
PROCESSOS DE PASSEIO NA RETA CONTÍNUA

DANIELA TRENTIN NAVA

Orientador: Prof. Ph.D. Andrei Toom

Área de concentração: Probabilidade

Dissertação submetida como requerimento parcial para obtenção do
grau de Mestre em Estatística pela Universidade Federal de Pernambuco

Recife, fevereiro de 2006

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

Universidade Federal de Pernambuco
Mestrado em Estatística

23 de fevereiro de 2006

(data)

Nós recomendamos que a dissertação de mestrado de autoria de

Daniela Trentin Nava

intitulada

Processos de Passeio na Reta Contínua

seja aceita como cumprimento parcial dos requerimentos para o grau de Mestre em Estatística.

Klaus Leite Pinto Vasconcellos

Coordenador da Pós-Graduação em Estatística

Banca Examinadora:

A Toom

André Toom

orientador

Vladimir Belitsky

Vladimir Belitsky (USP)

Klaus Leite Pinto Vasconcellos

Klaus Leite Pinto Vasconcellos

 Profr. Klaus L. P. Vasconcellos
Coordenador da
Pós-graduação em
Estatística, UFPE

Este documento será anexado à versão final da dissertação.

*Não há ramo da Matemática,
por mais abstrato que seja,
que não possa um dia vir a ser aplicado
aos fenômenos do mundo real.*

(Lobachevsky)

Agradecimentos

Não, não é simplesmente agradecer que quero neste momento, mas sim explicitar minha profunda gratidão a todos aqueles que de alguma forma me ajudaram e incentivaram a não perder a garra e a vibração, muito obrigada!

Agradeço, acima de todas as coisas, a Deus pelo dom da vida, sabedoria e misericórdia infinita. Agradeço a interseção e o colo de minha mãezinha, Maria.

À Paulina e Cesio, que me ensinaram que a maior de todas as virtudes é a humildade. Eles se tornaram o maior exemplo de família que um ser humano pode almejar ter.

Ao professor Andrei Toom, meu orientador, pela paciência e grande entusiasmo para a realização desta dissertação. Aproveito a oportunidade para demonstrar meu grande apreço e admiração pelo grande profissional e intelectual que é o professor Toom.

A Patric, meu maninho, pelo carinho e incentivo a mim dedicados. E, aos não menos irmãos, Renata companheira fiel e presente nos melhores e piores momentos em que estive aqui. Carlos e Tiago pelos longos papos e momentos de descontração que propiciaram momentos de grande alegria. A Milena pela amizade e alegria. Themis por grandes discussões que edificaram e consolidaram conhecimentos.

Ao professor Miguel Angel Uribe Opazo, grande responsável e incentivador pela minha inscrição e posterior vinda para este mestrado.

Agradeço a Cláudio por ter sido o anjo enviado por Deus em momentos extremamente importantes, pelo carinho e atenção. E também a tantos outros anjos, que não ousou citar os nomes mas que passaram deixando o perfume e a presença de Deus.

Aos professores da pós graduação em Estatística da UFPE pelo grande aprendizado. Destaco entre eles: Francisco Cribari, Klaus, Cláudia e Audrey. À Valéria pela grande ajuda e auxílio com tramites burocráticos.

Agradeço a todos os colegas da pós com quem compartilhei momentos especiais.

A amigas muito especiais, que mesmo de muito longe não deixaram que eu me sentisse sozinha: Marinez, Aracéli, Gisele, Valderice e Mari.

À CAPES pelo apoio financeiro.

À Paulina e Celesio.

Resumo

Estudamos uma propriedade similar a ergodicidade para uma classe de processos aleatórios com interação local, espaço contínuo e tempo discreto. Nosso processo é uma seqüência de subconjuntos aleatórios U^t da reta real em que $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ é chamado tempo. Estes conjuntos são de tipo especial: suas intersecções com qualquer pedaço limitado da reta real são combinações lineares de uma lista finita de δ -medidas, cada uma concentrada em um conjunto que consiste de vários segmentos fechados cujas intersecções são vazias, os quais chamamos de blocos. Estes conjuntos são gerados indutivamente. Inicialmente, quando $t = 0$, temos que o conjunto U^0 é vazio. A cada passo de tempo três operadores são aplicados em U^t para obter U^{t+1} . O primeiro operador, W_α , inclui no conjunto segmentos $[i, i + 1]$ onde $i \in \mathbb{Z}$, de maneira aleatória: cada segmento é incluído com probabilidade α independentemente dos outros. O segundo operador, W_D , inclui em nosso conjunto todas as brechas com distâncias pequenas entre cada dois blocos. A ação do terceiro operador, W_{pas} , depende das variáveis aleatórias discretas L e R , cada tomando somente um conjunto finito de valores. Cada aplicação de W_{pas} faz com que o limite esquerdo de cada bloco realize um passo de passeio aleatório distribuído como a variável L independentemente de cada outro. O mesmo ocorre com o limite direito de cada bloco, mas com a variável R ao invés de L . Dizemos que nosso processo enche a reta se para algum segmento limitado, a probabilidade que U^t inclua este segmento tende para um quando o tempo tende para infinito. (Isto é análogo a ergodicidade.) Mostramos que nosso processo tem dois tipos de comportamento: Se $E(L) < E(R)$ (em que $E(\cdot)$ significa esperança matemática), nosso processo enche a reta para qualquer $\alpha > 0$. Se $E(L) > E(R)$, nosso processo não enche a reta se α for pequeno o bastante. Este contraste já havia sido mostrado considerando o espaço discreto, agora nós o generalizamos para o espaço contínuo. Nossa aproximação serve de base para a teoria de processos com interação local em um espaço contínuo, que ainda é pouco desenvolvida.

Abstract

We study a property similar to ergodicity of a class of random processes with local interaction with continuous space and discrete time. Our process is a sequence of random subsets U^t of a real line, where $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ is called time. These sets are of a special kind: their intersections with any limited piece of the real line are linear combinations of a finite list of δ -measures, each concentrated in a set consisting of several closed mutually non-intersecting segments, which we call blocks. These sets are generated inductively. Initially, when $t = 0$, our set U^0 is empty. At every time step three operators are applied to U^t to obtain U^{t+1} . The first operator, W_α , includes into our set some of the segments $[i, i + 1]$, where $i \in \mathbb{Z}$, chosen at random: each segment is included with a probability α independently of others. The second operator, W_D , includes into our set all small enough gaps between the blocks. The action of the third operator, W_{pas} , depends on two discrete random variables L and R , each taking only a finite set of values. At one application of W_{pas} , left ends of all the blocks perform one step of random walk distributed as L independently from each other. The right ends of all the blocks do the same, only using the random variable R instead of L . We say that our process fills the line if for any limited segment the probability that U^t includes this segment tends to one when time tends to infinity. (This is analog of ergodicity.) We show that our process has two types of behavior: If $E(L) < E(R)$ (where E means mathematical expectation), our process fills the line for any $\alpha > 0$. If $E(L) > E(R)$, our process does not fill the line if α is small enough. This contrast has been shown for the discrete line and now we generalize it to the continuous line. Our approach paves the way for a theory of processes with local interaction on a real line, which remains little developed till now.

Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
2 Conceitos iniciais	3
2.1 Definição dos operadores	4
3 O teorema principal	7
3.1 Ilustração do processo	7
3.2 Construção do conjunto aleatório U em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$	8
3.3 Lemas sobre aplicação de nossos operadores	10
3.4 O teorema principal	11
4 Monotonicidade	12
5 Demonstração parte I	15
5.1 O problema da ruína do jogador	16
5.1.1 Generalização do problema da ruína do jogador	16
5.2 Demonstração do item i) do teorema principal	18
5.2.1 Lemas auxiliares	19
6 Demonstração parte II	22
6.1 Algumas definições	22
6.2 Classificação de $U [0, T]$ em classes de equivalência	24

6.3	Caminhos	25
6.3.1	Caminho correto	26
6.3.2	Código correto	27
6.3.3	Peso do caminho e peso do código	29
6.3.4	Relações entre caminhos e códigos	29
6.4	Estimações	34
7	Discussões e sugestões de pesquisa	43
	Referências Bibliográficas	44

LISTA DE FIGURAS

3.1	Fragmento do processo, onde há um contorno em volta do segmento $[a,b]$. Setas verticais representam a ação de W_α e W_D , setas inclinadas representam a ação de W_{pas}	8
4.1	Ilustração de duas medidas regulares obtidas após a ação de W_D em que $\mu \prec \nu$ utilizando a técnica do acoplamento.	14
6.1	Ilustração de um possível fragmento de caminho durante o processo iterativo. Esta é a classe que inclui o segmento $[(a, T), (b, T)]$. Neste fragmento será excluída a parte preenchida com pontos.	25
6.2	Exemplo de um possível caminho que pode ocorrer em $[1, T]$ para a classe \mathcal{J}	26
6.3	Ilustração do caso (a) do lema 6.5 destacando a seqüência de símbolos: $\downarrow \alpha \downarrow$	31
6.4	Ilustração da seqüência de passos impossíveis $\uparrow \alpha \downarrow$, pois a distância entre os pontos abaixo dos passos \uparrow e \downarrow é menor que $2D + 2$	32
6.5	Ilustração do item (b) do lema 6.5 onde um passo de tipo D pode ser precedido por passos de tipo \uparrow ou α e sucedido por passos de tipo \downarrow ou α	33

Autômatos celulares (AC) são idealizações matemáticas de sistemas físicos que envolvem espaço, tempo e um conjunto de possíveis estados, cada um destes podendo ser discreto ou contínuo. Chamemos de versão *discreta* quando todos estes três conjuntos são discretos. A primeira pessoa a utilizar AC na forma discreta e determinística foi John Von Neumann (Neumann, 1963). Ele criou uma máquina composta de uma grade regular bidimensional com células que interagem com células vizinhas. Cada célula podia assumir vários estados, e, devido à complexidade, este AC foi apenas parcialmente implementado no computador. Neste caso, o estado da componente no tempo imediatamente posterior é resultado da ação da função de transição sobre uma “vizinhança” da mesma componente no tempo anterior.

