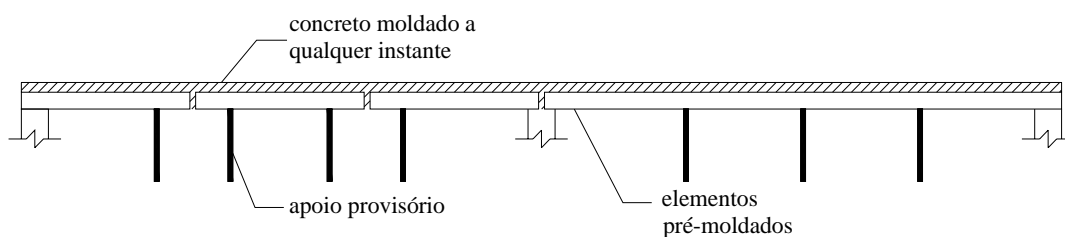


FIGURA 3.8 – Estrutura construída seqüencialmente

O esquema geral do programa computacional é apresentado esquematicamente na figura 3.9, em que os dados de entrada gerais (1) incluem geometria da estrutura, discretização, condições de contorno, propriedades dos materiais, armadura passiva, perfil da armadura de protensão, fases construtivas, condições ambientais, critério de convergência e informações de controle dos dados de saída. Os dados de entrada de cada fase construtiva (2) incluem variações da geometria, condições de contorno, carregamento, protensão, além dos intervalos de tempo entre as fases construtivas e os passos de carga.

Define-se um número de fases construtivas ao longo do domínio do tempo, sendo cada fase uma situação da estrutura em que pode variar sua geometria, carregamento ou condição de contorno. Para cada fase construtiva, deve-se definir a protensão atuante, cargas externas, distribuições de temperatura, curvas tensão x deformação, propriedades dos materiais ao longo do tempo e esquema estrutural.

O tempo transcorrido de uma fase construtiva para outra é subdividido em intervalos de tempo, separados por passos de tempo. As propriedades dos materiais, matriz de rigidez e vetor de cargas são atualizados para cada passo de tempo. Durante o intervalo de tempo t_{n-1} a t_n são avaliados os incrementos de deformações não mecânicas $\Delta\varepsilon^{nm}$ ocorridos devido à fluência e retração do concreto e mudanças térmicas. E então, os incrementos de cargas equivalentes ΔR^{nm} para o tempo t_n são calculados de seus respectivos incrementos de deformações não mecânicas $\Delta\varepsilon^{nm}$. E assim, para um tempo t_n , o incremento de carga ΔR_n a ser aplicado na estrutura é obtido adicionando o incremento de carga externa ΔR_n^e e cargas desequilibradas R_{n-1}^u do tempo t_{n-1} aos incrementos de cargas equivalentes ΔR^{nm} devido às deformações não mecânicas.

$$\Delta R_n = \Delta R_n^e + \Delta R_n^{nm} + R_{n-1}^u \quad 3.15$$

A carga total obtida para cada passo de tempo é dividida em incrementos de carga. Para cada passo de carga, emprega-se o método dos elementos finitos, resultando em equações de equilíbrio não lineares. Um procedimento iterativo é usado para a resolução das equações de equilíbrio, obtendo-se os incrementos de deslocamentos globais para cada iteração. No começo de cada iteração, são conhecidos todos os deslocamentos nodais, deformações totais, deformações totais não mecânicas e tensões em todos os pontos da estrutura.

Os incrementos de deformação para qualquer filamento de concreto ou aço são obtidos transformando inicialmente o incremento de deslocamentos globais para coordenadas locais do elemento e então, por meio das relações deformação-deslocamento, obtém-se os incrementos de deformação. As deformações totais são obtidas adicionando o incremento de deformação ao valor da deformação total

anterior. A deformação mecânica é calculada subtraindo-se a deformação não mecânica da deformação total e a tensão é obtida pela curva tensão x deformação não linear. O vetor de cargas internas é obtido pela equação 3.12, e o vetor de cargas desequilibradas é obtido subtraindo-o do vetor de cargas externas total.

3.8 Avaliação do modelo

Para se avaliar o modelo empregado pelo programa computacional CONSNOU, fez-se o confronto do mesmo com os seguintes resultados de ensaios realizados em laboratório:

- ensaios de curta duração de lajes contínuas formadas por vigotas pré-moldadas com armação treliçada realizados por MAGALHÃES (2001) no Laboratório de Estruturas da EESC-USP;
- ensaios de longa duração de lajes formadas por vigotas pré-moldadas com armação treliçada realizados por ROGGE (2001) no Laboratório de Materiais e Sistemas Estruturais do Departamento de Engenharia Civil da UFSCar;
- ensaios de longa duração de vigas reforçadas à flexão no bordo comprimido realizados por REIS (2003) no Laboratório de Estruturas da EESC-USP.

3.8.1 *Ensaio de curta duração de lajes contínuas*

a) Descrição do ensaio

MAGALHÃES (2001) realizou ensaios de curta duração de três faixas de lajes contínuas constituídas por vigotas pré-moldadas com armação treliçada, elementos de enchimento em poliestireno expandido (EPS) e concreto moldado no local. Os ensaios tiveram o objetivo de analisar a redistribuição dos momentos fletores e para isso cada faixa de laje foi dimensionada considerando-se análise elástico-linear com rigidez constante, supondo redistribuição do momento fletor negativo no apoio de 15% (modelo M15), 40% (modelo M40) e um modelo dimensionado com tramos isolados com armadura construtiva para controle de fissuração no apoio intermediário (modelo Mac).

As características geométricas das lajes podem ser vistas na figura 3.10. Enquanto que os detalhes da vigota, da nervura transversal e da viga de apoio estão mostrados na figura 3.11. E na tabela 3.1 estão apresentadas as armaduras de flexão dispostas em cada modelo.

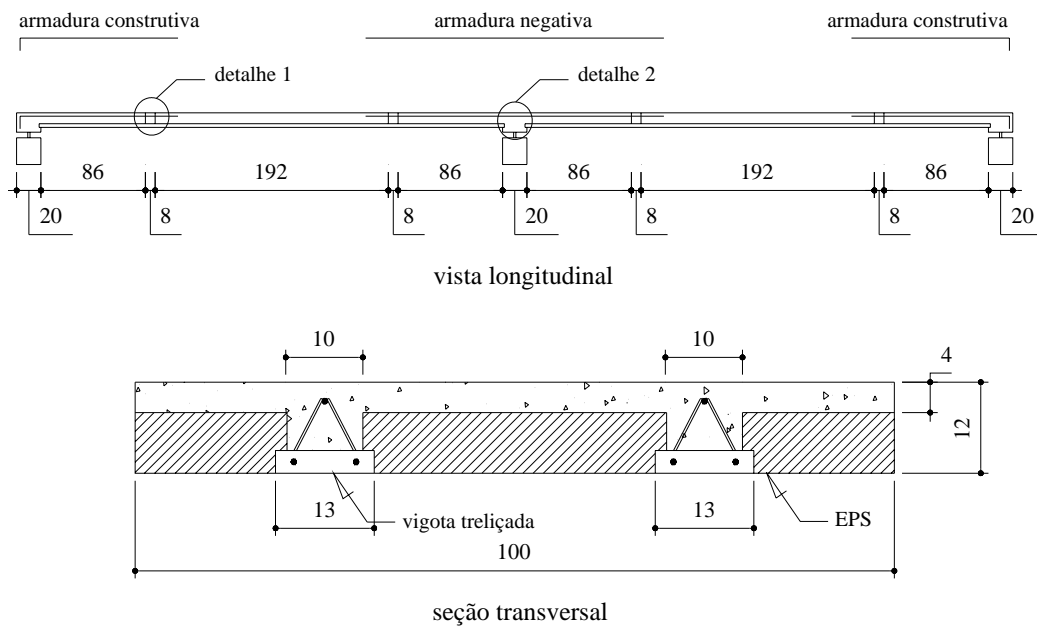


FIGURA 3.10 – Características geométricas (dimensões em cm)

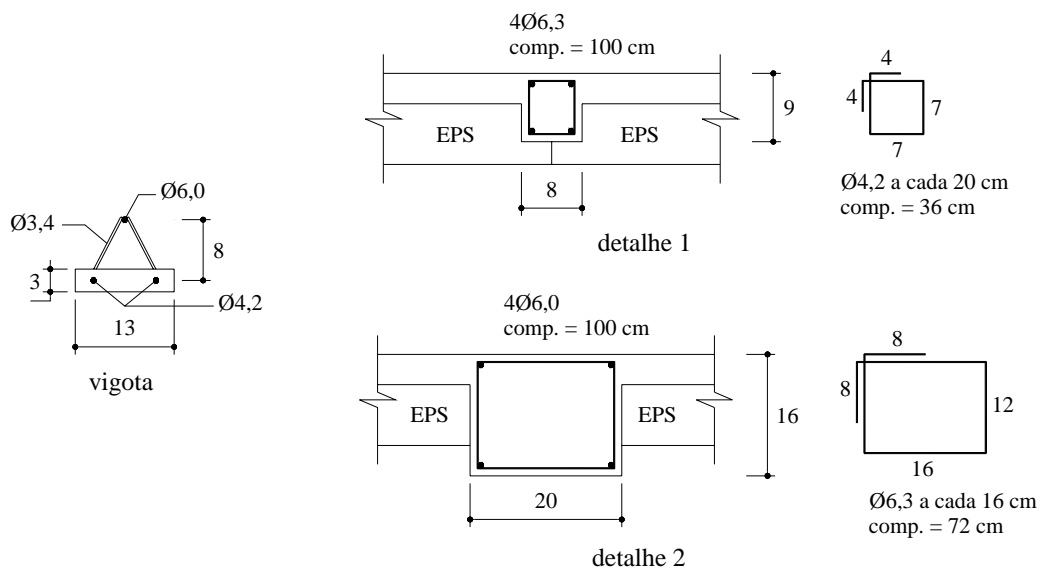


FIGURA 3.11 – Detalhes da vigota, nervura transversal e viga de apoio (dimensões em cm)

TABELA 3.1 – Armadura de flexão dos modelos

Modelo	Armadura negativa	Armadura adicional
M15	8 ϕ 6,0	2 ϕ 4,2 + 1 ϕ 3,4
M40	5 ϕ 6,0	2 ϕ 5,0 + 1 ϕ 4,2
Mac	6 ϕ 4,2	3 ϕ 6,0

O carregamento foi aplicado através de uma estrutura de reação composta basicamente por dois pórticos metálicos e a laje de reação, como mostrado na figura 3.12.

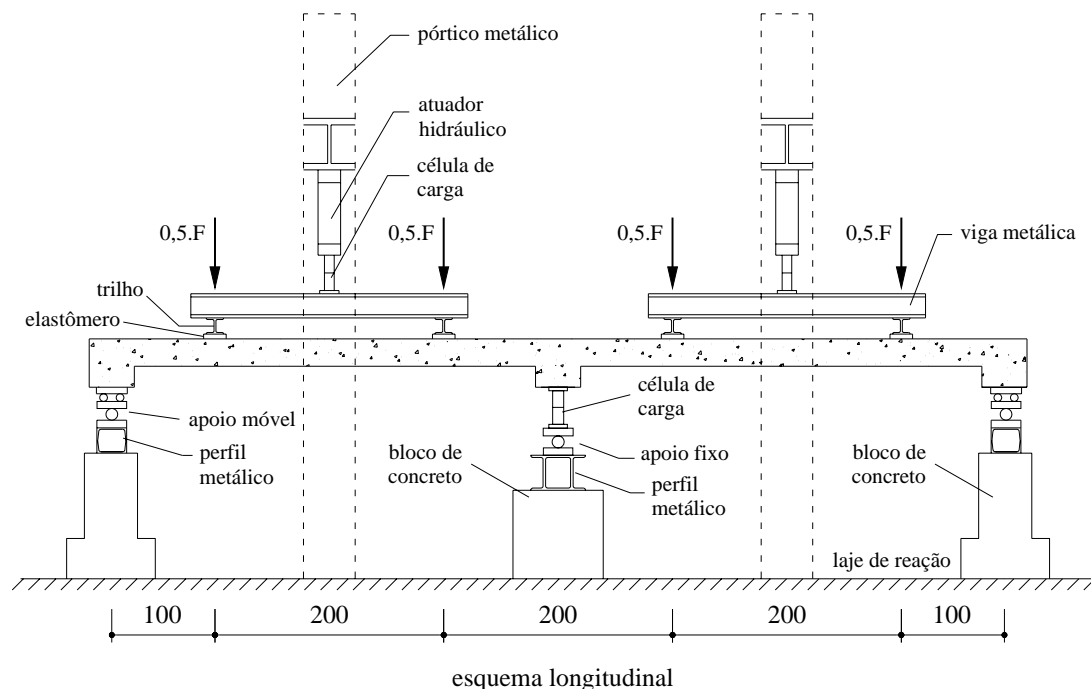


FIGURA 3.12 – Sistema de aplicação do carregamento (dimensões em cm)

As características mecânicas do concreto foram obtidas a partir de 6 corpos de prova para o concreto pré-moldado da vigota e 18 corpos de prova para o concreto da capa estrutural moldada no local. Dos 6 corpos de prova do concreto pré-moldado, 3 foram ensaiados à compressão axial e 3 foram ensaiados à tração a partir do ensaio à compressão diametral. Para o concreto moldado no local, 12 corpos de prova foram ensaiados a compressão axial, entretanto, foram aproveitados os resultados dos ensaios de 10 corpos de prova. Ainda tiveram 4 corpos de prova ensaiados à tração e 2 corpos de prova ensaiados à compressão axial para se obter o módulo de elasticidade longitudinal do concreto.

Na tabela 3.2 estão apresentados os resultados dos ensaios em corpos de prova dos concretos moldado no local e pré-moldado.

Por conveniência do cronograma de ensaio, todas as faixas de lajes foram concretadas no mesmo dia e ensaiadas com 14, 15 e 16 dias.

TABELA 3.2 – Características mecânicas do concreto

Tipo	Idade (dias)	f_{cm} (MPa)	f_{ctm} (MPa)	E_c (GPa)	E_{cs} (GPa)
pré-moldado	54	38,9	2,8	-	-
moldado no local	15	21,4	2,0	25,7	24,5

Na tabela 3.3 são apresentadas as propriedades das barras utilizadas como armaduras negativas nas faixas de lajes, com diâmetros nominais de 4,2 mm e 6,0 mm.

TABELA 3.3 – Características da armadura negativa

$\phi_{nominal}$ (mm)	A_s (cm²)	E_s (GPa)	f_y (MPa)	ϵ_y (‰)	f_u (MPa)
4,2	0,139	229	730	5,22	813
6,0	0,283	224	660	4,95	726

Os deslocamentos obtidos no decorrer do ensaio das seções a 1 m do eixo do apoio externo, seção do meio do vão e seção a 1 m do eixo do apoio interno para as faixas de lajes M15, M40 e Mac estão apresentadas, respectivamente, nas figuras 3.13, 3.14 e 3.15.

Pelas figuras, pode-se notar que os deslocamentos para as três lajes ficaram próximos entre si. Por exemplo, para a força de 15 kN o deslocamento no meio do vão foi de 16,0 mm, 15,9 mm e 13,2 mm, respectivamente, para as lajes M15, M40 e Mac. Isso ocorreu porque, embora houvesse menor taxa de armadura no apoio da laje com maior redistribuição de momento fletor, esta apresentava maior taxa de armadura no vão.

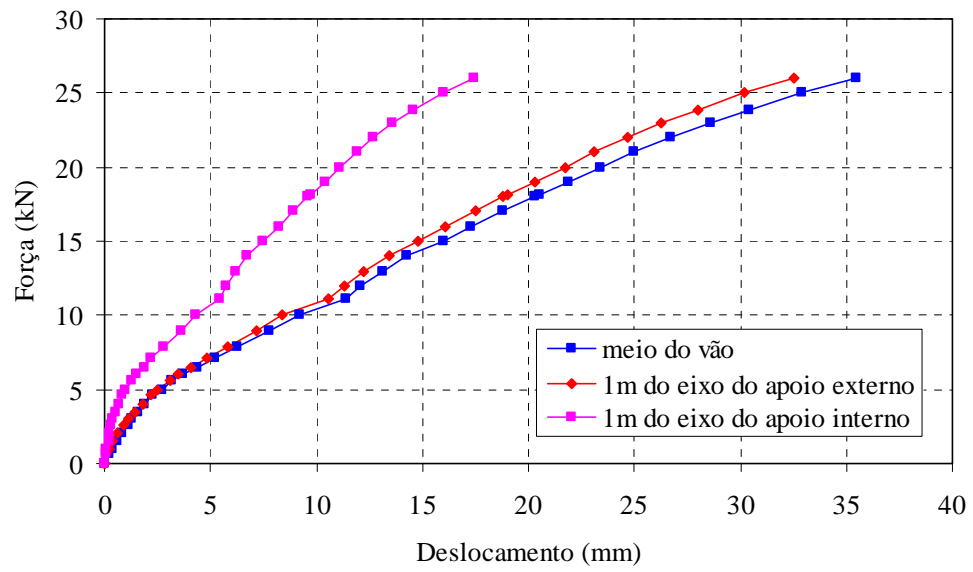


FIGURA 3.13 – Deslocamentos experimentais - M15

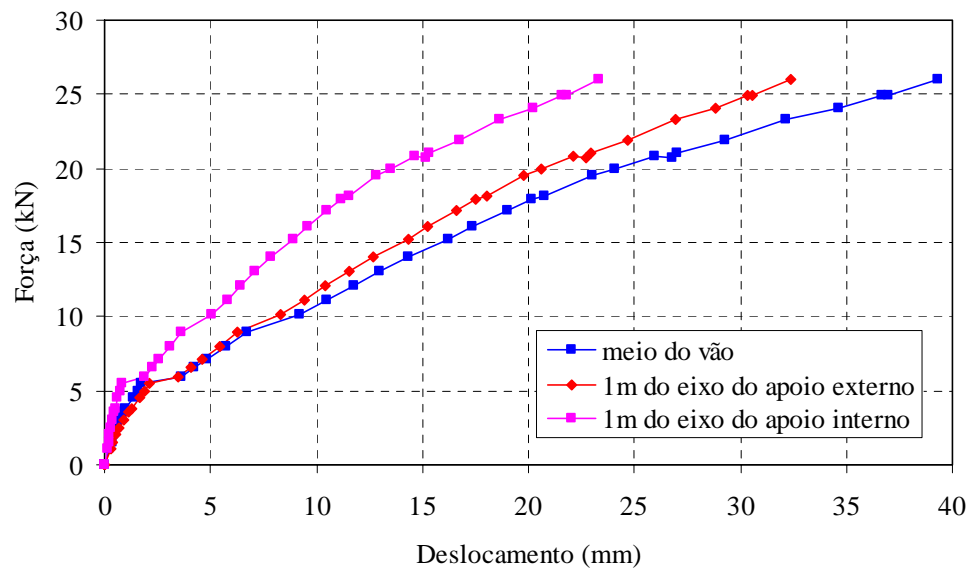


FIGURA 3.14 – Deslocamentos experimentais - M40

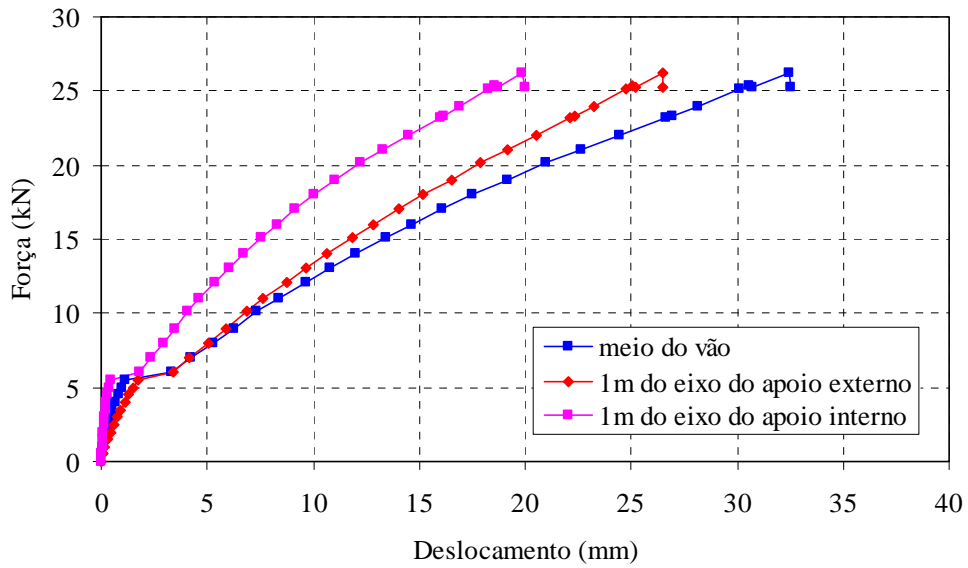


FIGURA 3.15 – Deslocamentos experimentais - Mac

b) Análise numérica

A análise numérica das faixas de lajes foi realizada tomando-se partido da simetria em relação ao apoio central, como mostrada na figura 3.16. Por esta figura, pode-se verificar a discretização das faixas de lajes, sendo divididas em 40 elementos de 10 cm cada um. Já a seção transversal foi subdividida em 24 camadas de 0,5 cm, como pode ser vista na figura 3.17.

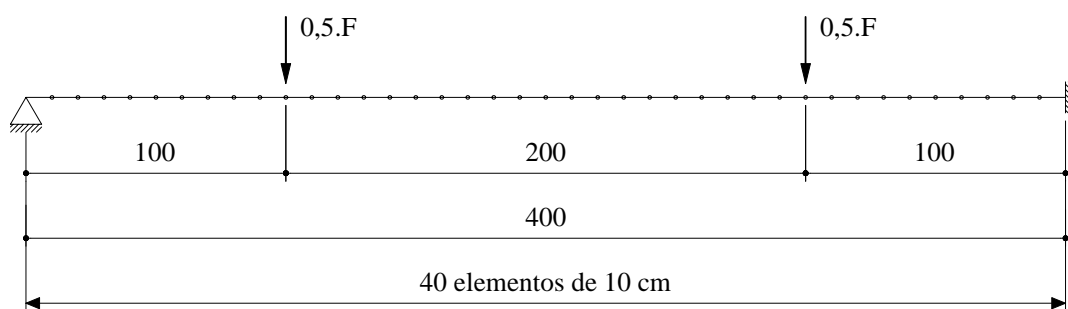


FIGURA 3.16 – Discretização longitudinal (dimensões em cm)

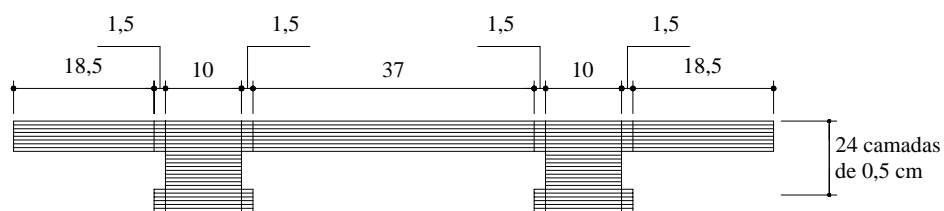


FIGURA 3.17 – Discretização da seção transversal (dimensões em cm)

c) Comparação entre os resultados

As comparações entre os deslocamentos experimentais e os obtidos da análise numérica estão apresentadas nas figuras 3.18, 3.19 e 3.20, respectivamente, para os modelos M15, M40 e Mac. Pelas figuras, pode-se verificar que os deslocamentos obtidos da análise numérica ficaram bem próximos dos valores dos deslocamentos experimentais. As seções localizadas a 1 m do eixo do apoio interno foram as que tiveram melhor concordância entre os resultados numéricos e experimentais, no entanto, mesmo para as outras seções houve boa aproximação, existindo uma mesma tendência dos deslocamentos numéricos e experimentais.

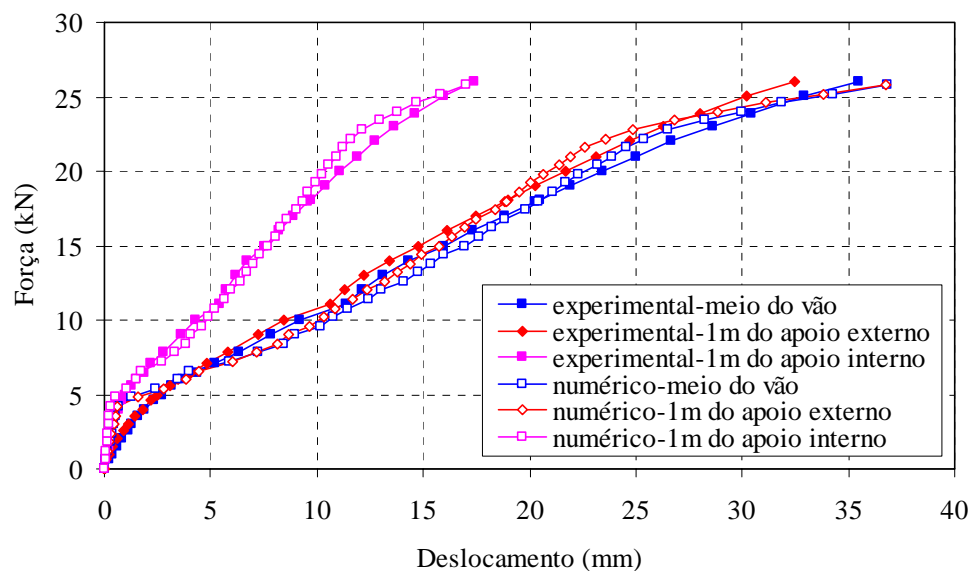


FIGURA 3.18 – Comparação entre os deslocamentos experimentais e da análise numérica – M15

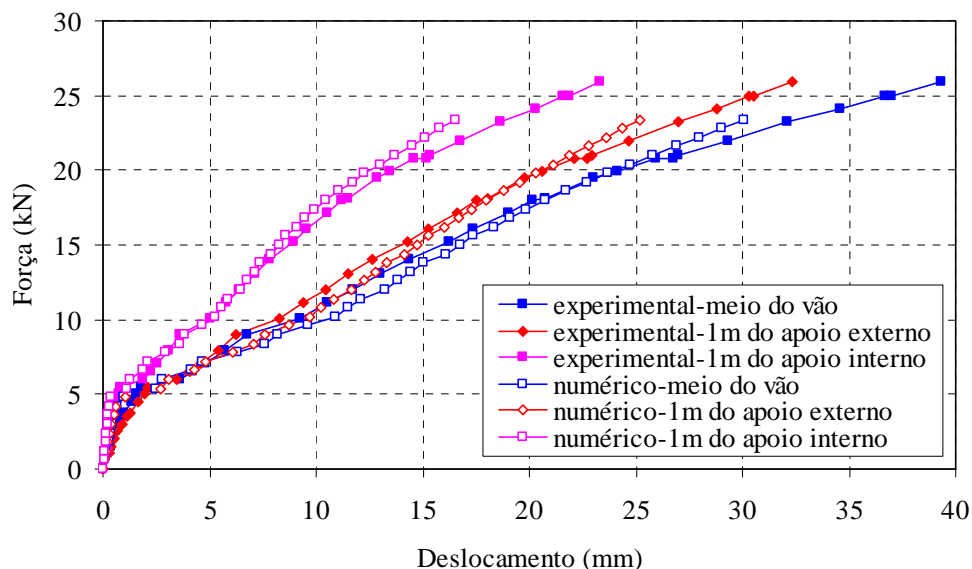


FIGURA 3.19 – Comparação entre os deslocamentos experimentais e da análise numérica – M40

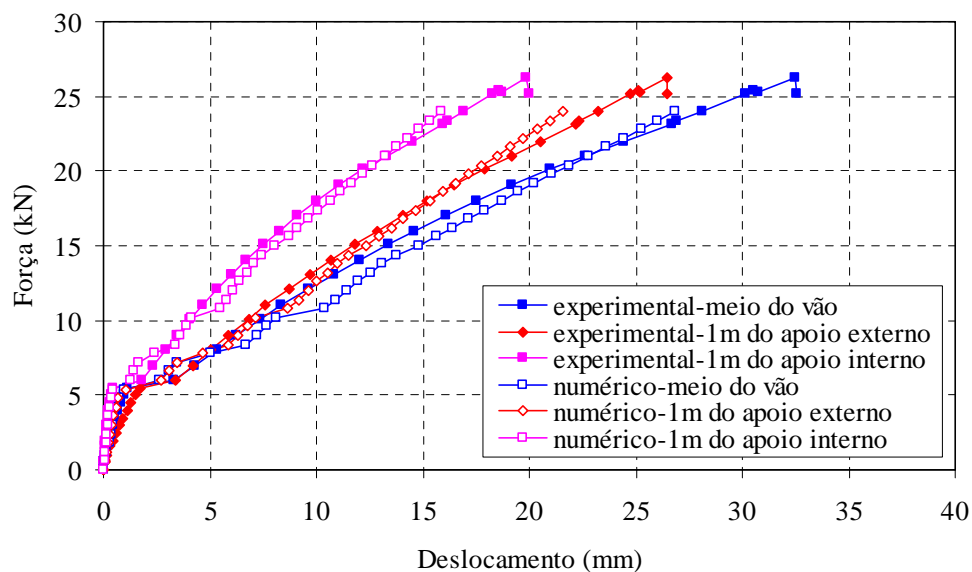


FIGURA 3.20 – Comparação entre os deslocamentos experimentais e da análise numérica – Mac

3.8.2 Ensaios de longa duração de lajes

a) Descrição do ensaio

Os ensaios realizados por ROGGE (2001) tiveram por objetivo avaliar a deformação ao longo do tempo de lajes executadas com vigotas pré-moldadas do tipo armação treliçada. Foi realizada a análise de três lajes simplesmente apoiadas que serão identificadas aqui por L1, L2 e L3 que possuam as mesmas dimensões e taxas

de armadura, diferenciando-se em relação à data de retirada do escoramento e a data de aplicação do carregamento. Durante todo o ensaio, as lajes estiveram armazenadas em um galpão coberto e embora não tenha havido o controle da umidade e temperatura ambiente, esses parâmetros foram monitorados continuamente.

Apresentam-se na figura 3.21 as características geométricas das lajes ensaiadas. Enquanto que na tabela 3.4 são especificadas as características das lajes com relação à armadura passiva utilizada e as particularidades de cada uma com relação ao carregamento aplicado.

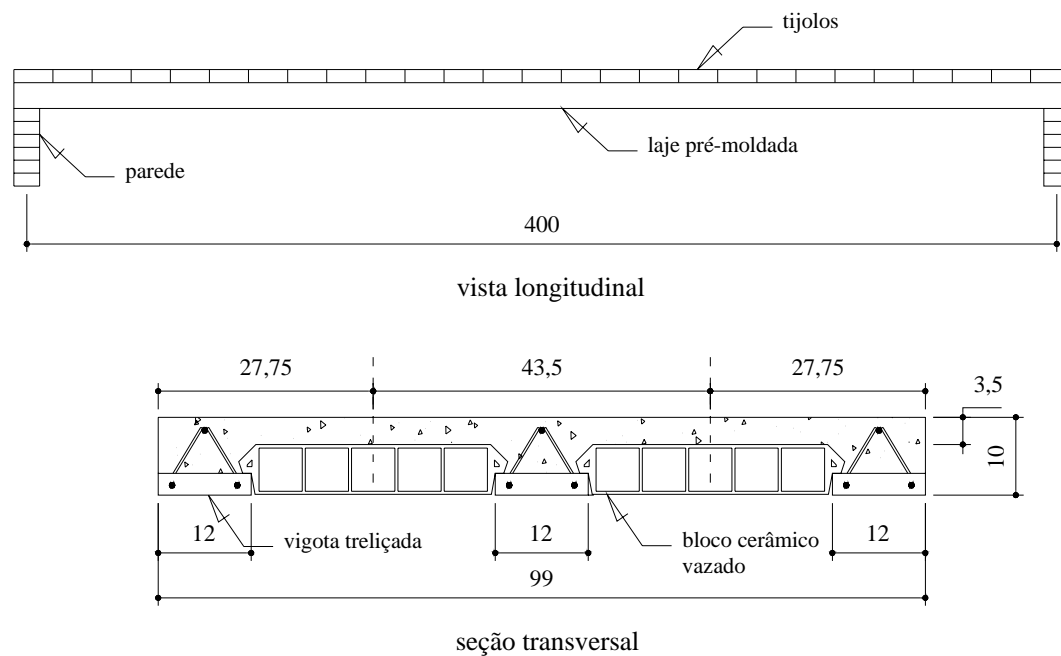


FIGURA 3.21 – Características geométricas (dimensões em cm)

TABELA 3.4 – Características das lajes

Laje	Área de aço por nervura (cm ²)	Área de aço total (cm ²)	Altura útil (cm)	Retirada do escoramento (dias)	Carregamento (dias)
L1	1,04	3,12	8,5	8	35
L2	1,04	3,12	8,5	8	42
L3	1,04	3,12	8,5	28	42

Pela figura 3.21 observa-se a presença de tijolos sobre a laje. Este foi o meio empregado para a aplicação de um carregamento distribuído nas lajes. Foram

dispostos sobre a laje 182 tijolos de 1,55 daN cada, totalizando um carregamento distribuído de 0,705 kN/m aplicados em cada laje no dia especificado na tabela 3.4.

Pelas figuras 3.22 e 3.23 pode-se verificar, respectivamente, a variação da umidade e temperatura ambiente no decorrer do ensaio.

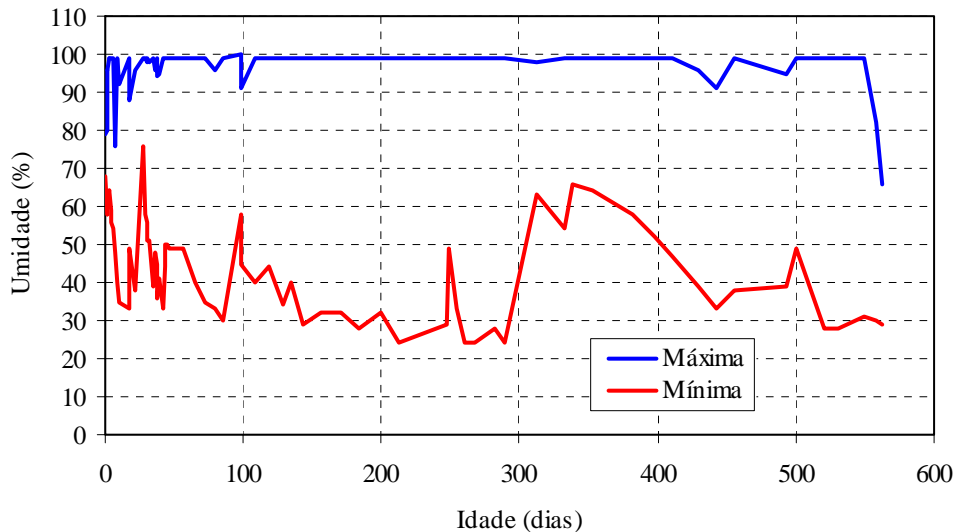


FIGURA 3.22 – Valores máximos e mínimos da umidade ambiente

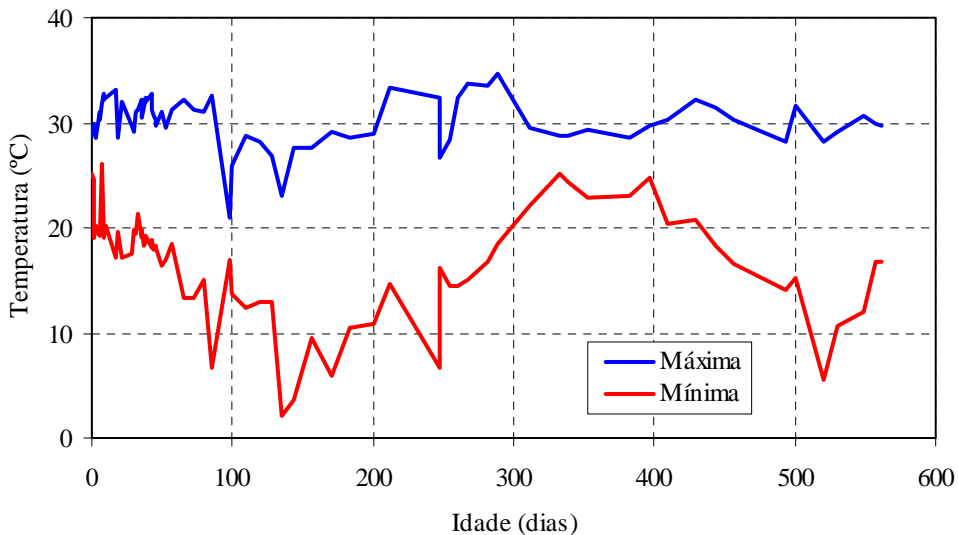


FIGURA 3.23 – Valores máximos e mínimos da temperatura ambiente

As características mecânicas do concreto foram obtidas a partir de seis corpos de prova moldados no dia da concretagem, sendo que dois foram ensaiados aos 7 dias e os outros quatro foram ensaiados aos 28 dias. Os valores obtidos dos

ensaios à compressão e à tração estão apresentados na tabela 3.5. O aço utilizado nas nervuras foi do tipo CA-60, no entanto, não foi realizado ensaios para a determinação das propriedades mecânicas da armadura.

TABELA 3.5 – Características mecânicas do concreto

Idade (dias)	f_{cj} (MPa)	f_{tj} (MPa)
7	20,55	0,41
28	24,45	1,79
	26,10	1,65

Apresenta-se na figura 3.24 a evolução da flecha das lajes L1, L2 e L3 obtida no decorrer do ensaio.

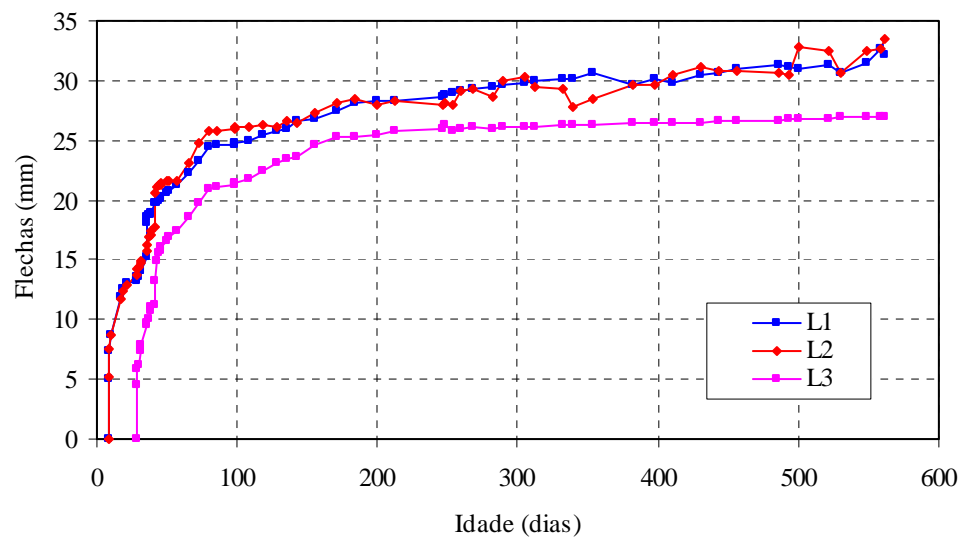


FIGURA 3.24 – Flechas obtidas durante o ensaio

b) Análise numérica

A análise numérica foi realizada dividindo a viga em 40 elementos de 10 cm cada um. Pela figura 3.25 pode-se observar o esquema de carregamento aplicado e a discretização longitudinal da viga. Já a figura 3.26 apresenta a discretização empregada para seção transversal.

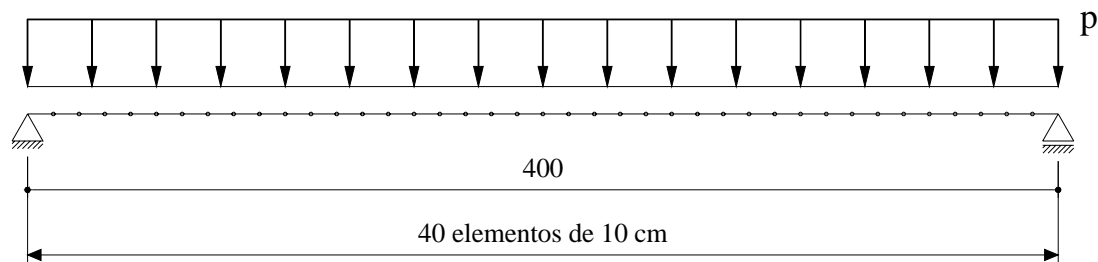


FIGURA 3.25 – Discretização longitudinal (dimensões em cm)

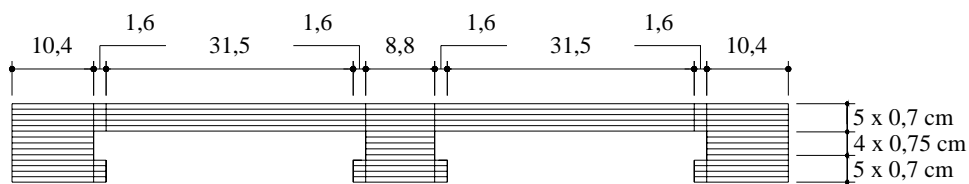


FIGURA 3.26 – Discretização da seção transversal (dimensões em cm)

Foram consideradas na análise numérica condições ambientais constantes durante todo o ensaio. Para todas as lajes foi considerado o valor da temperatura ambiente de 25 °C e umidade ambiente de 60%.

O valor da resistência média à compressão do concreto, aos 28 dias, considerado na análise numérica das lajes foi de 25 MPa.

c) Comparação entre os resultados

As flechas obtidas no ensaio e as obtidas da análise numérica das lajes L1, L2 e L3 estão apresentadas nas figuras 3.27, 3.28 e 3.29, respectivamente. Pelas figuras pode-se observar que houve boa concordância entre os resultados experimentais e da análise numérica, ou seja, a análise numérica conseguiu descrever o comportamento ao longo do tempo para esse tipo de laje.

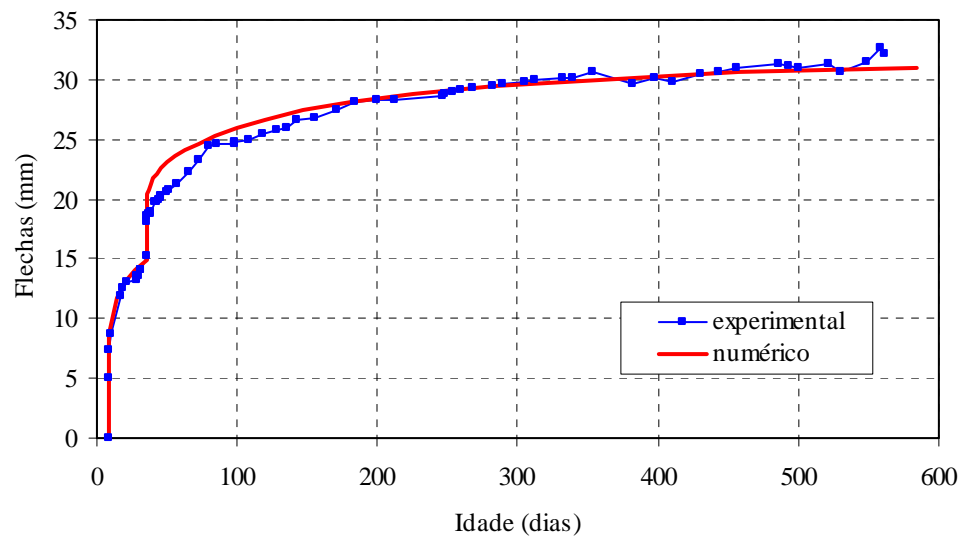


FIGURA 3.27 – Evolução da flecha (laje L1)

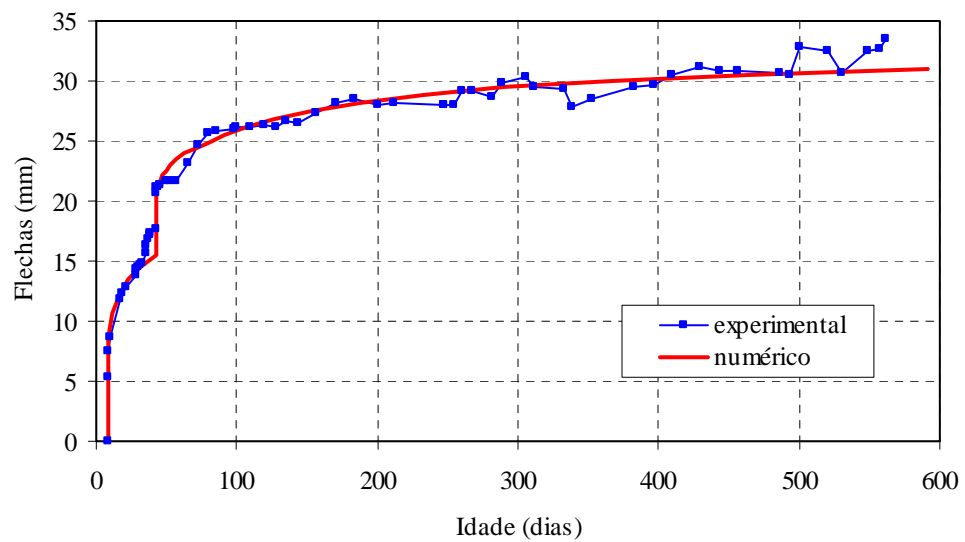


FIGURA 3.28 – Evolução da flecha (laje L2)

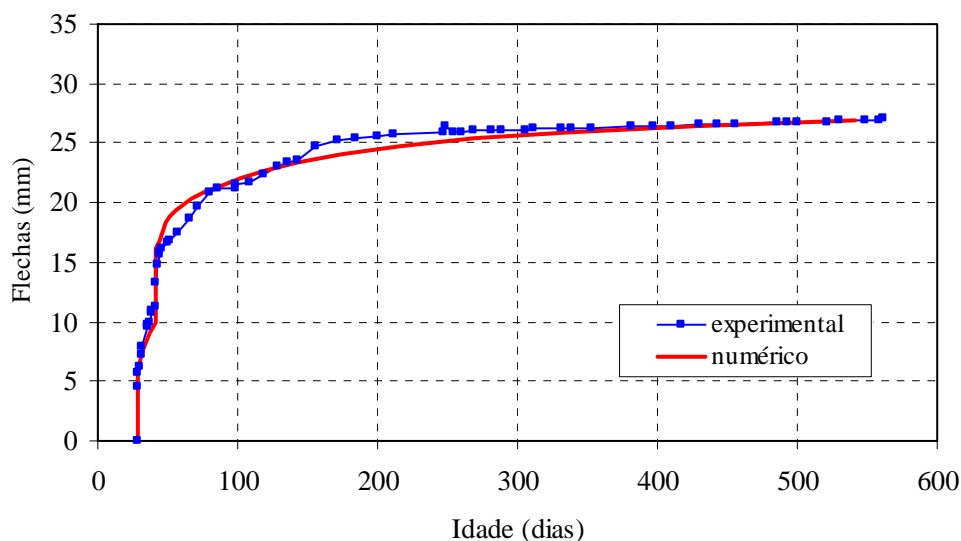


FIGURA 3.29 – Evolução da flecha (laje L3)

3.8.3 Ensaios de longa duração de vigas reforçadas à flexão

a) Descrição do ensaio

Os ensaios realizados por REIS (2003) tiveram como objetivo a avaliação da eficiência de técnicas de reforço em vigas. Foram utilizados, neste trabalho, os ensaios referentes às vigas reforçadas à flexão no bordo comprimido (vigas denominadas VFC).

Foram ensaiadas três vigas do tipo VFC, de mesmas dimensões e taxas de armadura, sendo que as vigas VFC-1 e VFC-3 foram submetidas inicialmente a um carregamento de longa duração, sendo armazenadas em uma câmara climatizada, com temperatura de $32^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$ e umidade de $38\% \pm 4\%$, e posteriormente submetidas a um carregamento monotônico de curta duração responsável pela ruptura das mesmas. Já a viga VFC-2 não foi submetida a nenhum carregamento inicial, nem mesmo o peso próprio, sendo apenas submetida a um carregamento monotônico de curta duração responsável por sua ruptura. A fase referente ao ensaio de longa duração das vigas VCF-1 e VCF-3, que serão denominadas a partir de agora de V1 e V2, respectivamente, foi a fase de interesse para este trabalho.

As dimensões das vigas estão apresentadas na figura 3.30. Por esta figura pode-se notar a presença de dois blocos de concreto nas extremidades das vigas que serviram para ancorar o cabo de protensão responsável por gerar o carregamento de

longa duração nas peças. A disposição empregada para armadura passiva esta especificada na tabela 3.6.

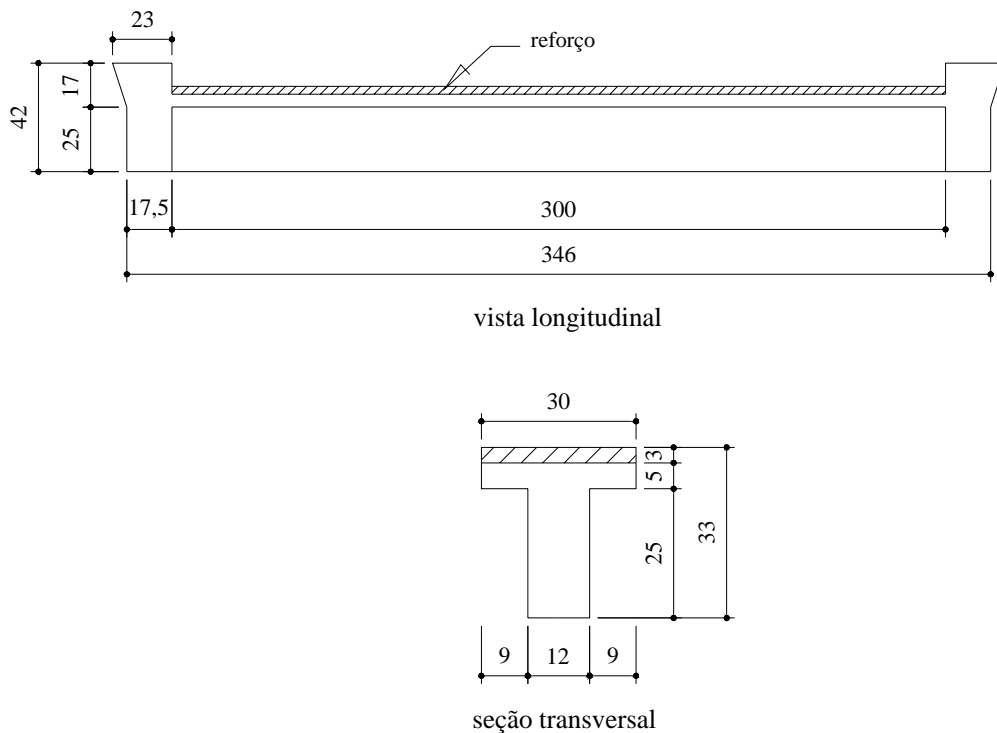


FIGURA 3.30 – Características geométricas (dimensões em cm)

TABELA 3.6 – Disposição da armadura passiva

Características	Valores	
A_{s1} (cm ²)	6,3 (2 ϕ 20mm)	
A_{s2} (cm ²)	6,3 (2 ϕ 20mm)	
A_s' (cm ²)	1,26 (4 ϕ 6,3mm)	
d_1 (cm)	25,5	
d_2 (cm)	29,5	
d' (cm)	5,45	
A_{sw} (cm ² /m)	8,0 (ϕ 10mm c/ 10cm)	
Cobrimento (cm)	1,5	

O carregamento foi aplicado através de um sistema constituído por uma cordoalha engraxada não aderente passando externamente à viga que se ancorava em blocos de concreto moldados em suas extremidades. Para produzir o carregamento necessário, foi adotada uma configuração poligonal para o cabo de protensão, que saiu da extremidade da viga com uma inclinação de 18° e foi desviado na seção

transversal situada a 125 cm dos apoios por meio de dispositivos metálicos, como esquematizado na figura 3.31. Pela figura pode-se notar ainda que este sistema de aplicação do carregamento origina na viga além de forças verticais nos pontos dos dispositivos metálicos, mas forças horizontais (longitudinais) excêntricas acarretando esforços de flexo-compressão na viga.

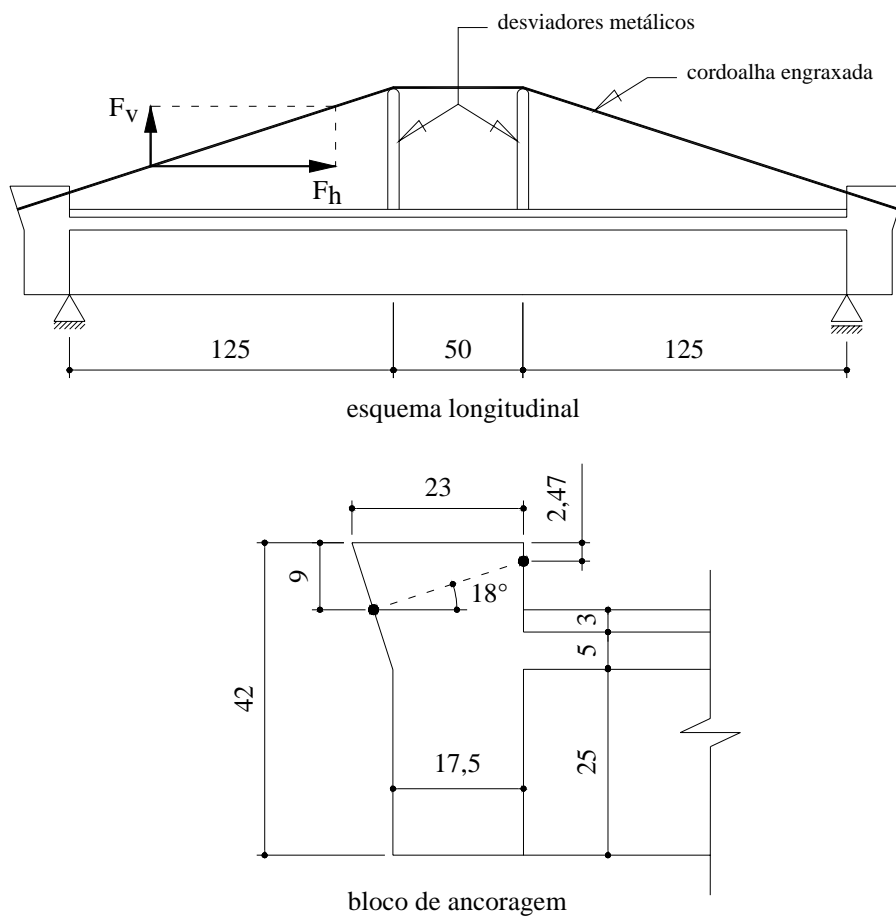


FIGURA 3.31 – Sistema de aplicação do carregamento (dimensões em cm)

O sistema empregado não consegue manter constante o carregamento aplicado devido aos efeitos de relaxação do cabo de protensão e do aumento da flecha com o tempo. Por esta razão, houve um acompanhamento constante da variação da força no cabo e da flecha na viga. Na figura 3.32 apresenta o valor da força vertical aplicado na viga durante todo o período do ensaio.

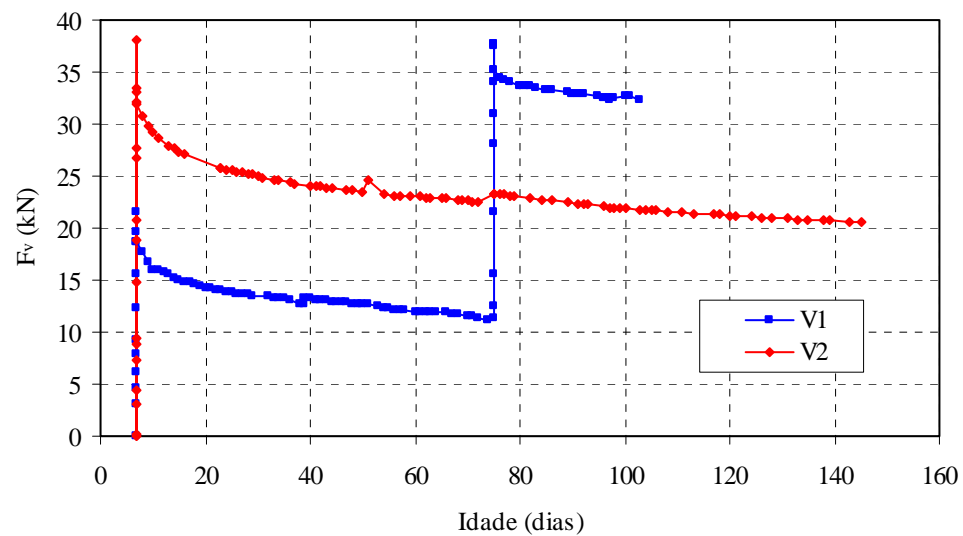


FIGURA 3.32 – Evolução da força vertical

Portanto, como observado na figura 3.32, as vigas ensaiadas se diferenciavam em relação ao valor e ao período de tempo em que o carregamento permaneceu atuante e as particularidades de cada uma delas estão apresentadas na tabela 3.7.

TABELA 3.7 – Etapas do ensaio

Etapas	Idade (dias)	Intervalo de tempo entre cada etapa (dias)
V1		
Moldagem	0	0
Protensão nº 1	7	7
Reforço no bordo comprimido	40	33
Protensão nº 2	75	35
Final do ensaio de longa duração	104	29
V2		
Moldagem	0	0
Protensão nº 1	7	7
Reforço no bordo comprimido	75	68
Final do ensaio de longa duração	145	70

Na viga V1, após 7 dias da moldagem do substrato, foi aplicado um carregamento através da protensão da cordoalha engraxada que originou forças verticais de 19,6 kN (Protensão nº 1). Após 68 dias da aplicação deste carregamento, com a viga já reforçada, aumentou-se o carregamento (Protensão nº 2) para 35,1 kN.

Já na viga V2 foi aplicado apenas um carregamento (Protensão nº 1) de 32 kN aos 7 dias após a moldagem do substrato e antes da execução do reforço.

Mesmo tendo-se ajustado a câmara climatizada na temperatura de $32^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$ e umidade de $38\% \pm 4\%$, nem sempre estes valores foram satisfeitos. Nas figuras 3.33 e 3.34 pode-se observar as variações ambientais durante todo o período em que os modelos permaneceram armazenados na câmara climatizada.

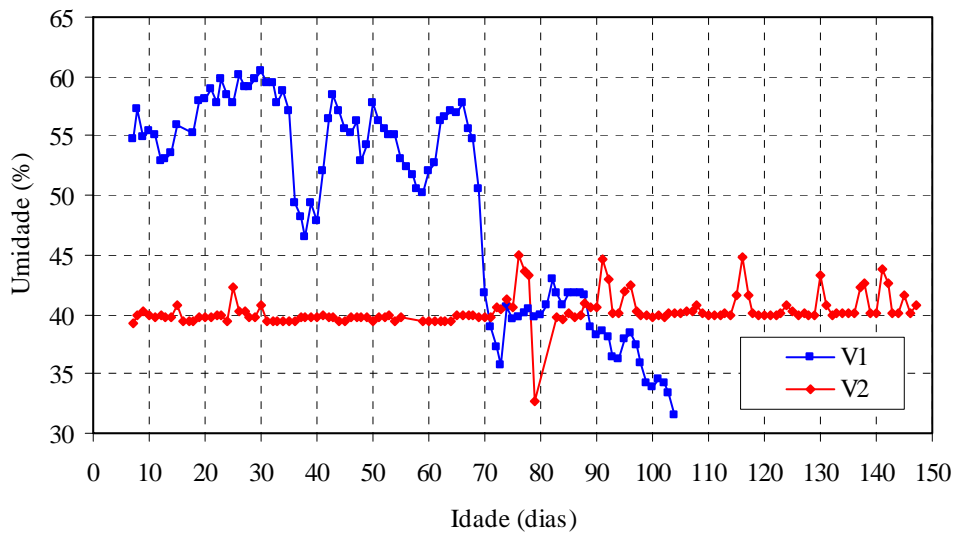


FIGURA 3.33 – Valores da umidade ambiente durante o ensaio

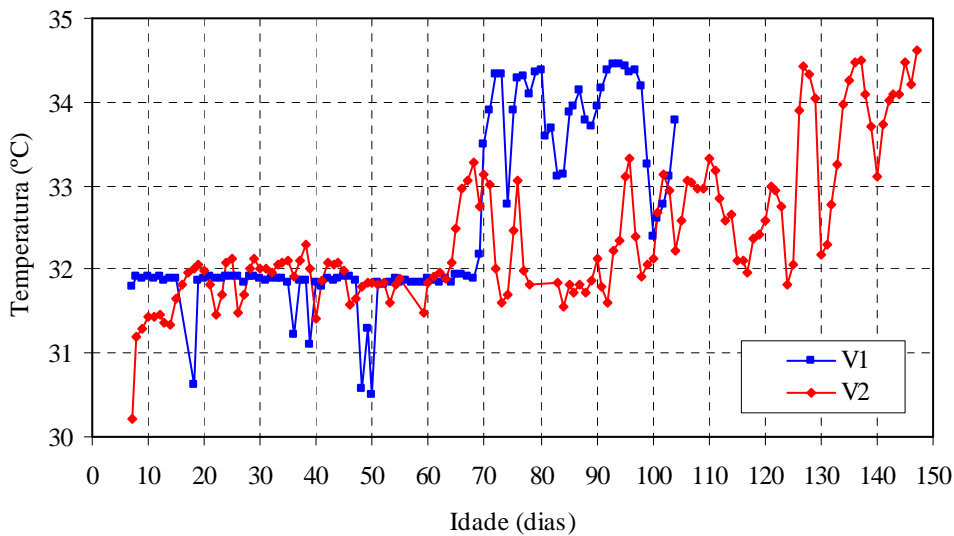


FIGURA 3.34 – Valores da temperatura ambiente durante o ensaio

As características mecânicas do concreto do substrato e do reforço estão apresentadas na tabela 3.8. Já a armadura passiva utilizada nas vigas apresentou as propriedades mecânicas descritas na tabela 3.9.

A armadura de protensão utilizada para aplicar o carregamento, constituía-se de uma cordoalha de 7 fios tipo CP 190-RB (não aderente) com bitola de 12,7 mm, que segundo o fabricante apresenta as características apresentadas na tabela 3.10.

TABELA 3.8 – Características mecânicas do concreto

Etapas do ensaio	Idade (dias)	Substrato			Reforço		
		f_{cj} (MPa)	f_{tj} (MPa)	E_{co} (MPa)	f_{cj} (MPa)	f_{tj} (MPa)	E_{co} (MPa)
V1							
Concretagem do substrato	0	-	-	-	-	-	-
Protensão nº 1	7	14,61	1,90	-	-	-	-
Concretagem do reforço	40	21,51	2,73	24378	-	-	-
Protensão nº 2	75	22,06	2,37	26000	66,24	5,07	34952
Final	104	25,79	2,69	26403	71,55	5,46	35718
V2							
Concretagem do substrato	0	-	-	-	-	-	-
Protensão nº 1	7	16,19	1,81	26704	-	-	-
Concretagem do reforço	75	29,90	2,85	31328	-	-	-
Final	145	32,59	3,49	31772	90,33	6,03	34138

TABELA 3.9 – Características mecânicas da armadura passiva

ϕ (mm)	Tipo de armadura	f_y (MPa)	f_u (MPa)	ϵ_y (%)
V1				
6,3	CA-60 – A_s'	605	844	2,95
10	CA-50 – A_{sw}	521	833	2,54
20	CA-50 – A_{s1} e A_{s2}	561	682	2,74
V2				
6,3	CA-60 – A_s'	633	824	3,09
10	CA-50 – A_{sw}	564	653	2,75
20	CA-50 – A_{s1} e A_{s2}	525	637	2,56

* módulo de elasticidade das armaduras foi considerado igual a 205000 MPa

TABELA 3.10 – Características mecânicas da armadura ativa

ϕ (mm)	A_s (cm ²)	E_{ps} (MPa)	f_{py} (MPa)	ϵ_{py} (%)	f_{pu} (MPa)
12,7	0,999	208000	1820	8,8	2000

Apresenta-se na figura 3.35 o desenvolvimento da flecha no decorrer do ensaio das vigas V1 e V2.

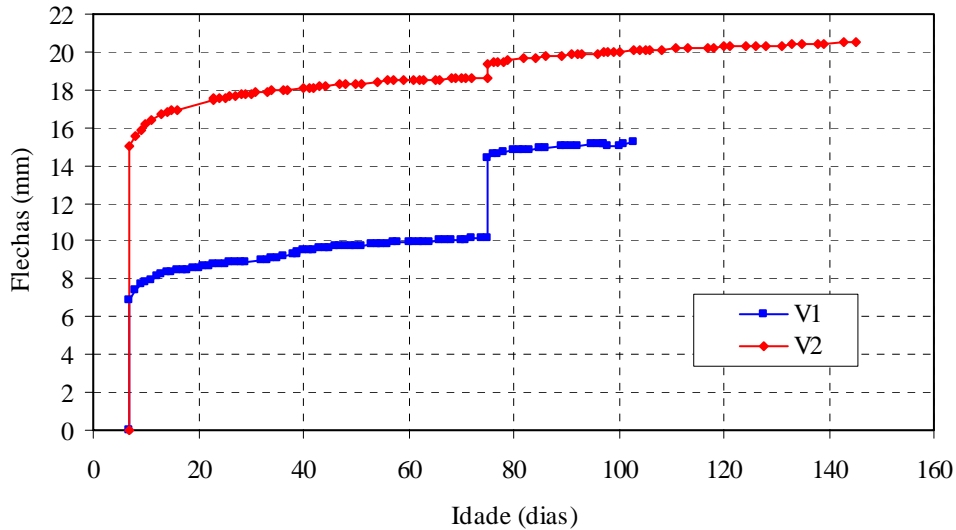


FIGURA 3.35 – Flechas obtidas durante o ensaio

b) Análise numérica

A análise numérica foi realizada dividindo a viga em 60 elementos de 5 cm cada um. Pela figura 3.36 pode-se observar o esquema de carregamento aplicado e a discretização longitudinal da viga. Já a seção transversal foi subdividida em 49 filamentos de concreto e três filamentos de aço, como pode ser visto na figura 3.37.

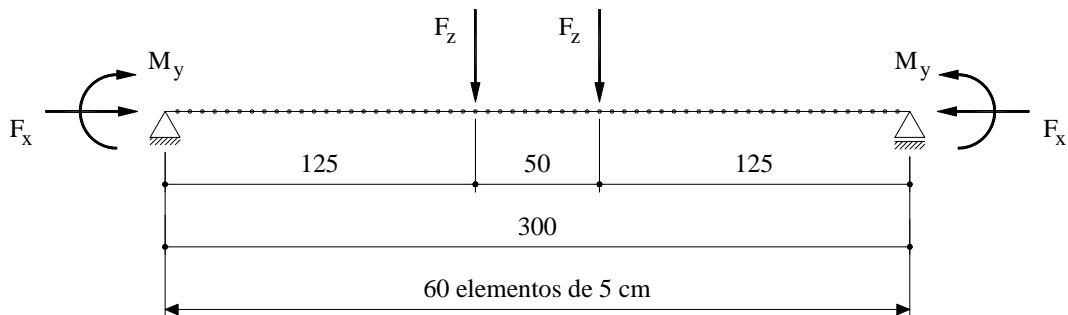


FIGURA 3.36 – Discretização longitudinal (dimensões em cm)

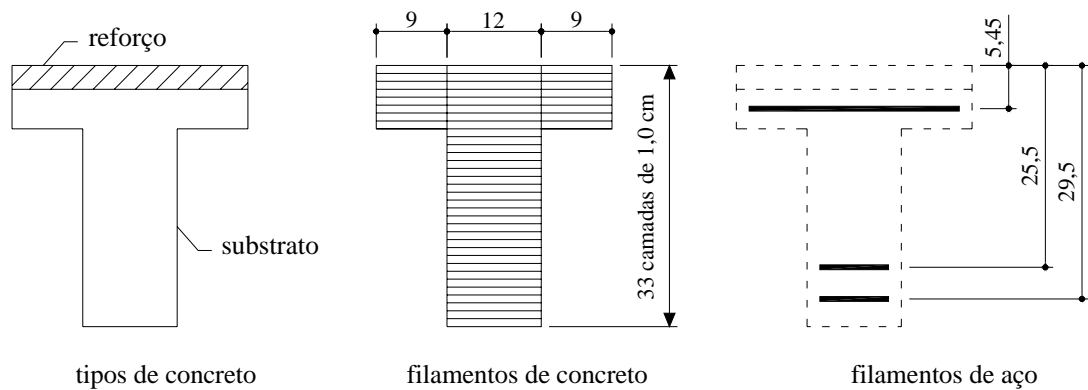


FIGURA 3.37 – Discretização da seção transversal (dimensões em cm)

Como já mencionado, houve a diminuição do carregamento aplicado durante o período do ensaio devido aos efeitos de relaxação do cabo de protensão e do aumento da curvatura da viga por fluência. Isso foi levado em consideração na análise numérica através da redução do carregamento em determinados passos de tempos de forma que se aproximasse aos valores obtidos no ensaio. E assim, o carregamento considerado na análise numérica não apresentou uma redução contínua ao longo do tempo conforme observado no ensaio, mas pequenas perdas localizadas como mostrado na figura 3.38.

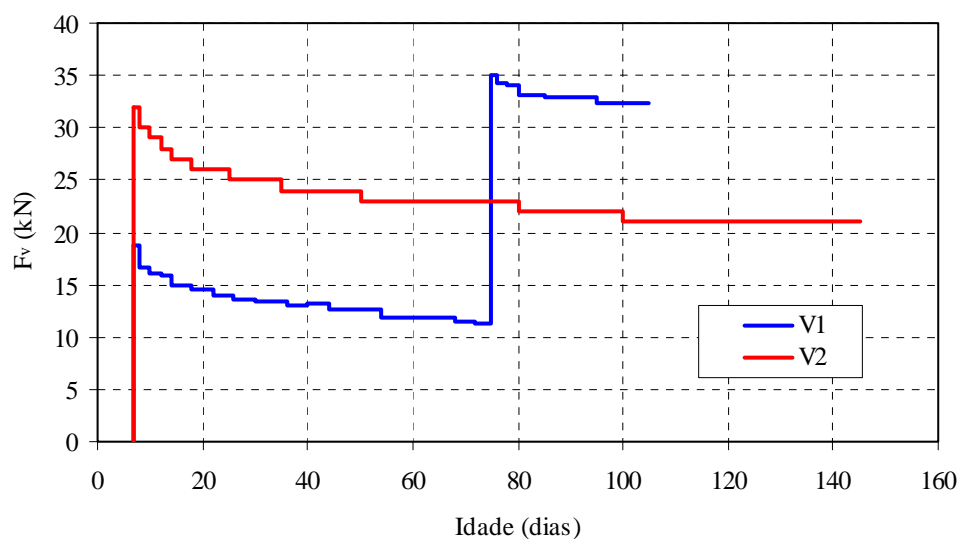


FIGURA 3.38 – Evolução da força vertical utilizada na análise numérica

Foram consideradas na análise numérica condições ambientais constantes durante todo o ensaio. O valor da temperatura ambiente considerada foi de 32 °C e umidade ambiente de 50% e 40%, respectivamente, para as vigas V1 e V2.

O valor da resistência média à compressão do concreto, aos 28 dias, considerado na análise numérica da viga V1 foi de 20 MPa para o concreto do substrato e 55 MPa para o concreto do reforço. Já para a viga V2, considerou-se 25 MPa para o concreto do substrato e 80 MPa para o concreto do reforço.

c) Comparação entre os resultados

Mostra-se nas figuras 3.39 e 3.40 as flechas obtidas no ensaio e as obtidas da análise numérica das vigas V1 e V2, respectivamente. Nota-se pelas figuras que a análise numérica empregada foi capaz de descrever com grande eficiência a evolução da flecha das vigas.

Para a viga V1 a análise numérica apresentou uma concordância muito boa com os resultados experimentais até 75 dias após o início do ensaio, quando houve o aumento do carregamento aplicado (Protensão nº 2). Mas mesmo após este instante, a diferença entre os valores experimentais e da análise numérica foram pequenos, tendo uma diferença máxima de 4,65% aos 75 dias e diminuindo em seguida, como se pode notar pela figura 3.39.

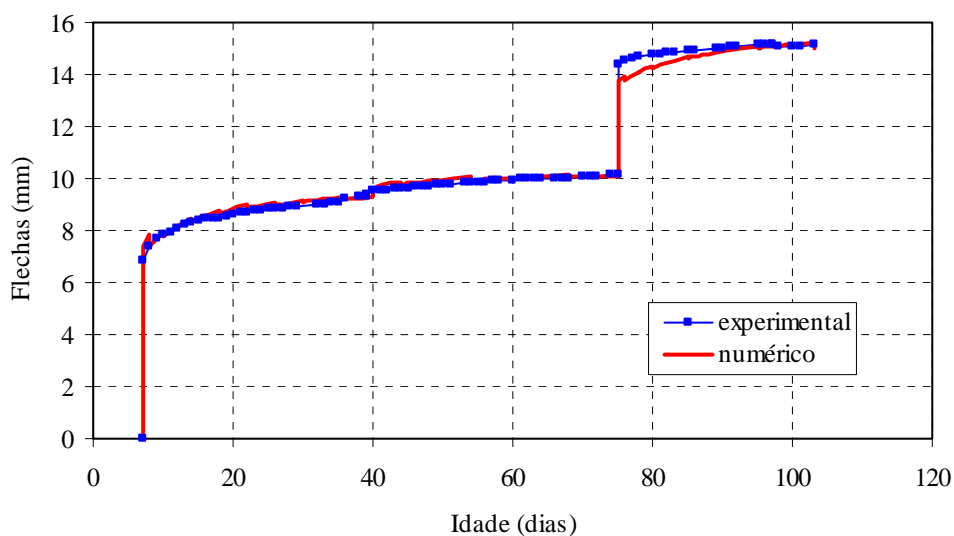


FIGURA 3.39 – Evolução da flecha (viga V1)

Já a viga V2 a diferença máxima entre os resultados experimentais e da análise numérica foi de 5,66 % aos 145 dias, no fim do ensaio, conforme figura 3.40. No entanto, vale ressaltar que houve aos 75 dias, dia da concretagem do reforço da viga V2, um salto na flecha da viga de 0,648 mm. A princípio este salto se deve ao peso próprio do reforço, mas como se pode observar pela figura 3.39, a concretagem do reforço da viga V1 foi realizada aos 40 dias, com um concreto mais jovem, e mesmo assim não houve um salto na flecha dessa magnitude. Portanto, pode-se considerar que a diferença entre os resultados experimentais e da análise numérica possa ser ainda menor.

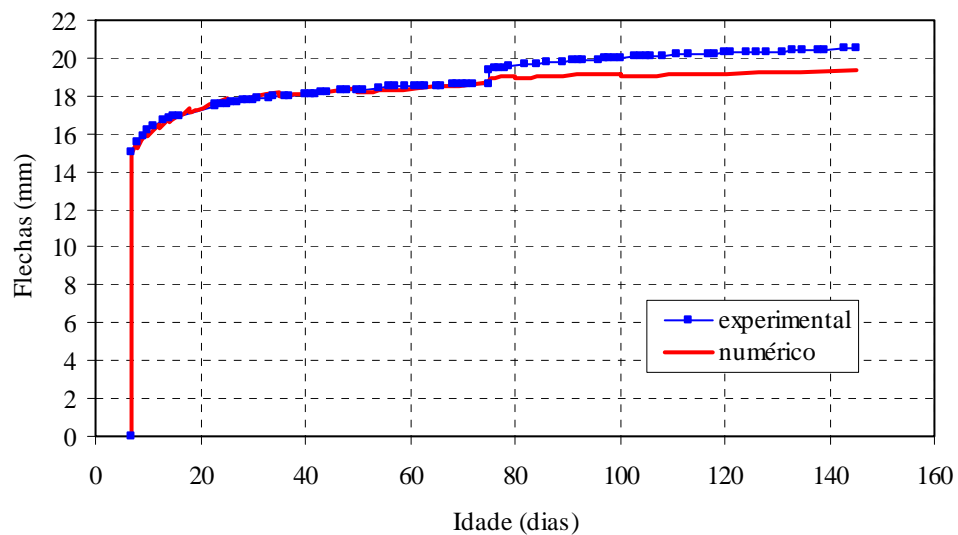


FIGURA 3.40 – Evolução da flecha (viga V2)

4.1 Considerações iniciais

Uma estimativa realista da fluência e retração do concreto é de crucial importância para assegurar a funcionalidade das estruturas de concreto ao longo do tempo. Previsões errôneas destes fenômenos contribuem para ocorrência de deformações excessivas e fissuração, afetando a longevidade das estruturas de concreto. E ainda, como alertado por BAZANT & BAWEJA (1995b), erros na previsão da fluência e retração do concreto geralmente são maiores que aqueles causados por simplificações no método de análise estrutural, ou seja, para o caso de estruturas sensíveis à fluência, faz pouco sentido utilizar análise em elementos finitos ou qualquer outra aproximação computacional sofisticada se não for introduzido um modelo realista para a fluência e retração do concreto.

Por esta razão, além das disposições contidas em normas para a previsão da fluência e retração do concreto, pode-se encontrar muitos trabalhos de pesquisa que desenvolveram modelos ajustando-os a dados experimentais contidos na literatura, como por exemplo, BAZANT & BAWEJA (1995b), BAZANT & CHERN (1982) e BAZANT & PANULA (1980). Tais modelos, denominados de modelos determinísticos, são importantes para previsão do comportamento médio, no entanto, ainda falta uma estimativa da variabilidade estatística esperada, que somente pode ser obtida através de uma análise probabilística.

BAZANT (1988) afirma ainda que as formulações determinísticas dos modelos de fluência do concreto alcançaram um limite de refinamento que tentativas adicionais de desenvolvimento teriam pouco sentido se não for considerada a

aleatoriedade do fenômeno da fluência. Ao invés de tentar desenvolver modelos determinísticos mais sofisticados para a fluência, melhor seria formular modelos que levassem em consideração as incertezas na descrição do fenômeno, qualquer que seja a fonte dessas incertezas.

Quando se compara as flechas de estruturas de concreto reais causadas pela fluência e retração do concreto com modelos determinísticos, como nos trabalhos realizados por ESPION & HALLEUX (1990) e RUSSEL et al. (1982), observa-se uma variabilidade estatística dos resultados causados pelas incertezas inerentes aos fenômenos de fluência e retração do concreto.

Portanto, devido à essa variabilidade estatística dos fenômenos relacionados com o comportamento do concreto, as estruturas deveriam ser projetadas para que certos efeitos extremos, tal como deslocamento máximo ou tensão máxima, tivessem pequena probabilidade especificada de serem ultrapassados, ao invés de se determinar os efeitos médios, como é normalmente realizado atualmente. Ou seja, a fim de assegurar a segurança das estruturas de concreto, além do valor médio, deve-se considerar a variabilidade dos fatores envolvidos no problema.

A variabilidade dos fenômenos de fluência e retração do concreto é causada por vários fatores. Como fatores externos, pode-se destacar a mudança das condições ambientais, tais como temperatura e umidade, sendo o efeito desses fatores, em geral, preponderante sobre os demais [BAZANT (1988)]. Por outro lado, os fatores internos são a variabilidade da qualidade e a composição da mistura dos materiais usados no concreto e a variabilidade devida ao mecanismo interno de fluência e retração. Portanto, conforme BAZANT (1988), a variabilidade estatística pode ser atribuída aos seguintes fatores de incertezas:

a) Fatores internos de incerteza

- 1) Natureza estocástica do mecanismo físico da fluência e retração;
- 2) Propriedades dos materiais, tais como, a resistência à compressão e módulo de elasticidade.

b) Fatores externos de incertezas

- 3) Condições ambientais, isto é, a fluência e retração do concreto são significativamente influenciadas pelas mudanças sazonais ou diárias do tempo;
- 4) Cargas externas (a estrutura pode estar sujeita às cargas altamente variáveis, tais como neve e cargas acidentais);
- 5) Técnica de medição.

c) Fatores de incerteza devido à formulação ou modelagem

- 6) Escolha das fórmulas para prever a fluência e retração;
- 7) Escolha dos métodos analíticos utilizados.

O fator (1) é devido ao efeito randômico da microestrutura do concreto. Diferente de outras fontes, a variabilidade devida ao fator (1) é inerente ao concreto e não pode ser eliminada. O fator (2) pode ser eliminado somente sob condições controladas, tais como as condições de laboratório. Em condições reais de construção, seria muito difícil eliminar a variabilidade na composição da mistura e a qualidade dos materiais. O fator (3) afeta as condições de secagem do concreto e a taxa de fluência e retração, além de causar tensões por retração. As propriedades dos materiais também são afetadas pelas mudanças ambientais. O fator (4) pode fazer com que o estado de tensão seja maior ou menor que o nível de tensão de projeto, levando-se a uma deformação por fluência maior ou menor que a esperada. Além disso, a variação do nível de tensão pode causar variação das propriedades dos materiais. Já o fator (5), refere-se somente aos dados de medida, e não no concreto em si. Portanto, esta variação não deveria ser incluída em um modelo de previsão da fluência e retração. Quando são feitas observações de campo para atualizar o modelo probabilístico, e portanto, diminuir as variações na previsão, então esse fator deveria ser explicitamente incluído no modelo. A eliminação do fator (6) pode ser a meta final para os pesquisadores no campo da fluência e retração do concreto. As fórmulas para fluência e retração usadas nas normas devem ser de tal forma que a previsão possa ser obtida com um mínimo de erro. Para o fator (7), é importante conhecer os erros causados pela escolha de um método particular de análise.

E assim, a partir do exposto acima, o objetivo deste capítulo é apresentar um modelo para análise probabilística de estruturas de concreto sujeitas aos fenômenos de fluência e retração.

4.2 Conceitos básicos e definições

Da teoria de probabilidade, o grupo de todos os êxitos ou resultados possíveis em um problema probabilístico é denominado *espaço amostral* S , e cada uma das possibilidades individuais é um *ponto amostral*. Um *evento* é então definido como um subgrupo do espaço amostral, como os designados E_1 ou E_2 na figura 4.1, denominada diagrama de Euler ou Venn.

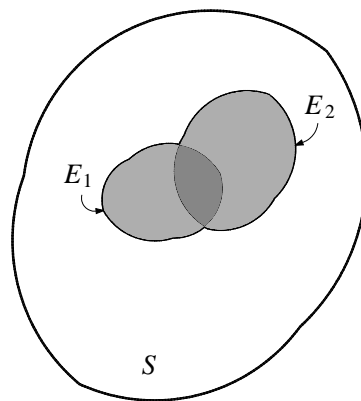


FIGURA 4.1 – Diagrama de Euler ou Venn

O evento $E_1 + E_2$ é um conjunto de pontos que estão tanto em E_1 como em E_2 ou em ambos, enquanto que $E_1 E_2$ é o conjunto de pontos comuns a E_1 e E_2 . Então, a probabilidade de um evento, tal como E_1 , é a soma de todas as possibilidades associadas a todos os pontos contidos no conjunto E_1 . Semelhantemente, a probabilidade de $E_1 + E_2$, é a soma das probabilidades associadas a todos os pontos contidos no conjunto $E_1 + E_2$. Se E_1 e E_2 não têm pontos comuns, isto é, se os eventos são mutuamente exclusivos, então:

$$P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2) \quad 4.1$$

Se eles têm pontos comuns, então:

$$P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2) \quad 4.2$$

O conjunto $E_1 + E_2$, representado freqüentemente por $E_1 \cup E_2$, é denominado união dos dois conjuntos. O conjunto $E_1 E_2$, representado freqüentemente por $E_1 \cap E_2$, é denominado intercessão dos dois conjuntos.

Cada resultado possível ou evento pode ser identificado através do valor de uma função, tal função é denominada *variável aleatória*, que é usualmente designada por uma letra maiúscula. Portanto, uma variável aleatória pode ser considerada uma função que associa um número real a cada resultado possível de um fenômeno aleatório (evento), ou seja, atribui um valor numérico para cada elemento de um determinado espaço amostral, conforme figura 4.2. Assim, como exemplificado por REAL (2000), a resistência à compressão de um corpo de prova cilíndrico de concreto (f_c) pode ser considerada como uma variável aleatória, pois ela atribui um valor numérico a um evento aleatório distinto, que é a tensão para a qual acontece a ruptura de um certo corpo de prova de concreto.

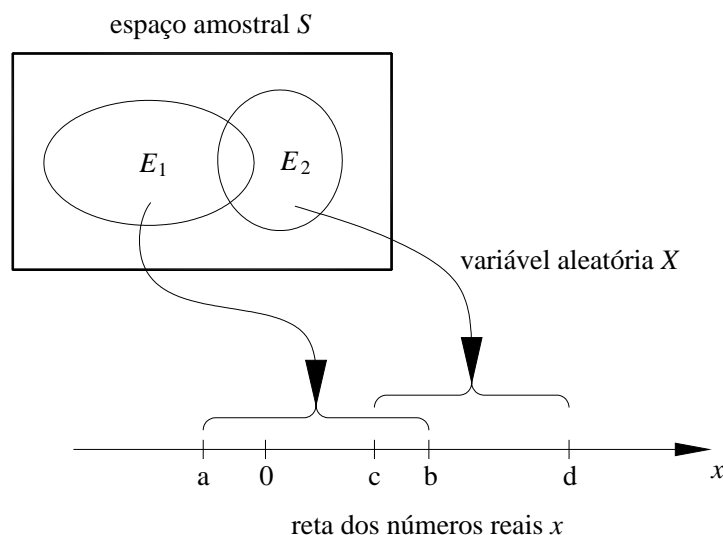


FIGURA 4.2 – Mapeamento de eventos através da variável aleatória X

[adaptado ANG & TANG (1975)]

AUGUSTI et al. (1984) salientam que o termo variável aleatória somente deve ser utilizado quando não há variação no tempo e *processo aleatório* ou *processo estocástico* se houver variação com o tempo (ou com algum outro parâmetro independente).

A interpretação de uma variável aleatória como uma função pode ser freqüentemente evitada, já que os cálculos probabilísticos podem ser realizados em termos de densidade de probabilidade, como destacado por GARDNER (1986).

Como o valor de uma variável aleatória representa um evento, ela pode assumir somente um valor numérico associado a uma probabilidade de ocorrência deste evento. A lei que descreve a medida de probabilidade associada a cada um dos valores possíveis de uma variável aleatória é chamada de *distribuição de probabilidade*.

A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X pode ser descrita através de sua *função de distribuição de probabilidade acumulada* (FDPA), dada por:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad \text{para todos valores de } x \quad 4.3$$

Uma variável aleatória X é dita *discreta* se somente certos valores discretos de x têm probabilidades positivas. E, X é uma variável aleatória *contínua* se são definidas medidas de probabilidade para qualquer valor de x , como mostrado na figura 4.3.

Para uma variável aleatória discreta X , sua distribuição de probabilidade pode também ser descrita em termos de uma *função de massa de probabilidade* (FMP), que é simplesmente uma função expressando $P(X = x)$ para todos os valores possíveis de x . Portanto, se X for uma variável aleatória discreta com FMP, $p_X(x_i) = P(X = x_i)$, sua função de distribuição será:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{\text{todos } x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{\text{todos } x_i \leq x} p_X(x_i) \quad 4.4$$

Contudo, se X for contínua, as probabilidades somente poderão estar associadas a intervalos definidos sobre a reta dos números reais, conseqüentemente, para um valor específico de X , tal como $X = x$, somente pode ser definida a

densidade de probabilidade. Portanto, para uma variável aleatória contínua a lei de probabilidade também pode ser descrita em termos de uma *função de densidade de probabilidade* (FDP), e se $f_X(x)$ é a FDP de X , a probabilidade de X no intervalo $(a, b]$ é:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x).dx \tag{4.5}$$

Conseqüentemente, é possível definir a função de distribuição de probabilidade acumulada da variável aleatória X na forma:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi).d\xi \tag{4.6}$$

E portanto, se $F_X(x)$ possuir primeira derivada, então, tem-se:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \tag{4.7}$$

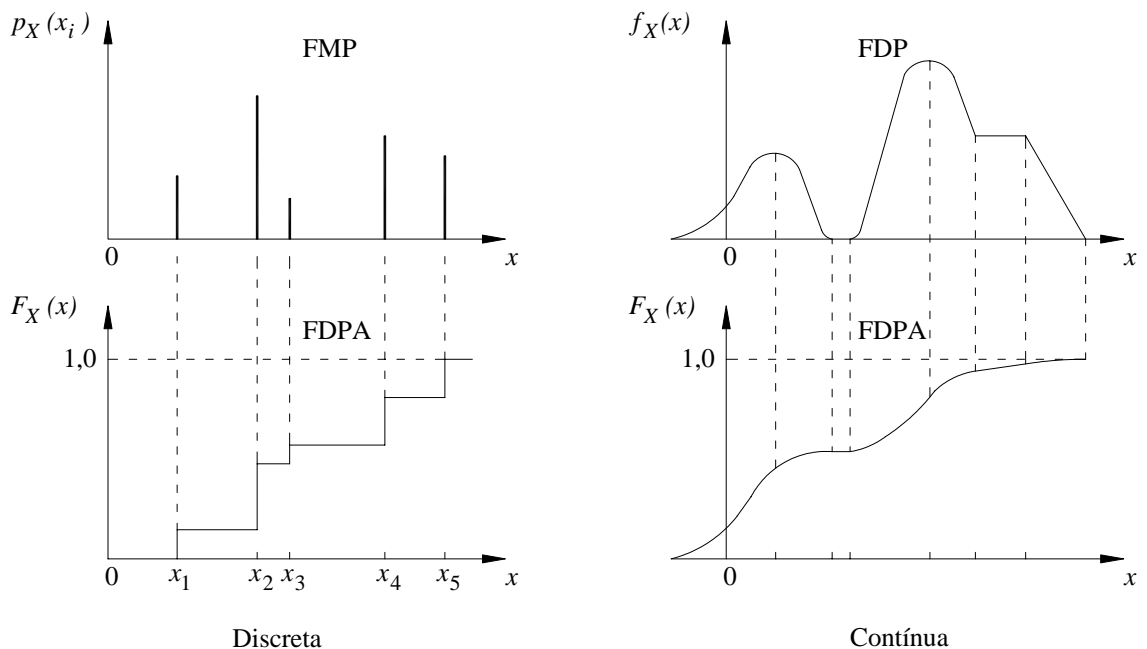


FIGURA 4.3 – Distribuições de probabilidade [adaptado ANG & TANG (1975)]

Qualquer função escolhida para representar a função de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória X , deve satisfazer os axiomas da definição

de probabilidade, ANG & TANG (1975). Portanto, a função $F_X(x)$ deve possuir as seguintes propriedades:

- a) $F_X(x = -\infty) = 0$; $F_X(x = +\infty) = 1$;
- b) $F_X(x) \geq 0$, e não ser decrescente com x ;
- c) ser contínua com x .

As características probabilísticas de uma variável aleatória podem ser descrita em termos de certos parâmetros; os principais parâmetros de uma variável aleatória são o *valor central* e uma *medida de dispersão* de seus valores.

O valor central de uma variável aleatória X é conhecido como *média* ou *valor esperado* de X , sendo denotado por $E(X)$, é definido pelas seguintes expressões:

$$E(X) = \sum_{\text{todos } x_i} x_i \cdot p_X(x_i) \quad \text{se } X \text{ for discreta} \quad 4.8a$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \cdot dx \quad \text{se } X \text{ for contínua} \quad 4.8b$$

Enquanto que a *variância* $Var(X)$ é uma medida de dispersão ou variabilidade, sendo definida por:

$$Var(X) = \sum_{\text{todos } x_i} (x_i - \mu_X)^2 \cdot p_X(x_i) \quad \text{se } X \text{ for discreta} \quad 4.9a$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x) \cdot dx \quad \text{se } X \text{ for contínua} \quad 4.9b$$

em que $\mu_X \equiv E(X)$.

Dimensionalmente, uma medida de dispersão mais conveniente é a raiz quadrada da variância, ou desvio padrão σ , isto é:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} \quad 4.10$$

É difícil dizer, somente com base na variância ou desvio padrão, se a dispersão é grande ou pequena; por isso, seria mais útil uma medida de dispersão

relativa ao valor central . Em outras palavras, se a dispersão é significativamente grande ou pequena com relação ao valor central. Por esta razão, o *coeficiente de variação* (V), é freqüentemente uma medida de dispersão adimensional conveniente, conforme a seguinte equação:

$$V_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad 4.11$$

A função de distribuição de probabilidade mais conhecida e mais amplamente empregada é a distribuição normal, também conhecida por distribuição gaussiana, que é definida pela sua função de densidade de probabilidade na forma:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right] \quad -\infty < x < \infty \quad 4.12$$

onde μ_X e σ_X são os parâmetros da distribuição, sendo também a média e o desvio padrão da variável aleatória X .

A distribuição gaussiana com parâmetros $\mu_X = 0$ e $\sigma_X = 1$, conforme figura 4.4, é conhecida como distribuição normal padronizada e pode ser obtida através da transformação:

$$s = \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \quad 4.13$$

Resultando na seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot s^2\right] \quad -\infty < s < \infty \quad 4.14$$

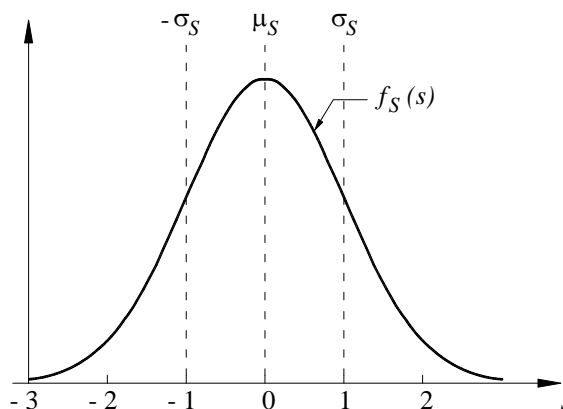


FIGURA 4.4 – Função de densidade de probabilidade da distribuição normal padronizada

O conceito de uma variável aleatória e sua distribuição de probabilidade pode ser estendida a duas ou mais variáveis aleatórias. A fim de identificar numericamente eventos que são resultados de dois ou mais processos físicos, os eventos em um espaço amostral pode ser mapeado em duas (ou mais) dimensões do espaço real (figura 4.5); implicitamente isto exige duas ou mais variáveis aleatórias.

Como os valores de X e Y representam eventos, há probabilidades associadas com qualquer par de valores x e y ; as probabilidades de todos os possíveis pares de x e y podem ser descritas com a *função de probabilidade conjunta* das variáveis aleatórias X e Y , definida como:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad 4.15$$

que é a probabilidade acumulada da ocorrência conjunta dos eventos identificados por $X \leq x$ e $Y \leq y$.

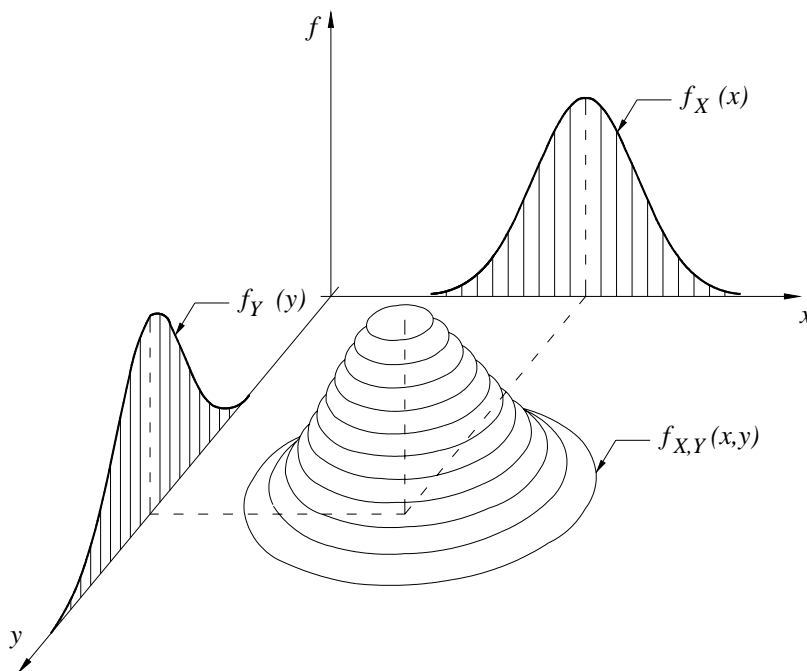


FIGURA 4.5 – Função de probabilidade conjunta

Se as variáveis aleatórias forem discretas, a distribuição de probabilidade também pode ser descrita com a *função de massa de probabilidade conjunta* (FMP), que é simplesmente:

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad 4.16$$

Então a função de distribuição, torna-se:

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{(x_i \leq x, y_i \leq y)} p_{X,Y}(x_i, y_i) \quad 4.17$$

que é simplesmente a soma das probabilidades associadas com todos os pares de pontos (x_i, y_i) no subconjunto $\{x_i \leq x, y_i \leq y\}$.

Se as variáveis aleatórias X e Y forem contínuas, a distribuição de probabilidade pode também ser descrita com a *função de densidade de probabilidade* (FDP), que pode ser definida como:

$$f_{X,Y}(x, y) = P(x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy) \quad 4.18$$

Então,

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) dv du \quad 4.19$$

E também,

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(u, v) dv du \quad 4.20$$

O momento de 2ª. Ordem conjunto de X e Y é dado por:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad 4.21$$

E se X e Y forem estatisticamente independentes, a equação anterior tornará:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = E(X) E(Y) \quad 4.22$$

Já o momento de 2ª. Ordem com relação às médias μ_X e μ_Y é denominada a *covariância* de X e Y . Isto é:

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = E(XY) - E(X) E(Y) \quad 4.23$$

E considerando a equação 4.22, $Cov(X,Y)=0$ se X e Y forem estatisticamente independentes.

Portanto, a $Cov(X,Y)$ é uma medida do grau de inter-relação (linear) entre as variáveis X e Y . Para este propósito, contudo, é preferível utilizar a covariância normalizada ou *coeficiente de correlação*, que é definido como:

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad 4.24$$

Os valores de ρ variam entre -1 e +1. Quando $\rho = \pm 1,0$, X e Y são linearmente relacionados como mostrado na figura 4.6-a e 4.6-b, e quando $\rho = 0$, os valores de X e Y podem aparecerem como na figura 4.6-c. Para valores intermediários de ρ , os valores de X e Y apareceriam como na figura 4.6-d. Contudo, pode-se observar pelas figuras 4.6-e e 4.6-f que quando a relação entre X e Y for não linear, $\rho = 0$ até mesmo quando houver uma perfeita relação funcional entre as variáveis.

Portanto, a magnitude do coeficiente de correlação ρ (entre 0 e 1) é uma medida do grau de inter-relação linear entre duas variáveis.

É importante salientar que ρ é uma medida do grau de relação (linear) entre duas variáveis. Isto não implica necessariamente em uma relação causa-efeito entre as variáveis. Duas variáveis X e Y podem dependerem de uma outra variável (ou variáveis), causando uma forte correlação entre os valores de X e Y , mas os valores de uma variável pode não ter efeito direto nos valores da outra.

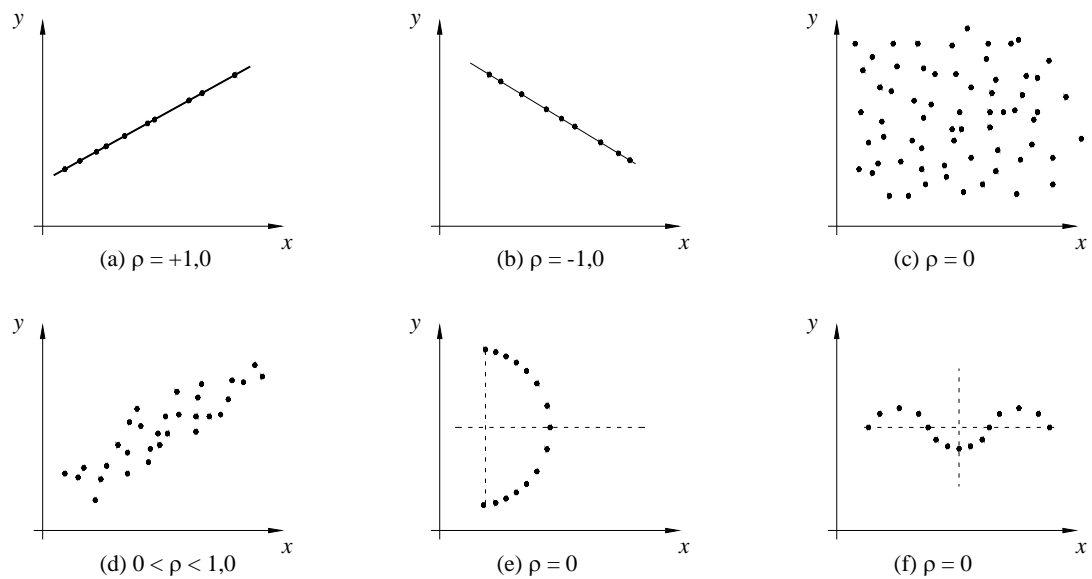


FIGURA 4.6 – Coeficiente de correlação [ANG & TANG (1975)]

4.3 Simulação de Monte Carlo

Modelos matemáticos são criados para simular problemas reais, e assim sendo, para qualquer seleção de dados de entrada $X_i = (X_1, \dots, X_n)$, um dado de saída $Y = h(X_i)$ é produzido pela aplicação do modelo matemático. Se o modelo for exato, a resposta Y se assemelhará ao resultado obtido em um experimento sob as condições X_i . No entanto, os modelos matemáticos, geralmente, não são exatos, além disso, a modelagem do problema real é complexa, necessitando-se de simplificações. A dificuldade pode aumentar quando os parâmetros do sistema não são constantes, variando de alguma maneira dos valores nominais, como o que acontece com os parâmetros relacionados ao concreto. Com isso, a modelagem do problema deve ser feita considerando os valores de entrada como variáveis aleatórias. E com isso, obtém-se do estudo uma distribuição de probabilidade para o dado de saída $Y(t)$, como mostrado na figura 4.7, e a informação desejada é obtida da análise dessa distribuição.

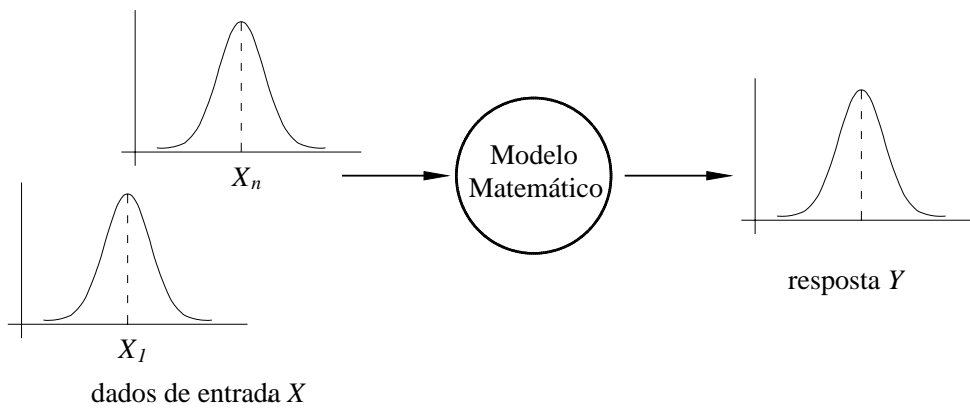


FIGURA 4.7 – Modelagem das incertezas

Portanto, se forem especificado os parâmetros X_1, \dots, X_n , pode-se determinar a resposta $Y(X_i, t)$ para um determinado tempo t pelo processamento do modelo através da análise determinística usual da estrutura. O método mais óbvio para a determinação da distribuição de $Y(X_i, t)$ é a simulação através do método Monte Carlo ou simulação de Monte Carlo, baseado na amostragem aleatória simples dos parâmetros de entrada X_i de acordo com suas distribuições de probabilidade. Para cada amostra gerada aleatoriamente X_i^k ($k = 1, 2, \dots, N$), é determinada a resposta Y^k e a distribuição de Y pode ser construída assumindo que cada Y^k tem a mesma probabilidade. Portanto, a simulação de Monte Carlo é simplesmente um processo de repetição de geração de soluções para um determinado problema, sendo que cada solução é determinada a partir de um particular grupo de valores das variáveis aleatórias geradas de acordo com suas correspondentes distribuição de probabilidade.