AC's têm um potencial enorme. Como exemplos temos que qualquer sistema físico satisfazendo equações diferenciais pode ser aproximado com AC. A versão dinâmica do modelo de Ising e outros sistemas de grade como spins são AC. Estrutura espacial de turbulência de fluidos pode ser modelada usando AC a partir da aproximação do campo de velocidade como uma grade de células, cada uma contendo ou não um redemoinho, que interagem com as células vizinhas. Ainda, sistemas físicos podem também ser descritos como AC's com estados de valores representando excitações no meio correspondente.

Trabalhos sobre processos com interação local têm sido realizados há várias décadas. Exemplos sobre processos do caso discreto podem ser vistos em Toom (1976), Toom et. al (1990), Toom (1995) e Toom (2001), por exemplo.

Os maiores resultados desta dissertação seguem as idéias de Toom et. al. (1990),

especialmente dos capítulos 6 e 11. A diferença é que estamos considerando um espaço contínuo, ainda que o tempo seja discreto e cada componente possa assumir somente dois estados. Esta diferença parece ser pequena, porém envolve grandes dificuldades conceituais.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 2, discutimos algumas das principais definições e resultados necessários para a construção do nosso processo. No capítulo 3, enunciamos o teorema principal. No capítulo 4, apresentamos o conceito de monotonicidade para nosso caso. No capítulo 5, provamos o item *i)* do teorema principal. No capítulo 6 provamos o item *ii)* do teorema. E, no capítulo 7 são apresentadas discussões, comentários e sugestões para futuras pesquisas.

CAPÍTULO 2

Conceitos iniciais

Em nosso estudo usaremos como configurações alguns subconjuntos de \mathbb{R} , o conjunto dos números reais. Consideraremos somente casos cuja probabilidade é positiva.

Definição 2.1. Para cada $C > 0$, chamemos um subconjunto $\mathcal{R} \subset [-C, C]$ **regular** se \mathcal{R} pode ser apresentado como união finita de segmentos fechados.

Observe que cada conjunto regular é fechado. Cada conjunto regular pode ser apresentado como uma união de segmentos do tipo $[a_i, b_i]$ que não têm pontos em comum. Chamemos estes segmentos de *blocos*.

Definição 2.2. Chamemos uma medida μ , em uma família de subconjuntos regulares de \mathbb{R} , de **medida regular** se para cada $S > 0$ a restrição

$$\mu_{[-S, S]}$$

pode ser apresentada como uma combinação linear de uma lista finita de δ -medidas, em cada uma é concentrada num subconjunto regular de $[-S, S]$.

Seja Ω o conjunto das medidas regulares. Denotaremos por \mathcal{M} a família de medidas regulares normalizadas em Ω .

Em alguns momentos do texto utilizaremos *conjuntos aleatórios* em vez de *medidas regulares*, estes conceitos são idênticos e os utilizaremos oportunamente.

Definiremos agora os três tipos de variáveis aleatórias auxiliares de que vamos precisar para definir o nosso processo. Para todos (i, t) temos variáveis aleatórias independentes

$$Q_i^t = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } \alpha, \\ 0, & \text{com probabilidade } 1 - \alpha. \end{cases} \quad (V_1)$$

Também precisaremos de duas famílias de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas: L_h^t e R_h^t , onde $h \in \mathbb{R}$, $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Cada uma delas é discreta e assume apenas um conjunto finito de valores:

$$L_h^t = \begin{cases} l_1, & \text{com probabilidade } \theta_1^l, \\ l_2, & \text{com probabilidade } \theta_2^l, \\ \vdots & \\ l_\xi, & \text{com probabilidade } \theta_\xi^l. \end{cases} \quad (V_2)$$

e

$$R_h^t = \begin{cases} r_1, & \text{com probabilidade } \theta_1^r, \\ r_2, & \text{com probabilidade } \theta_2^r, \\ \vdots & \\ r_\eta, & \text{com probabilidade } \theta_\eta^r. \end{cases} \quad (V_3)$$

As variáveis L_h^t e R_h^t serão usadas para efetuar mudanças nas fronteiras esquerda e direita de segmentos de nosso conjunto e as variáveis Q_i^t determinam o surgimento de um segmento com probabilidade α .

Denotamos de Aux o espaço produto:

$$Aux = \{0, 1\}^{\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}^+} \times \left(\{l_1, \dots, l_\xi\} \times \{r_1, \dots, r_\eta\} \right)^{\mathbb{R} \cdot \mathbb{Z}^+}.$$

Denotamos por π a medida-produto em Aux , tal que cada componente é independente de outras e distribuída segundo as fórmulas (V_1, V_2, V_3) . Nosso processo será induzido por esta medida.

2.1 Definição dos operadores

Definição 2.3. Para cada $v \in \mathbb{R}$, definimos a translação

$$\tau_v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

onde $\tau_v(h) = h+v$. Depois podemos definir a translação no espaço de conjuntos aleatórios $\tau_v : \Omega \rightarrow \Omega$ da seguinte maneira: para cada conjunto aleatório μ , e cada $h \in \mathbb{R}$

$$(\tau_v \mu)_h = \mu_{h-v}.$$

Utilizaremos a mesma letra τ_v para a translação correspondente de \mathcal{M} para \mathcal{M} .

Dá-se o nome de *operador aleatório* a qualquer mapa $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$.

Dizemos que um operador D é *determinístico* se $D : \Omega \rightarrow \Omega$. Cada operador determinístico pode ser considerado como um operador aleatório.

Definição 2.4. Quando um operador $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ comuta com todas as translações, ou seja,

$$\forall v : P\tau_v = \tau_v P,$$

denominamos o operador de *uniforme*.

Se um operador $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ comuta com todas as translações inteiras, ou seja

$$\forall v \in \mathbb{Z} : P\tau_v = \tau_v P,$$

dizemos que este operador é *inteiramente uniforme*.

Ao resultado de t aplicações de P em qualquer medida regular μ denotaremos por $P^t\mu$. Uma medida $\mu \in \mathcal{M}$ é dita ser *invariante* para P se $P\mu = \mu$.

Definiremos, inicialmente, o *operador de nascimento* $W_\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Informalmente, o operador de nascimento inclui no conjunto aleatório atual subconjuntos fechados $[i, i+1]$ com probabilidade $\alpha > 0$ independentemente uns dos outros para todos i inteiros.

Para cada $i \in \mathbb{Z}$ definimos o conjunto aleatório

$$S_i = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } Q_i = 0, \\ [i, i+1], & \text{se } Q_i = 1. \end{cases}$$

Desta maneira, W_α age no conjunto aleatório μ da seguinte maneira:

$$W_\alpha\mu = \mu \cup \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} S_i.$$

O operador de nascimento é inteiramente uniforme.

Outro operador que temos é o *operador de enchimento*, $W_D : \Omega \rightarrow \Omega$. Este operador é determinístico e depende do parâmetro $D = \max(|l_h|, |r_h|, 1)$. Informalmente, ele enche segmentos vazios mais curtos que $2D+2$. Ou seja, para cada conjunto aleatório $\mu \subset \mathbb{R}$,

$$W_D\mu = \mu \cup \{h \in \mathbb{R} : \exists j, k \in \mu : j < h < k, k - j \leq 2D + 2\}.$$

Denotamos W_{pas} , o *operador de passeio aleatório*, em que $W_{pas} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Este operador transforma cada conjunto

$$\bigcup_{h=-\infty}^{\infty} [a_h, b_h], \tag{2.1}$$

onde

$$\cdots < a_{-1} \leq b_{-1} < a_0 \leq b_0 < a_1 \leq b_1 < \cdots$$

e $a_{h+1} - b_h > 2D + 2$ para todos h , no conjunto aleatório

$$\bigcup_{h=-\infty}^{\infty} C_h, \quad (2.2)$$

em que

$$C_h = \{x \in \mathbb{R} : a_h + l_h < x < b_h + r_h\},$$

com probabilidade $\theta_h^l \cdot \theta_h^r$ onde $1 \leq h \leq \xi$, $1 \leq h \leq \eta$ independentemente de outros segmentos (2.1).

Os operadores W_D e W_{pas} são uniformes.

Definiremos um operador composto da superposição destes três operadores e estudaremos seu comportamento; mais precisamente, vamos estudar se ele “esquece” a condição inicial.