A simulação de Monte Carlo teve sua origem como extensão do Método de Monte Carlo. Este método foi proposto por Von Neumann e Ulam para a solução de problemas matemáticos cujo tratamento analítico não se mostrava viável. Isto se deu durante a Segunda Guerra Mundial, ao longo das pesquisas no Laboratório de Los Alamos, que resultaram na construção da primeira bomba atômica. A aplicação original do Método de Monte Carlo voltava-se à resolução de integrais múltiplas, no entanto, logo se verificou que ele poderia ser aplicado na solução de diversos outros problemas matemáticos complexos.

Passado o momento de euforia inicial, as principais deficiências do novo método foram mais bem reconhecidas, notavelmente o grande trabalho computacional envolvido e a baixa precisão dos seus resultados, lembrando-se que nesta época, final da década de 40, os computadores começavam a tornar-se realidade, mas ainda com um desempenho bastante baixo.

Sendo restritos os recursos computacionais, as atenções se voltaram para a obtenção de resultados mais precisos, mas sem que se aumentassem, proporcionalmente, os tempos de processamento envolvidos. Este esforço resultou no desenvolvimento das técnicas de redução de variância, muitas delas objetivando um controle parcial do processo de amostragem.

No início da década de 50, com o advento dos primeiros computadores, a idéia do Método de Monte Carlo foi estendida para a solução de problemas probabilísticos de caráter mais geral, como é o caso das filas de espera. Viu-se, com isso, que poderíamos simular um processo e estimar seus principais parâmetros de operação, assim nascia a simulação de Monte Carlo.

4.3.1 Parâmetros do sistema e suas propriedades estatísticas

O sucesso da simulação de Monte Carlo depende significativamente da identificação dos parâmetros críticos do sistema que necessitam ser considerados como variáveis aleatórias e a determinação de suas propriedades estatísticas.

Neste trabalho foram considerados cinco parâmetros do sistema como variáveis aleatórias e conseqüentemente cinco fatores de incerteza foram introduzidos na análise numérica. Os dois primeiros se referem aos fatores de incerteza relativos ao erro potencial dos modelos de previsão da fluência e retração do concreto enquanto que os outros três fatores de incerteza foram atribuídos aos seguintes parâmetros do modelo: resistência do concreto, umidade relativa e temperatura ambiente. Foi considerado ainda que todos os fatores de incerteza assumiam distribuição normal e eram estatisticamente independentes entre si.

a) Coeficiente de fluência

O erro na previsão da fluência do concreto é considerado na análise através de um fator de incerteza ψ_1 de valor médio igual a 1 multiplicando o coeficiente de fluência.

O CEB (1990) apresenta uma avaliação estatística do modelo do CEB-90 (1991) para a previsão da fluência do concreto através da comparação deste modelo com resultados de ensaios de fluência contidos em um banco de dados. Por essa análise, o valor encontrado para o coeficiente de variação é de 20,4% para a função fluência dada pela seguinte equação.

$$\Phi(t, t_o) = \frac{1}{E_c(t_o)} + \frac{\psi_1 \cdot \varphi(t, t_o)}{E_{c28}} \quad 4.25$$

Como o coeficiente de variação é referente à função fluência e não ao coeficiente de fluência, deve-se fazer a conversão com base na análise de propagação de erro [ANG & TANG (1975)]. Desprezando a parte de variação atribuída ao módulo de elasticidade, tem-se:

$$\sigma_\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \cdot \sigma_\varphi \quad 4.26$$

Considerando-se módulo de elasticidade constante e convertendo a equação anterior em termos do coeficiente de variação tem-se, conforme TAKÁCS (2002):

$$V_{\psi_1} = V_\varphi = V_\Phi \cdot \frac{1 + \mu_\varphi}{\mu_\varphi} \quad 4.27$$

Se o coeficiente de variação para a função fluência é de 20,4% e estimando um valor médio para o coeficiente de fluência de 2,0, o coeficiente de variação obtido pela equação anterior para o coeficiente de fluência é de 30,6%. Portanto, será estimado o coeficiente de variação para o coeficiente de fluência em:

$$V_{\psi_1} = 30\% \quad 4.28$$

b) Retração

O erro na previsão da retração do concreto é considerado através de um fator de incerteza ψ_2 de valor médio igual a 1 multiplicando o valor da retração.

O CEB (1990) apresenta também uma avaliação estatística do modelo do CEB-90 (1991) para previsão da retração do concreto, obtendo o seguinte valor para o coeficiente de variação:

$$V_{\psi_2} = 32,9\% \quad 4.29$$

c) Resistência do concreto

BAZANT & BAWEJA (1995a) sugerem considerar a variabilidade estatística da resistência do concreto com um coeficiente de variação de 15%, já nos trabalhos de BAZANT & LIU (1985) e KRISTEK & BAZANT (1985) o coeficiente de variação utilizado foi de 10%. Na realidade a variabilidade estatística da resistência do concreto vai depender do nível de controle utilizado na confecção do concreto, mas parece razoável considerar o coeficiente de variação para a resistência do concreto entre 10 e 15%. Portanto,

$$V_{f_c} = 10-15\% \quad 4.30$$

d) Umidade relativa e temperatura ambiente

A umidade relativa e a temperatura ambiente são parâmetros que não variam somente aleatoriamente, mas seguem uma flutuação sazonal e diária. É praticamente impossível considerar essa flutuação na análise estrutural, sendo suficiente considerar a umidade relativa e a temperatura com seus valores médios e atribuir os fatores de incerteza a esses valores. O coeficiente de variação para a umidade relativa sugerido por BAZANT & BAWEJA (1995a) e utilizado por BAZANT & LIU (1985) e KRISTEK & BAZANT (1985) é de 20%. Assim, os coeficientes de variação para a umidade relativa e temperatura serão estimados em:

$$V_U = 20\% \quad 4.31$$

$$V_T = 20\% \quad 4.32$$

4.3.2 Amostragem por hipercubo latino

A amostragem por hipercubo latino foi sugerida por McKAY et al. (1979), sendo um refinamento da amostragem estratificada. A idéia da amostragem por hipercubo latino é dividir o domínio de cada variável aleatória X_i em N intervalos ΔX_i^k ($k = 1, 2, \dots, N$) de igual probabilidade $1/N$, como mostrado na figura 4.8. O número de intervalos N na amostragem por hipercubo latino a ser escolhido deve ser igual ao tamanho da amostra desejada, ou seja, igual ao número total de processamentos a ser realizado (simulações). Para cada intervalo, é selecionado apenas um valor, isto é, este valor será usado em uma e apenas uma simulação.

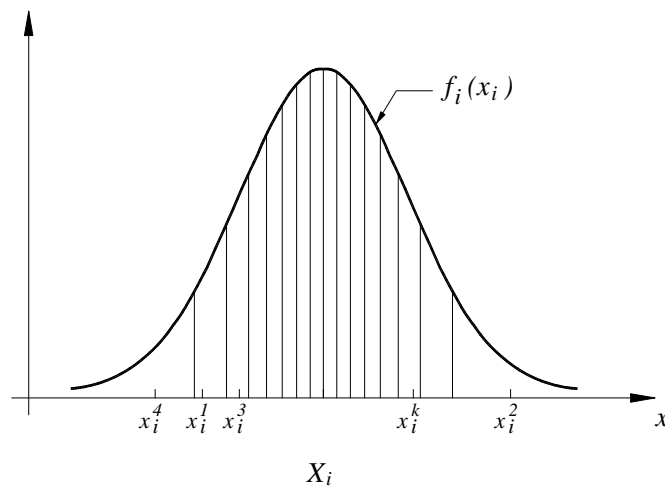


FIGURA 4.8 – Divisão do domínio da variável estatística em intervalos de igual probabilidade

Os valores amostrados x_i^k , para uma seleção aleatória do valor k , são obtidos pela resolução da seguinte equação:

$$F_i(x_i^k) = \frac{k-1 + R_k}{N} \quad \text{com } k = 1, 2, \dots, N \quad 4.33$$

onde R_k representa uma distribuição aleatória uniforme no intervalo $[0,1]$.

Ou seja, a amostragem é realizada utilizando a transformada inversa da função de distribuição de probabilidade em questão, como mostrada pela expressão:

$$x_i^k = F_i^{-1}\left(\frac{k-1+R_k}{N}\right) \text{ com } k = 1, 2, \dots, N \quad 4.34$$

Se o número de intervalos N for grande, BAZANT & LIU (1985) afirmam que o valor não precisa ser selecionado aleatoriamente (dentro do intervalo), mas pode-se tomar o centróide do intervalo, conforme figura 4.9, resultando na seguinte expressão:

$$F_i(x_i^k) = \frac{k-1/2}{N} \text{ com } k = 1, 2, \dots, N \quad 4.35$$

Tal procedimento foi estudado por SALIBY (1989) que o definiu como amostragem descritiva por ser uma seleção determinística dos valores da amostra de entrada, ou seja, enquanto que a amostragem aleatória simples pode ser vista como um processo em que se gera um conjunto de valores e sua seqüência, na amostragem descritiva apenas a seqüência continua sendo gerada aleatoriamente, através de permutações aleatórias; o conjunto, por outro lado, é selecionado de forma determinística e intencional.

A vantagem da amostragem por hipercubo latino em relação a outros métodos de amostragem é que o número de processamentos (simulações) pode ser reduzido consideravelmente para alcançar o mesmo nível de precisão, como observado nas comparações feitas por McKAY et al. (1979), STEIN (1987) e SALIBY & MOREIRA (2001).

No campo da engenharia estrutural a amostragem por hipercubo latino foi utilizada por BAZANT & LIU (1985), KRISTEK & BAZANT (1985), NAVRATIL & FLORIAN (1993) e OH & YANG (2000) para a análise dos efeitos da fluência e retração.

BAZANT & LIU (1985) utilizaram a amostragem por hipercubo latino no estudo dos efeitos da fluência e retração em vigas e demais estruturas de concreto, verificando que se obtém uma precisão aceitável se o número de simulações for igual ao número de variáveis aleatórias, $N = n$. Obtendo-se ainda uma apreciável melhoria na precisão se o número de simulações for igual a duas vezes o número de variáveis aleatórias $N = 2.n$.

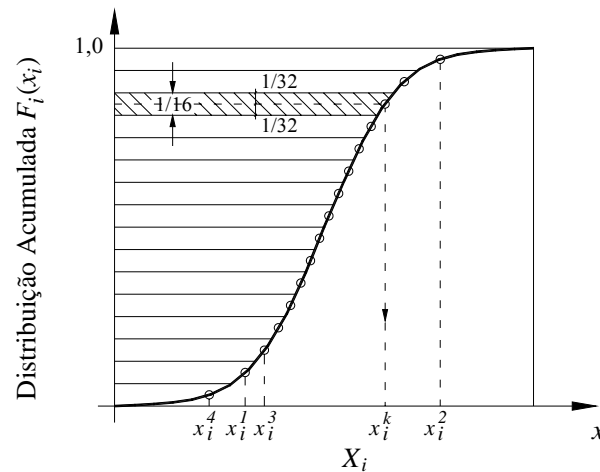


FIGURA 4.9 – Divisão do domínio da variável estatística em 16 intervalos

A seleção aleatória do valor k é realizada mediante a permutação aleatória dos inteiros $1, 2, \dots, N$. Há sub-rotinas para gerar estas permutações aleatórias, sendo que neste trabalho, utilizou-se a sub-rotina baseada no algoritmo apresentado por KNUTH (1969). Este algoritmo define que a partir de um grupo de t números x_1, \dots, x_t a ser permutado, faz-se:

- P1.** [Iniciar] Fixar $j \leftarrow t$.
- P2.** [Gerar U] Gerar um número aleatório U , uniformemente distribuído entre zero e 1.
- P3.** [Permutar] Fixar $k \leftarrow \lfloor tU \rfloor + 1$ (k será um número aleatório inteiro entre 1 e j).
Permutar $x_k \leftarrow x_j$.
- P4.** [Diminuir j] Diminuir j de 1. Se $j > 1$, retornar ao passo P2.

A transformada inversa da função de distribuição normal foi obtida a partir da transformada inversa da função de distribuição normal padronizada. Uma distribuição normal X com média μ e desvio padrão σ , como indicado por BRATLEY et al. (1987), pode ser gerada a partir da distribuição normal padronizada Z utilizando a seguinte transformação:

$$X = \mu + \sigma.Z \quad 4.36$$

Para a transformada inversa $Z = F^{-1}(U)$ da distribuição normal padronizada foi empregada a seguinte aproximação numérica apresenta por KENNEDY et al. (1980).

$$Z = k + \frac{p_0 + p_1.k + p_2.k^2 + p_3.k^3 + p_4.k^4}{q_0 + q_1.k + q_2.k^2 + q_3.k^3 + q_4.k^4} \quad 4.37$$

onde

$$k = \sqrt{-\ln(1-U)^2} \quad 4.38$$

e

$$\begin{aligned} p_0 &= -0,322232431088 & q_0 &= 0,0993484626060 \\ p_1 &= -1,0 & q_1 &= 0,588581570495 \\ p_2 &= -0,342242088547 & q_2 &= 0,531103462366 \\ p_3 &= -0,0204231210245 & q_3 &= 0,103537752850 \\ p_4 &= -0,453642210148 \cdot 10^{-4} & q_4 &= 0,38560700634 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

Esta aproximação tem uma precisão relativa de aproximadamente seis dígitos e é válida para $0,5 < U < 1$. A simetria da distribuição normal permite estender tal aproximação para $0 < U < 1$ pelas transformações $U = 1 - U$ e $Z = -Z$.

- **Estimando a média e a variância**

Após a realização de N simulações, tem-se à disposição um conjunto de dados representando um certo efeito estrutural Y (isto é, deslocamento, reação de apoio, tensão no concreto para um determinado tempo t). Assim sendo, essa resposta pode ser tratada como uma variável aleatória, cuja média e variância podem ser estimadas por:

$$M = \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad 4.39$$

$$S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \quad 4.40$$

onde $i = 1, 2, \dots, N$ representa o número de simulações.

A variância S^2 não é um estimador não viciado. De fato, não se conhece o estimador não viciado para o caso da amostragem por Hipercubo Latino, contudo tal estimador está entre os dois valores [McKAY et al. (1979)].

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \leq E(S^2) \leq \frac{1}{(N-1)} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \quad 4.41$$

- **Estimando o coeficiente de correlação**

Como mencionado anteriormente, a correlação entre duas variáveis X e Y é medida pelo coeficiente de correlação. Baseado em um grupo de valores observados de X e Y , o coeficiente de correlação pode ser estimado por:

$$r = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}} \quad 4.42$$

Ou ainda,

$$r = \frac{N \cdot \left(\sum_i (x_i \cdot y_i) \right) - \left(\sum_i (x_i) \right) \left(\sum_i (y_i) \right)}{\sqrt{\left[N \cdot \sum_i (x_i)^2 - \left(\sum_i (x_i) \right)^2 \right] \left[N \cdot \sum_i (y_i)^2 - \left(\sum_i (y_i) \right)^2 \right]}} \quad 4.43$$

- **Estimando os limites de confiança**

Os limites de confiança são os valores extremos do intervalo de confiança. Em muitos casos práticos em engenharia é aplicado o intervalo de confiança de 95%. Isso significa que há probabilidade de 95% da variável aleatória estar dentro do intervalo de confiança. O intervalo de confiança é denominado bilateral quando for limitado por valores superior e inferior, no entanto, em muitos casos, a natureza do problema exige somente o limite inferior ou o limite superior, e conseqüentemente, o intervalo de confiança é denominado unilateral (o valor característico da resistência do concreto é o limite do intervalo de confiança unilateral inferior).

Os limites de confiança, denotados por C , também podem ser definidos pelo número de desvios padrão acima e abaixo do valor médio. O número de desvios padrão depende do grau de confiança exigido e o tipo de distribuição.

Quando a média e o desvio padrão da resposta forem determinados, os limites de confiança podem ser calculados assumindo que a resposta se aproxima de uma distribuição normal [BAZANT & BAWEJA (1995a)]. Para o caso de intervalo de confiança bilateral de 95%, têm-se os seguintes limites de confiança.

$$C_{0,95} = M \pm 1,960.S \quad 4.44$$

E para intervalo de confiança unilateral de 95%, têm-se, respectivamente, os limites de confiança inferior e superior.

$$C_{0,95} = M - 1,645.S \quad 4.45$$

$$C_{0,95} = M + 1,645.S \quad 4.46$$

A hipótese de que a resposta se aproxima de uma distribuição normal pode ser verificada pelo gráfico de probabilidade normal. Para desenvolver um gráfico de probabilidade, os dados são ordenados em ordem crescente e a posição no gráfico dos N valores pode ser obtida pela equação de posição de Hazen:

$$p(i) = \frac{i - 0,5}{N} \cdot 100 \quad 4.47$$

onde i é a posição dos N valores após serem ordenados.

A figura 4.10 mostra os gráficos de probabilidade normal para a flecha aos 40 dias e 103 dias para o exemplo apresentado no item a seguir.

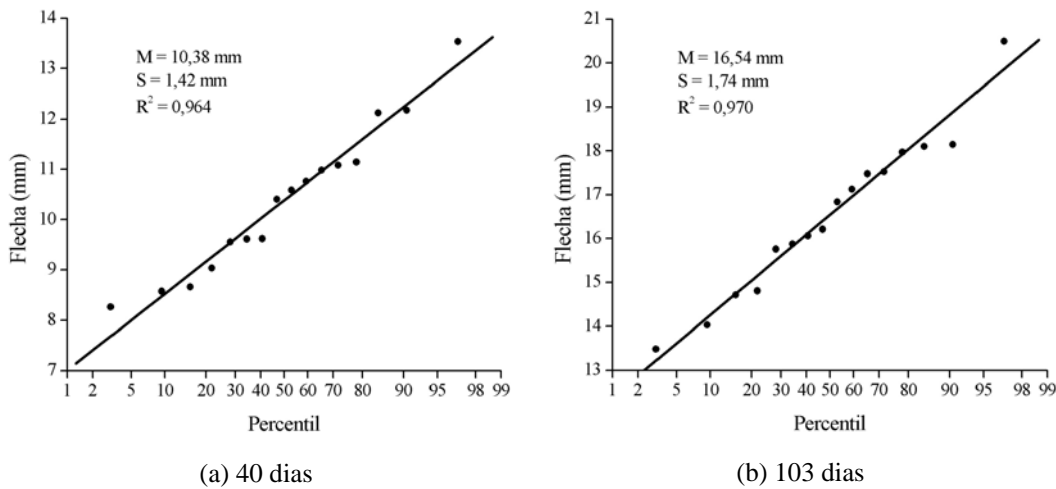


FIGURA 4.10 – Gráficos de probabilidade normal para a flecha

O fato dos valores da resposta se aproximarem da reta no gráfico de probabilidade normal indica que a distribuição de probabilidade da resposta é aproximadamente normal. Pontos distantes da reta indicam que a distribuição normal não é uma boa aproximação.

A validação da distribuição adotada também pode ser feita através do Teste de Kolmogorov-Smirnov ou do Teste χ -quadrado. Neste trabalho será utilizado o Teste de Kolmogorov-Smirnov, pois, como alertado por ANG & TANG (1975), a vantagem deste teste sobre o χ -quadrado está no fato de não necessitar dividir os dados em intervalos, evitando os problemas associados ao tamanho do intervalo.

O procedimento básico do Teste Kolmogorov-Smirnov envolve a comparação entre a frequência acumulada obtida e uma função de distribuição teórica. Se a discrepância for grande com relação à esperada para um determinado tamanho de amostra, então o modelo teórico é rejeitado.

Para uma amostra de tamanho N , o grupo de dados é rearranjado em ordem crescente. Com os dados ordenados, desenvolve uma função de frequência acumulada dada por:

$$S_N(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{k}{N} & x_k \leq x < x_{k+1} \\ 1 & x \geq x_N \end{cases} \quad 4.48$$

onde x_1, x_2, \dots, x_N são os valores dos dados ordenados e N é o tamanho da amostra.

A figura 4.11 mostra um gráfico de $S_N(x)$ e também a função de distribuição acumulada teórica proposta $F(x)$. No teste de Kolmogorov-Smirnov, a medida de discrepância entre o modelo teórico e os dados obtidos é a máxima diferença entre $S_N(x)$ e $F(x)$ sobre toda a variação de X . Esta máxima diferença pode ser denotada por:

$$D_N = \max_x |F(x) - S_N(x)| \tag{4.49}$$

Teoricamente, D_N é uma variável aleatória cuja distribuição depende de N . Para um nível de significância α especificado, o Teste de Kolmogorov-Smirnov compara a máxima diferença com o valor crítico D_N^α , que é definido por:

$$P(D_N \leq D_N^\alpha) = 1 - \alpha \tag{4.50}$$

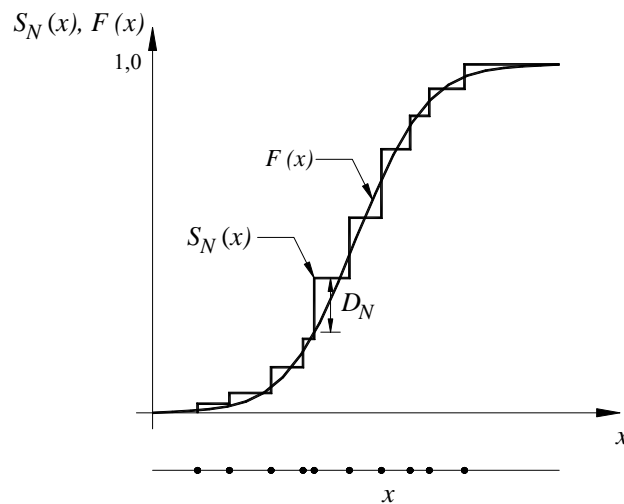


FIGURA 4.11 – Teste de Kolmogorov-Smirnov [adaptado ANG & TANG (1975)]

Os valores críticos D_N^α para vários níveis de significância e para vários valores de N estão apresentados na tabela 4.1 [ANG & TANG (1975)]. Se o valor observado de D_N for menor que o valor crítico D_N^α , a distribuição proposta é aceita

para o nível de significância α , caso contrário, a distribuição assumida deverá ser rejeitada.

TABELA 4.1 – Valores críticos D_N^α no Teste de Kolmogorov-Smirnov [ANG & TANG (1975)]

$\alpha \backslash N$	0,20	0,10	0,05	0,01
5	0,45	0,51	0,56	0,67
10	0,32	0,37	0,41	0,49
15	0,27	0,30	0,34	0,40
20	0,23	0,26	0,29	0,36
25	0,21	0,24	0,27	0,32
30	0,19	0,22	0,24	0,29
35	0,18	0,20	0,23	0,27
40	0,17	0,19	0,21	0,25
45	0,16	0,18	0,20	0,24
50	0,15	0,17	0,19	0,23
> 50	$1,07/\sqrt{N}$	$1,22/\sqrt{N}$	$1,36/\sqrt{N}$	$1,63/\sqrt{N}$

A função de distribuição normal acumulada $F(x)$ foi obtida a partir da função de distribuição normal padronizada acumulada. Uma forma precisa, eficiente e conveniente de avaliar a função de distribuição normal padronizada acumulada $\Phi(x)$ pode ser feita através da função erro, pois há uma relação matemática exata entre essas funções que é dada por:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right] & x \geq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{-x}{\sqrt{2}} \right) \right] & x < 0 \end{cases} \quad 4.51$$

A função erro e seu complemento são definidos por:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_x^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(x) \quad (x > 0) \quad 4.52$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_x^\infty e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(x) \quad (x > 0) \quad 4.53$$

KENNEDY et al. (1980) apresentam a seguinte aproximação numérica da função erro:

$$erf(x) \cong x.R_1(x) \quad 0 < x \leq 0,5 \quad 4.54$$

$$erfc(x) \cong \exp(-x^2)R_2(x) \quad 0,46875 \leq x \leq 4,0 \quad 4.55$$

$$erfc(x) \cong \left[\frac{\exp(-x^2)}{x} \right] \left[\pi^{-1/2} + x^{-2}.R_3(x^{-2}) \right] \quad x \geq 4,0 \quad 4.56$$

Quando $x < 0,46875$, $erf(x)$ pode ser avaliada diretamente pela formulação anterior e $erfc(x)$ como $1 - erf(x)$. Similarmente, $erfc(x)$ pode ser avaliada diretamente e $erf(x)$ como $1 - erfc(x)$ quando $x \geq 0,46875$.

Os valores das frações R_1 , R_2 e R_3 são apresentados a seguir.

$$R_1 = \frac{\sum_{j=0}^3 p_j . x^{2.j}}{\sum_{j=0}^3 q_j . x^{2.j}} \quad 0 < x \leq 0,5 \quad 4.57$$

e

$$p_0 = 2,4266795523053175.10^2 \quad q_0 = 2,1505887586986120.10^2$$

$$p_1 = 2,1979261618294152.10^1 \quad q_1 = 9,1164905404514901.10^1$$

$$p_2 = 6,9963834886191355 \quad q_2 = 1,5082797630407787.10^1$$

$$p_3 = -3,5609843701815385.10^{-2} \quad q_3 = 1,0$$

$$R_2 = \frac{\sum_{j=0}^7 p_j . x^j}{\sum_{j=0}^7 q_j . x^j} \quad 0,46875 \leq x \leq 4,0 \quad 4.58$$

e

$$p_0 = 3,004592610201616005.10^2 \quad q_0 = 3,004592609569832933.10^2$$

$$p_1 = 4,519189537118729422.10^2 \quad q_1 = 7,909509253278980272.10^2$$

$$p_2 = 3,393208167343436870.10^2 \quad q_2 = 9,313540948506096211.10^2$$

$$\begin{aligned}
 p_3 &= 1,529892850469404039 \cdot 10^2 & q_3 &= 6,389802644656311665 \cdot 10^2 \\
 p_4 &= 4,316222722205673530 \cdot 10^1 & q_4 &= 2,775854447439876434 \cdot 10^2 \\
 p_5 &= 7,211758250883093659 & q_5 &= 7,700015293522947295 \cdot 10^1 \\
 p_6 &= 5,641955174789739711 \cdot 10^{-1} & q_6 &= 1,278272731962942351 \cdot 10^1 \\
 p_7 &= -1,368648573827167067 \cdot 10^{-7} & q_7 &= 1,0
 \end{aligned}$$

$$R_3 = \frac{\sum_{j=0}^4 p_j \cdot x^{-2 \cdot j}}{\sum_{j=0}^4 p_j \cdot x^{-2 \cdot j}} \quad 4.59$$

e

$$\begin{aligned}
 p_0 &= -2,99610707703542174 \cdot 10^{-3} & q_0 &= 1,06209230528467918 \cdot 10^{-2} \\
 p_1 &= -4,94730910623250734 \cdot 10^{-2} & q_1 &= 1,91308926107829841 \cdot 10^{-1} \\
 p_2 &= -2,26956593539686930 \cdot 10^{-1} & q_2 &= 1,05167510706793207 \\
 p_3 &= -2,78661308609647788 \cdot 10^{-1} & q_3 &= 1,98733201817135256 \\
 p_4 &= -2,23192459734184686 \cdot 10^{-2} & q_4 &= 1,0
 \end{aligned}$$

- **Análise de sensibilidade**

Os resultados das simulações podem ser usados para determinar quais os parâmetros afetam mais significativamente a incerteza da resposta. Para isso, pode-se utilizar o *coeficiente de regressão padronizado* ou o *coeficiente de correlação parcial*. A análise de sensibilidade em conjunto com a amostragem está estreitamente relacionada com a construção de modelos de regressão que se aproximam do comportamento obtido pelas simulações. Supondo que um modelo tenha como variáveis de entrada X_1, \dots, X_n e resposta Y . Depois de N simulações do modelo, as observações multivariadas $(X_{i1}, \dots, X_{in}, Y_i; i = 1, \dots, N)$ podem ser usadas para construir um modelo de regressão aproximado, dado por:

$$\hat{Y} = b_o + \sum_{j=1}^n b_j X_j \quad 4.60$$

A constante b_0 e os coeficientes de regressão b_j são obtidos por métodos dos mínimos quadrados usuais. Estes coeficientes de regressão são facilmente influenciados pelas unidades em que as variáveis são mediadas. Esse problema pode ser eliminado pela padronização de todas as variáveis usadas no modelo. Assim, o modelo de regressão anterior pode ser reescrito da seguinte forma:

$$Y^* = \sum_{j=1}^n b_j^* X_j^* \tag{4.61}$$

Com,

$$b_j^* = \frac{b_j s_{X_j}}{s_Y} \tag{4.62}$$

O coeficiente b_j^* é denominado coeficiente de regressão padronizado. Sendo uma medida adimensional, o coeficiente de regressão padronizado pode ser utilizado para determinar a importância das variáveis de entrada. Quanto maior for o valor absoluto de b_j^* , maior será a influência de X_j na resposta Y e valores de b_j^* próximos de zero indicam pouca importância de X_j .

Com as N simulações do modelo, pode-se também determinar a matriz de correlação entre as variáveis, podendo ser representada como:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} & \vdots & r_{1y} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} & \vdots & r_{2y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 & \vdots & r_{ny} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ r_{y1} & r_{y2} & \dots & r_{yn} & \vdots & 1 \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

onde r_{ij} com $i \geq 1$ e $j \leq n$ é o coeficiente de correlação entre as variáveis de entrada e r_{yj} é o coeficiente de correlação entre Y e X_j , determinados a partir da equação 4.42.

A matriz inversa C^{-1} pode ser escrita na forma expandida como:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & r_{1n} & \vdots & c_{1y} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & r_{2n} & \vdots & c_{2y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & \vdots & c_{ny} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ c_{y1} & c_{y2} & \dots & c_{yn} & \vdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad 4.64$$

O coeficiente de correlação parcial de X_j e Y é obtido diretamente de C^{-1} como:

$$P_{X_j, Y} = -\frac{c_{jy}}{\sqrt{c_{jj} c_{yy}}} \quad 4.65$$

O coeficiente de regressão padronizado e o coeficiente de correlação parcial medem a associação linear entre as variáveis. Quando envolvem relações não lineares, é mais relevante determinar tais coeficientes com relações aos valores hierarquizados das variáveis que com relação aos seus valores reais.

4.4 Exemplos

4.4.1 Exemplo 1: Viga reforçada à flexão

Como exemplo de aplicação, será utilizado o ensaio da viga V1 realizado por REIS (2003). As variáveis aleatórias empregadas foram aquelas definidas no item anterior, no entanto, devido à existência de dois tipos de concreto (viga e reforço), as variáveis aleatórias relativas ao concreto (coeficiente de fluência, retração e resistência) estarão duplicadas, totalizando 8 variáveis aleatórias para o caso em questão. As 8 variáveis aleatórias utilizadas estão listadas a seguir.

X_1 – coeficiente de fluência do concreto da viga

X_2 – retração do concreto da viga

X_3 – resistência do concreto da viga

X_4 – coeficiente de fluência do concreto do reforço

X_5 – retração do concreto do reforço

X_6 – resistência do concreto do reforço

X_7 – umidade relativa ambiente

X_8 – temperatura ambiente

Foi realizado o total de simulações recomendado por BAZANT & LIU (1985) igual a $N = 2.n$, ou seja, 16 simulações.

Na tabela 4.2, apresentam-se as permutações geradas aleatoriamente dos inteiros 1, 2,..., N para cada variável aleatória X_i .

TABELA 4.2 – Permutações geradas aleatoriamente dos inteiros 1, 2,..., 16

simulação	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
1	4	14	4	4	3	8	9	8
2	6	2	2	13	16	6	5	15
3	10	1	6	2	5	14	8	6
4	14	6	14	1	14	12	1	10
5	2	16	9	6	4	13	3	11
6	3	5	11	16	13	11	2	12
7	13	12	1	11	2	9	15	2
8	7	9	13	3	1	3	7	16
9	1	11	7	5	7	2	13	3
10	8	10	16	12	8	5	4	4
11	9	4	10	15	10	16	6	7
12	16	13	5	9	6	10	10	13
13	5	7	15	10	11	4	16	14
14	15	8	8	7	12	1	14	9
15	11	15	12	8	9	7	11	5
16	12	3	3	14	15	15	12	1

A tabela 4.3 mostra os valores dos parâmetros no centróide do intervalo, enquanto a tabela 4.4 mostra o grupo de valores dos parâmetros de entrada para cada simulação.

TABELA 4.3 – Valores dos parâmetros no centróide dos intervalos

k	$F_i(x_i^k)$	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
		–	–	(MPa)	–	–	(MPa)	%	°C
		μ	1,0	1,0	20	1,0	1,0	55	50
	$V(\%)$	30	32,9	10	30	32,9	10	20	20
1	0,03125	0,441	0,387	16,27	0,441	0,387	44,75	31,4	20,1
2	0,09375	0,605	0,566	17,36	0,605	0,566	47,75	36,8	23,6
3	0,15625	0,697	0,668	17,98	0,697	0,668	49,45	39,9	25,5
4	0,21875	0,767	0,745	18,45	0,767	0,745	50,73	42,2	27,0
5	0,28125	0,826	0,809	18,84	0,826	0,809	51,81	44,2	28,3
6	0,34375	0,879	0,868	19,20	0,879	0,868	52,79	46,0	29,4
7	0,40625	0,929	0,922	19,53	0,929	0,922	53,70	47,6	30,5
8	0,46875	0,976	0,974	19,84	0,976	0,974	54,57	49,2	31,5
9	0,53125	1,024	1,026	20,16	1,024	1,026	55,43	50,8	32,5
10	0,59375	1,071	1,078	20,47	1,071	1,078	56,30	52,4	33,5
11	0,65625	1,121	1,132	20,80	1,121	1,132	57,21	54,0	34,6
12	0,71875	1,174	1,191	21,16	1,174	1,191	58,19	55,8	35,7
13	0,78125	1,233	1,255	21,55	1,233	1,255	59,27	57,8	37,0
14	0,84375	1,303	1,332	22,02	1,303	1,332	60,55	60,1	38,5
15	0,90625	1,395	1,434	22,64	1,395	1,434	62,25	63,2	40,4
16	0,96875	1,559	1,613	23,73	1,559	1,613	65,25	68,6	43,9

TABELA 4.4 – Grupo de valores dos parâmetros de entrada gerados aleatoriamente

simulação	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
	–	–	(MPa)	–	–	(MPa)	%	°C
1	0,767	1,332	18,45	0,767	0,668	54,57	50,8	31,5
2	0,879	0,566	17,36	1,233	1,613	52,79	44,2	40,4
3	1,071	0,387	19,20	0,605	0,809	60,55	49,2	29,4
4	1,303	0,868	22,02	0,441	1,332	58,19	31,4	33,5
5	0,605	1,613	20,16	0,879	0,745	59,27	39,9	34,6
6	0,697	0,809	20,80	1,559	1,255	57,21	36,8	35,7
7	1,233	1,191	16,27	1,121	0,566	55,43	63,2	23,6
8	0,929	1,026	21,55	0,697	0,387	49,45	47,6	43,9
9	0,441	1,132	19,53	0,826	0,922	47,75	57,8	25,5
10	0,976	1,078	23,73	1,174	0,974	51,81	42,2	27,0
11	1,024	0,745	20,47	1,395	1,078	65,25	46,0	30,5
12	1,559	1,255	18,84	1,024	0,868	56,30	52,4	37,0
13	0,826	0,922	22,64	1,071	1,132	50,73	68,6	38,5
14	1,395	0,974	19,84	0,929	1,191	44,75	60,1	32,5
15	1,121	1,434	21,16	0,976	1,026	53,70	54,0	28,3
16	1,174	0,668	17,98	1,303	1,434	62,25	55,8	20,1

A validação da distribuição normal proposta para a resposta foi feita através do Teste de Kolmogorov-Smirnov realizado em cada passo de tempo. Como

observado na tabela 4.1, a distribuição normal será aceita para o nível de significância 0,20, se o valor observado de D_N for menor que o valor crítico $D_{16}^{0,20} = 0,27$. Pela figura 4.12, pode-se observar que o valor de D_N esteve sempre abaixo do valor crítico, indicando que se pode aceitar a distribuição normal para a resposta.

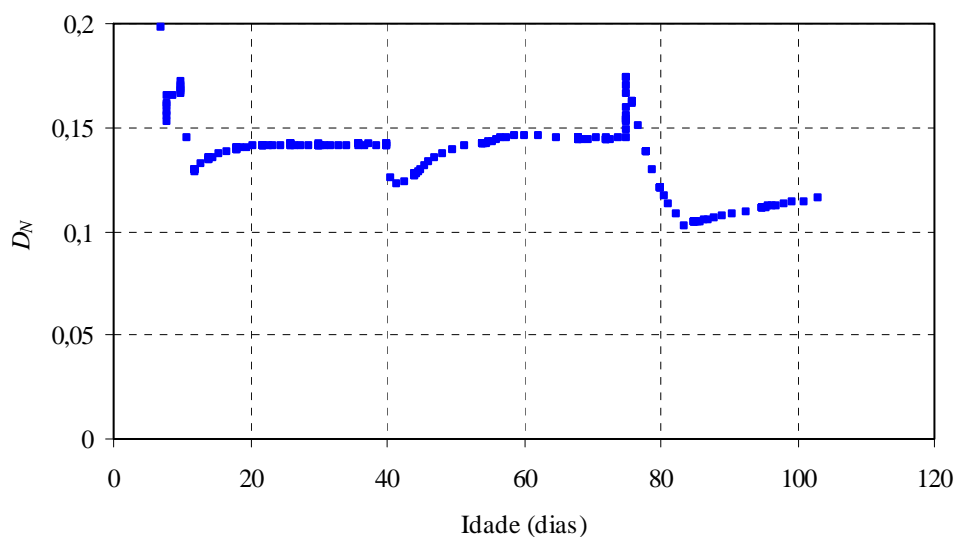


FIGURA 4.12 – Teste de Kolmogorov-Smirnov para a flecha

A figura 4.13 mostra os limites de confiança para o intervalo de confiança bilateral de 95% para a flecha da viga V1, ou seja, considerando a variabilidade estatística dos parâmetros de entrada, há 95% de probabilidade da flecha da viga V1 estar entre os limites de confiança. Por exemplo, aos 103 dias existe 95% de probabilidade da flecha da viga V1 estar entre 13,1 mm e 19,9 mm.

Aparentemente, observando a figura 4.13, parece que o intervalo de confiança possui uma variação grande, no entanto, vale ressaltar que esses limites são válidos para o caso de uma viga real sujeita a variabilidade estatística indicada anteriormente, fato que não ocorre no ensaio, onde os parâmetros já são conhecidos (não há variabilidade).

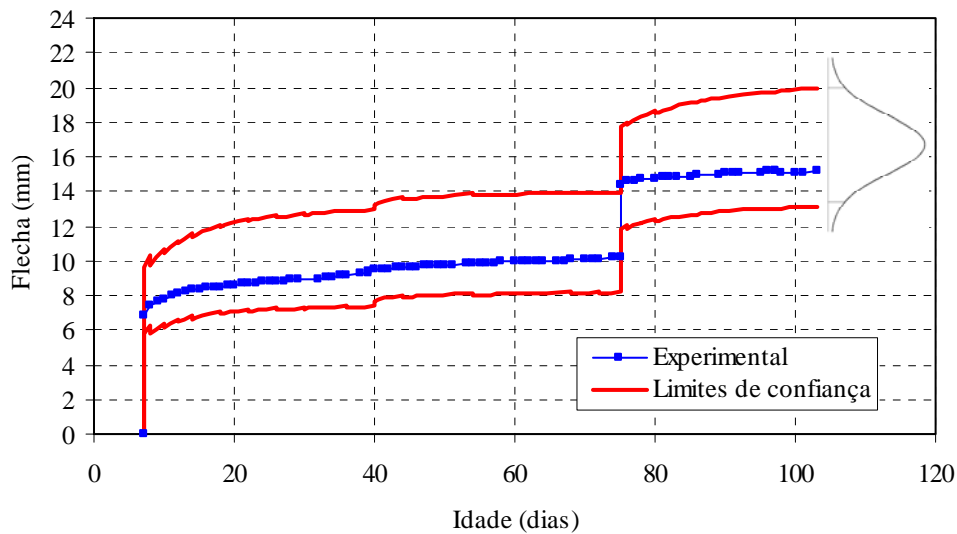


FIGURA 4.13 – Limites de confiança para a flecha

Os resultados das simulações foram usados para determinar quais os parâmetros afetam mais significativamente a incerteza da resposta, no caso a flecha da viga, através do coeficiente de regressão padronizado e do coeficiente de correlação parcial. Apresentam-se nas figuras 4.14 e 4.15, respectivamente, o coeficiente de regressão padronizado e do coeficiente de correlação parcial aos 40 e 103 dias. Pelas figuras, pode-se observar que, para o problema em questão, os parâmetros relacionados com o concreto da viga, ou seja, incertezas nos modelos de fluência e retração e resistência do concreto, assim como os fatores ambientais foram os parâmetros que tiveram maior influência na determinação da flecha da viga.

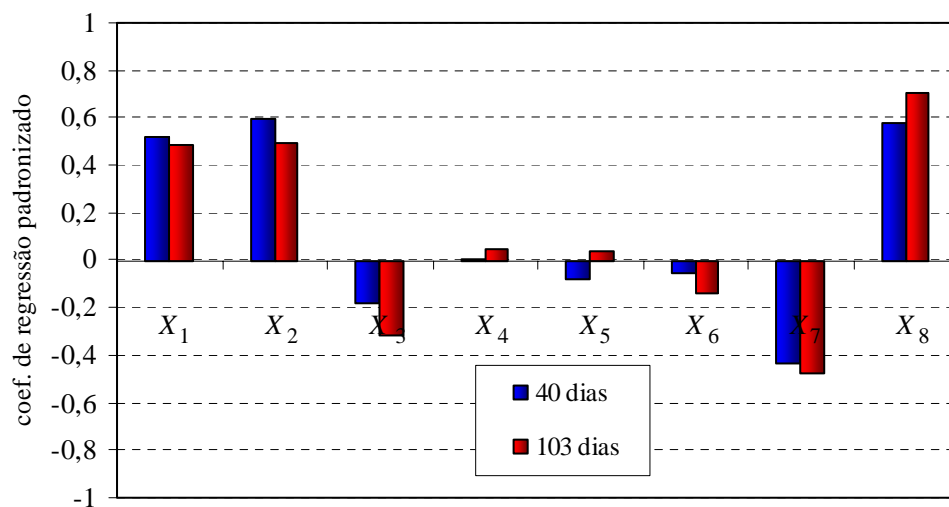


FIGURA 4.14 – Coeficiente de regressão padronizado para a flecha da viga aos 40 e 103 dias

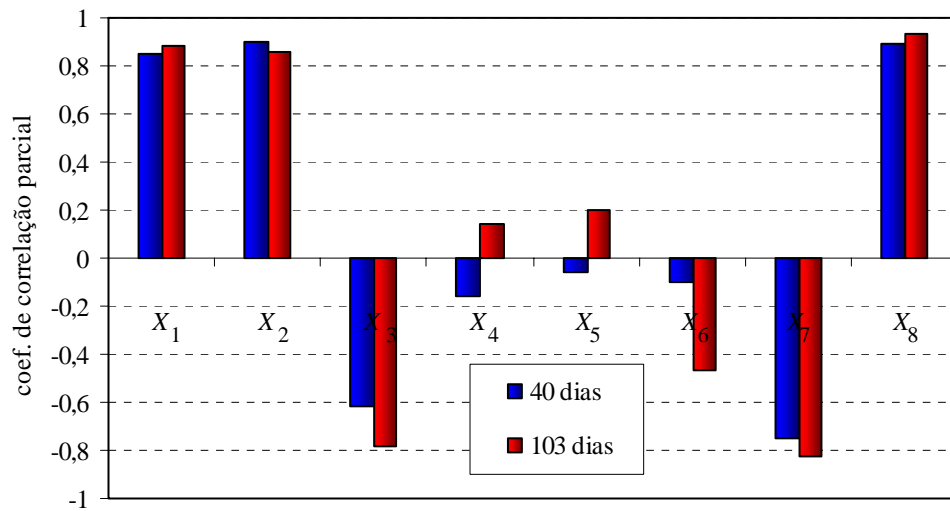


FIGURA 4.15 – Coeficiente de correlação parcial para a flecha da viga aos 40 e 103 dias

4.4.2 Exemplo 2: Viga reforçada à flexão com continuidade estrutural posterior

Para este exemplo, será ainda utilizado o ensaio da viga V1 realizado por REIS (2003). No entanto, será considerado o estabelecimento da continuidade estrutural em uma das extremidades da viga após a concretagem do reforço, conforme figura 4.16, com a colocação de 4 barras de 10 mm para absorver o momento fletor negativo. Por simplificação, será considerada ainda apenas a atuação das forças verticais na viga. As demais considerações e parâmetros são os mesmos utilizados no exemplo anterior.

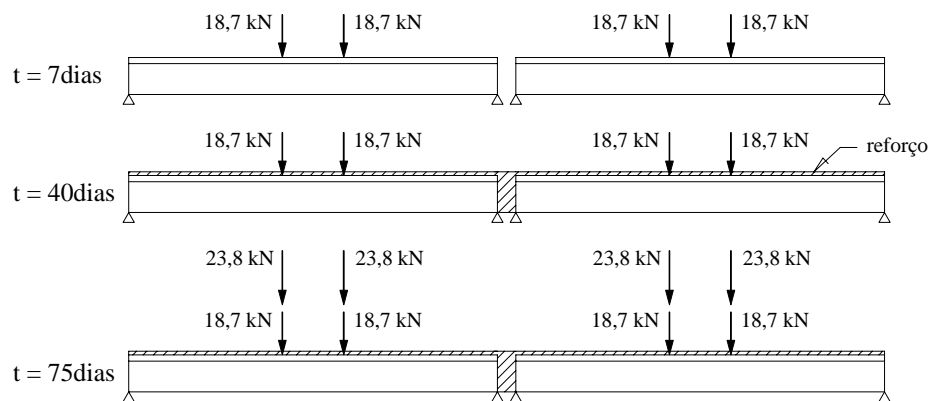


FIGURA 4.16 – Etapas construtivas da viga

Apresentam-se na tabela 4.5 as permutações geradas aleatoriamente dos inteiros 1, 2,..., N para cada variável aleatória X_i para este exemplo. E a partir dessas permutações geradas aleatoriamente, gerou-se o grupo de valores dos parâmetros de entrada para cada simulação mostrados na tabela 4.6.

TABELA 4.5 – Permutações geradas aleatoriamente dos inteiros 1, 2,..., 16

simulação	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
1	4	4	8	10	7	3	4	11
2	7	11	14	3	6	9	5	4
3	5	7	16	15	16	11	6	9
4	15	9	10	8	12	10	15	10
5	12	3	9	2	2	1	9	16
6	6	2	2	7	3	12	1	7
7	8	15	15	14	13	6	7	1
8	16	10	3	1	5	7	14	6
9	9	14	13	9	10	16	10	2
10	13	6	7	12	9	4	13	3
11	14	1	4	4	14	2	12	8
12	1	13	11	5	11	15	3	15
13	2	16	6	13	1	5	11	14
14	10	8	1	16	15	14	8	13
15	3	12	5	11	8	8	2	5
16	11	5	12	6	4	13	16	12

TABELA 4.6 – Grupo de valores dos parâmetros de entrada gerados aleatoriamente

simulação	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
	–	–	(MPa)	–	–	(MPa)	%	°C
1	0,767	0,745	19,84	1,071	0,922	49,45	42,2	34,6
2	0,929	1,132	22,02	0,697	0,868	55,43	44,2	27,0
3	0,826	0,922	23,73	1,395	1,613	57,21	46,0	32,5
4	1,395	1,026	20,47	0,976	1,191	56,30	63,2	33,5
5	1,174	0,668	20,16	0,605	0,566	44,75	50,8	43,9
6	0,879	0,566	17,36	0,929	0,668	58,19	31,4	30,5
7	0,976	1,434	22,64	1,303	1,255	52,79	47,6	20,1
8	1,559	1,078	17,98	0,441	0,809	53,70	60,1	29,4
9	1,024	1,332	21,55	1,024	1,078	65,25	52,4	23,6
10	1,233	0,868	19,53	1,174	1,026	50,73	57,8	25,5
11	1,303	0,387	18,45	0,767	1,332	47,75	55,8	31,5
12	0,441	1,255	20,80	0,826	1,132	62,25	39,9	40,4
13	0,605	1,613	19,20	1,233	0,387	51,81	54,0	38,5
14	1,071	0,974	16,27	1,559	1,434	60,55	49,2	37,0
15	0,697	1,191	18,84	1,121	0,974	54,57	36,8	28,3
16	1,121	0,809	21,16	0,879	0,745	59,27	68,6	35,7

Após a realização das simulações, a validação da distribuição normal para a flecha da viga foi feita através do Teste de Kolmogorov-Smirnov realizado em cada passo de tempo, como mostrado na figura 4.17. Como se pode observar na figura, o valor observado de D_N foi menor que o valor crítico $D_{16}^{0,20} = 0,27$, indicando que se pode aceitar a distribuição normal para a flecha da viga. Já a figura 4.18 mostra os limites de confiança para o intervalo de confiança bilateral de 95% para a flecha da viga. E assim, por exemplo, aos 103 dias existe 95% de probabilidade da flecha da viga estar entre 8,2 mm e 12,3 mm.

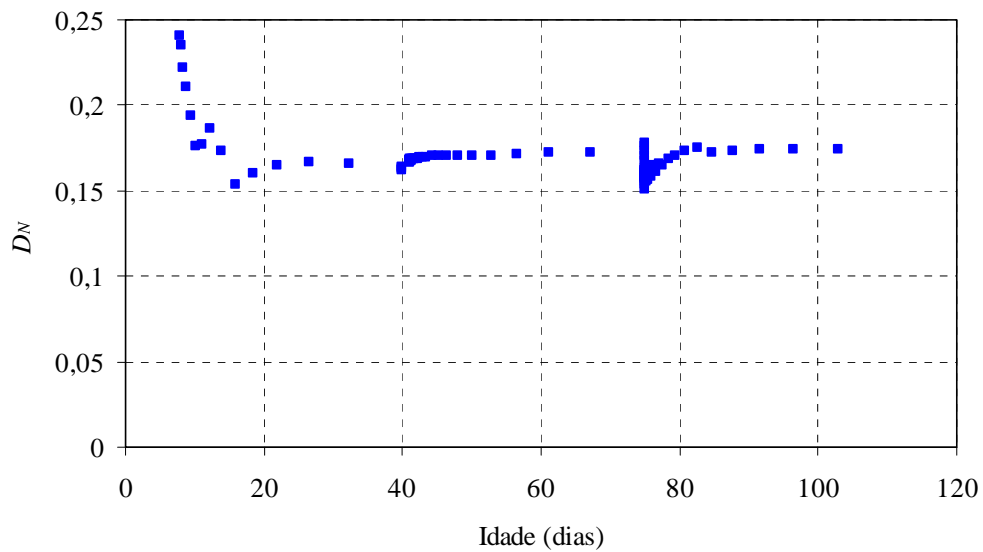


FIGURA 4.17 – Teste de Kolmogorov-Smirnov para a flecha

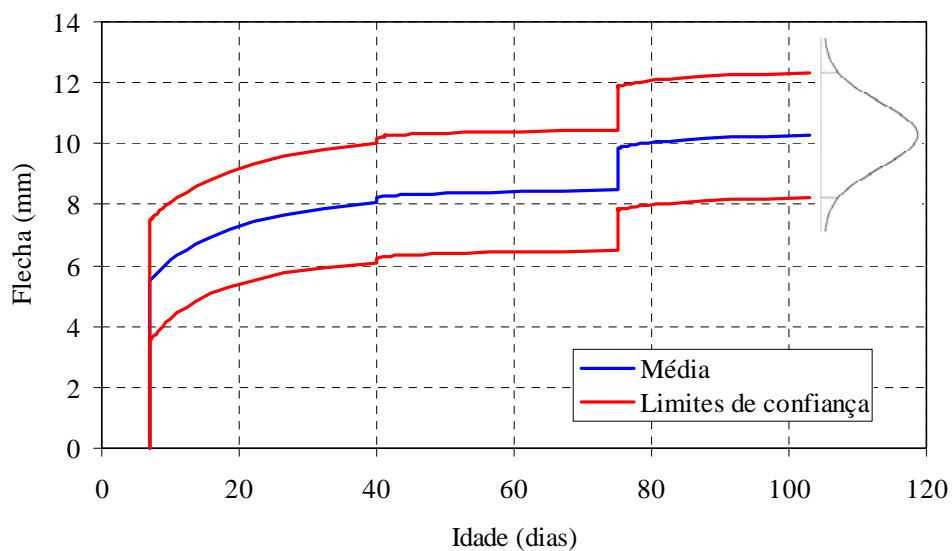


FIGURA 4.18 – Limites de confiança para a flecha

A validação da distribuição normal também foi realizada para o momento fletor no apoio da viga, conforme a figura 4.19. O valor observado de D_N foi menor que o valor crítico $D_{16}^{0,20} = 0,27$, indicando que se pode aceitar a distribuição normal para o momento fletor no apoio da viga.

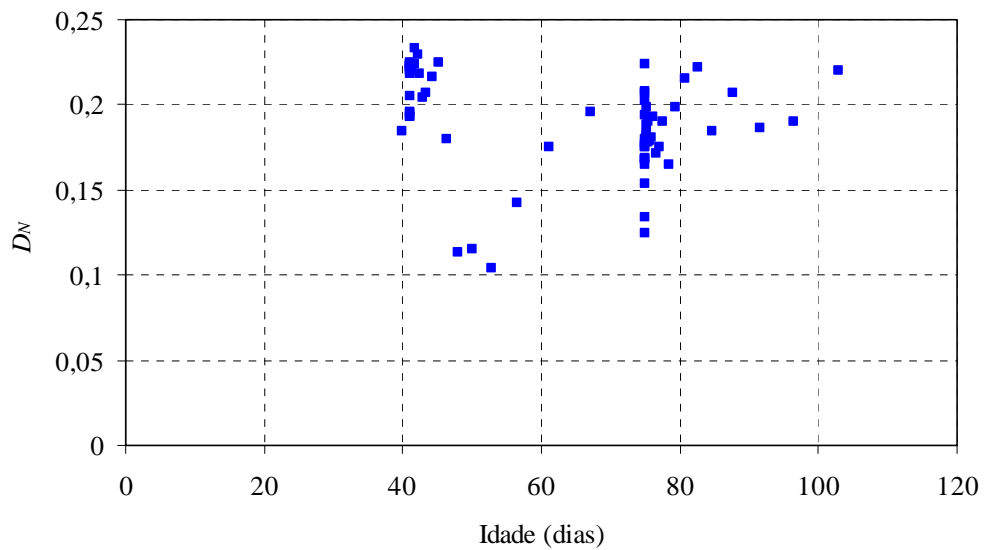


FIGURA 4.19 – Teste de Kolmogorov-Smirnov para o momento fletor no apoio

A figura 4.20 mostra os limites de confiança para o intervalo de confiança bilateral de 95% para o momento fletor no apoio da viga. E assim, aos 103 dias existe 95% de probabilidade do momento fletor no apoio estar entre -25,7 kN.m e -27,3 kN.m. Pela figura pode-se perceber ainda que surgem esforços no apoio após o estabelecimento da continuidade em decorrência dos efeitos dependentes do tempo.

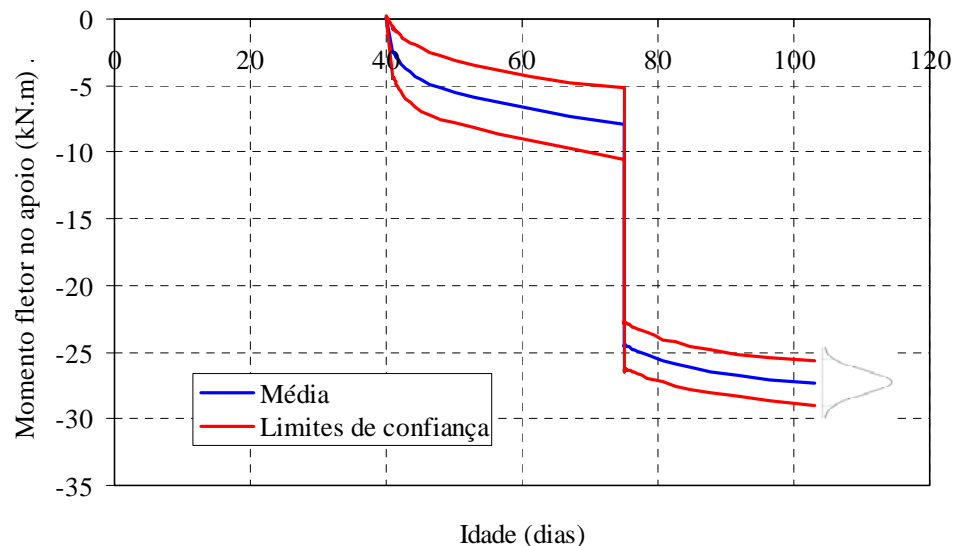


FIGURA 4.20 – Limites de confiança para o momento fletor no apoio

Apresentam-se nas figuras 4.21 e 4.22, respectivamente, o coeficiente de regressão padronizado e do coeficiente de correlação parcial para a flecha da viga na

idade de 103 dias. Pelas figuras, pode-se observar que, para o exemplo em questão, as incertezas nos modelos de fluência e retração do concreto da viga, assim como os fatores ambientais foram os parâmetros que tiveram maior influência na determinação da flecha da viga. E nas figuras 4.23 e 4.24 são apresentados, respectivamente, o coeficiente de regressão padronizado e do coeficiente de correlação parcial para o momento fletor no apoio da viga aos 103 dias. Pelas figuras, nota-se que as incertezas no modelo de retração do concreto do reforço e a temperatura ambiente influenciaram mais significativamente a determinação do momento fletor no apoio da viga.

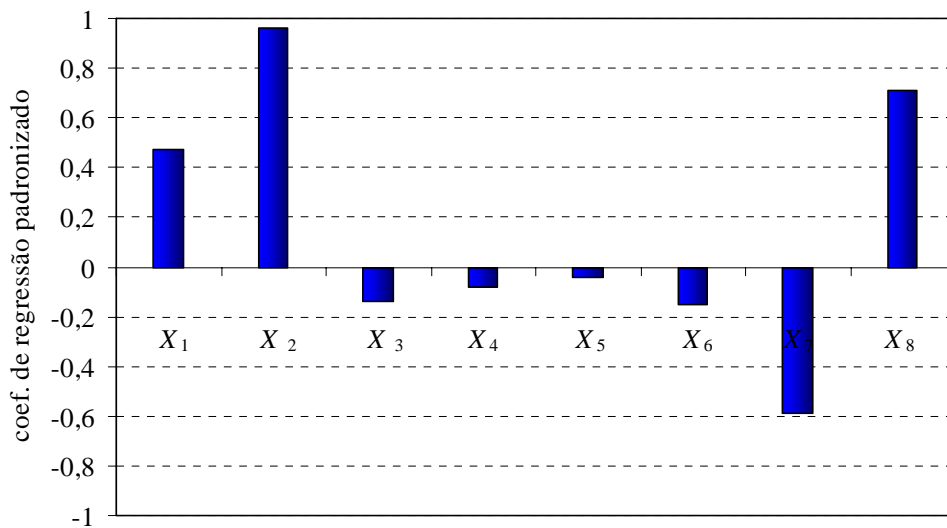


FIGURA 4.21 – Coeficiente de regressão padronizado para a flecha da viga aos 103 dias

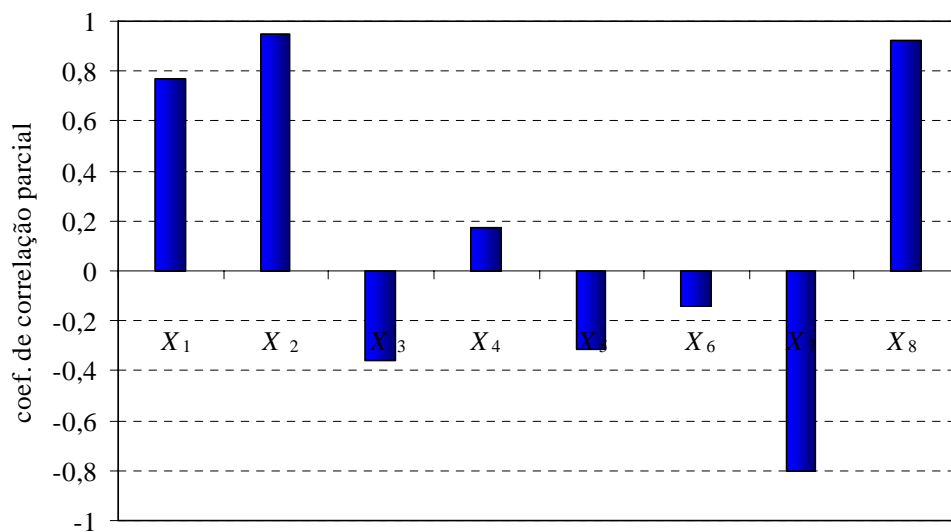


FIGURA 4.22 – Coeficiente de correlação parcial para a flecha da viga aos 103 dias

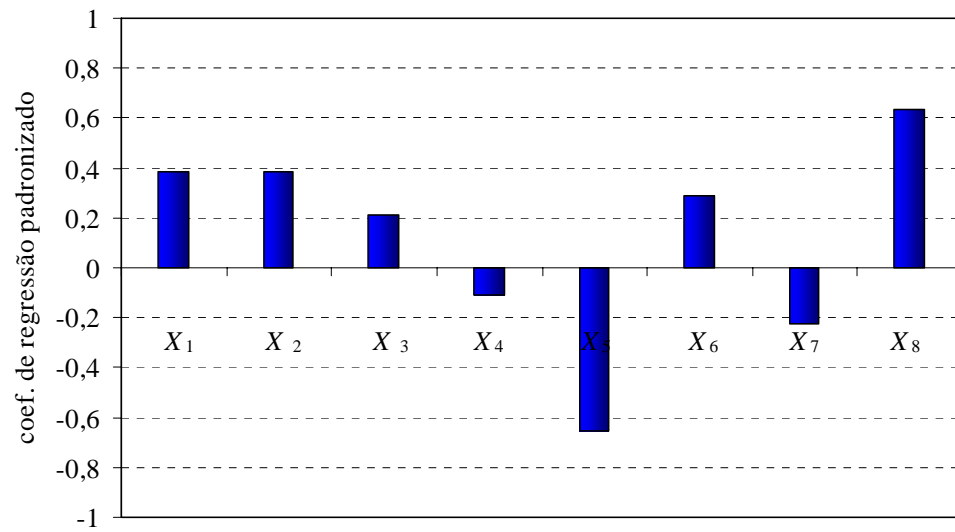


FIGURA 4.23 – Coeficiente de regressão padronizado para o momento fletor no apoio aos 103 dias

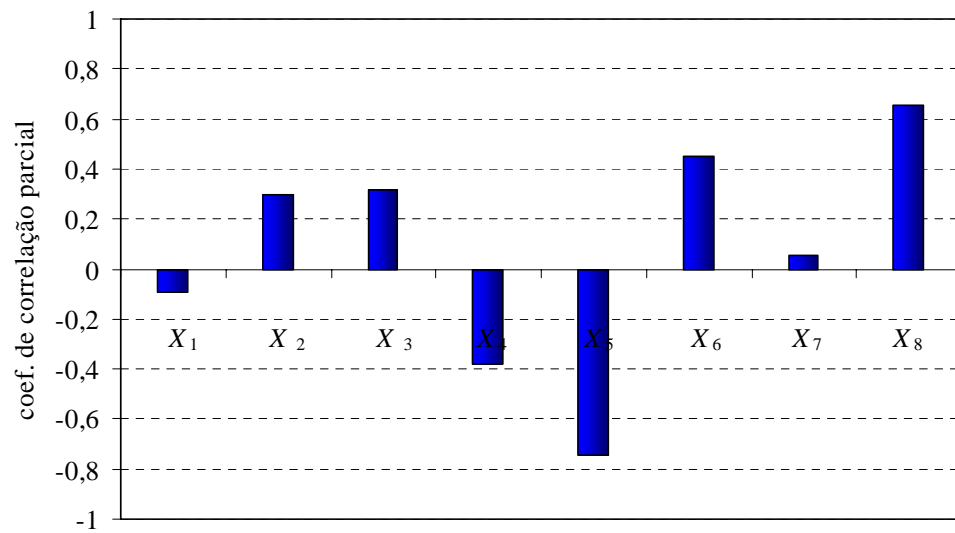


FIGURA 4.24 – Coeficiente de correlação parcial para o momento fletor no apoio aos 103 dias

ANÁLISE DAS FLECHAS DIFERIDAS EM LAJES PRÉ-MOLDADAS

5 CAPÍTULO

5.1 Considerações iniciais

As lajes formadas por nervuras pré-moldadas são, conforme ilustradas na figura 5.1, constituídas basicamente de:

- a) elementos lineares pré-moldados, que são as nervuras, dispostas espaçadamente em uma direção;
- b) elementos de enchimento, intercalados entre os elementos pré-moldados;
- c) capa de concreto estrutural moldado no local.

Com relação às seções transversais, os elementos pré-moldados também denominados de vigotas podem ser com ou sem armadura saliente, em forma de T invertido ou I.

Os materiais de enchimento normalmente utilizados são blocos vazados de concreto ou material cerâmico, ou ainda blocos de poliestireno expandido, conhecidos pela sigla EPS. A utilização de elementos de material leve está ligada à idéia de substituir parte do concreto da região tracionada das lajes, bem como servir de sustentação à camada de concreto fresco que é aplicada sobre os painéis das lajes pré-fabricadas.

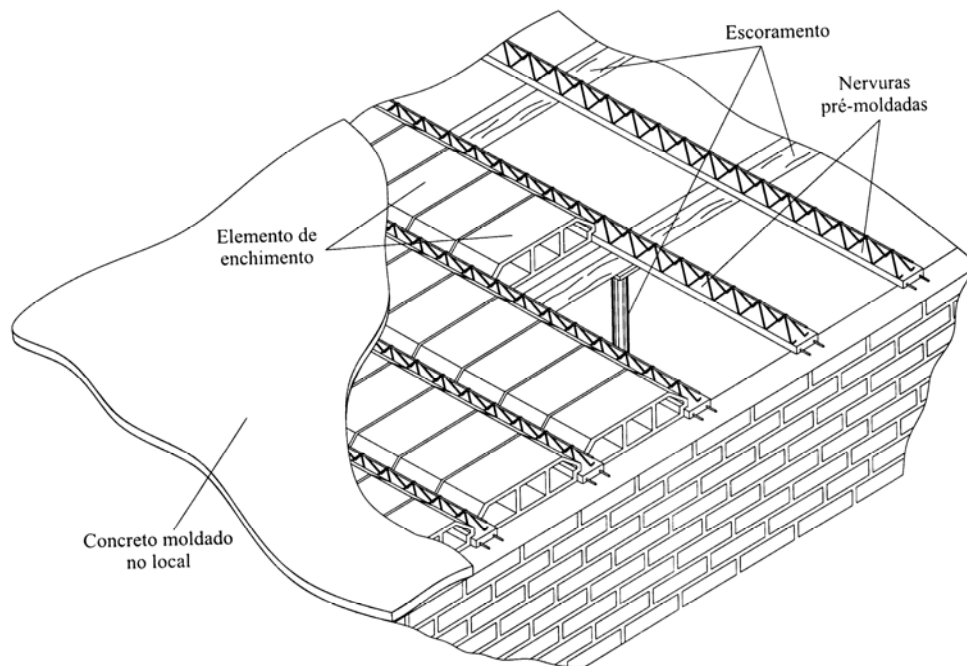


FIGURA 5.1 – Laje formada por nervuras pré-moldadas [EL DEBS (2000)]

Os tipos de vigotas utilizadas atualmente são os seguintes:

- a) vigotas de concreto armado comum, não protendido, com seção transversal com a forma aproximada de um T invertido, com armadura passiva totalmente envolvida pelo concreto;
- b) vigotas de concreto protendido, com seção transversal com a forma aproximada de um T invertido, com armadura de protensão pré-tracionada e totalmente envolvida pelo concreto;
- c) vigotas com armação treliçada, formadas por uma armadura treliçada de aço e por uma placa de concreto envolvendo as barras inferiores da treliça que irão compor a armadura da face tracionada da laje.

As vigotas pré-moldadas de concreto armado são executadas em fôrmas metálicas, em pequenas unidades de produção, com instalações físicas simples. As vigotas de concreto protendido são produzidas em pistas de protensão utilizando, geralmente, fôrmas deslizantes. Já a base de concreto das vigotas com armação treliçada é moldada utilizando fôrmas metálicas, em espessuras de 2 a 3 cm.

As principais vantagens que podem ser apontadas na utilização dos pavimentos formados por vigotas pré-moldadas em relação aos pavimentos tradicionais de lajes maciças de concreto armado são:

- a) considerando igualdade de vãos e sobrecargas, possuem menor peso próprio, com conseqüente alívio sobre as fundações;
- b) dispensam o uso de fôrmas, pois os elementos pré-moldados e os elementos de enchimento fazem esse papel;
- c) proporcionam a diminuição da mão-de-obra de execução.

Enquanto que as principais desvantagens desse sistema, como apontados por DROPPA Jr. (1999), são:

- a) em geral, não possui um comportamento monolítico com o restante da estrutura, o que pode ser inconveniente sob o ponto de vista do contraventamento da edificação (exceção feita às vigotas com armação treliçada);
- b) as vigotas de concreto armado e as vigotas protendidas são, às vezes, muito pesadas para manuseio, exigindo equipamentos para transporte e montagem no local.

As lajes formadas por vigotas pré-moldadas com armação treliçada têm ganhado destaque na construção civil brasileira nos últimos anos. Como destacado por DROPPA Jr. (1999), as lajes formadas por vigotas treliçadas detinham uma participação no mercado em 1990 de apenas 5%, em 1998 saltou para 40%, segundo dados da Abilaje (Associação Brasileira da Indústria de Lajes).

Além da aplicação em obras de pequeno porte, deve-se destacar que recentemente as lajes pré-moldadas com armação treliçada têm avançado rumo aos edifícios com maior número de pavimentos.

A armação treliçada das vigotas é uma estrutura formada por barras de aço eletrosoldadas em alguns pontos de modo a formar uma treliça espacial. Segundo a NBR 14862 (2002), a armação treliçada deve ser classificada a partir da abreviatura de armação treliçada (TR), a altura (em centímetros, sem casas decimais), diâmetros das armaduras do banzo superior, das diagonais (sinusóides) e

do banzo inferior (diâmetros em milímetros, sem casas decimais). Quando a armadura for de aço CA60, não há nenhuma designação, quando for aço CA50, acrescenta-se a letra “A” em seguida ao número indicativo da bitola correspondente. Por exemplo, uma armação treliçada composta integralmente por aço CA60, com 8,0 cm de altura, banzo superior com 6,0 mm, diagonal com 3,4 mm e banzo inferior com 4,2 mm, será designada TR8634. Já uma armação treliçada composta parcialmente por aço CA50, com 20,0 cm de altura, banzo superior com 10,0 mm em aço CA50, diagonal com 6,0 mm e banzo inferior com 9,5 mm, será designada TR2010A69. Na figura 5.2 estão mostrados os elementos que compõe uma vigota pré-moldada com armação treliçada.

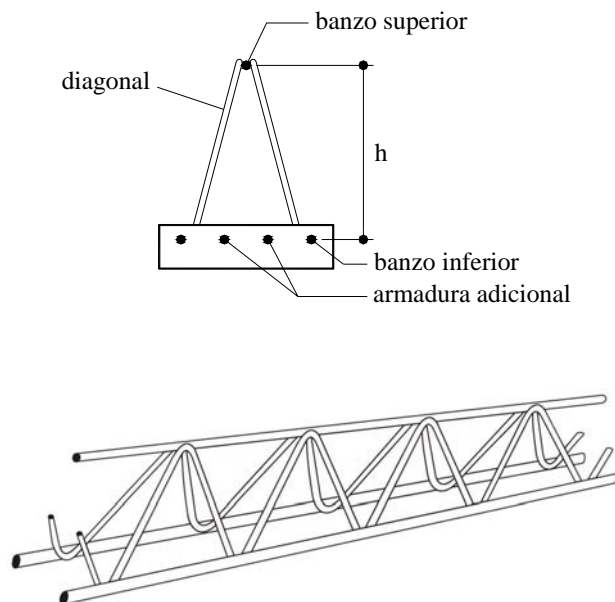


FIGURA 5.2 – Seção transversal da vigota treliçada e perspectiva da armação treliçada

Na utilização das vigotas pré-moldadas com armação treliçada, as seguintes vantagens podem ser destacadas [DROPPA Jr. (1999)]:

- reduz o aparecimento de fissuras pela condição de aderência entre o concreto do capeamento e o concreto da vigota pré-moldada;
- facilita a colocação de nervuras moldadas *in loco* na direção perpendicular às vigotas;
- pode oferecer maior resistência ao cisalhamento em função da presença das diagonais da treliça.

Apesar das inúmeras vantagens apresentadas, como em qualquer outro sistema construtivo, alguns cuidados devem ser tomados para que as lajes pré-moldadas com armação treliçada apresentem um comportamento adequado. Dentre os cuidados adicionais, MAGALHÃES (2001) destaca:

- a) a armadura das diagonais poderá ser considerada colaborante na resistência ao cisalhamento somente se estiver eficazmente ancorada na região comprimida do concreto;
- b) em lajes contínuas, deve-se verificar o posicionamento da armadura negativa durante o lançamento e adensamento do concreto, de modo a garantir o valor de altura útil especificado em projeto;
- c) sendo estas lajes formadas por elementos esbeltos, em edifícios com maior número de pavimentos deve-se analisar a resistência do plano da laje na transferência de ações horizontais, de modo que as lajes pré-moldadas com armação treliçada apresentem comportamento efetivo de diafragma;
- d) por serem formadas por elementos muito esbeltos, deve ser verificado o comportamento para o estado limite de deformações excessivas.

5.1.1 Cálculo da flecha

Com relação ao cálculo das flechas imediatas ou diferidas no tempo de lajes formadas por vigotas pré-moldadas, as normas brasileiras NBR 14859-1 (2002) e NBR 14859-2 (2002) sobre lajes pré-fabricadas não apresentam qualquer procedimento de cálculo. E assim, para o cálculo das flechas de lajes formadas por vigotas pré-moldadas unidirecionais, deve remeter-se às indicações contidas na NBR 6118 (2003) relacionadas ao cálculo de flechas em vigas.

A NBR 6118 (2003) avalia a flecha imediata em vigas utilizando a expressão de rigidez equivalente proposto por BRANSON (1968) e a flecha diferida no tempo é avaliada de maneira aproximada pela multiplicação da flecha imediata pelo coeficiente α_f . A norma espanhola EF-96 (1997), que trata especificamente

sobre o projeto de lajes formadas por vigotas pré-moldadas, apresenta procedimentos semelhantes aos da NBR 6118 (2003).

5.1.1.1 Cálculo da flecha imediata

O cálculo da flecha imediata ou instantânea para vigas e lajes unidirecionais pode ser efetuado através da expressão padrão de elementos fletidos não fissurados, assumindo o concreto armado como um material de comportamento elástico e linear, dada por:

$$a_o = \beta \cdot \frac{M_{\max} \cdot \ell^2}{E \cdot I} \quad 5.1$$

onde:

M_{\max} – momento fletor máximo no vão ℓ ;

ℓ – comprimento do vão;

E – módulo de elasticidade;

I – momento de inércia da seção transversal;

β – coeficiente que depende das condições de apoio e carregamento, conforme figura 5.3.

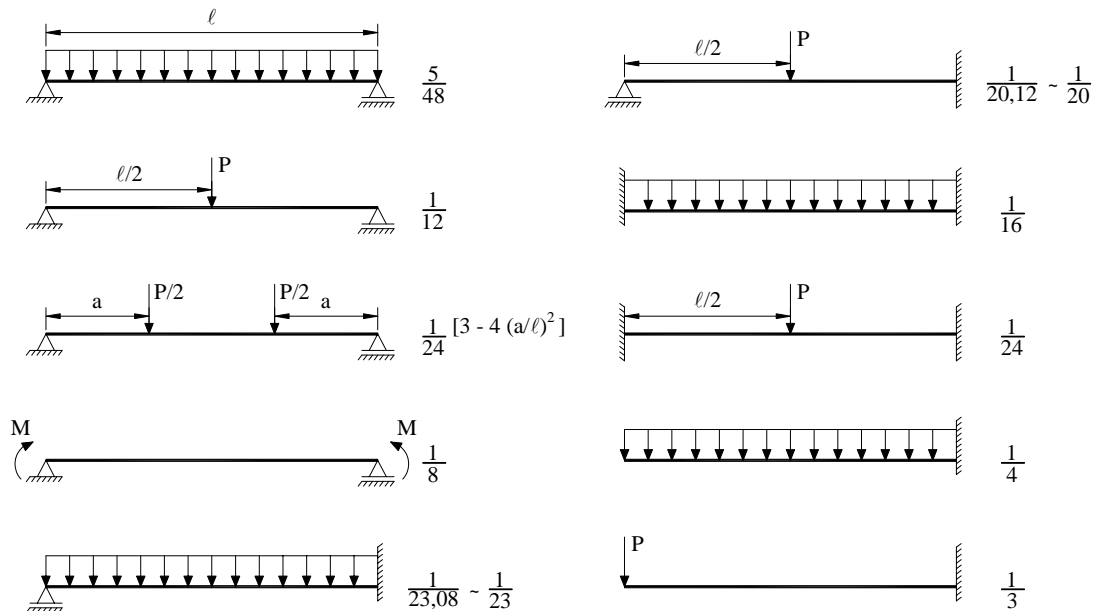


FIGURA 5.3 – Valores do coeficiente β

No entanto, ao longo do vão de um elemento fletido em concreto armado, encontram-se seções fissuradas e não fissuradas, com o concreto íntegro entre as fissuras colaborando para a rigidez da peça. Pode-se concluir, então, que existem seções nas quais o momento de inércia será menor do que o momento de inércia da seção não fissurada, e maior do que o momento de inércia da seção fissurada.

Visando à avaliação da influência da fissuração e da colaboração do concreto tracionado entre as fissuras no momento de inércia da seção transversal, BRANSON (1968) realizou um estudo experimental em vigas retangulares e T, submetidas a carregamentos uniformemente distribuídos e de curta duração.

Baseado nos resultados de seus ensaios e nos de outros pesquisadores, ele sugeriu a utilização de um valor médio de momento de inércia, compreendido entre o momento de inércia da seção não fissurada, I_I , e o da seção fissurada, I_{II} , chamado de momento de inércia efetivo, dado por:

$$I_e = \left(\frac{M_r}{M_{\max}} \right)^m \cdot I_I + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_{\max}} \right)^m \right] \cdot I_{II} \leq I_I \quad 5.2$$

sendo:

M_r – momento de fissuração;

M_{\max} – momento fletor máximo atuante no vão;

I_I – momento de inércia da seção bruta de concreto;

I_{II} – momento de inércia da seção de concreto fissurada, no Estádio II;

m – potência que define se o momento de inércia está sendo calculado para seções individuais ou para todo o vão.

Para a determinação do momento de inércia efetivo em seções individuais de um vão qualquer, a potência m da equação anterior deve ser igual a 4. Já para um valor médio correspondente a todas as seções ao longo do comprimento do vão, a potência m deve ser igual a 3, e a equação anterior passa a ser escrita como:

$$I_e = \left(\frac{M_r}{M_{\max}} \right)^3 \cdot I_I + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_{\max}} \right)^3 \right] \cdot I_{II} \leq I_I \quad 5.3$$

A equação anterior é a equação apresentada pela NBR 6118 (2003) e pela EF-96 (1997) para o cálculo das flechas imediatas. Esta equação foi inicialmente estabelecida para vigas simplesmente apoiadas sujeitas a um carregamento uniformemente distribuído, NEVILLE et al. (1983) afirma que pequenos erros são introduzidos se a expressão for aplicada para outras configurações de carregamento e condições de apoio. No caso de vigas contínuas, os momentos de inércia efetivos para as regiões de momento fletor positivo e negativo normalmente não têm o mesmo valor. Assim, pode-se obter o valor do momento de inércia efetivo por tramo a partir de uma média simples entre o momento de inércia efetivo da região de momento fletor positivo e o da região de momentos fletores negativos nos apoios, dada por:

$$I_e = \frac{I_{e2} + \frac{(I_{e1} + I_{e3})}{2}}{2} \quad 5.4$$

sendo:

I_{e2} – momento de inércia efetivo para o meio do vão;

I_{e1}, I_{e3} – momento de inércia efetivo, respectivamente, para o apoio esquerdo e direito.

5.1.1.2 Cálculo da flecha diferida no tempo

A NBR 6118 (2003) prescreve que a flecha adicional diferida, decorrente das cargas de longa duração em função da fluência, pode ser calculada de maneira aproximada pela multiplicação da flecha imediata pelo fator α_f dado pela expressão:

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50.\rho'} \quad 5.5$$

Com

$$\rho' = \frac{A_s'}{b.d} \quad 5.6$$

onde:

A_s' – área da armadura de compressão;

b – largura da seção transversal;

d – altura útil.

E ainda

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) \quad 5.7a$$

$$\xi(t) = 0,68 \cdot (0,996^t) t^{0,32} \quad \text{para } t \leq 70 \text{ meses} \quad 5.7b$$

$$\xi(t) = 2 \quad \text{para } t > 70 \text{ meses} \quad 5.7c$$

sendo:

t – tempo, em meses, em que o valor do flecha diferida é desejada;

t₀ – idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração.

No caso de parcelas de carga de longa duração serem aplicadas em idades diferentes, pode-se tomar para t₀ o valor ponderado por:

$$t_0 = \frac{\sum P_i \cdot t_{oi}}{\sum P_i} \quad 5.8$$

onde:

P_i – representa as parcelas de carga;

t_{oi} – idade em que se aplicou cada parcela P_i, em meses.

Já a EF-96 (1997) propõe que a flecha diferida de lajes formadas por vigotas pré-moldadas pode ser avaliada utilizando a seguinte expressão:

$$a_d = a_o \cdot \sum k_i \cdot (2 - \xi_i) \lambda \quad 5.9$$

sendo:

a_o – flecha imediata referente à carga total g + q;

k_i – relação entre a carga permanente i (peso próprio da laje, revestimento, etc) e a carga total, g_i/g + q;

ξ_i – coeficiente dependente do instante de aplicação da carga permanente i, conforme tabela 5.1;

λ – coeficiente dependente da taxa geométrica da armadura de compressão nos extremos do tramo e do tipo de tramo, dado por:

$\lambda = 1$	tramo isolado
$\lambda = 0,85 + 0,15/(1 + 50 \cdot \rho_1)$	tramo extremo
$\lambda = 0,70 + 0,30/[1 + 50 \cdot (\rho_1 + \rho_2)]$	tramo interno
$\lambda = 1/(1 + 50 \cdot \rho_3)$	balanço

TABELA 5.1 – Coeficiente dependente do instante de aplicação da carga [EF-96 (1997)]

meses	ξ_i
0,5	0,48
1	0,68
2	0,88
3	1,00
4	1,08
5	1,15
6	1,20
7	1,24
8	1,28
10	1,35
12	1,40
18	1,52
24	1,60
36	1,72
48	1,80
60	1,86
72	1,92
84	1,96
96	2,00

5.1.2 Combinações de ações

As ações atuantes na construção são classificadas, segundo a NBR 8681 (2003), em permanentes, variáveis e excepcionais.

As ações permanentes são aquelas que ocorrem com valores praticamente constantes durante toda a vida da construção, como por exemplo, o peso próprio da estrutura e dos revestimentos. As ações variáveis são as que apresentam variações significativas durante a vida da construção, como exemplos, têm as cargas acidentais de uso da construção e a ação do vento. Já as ações excepcionais, são as que têm duração extremamente curta e muito baixa probabilidade de ocorrência durante a vida da construção, mas que devem ser consideradas nos projetos de determinadas estruturas, tais como, ações decorrentes de explosões e abalos sísmicos excepcionais.

A NBR 6118 (2003) permite que as ações sejam combinadas em função da probabilidade que têm de atuarem simultaneamente sobre a estrutura, durante um determinado período. Para a verificação dos estados limites de serviço, são definidos três tipos de combinação de ações: quase permanente, freqüente e rara, de acordo com a ordem de grandeza de permanência na estrutura.

Na combinação quase permanente, utilizada na verificação do estado limite de deformações excessivas, todas as ações variáveis sofrem a mesma redução, sendo consideradas com seus valores quase permanentes $\psi_2 \cdot F_{q,k}$, conforme a seguinte expressão:

$$F_{d,ser} = \sum_{i=1}^m F_{gi,k} + \sum_{j=1}^n \psi_{2j} \cdot F_{qj,k} \quad 5.10$$

Na combinação freqüente, utilizada na verificação dos estados limites de formação de fissuras, de abertura de fissuras e de vibrações excessivas, a ação variável principal F_{q1} é considerada com seu valor freqüente $\psi_1 \cdot F_{q1,k}$ e todas as demais ações variáveis são tomadas com seus valores quase permanentes $\psi_2 \cdot F_{q,k}$, conforme a seguinte expressão:

$$F_{d,ser} = \sum_{i=1}^m F_{gi,k} + \psi_1 \cdot F_{q1,k} + \sum_{j=1}^n \psi_{2j} \cdot F_{qj,k} \quad 5.11$$

Já na combinação rara, utilizada na verificação do estado limite de formação de fissuras, a ação variável principal F_{q1} é considerada com seu valor característico e todas as demais ações variáveis são tomadas com seus valores freqüentes $\psi_1 \cdot F_{q,k}$, conforme a seguinte expressão:

$$F_{d,ser} = \sum_{i=1}^m F_{gi,k} + F_{q1,k} + \sum_{j=1}^n \psi_{1j} \cdot F_{qj,k} \quad 5.12$$

Nas equações anteriores, $F_{d,ser}$ representa o valor de cálculo das ações para a combinação considerada e ψ_i é o coeficiente de redução das ações variáveis, conforme tabela 5.2.

Para a verificação dos estados limites de serviço, a EF-96 (1997) adota coeficiente de ponderação igual a zero para as ações variáveis que produzam efeitos favoráveis na estrutura e coeficiente igual a 1,0 para os demais casos.

TABELA 5.2 – Valores de ψ_1 e ψ_2 , segundo NBR 6118 (2003)

Ações		ψ_1	ψ_2
Cargas acidentais de edifícios	Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas	0,4	0,3
	Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevadas concentrações de pessoas	0,6	0,4
	Bibliotecas, arquivos, oficinas e garagens	0,7	0,6
Vento	Pressão dinâmica do vento em estruturas em geral	0,3	0
Temperatura	Variações uniformes de temperatura em relação à média anual local	0,5	0,3

5.1.3 Deslocamentos limites

De acordo com a NBR 6118 (2003), deslocamentos limites são valores práticos utilizados para verificação em serviço do estado limite de deformações excessivas da estrutura, sendo classificados nos quatro grupos básicos relacionados a seguir e devem obedecer aos limites estabelecidos na tabela 5.3.

- **aceitabilidade sensorial:** limite caracterizado por vibrações indesejáveis ou efeito visual desagradável.
- **efeitos específicos:** os deslocamentos podem impedir a utilização adequada da construção, causando problemas, por exemplo, ao alinhamento de equipamentos sensíveis apoiados nos elementos estruturais, ao desenvolvimento de atividades previstas ou à drenagem de lajes de piso e cobertura.
- **efeitos em elementos não estruturais:** deslocamentos estruturais podem ocasionar o mau funcionamento de elementos que, apesar de não fazerem parte da estrutura, estão ligados a ela. Os danos em elementos não estruturais podem variar desde fissuras em paredes e forros e problemas de funcionamento de portas e janelas até quebra de elementos de vidro.
- **efeitos em elementos estruturais:** os deslocamentos podem afetar o comportamento do elemento estrutural, provocando afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas. Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento

considerado, seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados, incorporando-as ao modelo estrutural adotado.

TABELA 5.3 – Limites para deslocamentos segundo NBR 6118 (2003)

Razão da limitação	Exemplos	Deslocamento a considerar	Deslocamento limite
Aceitabilidade sensorial			
Visual	Deslocamentos visíveis em elementos estruturais	Deslocamento total	$\ell/250$
Outro	Vibrações sentidas no piso	Deslocamento devido à carga acidental	$\ell/350$
Efeitos estruturais em serviço			
Superfícies que devem drenar água	Coberturas e varandas	Deslocamento total	$\ell/250$ ¹⁾
Pavimentos que devem permanecer planos	Ginásios e pistas de boliche	Deslocamento total	$\ell/350 +$ contraflecha ²⁾
		Deslocamento ocorrido após a construção do piso	$\ell/600$
Elementos que suportam equipamentos sensíveis	Laboratórios	Deslocamento ocorrido após nivelamento do aparelho	De acordo com recomendações do fabricante
Efeitos em elementos não estruturais			
Paredes	Alvenaria, caixilhos e revestimentos	Deslocamento ocorrido após a construção da parede	$\ell/500$ ³⁾ ou 10 mm
	Divisórias leves e caixilhos telescópicos	Deslocamento ocorrido após a instalação da divisória	$\ell/250$ ³⁾ ou 25 mm
Forros	Revestimentos colados	Deslocamento ocorrido após a construção do forro	$\ell/350$
	Revestimentos pendurados ou com juntas	Deslocamento ocorrido após a construção do forro	$\ell/175$
Efeitos em elementos não estruturais			
Afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas	Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento considerado, seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados, incorporando-os ao modelo estrutural adotado.		
¹⁾ As superfícies devem ser suficientemente inclinadas ou o deslocamento compensado por contraflechas, de modo a não se ter acúmulo de água. ²⁾ Os deslocamentos podem ser parcialmente compensados pela especificação de contraflechas. Entretanto, a situação isolada da contraflecha não pode ocasionar um desvio do plano maior que $\ell/350$. ³⁾ O vão ℓ deve ser tomado na direção na qual a parede ou a divisória se desenvolve.			
NOTAS:			
1) Todos os valores limites de deslocamentos supõem elementos de vão ℓ suportados em ambas as extremidades por apoios que não se movem. Quando se tratar de balanços, o vão equivalente a ser considerado deve ser o dobro do comprimento do balanço; 2) Para o caso de elementos de superfície, os limites prescritos consideram que o valor de ℓ é o menor vão, exceto em casos de verificação de paredes e divisórias, onde interessa a direção na qual a parede ou divisória se desenvolve.			

Já a EF-96 (1997) limita as flechas das lajes nos seguintes valores:

- a) a flecha total no tempo infinito não deve exceder o menor dos valores $\ell/250$ e $\ell/500 + 1$ cm;
- b) para lajes que irão suportar paredes: a flecha ocorrido após a construção da parede não deve exceder o menor dos valores $\ell/400$ e $\ell/800 + 0,6$ cm;
- c) para lajes que irão suportar paredes muito rígidas: a flecha ocorrido após a construção da parede não deve exceder o menor dos valores $\ell/500$ e $\ell/1000 + 0,5$ cm.

Nas expressões anteriores ℓ é o valor do vão e, no caso de balanço, 1,6 vezes o valor do balanço.

Nas lajes com vãos menores que 7 metros e sobrecargas não maiores que 4 kN/m^2 , a EF-96 (1997) indica que não é necessário verificar a flecha caso a altura total da laje for maior que:

$$h = \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \ell / C \text{ [m]} \quad 5.13$$

onde:

δ_1 – fator que depende da carga total ($p = g + q$), tendo valor igual a $\sqrt{p/7}$, com p em kN/m^2 ;

δ_2 – fator com valor igual a $\sqrt[4]{\ell/6}$;

ℓ – vão de cálculo da laje em metros;

C – coeficiente cujo valor pode ser encontrado na tabela 5.4.

TABELA 5.4 – Valor do coeficiente C definido pela EF-96 (1997)

	tipo de tramo		
	isolado	extremo	interior
com paredes	17	21	24
com divisórias	18	22	25
cobertura	20	24	27

Como visto acima, as indicações contidas nas normas relativas à avaliação das flechas diferidas no tempo são voltadas para o caso de flechas em vigas, não sendo especificamente para as lajes com vigotas pré-moldadas.

Portanto, o que se pretende neste capítulo é realizar a análise das flechas diferidas de lajes pré-moldadas formadas por vigotas com armação treliçada, visando fornecer indicações de projeto através da proposta de um multiplicador das flechas imediatas para avaliação das flechas diferidas.

Esta análise foi realizada utilizando a metodologia descrita nos capítulos anteriores, ou seja, análise numérica, utilizando o programa computacional CONSNOU, em conjunto com análise probabilística, executada utilizando o método de amostragem por hipercubo latino.

5.2 Análise preliminar

Inicialmente foi realizada uma análise preliminar para tentar avaliar quais os parâmetros envolvidos influenciaria mais significativamente o coeficiente multiplicador das flechas imediatas.

5.2.1 Características das lajes

Foram analisadas lajes pré-moldadas formadas por vigotas com armação treliçada, compostas ainda por blocos de enchimento de poliestireno expandido (EPS) e uma capa de concreto estrutural moldada no local. Conforme a figura 5.4, as lajes possuíam 49 cm de distância entre nervuras e altura total de 12, 16, 20, 25 e 30 cm, tendo a seguinte denominação, respectivamente, LT12, LT16, LT20, LT25 e LT30.

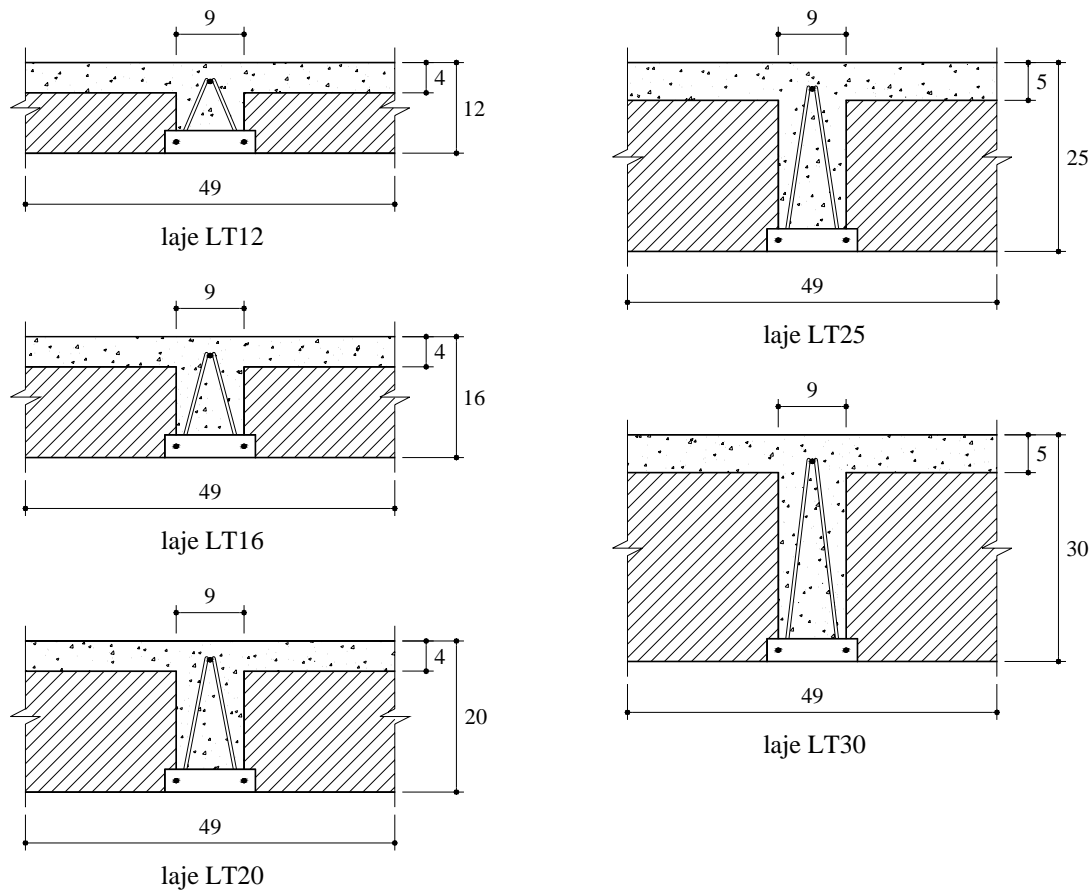


FIGURA 5.4 – Seção transversal das lajes (dimensões em cm)

Para cada tipo de laje, foi empregada uma vigota pré-moldada distinta, sendo que a diferença foi o tipo de treliça eletrosoldada utilizada em cada uma delas. As características geométricas das vigotas estão apresentadas na figura 5.5 e as particularidades das treliças eletrosoldadas utilizadas em cada uma das lajes estão apresentadas na tabela 5.5.

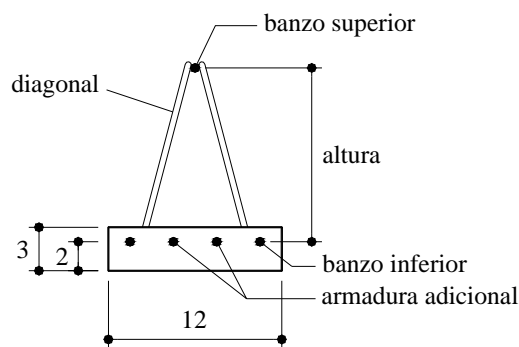


FIGURA 5.5 – Vigota (dimensões em cm)

TABELA 5.5 – Característica da treliça eletrosoldada (valores em mm)

laje	altura da treliça	diâmetro da armadura do banzo superior	diâmetro da armadura da diagonal	diâmetro da armadura do banzo inferior	designação
LT12	8	6	4,2	4,2	TR08644
LT16	12	6	4,2	5	TR12645
LT20	16	7	4,2	5	TR16745
LT25	20	7	4,2	6	TR20746
LT30	25	8	5	6	TR25856

5.2.2 Processo construtivo da laje pré-moldada

Para a construção da laje pré-moldada, as vigotas após terem sido confeccionadas na fábrica são transportadas à obra e posicionadas sobre os apoios, com a presença de apoios provisórios (escoramento). Em seguida, após o posicionamento dos elementos de enchimento é feita a concretagem da capa estrutural. Após o concreto ter resistência suficiente, o escoramento é retirado.

Assim, considerando o processo construtivo da laje pré-moldada, será definido como t_1 o intervalo de tempo da confecção da vigota até a concretagem da capa estrutural (figura 5.6). Já o intervalo de tempo entre a concretagem da capa e a retirada do escoramento será denominado t_2 . Juntamente com a retirada do escoramento, será considerada a aplicação do carregamento na laje, originando a flecha instantânea a_{inst} . Mantido o carregamento constante durante todo o intervalo t_3 , haverá um acréscimo no valor da flecha, resultando na flecha total a_{total} .

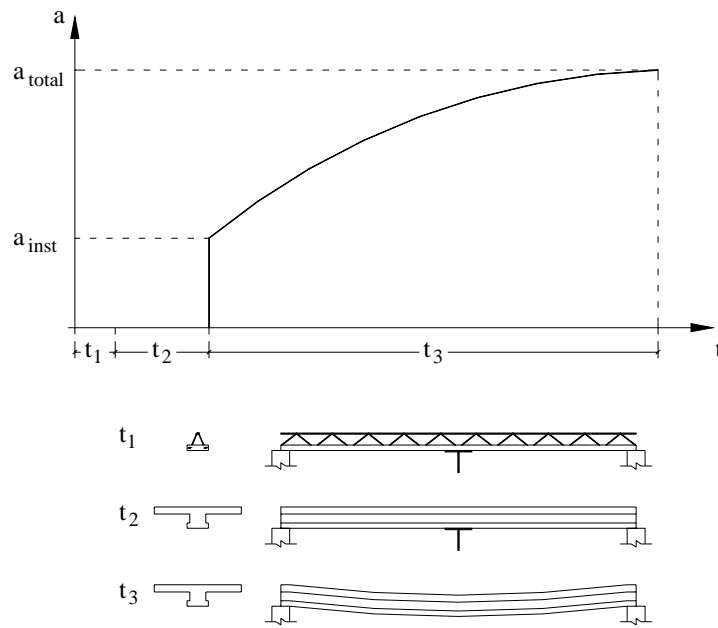


FIGURA 5.6 – Processo construtivo da laje pré-moldada

A flecha diferida pode ser avaliada através de um coeficiente multiplicador da flecha instantânea. Esse coeficiente multiplicador pode ser calculado através da seguinte expressão:

$$\alpha = \frac{a_{total} - a_{inst}}{a_{inst}} \quad 5.14$$

5.2.3 Parâmetros adotados

Para esta análise preliminar, foram consideradas duas situações distintas para cada tipo de laje. A situação 1 correspondendo à atuação de uma carga acidental de $5,0 \text{ kN/m}^2$ e a situação 2, com carga acidental de $2,5 \text{ kN/m}^2$.

Como mostrados na tabela 5.6, os vãos e armaduras adicionais adotados para cada situação foram compatíveis com a carga acidental empregada, sendo considerada ainda a atuação de uma carga permanente referente ao revestimento de $0,5 \text{ kN/m}^2$. A resistência característica à compressão do concreto foi de 20 MPa e a resistência característica à tração do aço foi de 600 MPa para as barras com diâmetro até 6 mm e 500 MPa para as demais.

TABELA 5.6 – Situações consideradas para cada tipo de laje

laje	$A_{s,adic}$	ℓ_1 (m)	ℓ_2 (m)
LT12	3 ϕ 8mm	3,5	4,0
LT16	3 ϕ 10mm	4,5	5,5
LT20	3 ϕ 10mm	5,5	6,5
LT25	3 ϕ 12,5mm	7,0	8,5
LT30	3 ϕ 12,5mm	8,5	9,5

ℓ_1 – vão para carga acidental de 5,0 kN/m²
 ℓ_2 – vão para carga acidental de 2,5 kN/m²

Para avaliar quais os parâmetros afetam de forma mais relevante o coeficiente multiplicador α , foram determinados tais coeficientes a partir de um valor base desses parâmetros e em seguida variando-os um a um. E assim, o parâmetro que gerar maior variação no coeficiente multiplicador α , terá maior influência sobre ele. As variações consideradas para a carga acidental (q), resistência característica à compressão do concreto da vigota ($f_{ck,vigota}$), resistência característica à compressão do concreto da capa ($f_{ck,capa}$), idade da concretagem da capa (t_1), intervalo de tempo entre a concretagem da capa e a retirada do escoramento (t_2), umidade relativa do ambiente (U) e temperatura ambiente (T) estão apresentados na tabela 5.7. Já as variações consideradas para os vãos das lajes estão mostradas na tabela 5.8.

As flechas foram determinadas a partir da combinação quase-permanente das ações.

$$F_{d,ser} = F_{gk} + 0,3.F_{qk} \quad 5.15$$

Foi considerado ainda que o intervalo de tempo que o carregamento atuante permaneceu constante (t_3) foi de 2200 dias, ou seja, aproximadamente 6 anos.

TABELA 5.7 – Variações consideradas para os parâmetros

	q (kN/m ²)		$f_{ck,vigota}$ (MPa)	$f_{ck,capa}$ (MPa)	t_1 (dias)	t_2 (dias)	U (%)	T (°C)
	situação 1	situação 2						
valor base	5,0	2,5	20	20	7	14	60	25
variação	1,0	1,0	25	25	91	42	80	35

TABELA 5.8 – Variações consideradas para os vãos das lajes

laje	ℓ_1 (m)		ℓ_2 (m)	
	valor base	variação	valor base	variação
LT12	3,5	2,0	4,0	2,5
LT16	4,5	2,5	5,5	3,5
LT20	5,5	3,5	6,5	3,5
LT25	7,0	4,0	8,5	5,5
LT30	8,5	5,5	9,5	5,5

ℓ_1 – vão para carga acidental de 5,0 kN/m²
 ℓ_2 – vão para carga acidental de 2,5 kN/m²

5.2.4 Descrição das modelagens numéricas

A análise numérica foi realizada dividindo a seção transversal das lajes em camadas de 0,5 cm, como pode ser visto na figura 5.7.