Observe que aplicaremos todos estes operadores para conjuntos aleatórios da reta toda. Assim, ao longo desta dissertação estaremos interessados no comportamento da superposição destes operadores em que primeiro age W_α seguido de W_D e por último W_{pas} , estudaremos o que acontece com a condição inicial concentrada no espaço vazio sob a ação iterativa da superposição destes três operadores. O nosso maior resultado é o teorema principal, enunciado no capítulo 3 e demonstrado nos capítulos 5 e 6.

Apresentamos neste capítulo o maior resultado desta dissertação. De fato, consideremos a superposição dos operadores $W_{pas}W_DW_\alpha$, em que W_α age primeiro, em seguida W_D e depois W_{pas} . No estado inicial temos a medida δ_\emptyset concentrada no conjunto vazio, consideraremos a seqüência $(W_{pas}W_DW_\alpha)^t\delta_\emptyset$ e estudaremos o comportamento do processo quando $t \rightarrow \infty$.

3.1 Ilustração do processo

A Figura 3.1 é um exemplo da ação do operador $W_{pas}W_DW_\alpha$. Inicialmente ocorre a ação do operador de nascimento W_α , que inclui intervalos escolhidos ao acaso com comprimento $[i, i + 1]$ onde i é inteiro. Em seguida, o operador de enchimento age unindo intervalos com distância menor ou igual a $2D + 2$. E, por último, o operador W_{pas} age fazendo com que os limites esquerdo e direito dos intervalos sofram mudanças aleatórias a cada passo de tempo de acordo com as variáveis aleatórias L e R , em que L caracteriza o passeio aleatório do limite esquerdo de cada intervalo e R caracteriza o passeio aleatório do limite direito, respectivamente.

Consideremos o tempo contado a cada terço de unidade, ou seja, tomando valores: $t = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$, etc. Esta contagem de tempo é confortável pois no tempo $t = \frac{1}{3}$ temos o conjunto aleatório após a ação do operador W_α . No tempo $t = \frac{2}{3}$, o resultado após a ação do operador W_D e, finalmente em $t = 1$ o resultado obtido após a ação de W_{pas} ; o processo continua iterativamente até um tempo T .

Na Figura 3.1, os segmentos que pertencem ao nosso conjunto aleatório foram preenchi-

dos com pontos, chamaremos este conjunto de U , faremos a construção formal deste conjunto na próxima seção.

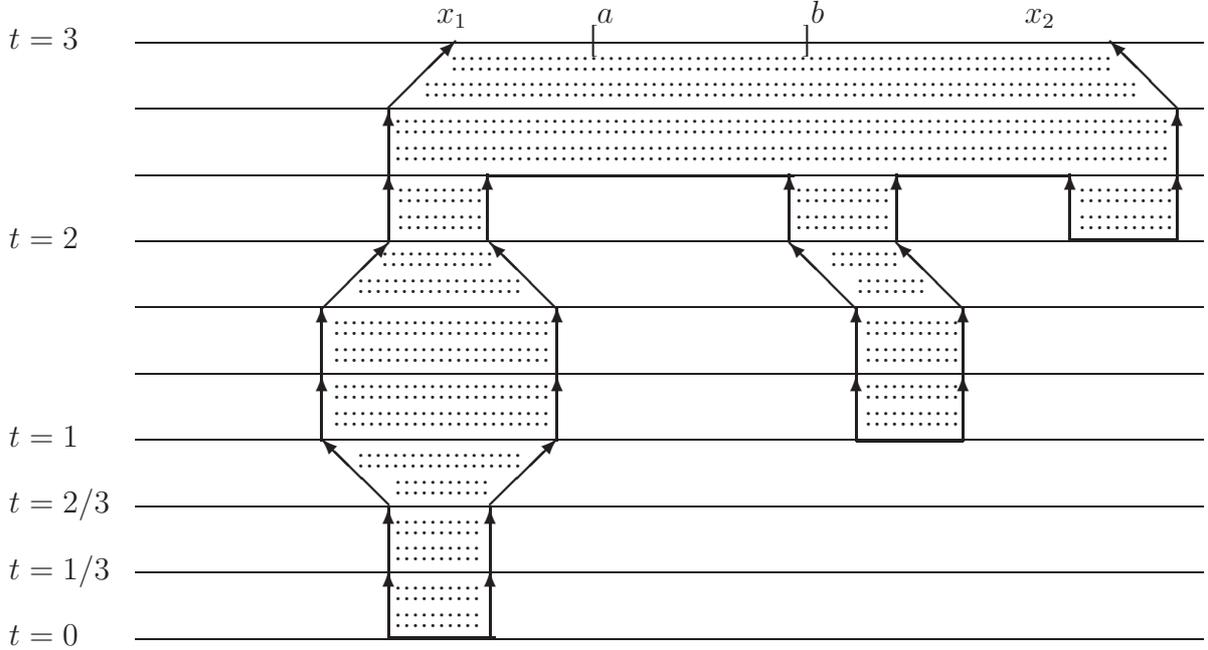


Figura 3.1: Fragmento do processo, onde há um contorno em volta do segmento $[a, b]$. Setas verticais representam a ação de W_α e W_D , setas inclinadas representam a ação de W_{pas} .

3.2 Construção do conjunto aleatório U em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$

Para cada conjunto regular construiremos o conjunto $U \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Para tal, construiremos indutivamente uma seqüência de conjuntos

$$U^t, U^{[t, t+1/3]}, U^{[t+1/3, t+2/3]}, U^{[t+2/3, t+1]}$$

onde $t = 0, 1, 2, \dots$.

Base de indução: $U^0 = \emptyset$.

Passo de indução: Temos que U^t já está definido. O conjunto U^t sempre pertence a reta $y = t$. Definiremos

$$U^{t+} = U^t \cup \cup(\text{pedaços}),$$

onde “pedaços” são os intervalos fechados que foram incluídos pela ação de W_α .

Definiremos agora um conjunto que imita o funcionamento do operador de nascimento, a saber:

$$U^{[t, t+1/3]} = \{(x, y) : x \in U^{t+}, t \leq y \leq t + 1/3\}.$$

Lembramos que $D = \max(|l_h|, |r_h|, 1)$. Definimos

$$U^{t+1/3+} = U^{t+} \cup \{h \in \mathbb{R} : \exists j < h < k : j, k \in U^{t+}, k - j \leq 2D + 2\}.$$

Então, o conjunto que imita o funcionamento do operador W_D , é dado por:

$$U^{[t+1/3, t+2/3]} = \{(x, y) : x \in U^{t+1/3+}, t + 1/3 \leq y \leq t + 2/3\}.$$

Definiremos agora o conjunto que imita o operador W_{pas} . No intervalo de tempo $t + 2/3 \leq y \leq t + 1$ devido à ação de W_{pas} cada bloco $[a_h, b_h]$ transforma-se em

$$[a_h + l_h, b_h + r_h],$$

com probabilidade $\theta_h^l \cdot \theta_h^r$; l_h e r_h são valores das variáveis auxiliares L e R , respectivamente.

Um *trapézio* é um quadrilátero que possui dois lados paralelos. Denotaremos por T_h o trapézio fechado com bases

$$\left[(a_h, t + 2/3), (b_h, t + 2/3) \right] \text{ e } \left[(a_h + l_h, t + 1), (b_h + r_h, t + 1) \right]. \quad (3.1)$$

A base altera-se devido às mudanças que ocorrem nos limites esquerdo e direito do bloco $[a_h, b_h]$ a cada aplicação do operador de passeio aleatório. Então

$$U^{[t+2/3, t+1]} = \bigcup_h T_h,$$

e

$$U^{t+1} = \{x : (x, t + 1) \in U^{[t+2/3, t+1]}\}.$$

O passo de indução está definido.

O conjunto U bidimensional é obtido da união de todos os conjuntos construídos como acima, a saber:

$$U = \bigcup_{t=0}^{\infty} \left(U^{[t, t+1/3]} \cup U^{[t+1/3, t+2/3]} \cup U^{[t+2/3, t+1]} \right).$$

Afirmamos que o conjunto U é fechado e mostraremos isso a seguir.

Chamemos de *bola* com centro $s = (x_0, y_0)$ e raio r , o conjunto

$$B(s, r) = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r\}. \quad (3.2)$$

Definição 3.1. Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ e s um ponto do plano, não necessariamente pertencente a C . Diz-se que s é ponto de acumulação de C se toda bola com centro s contém pelo menos um ponto $s_1 \in C$ diferente de s . Dizemos que um conjunto é fechado se contém todos os seus pontos de acumulação.

Lema 3.1. Cada bola tem intersecção não-vazia apenas com conjunto finito de retângulos gerados pelos operadores W_α e W_D e trapézios gerados pelo operador W_{pas} .

Demonstração: É bastante evidente por isso omitiremos a prova.

Lema 3.2. Seja $C \subset \mathbb{R}^2$. Se a intersecção de C com cada bola é fechada, então C é fechado.

Demonstração: Supomos que C não é fechado. Logo

$$\exists p \notin C : \forall B(p, r), \exists s \in C \cap B(p, r),$$

em outras palavras, p é ponto de acumulação de C que não pertence a C . Logo p é ponto de acumulação de $C \cap B(p, r)$ que não pertence a $C \cap B(p, r)$. Mas isto é impossível pois, por hipótese a intersecção $C \cap B(p, r)$ é fechada. *Lema 3.2 está provado.*

Lema 3.3. O conjunto U é fechado.