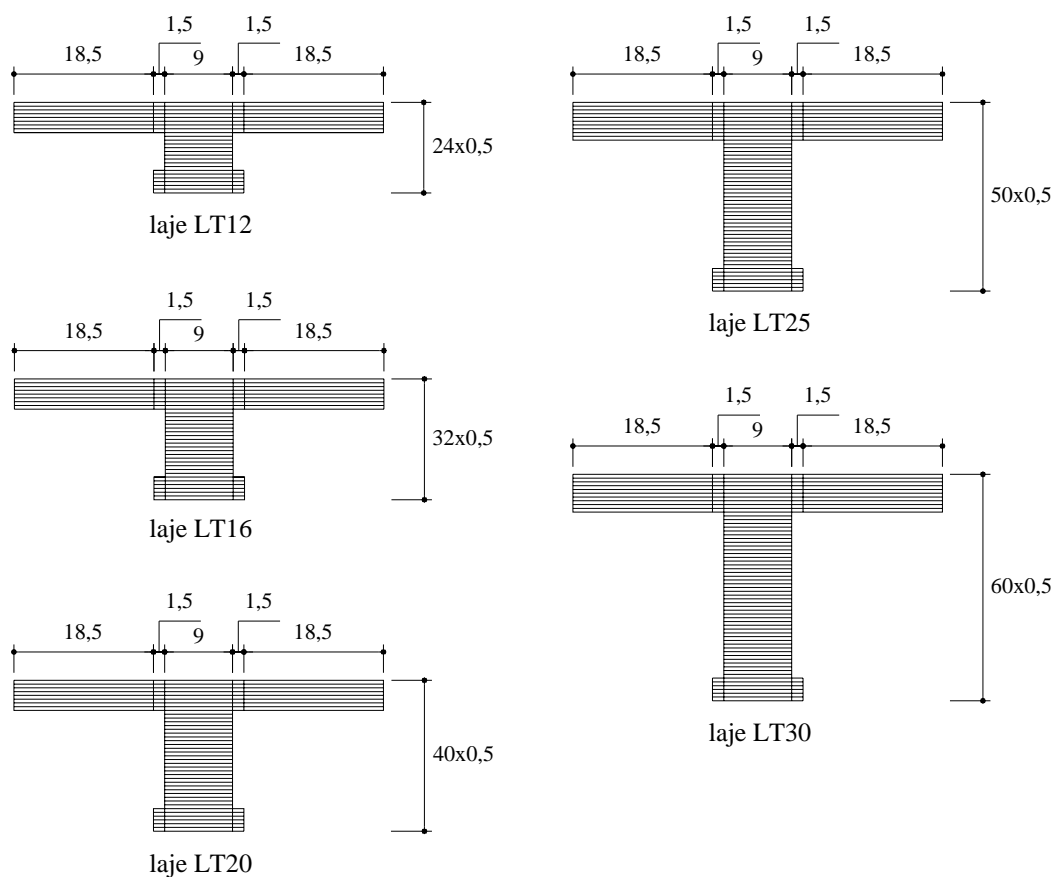


FIGURA 5.7 – Discretização da seção transversal das lajes (dimensões em cm)

A discretização longitudinal das lajes foi feita adotando elementos com comprimento de 10 cm, como mostrada na figura 5.8 (a) para a laje com 200 cm de comprimento. No entanto, quando não coincidiu a presença de um nó no meio do vão, este foi introduzido dando origem a dois elementos de 5 cm, como ilustrado na figura 5.8 (b) para a laje com 250 cm. Este nó no meio do vão é utilizado como ponto de escoramento da laje, facilitando na prática a realização de contraflecha. Os outros pontos de escoramento de todas as lajes analisadas, não apenas as lajes desta análise preliminar, estão mostrados na tabela 5.9.

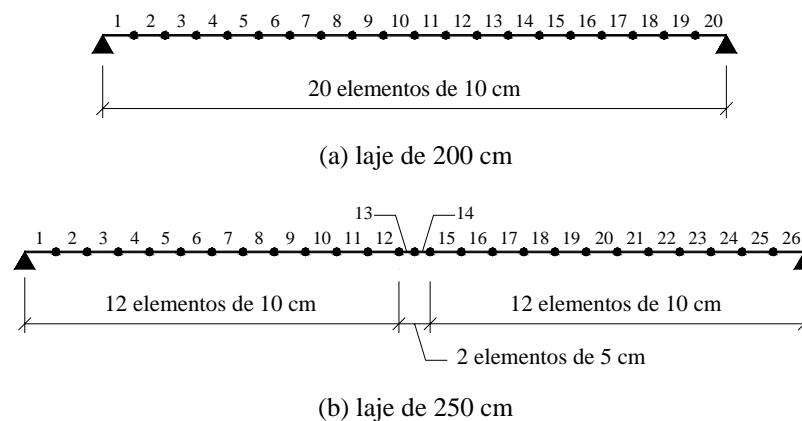


FIGURA 5.8 – Discretização longitudinal das lajes de 200 e 250cm

TABELA 5.9 – Pontos de escoramento das lajes (dimensões em cm)

ℓ (cm)	linha de escoras	ℓ (cm)	linha de escoras
200		600	
250		650	
300		700	
350		750	
400		800	
450		850	
500		900	
550		950	

5.2.5 Resultados obtidos

Os resultados obtidos para as flechas instantâneas e diferidas das lajes, assim como o coeficiente multiplicador α estão apresentados nas tabelas 5.10 a 5.19.

TABELA 5.10 – Resultados obtidos para a situação 1 da laje LT12

ℓ (m)	q (kN/m ²)	$f_{ck,vigota}$ (MPa)	$f_{ck,capa}$ (MPa)	t_1 (dias)	t_2 (dias)	U (%)	T (°C)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α
3,5	5,0	20	20	7	14	60	25	10,64	22,64	1,13
2,0	5,0	20	20	7	14	60	25	0,38	2,39	5,28
3,5	1,0	20	20	7	14	60	25	5,31	15,21	1,87
3,5	5,0	25	20	7	14	60	25	10,56	22,54	1,13
3,5	5,0	20	25	7	14	60	25	10,17	21,53	1,12
3,5	5,0	20	20	91	14	60	25	10,63	22,77	1,14
3,5	5,0	20	20	7	42	60	25	9,76	20,07	1,06
3,5	5,0	20	20	7	14	80	25	10,65	19,25	0,81
3,5	5,0	20	20	7	14	60	35	10,64	23,22	1,18

TABELA 5.11 – Resultados obtidos para a situação 1 da laje LT16

ℓ (m)	q (kN/m ²)	$f_{ck,vigota}$ (MPa)	$f_{ck,capa}$ (MPa)	t_1 (dias)	t_2 (dias)	U (%)	T (°C)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α
4,5	5,0	20	20	7	14	60	25	9,87	22,76	1,31
2,5	5,0	20	20	7	14	60	25	0,32	2,44	6,68
4,5	1,0	20	20	7	14	60	25	5,13	16,30	2,18
4,5	5,0	25	20	7	14	60	25	9,72	22,45	1,31
4,5	5,0	20	25	7	14	60	25	9,41	21,31	1,26
4,5	5,0	20	20	91	14	60	25	9,82	22,76	1,32
4,5	5,0	20	20	7	42	60	25	9,08	19,91	1,19
4,5	5,0	20	20	7	14	80	25	9,86	18,74	0,90
4,5	5,0	20	20	7	14	60	35	9,90	23,63	1,39

TABELA 5.12 – Resultados obtidos para a situação 1 da laje LT20

ℓ (m)	q (kN/m ²)	$f_{ck,vigota}$ (MPa)	$f_{ck,capa}$ (MPa)	t_1 (dias)	t_2 (dias)	U (%)	T (°C)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α
5,5	5,0	20	20	7	14	60	25	13,44	28,67	1,13
3,5	5,0	20	20	7	14	60	25	0,93	4,84	4,20
5,5	1,0	20	20	7	14	60	25	6,76	19,81	1,93
5,5	5,0	25	20	7	14	60	25	13,67	28,88	1,11
5,5	5,0	20	25	7	14	60	25	12,65	26,85	1,12
5,5	5,0	20	20	91	14	60	25	13,01	28,19	1,17
5,5	5,0	20	20	7	42	60	25	12,47	25,71	1,06
5,5	5,0	20	20	7	14	80	25	13,38	23,99	0,79
5,5	5,0	20	20	7	14	60	35	13,49	29,85	1,21

TABELA 5.13 – Resultados obtidos para a situação 1 da laje LT25

ℓ (m)	q (kN/m ²)	$f_{ck,vigota}$ (MPa)	$f_{ck,capa}$ (MPa)	t_1 (dias)	t_2 (dias)	U (%)	T (°C)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α
7,0	5,0	20	20	7	14	60	25	16,96	36,34	1,14
4,0	5,0	20	20	7	14	60	25	0,84	4,61	4,50
7,0	1,0	20	20	7	14	60	25	10,41	27,60	1,65
7,0	5,0	25	20	7	14	60	25	16,66	35,92	1,16
7,0	5,0	20	25	7	14	60	25	16,27	34,35	1,11
7,0	5,0	20	20	91	14	60	25	17,02	36,46	1,14
7,0	5,0	20	20	7	42	60	25	15,90	32,95	1,07
7,0	5,0	20	20	7	14	80	25	16,93	30,59	0,81
7,0	5,0	20	20	7	14	60	35	16,98	38,51	1,27

TABELA 5.14 – Resultados obtidos para a situação 1 da laje LT30

ℓ (m)	q (kN/m ²)	$f_{ck,vigota}$ (MPa)	$f_{ck,capa}$ (MPa)	t_1 (dias)	t_2 (dias)	U (%)	T (°C)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α
8,5	5,0	20	20	7	14	60	25	26,53	51,23	0,93
5,5	5,0	20	20	7	14	60	25	2,21	9,00	3,07
8,5	1,0	20	20	7	14	60	25	17,63	39,53	1,24
8,5	5,0	25	20	7	14	60	25	26,46	51,10	0,93
8,5	5,0	20	25	7	14	60	25	25,69	48,63	0,89
8,5	5,0	20	20	91	14	60	25	27,00	51,77	0,92
8,5	5,0	20	20	7	42	60	25	25,24	46,95	0,86
8,5	5,0	20	20	7	14	80	25	26,52	44,13	0,66
8,5	5,0	20	20	7	14	60	35	26,55	54,18	1,04

TABELA 5.15 – Resultados obtidos para a situação 2 da laje LT12

ℓ (m)	q (kN/m ²)	$f_{ck,vigota}$ (MPa)	$f_{ck,capa}$ (MPa)	t_1 (dias)	t_2 (dias)	U (%)	T (°C)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α
4,0	2,5	20	20	7	14	60	25	14,08	29,87	1,12
2,5	2,5	20	20	7	14	60	25	0,64	3,89	5,06
4,0	1,0	20	20	7	14	60	25	10,64	25,08	1,36
4,0	2,5	25	20	7	14	60	25	13,93	29,70	1,13
4,0	2,5	20	25	7	14	60	25	13,45	28,37	1,11
4,0	2,5	20	20	91	14	60	25	14,24	30,19	1,12
4,0	2,5	20	20	7	42	60	25	12,91	26,49	1,05
4,0	2,5	20	20	7	14	80	25	14,08	25,41	0,81
4,0	2,5	20	20	7	14	60	35	14,08	30,72	1,18

TABELA 5.16 – Resultados obtidos para a situação 2 da laje LT16

ℓ (m)	q (kN/m ²)	$f_{ck,vigota}$ (MPa)	$f_{ck,capa}$ (MPa)	t_1 (dias)	t_2 (dias)	U (%)	T (°C)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α
5,5	2,5	20	20	7	14	60	25	19,25	39,75	1,07
3,5	2,5	20	20	7	14	60	25	1,34	6,71	4,01
5,5	1,0	20	20	7	14	60	25	15,51	34,83	1,25
5,5	2,5	25	20	7	14	60	25	19,12	39,68	1,08
5,5	2,5	20	25	7	14	60	25	18,62	37,79	1,03
5,5	2,5	20	20	91	14	60	25	19,17	39,92	1,08
5,5	2,5	20	20	7	42	60	25	18,16	35,67	0,96
5,5	2,5	20	20	7	14	80	25	19,24	33,68	0,75
5,5	2,5	20	20	7	14	60	35	19,26	41,15	1,14

TABELA 5.17 – Resultados obtidos para a situação 2 da laje LT20

ℓ (m)	q (kN/m ²)	$f_{ck,vigota}$ (MPa)	$f_{ck,capa}$ (MPa)	t_1 (dias)	t_2 (dias)	U (%)	T (°C)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α
6,5	2,5	20	20	7	14	60	25	22,51	44,50	0,98
3,5	2,5	20	20	7	14	60	25	0,73	4,28	4,87
6,5	1,0	20	20	7	14	60	25	18,39	39,08	1,13
6,5	2,5	25	20	7	14	60	25	22,56	44,59	0,98
6,5	2,5	20	25	7	14	60	25	21,79	42,29	0,94
6,5	2,5	20	20	91	14	60	25	22,99	45,20	0,97
6,5	2,5	20	20	7	42	60	25	21,38	40,30	0,89
6,5	2,5	20	20	7	14	80	25	22,50	38,03	0,69
6,5	2,5	20	20	7	14	60	35	22,53	46,32	1,06

TABELA 5.18 – Resultados obtidos para a situação 2 da laje LT25

ℓ (m)	q (kN/m ²)	$f_{ck,vigota}$ (MPa)	$f_{ck,capa}$ (MPa)	t_1 (dias)	t_2 (dias)	U (%)	T (°C)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α
8,5	2,5	20	20	7	14	60	25	31,82	62,74	0,97
5,5	2,5	20	20	7	14	60	25	2,97	11,83	2,98
8,5	1,0	20	20	7	14	60	25	26,95	56,17	1,08
8,5	2,5	25	20	7	14	60	25	31,94	62,93	0,97
8,5	2,5	20	25	7	14	60	25	30,91	59,58	0,93
8,5	2,5	20	20	91	14	60	25	32,45	63,56	0,96
8,5	2,5	20	20	7	42	60	25	30,40	57,23	0,88
8,5	2,5	20	20	7	14	80	25	31,81	53,77	0,69
8,5	2,5	20	20	7	14	60	35	31,84	66,22	1,08

TABELA 5.19 – Resultados obtidos para a situação 2 da laje LT30

ℓ (m)	q (kN/m ²)	$f_{ck,vigota}$ (MPa)	$f_{ck,capa}$ (MPa)	t_1 (dias)	t_2 (dias)	U (%)	T (°C)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α
9,5	2,5	20	20	7	14	60	25	34,23	65,60	0,92
5,5	2,5	20	20	7	14	60	25	1,70	7,85	3,62
9,5	1,0	20	20	7	14	60	25	29,18	58,96	1,02
9,5	2,5	25	20	7	14	60	25	33,95	65,18	0,92
9,5	2,5	20	25	7	14	60	25	33,16	62,27	0,88
9,5	2,5	20	20	91	14	60	25	34,55	65,93	0,91
9,5	2,5	20	20	7	42	60	25	32,64	60,20	0,84
9,5	2,5	20	20	7	14	80	25	34,19	56,55	0,65
9,5	2,5	20	20	7	14	60	35	34,26	69,40	1,03

Os resultados obtidos estão apresentados na tabela 5.20 de forma resumida através da variação do coeficiente multiplicador α em porcentagem em função dos parâmetros analisados. Para melhor visualização, os dados desta tabela estão apresentados nas figuras 5.9 e 5.10.

TABELA 5.20 – Variação do coeficiente multiplicador em porcentagem

	laje	ℓ	q	$f_{ck,vigota}$	$f_{ck,capa}$	t_1	t_2	U	T
situação 1	LT12	368,3	65,5	0,6	1,0	1,4	6,2	28,3	4,8
	LT16	411,5	66,8	0,4	3,1	1,0	8,7	31,0	6,4
	LT20	270,6	70,5	1,8	0,9	2,9	6,3	30,0	7,1
	LT25	294,1	44,4	1,1	2,7	0,1	6,2	29,5	10,8
	LT30	229,3	33,4	0,0	4,1	1,5	7,6	28,7	11,8
situação 2	LT12	351,2	20,9	0,9	1,1	0,2	6,1	28,3	5,3
	LT16	276,8	17,0	1,0	3,4	1,6	9,5	29,6	6,8
	LT20	398,6	15,3	0,1	3,7	1,0	9,4	29,3	8,1
	LT25	206,6	11,5	0,2	4,6	1,3	9,2	28,9	11,1
	LT30	294,9	11,3	0,3	4,3	1,0	8,0	28,7	11,8

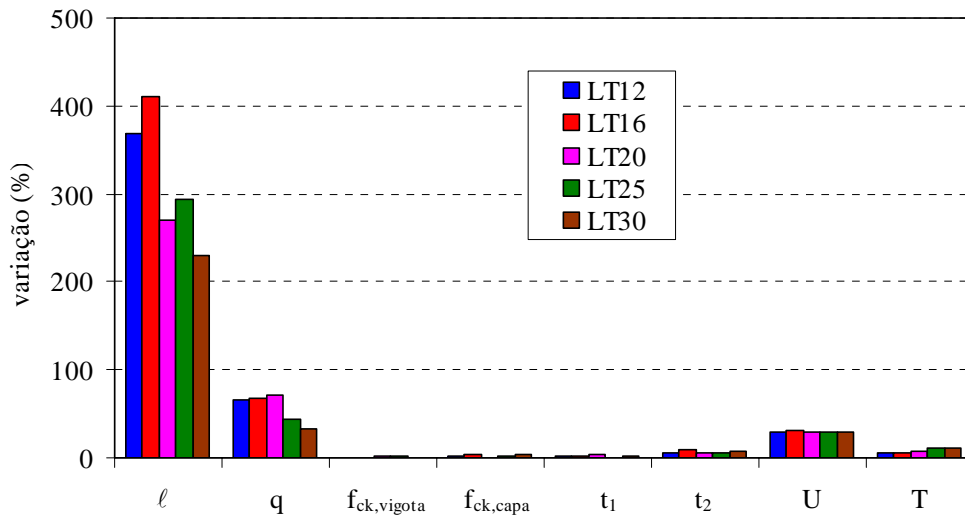


FIGURA 5.9 – Variação do coeficiente multiplicador para a situação 1

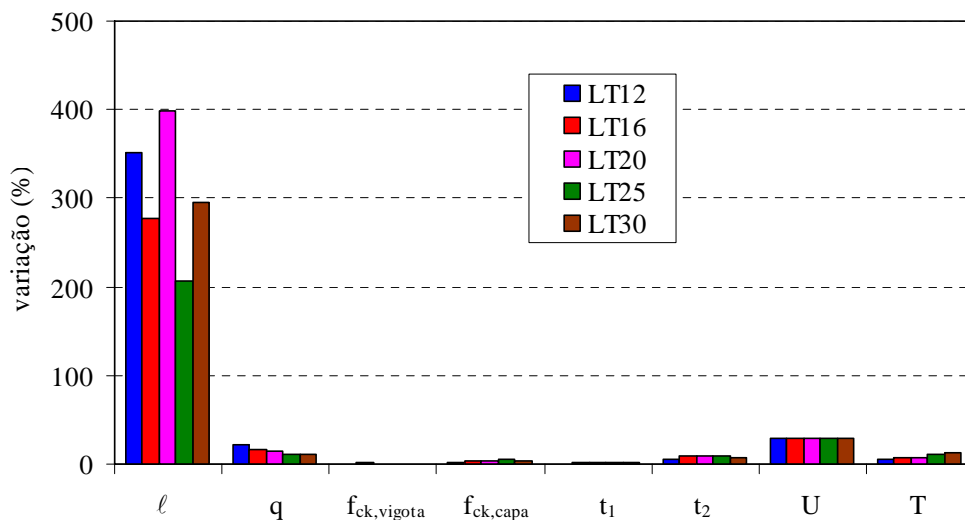


FIGURA 5.10 – Variação do coeficiente multiplicador para a situação 2

Pelas figuras 5.9 e 5.10, pode-se observar que os parâmetros que mais influenciaram o coeficiente multiplicador α foram o vão da laje (ℓ) e a carga acidental aplicada (q).

Na realidade, o que se pôde observar, é que tanto o carregamento aplicado quanto a altura e o vão da laje, assim como a armadura utilizada são parâmetros dependentes entre si, ou seja, tem pouco sentido prático considerar uma laje com 5,5 m de vão e sujeita a carga acidental de 2,5 kN/m² sendo construída com altura de 30 cm e 3 barras adicionais de 12,5 mm de diâmetro, como foi o caso da situação 2 da laje LT30. E mesmo que isso acontecesse na prática, as flechas obtidas

seriam muito pequenas. Portanto, o melhor seria desconsiderar esses dois parâmetros e apenas considerar os demais, como apresentados nas figuras 5.11 e 5.12.

Pelas figuras 5.11 e 5.12, nota-se que a umidade relativa do ambiente (**U**) influenciou mais significativamente o coeficiente multiplicador α , seguido da temperatura ambiente (**T**) e do tempo em que a laje fica escorada (**t₂**). E como a variação no valor da temperatura poderia ter sido ainda maior que aquele considerado (25°C a 35°C), conclui-se que os parâmetros que mais influenciaram o coeficiente multiplicador foram a umidade relativa e a temperatura ambiente.

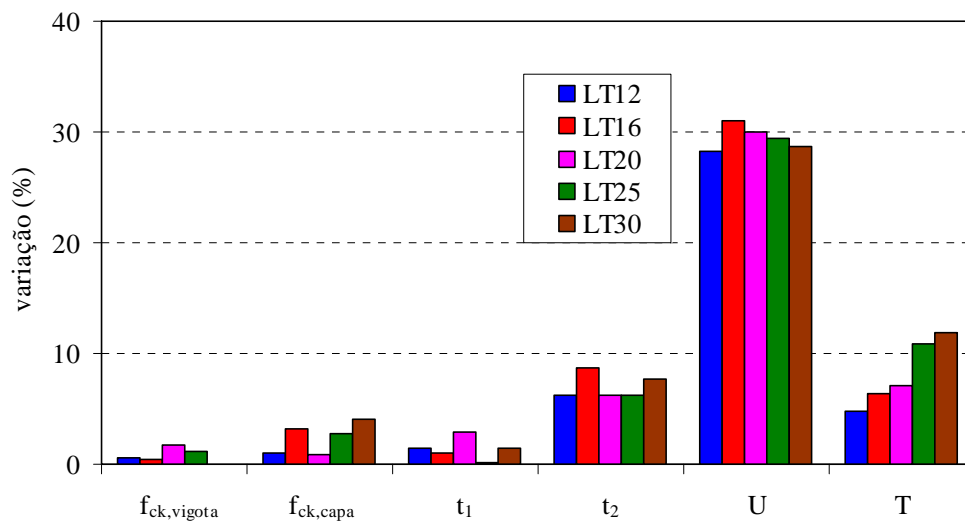


FIGURA 5.11 – Variação do coeficiente multiplicador para a situação 1

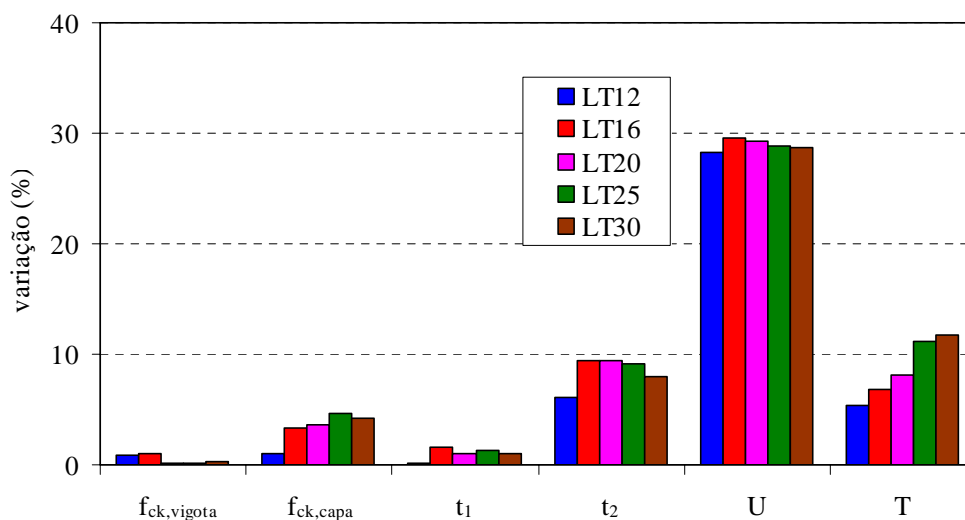


FIGURA 5.12 – Variação do coeficiente multiplicador para a situação 2

5.3 Análise determinística

Como visto no item anterior, os parâmetros que mais influenciaram o coeficiente multiplicador α foram a umidade relativa do ambiente, a temperatura ambiente e o tempo em que a laje fica escorada. No entanto, como também se pôde notar, o vão e altura da laje, assim como o carregamento aplicado e a armadura utilizada, podem influenciar de forma significativa o coeficiente multiplicador, para casos sem sentido prático.

Por isso, foi analisado inicialmente cada tipo de laje variando a carga acidental de 1,0 kN/m² a 6,0 kN/m² e considerando-se vãos e armaduras adicionais compatíveis, mantendo-se os demais parâmetros constantes. A partir desta análise, definiu-se um coeficiente multiplicador básico $\alpha_{\text{básico}}$, em seguida foi realizada a análise para considerar a influência da umidade relativa e temperatura ambiente, através do coeficiente $\alpha_{U,T}$.

5.3.1 Coeficiente multiplicador básico

O coeficiente multiplicado básico $\alpha_{\text{básico}}$ foi determinado a partir da análise de 394 casos, sendo 63 referentes à laje LT12, 79 referentes à laje LT16, 80 referentes à laje LT20, 80 referentes à laje LT25 e 92 referentes à laje LT30, como mostrados respectivamente nas tabelas 5.21, 5.22, 5.23, 5.24 e 5.25. Esta análise foi realizada mantendo-se constante a resistência característica à compressão do concreto da vigota (20 MPa), a resistência característica à compressão do concreto da capa (20 MPa), a idade da concretagem da capa (7 dias), o tempo em que a laje permaneceu escorada (14 dias), a umidade relativa (60%) e a temperatura ambiente (25°C).

As demais características e considerações empregadas nesta análise são idênticas às adotadas na análise preliminar desenvolvido anteriormente.

TABELA 5.21 – Casos analisados para a laje LT12

ℓ (m)	armadura adicional $A_{s,adic}$ (cm ²)					
	q (kN/m ²)					
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
4,5	0,90	1,50				
	1,10	1,75				
	1,30	2,10				
	1,50	2,35				
4,0	0,60	0,90	1,50			
	0,75	1,10	1,75			
	0,85	1,30	2,10			
	1,00	1,50	2,35			
3,5	0,40	0,60	1,00	1,50	1,50	
	0,45	0,75	1,15	1,75	1,75	
	0,55	0,85	1,35	2,10	2,10	
	0,60	1,00	1,50	2,35	2,35	
3,0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,50
	0,25	0,45	0,75	0,85	1,15	1,75
	0,30	0,55	0,85	0,95	1,35	2,10
		0,60	1,00	1,00	1,50	2,35

TABELA 5.22 – Casos analisados para a laje LT16

ℓ (m)	armadura adicional $A_{s,adic}$ (cm ²)					
	q (kN/m ²)					
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
6,0	1,20	1,50				
	1,60	1,75				
	1,95	2,10				
	2,35	2,35				
5,5	0,90	1,50	2,35			
	1,10	1,75	2,80			
	1,30	2,10	3,25			
	1,50	2,35	3,68			
5,0	0,60	1,00	1,50	2,35		
	0,75	1,15	1,75	2,80		
	0,85	1,35	2,10	3,25		
	1,00	1,50	2,35	3,68		
4,5	0,40	0,80	1,20	1,50	2,35	
	0,45	0,85	1,60	1,75	2,80	
	0,55	0,95	1,95	2,10	3,25	
	0,60	1,00	2,35	2,35	3,68	
4,0	0,20	0,40	0,80	1,00	1,20	1,50
	0,25	0,45	0,85	1,15	1,60	1,75
	0,30	0,55	0,95	1,35	1,95	2,10
		0,60	1,00	1,50	2,35	2,35

TABELA 5.23 – Casos analisados para a laje LT20

ℓ (m)	armadura adicional $A_{s,adic}$ (cm ²)					
	q (kN/m ²)					
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
7,0	1,50	2,35				
	1,75	2,80				
	2,10	3,25				
	2,35	3,68				
6,5	1,00	1,60	2,35			
	1,15	1,90	2,80			
	1,35	2,15	3,25			
	1,50	2,45	3,68			
6,0	0,90	1,20	2,35	2,35		
	1,10	1,60	2,80	2,80		
	1,30	1,95	3,25	3,25		
	1,50	2,35	3,68	3,68		
5,5	0,60	1,00	1,50	2,35	2,35	
	0,75	1,15	1,75	2,80	2,80	
	0,85	1,35	2,10	3,25	3,25	
	1,00	1,50	2,35	3,68	3,68	
5,0	0,40	0,60	1,00	1,50	2,35	2,35
	0,45	0,75	1,15	1,75	2,80	2,80
	0,55	0,85	1,35	2,10	3,25	3,25
	0,60	1,00	1,50	2,35	3,68	3,68

TABELA 5.24 – Casos analisados para a laje LT25

ℓ (m)	armadura adicional $A_{s,adic}$ (cm ²)					
	q (kN/m ²)					
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
8,5	1,60	2,35				
	1,90	2,80				
	2,15	3,25				
	2,45	3,68				
8,0	1,50	2,35	3,68			
	1,75	2,80	4,00			
	2,10	3,25	4,50			
	2,35	3,68	4,90			
7,5	1,20	1,60	2,35	3,68		
	1,60	1,90	2,80	4,00		
	1,95	2,15	3,25	4,50		
	2,35	2,45	3,68	4,90		
7,0	1,00	1,50	2,35	2,35	3,68	
	1,15	1,75	2,80	2,80	4,00	
	1,35	2,10	3,25	3,25	4,50	
	1,50	2,35	3,68	3,68	4,90	
6,5	0,80	1,00	1,50	2,35	2,35	3,68
	0,85	1,15	1,75	2,80	2,80	4,00
	0,95	1,35	2,10	3,25	3,25	4,50
	1,00	1,50	2,35	3,68	3,68	4,90

TABELA 5.25 – Casos analisados para a laje LT30

ℓ (m)	armadura adicional $A_{s,adic}$ (cm ²)					
	q (kN/m ²)					
	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
9,5	2,35	3,68	3,68			
	2,80	4,00	4,00			
	3,25	4,50	4,50			
	3,68	4,90	4,90			
9,0	1,60	2,35	3,68	3,68		
	1,90	2,80	4,00	4,00		
	2,15	3,25	4,50	4,50		
	2,45	3,68	4,90	4,90		
8,5	1,50	2,35	2,35	3,68	3,68	
	1,75	2,80	2,80	4,00	4,00	
	2,10	3,25	3,25	4,50	4,50	
	2,35	3,68	3,68	4,90	4,90	
8,0	1,20	1,60	2,35	3,68	3,68	
	1,60	1,90	2,80	4,00	4,00	
	1,95	2,15	3,25	4,50	4,50	
	2,35	2,45	3,68	4,90	4,90	
7,5	0,90	1,50	2,35	2,35	3,68	3,68
	1,10	1,75	2,80	2,80	4,00	4,00
	1,30	2,10	3,25	3,25	4,50	4,50
	1,50	2,35	3,68	3,68	4,90	4,90

Para desenvolver um coeficiente multiplicador básico que levasse em consideração a variação do vão e altura da laje, o carregamento aplicado e a armadura utilizada, foi criado um coeficiente denominado de κ que englobou esses quatro parâmetros. A preocupação com a criação do coeficiente κ era conseguir agrupar os valores dos coeficientes multiplicadores, diminuindo, assim, a sua dispersão, para poder realizar uma regressão dos valores com maior correlação possível. E assim, por tentativas, chegou-se no seguinte coeficiente:

$$\kappa = \frac{A_s \cdot h^{2,05}}{p^{1,5} \cdot \ell^3} \cdot 10^3 \quad 5.16$$

onde:

A_s – armadura [cm²];

h – altura da laje [m];

p – carregamento aplicado [kN/m];

ℓ – vão da laje [m].

Os resultados obtidos desta análise estão apresentados no Apêndice A, mas podem ser vistos na figura 5.13. Apresenta-se nesta figura o coeficiente multiplicador α , encontrado para cada caso, em função do coeficiente κ .

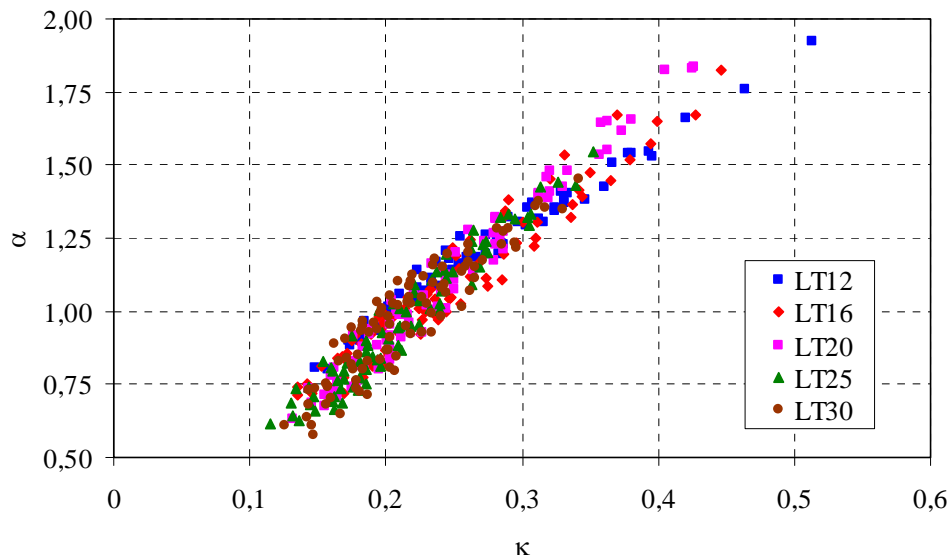


FIGURA 5.13 – Coeficiente multiplicador

E assim, como mostrado na figura 5.14, obteve-se a seguinte expressão para o coeficiente multiplicador básico, através de regressão linear dos resultados obtidos.

$$\alpha_{\text{básico}} = 3,73 \cdot \kappa + 0,18 \quad 5.17$$

com

$$R^2 = 0,93$$

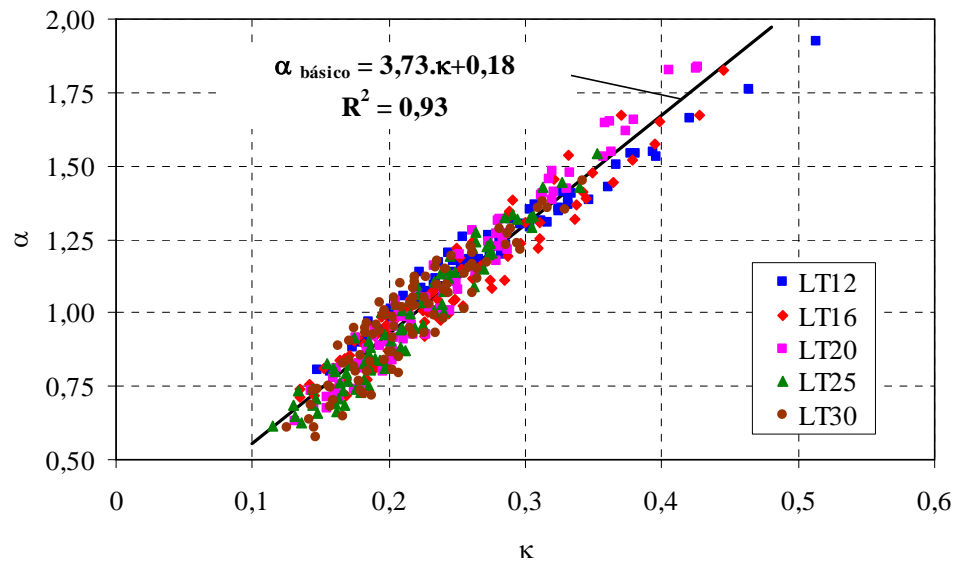


FIGURA 5.14 – Regressão linear dos resultados

Por definição, resíduo da regressão é a diferença entre os valores observados e os valores estimados. Para a análise em questão, o resíduo da regressão em função do coeficiente κ está apresentado na figura 5.15. Por essa figura, pode-se notar que o resíduo variou entre -0,17 e +0,14 e não houve tendência no espalhamento.

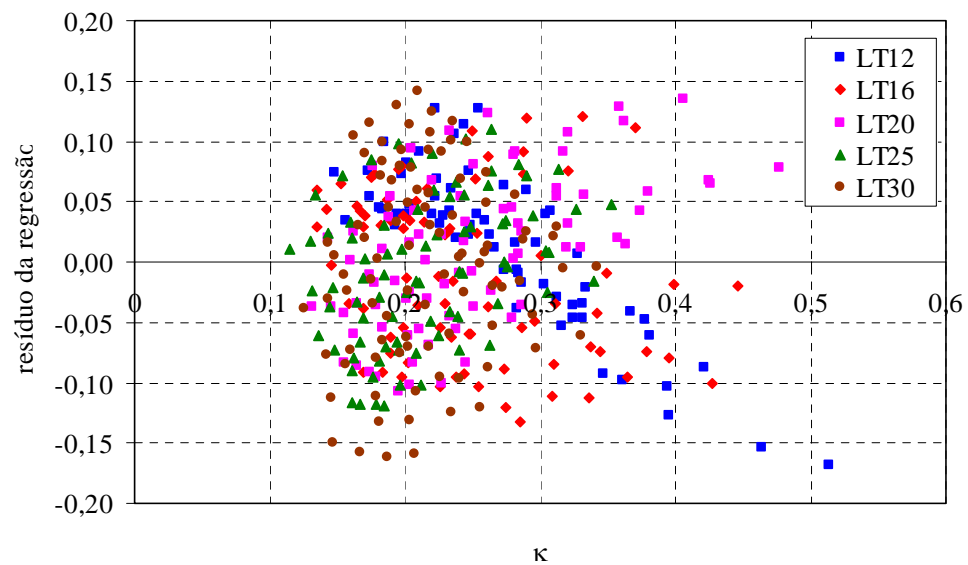


FIGURA 5.15 – Resíduo da regressão

Nas figuras 5.16, 5.17, 5.18, 5.19 e 5.20 estão apresentados os coeficientes multiplicadores φ em função do coeficiente κ , respectivamente, para as lajes LT12, LT16, LT20, LT25 e LT30. Apresenta-se também nas figuras o resíduo máximo obtido com a regressão. Por essas figuras, pode-se notar que o resíduo obtido com a regressão não foi função do tipo nem do vão da laje.

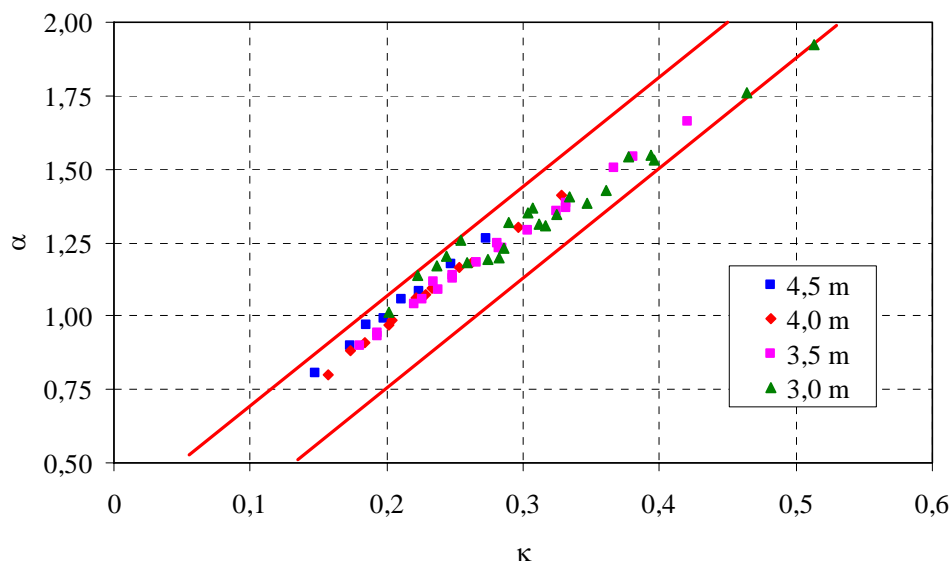


FIGURA 5.16 – Coeficiente multiplicador para a laje LT12

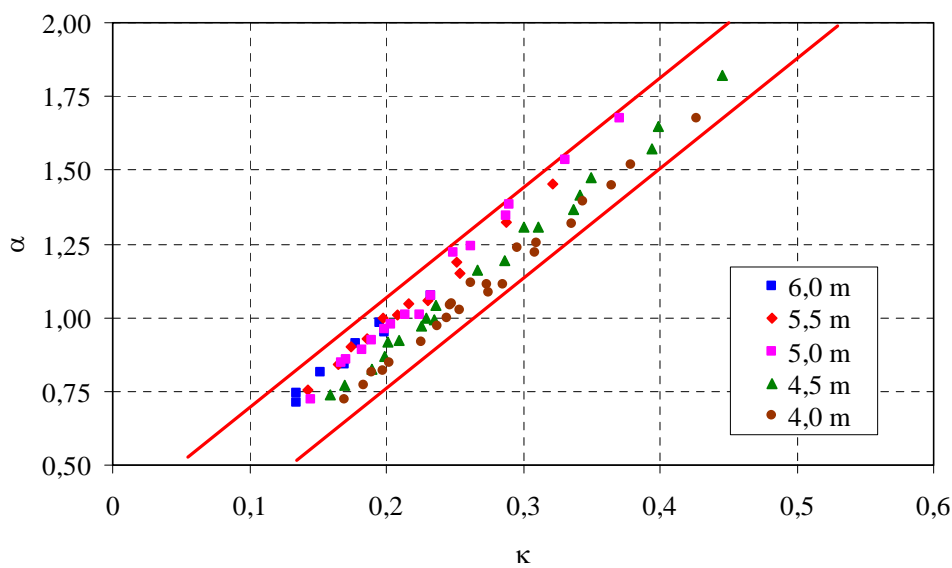


FIGURA 5.17 – Coeficiente multiplicador para a laje LT16

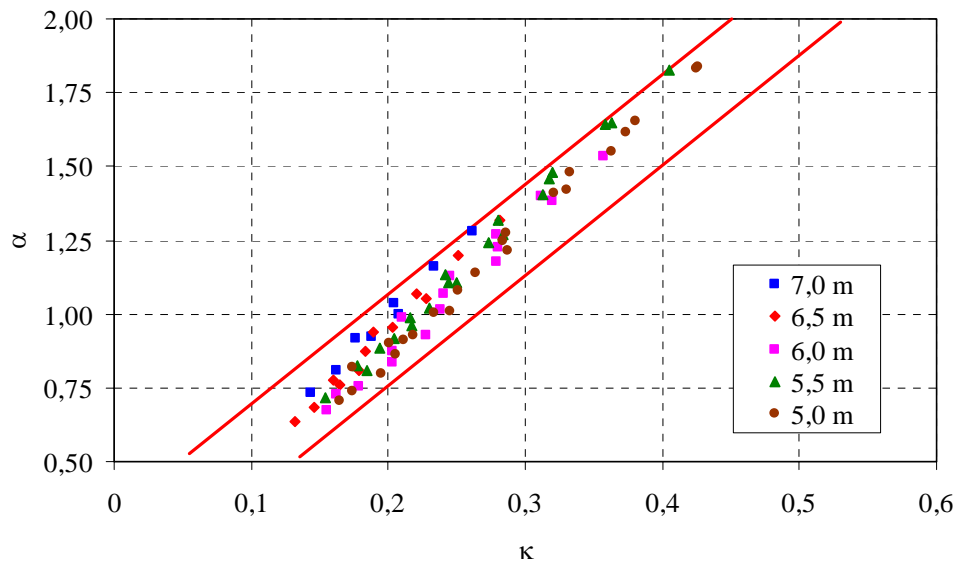


FIGURA 5.18 – Coeficiente multiplicador para a laje LT20

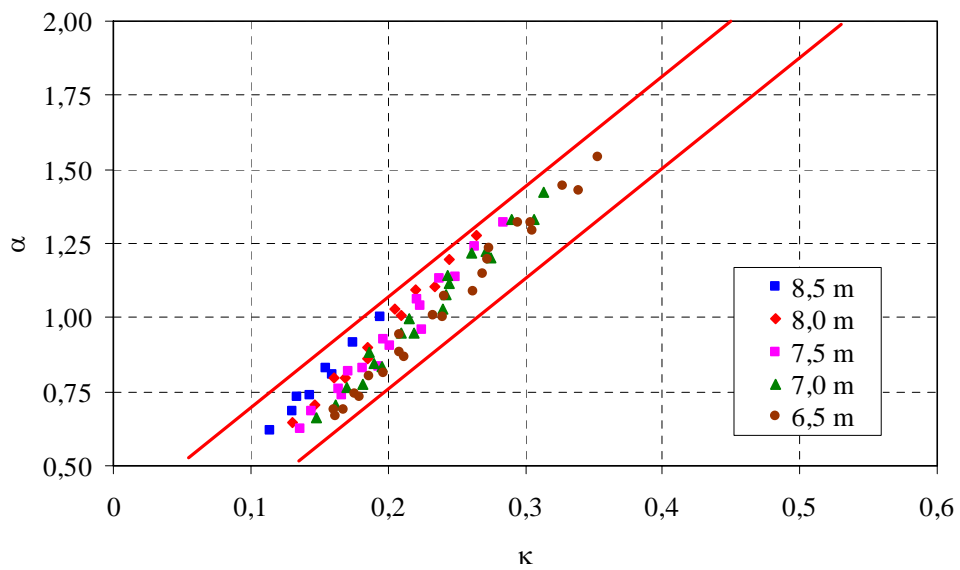


FIGURA 5.19 – Coeficiente multiplicador para a laje LT25

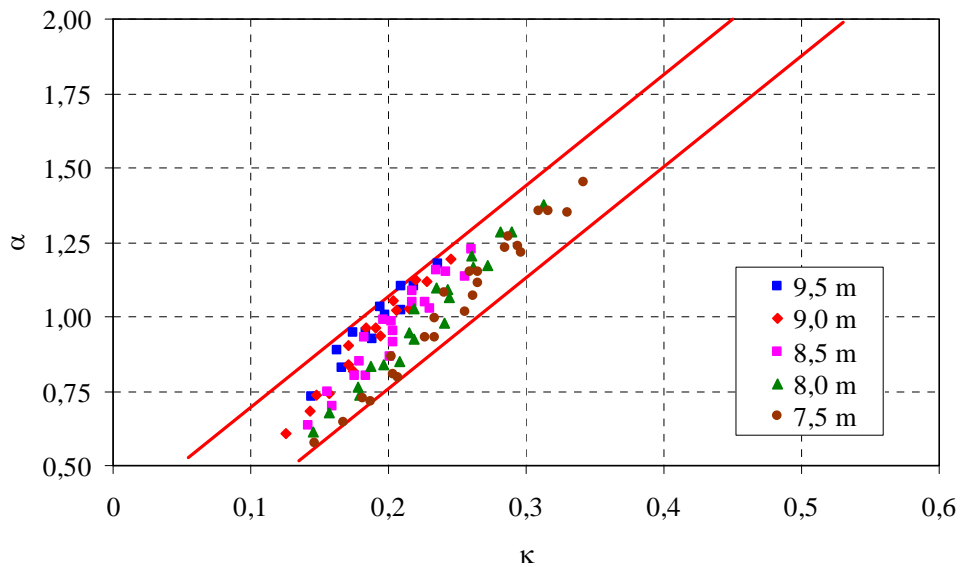


FIGURA 5.20 – Coeficiente multiplicador para a laje LT30

5.3.2 *Influência da umidade relativa e temperatura no coeficiente multiplicador*

Para averiguar a influência da umidade relativa e temperatura ambiente no coeficiente multiplicador foram analisados 31 casos, como mostrados na tabela 5.26. Esta análise foi realizada variando a umidade relativa em 40%, 60%, 80% e a temperatura ambiente em 15°C, 25°C, 35°C, totalizando, portanto, 279 casos.

Os demais parâmetros e considerações empregadas nesta análise foram os mesmos adotados no item anterior.

A influência da umidade relativa e temperatura ambiente foram consideradas através do coeficiente $\alpha_{U,T}$. Este coeficiente foi determinado dividindo o coeficiente multiplicador obtido em cada caso pelo resultado obtido para o caso com as mesmas características, mas com umidade relativa de 60% e temperatura ambiente de 25°C.

TABELA 5.26 – Casos analisados para a determinação de $\alpha_{U,T}$

laje	ℓ (m)	armadura adicional $A_{s,adic}$ (cm ²)		
		q (kN/m ²)		
		2,0	4,0	6,0
LT12	4,5	1,50		
	4,0	0,90		
	3,5	0,60	1,50	
	3,0	0,40	0,80	1,50
LT16	6,0	1,50		
	5,0	1,00	2,35	
	4,0	0,40	1,00	1,50
LT20	7,0	2,35		
	6,0	1,20	2,35	
	5,0	0,60	1,50	2,35
LT25	8,5	2,35		
	7,5	1,60	3,68	
	6,5	1,00	2,35	3,68
LT30	9,5	3,68		
	8,5	2,35	3,68	
	7,5	1,50	2,35	3,68

Os resultados obtidos estão apresentados no Apêndice B, mas podem ser vistos na figura 5.21, que mostra o coeficiente $\alpha_{U,T}$, encontrado para cada caso, em função da umidade relativa e temperatura ambiente.

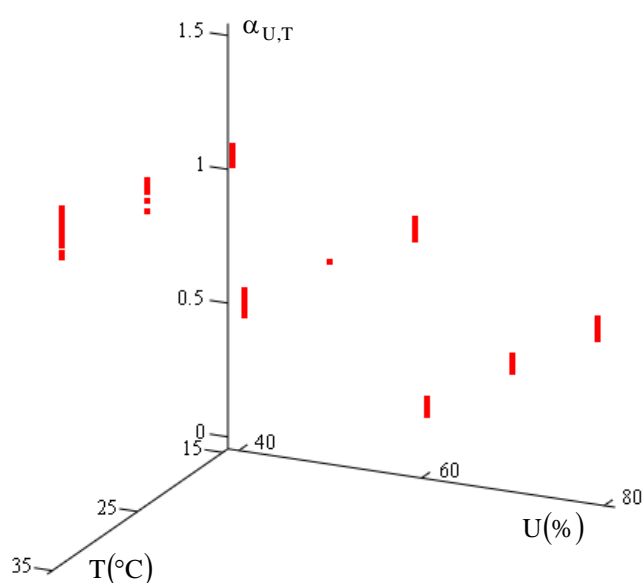


FIGURA 5.21 – Coeficiente $\alpha_{U,T}$

Através de regressão não-linear dos valores obtidos, como mostrado na figura 5.22, obteve-se a seguinte expressão para o coeficiente $\alpha_{U,T}$.

$$\alpha_{U,T} = 0,016.T + 4,9.10^{-3}.U - 2,7.10^{-5}.T.U - 1,03.10^{-4}.T^2 - 1,32.10^{-4}.U^2 + 0,90 \quad 5.18$$

com

$$R^2 = 0,99$$

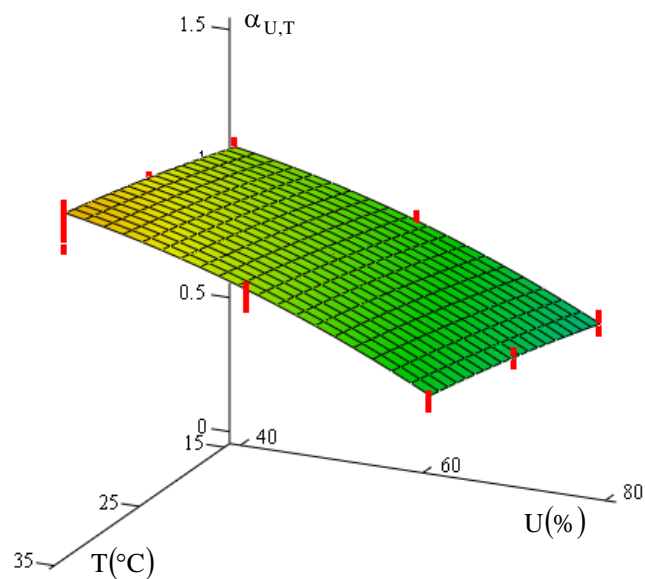


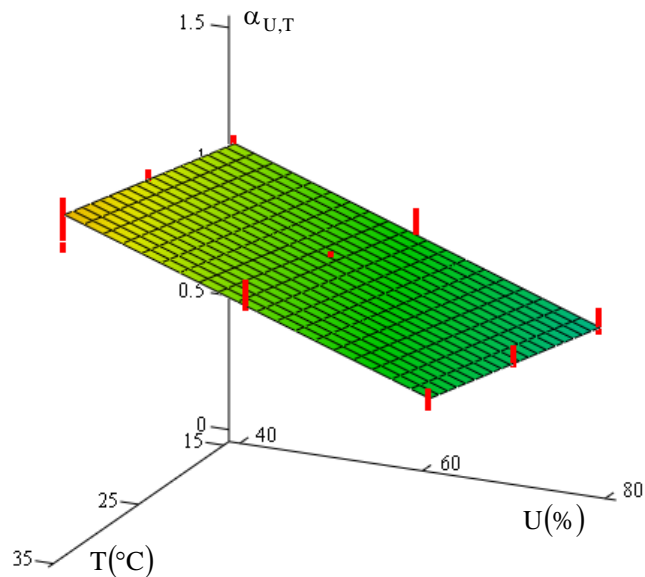
FIGURA 5.22 – Regressão não-linear do coeficiente $\alpha_{U,T}$

E, como mostrado na figura 5.23, obteve-se a seguinte expressão para o coeficiente $\alpha_{U,T}$, através de regressão linear dos resultados obtidos.

$$\alpha_{U,T} = 8,8.10^{-3}.T - 0,012.U + 1,43 \quad 5.19$$

com

$$R^2 = 0,97$$

FIGURA 5.23 – Regressão linear do coeficiente $\alpha_{U,T}$

E assim, o coeficiente multiplicador α da flecha instantânea para avaliação da flecha diferida de lajes pré-moldadas formadas por vigotas com armadura treliçada é determinado a partir do coeficiente multiplicador básico $\alpha_{\text{básico}}$ e do coeficiente $\alpha_{U,T}$, que considera a influência da umidade relativa e temperatura ambiente.

Ou seja,

$$\alpha = \alpha_{\text{básico}} \cdot \alpha_{U,T} \quad 5.20$$

Com

$$\alpha_{\text{básico}} = 3,73 \cdot \kappa + 0,18 \quad 5.21$$

sendo

$$\kappa = \frac{A_s \cdot h^{2,05}}{p^{1,5} \cdot \ell^3} \cdot 10^3 \quad 5.22$$

onde:

A_s – armadura [cm^2];

h – altura da laje [m];

p – carregamento aplicado [kN/m];

ℓ – vão da laje [m].

E ainda,

$$\alpha_{U,T} = 0,016.T + 4,9.10^{-3}.U - 2,7.10^{-5}.T.U - 1,03.10^{-4}.T^2 - 1,32.10^{-4}.U^2 + 0,90 \quad 5.23$$

ou

$$\alpha_{U,T} = 8,8.10^{-3}.T - 0,012.U + 1,43 \quad 5.24$$

onde:

U – umidade relativa do ambiente [%];

T – temperatura do ambiente [°C].

5.4 Análise probabilística

Para determinar o coeficiente multiplicador α , levando-se em conta a variabilidade estatística dos principais parâmetros, selecionou-se os casos analisados anteriormente que resultaram os maiores valores no coeficiente $\alpha_{U,T}$, comparando casos com mesma umidade relativa e temperatura ambiente. Desta seleção resultaram 8 casos, que estão apresentados na tabela 5.27. E para esses casos foi realizada a análise probabilística utilizando o método de amostragem por hipercubo latino, conforme descrito no capítulo 4.

TABELA 5.27 – Casos analisados para a determinação de $\alpha_{U,T}$ (análise probabilística)

casos	laje	ℓ (m)	q (kN/m ²)	A _{s,adic} (cm ²)	U (%)	T (°C)
caso 1	LT30	8,5	4,0	3,68	40	35
caso 2	LT20	5,0	4,0	1,50	40	25
caso 3	LT12	3,5	4,0	1,50	40	15
caso 4	LT30	8,5	4,0	3,68	60	35
caso 5	LT12	3,5	2,0	0,60	60	15
caso 6	LT30	9,5	2,0	3,68	80	35
caso 7	LT12	3,0	2,0	0,40	80	25
caso 8	LT12	3,0	2,0	0,40	80	15

Os parâmetros que foram considerados como variáveis aleatórias estão listadas a seguir, totalizando 8 variáveis aleatórias para cada caso. Foi considerado ainda que essas variáveis aleatórias eram estatisticamente independentes entre si e seguiam uma distribuição normal.

$\Psi_{1,c1}$ – coeficiente de fluência do concreto da vigota

$\Psi_{2,c1}$ – retração do concreto da vigota

f_{c1} – resistência do concreto da vigota

$\Psi_{1,c2}$ – coeficiente de fluência do concreto da capa estrutural

$\Psi_{2,c2}$ – retração do concreto da capa estrutural

f_{c2} – resistência do concreto da capa estrutural

U – umidade relativa

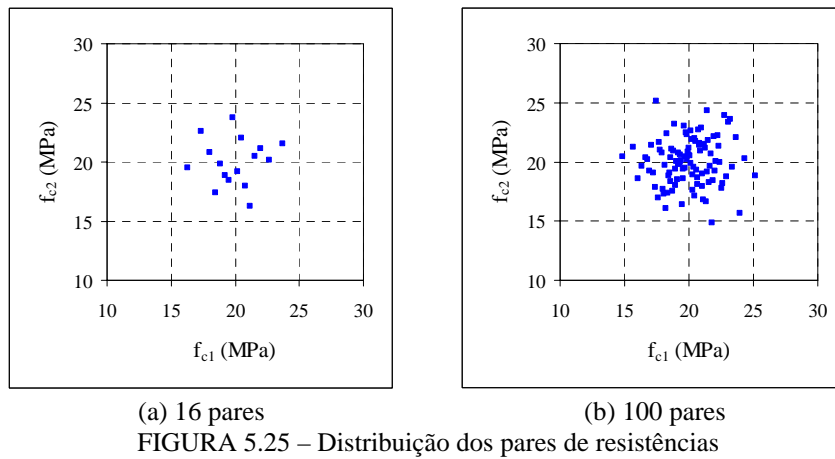
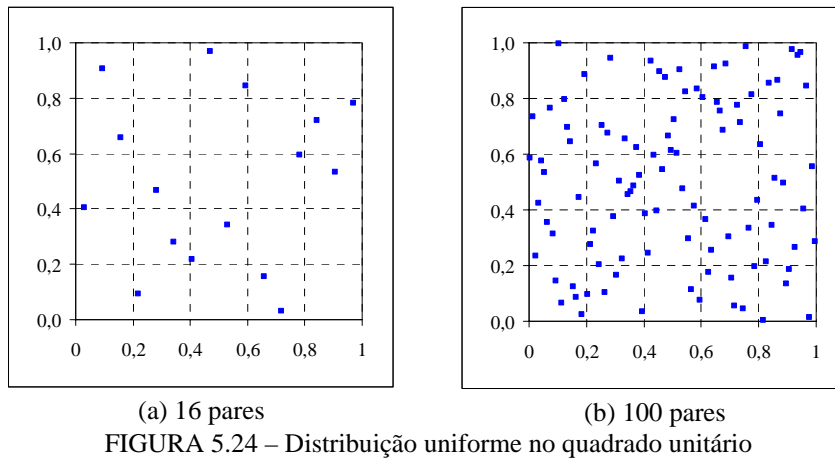
T – temperatura ambiente

As propriedades estatísticas das variáveis aleatórias, ou seja, a média (μ) e o coeficiente de variação (V) estão apresentados na tabela 5.28.

TABELA 5.28 – Propriedades estatísticas das variáveis aleatórias

	$\Psi_{1,c1}$	$\Psi_{2,c1}$	f_{c1}	$\Psi_{1,c2}$	$\Psi_{2,c2}$	f_{c2}	U	T
	–	–	(MPa)	–	–	(MPa)	%	°C
μ	1,0	1,0	20	1,0	1,0	20	conforme tabela 5.27	conforme tabela 5.27
$V(\%)$	30	32,9	10	30	32,9	10	20	20

O total de simulações realizadas para cada caso foi igual a 100. Preferiu-se aumentar o número de simulações para melhorar a precisão da resposta. Para ilustrar a diferença que pode ocorrer com o aumento do número de simulações, apresenta-se na figura 5.24 a distribuição uniforme no quadrado unitário dos pares utilizados para calcular os valores das resistências mostradas na figura 5.25. Por essas figuras, pode-se perceber que, com o aumento do número de pares, será mais difícil ocorrer regiões com acúmulo de pontos ou com vazios.



A partir dos resultados das simulações, pôde-se verificar quais os parâmetros afetam mais significativamente o valor do coeficiente multiplicador através do coeficiente de regressão padronizado e coeficiente de correlação parcial, como mostrados nas figuras 5.26 e 5.27. Pelas figuras, pode-se notar que as incertezas nos modelos da fluência e retração do concreto da capa estrutural e, como já era esperado, os fatores ambientais (umidade relativa e temperatura ambiente) foram os parâmetros que tiveram maior influência no coeficiente multiplicador α .

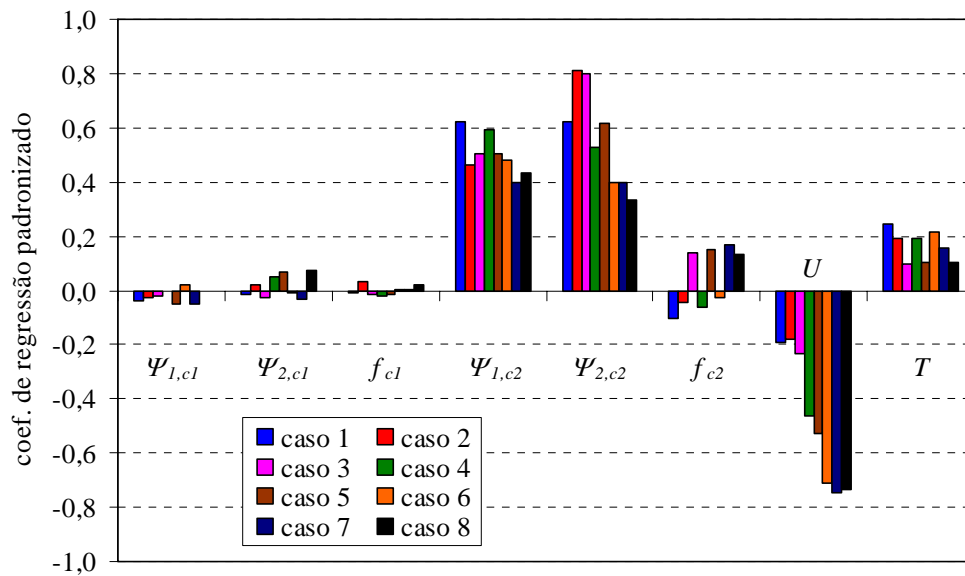


FIGURA 5.26 – Coeficiente de regressão padronizado para o coeficiente multiplicador α

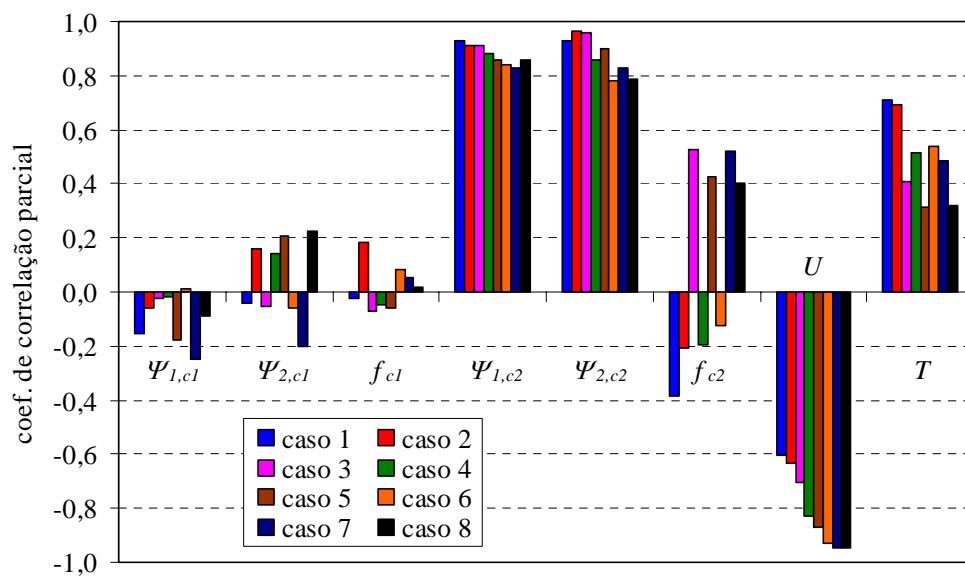


FIGURA 5.27 – Coeficiente de correlação parcial para o coeficiente multiplicador α

Para verificar se o coeficiente multiplicador α se aproxima de uma distribuição normal, construiu o gráfico de probabilidade normal do coeficiente multiplicador obtido para cada caso, conforme figura 5.28. Por essa figura, nota-se que os valores ficaram próximos da reta, indicando que a distribuição normal é uma boa aproximação.

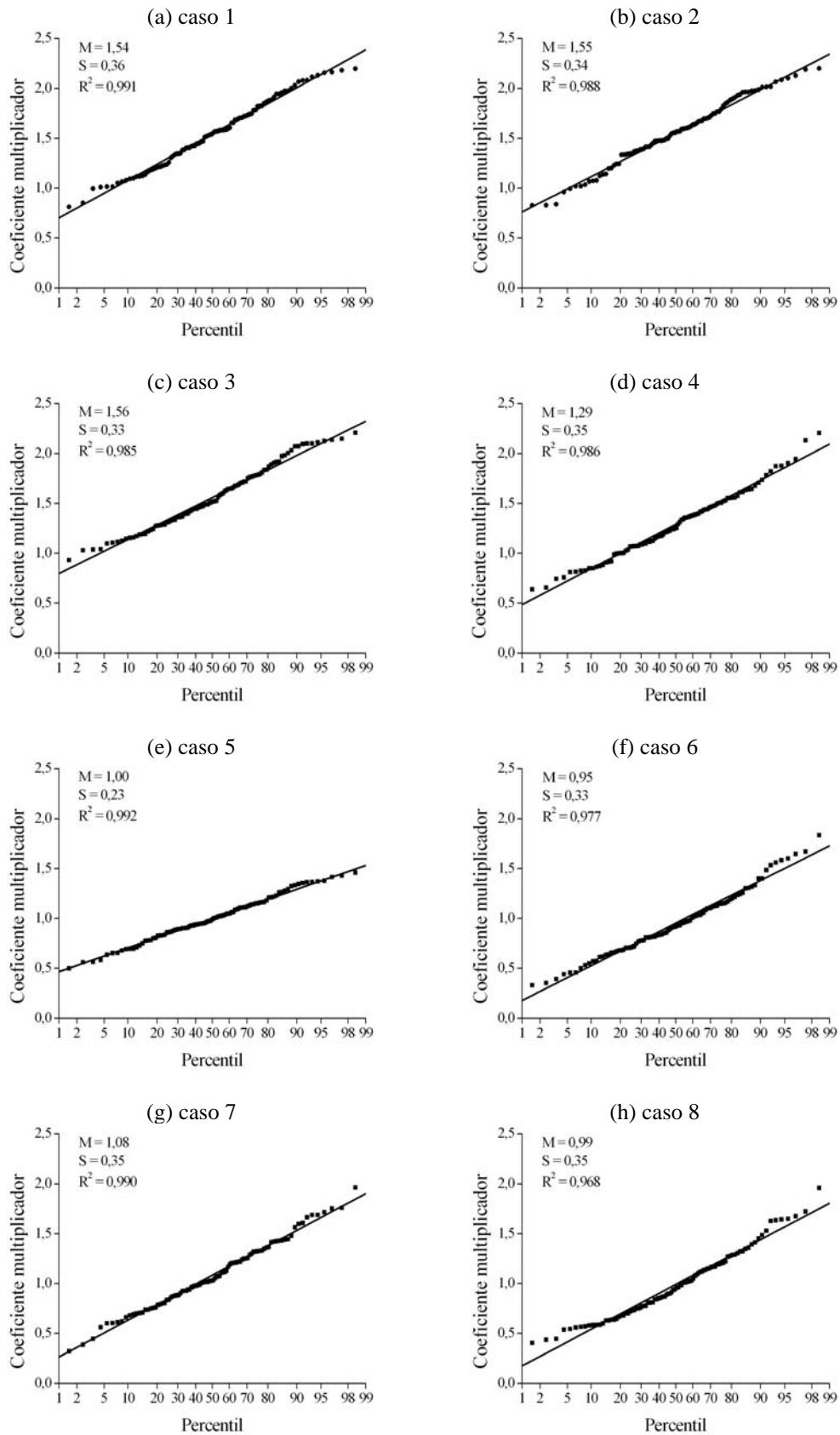


FIGURA 5.28 – Gráficos de probabilidade normal para o coeficiente multiplicador

Com os valores obtidos para o coeficiente multiplicador α para os 8 casos analisados, determinou-se o coeficiente $\alpha_{U,T}$, como definido anteriormente. Foram determinados para cada par de valores de umidade relativa e temperatura, os coeficientes $\alpha_{U,T}$ com 5%, 10% e 15% de probabilidade de serem ultrapassados, ou seja, 95%, 90% e 85% de probabilidade dos coeficientes $\alpha_{U,T}$ estarem abaixo do valor determinado.

A partir da regressão desses valores, obteve-se as seguintes expressões para o coeficiente $\alpha_{U,T}$, como mostrados nas figuras 5.29, 5.30 e 5.31, respectivamente para 95%, 90% e 85% de probabilidade.

- **95% de probabilidade:**

$$\alpha_{U,T} = 0,029.T - 0,011.U - 2,83.10^{-4}.T.U + \\ + 1,31.10^{-4}.T^2 + 4,93.10^{-5}.U^2 + 1,78 \quad 5.25$$

ou

$$\alpha_{U,T} = 0,019.T - 0,012.U + 1,97 \quad 5.26$$

- **90% de probabilidade:**

$$\alpha_{U,T} = 0,029.T - 9,17.10^{-3}.U - 2,61.10^{-4}.T.U + \\ + 7,86.10^{-5}.T^2 + 2,76.10^{-5}.U^2 + 1,64 \quad 5.27$$

ou

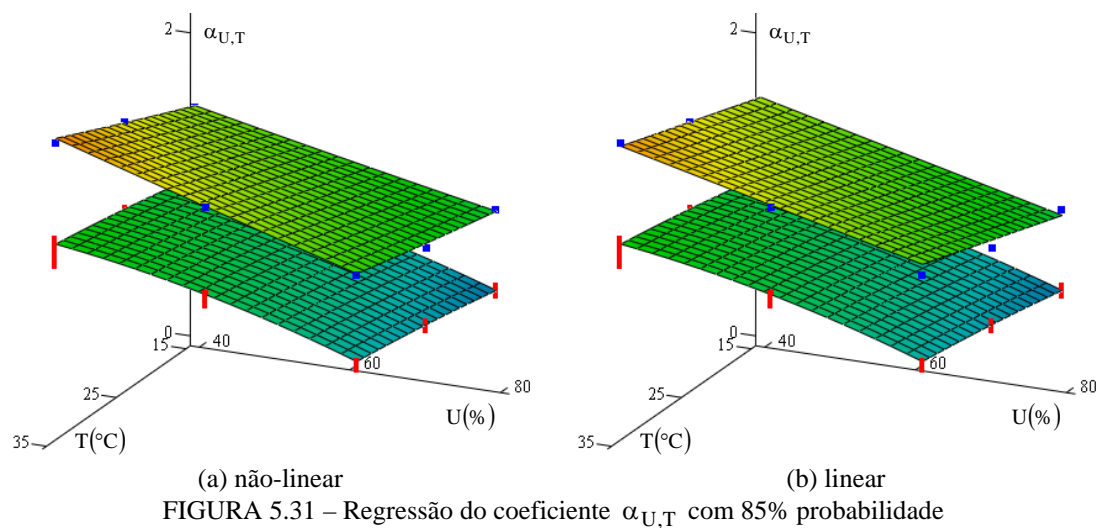
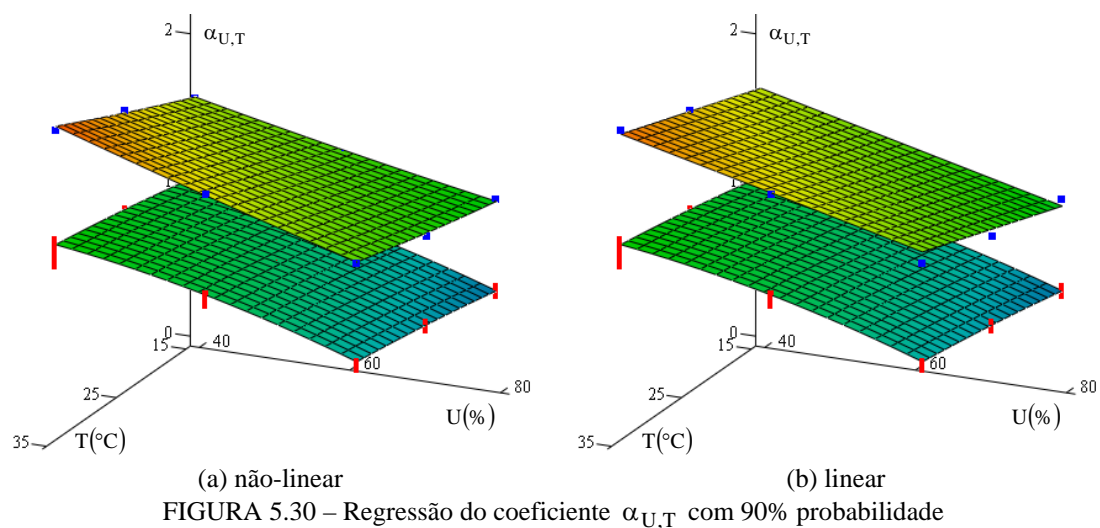
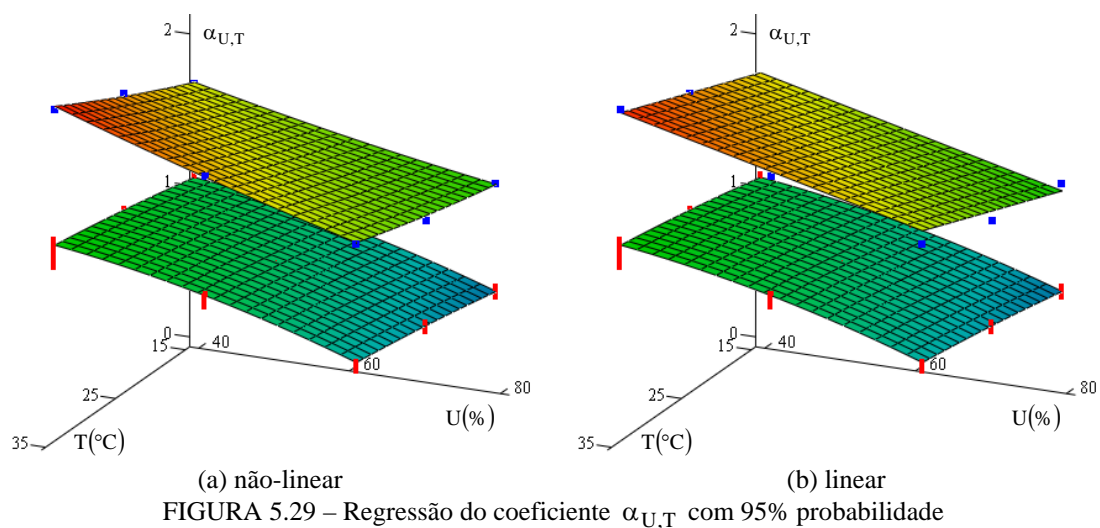
$$\alpha_{U,T} = 0,017.T - 0,012.U + 1,89 \quad 5.28$$

- **85% de probabilidade:**

$$\alpha_{U,T} = 0,029.T - 7,82.10^{-3}.U - 2,45.10^{-4}.T.U + \\ + 4,29.10^{-5}.T^2 + 1,30.10^{-5}.U^2 + 1,54 \quad 5.29$$

ou

$$\alpha_{U,T} = 0,016.T - 0,012.U + 1,84 \quad 5.30$$



Portanto, o coeficiente multiplicador α da flecha instantânea para avaliação da flecha diferida de lajes pré-moldadas formadas por vigotas com armação treliçada será:

$$\alpha = \alpha_{\text{básico}} \cdot \alpha_{U,T} \quad 5.31$$

Com

$$\alpha_{\text{básico}} = 3,73 \cdot \kappa + 0,18 \quad 5.32$$

sendo

$$\kappa = \frac{A_s \cdot h^{2,05}}{p^{1,5} \cdot \ell^3} \cdot 10^3 \quad 5.33$$

onde:

A_s – armadura [cm²];

h – altura da laje [m];

p – carregamento aplicado [kN/m];

ℓ – vão da laje [m].

E o coeficiente $\alpha_{U,T}$, que considera a influência da umidade relativa e temperatura ambiente, com 85% de probabilidade é dado por:

$$\alpha_{U,T} = 0,029 \cdot T - 7,82 \cdot 10^{-3} \cdot U - 2,45 \cdot 10^{-4} \cdot T \cdot U + 4,29 \cdot 10^{-5} \cdot T^2 + 1,30 \cdot 10^{-5} \cdot U^2 + 1,54 \quad 5.34$$

ou

$$\alpha_{U,T} = 0,016 \cdot T - 0,012 \cdot U + 1,84 \quad 5.35$$

onde:

U – umidade relativa média do ambiente [%];

T – temperatura média do ambiente [°C].

O coeficiente $\alpha_{U,T}$ foi determinado considerando 95%, 90% e 85% de probabilidade. No entanto, na falta de indicações sobre o assunto e considerando que o coeficiente $\alpha_{U,T}$ com 95% de probabilidade parece ser muito restritivo, está se adotando aqui o coeficiente $\alpha_{U,T}$ com 85% de probabilidade.

5.5 Laje contínua

O coeficiente multiplicador da flecha imediata foi desenvolvido considerando a situação de lajes pré-moldadas biapoiadas. E assim, procurou-se verificar a possibilidade de extrapolar as expressões para o caso de lajes contínuas. Para isso, realizou-se a análise das lajes LT12, LT16, LT20 e LT25 utilizadas para a determinação do coeficiente $\alpha_{U,T}$, totalizando 25 casos, conforme apresentadas na tabela 5.29. No entanto, essas lajes foram analisadas como lajes contínuas formadas por dois tramos de mesmo comprimento.

As lajes contínuas foram analisadas mantendo as características e considerações feitas anteriormente para o caso biapoiado. A única distinção foi a consideração de uma armadura de continuidade composta por 4 ϕ 5mm, 4 ϕ 6mm, 5 ϕ 6mm e 6 ϕ 6mm, respectivamente, para as lajes LT12, LT16, LT20 e LT25. Essa armadura de continuidade adotada corresponde a uma armadura mínima de flexão para controle de fissuração no apoio intermediário.

TABELA 5.29 – Casos analisados para o caso de lajes contínuas

laje	ℓ (m)	armadura adicional $A_{s,adic}$ (cm ²)		
		q (kN/m ²)		
		2,0	4,0	6,0
LT12	4,5	1,50		
	4,0	0,90		
	3,5	0,60	1,50	
	3,0	0,40	0,80	1,50
LT16	6,0	1,50		
	5,0	1,00	2,35	
	4,0	0,40	1,00	1,50
LT20	7,0	2,35		
	6,0	1,20	2,35	
	5,0	0,60	1,50	2,35
LT25	8,5	2,35		
	7,5	1,60	3,68	
	6,5	1,00	2,35	3,68

Apresentam-se na figura 5.32 as relações entre os coeficientes multiplicadores para as lajes continua e biapoiada obtidas para os casos analisados.

Pela figura pode-se notar que ocorreu uma diferença elevada entre os coeficientes, sendo que o coeficiente multiplicador para a laje contínua chegou a ser mais que três vezes o valor do coeficiente para a laje biapoiada correspondente.

A explicação para essa diferença se deve ao fato de que o carregamento atuante nas lajes, que foi obtido considerando a combinação quase permanente das ações, leva as lajes biapoiadas a uma configuração, relativa à fissuração, diferente das lajes contínuas.

Isso pôde ser comprovado quando as lajes contínuas foram submetidas a um carregamento considerando a combinação rara de ações. Para essa nova situação o nível de fissuração das lajes contínuas foi maior e as relações entre os coeficientes mudaram drasticamente comparadas com a situação anterior, como pode ser visto na figura 5.33. Por essa figura pode-se notar que os coeficientes multiplicadores para a laje contínua ficaram em torno de 80% dos valores dos coeficientes para a laje biapoiada correspondente.

Os casos foram ainda analisados aplicando-se um carregamento correspondente à combinação rara de ações e em seguida retirando-o até atingir a combinação quase permanente. Os resultados desta análise estão apresentados na figura 5.34, e como se pode verificar, os resultados foram diferentes, mas próximos dos resultados obtidos considerando combinação rara de ações.

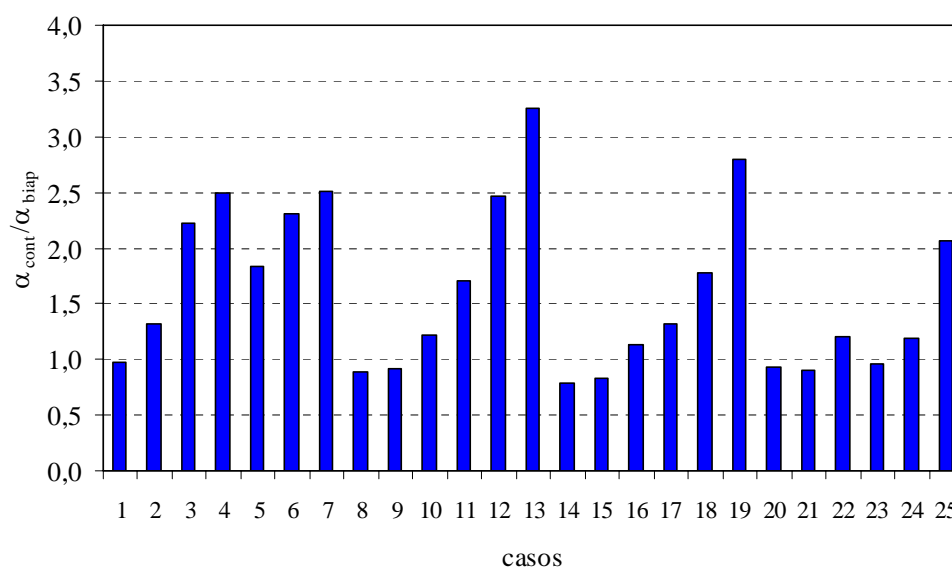


FIGURA 5.32 – Relação entre os coeficientes multiplicadores (contínua e biapoiada) – condição 1

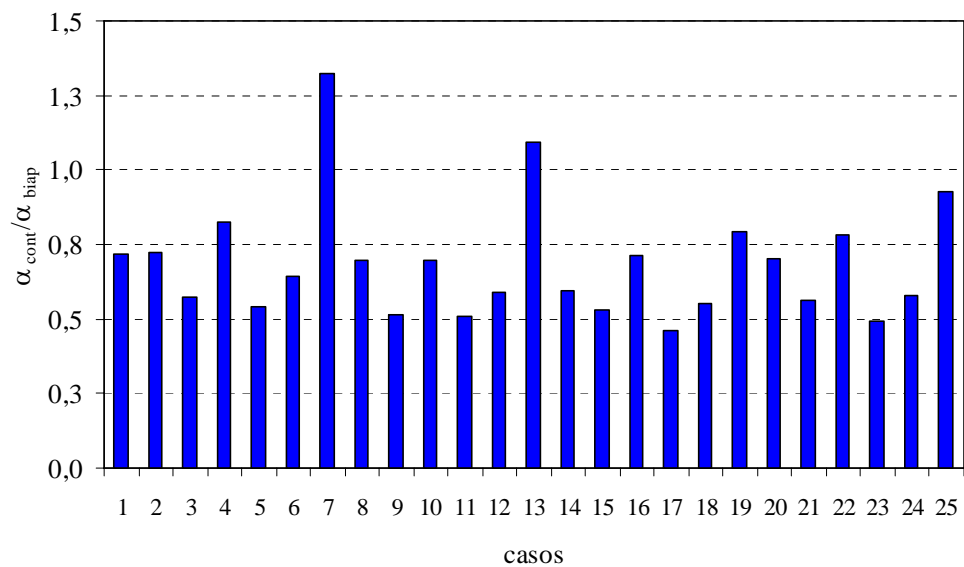


FIGURA 5.33 – Relação entre os coeficientes multiplicadores (contínua e biopoiada) – condição 2

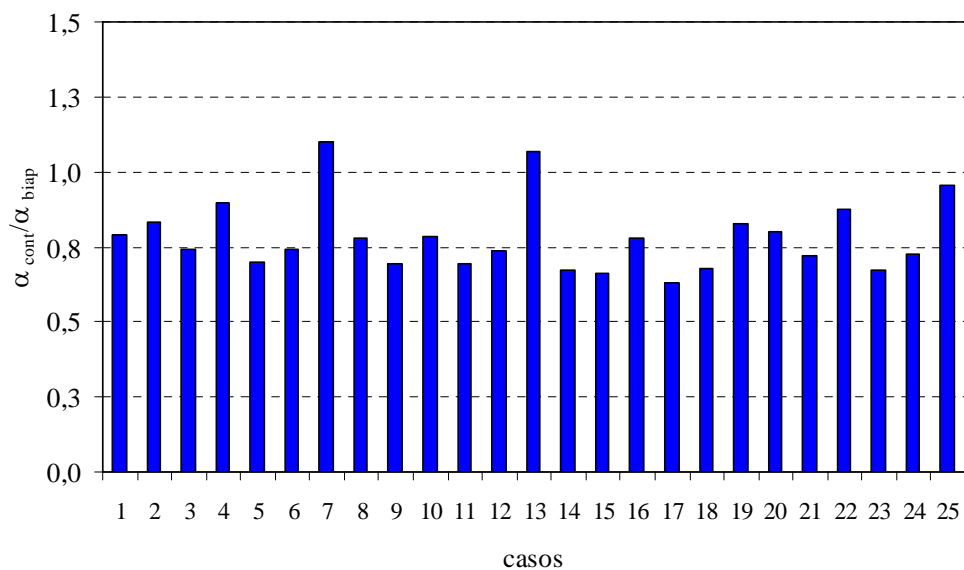


FIGURA 5.34 – Relação entre os coeficientes multiplicadores (contínua e biopoiada) – condição 3

Portanto, o que se pode concluir é que as expressões obtidas para as lajes biapoiadas podem ser utilizadas para as lajes contínuas desde que estas apresentem um estado de fissuração compatível com o ocorrido com as lajes biapoiadas.

5.6 Exemplos de cálculo

A seguir, são apresentados exemplos de determinação do coeficiente multiplicador da flecha imediata de lajes pré-moldadas formadas por vigotas com armadura treliçada, utilizando as expressões propostas nos itens anteriores.

Os cálculos do coeficiente multiplicador foram realizados considerando três casos de lajes com dimensões do vão de 3,2 m (vão pequeno), 4,4 m (vão médio) e 6,6 m (vão grande).

5.6.1 Laje com vão pequeno

Para este caso foi considerada laje de 3,2 m de vão com altura total de 12 cm e 49 cm de distância entre nervuras, conforme figura 5.35.

Para a determinação do peso próprio da laje foi considerado concreto com massa específica igual a 2500 kg/m^3 e material de enchimento composto por blocos de poliestireno expandido (EPS) com massa específica igual a 15 kg/m^3 , resultado em peso próprio da laje de $0,697 \text{ kN/m}$.

Além da atuação de uma carga permanente referente ao revestimento de $0,5 \text{ kN/m}^2$, foi considerada ainda três valores de carga de utilização de $2,0 \text{ kN/m}^2$, $3,5 \text{ kN/m}^2$ e $5,0 \text{ kN/m}^2$, necessitando a utilização de uma armadura adicional composta, respectivamente, por 2 barras de 5 mm de diâmetro, 3 barras de 6,3 mm de diâmetro e 3 barras de 8 mm de diâmetro.

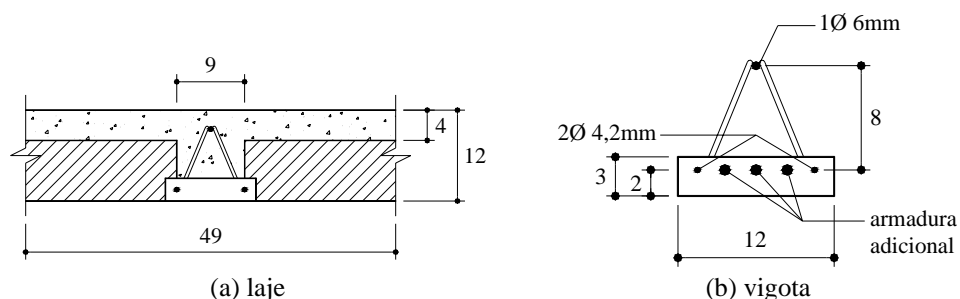


FIGURA 5.35 – Seção transversal da laje com vão pequeno (dimensões em cm)

Foi considerada ainda umidade relativa média de 60% e temperatura média de 30°C .

Utilizando combinação quase permanente das ações, o carregamento atuante na laje, assim como os demais parâmetros considerados para o cálculo dos coeficientes multiplicadores estão apresentados na tabela 5.30.

TABELA 5.30 – Parâmetros considerados para a laje com vão pequeno

q (kN/m ²)	A_s (cm ²)	h (m)	p (kN/m)	ℓ (m)	U (%)	T (°C)
2,0	0,675	0,12	1,236	3,2	60	30
3,5	1,21	0,12	1,457	3,2	60	30
5,0	1,775	0,12	1,677	3,2	60	30

- **Cálculo determinístico**

Para a determinação do coeficiente multiplicador, calcula-se inicialmente o coeficiente κ , através da expressão:

$$\kappa = \frac{A_s \cdot h^{2,05}}{p^{1,5} \cdot \ell^3} \cdot 10^3$$

E a partir de κ , tem-se:

$$\alpha_{\text{básico}} = 3,73 \cdot \kappa + 0,18$$

O valor do coeficiente $\alpha_{U,T}$ é dado por:

$$\alpha_{U,T} = 0,016 \cdot T + 4,9 \cdot 10^{-3} \cdot U - 2,7 \cdot 10^{-5} \cdot T \cdot U - \\ - 1,03 \cdot 10^{-4} \cdot T^2 - 1,32 \cdot 10^{-4} \cdot U^2 + 0,90$$

E, portanto, o coeficiente multiplicador α é determinado por:

$$\alpha = \alpha_{\text{básico}} \cdot \alpha_{U,T}$$

Os coeficientes multiplicadores obtidos com as expressões mostradas acima estão apresentados na tabela 5.31.

TABELA 5.31 – Resultados obtidos para a laje com vão pequeno (análise determinística)

q (kN/m ²)	κ	$\alpha_{\text{básico}}$	$\alpha_{U,T}$	α
2,0	0,194	0,90	1,06	0,95
3,5	0,272	1,19	1,06	1,26
5,0	0,323	1,38	1,06	1,46

- **Cálculo probabilístico**

O valor do coeficiente $\alpha_{U,T}$ considerando 85% de probabilidade é determinado através da seguinte expressão:

$$\alpha_{U,T} = 0,029.T - 7,82.10^{-3}.U - 2,45.10^{-4}.T.U + 4,29.10^{-5}.T^2 + 1,30.10^{-5}.U^2 + 1,54$$

Portanto, o coeficiente multiplicador α é dado por:

$$\alpha = \alpha_{\text{básico}} \cdot \alpha_{U,T}$$

E assim, os coeficientes multiplicadores determinados através das expressões anteriores estão mostrados na tabela 5.32.

TABELA 5.32 – Resultados obtidos para a laje com vão pequeno (análise probabilística)

q (kN/m ²)	κ	$\alpha_{\text{básico}}$	$\alpha_{U,T}$	α
2,0	0,194	0,90	1,59	1,43
3,5	0,272	1,19	1,59	1,89
5,0	0,323	1,38	1,59	2,19

5.6.2 Laje com vão médio

Para este caso foi considerada laje de 4,4 m de vão com altura total de 16 cm e 49 cm de distância entre nervuras, conforme figura 5.36.

O peso próprio da laje foi de 0,790 kN/m, com a consideração de concreto com massa específica igual a 2500 kg/m³ e material de enchimento composto por blocos de EPS com massa específica igual a 15 kg/m³.

Além da atuação de uma carga permanente referente ao revestimento de $0,5 \text{ kN/m}^2$, foi considerada ainda três valores de carga de utilização de $2,0 \text{ kN/m}^2$, $3,5 \text{ kN/m}^2$ e $5,0 \text{ kN/m}^2$, necessitando a utilização de uma armadura adicional composta, respectivamente, por 2 barras de 6 mm de diâmetro, 3 barras de 8 mm de diâmetro e 3 barras de 10 mm de diâmetro.

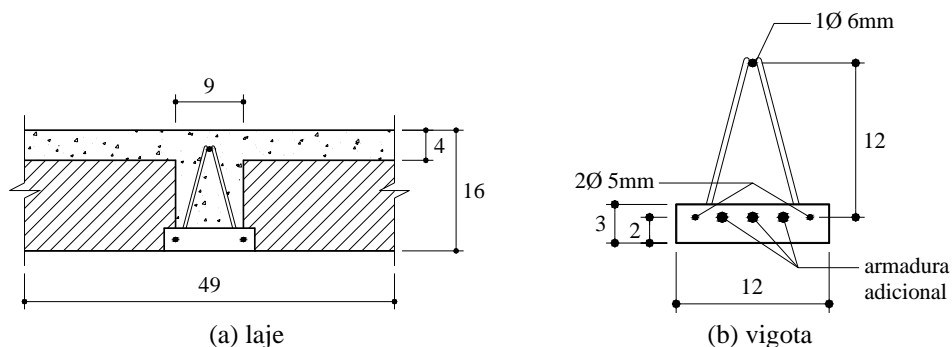


FIGURA 5.36 – Seção transversal da laje com vão médio (dimensões em cm)

Foi considerada ainda umidade relativa média de 50% e temperatura média de 25°C .

E assim, os parâmetros considerados no cálculo do coeficiente multiplicador estão apresentados na tabela 5.33. O carregamento atuante na laje foi determinado considerando combinação quase permanente das ações.

TABELA 5.33 – Parâmetros considerados para a laje com vão médio

q (kN/m^2)	A_s (cm^2)	h (m)	p (kN/m)	ℓ (m)	U (%)	T ($^\circ \text{C}$)
2,0	0,955	0,16	1,329	4,4	50	25
3,5	1,89	0,16	1,550	4,4	50	25
5,0	2,74	0,16	1,770	4,4	50	25

• Cálculo determinístico

Os coeficientes multiplicadores determinados através das expressões obtidas da análise determinística estão apresentados na tabela 5.34.

TABELA 5.34 – Resultados obtidos para a laje com vão médio (análise determinística)

q (kN/m ²)	κ	$\alpha_{\text{básico}}$	$\alpha_{U,T}$	α
2,0	0,171	0,82	1,12	0,92
3,5	0,269	1,18	1,12	1,32
5,0	0,319	1,37	1,12	1,53

- **Cálculo probabilístico**

Os coeficientes multiplicadores determinados através das expressões obtidas da análise probabilística estão apresentados na tabela 5.35.

TABELA 5.35 – Resultados obtidos para a laje com vão médio (análise probabilística)

q (kN/m ²)	κ	$\alpha_{\text{básico}}$	$\alpha_{U,T}$	α
2,0	0,171	0,82	1,63	1,34
3,5	0,269	1,18	1,63	1,92
5,0	0,319	1,37	1,63	2,23

5.6.3 Laje com vão grande

Para este caso foi considerada laje de 6,6 m de vão com altura total de 20 cm e 49 cm de distância entre nervuras, conforme figura 5.37.

Para a determinação do peso próprio da laje foi considerado concreto com massa específica igual a 2500 kg/m³ e material de enchimento composto por blocos de poliestireno expandido (EPS) com massa específica igual a 15 kg/m³, resultado em peso próprio da laje de 0,882 kN/m.

Além da atuação de uma carga permanente referente ao revestimento de 0,5 kN/m², foi considerada ainda carga de utilização de 2,0 kN/m², necessitando a utilização de uma armadura adicional composta por 3 barras de 10 mm de diâmetro. O coeficiente multiplicador não foi determinado considerando valores de carga de utilização maiores, como realizado nos exemplos anteriores, pois esta laje não possui capacidade para suportar cargas maiores para o vão em questão.

Foi considerada ainda umidade relativa média de 70% e temperatura média de 20 °C.

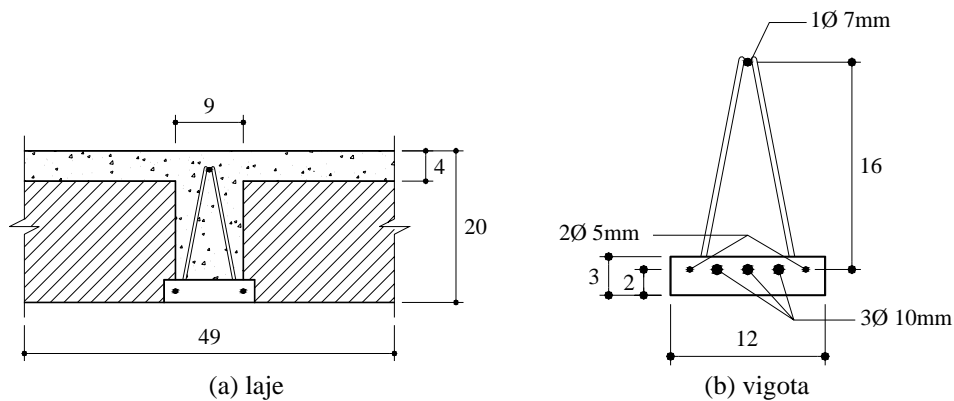


FIGURA 5.37 – Seção transversal da laje com vão grande (dimensões em cm)

Utilizando combinação quase permanente das ações, o carregamento atuante na laje considerado será:

$$p = g + 0,3.q \Rightarrow p = (0,882 + 0,245) + 0,3.0,98 \Rightarrow p = 1,421 \text{ kN/m}$$

E assim, têm-se:

$$A_s = 2,74 \text{ cm}^2$$

$$h = 0,20 \text{ m}$$

$$p = 1,421 \text{ kN/m}$$

$$\ell = 6,6 \text{ m}$$

$$U = 70 \%$$

$$T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

• Cálculo determinístico

Para a determinação do coeficiente multiplicador, calcula-se inicialmente o coeficiente κ , através da expressão:

$$\kappa = \frac{A_s \cdot h^{2,05}}{p^{1,5} \cdot \ell^3} \cdot 10^3 \Rightarrow \kappa = 0,208$$

Com isso, tem-se:

$$\alpha_{\text{básico}} = 3,73 \cdot \kappa + 0,18 \Rightarrow \alpha_{\text{básico}} = 0,96$$

O valor do coeficiente $\alpha_{U,T}$ é dado por:

$$\alpha_{U,T} = 0,016.T + 4,9.10^{-3}.U - 2,7.10^{-5}.T.U - \\ - 1,03.10^{-4}.T^2 - 1,32.10^{-4}.U^2 + 0,90 \Rightarrow \alpha_{U,T} = 0,84$$

E, portanto, o coeficiente multiplicador α é determinado por:

$$\alpha = \alpha_{\text{básico}} \cdot \alpha_{U,T} \Rightarrow \alpha = 0,81$$

- **Cálculo probabilístico**

O valor do coeficiente $\alpha_{U,T}$ considerando 85% de probabilidade é determinado através da seguinte expressão:

$$\alpha_{U,T} = 0,029.T - 7,82.10^{-3}.U - 2,45.10^{-4}.T.U + \\ + 4,29.10^{-5}.T^2 + 1,30.10^{-5}.U^2 + 1,54 \Rightarrow \alpha_{U,T} = 1,31$$

Portanto, o coeficiente multiplicador α é dado por:

$$\alpha = \alpha_{\text{básico}} \cdot \alpha_{U,T} \Rightarrow \alpha = 1,26$$

5.7 Análise dos resultados e comentários

Procurou-se com este capítulo realizar a análise probabilística das flechas diferidas de lajes pré-moldadas formadas por vigotas com armação treliçada, visando fornecer indicações de projeto através da proposta de um coeficiente multiplicador das flechas imediatas para avaliação das flechas diferidas. Esta análise foi realizada utilizando o programa computacional CONSNOU, em conjunto com análise probabilística, através do método de amostragem por hipercubo latino.

Inicialmente foi realizada uma análise preliminar para avaliar quais os parâmetros envolvidos influenciaria mais significativamente o coeficiente multiplicador das flechas imediatas. Por essa análise preliminar, pôde-se verificar que tanto o carregamento aplicado quanto a altura e o vão da laje, assim como a

armadura utilizada são parâmetros dependentes entre si, ou seja, tais parâmetros não podem ser analisados isoladamente, caso contrário, pode originar casos com coeficientes multiplicadores elevados, mas de pouco sentido prático. E assim, levando isso em consideração, pôde-se concluir que os parâmetros que mais influenciam o coeficiente multiplicador das flechas imediatas são a umidade relativa e a temperatura ambiente.

Em seguida, foi determinado o coeficiente multiplicador α através do produto de um coeficiente multiplicador básico $\alpha_{\text{básico}}$ e do coeficiente $\alpha_{U,T}$, que considera a influência da umidade relativa e temperatura ambiente. O coeficiente $\alpha_{U,T}$ foi determinado através de uma análise determinística e outra probabilística.

O coeficiente multiplicador básico $\alpha_{\text{básico}}$ é determinado a partir de um coeficiente denominado κ que é função da armadura utilizada, do carregamento aplicado e da altura e do vão da laje. O coeficiente κ mostra que o coeficiente multiplicador aumenta com o aumento da taxa de armadura e da altura da laje e diminui com o aumento do carregamento aplicado e do vão da laje.

A partir dos resultados da análise probabilística, pôde-se verificar ainda quais os parâmetros afetam mais significativamente o valor do coeficiente multiplicador através do coeficiente de regressão padronizado e coeficiente de correlação parcial. Através desses coeficientes, pôde-se verificar que as incertezas nos modelos da fluência e retração do concreto da capa estrutural e, como já era esperado, os fatores ambientais (umidade relativa e temperatura ambiente) foram os parâmetros que tiveram maior influência no coeficiente multiplicador α .

Como o coeficiente multiplicador da flecha imediata foi desenvolvido considerando a situação de lajes pré-moldadas biapoiadas. Procurou-se verificar a possibilidade de extrapolar as expressões para o caso de lajes contínuas. E através da análise de vários casos de lajes, pôde-se concluir que as expressões obtidas para as lajes biapoiadas podem ser utilizadas para as lajes contínuas desde que estas apresentem um estado de fissuração compatível com o ocorrido com as lajes biapoiadas.