Demonstração: Devido ao lema 3.1, U é fechado em cada bola $B(k, r)$. O que significa que $U \cap B(k, r)$ é fechado. Logo U é fechado devido ao lema 3.2. *Lema 3.3 está provado.*

3.3 Lemas sobre aplicação de nossos operadores

O operador W_{pas} só pode ser aplicado para medidas regulares. Logo devemos construir o processo e provar que isto é possível em cada passo.

Lema 3.4. Para cada medida regular μ e cada $S > 0$:

(a) a intersecção $W_\alpha \mu \cap [-S, S]$ depende só das variáveis Q_i^t onde $-S-1 \leq i \leq S+1$, e da restrição $\mu_{[-S, S]}$.

(b) a intersecção $W_D \mu \cap [-S, S]$, depende só da restrição $\mu_{[-S, S]}$.

(c) a intersecção $W_{pas} \mu \cap [-S, S]$, depende só das variáveis L_h^t, R_h^t , onde $-S-D \leq h \leq S+D$ e da restrição $\mu_{[-S, S]}$.

Demonstração: A demonstração deste lema é evidente pois segue diretamente do fato de nossos operadores serem de interação local. *Lema 3.4 está provado.*

Lema 3.5. (a) *Se aplicarmos o operador W_α em uma medida regular, o resultado também será uma medida regular.*

(b) *Se aplicarmos o operador W_D em uma medida regular, o resultado também será uma medida regular.*

(c) *Se aplicarmos o operador W_{pas} em uma medida regular obtida após a ação do operador W_D , o resultado também será uma medida regular.*

Demonstração: Conseqüência direta do lema 3.4.

Lema 3.6 (Lema-Definição.). *Definimos o processo $(W_{pas}W_DW_\alpha)^t\delta_\emptyset$, passo a passo, cada vez provando que cada medida obtida assim é regular.*

Demonstração: Conseqüência do lema 3.5, pois a ação de cada operador em medidas regulares resulta em medidas regulares, logo a superposição dos operadores também resulta em medida regular. *Lema 3.6 está provado.*

3.4 O teorema principal

Neste momento estamos aptos para anunciar o que será o principal resultado desta dissertação.

Definição 3.2. *Dizemos que uma seqüência de conjuntos aleatórios μ^1, μ^2, \dots em \mathbb{R} enche a reta se para cada segmento $[a, b]$*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left([a, b] \subseteq \mu^t\right) = 1.$$

Teorema 3.1 (Teorema Principal). *i) Se $E(L) < E(R)$, então para cada $\alpha > 0$ a seqüência*

$$(W_{pas}W_DW_\alpha)^t\delta_\emptyset \quad \text{enche a reta .}$$

ii) Se $E(L) > E(R)$, existe $\alpha^ > 0$ tal que para todo $\alpha < \alpha^*$ a seqüência*

$$(W_{pas}W_DW_\alpha)^t\delta_\emptyset \quad \text{não enche a reta .}$$

No capítulo 5 apresentamos a demonstração do item *i)* e, no capítulo 6 apresentamos a demonstração do item *ii)* deste teorema, respectivamente.

Definição 4.1. Chamemos de acoplamento de dois conjuntos aleatórios μ e ν em \mathbb{R} , um conjunto aleatório ρ em \mathbb{R}^2 , tal que μ e ν são as marginais de ρ .

Sejam μ e ν dois conjuntos aleatórios. Diremos que $\mu \prec \nu$ se eles possuem acoplamento ρ tal que

$$\rho(\mu \subseteq \nu) = 1.$$

Definição 4.2. Um operador aleatório $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é chamado monótono se

$$\mu \prec \nu \Rightarrow P\mu \prec P\nu.$$

Lema 4.1. Os operadores W_α e W_D são monótonos.

Demonstração: É evidente se utilizar a técnica de acoplamento. *Lema 4.1 está provado.*

Lema 4.2. Se μ, ν são δ -medidas, seu acoplamento é δ -medida também.

Demonstração: Suponha, por contradição, que o acoplamento ρ de μ e ν não é uma δ -medida. Logo existe uma componente x_j e dois valores diferentes para ela, a e b tais que

$$\rho(x_j = a) > 0 \quad \text{e} \quad \rho(x_j = b) > 0.$$

Se a componente x_j pertence ao espaço onde μ é dada, então

$$\mu(x_j = a) > 0 \quad \text{e} \quad \mu(x_j = b) > 0,$$

logo μ não é δ -medida, contradição com a suposição que μ é δ -medida.

Se considerarmos que a componente x_j pertence ao espaço onde ν é dada, por analogia, concluiremos que ν não é δ -medida, que contradiz a suposição inicial. *Lema 4.2 está provado.*

Lema 4.3. *Se μ, ν são regulares, então seu acoplamento também é regular, isto é, sua restrição para cada $[-C, C] \times [-C, C]$ é uma combinação linear de δ -medidas.*

Demonstração: Conseqüência direta do lema 4.2

Lema 4.4. *O operador W_{pas} é monótono sempre que aplicado em medidas regulares obtidas a partir da ação do operador de enchimento.*

Demonstração: Sejam μ e ν dois conjuntos aleatórios regulares tais que $\mu \prec \nu$. Provemos que $W_{pas} \mu \prec W_{pas} \nu$. Dado que $\mu \prec \nu$, μ e ν têm acoplamento ρ tal que

$$\rho(\mu \subseteq \nu) = 1.$$

Devido ao lema 4.3 ρ é regular. Tomemos $C > 0$ qualquer e provemos que

$$(W_{pas}\mu)[-C, C] \prec (W_{pas}\nu)[-C, C].$$

Denotamos $\rho_1[-C, C]^2, \dots, \rho_k[-C, C]^2$ as δ -medidas cuja combinação linear é $\rho[-C, C]^2$. Para cada ρ_i denotamos por μ_j e ν_j suas marginais. É suficiente provar que

$$(W_{pas}\mu_j)[-C, C] \prec (W_{pas}\nu_j)[-C, C]$$

para cada j .

Como $\mu_j \subseteq \nu_j$, cada segmento de μ_j está incluído num segmento de ν_j .

Para cada segmento de ν_j denotamos de $x_{l_j}^1$ seu ponto final esquerdo e por $x_{l_j}^2$ o ponto final esquerdo do mais esquerdo segmento de μ_j contido nele. Analogamente, para cada segmento de ν_j denotamos de $x_{r_j}^1$ seu ponto final direito e por $x_{r_j}^2$ o ponto final direito do segmento mais direito de μ_j contido em ν_j .

Supomos o acoplamento de medidas auxiliares ζ . Neste acoplamento os valores de $\xi(x_{l_j}^1)$ e $\xi(x_{l_j}^2)$ coincidem, bem como os valores $\eta(x_{r_j}^1)$ e $\eta(x_{r_j}^2)$. Seguente este acoplamento,

$$\zeta(W_{pas}\mu)[-C, C] \prec \zeta(W_{pas}\nu)[-C, C].$$

Lema 4.4 está provado.

Ilustramos este fato na figura a seguir:

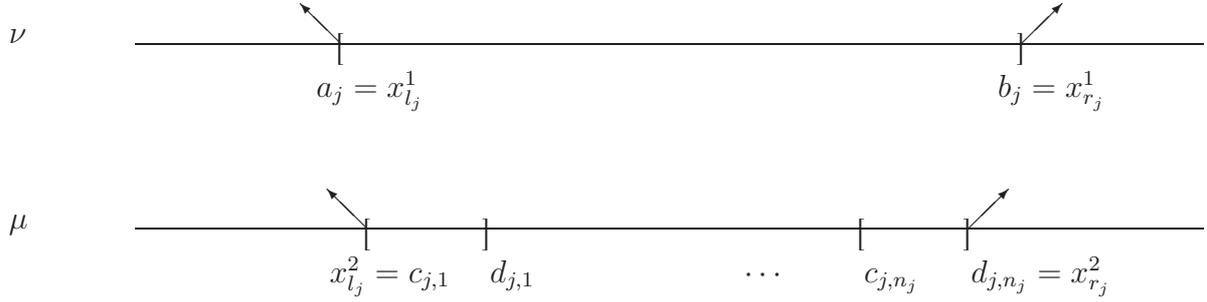


Figura 4.1: Ilustração de duas medidas regulares obtidas após a ação de W_D em que $\mu \prec \nu$ utilizando a técnica do acoplamento.

Definição 4.3. *Sejam P e Q operadores. Dizemos que P precede Q , e denotamos $P \prec Q$ se $P\mu \prec Q\mu$ para cada conjunto aleatório μ .*

Lema 4.5. *Para cada medida regular μ :*

- (i) $\mu \prec W_D\mu$;
- (ii) $\mu \prec W_\alpha\mu$;

Demonstração: É evidente pois os operadores W_D e W_α aumentam o conjunto aleatório a cada passo do processo de iteração.

Lema 4.6. $W_{pas} \prec W_{pas}W_DW_\alpha$.

Demonstração: Observamos que $\mu \prec W_DW_\alpha\mu$ para todo μ regular, consequência direta da monotonicidade dos operadores W_D e W_α e do lema 4.5.