Foram realizados exemplos de determinação do coeficiente multiplicador da flecha imediata de lajes pré-moldadas formadas por vigotas com armação

treliçada. Nos exemplos, foram consideradas lajes com 12 cm, 16 cm e 20 cm de altura, obtendo-se para o coeficiente multiplicador os valores apresentados na tabela 5.36. Nessa tabela, apresenta-se também o fator α_f recomendado pela NBR 6118 (2003), considerando idade de aplicação da carga de 21 dias.

O aumento entre os valores determinístico e probabilístico do coeficiente multiplicador variou entre 45,5% para a laje LT16 com carga de utilização de 3,5 kN/m² e 55,6% para a laje LT20, mostrando a importância da realização da análise probabilística.

Quando comparado com o fator α_f , o coeficiente multiplicador da análise probabilística aumentou em até 59,3%. Na realidade, se for considerado, por exemplo, umidade relativa de 50% e temperatura ambiente de 30°C, o coeficiente $\alpha_{U,T}$ com 85% de probabilidade é de 1,72. E como o maior coeficiente multiplicador básico $\alpha_{básico}$ encontrado para os casos analisados foi de 2,04, significa que o coeficiente multiplicador seria 3,51. Portanto, o valor do coeficiente multiplicador da flecha imediata de lajes pré-moldadas considerando análise probabilística com 85% de probabilidade pode alcançar valores muito além do fator α_f recomendado pela NBR 6118 (2003) para o caso de vigas de concreto armado.

TABELA 5.36 – Coeficientes multiplicadores obtidos para os exemplos realizados

laje	q (kN/m ²)	α análise determinística	α análise probabilística	α_f (NBR 6118)
LT12	2,0	0,95	1,43	1,40
	3,5	1,26	1,89	1,40
	5,0	1,46	2,19	1,40
LT16	2,0	0,92	1,34	1,40
	3,5	1,32	1,92	1,40
	5,0	1,53	2,23	1,40
LT20	2,0	0,81	1,26	1,40

CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

6

CAPÍTULO

O avanço computacional ocorrido nas últimas décadas permitiu realizar, de forma eficiente, a análise dos mais complexos problemas de engenharia. Cada vez mais é comum a utilização de modelos que consideram a não linearidade física dos materiais, fissuração, fluência e retração do concreto, comportamento elasto-plástico da armadura, relaxação da armadura de protensão, além da influência do processo construtivo no comportamento da estrutura, tais como, a mudança das características resistentes da seção, incorporação de novas partes à estrutura, ou ainda, variação nas condições de contorno devido, por exemplo, aos processos de cimbramento e descimbramento.

Apesar de todo esse avanço, a análise estrutural normalmente é realizada considerando os parâmetros do problema com base em valores determinísticos, ou seja, não são consideradas as incertezas causadas pela variabilidade estatística dos parâmetros. No entanto, tais incertezas deveriam ser consideradas a fim de minimizar o risco de ocorrência de efeitos significativos para a segurança estrutural, ou seja, a análise estrutural deveria ser realizada considerando os parâmetros como variáveis aleatórias que possuem um determinado valor médio, uma certa medida de dispersão (desvio padrão) e uma distribuição de probabilidade. E assim, a resposta da estrutura (deslocamento, reação de apoio, tensão no concreto, por exemplo) também seria uma variável aleatória, que pode ser caracterizada por um valor esperado, desvio padrão e uma distribuição de probabilidade. E a partir da análise da distribuição de probabilidade da resposta, as estruturas seriam projetadas para que certos efeitos extremos, tal como deslocamento máximo ou tensão máxima, tivessem pequena probabilidade especificada de serem ultrapassados.

Neste contexto, o objetivo principal deste trabalho foi apresentar um modelo para análise probabilística do comportamento de estruturas de concreto sujeitas aos fenômenos de fluência e retração do concreto. Para isso, a análise probabilística foi realizada em conjunto com análise numérica.

Na análise numérica foi utilizado o programa computacional denominado CONSNOU desenvolvido em linguagem FORTRAN pelo Professor Antonio R. Marí da Universidade Politécnica da Catalunha. Este programa computacional, baseado no método dos elementos finitos, divide a seção transversal dos elementos em número discreto de filamentos de concreto e aço e a integração das áreas dos filamentos é feita considerando o comportamento não-linear e dependente do tempo dos materiais, assim como o processo evolutivo da construção. O programa computacional foi avaliado através da comparação com resultados de ensaios de curta duração de lajes contínuas, ensaios de longa duração de lajes formadas por vigotas pré-moldadas com armação treliçada e ensaios de longa duração de vigas reforçadas à flexão no bordo comprimido. Os resultados obtidos da análise numérica tiveram boa concordância com os resultados experimentais.

Para determinar o efeito das incertezas dos parâmetros foi realizada uma análise probabilística, através do método de simulações de Monte Carlo. Inicialmente, gera-se um grupo de valores (amostragem) das variáveis aleatórias de acordo com suas correspondentes distribuição de probabilidade, utilizando o método de amostragem por hipercubo latino. Então, aplica-se a análise numérica para cada uma das amostras geradas. Cada análise, feita desta forma, chama-se de uma simulação. Após a realização de N simulações, tem-se à disposição um conjunto de dados representando uma resposta da estrutura (deslocamento, reação de apoio, tensão no concreto), que também pode ser tratado como uma variável aleatória, da qual se conhece uma amostra de N componentes. Mediante uma análise estatística desta amostra, torna-se possível caracterizar os principais momentos e o tipo de distribuição de probabilidade desta variável aleatória.

O modelo apresentado pode ser aplicado para a análise probabilística do comportamento ao longo do tempo das estruturas de concreto em geral, no entanto, foi aplicado neste trabalho para a análise das flechas diferidas de lajes pré-moldadas formadas por vigotas com armação treliçada. Com esta análise, pôde-se propor um

coeficiente multiplicador das flechas imediatas para a avaliação das flechas diferidas no tempo.

Inicialmente foi realizada uma análise preliminar para avaliar quais os parâmetros envolvidos influenciaria mais significativamente o coeficiente multiplicador das flechas imediatas. Por essa análise preliminar, pôde-se verificar que tanto o carregamento aplicado quanto a altura e o vão da laje, assim como a armadura utilizada são parâmetros dependentes entre si, ou seja, tais parâmetros não podem ser analisados isoladamente, caso contrário, pode originar casos com coeficientes multiplicadores elevados, mas de pouco sentido prático. E assim, levando isso em consideração, concluiu-se que os parâmetros que mais influenciaram o coeficiente multiplicador das flechas imediatas foram a umidade relativa e a temperatura ambiente.

Em seguida, o coeficiente multiplicador foi determinado através do produto de um coeficiente multiplicador básico $\alpha_{\text{básico}}$ e do coeficiente $\alpha_{U,T}$, que considera a influência da umidade relativa e temperatura ambiente.

$$\alpha = \alpha_{\text{básico}} \cdot \alpha_{U,T} \quad 6.1$$

O coeficiente multiplicador básico $\alpha_{\text{básico}}$ foi determinado através da análise de lajes pré-moldadas com 12 cm, 16 cm, 20 cm, 25 cm e 30 cm de altura, variando a carga acidental e considerando-se vãos e armaduras adicionais compatíveis. Os demais parâmetros foram mantidos constantes, inclusive a umidade relativa (60%) e a temperatura ambiente (25°C). Com isso, obteve-se o coeficiente multiplicador básico $\alpha_{\text{básico}}$ através da seguinte expressão:

$$\alpha_{\text{básico}} = 3,73 \cdot \kappa + 0,18 \quad 6.2$$

Com

$$\kappa = \frac{A_s \cdot h^{2,05}}{p^{1,5} \cdot \ell^3} \cdot 10^3 \quad 6.3$$

onde:

A_s – armadura [cm²];

h – altura da laje [m];

P – carregamento aplicado [kN/m];

ℓ – vão da laje [m].

Pelo coeficiente κ pode-se concluir que o coeficiente multiplicador aumenta com o aumento da taxa de armadura e da altura da laje e diminui com o aumento do carregamento aplicado e do vão da laje.

As expressões desenvolvidas se aplicam às lajes formadas por vigotas com armação treliçada comumente utilizadas na construção civil. Isso equivale a lajes com valores do coeficiente κ variando entre 0,10 e 0,55.

Para averiguar a influência da umidade relativa e temperatura ambiente no coeficiente multiplicador foram analisados alguns casos variando a umidade relativa em 40%, 60%, 80% e a temperatura ambiente em 15°C, 25°C, 35°C. E a influência desses parâmetros foi considerada através do coeficiente $\alpha_{U,T}$. Este coeficiente foi determinado dividindo o coeficiente multiplicador obtido em cada caso pelo resultado obtido para o caso com as mesmas características, mas com umidade relativa de 60% e temperatura ambiente de 25°C. O coeficiente $\alpha_{U,T}$ foi determinado através de uma análise determinística e outra probabilística.

- **análise determinística:**

O valor do coeficiente $\alpha_{U,T}$ obtido da análise determinística é dado por:

$$\alpha_{U,T} = 0,016.T + 4,9.10^{-3}.U - 2,7.10^{-5}.T.U - 1,03.10^{-4}.T^2 - 1,32.10^{-4}.U^2 + 0,90 \quad 6.4$$

ou

$$\alpha_{U,T} = 8,8.10^{-3}.T - 0,012.U + 1,43 \quad 6.5$$

onde:

U – umidade relativa do ambiente [%];

T – temperatura do ambiente [°C].

- **análise probabilística:**

E o coeficiente $\alpha_{U,T}$ obtido da análise probabilística, com 85% de probabilidade é dado por:

$$\alpha_{U,T} = 0,029.T - 7,82.10^{-3}.U - 2,45.10^{-4}.T.U + 4,29.10^{-5}.T^2 + 1,30.10^{-5}.U^2 + 1,54 \quad 6.6$$

ou

$$\alpha_{U,T} = 0,016.T - 0,012.U + 1,84 \quad 6.7$$

onde:

U – umidade relativa média do ambiente [%];

T – temperatura média do ambiente [°C].

O coeficiente $\alpha_{U,T}$ foi determinado considerando 95%, 90% e 85% de probabilidade. No entanto, na falta de indicações sobre o assunto e considerando que o coeficiente $\alpha_{U,T}$ com 95% de probabilidade parece ser muito restritivo, foi adotado aqui o coeficiente $\alpha_{U,T}$ com 85% de probabilidade. No entanto, recomenda-se a realização de um estudo mais aprofundado para averiguar qual seria o coeficiente $\alpha_{U,T}$ mais satisfatório.

Sugere-se ainda para a realização de pesquisas futuras a aplicação do modelo apresentado na análise probabilística do comportamento dos mais diversos tipos de estruturas de concreto, como por exemplo, a análise ao longo do tempo dos deslocamentos e redistribuição de momentos fletores de elementos pré-moldados em que a continuidade estrutural é estabelecida no local.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALWIS, W.A.M.; OLORUNNIWO, A.; ANG, K.K. (1994). Long-term deflection of RC beams. *Journal of Structural Engineering*, v.120, n.7, p.2220-6.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (1992), ACI Committee 209, Subcommittee II. *Prediction of Creep, Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures*. Detroit. (Report ACI 209R-92).
- ANG, A.H-S; TANG, W.H. (1975). *Probability concepts in engineering planning and design. Volume I: basic principles*. New York, John Wiley & Sons.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. (2002). *NBR 14859-1 – Laje pré-fabricada - Requisitos – Parte 1: Lajes unidirecionais*. Rio de Janeiro.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. (2002). *NBR 14859-2 – Laje pré-fabricada - Requisitos – Parte 1: Lajes bidirecionais*. Rio de Janeiro.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. (2002). *NBR 14862 – Armações treliçadas eletrossoldadas - Requisitos*. Rio de Janeiro.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. (2003). *NBR 6118 – Projeto e execução de obras de concreto armado*. Rio de Janeiro.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. (2003). *NBR 8681 – Ações e segurança nas estruturas - Procedimentos*. Rio de Janeiro.
- AUGUSTI, G.; BARATTA, P.; CASCIATI, F. (1984). *Probabilistic methods in structural engineering*. London, Chapman and Hall.
- BAZANT, Z.P. (1972). Prediction of concrete creep effects using age-adjusted effective modulus method. *Journal of American Concrete Institute*, v.69, n.4, p.212-7.

- BAZANT, Z.P. (1988). *Mathematical modeling of creep and shrinkage of concrete*. New York, John Wiley & Sons.
- BAZANT, Z.P.; BAWEJA, S. (1995a). Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures – model B3. *Materials and Structures*, v.28, n.180, p.357-65.
- BAZANT, Z.P.; BAWEJA, S. (1995b). Justification and refinements of Model B3 for concrete creep and shrinkage 1. Statistics and sensitivity. *Materials and Structures*, v.28, n.181, p.415-430.
- BAZANT, Z.P.; CHERN, J.C. (1982). Comment on the use of ross'hyperbola and recent comparisons of various practical creep prediction models. *Cement and Concrete Research*, v.12, n.4, p.527-32.
- BAZANT, Z.P.; LIU, K.L. (1985). Random creep and shrinkage in structures: sampling. *Journal of Structural Engineering*, v.111, n.5, p.1113-34.
- BAZANT, Z.P.; OH, B.H. (1984). Deformation of progressively cracking reinforced concrete beams. *Journal of American Concrete Institute*, v.81, n.3, p.268-78.
- BAZANT, Z.P.; PANULA, L. (1980). Creep and shrinkage characterization fore characterization for prestressed concrete structures. *Journal of the Prestressed Concrete Institute*, v.25, n.3, p.86-122.
- BAZANT, Z.P. (1982). Mathematical models for creep and shrinkage of concrete. In: BAZANT, Z.P.; WITTMANN, F.H., eds. *Creep and shrinkage in concrete structures*. New York, John Wiley & Sons. Cap. 7, p.163-256.
- BAZANT, Z.P.; WU, S.T. (1973). Dirichlet series creep function for aging concrete. *Journal of Engineering Mechanics Division*, v.99, n.2, p.367-87.
- BRADFORD, M.A.; GILBERT, R.I. (1992). Composite beams with partial interaction under sustained loads. *Journal of Structural Engineering*, v.118, n.7, p.1871-83.
- BRANSON, D.E. (1968). Design procedures for computing deflections. *Journal of American Concrete Institute*, v.65, n.9, p.730-42.
- BRATLEY, P.; FOX, B.L.; SCHRAGE, L.E. (1987). *Guide to simulation*. New York, Springer-Verlag.

- CAROL, I.; MURCIA, J. (1989). Nonlinear time-dependent analysis of planar frames using an “exact” formulation: I – theory , II – computer implementation for RC structures and examples. *Computers and Structures*, v.33, n.1, p.79-102.
- CARREIRA, D.J.; CHU, K.H. (1986). Stress-strain relationship of reinforced concrete in tension. *Journal of American Concrete Institute*, v.83, n.1, p.21-8.
- CERVENKA, V. (1985). Constitutive model for cracked reinforced concrete. *Journal of American Concrete Institute*, v.82, n.6, p.877-82.
- COMITE EURO-INTERNACIONAL DU BETON (1984). Structural effects of time-dependent behaviour of concrete. *Bulletin d’Information*, n. 142/142 Bis.
- COMITE EURO-INTERNACIONAL DU BETON (1991). CEB-FIP model code 1990. *Bulletin d’Information*, n. 203.
- COMITE EURO-INTERNACIONAL DU BETON (1990). Evaluation of the time dependent behavior of concrete. *Bulletin d’Information*, n. 199.
- CRUZ, P.J.S.; MARÍ, A.R.; ROCA, P. (1998). Nonlinear time-dependent analysis of segmentally constructed structures. *Journal of Structural Engineering*, v.124, n.3, p.278-87.
- DEZI, L.; TARANTINO, A.M. (1991). Time-dependent analysis of concrete structures with a variable structural system. *ACI Materials Journal*, v.88, n.3, p.320-4.
- DEZI, L.; TARANTINO, A. M. (1993). Creep in composite continuous beams. I: theoretical treatment. *Journal of Structural Engineering*, v.119, n.7, p.2095-111.
- DILGER, W.H. (1982a). Creep analysis of prestressed concrete member using creep-transformed section properties. *Journal of prestressed concrete institute*, v.27, n.1, p.98-117.
- DILGER, W.H. (1982b). Methods of structural creep analysis. In: BAZANT, Z.P.; WITTMANN, F.H., eds. *Creep and shrinkage in concrete structures*. New York, John Wiley & Sons. Cap. 9, p.305-340.
- DROPPA Jr., A. (1999). *Análise estrutural de lajes formadas por elementos pré-moldados tipo vigota com armação treliçada*. 177p. + apêndice. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- EL DEBS, M.K. (2000). *Concreto pré-moldado: fundamentos e Aplicações*. São Carlos. Projeto REENGE. EESC – USP.

- ESPAÑA. Ministério de Fomento (1997). *EF-96 - Instrucción para el proyecto y la ejecución de forjados unidireccionales de hormigón armado o pretensado*.
- ESPION, B.; HALLEUX, P. (1990). Long-term deflections of reinforced concrete beams: reconsideration of their variability. *ACI Structural Journal*, v.87, n.2, p.232-6.
- GARDNER, W. (1986). *Introduction to random processes*. New York, McGraw-Hill, Inc.
- GHALI, A.; ELBADRY, M. (1989). Serviceability design of continuous prestressed concrete structures. *PCI Journal*, v.34, n.1, p.54-91.
- GHALI, A.; FAVRE, R. (1986). *Concrete structures. Stresses and Deformations*. London, Chapman and Hall.
- GILBERT, R.I. (1989). Time-dependent analysis of composite steel-concrete sections. *Journal of Structural Engineering*, v.115, n.11, p.2687-705.
- GILBERT, R.I.; BRADFORD, M.A. (1995). Time-dependent behavior of continuous composite beams at service loads. *Journal of Structural Engineering*, v.121, n.2, p.319-27.
- HASPARYK, N.P.; LOPES, A.N.M.; ANDRADE, M.A.S.; SANTOS, S.B. (2005). Deformação por retração e fluência. In: ISAIA, G.C., ed. *Concreto: ensino, pesquisa e realizações*. São Paulo, IBRACON. Cap. 22, p.655-685.
- HERKENHOFF, L. (1994). *Análisis y criterios para proyecto de puentes continuos contruidos a partir de elementos prefabricados de hormigón armado y pretensado*. Barcelona. 208p + anexo. Tese (Doutorado) – Universidade Politècnica da Catalunya.
- HSU, T.T.C.; ZHANG, L.X. (1996). Tension-stiffening in reinforced concrete membrane elements. *ACI Structural Journal*, v.93, n.1, p.108-15.
- HU, H.T.; SCHNOBRICH, W.C. (1990). Nonlinear analysis of cracked reinforced concrete. *ACI Structural Journal*, v.87, n.2, p.199-207.
- JENDELE, L.; PHILLIPS, D.V. (1992). Finite element software for creep and shrinkage in concrete. *Computers and Structures*, v.45, n.1, p.113-26.
- JURKIEWIEZ, B.; DESTREBECQ, J.F.; VERGNE, A. (1999). Incremental analysis of time-dependent effects in composite structures. *Computers and Structures*, v.73, n.1-5, p.425-35.

- KANG, Y.J.; SCORDELIS, A.C. (1980). Nonlinear analysis of prestressed concrete frames. *Journal of Structural Division*, v.106, n.2, p.445-62.
- KENNEDY, W.J.; GENTLE, J.E (1980). *Statistical computing*. New York, Marcel Dekker, INC.
- KNUTH, D.E. (1969). *Seminumerical algorithms*. Vol. 2. London, Addison-Wesley Pub. Co.
- KRISTEK, V.; BAZANT, Z.P. (1985). Shear lag effect and uncertainty in concrete box girder creep. *Journal of Structural Engineering*, v.113, n.3, p.557-74.
- KWAK, H.G.; SEO, Y.J. (2000). Long-term behavior of composite girder bridges. *Computers and Structures*, v.74, n.5, p.583-99.
- LEIBENGOOD, L.D.; DARWIN, D.; DODDS, R.H. (1986). Parameters affecting FE analysis of concrete structures. *Journal of Structural Engineering*, v.112, n.2, p.326-41.
- LEONHARDT, F.; MÖNNING, E. (1978). *Construções de concreto: princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado*. Rio de Janeiro, Interciência. V.1.
- MAGALHÃES, F.L. (2001). *Estudo dos momentos fletores negativos nos apoios de lajes formadas por elementos pré-moldados tipo nervuras com armação treliçada*. São Carlos. 135p. + apêndice. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MAGURA, D.D.; SOZEN, M.A.; SIESS, C.P. (1964). A study of stress relaxation in prestressing reinforcement. *PCI Journal*, v.9, n.2, p.185-92.
- MARÍ, A.R. (2000). Numerical simulation of segmental construction of three dimensional concrete frames. *Journal of Engineering Structures*, v.22, n.6, p.585-96.
- MASSICOTTE, B.; ELWI, A.E.; MCGREGOR, J.G. (1990). Tension-stiffening model of planar of reinforced concrete members. *Journal of Structural Engineering*, v.116, n.11, p.3039-58.
- McKAY, M.D.; BERCKMAN, R.J.; CONOVER, W.H. (1979). A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, v.21, n.2, p.239-45.

- MEHTA, P.K.; MONTEIRO, P.J.M. (1994). *Concreto: estrutura, propriedades e materiais*. São Paulo, Pini.
- NAVRATIL, J.; FLORIAN, A. (1993). Time-dependent analysis of a cable stayed bridge with uncertainties in input parameters. In: INTERNATIONAL RILEM SYMPOSIUM ON CREEP AND SHRINKAGE OF CONCRETE, 5., Barcelona, 1993. *Proceedings*. London, E&FN Spon, p.623-8.
- NEVILLE, A.M. (1997). *Propriedades do concreto*. São Paulo, Pini.
- NEVILLE, A.M.; DILGER, W.H.; BROOKS, J.J. (1983). *Creep of plain and structural concrete*. London, Construction Press-Longman.
- OH, B.H.; YANG, I.H. (2000). Sensitivity analysis of time-dependent behavior in PSC box girder bridges. *Journal of Structural Engineering*, v.126, n.2, p.171-9.
- OWEN, D.R.J.; FIGUEIRAS, J.A.; DAMJANIC, F. (1983). Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.41, n.3, p.323-66.
- RAJASHEKHAR, M.R.; ELLINGWOOD, B.R. (1995). Reliability of reinforced concrete cylindrical shells. *Journal of Structural Engineering*, v.121, n.2, p.336-47.
- RAO, P.; JAYARAMAN, R.; VILAMANANDAM, V.; BABU, S.S. (1994). Predicting creep and shrinkage effects in cracked concrete elements. *Journal of Structural Engineering*, v.120, n.9, p.2784-92.
- REAL, M.V. (2000). *Análise probabilística de estruturas de concreto armado, sob estado plano de tensão, através do método dos elementos finitos*. Porto Alegre. 224p. (Tese de Doutorado) – PPGEC - UFRGS.
- REIS, A.P.A. (2003). *Reforço de vigas de concreto armado submetidas à pré-carregamento e ações de longa duração com aplicação de concretos de alta resistência e concretos com fibras de aço*. São Carlos. 285p + apêndice. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- ROGGE, A.C. (2001). *Estudo experimental da deformação ao longo do tempo de lajes com nervuras pré-moldadas*. São Carlos. Relatório de iniciação científica – Universidade Federal de São Carlos.

- RUSSEL, H.G.; MEYERS, B.L.; DAYE, M.A. (1982). Observations on structures. In: BAZANT, Z.P.; WITTMANN, F.H., eds. *Creep and shrinkage in concrete structures*. New York, John Wiley & Sons. Cap. 10, p.341-358.
- SALIBY, E. (1989). *Repensando a simulação: a amostragem descritiva*. São Paulo, Atlas.
- SALIBY, E.; MOREIRA, F.F.P. (2001). Análise da eficiência dos métodos Quasi-Monte Carlo, Amostragem Descritiva, Hipercubo Latino e Monte Carlo em aplicações de simulação. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 33., Campos do Jordão, 2001. *Anais*. Campos do Jordão, p.585-86.
- SATHURAPPAN, G.; RAJAGOPALAN, N.; KRISHNAMOORTHY, S. (1992). Nonlinear finite element analysis of reinforced and prestressed concrete slabs with reinforcement modelled as discrete integral components. *Computers and Structures*, v.44, n.3, p.575-84.
- SHUSHKEWICH, K.W. (1986). Time-dependent analysis of segmental bridges. *Computers and Structures*, v.23, n.1, p.95-118.
- SMERDA, Z.; KRISTEK, V. (1988). *Creep and shrinkage of concrete elements and structures*. Elsevier, Amsterdam.
- STEIN, M. (1987). Large sample properties of simulations using latin hypercube sampling. *Technometrics*, v.29, n.2, p.143-51.
- SUN, C.H.; BRADFORD, M.A.; GILBERT, R.I. (1993). Nonlinear analysis for concrete frame structures using the element finite method. *Computers and Structures*, v.48, n.1, p.73-9.
- TAKÁCS, P.F. (2002). *Deformations in concrete cantilever bridges: observations and theoretical modelling*. Trondheim. 177p + apêndice. Tese (Doutorado) – Universidade Norueguesa de Ciência e Tecnologia.
- TORRES, LI. (2001). *Modelo numérico y verificación experimental del comportamiento em servicio de estructuras de hormigón*. Barcelona. 212p + apêndice. Tese (Doutorado) – Universidade Politécnica da Catalunha.
- TRADOS, M.K.; GHALI, A.; DILGER, W.H. (1979). Long-term stresses and deformation of segmental bridges. *PCI Journal*, v.24, n.4, p.66-87.

TSUBAKI, T. (1993). Uncertainty of prediction. In: INTERNATIONAL RILEM SYMPOSIUM ON CREEP AND SHRINKAGE OF CONCRETE, 5., Barcelona, 1993. *Proceedings*. London, E&FN Spon, p.831-47.

VAN ZYL, S.F.; SCORDELIS, A.C. (1979). Analysis of curved prestressed segmental bridges. *Journal of the Structural Division*, v.105, n.11, p.2399-417.

APÊNDICE A – Resultados obtidos para a determinação do coeficiente multiplicador básico

No Apêndice A são apresentados os resultados obtidos da análise das lajes pré-moldadas formadas por vigotas com armação treliçada para a determinação do coeficiente multiplicador básico.

Essa análise foi realizada mantendo-se constante a umidade relativa (60%) e a temperatura ambiente (25°C). Com isso, pôde-se determinar para cada caso o coeficiente multiplicador α através da seguinte expressão:

$$\alpha = \frac{a_{\text{total}} - a_{\text{inst}}}{a_{\text{inst}}} \quad \text{A.1}$$

onde:

a_{inst} – flecha instantânea da laje;

a_{total} – flecha total da laje (instantânea e diferida).

E o coeficiente κ :

$$\kappa = \frac{A_s \cdot h^{2,05}}{p^{1,5} \cdot \ell^3} \cdot 10^3 \quad \text{A.2}$$

onde:

A_s – armadura [cm²];

h – altura da laje [m];

p – carregamento aplicado [kN/m];

ℓ – vão da laje [m].

A seguir são apresentados os resultados do coeficiente multiplicador α e do coeficiente κ obtidos em cada caso.

laje	h (m)	ℓ (m)	g ₁ (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ _{2,q} (kN/m)	p (kN/m)	A _{si} (cm ²)	A _{s,adic} (cm ²)	A _s (cm ²)	a _{inst} (mm)	B _{total} (mm)	α	κ
LT12	0,12	4,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	1,50	1,775	22,08	43,45	0,97	0,185
LT12	0,12	4,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	1,75	2,025	19,74	40,59	1,06	0,211
LT12	0,12	4,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	2,10	2,375	17,25	37,53	1,18	0,247
LT12	0,12	4,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	2,35	2,625	15,85	35,85	1,26	0,273
LT12	0,12	4,5	0,6925	1,0	0,392	1,0845	0,275	0,90	1,175	27,10	48,95	0,81	0,148
LT12	0,12	4,5	0,6925	1,0	0,392	1,0845	0,275	1,10	1,375	23,54	44,74	0,90	0,173
LT12	0,12	4,5	0,6925	1,0	0,392	1,0845	0,275	1,30	1,575	20,87	41,57	0,99	0,198
LT12	0,12	4,5	0,6925	1,0	0,392	1,0845	0,275	1,50	1,775	18,79	39,12	1,08	0,223
LT12	0,12	4,0	0,6925	3,0	0,686	1,3785	0,275	1,50	1,775	15,14	31,21	1,06	0,222
LT12	0,12	4,0	0,6925	3,0	0,686	1,3785	0,275	1,75	2,025	13,49	29,20	1,17	0,253
LT12	0,12	4,0	0,6925	3,0	0,686	1,3785	0,275	2,10	2,375	11,73	27,02	1,30	0,297
LT12	0,12	4,0	0,6925	3,0	0,686	1,3785	0,275	2,35	2,625	10,74	25,90	1,41	0,328
LT12	0,12	4,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,90	1,175	18,89	35,57	0,88	0,174
LT12	0,12	4,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	1,10	1,375	16,36	32,51	0,99	0,204
LT12	0,12	4,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	1,30	1,575	14,47	30,28	1,09	0,233
LT12	0,12	4,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	1,50	1,775	12,99	28,36	1,18	0,263
LT12	0,12	4,0	0,6925	1,0	0,392	1,0845	0,275	0,60	0,875	20,94	37,67	0,80	0,157
LT12	0,12	4,0	0,6925	1,0	0,392	1,0845	0,275	0,75	1,025	17,96	34,28	0,91	0,184
LT12	0,12	4,0	0,6925	1,0	0,392	1,0845	0,275	0,85	1,125	16,46	32,44	0,97	0,202
LT12	0,12	4,0	0,6925	1,0	0,392	1,0845	0,275	1,00	1,275	14,64	30,32	1,07	0,228
LT12	0,12	3,5	0,6925	5,0	0,980	1,6725	0,275	1,50	1,775	10,64	22,64	1,13	0,248
LT12	0,12	3,5	0,6925	5,0	0,980	1,6725	0,275	1,75	2,025	9,48	21,12	1,23	0,283
LT12	0,12	3,5	0,6925	5,0	0,980	1,6725	0,275	2,10	2,375	8,23	19,62	1,38	0,332
LT12	0,12	3,5	0,6925	5,0	0,980	1,6725	0,275	2,35	2,625	7,52	18,85	1,51	0,367
LT12	0,12	3,5	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	1,50	1,775	9,38	20,93	1,23	0,285
LT12	0,12	3,5	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	1,75	2,025	8,33	19,61	1,36	0,325
LT12	0,12	3,5	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	2,10	2,375	7,18	18,23	1,54	0,381
LT12	0,12	3,5	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	2,35	2,625	6,53	17,38	1,66	0,421
LT12	0,12	3,5	0,6925	3,0	0,686	1,3785	0,275	1,00	1,275	10,95	22,87	1,09	0,238
LT12	0,12	3,5	0,6925	3,0	0,686	1,3785	0,275	1,15	1,425	9,87	21,57	1,18	0,266
LT12	0,12	3,5	0,6925	3,0	0,686	1,3785	0,275	1,35	1,625	8,75	20,05	1,29	0,303
LT12	0,12	3,5	0,6925	3,0	0,686	1,3785	0,275	1,50	1,775	8,05	19,07	1,37	0,331

laje	h (m)	ℓ (m)	g_l (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ_{2-q} (kN/m)	p (kN/m)	A_{si} (cm ²)	$A_{s,adic}$ (cm ²)	A_s (cm ²)	a_{inst} (mm)	B_{total} (mm)	α	κ
LT12	0,12	3,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,60	0,875	13,20	25,49	0,93	0,193
LT12	0,12	3,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,75	1,025	11,35	23,34	1,06	0,227
LT12	0,12	3,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,85	1,125	10,32	22,06	1,14	0,249
LT12	0,12	3,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	1,00	1,275	9,17	20,61	1,25	0,282
LT12	0,12	3,5	0,6925	1,0	0,392	1,0845	0,275	0,40	0,675	13,86	26,31	0,90	0,181
LT12	0,12	3,5	0,6925	1,0	0,392	1,0845	0,275	0,45	0,725	12,86	24,98	0,94	0,194
LT12	0,12	3,5	0,6925	1,0	0,392	1,0845	0,275	0,55	0,825	11,26	23,00	1,04	0,221
LT12	0,12	3,5	0,6925	1,0	0,392	1,0845	0,275	0,60	0,875	10,49	22,18	1,11	0,234
LT12	0,12	3,0	0,6925	6,0	1,127	1,8195	0,275	1,50	1,775	5,84	13,92	1,38	0,347
LT12	0,12	3,0	0,6925	6,0	1,127	1,8195	0,275	1,75	2,025	5,15	13,03	1,53	0,396
LT12	0,12	3,0	0,6925	6,0	1,127	1,8195	0,275	2,10	2,375	4,40	12,13	1,76	0,464
LT12	0,12	3,0	0,6925	6,0	1,127	1,8195	0,275	2,35	2,625	3,97	11,62	1,93	0,513
LT12	0,12	3,0	0,6925	5,0	0,980	1,6725	0,275	1,00	1,275	7,01	15,40	1,20	0,283
LT12	0,12	3,0	0,6925	5,0	0,980	1,6725	0,275	1,15	1,425	6,29	14,51	1,31	0,316
LT12	0,12	3,0	0,6925	5,0	0,980	1,6725	0,275	1,35	1,625	5,55	13,47	1,43	0,360
LT12	0,12	3,0	0,6925	5,0	0,980	1,6725	0,275	1,50	1,775	5,10	12,97	1,55	0,394
LT12	0,12	3,0	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	0,80	1,075	7,05	15,48	1,20	0,274
LT12	0,12	3,0	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	0,85	1,125	6,76	15,09	1,23	0,286
LT12	0,12	3,0	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	0,95	1,225	6,25	14,46	1,31	0,312
LT12	0,12	3,0	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	1,00	1,275	6,02	14,11	1,35	0,325
LT12	0,12	3,0	0,6925	3,0	0,686	1,3785	0,275	0,60	0,875	7,22	15,76	1,18	0,259
LT12	0,12	3,0	0,6925	3,0	0,686	1,3785	0,275	0,75	1,025	6,14	14,44	1,35	0,304
LT12	0,12	3,0	0,6925	3,0	0,686	1,3785	0,275	0,85	1,125	5,54	13,31	1,40	0,333
LT12	0,12	3,0	0,6925	3,0	0,686	1,3785	0,275	1,00	1,275	4,87	12,38	1,54	0,378
LT12	0,12	3,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,40	0,675	7,32	15,88	1,17	0,237
LT12	0,12	3,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,45	0,725	6,80	15,35	1,26	0,254
LT12	0,12	3,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,55	0,825	6,00	13,92	1,32	0,290
LT12	0,12	3,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,60	0,875	5,69	13,47	1,37	0,307
LT12	0,12	3,0	0,6925	1,0	0,392	1,0845	0,275	0,20	0,475	8,35	16,83	1,02	0,202
LT12	0,12	3,0	0,6925	1,0	0,392	1,0845	0,275	0,25	0,525	7,14	15,27	1,14	0,223
LT12	0,12	3,0	0,6925	1,0	0,392	1,0845	0,275	0,30	0,575	6,48	14,29	1,21	0,244

laje	h (m)	ℓ (m)	g ₁ (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ _{2,q} (kN/m)	p (kN/m)	A _{si} (cm ²)	A _{s,adic} (cm ²)	A _s (cm ²)	a _{inst} (mm)	B _{total} (mm)	α	κ
LT16	0,16	6,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,50	1,890	36,38	63,36	0,74	0,135
LT16	0,16	6,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,75	2,140	32,59	59,09	0,81	0,152
LT16	0,16	6,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	2,10	2,490	28,48	54,50	0,91	0,177
LT16	0,16	6,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	2,35	2,740	26,14	51,85	0,98	0,195
LT16	0,16	6,0	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	1,20	1,590	36,98	63,35	0,71	0,135
LT16	0,16	6,0	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	1,60	1,990	30,20	55,57	0,84	0,169
LT16	0,16	6,0	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	1,95	2,340	26,06	50,80	0,95	0,199
LT16	0,16	6,0	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	2,35	2,740	22,63	46,99	1,08	0,233
LT16	0,16	5,5	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	2,35	2,740	20,02	40,99	1,05	0,216
LT16	0,16	5,5	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	2,80	3,190	17,47	38,22	1,19	0,252
LT16	0,16	5,5	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	3,25	3,640	15,56	36,17	1,32	0,287
LT16	0,16	5,5	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	3,68	4,070	14,12	34,64	1,45	0,321
LT16	0,16	5,5	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,50	1,890	23,20	44,12	0,90	0,175
LT16	0,16	5,5	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,75	2,140	20,66	41,27	1,00	0,198
LT16	0,16	5,5	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	2,10	2,490	19,16	39,47	1,06	0,230
LT16	0,16	5,5	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	2,35	2,740	17,56	37,71	1,15	0,253
LT16	0,16	5,5	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	0,90	1,290	28,13	49,34	0,75	0,142
LT16	0,16	5,5	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	1,10	1,490	24,63	45,30	0,84	0,164
LT16	0,16	5,5	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	1,30	1,690	21,93	42,25	0,93	0,186
LT16	0,16	5,5	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	1,50	1,890	19,75	39,65	1,01	0,208
LT16	0,16	5,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	2,35	2,740	13,61	30,20	1,22	0,249
LT16	0,16	5,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	2,80	3,190	11,81	28,13	1,38	0,290
LT16	0,16	5,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	3,25	3,640	10,51	26,66	1,54	0,331
LT16	0,16	5,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	3,68	4,070	9,55	25,51	1,67	0,370
LT16	0,16	5,0	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	1,50	1,890	17,40	34,08	0,96	0,198
LT16	0,16	5,0	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	1,75	2,140	16,31	32,72	1,01	0,225
LT16	0,16	5,0	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	2,10	2,490	12,89	28,90	1,24	0,261
LT16	0,16	5,0	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	2,35	2,740	11,79	27,65	1,35	0,288
LT16	0,16	5,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,00	1,390	19,52	36,25	0,86	0,171
LT16	0,16	5,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,15	1,540	17,79	34,19	0,92	0,189
LT16	0,16	5,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,35	1,740	15,97	32,13	1,01	0,214
LT16	0,16	5,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,50	1,890	14,89	30,86	1,07	0,232

laje	h (m)	ℓ (m)	g _l (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ _{2-q} (kN/m)	p (kN/m)	A _{si} (cm ²)	A _{s,adic} (cm ²)	A _s (cm ²)	a _{inst} (mm)	B _{total} (mm)	α	κ
LT16	0,16	5,0	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	0,60	0,990	24,04	41,34	0,72	0,145
LT16	0,16	5,0	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	0,75	1,140	19,64	36,26	0,85	0,167
LT16	0,16	5,0	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	0,85	1,240	18,17	34,35	0,89	0,182
LT16	0,16	5,0	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	1,00	1,390	16,29	32,17	0,98	0,204
LT16	0,16	4,5	0,7825	5,0	0,980	1,7625	0,39	2,35	2,740	9,87	22,76	1,31	0,300
LT16	0,16	4,5	0,7825	5,0	0,980	1,7625	0,39	2,80	3,190	8,56	21,18	1,48	0,349
LT16	0,16	4,5	0,7825	5,0	0,980	1,7625	0,39	3,25	3,640	7,59	20,09	1,65	0,399
LT16	0,16	4,5	0,7825	5,0	0,980	1,7625	0,39	3,68	4,070	6,85	19,35	1,82	0,446
LT16	0,16	4,5	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	1,50	1,890	12,44	25,43	1,04	0,236
LT16	0,16	4,5	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	1,75	2,140	11,00	23,76	1,16	0,267
LT16	0,16	4,5	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	2,10	2,490	9,52	21,94	1,31	0,311
LT16	0,16	4,5	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	2,35	2,740	8,70	21,00	1,41	0,342
LT16	0,16	4,5	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	1,20	1,590	12,76	25,52	1,00	0,229
LT16	0,16	4,5	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	1,60	1,990	10,24	22,47	1,19	0,287
LT16	0,16	4,5	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	1,95	2,340	8,80	20,83	1,37	0,337
LT16	0,16	4,5	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	2,35	2,740	7,58	19,50	1,57	0,395
LT16	0,16	4,5	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,80	1,190	14,18	27,17	0,92	0,201
LT16	0,16	4,5	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,85	1,240	13,67	26,31	0,93	0,209
LT16	0,16	4,5	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,95	1,340	12,75	25,12	0,97	0,226
LT16	0,16	4,5	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,00	1,390	12,35	24,61	0,99	0,235
LT16	0,16	4,5	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	0,40	0,790	17,69	30,75	0,74	0,159
LT16	0,16	4,5	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	0,45	0,840	16,71	29,61	0,77	0,169
LT16	0,16	4,5	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	0,55	0,940	15,09	27,52	0,82	0,189
LT16	0,16	4,5	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	0,60	0,990	14,29	26,72	0,87	0,199
LT16	0,16	4,0	0,7825	6,0	1,127	1,9095	0,39	1,50	1,890	9,07	19,21	1,12	0,261
LT16	0,16	4,0	0,7825	6,0	1,127	1,9095	0,39	1,75	2,140	7,98	17,84	1,24	0,296
LT16	0,16	4,0	0,7825	6,0	1,127	1,9095	0,39	2,10	2,490	6,89	16,46	1,39	0,344
LT16	0,16	4,0	0,7825	6,0	1,127	1,9095	0,39	2,35	2,740	6,28	15,82	1,52	0,379
LT16	0,16	4,0	0,7825	5,0	0,980	1,7625	0,39	1,20	1,590	9,47	19,36	1,05	0,248
LT16	0,16	4,0	0,7825	5,0	0,980	1,7625	0,39	1,60	1,990	7,59	17,09	1,25	0,310
LT16	0,16	4,0	0,7825	5,0	0,980	1,7625	0,39	1,95	2,340	6,48	15,86	1,45	0,365
LT16	0,16	4,0	0,7825	5,0	0,980	1,7625	0,39	2,35	2,740	5,55	14,83	1,67	0,427

laje	h (m)	ℓ (m)	g_1 (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ_2, q (kN/m)	p (kN/m)	A_{s1} (cm ²)	$A_{s,adic}$ (cm ²)	A_s (cm ²)	a_{inst} (mm)	B_{total} (mm)	α	κ
LT16	0,16	4,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	1,00	1,390	9,41	19,21	1,04	0,247
LT16	0,16	4,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	1,15	1,540	8,52	18,00	1,11	0,274
LT16	0,16	4,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	1,35	1,740	7,59	16,86	1,22	0,309
LT16	0,16	4,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	1,50	1,890	7,01	16,26	1,32	0,336
LT16	0,16	4,0	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	0,80	1,190	9,49	18,96	1,00	0,244
LT16	0,16	4,0	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	0,85	1,240	9,14	18,51	1,03	0,254
LT16	0,16	4,0	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	0,95	1,340	8,51	17,74	1,09	0,275
LT16	0,16	4,0	0,7825	3,0	0,686	1,4685	0,39	1,00	1,390	8,22	17,34	1,11	0,285
LT16	0,16	4,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,40	0,790	12,00	21,75	0,81	0,190
LT16	0,16	4,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,45	0,840	11,36	21,00	0,85	0,202
LT16	0,16	4,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,55	0,940	10,24	19,65	0,92	0,226
LT16	0,16	4,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,60	0,990	9,66	19,05	0,97	0,238
LT16	0,16	4,0	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	0,20	0,590	13,38	23,02	0,72	0,169
LT16	0,16	4,0	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	0,25	0,640	12,37	21,93	0,77	0,184
LT16	0,16	4,0	0,7825	1,0	0,392	1,1745	0,39	0,30	0,690	11,52	20,98	0,82	0,198
LT20	0,20	7,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	2,35	2,740	28,99	55,50	0,92	0,176
LT20	0,20	7,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	2,80	3,190	25,32	51,60	1,04	0,205
LT20	0,20	7,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	3,25	3,640	22,53	48,67	1,16	0,234
LT20	0,20	7,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	3,68	4,070	20,43	46,52	1,28	0,261
LT20	0,20	7,0	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	1,50	1,890	35,53	61,58	0,73	0,143
LT20	0,20	7,0	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	1,75	2,140	31,73	57,40	0,81	0,162
LT20	0,20	7,0	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	2,10	2,490	27,67	53,13	0,92	0,188
LT20	0,20	7,0	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	2,35	2,740	25,37	50,65	1,00	0,207
LT20	0,20	6,5	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	2,35	2,740	23,87	46,31	0,94	0,189
LT20	0,20	6,5	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	2,80	3,190	20,81	43,05	1,07	0,220
LT20	0,20	6,5	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	3,25	3,640	18,49	40,64	1,20	0,251
LT20	0,20	6,5	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	3,68	4,070	16,73	38,81	1,32	0,281
LT20	0,20	6,5	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,60	1,990	28,35	50,36	0,78	0,159
LT20	0,20	6,5	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,90	2,290	24,92	46,73	0,88	0,184
LT20	0,20	6,5	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	2,15	2,540	22,67	44,32	0,96	0,204
LT20	0,20	6,5	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	2,45	2,840	20,46	41,99	1,05	0,228

laje	h (m)	ℓ (m)	g_1 (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ_2 -q (kN/m)	p (kN/m)	A_{si} (cm ²)	$A_{s,adic}$ (cm ²)	A_s (cm ²)	a_{inst} (mm)	B_{total} (mm)	α	κ
LT20	0,20	6,5	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	1,00	1,390	34,56	56,45	0,63	0,131
LT20	0,20	6,5	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	1,15	1,540	31,48	53,05	0,69	0,146
LT20	0,20	6,5	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	1,35	1,740	28,11	49,43	0,76	0,164
LT20	0,20	6,5	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	1,50	1,890	26,04	47,14	0,81	0,179
LT20	0,20	6,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	2,35	2,740	18,86	37,46	0,99	0,210
LT20	0,20	6,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	2,80	3,190	16,40	34,86	1,13	0,245
LT20	0,20	6,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	3,25	3,640	14,53	32,93	1,27	0,279
LT20	0,20	6,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	3,68	4,070	13,12	31,47	1,40	0,312
LT20	0,20	6,0	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	2,35	2,740	16,85	34,84	1,07	0,241
LT20	0,20	6,0	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	2,80	3,190	14,60	32,53	1,23	0,280
LT20	0,20	6,0	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	3,25	3,640	12,89	30,73	1,39	0,320
LT20	0,20	6,0	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	3,68	4,070	11,59	29,36	1,53	0,357
LT20	0,20	6,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,20	1,590	24,81	42,79	0,73	0,162
LT20	0,20	6,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,60	1,990	20,10	37,71	0,88	0,203
LT20	0,20	6,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,95	2,340	17,23	34,70	1,01	0,238
LT20	0,20	6,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	2,35	2,740	14,79	32,17	1,18	0,279
LT20	0,20	6,0	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	0,90	1,290	26,37	44,16	0,68	0,155
LT20	0,20	6,0	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	1,10	1,490	23,06	40,41	0,75	0,179
LT20	0,20	6,0	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	1,30	1,690	20,47	37,58	0,84	0,203
LT20	0,20	6,0	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	1,50	1,890	18,35	35,36	0,93	0,227
LT20	0,20	5,5	0,8725	5,0	0,980	1,8525	0,39	2,35	2,740	13,44	28,67	1,13	0,241
LT20	0,20	5,5	0,8725	5,0	0,980	1,8525	0,39	2,80	3,190	11,52	26,68	1,32	0,281
LT20	0,20	5,5	0,8725	5,0	0,980	1,8525	0,39	3,25	3,640	10,14	25,16	1,48	0,320
LT20	0,20	5,5	0,8725	5,0	0,980	1,8525	0,39	3,68	4,070	9,08	24,02	1,64	0,358
LT20	0,20	5,5	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	2,35	2,740	11,89	26,65	1,24	0,273
LT20	0,20	5,5	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	2,80	3,190	10,09	24,79	1,46	0,318
LT20	0,20	5,5	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	3,25	3,640	8,82	23,37	1,65	0,363
LT20	0,20	5,5	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	3,68	4,070	7,90	22,34	1,83	0,405
LT20	0,20	5,5	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	1,50	1,890	14,89	29,54	0,99	0,215
LT20	0,20	5,5	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	1,75	2,140	13,10	27,59	1,11	0,244
LT20	0,20	5,5	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	2,10	2,490	11,32	25,71	1,27	0,284
LT20	0,20	5,5	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	2,35	2,740	10,19	24,50	1,41	0,312

laje	h (m)	ℓ (m)	g ₁ (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ _{2,q} (kN/m)	p (kN/m)	A _{si} (cm ²)	A _{s,adic} (cm ²)	A _s (cm ²)	a _{inst} (mm)	B _{total} (mm)	α	κ
LT20	0,20	5,5	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,00	1,390	18,08	32,74	0,81	0,184
LT20	0,20	5,5	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,15	1,540	15,66	30,00	0,92	0,204
LT20	0,20	5,5	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,35	1,740	13,79	27,86	1,02	0,230
LT20	0,20	5,5	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,50	1,890	12,61	26,55	1,11	0,250
LT20	0,20	5,5	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	0,60	0,990	20,45	35,06	0,71	0,154
LT20	0,20	5,5	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	0,75	1,140	17,56	32,07	0,83	0,178
LT20	0,20	5,5	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	0,85	1,240	16,07	30,29	0,89	0,193
LT20	0,20	5,5	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	1,00	1,390	14,84	29,07	0,96	0,217
LT20	0,20	5,0	0,8725	6,0	1,127	1,9995	0,39	2,35	2,740	9,47	21,51	1,27	0,286
LT20	0,20	5,0	0,8725	6,0	1,127	1,9995	0,39	2,80	3,190	8,08	20,02	1,48	0,333
LT20	0,20	5,0	0,8725	6,0	1,127	1,9995	0,39	3,25	3,640	7,08	18,80	1,66	0,380
LT20	0,20	5,0	0,8725	6,0	1,127	1,9995	0,39	3,68	4,070	6,38	18,06	1,83	0,425
LT20	0,20	5,0	0,8725	5,0	0,980	1,8525	0,39	2,35	2,740	8,30	20,00	1,41	0,321
LT20	0,20	5,0	0,8725	5,0	0,980	1,8525	0,39	2,80	3,190	7,10	18,57	1,62	0,374
LT20	0,20	5,0	0,8725	5,0	0,980	1,8525	0,39	3,25	3,640	6,22	17,62	1,84	0,426
LT20	0,20	5,0	0,8725	5,0	0,980	1,8525	0,39	3,68	4,070	5,59	16,97	2,04	0,477
LT20	0,20	5,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	1,50	1,890	10,82	22,47	1,08	0,251
LT20	0,20	5,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	1,75	2,140	9,37	21,04	1,25	0,284
LT20	0,20	5,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	2,10	2,490	7,96	19,29	1,42	0,330
LT20	0,20	5,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	2,35	2,740	7,21	18,38	1,55	0,363
LT20	0,20	5,0	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	1,00	1,390	12,87	24,61	0,91	0,211
LT20	0,20	5,0	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	1,15	1,540	11,52	23,10	1,01	0,234
LT20	0,20	5,0	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	1,35	1,740	10,01	21,43	1,14	0,264
LT20	0,20	5,0	0,8725	3,0	0,686	1,5585	0,39	1,50	1,890	9,20	20,37	1,21	0,287
LT20	0,20	5,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	0,60	0,990	15,05	27,39	0,82	0,174
LT20	0,20	5,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	0,75	1,140	13,13	24,93	0,90	0,201
LT20	0,20	5,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	0,85	1,240	12,10	23,31	0,93	0,218
LT20	0,20	5,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,00	1,390	10,81	21,72	1,01	0,245
LT20	0,20	5,0	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	0,40	0,790	16,06	27,39	0,71	0,164
LT20	0,20	5,0	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	0,45	0,840	15,15	26,34	0,74	0,174
LT20	0,20	5,0	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	0,55	0,940	13,60	24,48	0,80	0,195
LT20	0,20	5,0	0,8725	1,0	0,392	1,2645	0,39	0,60	0,990	12,78	23,81	0,86	0,206