Observamos que W_{pas} sempre é monótono se aplicado em medidas regulares obtidas após a ação de W_D , do lema 4.2. Logo $W_{pas}\mu \subseteq W_{pas}W_DW_\alpha\mu$ pois é uma superposição de operadores monótonos. *Lema 4.6 está provado.*

CAPÍTULO 5

Demonstração parte I

Suporemos que $E(L) < E(R)$. Por conveniência gostaríamos que $E(L) < 0$ e $E(R) > 0$. Devido a uniformidade de W_{pas} , podemos definir

$$L' = L + s \text{ e } R' = R + s,$$

variáveis aleatórias discretas acrescidas de uma constante real s , onde

$$s = -\frac{1}{2}(E(L) + E(R)).$$

Desta maneira:

$$E(L') = E(L + s) = E(L) + s = E(L) - \frac{1}{2}(E(L) + E(R)) = \frac{1}{2}(E(L) - E(R)),$$

utilizando a suposição que $E(L) < E(R)$, tem-se

$$E(L') = \frac{1}{2}(E(L) - E(R)) < 0, \tag{5.1}$$

analogamente, fazemos

$$E(R') = E(R + s) = E(R) + s = E(R) - \frac{1}{2}(E(L) + E(R)) = \frac{1}{2}(E(R) - E(L)),$$

segue que:

$$E(R') = \frac{1}{2}(E(R) - E(L)) > 0. \tag{5.2}$$

Após termos feito esta mudança, renomeamos $R' = R$ e $L' = L$ e passamos a usar simplesmente R e L .

Para a demonstração do item *i*) do teorema principal, faremos uma analogia com o problema da ruína do jogador utilizando uma versão generalizada.

5.1 O problema da ruína do jogador

Este é um problema clássico da teoria de Probabilidade e consiste de um jogador que possui um capital inicial \mathcal{C} , e a cada jogada ganha uma moeda com probabilidade p , e perde uma moeda com probabilidade $1 - p$. O jogo termina quando o capital do jogador termina, ou seja, o jogador fica arruinado.

Aplicações da Física sugerem uma versão mais geral. Uma partícula tem estado inicial em \mathcal{C} , e se move em cada passo de tempo discreto de uma unidade positiva, ou negativa. O passeio termina quando a partícula chega em 0. Físicos utilizam modelos de passeios aleatórios para aproximar uma difusão unidimensional ou o movimento Browniano, onde a partícula física é exposta a um grande número de choques moleculares que produzem um movimento aleatório, (Feller, 1968).

5.1.1 Generalização do problema da ruína do jogador

Nesta seção consideraremos uma generalização do problema da ruína do jogador. Para tal admitimos que a cada passo do processo o jogador pode ganhar qualquer valor real limitado (positivo, em caso de vitória, ou negativo em caso de perda).

Consideremos uma seqüência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas G_1, G_2, \dots . Cada v.a. G_j representa o ganho em cada passo do processo. Assumimos

$$G_j = \begin{cases} g_1, & \text{com probabilidade } \theta_1^g, \\ g_2, & \text{com probabilidade } \theta_2^g, \\ \vdots & \\ g_h, & \text{com probabilidade } \theta_h^g. \end{cases}$$

Então:

$$S_t = G_1 + G_2 + \dots + G_t + \mathcal{C}, \quad (5.3)$$

onde \mathcal{C} é o capital inicial do jogador e S_t é o capital no tempo t .

Mostraremos através dos lemas seguintes que, se o capital inicial \mathcal{C} for suficientemente grande, a probabilidade do jogador ficar arruinado é pequena.

Lema 5.1. *Se $E(G_1) > 0$, existe $q \in (0, 1)$ tal que $E(q^{G_1}) < 1$.*

Demonstração: Chamemos

$$f(q) = E(q^{G_1}) = \sum_{j=1}^n q^{g_j} \cdot P(G_1 = g_j). \quad (5.4)$$

A derivada de $f(q)$ com respeito a q é:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dq} &= \frac{d}{dq} \left(E(q^{G_1}) \right) \\
&= E \left(\frac{d}{dq} (q^{G_1}) \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dq} (q^{g_j}) P(G_1 = g_j) \\
&= \sum_{j=1}^n \theta_j^g \frac{d}{dq} (q^{g_j}) \\
&= \sum_{j=1}^n \theta_j^g \cdot g_j \cdot q^{g_j-1}.
\end{aligned}$$

Se $q = 1$, temos

$$f(1) = E(1^{G_1}) = E(1) = 1,$$

e

$$\left. \frac{df}{dq} \right|_{q=1} = \sum_{j=1}^n g_j \cdot \theta_j^g = \sum_{j=1}^n g_j \cdot P(G_1 = g_j) = E(G_1).$$

Da hipótese do nosso lema, $E(G_1) > 0$. Logo a função $f(q)$ é crescente no ponto $q = 1$. Desta maneira existe $q \in (0, 1)$ tal que $f(q) < 1$, logo $E(q^{G_1}) < 1$. *Lema 5.1 está provado.*

Lema 5.2. *Se $0 < q < 1$,*

$$P(S_t < 0) \leq E(q^{S_t}). \tag{5.5}$$

Demonstração: Dado que $q < 1$ então $q^j > 1$ para cada $i < 0$. Logo

$$\begin{aligned}
E(q^{S_t}) &= \sum_j q^j \cdot P(S_t = j) \\
&\geq \sum_{j < 0} q^j \cdot P(S_t = j) \\
&\geq \sum_{j < 0} P(S_t = j) \\
&= P(S_t < 0).
\end{aligned}$$

Lema 5.2 está provado.

Para a demonstração do próximo lema utilizaremos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
E(q^{S_t}) &= E(q^{\mathcal{C}+G_1+\dots+G_t}) \\
&= E(q^{\mathcal{C}} \cdot q^{G_1} \dots q^{G_t}) \\
&= q^{\mathcal{C}} \cdot E(q^{G_1}) \dots E(q^{G_t}) \\
&= q^{\mathcal{C}} \cdot (E(q^{G_1}))^t,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

pois G_j são variáveis aleatórias i.i.d. e \mathcal{C} é o capital inicial.

Lema 5.3. *Se $E(G_1) > 0$ então*

$$\lim_{\mathcal{C} \rightarrow \infty} P(\exists t : S_t < 0) = 0.$$

Demonstração: É claro que

$$P(\exists t : S_t < 0) \leq \sum_t P(S_t < 0).$$

Sabemos do lema 5.2 que para todo $q \in (0, 1)$

$$P(S_t < 0) \leq E(q^{S_t}).$$

Por outro lado, do lema 5.1 existe $q \in (0, 1)$ tal que $E(q^{G_1}) < 1$. Ainda, de (5.6)

$$\begin{aligned}
\sum_t E(q^{S_t}) &= \sum_t q^{\mathcal{C}} \cdot (E(q^{G_1}))^t \\
&= q^{\mathcal{C}} \sum_t (E(q^{G_1}))^t \\
&= q^{\mathcal{C}} \frac{E(q^{G_1})}{1 - E(q^{G_1})}.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

(5.7) tende para zero quando \mathcal{C} tende para infinito. Assim:

$$\lim_{\mathcal{C} \rightarrow \infty} P(\exists t : S_t < 0) = 0.$$

Lema 5.3 está provado.

5.2 Demonstração do item *i*) do teorema principal

Anunciaremos inicialmente alguns lemas que serão necessários para esta demonstração.

5.2.1 Lemas auxiliares

Suponhamos que em algum determinado tempo t_0 o conjunto regular μ possua um segmento $[a, b]$, onde $a \leq -\mathcal{S} - \mathcal{C}$, $b \geq \mathcal{S} + \mathcal{C}$, aqui \mathcal{S} é uma constante fixa que escolhemos. Vamos analisar o que acontece com este intervalo quando o tempo cresce para infinito. Devido ao lema 4.6, podemos supor que só o operador W_{pas} age sem os operadores W_D e W_α .

A cada passo do tempo a fronteira esquerda pode se deslocar por um valor l_h com probabilidade θ_h^l , correspondente à variável L . Situação análoga ocorre com a fronteira direita e a variável R , desta maneira cada fronteira sofre uma mudança aleatória em cada passo de tempo.

Lema 5.4. *Seja $E(L) < 0$ e $E(R) > 0$. Para cada $\varepsilon > 0$ e cada \mathcal{S} , existe \mathcal{C} tal que se tomarmos o conjunto regular inicial $[a, b]$, onde*

$$a \leq -\mathcal{S} - \mathcal{C}, \quad b \geq \mathcal{S} + \mathcal{C}$$

e aplicarmos o operador W_{pas} iterativamente, a probabilidade de que o segmento $(-\mathcal{S}, \mathcal{S})$ sempre é cheio não é menor que $1 - \varepsilon$.

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Baseado no lema 5.3 podemos escolher \mathcal{C}' tal que para todos $\mathcal{C} > \mathcal{C}'$ a fronteira esquerda do intervalo $[a, b]$ desloca-se para o lado direito de $-\mathcal{S}$ com probabilidade não mais que $\varepsilon/2$.

De maneira análoga, ainda do lema 5.3, podemos escolher \mathcal{C}'' tal que para todos $\mathcal{C} > \mathcal{C}''$ a fronteira direita do intervalo desloca-se para o lado esquerdo de \mathcal{S} com probabilidade não mais que $\varepsilon/2$.

De onde podemos concluir que a probabilidade de que pelo menos um destes acontece não é maior que ε . *Lema 5.4 está provado.*

Lema 5.5. *Seja $E(L) < 0$, $E(R) > 0$ e $\alpha > 0$. Logo $(W_{pas}W_DW_\alpha)^t\delta_\emptyset$ enche a reta quando $t \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Denotamos $\mu^t = (W_{pas}W_DW_\alpha)^t\delta_\emptyset$. Devemos provar que para cada a e b , em que $a < b$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T \forall t \geq T : P\left(\mu^t \supseteq [a, b]\right) \geq 1 - \varepsilon. \quad (5.8)$$

Escolhemos $\varepsilon > 0$ qualquer. Utilizamos também os parâmetros T e \mathcal{C} , cujos valores escolheremos posteriormente. Para cada $t \in [1, T]$ consideramos o evento:

$$\mathcal{E}_t = \{Q : \forall i \in [a - \mathcal{C} - 1, b + \mathcal{C} + 1] : Q_i^t = 1\}.$$

O evento \mathcal{E}_t é uma garantia de que μ^t inclui o segmento $[a - \mathcal{C}, b + \mathcal{C}]$.

As variáveis auxiliares Q_i^t são independentes. Cada uma assume valor 1 com probabilidade α e zero com probabilidade $1 - \alpha$. Desta maneira,

$$P(\mathcal{E}_t) \geq \alpha^{2\mathcal{C}+b-a+2}$$

logo

$$P(\text{não } \mathcal{E}_t) \leq 1 - \alpha^{2\mathcal{C}+b-a+2}.$$

Chamemos de *primeiro fracasso* o evento:

$$\text{“}\mathcal{E}_t \text{ não acontece para nenhum } t \in [1, T]\text{.”}$$

Assim a probabilidade do primeiro fracasso ocorrer é $(1 - \alpha^{2\mathcal{C}+b-a+2})^T$. Esta probabilidade tende para zero quando $T \rightarrow \infty$.

Logo para cada \mathcal{C} existe T tal que

$$(1 - \alpha^{2\mathcal{C}+b-a+2})^T \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad [F_1]$$

Vamos escolher primeiro \mathcal{C} ; logo que \mathcal{C} seja escolhido, escolhemos depois o valor de T .

Suponhamos que o primeiro fracasso não acontece, isto é, pelo menos um evento \mathcal{E}_t aconteceu. Denotamos por t_0 o valor de t quando \mathcal{E}_t acontece pela primeira vez. Em seguida definimos as seqüências de variáveis aleatórias $A_{t_0}, A_{t_0+1}, \dots$ e $B_{t_0}, B_{t_0+1}, \dots$ de maneira indutiva:

Base de indução: se $t = t_0$, $A_{t_0} = a - \mathcal{C}$.

Passo de indução: $A_{t_0+1} = A_{t_0} + L_{t_0}$.

De maneira análoga,

Base de indução: se $t = t_0$, $B_{t_0} = b + \mathcal{C}$.

Passo de indução: $B_{t_0+1} = B_{t_0} + R_{t_0}$.

Estas seqüências de variáveis aleatórias perfazem passeios aleatórios nas fronteiras esquerda e direita do intervalo aleatório que pertence ao nosso conjunto, respectivamente. Do lema 5.4 temos que:

$$P(\exists t : A_{t_0} > a) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad [F_2]$$

ainda

$$P(\exists t : B_{t_0} < b) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad [F_3]$$

Chamemos de *fracasso de tipo dois* o evento

$$\{\exists t : A_{t_0} > a\}.$$

Informalmente, o fracasso tipo dois acontece quando a fronteira esquerda do nosso intervalo aleatório passa através de a . A fórmula $[F_2]$ significa que a probabilidade deste fracasso não excede $\varepsilon/3$. E *fracasso de tipo três* o evento:

$$\{\exists t : B_{t_0} < b\}$$

isto é, a fronteira direita do intervalo aleatório que pertence ao nosso conjunto passa através de b . A probabilidade deste evento também não excede $\varepsilon/3$.

Dos três resultados anteriores, temos que a probabilidade de cada fracasso não excede $\varepsilon/3$, logo a probabilidade que nenhum fracasso acontece não é menor que $1 - \varepsilon$.

Mas a ausência de todos os três fracassos é uma garantia de ocorrência do evento:

$$\mu^t \supseteq [a, b]$$

para todos $t \geq T$. Logo a desigualdade (5.8) está verificada. *Lema 5.5 está provado.*

Conseqüentemente, para provarmos o item *i)* do teorema principal basta observarmos do lema 5.5 que se $E(L) < E(R)$, então a seqüência

$$(W_{pas}W_DW_\alpha)^t\delta_\emptyset \quad \text{enche a reta,}$$

e isto é o que queremos provar. *Item i) do teorema principal está provado.*

Neste capítulo provaremos o item *ii*) do teorema principal. Para tal mostraremos que para todas L, R onde $E(L) > E(R)$ existe $\alpha^* > 0$ tal que se $\alpha < \alpha^*$, a seqüência de medidas $\mu^t = (W_{pas}W_DW_\alpha)^t\delta_0$ não enche a reta.

Para provar isto, vamos estimar a probabilidade de presença do intervalo $[a, b]$ no conjunto aleatório, isto é

$$P\left([a, b] \subseteq \mu^t\right).$$

Incluímos este evento numa união de vários eventos. Logo sua probabilidade não excede a soma das probabilidades destes eventos.

6.1 Algumas definições

Supomos que $E(L) > E(R)$, mas gostaríamos de ter mais, ou seja gostaríamos que $E(L) > 0$ e $E(R) < 0$. Para tanto definimos as variáveis aleatórias como fizemos no capítulo 5:

$$L' = L + s \text{ e } R' = R + s.$$

Com L e R assim definidas temos que $E(L') > 0$ e $E(R') < 0$. Tão logo tenhamos estas propriedades, renomeamos $L' = L$ e $R' = R$.

Utilizaremos as seguintes definições na demonstração do item *ii*) do nosso teorema principal.

Definição 6.1. Diremos que uma matriz de elementos reais

$$M = m_{lk}, \quad (l = 1, \dots, j; k = 1, \dots, k)$$

é não negativa e escrevemos: $M \geq 0$ (positiva e escrevemos: $M > 0$), se todos os elementos $m_{lk} \geq 0$ ($m_{lk} > 0$).

Definição 6.2. Seja M uma matriz quadrada de ordem n . M é dita ser redutível se existe uma permutação de índices que a reduz na forma:

$$M' = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

onde M_{11} e M_{22} são matrizes quadradas. Em outro caso M é dita ser irredutível.

Definição 6.3. Se M é uma matriz quadrada de ordem n e I é a matriz identidade de mesma ordem n , definimos o polinômio característico de M como:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - M).$$

Dizemos que um autovalor é dominante, se ele é uma raiz simples positiva do polinômio característico $p(\lambda)$.

Consideremos agora o teorema:

Teorema 6.1 (Perron-Frobenius). *Seja M uma matriz quadrada irredutível não-negativa de ordem n . Então sempre existe um autovalor r , que é uma raiz simples do polinômio característico de M . Os módulos de todos os outros autovalores são menores que r . A este autovalor dominante r , temos um autovetor associado com coordenadas positivas.*

Demonstração: Desde sua publicação em 1907, várias demonstrações surgiram para este teorema, uma das quais pode ser vista em Gantmacher (1959).

Corolário 6.1. *Uma condição necessária e suficiente para que o número real λ seja maior que o autovalor dominante r da matriz quadrada de ordem n , $M = (m_{lk}) \geq 0$,*

$$r < \lambda$$

é que, para este valor de λ , todos os menores principais dominantes da matriz característica $M_\lambda = \lambda I - M$ sejam positivos, isto é:

$$\lambda - m_{11} > 0, \quad \left| \begin{array}{cc} \lambda - m_{11} & -m_{12} \\ -m_{21} & \lambda - m_{22} \end{array} \right| > 0, \dots, \quad \left| \begin{array}{cccc} \lambda - m_{11} & -m_{12} & \cdots & -m_{1n} \\ -m_{21} & \lambda - m_{22} & \cdots & -m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \cdots & \lambda - m_{nn} \end{array} \right| > 0$$

Demonstração: A demonstração deste corolário pode ser vista em Gantmacher, (1959).

6.2 Classificação de $U [0, T]$ em classes de equivalência

Denotamos $U [0, T] = \{(x, t) \in U : t \leq T\}$.

Definição 6.4. Uma curva do ponto (x_0, y_0) ao ponto (x_1, y_1) no plano \mathbb{R}^2 é uma função contínua $f_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(0) = (x_0, y_0)$ e $f(1) = (x_1, y_1)$.

Seja um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$, e dois pontos $a, b \in C$. Dizemos que a relaciona-se com b em C e notamos $a \sim b$, se existe uma curva em C onde a é ponto inicial e b é ponto final.

Lema 6.1. Para cada C a relação $a \sim b$ é uma relação de equivalência.

Demonstração: Devemos verificar as seguintes relações:

(i) $\forall a : a \sim a$.

Seja $a = (x, y)$. Então definimos $\forall h : f(h) \equiv (x, y)$. Ou seja, para qualquer que seja $h \in [0, 1]$ temos uma curva constante em a .

(ii) $\forall a, b : a \sim b \Rightarrow b \sim a$.