laje	h (m)	ℓ (m)	g_1 (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ_2 -q (kN/m)	p (kN/m)	A_{si} (cm ²)	$A_{s,adic}$ (cm ²)	A_s (cm ²)	a_{hist} (mm)	B_{total} (mm)	α	κ
LT25	0,25	8,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,35	2,915	42,22	73,21	0,73	0,134
LT25	0,25	8,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,80	3,365	37,14	67,85	0,83	0,154
LT25	0,25	8,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	3,25	3,815	33,21	63,67	0,92	0,175
LT25	0,25	8,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	3,68	4,245	30,21	60,56	1,00	0,195
LT25	0,25	8,5	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	1,60	2,165	49,57	80,16	0,62	0,115
LT25	0,25	8,5	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	1,90	2,465	44,09	74,25	0,68	0,130
LT25	0,25	8,5	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	2,15	2,715	40,39	70,27	0,74	0,144
LT25	0,25	8,5	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	2,45	3,015	36,73	66,43	0,81	0,159
LT25	0,25	8,0	1,085	3,0	0,686	1,7710	0,565	3,68	4,245	25,83	52,37	1,03	0,205
LT25	0,25	8,0	1,085	3,0	0,686	1,7710	0,565	4,00	4,565	24,20	50,65	1,09	0,221
LT25	0,25	8,0	1,085	3,0	0,686	1,7710	0,565	4,50	5,065	22,06	48,42	1,19	0,245
LT25	0,25	8,0	1,085	3,0	0,686	1,7710	0,565	4,90	5,465	20,63	46,94	1,28	0,264
LT25	0,25	8,0	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,35	2,915	32,77	58,92	0,80	0,160
LT25	0,25	8,0	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,80	3,365	28,74	54,65	0,90	0,185
LT25	0,25	8,0	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	3,25	3,815	25,62	51,41	1,01	0,210
LT25	0,25	8,0	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	3,68	4,245	23,24	48,92	1,11	0,234
LT25	0,25	8,0	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	1,50	2,065	40,27	66,23	0,65	0,131
LT25	0,25	8,0	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	1,75	2,315	36,24	61,87	0,71	0,147
LT25	0,25	8,0	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	2,10	2,665	31,82	57,18	0,80	0,169
LT25	0,25	8,0	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	2,35	2,915	29,27	54,43	0,86	0,185
LT25	0,25	7,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	3,68	4,245	21,49	44,34	1,06	0,221
LT25	0,25	7,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	4,00	4,565	20,12	42,92	1,13	0,238
LT25	0,25	7,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	4,50	5,065	18,33	41,04	1,24	0,264
LT25	0,25	7,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	4,90	5,465	17,12	39,76	1,32	0,284
LT25	0,25	7,5	1,085	3,0	0,686	1,7710	0,565	2,35	2,915	27,53	50,12	0,82	0,171
LT25	0,25	7,5	1,085	3,0	0,686	1,7710	0,565	2,80	3,365	24,12	46,49	0,93	0,197
LT25	0,25	7,5	1,085	3,0	0,686	1,7710	0,565	3,25	3,815	21,49	43,77	1,04	0,224
LT25	0,25	7,5	1,085	3,0	0,686	1,7710	0,565	3,68	4,245	19,47	41,63	1,14	0,249
LT25	0,25	7,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,60	2,165	32,74	55,10	0,68	0,145
LT25	0,25	7,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,90	2,465	29,03	51,10	0,76	0,165
LT25	0,25	7,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,15	2,715	26,53	48,49	0,83	0,181
LT25	0,25	7,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,45	3,015	24,05	45,85	0,91	0,201

laje	h (m)	ℓ (m)	g_1 (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ_2, q (kN/m)	p (kN/m)	A_{si} (cm ²)	$A_{s,adic}$ (cm ²)	A_s (cm ²)	a_{inst} (mm)	B_{total} (mm)	α	κ
LT25	0,25	7,5	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	1,20	1,765	35,33	57,43	0,63	0,136
LT25	0,25	7,5	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	1,60	2,165	29,28	50,82	0,74	0,167
LT25	0,25	7,5	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	1,95	2,515	25,41	46,67	0,84	0,194
LT25	0,25	7,5	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	2,35	2,915	22,06	43,15	0,96	0,224
LT25	0,25	7,0	1,085	5,0	0,980	2,0650	0,565	3,68	4,245	16,96	36,34	1,14	0,243
LT25	0,25	7,0	1,085	5,0	0,980	2,0650	0,565	4,00	4,565	15,87	35,22	1,22	0,262
LT25	0,25	7,0	1,085	5,0	0,980	2,0650	0,565	4,50	5,065	14,44	33,71	1,33	0,290
LT25	0,25	7,0	1,085	5,0	0,980	2,0650	0,565	4,90	5,465	13,49	32,70	1,43	0,313
LT25	0,25	7,0	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	2,35	2,915	19,75	38,45	0,95	0,210
LT25	0,25	7,0	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	2,80	3,365	17,24	35,79	1,08	0,243
LT25	0,25	7,0	1,085	3,0	0,686	1,7710	0,565	3,25	3,815	15,29	33,70	1,20	0,275
LT25	0,25	7,0	1,085	3,0	0,686	1,7710	0,565	3,68	4,245	13,80	32,16	1,33	0,306
LT25	0,25	7,0	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,50	2,065	24,11	42,59	0,77	0,170
LT25	0,25	7,0	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,75	2,315	21,63	39,87	0,84	0,190
LT25	0,25	7,0	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,10	2,665	19,23	37,45	0,95	0,219
LT25	0,25	7,0	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,35	2,915	17,63	35,74	1,03	0,239
LT25	0,25	7,0	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	1,00	1,565	28,19	46,81	0,66	0,148
LT25	0,25	7,0	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	1,15	1,715	25,89	44,18	0,71	0,162
LT25	0,25	7,0	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	1,35	1,915	23,32	41,38	0,77	0,181
LT25	0,25	7,0	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	1,50	2,065	21,34	39,20	0,84	0,196
LT25	0,25	6,5	1,085	6,0	1,127	2,2120	0,565	3,68	4,245	13,07	29,23	1,24	0,274
LT25	0,25	6,5	1,085	6,0	1,127	2,2120	0,565	4,00	4,565	12,22	28,34	1,32	0,295
LT25	0,25	6,5	1,085	6,0	1,127	2,2120	0,565	4,50	5,065	11,11	27,15	1,44	0,327
LT25	0,25	6,5	1,085	6,0	1,127	2,2120	0,565	4,90	5,465	10,36	26,36	1,54	0,353
LT25	0,25	6,5	1,085	5,0	0,980	2,0650	0,565	2,35	2,915	16,96	32,93	0,94	0,209
LT25	0,25	6,5	1,085	5,0	0,980	2,0650	0,565	2,80	3,365	14,83	30,70	1,07	0,241
LT25	0,25	6,5	1,085	5,0	0,980	2,0650	0,565	3,25	3,815	13,18	28,98	1,20	0,273
LT25	0,25	6,5	1,085	5,0	0,980	2,0650	0,565	3,68	4,245	11,92	27,66	1,32	0,304

laje	h (m)	ℓ (m)	g_1 (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ_2 -q (kN/m)	p (kN/m)	A_{si} (cm ²)	$A_{s,adic}$ (cm ²)	A_s (cm ²)	a_{hist} (mm)	B_{total} (mm)	α	κ
LT25	0,25	6,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	2,35	2,915	15,42	30,96	1,01	0,233
LT25	0,25	6,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	2,80	3,365	13,44	28,89	1,15	0,269
LT25	0,25	6,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	3,25	3,815	11,90	27,29	1,29	0,305
LT25	0,25	6,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	3,68	4,245	10,72	26,05	1,43	0,339
LT25	0,25	6,5	1,085	3,0	0,686	1,7710	0,565	1,50	2,065	19,27	34,75	0,80	0,186
LT25	0,25	6,5	1,085	3,0	0,686	1,7710	0,565	1,75	2,315	17,33	32,63	0,88	0,209
LT25	0,25	6,5	1,085	3,0	0,686	1,7710	0,565	2,10	2,665	15,13	30,30	1,00	0,240
LT25	0,25	6,5	1,085	3,0	0,686	1,7710	0,565	2,35	2,915	13,85	28,95	1,09	0,263
LT25	0,25	6,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,00	1,565	22,43	37,89	0,69	0,161
LT25	0,25	6,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,15	1,715	20,59	35,84	0,74	0,176
LT25	0,25	6,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,35	1,915	18,53	33,57	0,81	0,196
LT25	0,25	6,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,50	2,065	17,23	32,19	0,87	0,212
LT25	0,25	6,5	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	0,80	1,365	22,68	37,79	0,67	0,161
LT25	0,25	6,5	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	0,85	1,415	21,92	36,99	0,69	0,167
LT25	0,25	6,5	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	0,95	1,515	20,47	35,43	0,73	0,179
LT25	0,25	6,5	1,085	1,0	0,392	1,4770	0,565	1,00	1,565	19,85	34,77	0,75	0,185
LT30	0,30	9,5	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	3,68	4,245	35,88	67,80	0,89	0,162
LT30	0,30	9,5	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	4,00	4,565	33,64	65,46	0,95	0,175
LT30	0,30	9,5	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	4,50	5,065	30,69	62,39	1,03	0,194
LT30	0,30	9,5	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	4,90	5,465	28,72	60,33	1,10	0,209
LT30	0,30	9,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	3,68	4,245	32,56	63,40	0,95	0,183
LT30	0,30	9,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	4,00	4,565	30,50	61,23	1,01	0,197
LT30	0,30	9,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	4,50	5,065	27,78	58,43	1,10	0,219
LT30	0,30	9,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	4,90	5,465	25,96	56,50	1,18	0,236
LT30	0,30	9,5	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	2,35	2,915	41,32	71,59	0,73	0,144
LT30	0,30	9,5	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	2,80	3,365	36,18	66,19	0,83	0,166
LT30	0,30	9,5	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	3,25	3,815	32,21	62,06	0,93	0,188
LT30	0,30	9,5	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	3,68	4,245	29,18	58,96	1,02	0,209
LT30	0,30	9,0	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	3,68	4,245	31,16	59,38	0,91	0,171
LT30	0,30	9,0	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	4,00	4,565	29,20	57,33	0,96	0,183
LT30	0,30	9,0	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	4,50	5,065	26,63	54,68	1,05	0,203
LT30	0,30	9,0	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	4,90	5,465	24,90	52,86	1,12	0,220

laje	h (m)	ℓ (m)	g_1 (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ_2, q (kN/m)	p (kN/m)	A_{si} (cm ²)	$A_{s,adic}$ (cm ²)	A_s (cm ²)	a_{inst} (mm)	B_{total} (mm)	α	κ
LT30	0,30	9,0	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	3,68	4,245	28,47	55,82	0,96	0,191
LT30	0,30	9,0	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	4,00	4,565	26,66	53,95	1,02	0,205
LT30	0,30	9,0	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	4,50	5,065	24,28	51,48	1,12	0,228
LT30	0,30	9,0	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	4,90	5,465	22,67	49,78	1,20	0,246
LT30	0,30	9,0	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,35	2,915	36,49	63,41	0,74	0,148
LT30	0,30	9,0	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,80	3,365	31,94	58,67	0,84	0,171
LT30	0,30	9,0	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	3,25	3,815	28,43	55,03	0,94	0,194
LT30	0,30	9,0	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	3,68	4,245	25,75	52,24	1,03	0,216
LT30	0,30	9,0	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	1,60	2,165	43,41	69,90	0,61	0,126
LT30	0,30	9,0	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	1,90	2,465	38,43	64,67	0,68	0,143
LT30	0,30	9,0	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	2,15	2,715	35,09	61,17	0,74	0,157
LT30	0,30	9,0	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	2,45	3,015	31,77	57,75	0,82	0,175
LT30	0,30	8,5	1,1975	5,0	0,980	2,1775	0,565	3,68	4,245	26,53	51,23	0,93	0,182
LT30	0,30	8,5	1,1975	5,0	0,980	2,1775	0,565	4,00	4,565	24,86	49,49	0,99	0,196
LT30	0,30	8,5	1,1975	5,0	0,980	2,1775	0,565	4,50	5,065	22,64	47,20	1,09	0,218
LT30	0,30	8,5	1,1975	5,0	0,980	2,1775	0,565	4,90	5,465	21,16	45,61	1,16	0,235
LT30	0,30	8,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	3,68	4,245	24,39	48,38	0,98	0,202
LT30	0,30	8,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	4,00	4,565	22,82	46,75	1,05	0,218
LT30	0,30	8,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	4,50	5,065	20,76	44,62	1,15	0,242
LT30	0,30	8,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	4,90	5,465	19,37	43,14	1,23	0,261
LT30	0,30	8,5	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	2,35	2,915	31,56	55,20	0,75	0,156
LT30	0,30	8,5	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	2,80	3,365	27,60	51,11	0,85	0,180
LT30	0,30	8,5	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	3,25	3,815	24,53	47,90	0,95	0,204
LT30	0,30	8,5	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	3,68	4,245	22,20	45,49	1,05	0,227
LT30	0,30	8,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,35	2,915	28,61	51,52	0,80	0,176
LT30	0,30	8,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,80	3,365	24,95	47,73	0,91	0,203
LT30	0,30	8,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	3,25	3,815	22,11	44,83	1,03	0,230
LT30	0,30	8,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	3,68	4,245	19,95	42,56	1,13	0,256
LT30	0,30	8,5	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	1,50	2,065	35,72	58,37	0,63	0,142
LT30	0,30	8,5	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	1,75	2,315	32,01	54,45	0,70	0,159
LT30	0,30	8,5	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	2,10	2,665	27,94	50,26	0,80	0,184
LT30	0,30	8,5	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	2,35	2,915	25,59	47,77	0,87	0,201

laje	h (m)	ℓ (m)	g ₁ (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ _{2-q} (kN/m)	p (kN/m)	A _{si} (cm ²)	A _{s,adic} (cm ²)	A _s (cm ²)	a _{inst} (mm)	B _{total} (mm)	α	κ
LT30	0,30	8,0	1,1975	5,0	0,980	2,1775	0,565	3,68	4,245	20,26	41,05	1,03	0,219
LT30	0,30	8,0	1,1975	5,0	0,980	2,1775	0,565	4,00	4,565	18,94	39,70	1,10	0,235
LT30	0,30	8,0	1,1975	5,0	0,980	2,1775	0,565	4,50	5,065	17,20	37,89	1,20	0,261
LT30	0,30	8,0	1,1975	5,0	0,980	2,1775	0,565	4,90	5,465	16,04	36,66	1,29	0,282
LT30	0,30	8,0	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	3,68	4,245	18,52	38,76	1,09	0,243
LT30	0,30	8,0	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	4,00	4,565	17,29	37,47	1,17	0,261
LT30	0,30	8,0	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	4,50	5,065	15,67	35,81	1,29	0,290
LT30	0,30	8,0	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	4,90	5,465	14,59	34,65	1,38	0,313
LT30	0,30	8,0	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	2,35	2,915	24,06	44,06	0,83	0,187
LT30	0,30	8,0	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	2,80	3,365	20,95	40,82	0,95	0,215
LT30	0,30	8,0	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	3,25	3,815	18,55	38,32	1,07	0,244
LT30	0,30	8,0	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	3,68	4,245	16,74	36,37	1,17	0,272
LT30	0,30	8,0	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	1,60	2,165	28,99	48,67	0,68	0,157
LT30	0,30	8,0	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	1,90	2,465	25,55	45,11	0,77	0,178
LT30	0,30	8,0	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,15	2,715	23,24	42,69	0,84	0,196
LT30	0,30	8,0	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,45	3,015	20,96	40,32	0,92	0,218
LT30	0,30	8,0	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	1,20	1,765	31,66	51,03	0,61	0,146
LT30	0,30	8,0	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	1,60	2,165	25,92	44,98	0,74	0,179
LT30	0,30	8,0	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	1,95	2,515	22,30	41,20	0,85	0,208
LT30	0,30	8,0	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	2,35	2,915	19,18	37,99	0,98	0,241
LT30	0,30	7,5	1,1975	6,0	1,127	2,3245	0,565	3,68	4,245	16,49	34,32	1,08	0,241
LT30	0,30	7,5	1,1975	6,0	1,127	2,3245	0,565	4,00	4,565	15,40	33,15	1,15	0,259
LT30	0,30	7,5	1,1975	6,0	1,127	2,3245	0,565	4,50	5,065	13,97	31,69	1,27	0,287
LT30	0,30	7,5	1,1975	6,0	1,127	2,3245	0,565	4,90	5,465	13,01	30,66	1,36	0,310
LT30	0,30	7,5	1,1975	5,0	0,980	2,1775	0,565	3,68	4,245	15,13	32,54	1,15	0,265
LT30	0,30	7,5	1,1975	5,0	0,980	2,1775	0,565	4,00	4,565	14,11	31,44	1,23	0,285
LT30	0,30	7,5	1,1975	5,0	0,980	2,1775	0,565	4,50	5,065	12,76	30,06	1,36	0,317
LT30	0,30	7,5	1,1975	5,0	0,980	2,1775	0,565	4,90	5,465	11,86	29,07	1,45	0,342
LT30	0,30	7,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	2,35	2,915	19,89	37,08	0,86	0,202
LT30	0,30	7,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	2,80	3,365	17,28	34,42	0,99	0,234
LT30	0,30	7,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	3,25	3,815	15,27	32,29	1,12	0,265
LT30	0,30	7,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	3,68	4,245	13,73	30,70	1,24	0,295

laje	h (m)	ℓ (m)	g_1 (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ_2, q (kN/m)	p (kN/m)	A_{si} (cm ²)	$A_{s,adic}$ (cm ²)	A_s (cm ²)	a_{inst} (mm)	B_{total} (mm)	α	κ
LT30	0,30	7,5	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	2,35	2,915	18,02	34,77	0,93	0,227
LT30	0,30	7,5	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	2,80	3,365	15,58	32,23	1,07	0,261
LT30	0,30	7,5	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	3,25	3,815	13,71	30,36	1,22	0,296
LT30	0,30	7,5	1,1975	3,0	0,686	1,8835	0,565	3,68	4,245	12,27	28,84	1,35	0,330
LT30	0,30	7,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	1,50	2,065	22,86	39,41	0,72	0,181
LT30	0,30	7,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	1,75	2,315	20,39	36,86	0,81	0,203
LT30	0,30	7,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,10	2,665	17,64	34,02	0,93	0,234
LT30	0,30	7,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,35	2,915	16,08	32,38	1,01	0,256
LT30	0,30	7,5	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	0,90	1,465	28,64	45,17	0,58	0,147
LT30	0,30	7,5	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	1,10	1,665	25,29	41,61	0,65	0,167
LT30	0,30	7,5	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	1,30	1,865	22,54	38,67	0,72	0,187
LT30	0,30	7,5	1,1975	1,0	0,392	1,5895	0,565	1,50	2,065	20,29	36,38	0,79	0,207

APÊNDICE B – Resultados obtidos para a determinação do coeficiente $\alpha_{U,T}$

No Apêndice B são apresentados os resultados obtidos da análise das lajes pré-moldadas formadas por vigotas com armação treliçada para a determinação do coeficiente $\alpha_{U,T}$ que considera a influência da umidade relativa e temperatura ambiente no coeficiente multiplicador α .

Com os resultados da análise das lajes foi determinado o coeficiente multiplicador α para cada caso através da seguinte expressão:

$$\alpha = \frac{a_{\text{total}} - a_{\text{inst}}}{a_{\text{inst}}} \quad \text{B.1}$$

onde:

a_{inst} – flecha instantânea da laje;

a_{total} – flecha total da laje (instantânea e diferida).

Já o coeficiente $\alpha_{U,T}$ foi determinado dividindo o coeficiente multiplicador α obtido em cada caso pelo resultado obtido para o caso com as mesmas características, mas com umidade relativa de 60% e temperatura ambiente de 25°C.

A seguir são apresentados os resultados do coeficiente multiplicador α e do coeficiente $\alpha_{U,T}$ obtidos em cada caso.

laje	h (m)	ℓ (m)	g_l (kN/m)	q (kN/m ²)	$\psi_{2,q}$ (kN/m)	p (kN/m)	A_{si} (cm ²)	$A_{s,adic}$ (cm ²)	A_s (cm ²)	T (°C)	U (%)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α	$\alpha_{U,T}$
LT12	0,12	4,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	1,50	1,775	15	40	22,08	45,60	1,07	1,10
LT12	0,12	4,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	1,50	1,775	15	60	22,07	41,78	0,89	0,92
LT12	0,12	4,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	1,50	1,775	15	80	22,06	36,01	0,63	0,65
LT12	0,12	4,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	1,50	1,775	25	40	22,10	47,38	1,14	1,18
LT12	0,12	4,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	1,50	1,775	25	60	22,08	43,45	0,97	1,00
LT12	0,12	4,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	1,50	1,775	25	80	22,07	37,49	0,70	0,72
LT12	0,12	4,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	1,50	1,775	35	40	22,11	48,76	1,21	1,25
LT12	0,12	4,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	1,50	1,775	35	60	22,10	44,82	1,03	1,06
LT12	0,12	4,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	1,50	1,775	35	80	22,08	38,61	0,75	0,77
LT12	0,12	4,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,90	1,175	15	40	18,89	37,17	0,97	1,10
LT12	0,12	4,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,90	1,175	15	60	18,89	34,33	0,82	0,93
LT12	0,12	4,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,90	1,175	15	80	18,89	29,92	0,58	0,66
LT12	0,12	4,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,90	1,175	25	40	18,89	38,49	1,04	1,17
LT12	0,12	4,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,90	1,175	25	60	18,89	35,57	0,88	1,00
LT12	0,12	4,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,90	1,175	25	80	18,89	31,07	0,64	0,73
LT12	0,12	4,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,90	1,175	35	40	18,90	39,69	1,10	1,25
LT12	0,12	4,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,90	1,175	35	60	18,90	36,45	0,93	1,05
LT12	0,12	4,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,90	1,175	35	80	18,89	31,93	0,69	0,78
LT12	0,12	3,5	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	1,50	1,775	15	40	9,38	22,23	1,37	1,11
LT12	0,12	3,5	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	1,50	1,775	15	60	9,37	20,16	1,15	0,93
LT12	0,12	3,5	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	1,50	1,775	15	80	9,37	16,84	0,80	0,65
LT12	0,12	3,5	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	1,50	1,775	25	40	9,38	22,94	1,45	1,17
LT12	0,12	3,5	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	1,50	1,775	25	60	9,38	20,93	1,23	1,00
LT12	0,12	3,5	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	1,50	1,775	25	80	9,38	17,64	0,88	0,72
LT12	0,12	3,5	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	1,50	1,775	35	40	9,38	22,72	1,42	1,16
LT12	0,12	3,5	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	1,50	1,775	35	60	9,38	21,50	1,29	1,05
LT12	0,12	3,5	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	1,50	1,775	35	80	9,38	18,23	0,94	0,77
LT12	0,12	3,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,60	0,875	15	40	13,20	26,68	1,02	1,10
LT12	0,12	3,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,60	0,875	15	60	13,19	24,75	0,88	0,94
LT12	0,12	3,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,60	0,875	15	80	13,19	21,43	0,62	0,67
LT12	0,12	3,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,60	0,875	25	40	13,20	27,66	1,10	1,18
LT12	0,12	3,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,60	0,875	25	60	13,20	25,49	0,93	1,00

laje	h (m)	ℓ (m)	g ₁ (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ _{2,q} (kN/m)	p (kN/m)	A _{si} (cm ²)	A _{s,adic} (cm ²)	A _s (cm ²)	T (°C)	U (%)	a _{inst} (mm)	a _{total} (mm)	α	α _{U,T}
LT12	0,12	3,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,60	0,875	25	80	13,19	22,38	0,70	0,75
LT12	0,12	3,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,60	0,875	35	40	13,20	28,05	1,12	1,21
LT12	0,12	3,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,60	0,875	35	60	13,20	26,09	0,98	1,05
LT12	0,12	3,5	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,60	0,875	35	80	13,20	23,11	0,75	0,81
LT12	0,12	3,0	0,6925	6,0	1,127	1,8195	0,275	1,50	1,775	15	40	5,84	14,82	1,54	1,11
LT12	0,12	3,0	0,6925	6,0	1,127	1,8195	0,275	1,50	1,775	15	60	5,84	13,32	1,28	0,93
LT12	0,12	3,0	0,6925	6,0	1,127	1,8195	0,275	1,50	1,775	15	80	5,85	11,03	0,89	0,64
LT12	0,12	3,0	0,6925	6,0	1,127	1,8195	0,275	1,50	1,775	25	40	5,85	15,32	1,62	1,17
LT12	0,12	3,0	0,6925	6,0	1,127	1,8195	0,275	1,50	1,775	25	60	5,84	13,92	1,38	1,00
LT12	0,12	3,0	0,6925	6,0	1,127	1,8195	0,275	1,50	1,775	25	80	5,84	11,50	0,97	0,70
LT12	0,12	3,0	0,6925	6,0	1,127	1,8195	0,275	1,50	1,775	35	40	5,85	15,71	1,69	1,22
LT12	0,12	3,0	0,6925	6,0	1,127	1,8195	0,275	1,50	1,775	35	60	5,85	14,29	1,44	1,05
LT12	0,12	3,0	0,6925	6,0	1,127	1,8195	0,275	1,50	1,775	35	80	5,84	11,94	1,04	0,76
LT12	0,12	3,0	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	0,80	1,075	15	40	7,05	16,34	1,32	1,10
LT12	0,12	3,0	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	0,80	1,075	15	60	7,05	14,91	1,11	0,93
LT12	0,12	3,0	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	0,80	1,075	15	80	7,06	12,59	0,78	0,66
LT12	0,12	3,0	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	0,80	1,075	25	40	7,06	17,00	1,41	1,18
LT12	0,12	3,0	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	0,80	1,075	25	60	7,05	15,48	1,20	1,00
LT12	0,12	3,0	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	0,80	1,075	25	80	7,05	13,16	0,87	0,73
LT12	0,12	3,0	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	0,80	1,075	35	40	7,06	17,51	1,48	1,24
LT12	0,12	3,0	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	0,80	1,075	35	60	7,06	16,03	1,27	1,06
LT12	0,12	3,0	0,6925	4,0	0,833	1,5255	0,275	0,80	1,075	35	80	7,05	13,72	0,95	0,79
LT12	0,12	3,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,40	0,675	15	40	7,32	16,68	1,28	1,09
LT12	0,12	3,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,40	0,675	15	60	7,32	15,23	1,08	0,93
LT12	0,12	3,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,40	0,675	15	80	7,32	13,07	0,79	0,67
LT12	0,12	3,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,40	0,675	25	40	7,51	17,05	1,27	1,09
LT12	0,12	3,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,40	0,675	25	60	7,32	15,88	1,17	1,00
LT12	0,12	3,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,40	0,675	25	80	7,32	13,80	0,89	0,76
LT12	0,12	3,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,40	0,675	35	40	7,51	18,59	1,48	1,26
LT12	0,12	3,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,40	0,675	35	60	7,33	16,12	1,20	1,03
LT12	0,12	3,0	0,6925	2,0	0,539	1,2315	0,275	0,40	0,675	35	80	7,32	14,17	0,94	0,80

laje	h (m)	ℓ (m)	g_1 (kN/m)	q (kN/m ²)	$\psi_2 \cdot q$ (kN/m)	p (kN/m)	A_{si} (cm ²)	$A_{s,adic}$ (cm ²)	A_s (cm ²)	T (°C)	U (%)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α	$\alpha_{U,T}$
LT16	0,16	6,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,50	1,890	15	40	36,38	65,76	0,81	1,09
LT16	0,16	6,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,50	1,890	15	60	36,38	60,93	0,68	0,91
LT16	0,16	6,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,50	1,890	15	80	36,37	53,57	0,47	0,64
LT16	0,16	6,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,50	1,890	25	40	36,39	68,24	0,88	1,18
LT16	0,16	6,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,50	1,890	25	60	36,38	63,36	0,74	1,00
LT16	0,16	6,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,50	1,890	25	80	36,37	55,68	0,53	0,72
LT16	0,16	6,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,50	1,890	35	40	36,40	70,27	0,93	1,26
LT16	0,16	6,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,50	1,890	35	60	36,39	65,16	0,79	1,07
LT16	0,16	6,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,50	1,890	35	80	36,38	57,50	0,58	0,78
LT16	0,16	5,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	2,35	2,740	15	40	13,61	31,73	1,33	1,09
LT16	0,16	5,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	2,35	2,740	15	60	13,59	28,63	1,11	0,91
LT16	0,16	5,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	2,35	2,740	15	80	13,57	23,77	0,75	0,62
LT16	0,16	5,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	2,35	2,740	25	40	13,65	33,50	1,45	1,19
LT16	0,16	5,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	2,35	2,740	25	60	13,61	30,20	1,22	1,00
LT16	0,16	5,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	2,35	2,740	25	80	13,58	25,08	0,85	0,70
LT16	0,16	5,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	2,35	2,740	35	40	13,70	34,45	1,51	1,24
LT16	0,16	5,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	2,35	2,740	35	60	13,65	31,44	1,30	1,07
LT16	0,16	5,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	2,35	2,740	35	80	13,59	26,19	0,93	0,76
LT16	0,16	5,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,00	1,390	15	40	19,52	37,90	0,94	1,10
LT16	0,16	5,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,00	1,390	15	60	19,46	34,78	0,79	0,92
LT16	0,16	5,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,00	1,390	15	80	19,38	30,06	0,55	0,64
LT16	0,16	5,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,00	1,390	25	40	19,63	39,66	1,02	1,19
LT16	0,16	5,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,00	1,390	25	60	19,52	36,25	0,86	1,00
LT16	0,16	5,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,00	1,390	25	80	19,41	31,33	0,61	0,72
LT16	0,16	5,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,00	1,390	35	40	19,72	41,45	1,10	1,29
LT16	0,16	5,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,00	1,390	35	60	19,63	37,67	0,92	1,07
LT16	0,16	5,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	1,00	1,390	35	80	19,49	32,32	0,66	0,77

laje	h (m)	ℓ (m)	g _i (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ _{2-q} (kN/m)	p (kN/m)	A _{st} (cm ²)	A _{s,redic} (cm ²)	A _s (cm ²)	T (°C)	U (%)	a _{inst} (mm)	a _{total} (mm)	α	α _{ULT}
LT16	0,16	4,0	0,7825	6,0	1,127	1,9095	0,39	1,50	1,890	15	40	9,07	20,16	1,22	1,09
LT16	0,16	4,0	0,7825	6,0	1,127	1,9095	0,39	1,50	1,890	15	60	9,04	18,22	1,02	0,91
LT16	0,16	4,0	0,7825	6,0	1,127	1,9095	0,39	1,50	1,890	15	80	9,04	15,23	0,68	0,61
LT16	0,16	4,0	0,7825	6,0	1,127	1,9095	0,39	1,50	1,890	25	40	9,10	21,31	1,34	1,20
LT16	0,16	4,0	0,7825	6,0	1,127	1,9095	0,39	1,50	1,890	25	60	9,07	19,21	1,12	1,00
LT16	0,16	4,0	0,7825	6,0	1,127	1,9095	0,39	1,50	1,890	25	80	9,04	16,05	0,78	0,69
LT16	0,16	4,0	0,7825	6,0	1,127	1,9095	0,39	1,50	1,890	35	40	9,14	21,22	1,32	1,18
LT16	0,16	4,0	0,7825	6,0	1,127	1,9095	0,39	1,50	1,890	35	60	9,10	19,81	1,18	1,05
LT16	0,16	4,0	0,7825	6,0	1,127	1,9095	0,39	1,50	1,890	35	80	9,05	16,68	0,84	0,75
LT16	0,16	4,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	1,00	1,390	15	40	9,41	20,15	1,14	1,10
LT16	0,16	4,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	1,00	1,390	15	60	9,41	18,31	0,95	0,91
LT16	0,16	4,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	1,00	1,390	15	80	9,38	15,55	0,66	0,63
LT16	0,16	4,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	1,00	1,390	25	40	9,41	21,15	1,25	1,20
LT16	0,16	4,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	1,00	1,390	25	60	9,41	19,21	1,04	1,00
LT16	0,16	4,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	1,00	1,390	25	80	9,41	16,35	0,74	0,71
LT16	0,16	4,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	1,00	1,390	35	40	9,41	21,18	1,25	1,20
LT16	0,16	4,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	1,00	1,390	35	60	9,41	19,77	1,10	1,06
LT16	0,16	4,0	0,7825	4,0	0,833	1,6155	0,39	1,00	1,390	35	80	9,41	16,98	0,80	0,77
LT16	0,16	4,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,40	0,790	15	40	12,00	22,53	0,88	1,08
LT16	0,16	4,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,40	0,790	15	60	12,01	20,85	0,74	0,91
LT16	0,16	4,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,40	0,790	15	80	12,04	18,41	0,53	0,65
LT16	0,16	4,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,40	0,790	25	40	11,99	23,32	0,95	1,16
LT16	0,16	4,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,40	0,790	25	60	12,00	21,75	0,81	1,00
LT16	0,16	4,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,40	0,790	25	80	12,02	19,16	0,59	0,73
LT16	0,16	4,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,40	0,790	35	40	11,98	24,36	1,03	1,27
LT16	0,16	4,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,40	0,790	35	60	11,99	22,44	0,87	1,07
LT16	0,16	4,0	0,7825	2,0	0,539	1,3215	0,39	0,40	0,790	35	80	12,01	19,75	0,65	0,79

laje	h (m)	ℓ (m)	g_1 (kN/m)	q (kN/m ²)	$\psi_2 \cdot q$ (kN/m)	p (kN/m)	A_{s1} (cm ²)	$A_{s,adic}$ (cm ²)	A_s (cm ²)	T (°C)	U (%)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α	$\alpha_{U,T}$
LT20	0,20	7,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	2,35	2,740	15	40	28,98	57,63	0,99	1,08
LT20	0,20	7,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	2,35	2,740	15	60	28,97	52,78	0,82	0,90
LT20	0,20	7,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	2,35	2,740	15	80	28,96	45,41	0,57	0,62
LT20	0,20	7,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	2,35	2,740	25	40	29,01	60,75	1,09	1,20
LT20	0,20	7,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	2,35	2,740	25	60	28,99	55,50	0,92	1,00
LT20	0,20	7,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	2,35	2,740	25	80	28,97	47,73	0,65	0,71
LT20	0,20	7,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	2,35	2,740	35	40	29,07	63,53	1,19	1,30
LT20	0,20	7,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	2,35	2,740	35	60	29,01	57,85	0,99	1,09
LT20	0,20	7,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	2,35	2,740	35	80	28,98	49,87	0,72	0,79
LT20	0,20	6,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	2,35	2,740	15	40	18,86	39,00	1,07	1,08
LT20	0,20	6,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	2,35	2,740	15	60	18,85	35,56	0,89	0,90
LT20	0,20	6,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	2,35	2,740	15	80	18,84	30,33	0,61	0,62
LT20	0,20	6,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	2,35	2,740	25	40	18,87	41,10	1,18	1,19
LT20	0,20	6,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	2,35	2,740	25	60	18,86	37,46	0,99	1,00
LT20	0,20	6,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	2,35	2,740	25	80	18,84	31,93	0,69	0,70
LT20	0,20	6,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	2,35	2,740	35	40	18,89	43,29	1,29	1,31
LT20	0,20	6,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	2,35	2,740	35	60	18,87	39,04	1,07	1,08
LT20	0,20	6,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	2,35	2,740	35	80	18,85	33,40	0,77	0,78
LT20	0,20	6,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,20	1,590	15	40	24,81	44,27	0,78	1,08
LT20	0,20	6,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,20	1,590	15	60	24,81	41,05	0,66	0,90
LT20	0,20	6,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,20	1,590	15	80	24,81	36,09	0,46	0,63
LT20	0,20	6,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,20	1,590	25	40	24,82	46,27	0,87	1,19
LT20	0,20	6,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,20	1,590	25	60	24,81	42,79	0,73	1,00
LT20	0,20	6,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,20	1,590	25	80	24,81	37,62	0,52	0,71
LT20	0,20	6,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,20	1,590	35	40	24,83	47,54	0,92	1,26
LT20	0,20	6,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,20	1,590	35	60	24,82	44,35	0,79	1,09
LT20	0,20	6,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	1,20	1,590	35	80	24,81	38,77	0,56	0,78

laje	h (m)	ℓ (m)	g_l (kN/m)	q (kN/m ²)	$\psi_{2,q}$ (kN/m)	p (kN/m)	A_{si} (cm ²)	$A_{s,adic}$ (cm ²)	A_s (cm ²)	T (°C)	U (%)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α	α_{ULT}
LT20	0,20	5,0	0,8725	6,0	1,127	1,9995	0,39	2,35	2,740	15	40	9,47	22,64	1,39	1,09
LT20	0,20	5,0	0,8725	6,0	1,127	1,9995	0,39	2,35	2,740	15	60	9,43	20,32	1,16	0,91
LT20	0,20	5,0	0,8725	6,0	1,127	1,9995	0,39	2,35	2,740	15	80	9,39	16,63	0,77	0,61
LT20	0,20	5,0	0,8725	6,0	1,127	1,9995	0,39	2,35	2,740	25	40	9,51	24,01	1,52	1,20
LT20	0,20	5,0	0,8725	6,0	1,127	1,9995	0,39	2,35	2,740	25	60	9,47	21,51	1,27	1,00
LT20	0,20	5,0	0,8725	6,0	1,127	1,9995	0,39	2,35	2,740	25	80	9,42	17,77	0,89	0,70
LT20	0,20	5,0	0,8725	6,0	1,127	1,9995	0,39	2,35	2,740	35	40	9,56	24,86	1,60	1,26
LT20	0,20	5,0	0,8725	6,0	1,127	1,9995	0,39	2,35	2,740	35	60	9,51	22,67	1,38	1,09
LT20	0,20	5,0	0,8725	6,0	1,127	1,9995	0,39	2,35	2,740	35	80	9,45	18,71	0,98	0,77
LT20	0,20	5,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	1,50	1,890	15	40	10,82	23,53	1,18	1,09
LT20	0,20	5,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	1,50	1,890	15	60	10,79	21,43	0,99	0,92
LT20	0,20	5,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	1,50	1,890	15	80	10,79	17,77	0,65	0,60
LT20	0,20	5,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	1,50	1,890	25	40	10,86	24,97	1,30	1,21
LT20	0,20	5,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	1,50	1,890	25	60	10,82	22,47	1,08	1,00
LT20	0,20	5,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	1,50	1,890	25	80	10,79	18,87	0,75	0,70
LT20	0,20	5,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	1,50	1,890	35	40	10,90	25,10	1,30	1,21
LT20	0,20	5,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	1,50	1,890	35	60	10,86	23,47	1,16	1,08
LT20	0,20	5,0	0,8725	4,0	0,833	1,7055	0,39	1,50	1,890	35	80	10,81	19,70	0,82	0,76
LT20	0,20	5,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	0,60	0,990	15	40	15,05	28,18	0,87	1,06
LT20	0,20	5,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	0,60	0,990	15	60	15,05	26,03	0,73	0,89
LT20	0,20	5,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	0,60	0,990	15	80	15,06	22,87	0,52	0,63
LT20	0,20	5,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	0,60	0,990	25	40	15,33	29,51	0,93	1,13
LT20	0,20	5,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	0,60	0,990	25	60	15,05	27,39	0,82	1,00
LT20	0,20	5,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	0,60	0,990	25	80	15,05	23,82	0,58	0,71
LT20	0,20	5,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	0,60	0,990	35	40	15,34	29,65	0,93	1,14
LT20	0,20	5,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	0,60	0,990	35	60	15,33	28,19	0,84	1,02
LT20	0,20	5,0	0,8725	2,0	0,539	1,4115	0,39	0,60	0,990	35	80	15,05	24,86	0,65	0,80

laje	h (m)	ℓ (m)	g_1 (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ_2, q (kN/m)	p (kN/m)	A_{s1} (cm ²)	$A_{s,adic}$ (cm ²)	A_s (cm ²)	T (°C)	U (%)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α	$\alpha_{q,T}$
LT25	0,25	8,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,35	2,915	15	40	42,22	74,84	0,77	1,05
LT25	0,25	8,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,35	2,915	15	60	42,20	69,44	0,65	0,88
LT25	0,25	8,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,35	2,915	15	80	42,20	61,29	0,45	0,62
LT25	0,25	8,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,35	2,915	25	40	42,24	79,10	0,87	1,19
LT25	0,25	8,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,35	2,915	25	60	42,22	73,21	0,73	1,00
LT25	0,25	8,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,35	2,915	25	80	42,20	64,38	0,53	0,72
LT25	0,25	8,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,35	2,915	35	40	42,27	82,98	0,96	1,31
LT25	0,25	8,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,35	2,915	35	60	42,24	76,53	0,81	1,11
LT25	0,25	8,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	2,35	2,915	35	80	42,21	67,30	0,59	0,81
LT25	0,25	7,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	3,68	4,245	15	40	21,49	45,59	1,12	1,05
LT25	0,25	7,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	3,68	4,245	15	60	21,48	41,55	0,93	0,88
LT25	0,25	7,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	3,68	4,245	15	80	21,48	35,34	0,65	0,61
LT25	0,25	7,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	3,68	4,245	25	40	21,49	48,77	1,27	1,19
LT25	0,25	7,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	3,68	4,245	25	60	21,49	44,34	1,06	1,00
LT25	0,25	7,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	3,68	4,245	25	80	21,48	37,63	0,75	0,71
LT25	0,25	7,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	3,68	4,245	35	40	21,50	51,28	1,39	1,30
LT25	0,25	7,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	3,68	4,245	35	60	21,49	46,86	1,18	1,11
LT25	0,25	7,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	3,68	4,245	35	80	21,48	39,75	0,85	0,80
LT25	0,25	7,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,60	2,165	15	40	32,74	56,29	0,72	1,05
LT25	0,25	7,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,60	2,165	15	60	32,74	52,46	0,60	0,88
LT25	0,25	7,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,60	2,165	15	80	32,73	46,50	0,42	0,62
LT25	0,25	7,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,60	2,165	25	40	32,75	59,20	0,81	1,18
LT25	0,25	7,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,60	2,165	25	60	32,74	55,10	0,68	1,00
LT25	0,25	7,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,60	2,165	25	80	32,74	48,68	0,49	0,71
LT25	0,25	7,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,60	2,165	35	40	32,76	61,55	0,88	1,29
LT25	0,25	7,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,60	2,165	35	60	32,75	57,34	0,75	1,10
LT25	0,25	7,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,60	2,165	35	80	32,74	50,70	0,55	0,80

laje	h (m)	ℓ (m)	g ₁ (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ _{2,q} (kN/m)	p (kN/m)	A _{si} (cm ²)	A _{s,adic} (cm ²)	A _s (cm ²)	T (°C)	U (%)	a _{inst} (mm)	a _{total} (mm)	α	α _{ULT}
LT25	0,25	6,5	1,085	6,0	1,127	2,2120	0,565	3,68	4,245	15	40	13,07	30,10	1,30	1,05
LT25	0,25	6,5	1,085	6,0	1,127	2,2120	0,565	3,68	4,245	15	60	13,07	27,22	1,08	0,88
LT25	0,25	6,5	1,085	6,0	1,127	2,2120	0,565	3,68	4,245	15	80	13,07	22,75	0,74	0,60
LT25	0,25	6,5	1,085	6,0	1,127	2,2120	0,565	3,68	4,245	25	40	13,08	32,39	1,48	1,19
LT25	0,25	6,5	1,085	6,0	1,127	2,2120	0,565	3,68	4,245	25	60	13,07	29,23	1,24	1,00
LT25	0,25	6,5	1,085	6,0	1,127	2,2120	0,565	3,68	4,245	25	80	13,07	24,37	0,87	0,70
LT25	0,25	6,5	1,085	6,0	1,127	2,2120	0,565	3,68	4,245	35	40	13,09	34,22	1,61	1,31
LT25	0,25	6,5	1,085	6,0	1,127	2,2120	0,565	3,68	4,245	35	60	13,08	31,01	1,37	1,11
LT25	0,25	6,5	1,085	6,0	1,127	2,2120	0,565	3,68	4,245	35	80	13,07	25,90	0,98	0,79
LT25	0,25	6,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	2,35	2,915	15	40	15,42	31,79	1,06	1,05
LT25	0,25	6,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	2,35	2,915	15	60	15,42	29,06	0,88	0,88
LT25	0,25	6,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	2,35	2,915	15	80	15,42	24,76	0,61	0,60
LT25	0,25	6,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	2,35	2,915	25	40	15,43	33,98	1,20	1,19
LT25	0,25	6,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	2,35	2,915	25	60	15,42	30,96	1,01	1,00
LT25	0,25	6,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	2,35	2,915	25	80	15,42	26,33	0,71	0,70
LT25	0,25	6,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	2,35	2,915	35	40	15,44	35,57	1,30	1,29
LT25	0,25	6,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	2,35	2,915	35	60	15,43	32,62	1,11	1,11
LT25	0,25	6,5	1,085	4,0	0,833	1,9180	0,565	2,35	2,915	35	80	15,42	27,74	0,80	0,79
LT25	0,25	6,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,00	1,565	15	40	22,43	38,71	0,73	1,05
LT25	0,25	6,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,00	1,565	15	60	22,43	36,04	0,61	0,88
LT25	0,25	6,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,00	1,565	15	80	22,45	31,93	0,42	0,61
LT25	0,25	6,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,00	1,565	25	40	22,43	40,73	0,82	1,18
LT25	0,25	6,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,00	1,565	25	60	22,43	37,89	0,69	1,00
LT25	0,25	6,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,00	1,565	25	80	22,44	33,45	0,49	0,71
LT25	0,25	6,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,00	1,565	35	40	22,44	41,80	0,86	1,25
LT25	0,25	6,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,00	1,565	35	60	22,44	39,43	0,76	1,10
LT25	0,25	6,5	1,085	2,0	0,539	1,6240	0,565	1,00	1,565	35	80	22,43	34,82	0,55	0,80

laje	h (m)	ℓ (m)	g_1 (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ_2, q (kN/m)	p (kN/m)	A_{s1} (cm ²)	$A_{s,adic}$ (cm ²)	A_s (cm ²)	T (°C)	U (%)	a_{inst} (mm)	a_{total} (mm)	α	$\alpha_{U,T}$
LT30	0,30	9,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	3,68	4,245	15	40	32,56	64,70	0,99	1,04
LT30	0,30	9,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	3,68	4,245	15	60	32,53	59,33	0,82	0,87
LT30	0,30	9,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	3,68	4,245	15	80	32,51	51,20	0,58	0,61
LT30	0,30	9,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	3,68	4,245	25	40	32,59	69,27	1,13	1,19
LT30	0,30	9,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	3,68	4,245	25	60	32,56	63,40	0,95	1,00
LT30	0,30	9,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	3,68	4,245	25	80	32,52	54,47	0,68	0,71
LT30	0,30	9,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	3,68	4,245	35	40	32,64	73,39	1,25	1,32
LT30	0,30	9,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	3,68	4,245	35	60	32,59	67,06	1,06	1,12
LT30	0,30	9,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	3,68	4,245	35	80	32,55	57,60	0,77	0,81
LT30	0,30	8,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	3,68	4,245	15	40	24,39	49,40	1,03	1,04
LT30	0,30	8,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	3,68	4,245	15	60	24,37	45,25	0,86	0,87
LT30	0,30	8,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	3,68	4,245	15	80	24,36	38,85	0,59	0,60
LT30	0,30	8,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	3,68	4,245	25	40	24,40	52,95	1,17	1,19
LT30	0,30	8,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	3,68	4,245	25	60	24,39	48,38	0,98	1,00
LT30	0,30	8,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	3,68	4,245	25	80	24,37	41,41	0,70	0,71
LT30	0,30	8,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	3,68	4,245	35	40	24,42	56,12	1,30	1,32
LT30	0,30	8,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	3,68	4,245	35	60	24,40	51,23	1,10	1,12
LT30	0,30	8,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	3,68	4,245	35	80	24,38	43,81	0,80	0,81
LT30	0,30	8,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,35	2,915	15	40	28,61	52,53	0,84	1,04
LT30	0,30	8,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,35	2,915	15	60	28,60	48,59	0,70	0,87
LT30	0,30	8,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,35	2,915	15	80	28,59	42,43	0,48	0,60
LT30	0,30	8,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,35	2,915	25	40	28,62	55,88	0,95	1,19
LT30	0,30	8,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,35	2,915	25	60	28,61	51,52	0,80	1,00
LT30	0,30	8,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,35	2,915	25	80	28,60	44,85	0,57	0,71
LT30	0,30	8,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,35	2,915	35	40	28,64	58,32	1,04	1,29
LT30	0,30	8,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,35	2,915	35	60	28,62	54,19	0,89	1,12
LT30	0,30	8,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	2,35	2,915	35	80	28,60	47,11	0,65	0,81

laje	h (m)	ℓ (m)	g ₁ (kN/m)	q (kN/m ²)	ψ _{2,q} (kN/m)	p (kN/m)	A _{si} (cm ²)	A _{s,adic} (cm ²)	A _s (cm ²)	T (°C)	U (%)	a _{inst} (mm)	a _{total} (mm)	α	α _{ULT}
LT30	0,30	7,5	1,1975	6,0	1,127	2,3245	0,565	3,68	4,245	15	40	16,49	35,08	1,13	1,04
LT30	0,30	7,5	1,1975	6,0	1,127	2,3245	0,565	3,68	4,245	15	60	16,49	31,95	0,94	0,87
LT30	0,30	7,5	1,1975	6,0	1,127	2,3245	0,565	3,68	4,245	15	80	16,49	27,13	0,65	0,60
LT30	0,30	7,5	1,1975	6,0	1,127	2,3245	0,565	3,68	4,245	25	40	16,50	37,72	1,29	1,19
LT30	0,30	7,5	1,1975	6,0	1,127	2,3245	0,565	3,68	4,245	25	60	16,49	34,32	1,08	1,00
LT30	0,30	7,5	1,1975	6,0	1,127	2,3245	0,565	3,68	4,245	25	80	16,49	29,04	0,76	0,70
LT30	0,30	7,5	1,1975	6,0	1,127	2,3245	0,565	3,68	4,245	35	40	16,51	39,81	1,41	1,31
LT30	0,30	7,5	1,1975	6,0	1,127	2,3245	0,565	3,68	4,245	35	60	16,50	36,42	1,21	1,12
LT30	0,30	7,5	1,1975	6,0	1,127	2,3245	0,565	3,68	4,245	35	80	16,49	30,83	0,87	0,80
LT30	0,30	7,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	2,35	2,915	15	40	19,89	37,82	0,90	1,04
LT30	0,30	7,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	2,35	2,915	15	60	19,89	34,85	0,75	0,87
LT30	0,30	7,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	2,35	2,915	15	80	19,89	30,16	0,52	0,60
LT30	0,30	7,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	2,35	2,915	25	40	19,89	40,29	1,03	1,19
LT30	0,30	7,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	2,35	2,915	25	60	19,89	37,08	0,86	1,00
LT30	0,30	7,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	2,35	2,915	25	80	19,89	31,99	0,61	0,70
LT30	0,30	7,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	2,35	2,915	35	40	19,90	42,23	1,12	1,30
LT30	0,30	7,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	2,35	2,915	35	60	19,89	39,00	0,96	1,11
LT30	0,30	7,5	1,1975	4,0	0,833	2,0305	0,565	2,35	2,915	35	80	19,89	33,73	0,70	0,81
LT30	0,30	7,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	1,50	2,065	15	40	22,86	40,10	0,75	1,04
LT30	0,30	7,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	1,50	2,065	15	60	22,86	37,30	0,63	0,87
LT30	0,30	7,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	1,50	2,065	15	80	22,86	32,76	0,43	0,60
LT30	0,30	7,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	1,50	2,065	25	40	22,86	42,47	0,86	1,19
LT30	0,30	7,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	1,50	2,065	25	60	22,86	39,41	0,72	1,00
LT30	0,30	7,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	1,50	2,065	25	80	22,85	34,50	0,51	0,70
LT30	0,30	7,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	1,50	2,065	35	40	22,86	44,24	0,94	1,29
LT30	0,30	7,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	1,50	2,065	35	60	22,86	41,13	0,80	1,10
LT30	0,30	7,5	1,1975	2,0	0,539	1,7365	0,565	1,50	2,065	35	80	22,86	36,04	0,58	0,80

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)