Suponhamos que $a \sim b$, logo temos uma curva de a a b . Para verificar a relação (ii) basta considerarmos a função

$$f'(h) = f(1 - h),$$

a partir dela temos uma curva com ponto inicial em b e ponto final em a , ou ainda: $b \sim a$.

(iii) $\forall a, b, c : a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

Seja f^1 uma curva de $a = (x_0, y_0)$ a $b = (x_1, y_1)$. E seja f^2 uma curva de $b = (x_1, y_1)$ a $c = (x_2, y_2)$. Definimos a nova curva f^3 assim:

$$f^3(h) = \begin{cases} f^1(2h), & 0 \leq h \leq 1/2, \\ f^2(2h - 1), & 1/2 \leq h \leq 1. \end{cases}$$

Lema 6.1 está provado.

Devido ao lema 6.1 cada conjunto no plano pode ser partido em classes de equivalência onde dois pontos a e b são equivalentes se $a \sim b$. Consideramos a partição de $U [0, T]$ nestas classes de equivalência e tomamos a classe que inclui o segmento $[(a, T), (b, T)]$ e a denotamos por \mathcal{J} .

Definição 6.5. Uma curva é dita ser **fechada** se seus pontos inicial e final coincidem, ou seja $f(0) = f(1)$.

A fronteira de \mathcal{J} é uma curva fechada. Se percorrida no sentido positivo (anti-horário) ela consiste do segmento $[a, b]$ (passado de b para a) e uma seqüência de segmentos.

6.3 Caminhos

Durante o processo iterativo pode ocorrer que um segmento $[i, i + 1]$ onde $i \in \mathbb{Z}$, cruza uma componente de nosso conjunto, conforme ilustramos a seguir:

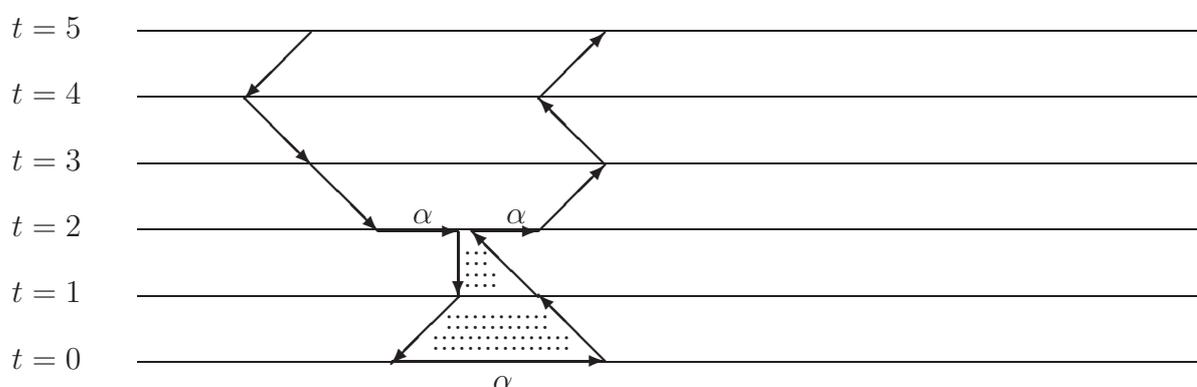


Figura 6.1: Ilustração de um possível fragmento de caminho durante o processo iterativo. Esta é a classe que inclui o segmento $[(a, T), (b, T)]$. Neste fragmento será excluída a parte preenchida com pontos.

Eliminaremos a parte da componente que fica abaixo deste segmento (parte cheia com pontos) e consideraremos no caminho o passo de tipo α .

De cada curva fechada de \mathcal{J} eliminamos todos os passos verticais, ou seja todos os passos para baixo e para cima gerados pelos operadores W_α e W_D e definimos nosso caminho como:

Definição 6.6. O caminho, salvo $[a, b]$, é a seqüência de segmentos descritos abaixo.

(i) **para baixo do tipo \downarrow :**

são segmentos $(\Delta x, \Delta t)$, onde $\Delta x \in \{-l_1, \dots, -l_\xi\}$ e $\Delta t = -1$.

(ii) **horizontal para a direita do tipo α :**

são segmentos $(\Delta x, \Delta t)$, onde $\Delta x \in (0, 1]$ e $\Delta t = 0$.

(iii) **horizontal para a direita do tipo D** :

são segmentos $(\Delta x, \Delta t)$, onde $\Delta x \in (0, 2D + 2]$ e $\Delta t = 0$.

(iv) **para cima do tipo \uparrow** :

são segmentos $(\Delta x, \Delta t)$, onde $\Delta x \in \{r_1, \dots, r_\eta\}$ e $\Delta t = 1$.

A Figura 6.2 é um exemplo de caminho que possui os quatro tipos de passos enunciados anteriormente. Este é um caminho *correto*, que definiremos na próxima seção.

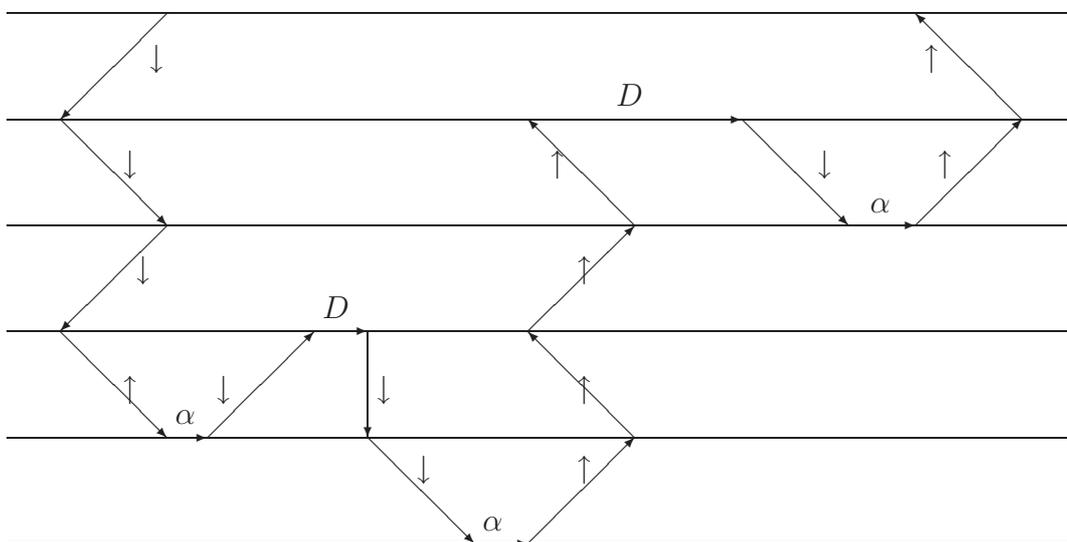


Figura 6.2: Exemplo de um possível caminho que pode ocorrer em $[1, T]$ para a classe \mathcal{J} .

6.3.1 Caminho correto

Chamaremos de *caminho correto* \mathcal{H} , cada caminho que possui as seguintes propriedades:

- a) o caminho começa num ponto (x_1, T) , $x_1 \leq a$.
- b) o caminho é uma seqüência de segmentos de retas. Chamaremos estes segmentos de *passos*. Cada passo pode ser considerado como um vetor $(\Delta x, \Delta t)$.

c) Cada passo do caminho pode ter um dos tipos \downarrow , α , D , \uparrow . Então:

se temos passo do tipo \downarrow_j , $\Delta x \in \{-l_1, \dots, -l_\xi\}$, $\Delta t = -1$,

se temos passo do tipo α , $\Delta x \in (0, 1]$, $\Delta t = 0$,

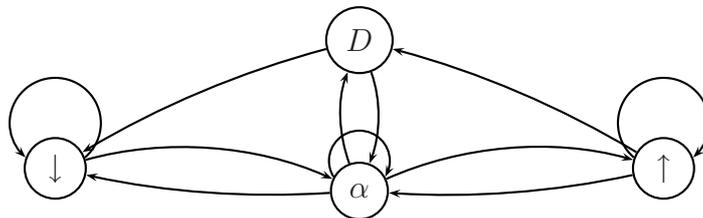
se temos passo do tipo D , $\Delta x \in (0, 2D + 2]$, $\Delta t = 0$,

se temos passo do tipo \uparrow_k , $\Delta x \in \{r_1, \dots, r_\eta\}$, $\Delta t = 1$.

d) Cada seqüência de dois passos permitida em um caminho está apresentada na tabela abaixo. Representamos com o sinal $+$ uma seqüência permitida e com 0 uma que não é permitida.

	Segundo passo				
		\downarrow	α	D	\uparrow
	Primeiro passo	\downarrow	+	+	0
	α	+	+	+	+
	D	+	+	0	0
	\uparrow	0	+	+	+

Esta mesma tabela pode ser representada pelo seguinte diagrama:



e) O primeiro passo é do tipo \downarrow ou α ;

f) O último passo tem tipo α ou \uparrow ;

g) O caminho acaba num ponto (x_2, T) , $x_2 \geq b$.

À diferença $x_2 - x_1$ chamaremos de *avanço do caminho*. Denotamos por $|\mathcal{H}|$ o comprimento do caminho, ou seja, número de passos no caminho.

6.3.2 Código correto

Para cada caminho \mathcal{H} associamos um *código* \mathcal{C} , isto é, a seqüência de tipos de passos deste caminho. Logo,

Definição 6.7. Um código \mathcal{C} é uma seqüência finita de símbolos tal que cada símbolo pertence ao conjunto:

$$\{\downarrow_1, \dots, \downarrow_\xi, \alpha, D, \uparrow_1, \dots, \uparrow_\eta\}.$$

Chamemos $\downarrow_1, \dots, \downarrow_\xi$ de símbolos para baixo, α e D símbolos horizontais e $\uparrow_1, \dots, \uparrow_\eta$ símbolos para cima.

Chamemos de *comprimento do código*, e denotamos por $|\mathcal{C}|$, o número de símbolos do código.

Para cada símbolo definimos o *avanço horizontal*, o qual denotamos por $AH(\mathcal{C})$. Definimos também, o *avanço vertical* denotado por $AV(\mathcal{C})$. A tabela a seguir explicita o avanço horizontal e vertical de cada símbolo:

Símbolo	$AH(\mathcal{C})$	$AV(\mathcal{C})$
\downarrow_j	$-l_j$	-1
\uparrow_k	r_k	1
α	1	0
D	$2D + 2$	0

Definição 6.8. Dizemos que um código é correto se satisfaz as condições:

1. Seu primeiro símbolo é para baixo ou horizontal.
2. Se s_j e s_{j+1} são símbolos consecutivos, são proibidas as seguintes seqüências de símbolos:

- s_j é para baixo, s_{j+1} é para cima,
- s_j é para baixo, s_{j+1} é D ,
- s_j é D , s_{j+1} é D ,
- s_j é D , s_{j+1} é para cima,
- s_j é para cima, s_{j+1} é para baixo

Nota: Observe que a condição 2. da definição de código correto corresponde à condição d) da definição de caminho correto.

3. $AH(\mathcal{C}) \geq b - a$ e $AV(\mathcal{C}) = 0$.
4. Seu último símbolo é horizontal ou para cima.

Dizemos que um caminho *realiza* um código \mathcal{C} se a seqüência de tipos de passos deste caminho coincide com o código \mathcal{C} .

6.3.3 Peso do caminho e peso do código

Definição 6.9. Definimos por **peso do passo** a probabilidade do passo ocorrer. Então

$$\begin{cases} \text{Peso do passo } \downarrow_j & \equiv P(L = l_j), \\ \text{Peso do passo } \uparrow_k & \equiv P(R = r_k), \\ \text{Peso do passo } \alpha & \equiv \alpha, \\ \text{Peso do passo } D & \equiv 1. \end{cases}$$

Chamaremos de **peso do caminho** o produto dos pesos de seus passos.

Definição 6.10. Definimos **peso do símbolo** como a seguir

$$\begin{cases} \text{Peso do símbolo } \downarrow_j & \equiv P(L = l_j), \\ \text{Peso do símbolo } \uparrow_k & \equiv P(R = r_k), \\ \text{Peso do símbolo } \alpha & \equiv \alpha, \\ \text{Peso do símbolo } D & \equiv 2D + 3. \end{cases}$$

Chamaremos de **peso do código** o produto dos pesos de seus símbolos.

Nota. Observe que os pesos dos passos são iguais aos pesos dos símbolos, com exceção de um caso, a saber: o passo de tipo D tem peso 1, enquanto que o símbolo de tipo D tem peso igual a $2D + 3$.

6.3.4 Relações entre caminhos e códigos

Lembramos que estamos interessados na probabilidade do evento $([a, b] \subseteq \mu^T)$ ocorrer. Como já mencionado no início deste capítulo, incluímos este evento numa união de eventos, logo:

Lema 6.2. Para todos T ,

$$P\left([a, b] \subseteq \mu^T\right) \leq \sum_{\substack{\text{todos caminhos} \\ \text{corretos}}} \text{peso}(\mathcal{H}) \quad (6.1)$$

Demonstração: O evento $([a, b] \subseteq \mu^T)$ está incluso na união de eventos: “este caminho é a fronteira de \mathcal{J} ”,

$$\bigcup_{\substack{\text{todos caminhos} \\ \text{corretos}}} (\text{este caminho percorre a fronteira de } \mathcal{J}),$$

logo a probabilidade dele não excede a soma de probabilidades destes eventos, o que implica (6.1). *Lema 6.2 está provado.*

Lema 6.3. *Suponha que o caminho \mathcal{H} realiza o código \mathcal{C} . Então*

$$AH(\mathcal{H}) \leq AH(\mathcal{C}).$$

Demonstração: Dado que o caminho \mathcal{H} realiza o código \mathcal{C} , então cada símbolo horizontal de tipo α e D deste código assume o valor maximal 1 e $2D+2$, respectivamente. *Lema 6.3 está provado.*

Lema 6.4. (a) *O final de cada passo de tipo α que é sucedido por um passo de tipo \uparrow é um número inteiro.*

(b) *O início de cada passo de tipo α que é precedido por um passo de tipo \downarrow é um número inteiro.*

Demonstração: Este fato é evidente por isso omitiremos a prova.

Lema 6.5. *Sejam H_1 e H_2 dois caminhos que realizam o mesmo código \mathcal{C} :*

(a) *Consideremos um símbolo tipo α em \mathcal{C} . A diferença dos comprimentos dos passos em H_1 e H_2 que correspondem a este símbolo é um número inteiro.*

(b) *Consideremos um símbolo tipo D em \mathcal{C} . A diferença dos comprimentos dos passos em H_1 e H_2 que correspondem a este símbolo é um número inteiro.*

(c) *A diferença entre avanços horizontais de H_1 e H_2 é um número inteiro.*

Atribuimos para cada símbolo no código \mathcal{C} uma *altura* t , a qual é dada por T acrescido da soma de avanços verticais de todos os símbolos anteriores incluindo este símbolo. A altura do primeiro símbolo é T .

Demonstração de (a) Faremos indução na ordem de crescimento de t .

Base de indução: Consideremos o valor minimal de t , para o qual temos um símbolo α . Então pode acontecer somente um dos casos:

$$\alpha\alpha\uparrow, \alpha\alpha\downarrow, \downarrow\alpha\alpha, \downarrow\alpha\uparrow.$$

Em cada destes casos ambos pontos finais de nosso passo são inteiros, pois é consequência direta do lema 6.4.

Passo de indução: Suponha que nossa afirmação já está provada para valores menores de t . Devemos mostrar a veracidade para t . Temos um destes casos:

$$\downarrow\alpha\downarrow, \downarrow\alpha\alpha, \downarrow\alpha\uparrow, \alpha\alpha\downarrow, \alpha\alpha\alpha, \alpha\alpha\uparrow, \uparrow\alpha\alpha, \uparrow\alpha\uparrow, \downarrow\alpha D, \uparrow\alpha D.$$

Sejam h_1 e h_2 os passos nos caminhos \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , respectivamente, que correspondem a este símbolo α .

caso $\downarrow \alpha \downarrow$: Segundo o lema 6.4, as coordenadas iniciais x'_1 do passo h_1 e x''_1 do passo h_2 são números inteiros. Depois de h_1 e h_2 podem ocorrer vários passos de tipo \downarrow , os quais são sucedidos por um passo de tipo α . As coordenadas iniciais deste passo, x'_2 para \mathcal{H}_1 e x''_2 para \mathcal{H}_2 , são números inteiros, consequência do lema 6.4.

O comprimento de h_1 é dado pela diferença: $(x'_2 - k) - x'_1$, onde k é o avanço horizontal dos passos tipo \downarrow . Analogamente, o comprimento de h_2 é dado por: $(x''_2 - k) - x''_1$. E portanto a diferença dos comprimentos de h_1 e h_2 é um número inteiro. Ilustramos este possível caso através da Figura 6.2.

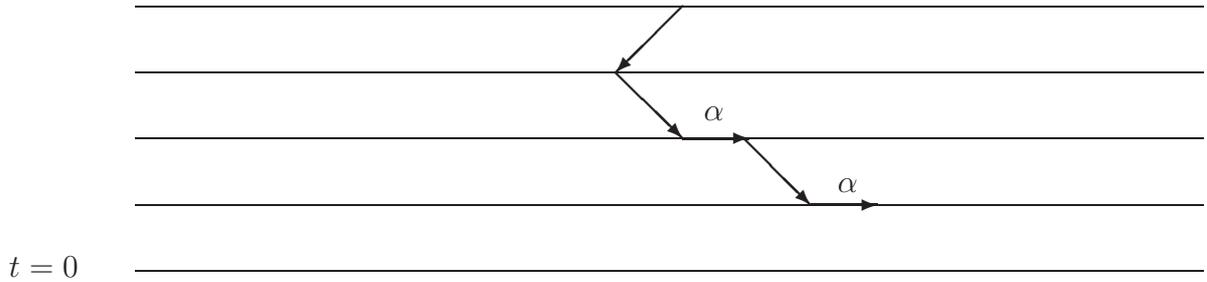


Figura 6.3: Ilustração do caso (a) do lema 6.5 destacando a seqüência de símbolos: $\downarrow \alpha \downarrow$.

caso $\alpha\alpha\alpha$: Devido a definição do operador W_α , as coordenadas inicial e final de cada passo tipo α são inteiras, logo as diferenças dos comprimentos dos passos h_1 e h_2 são inteiras.

De maneira bastante parecida mostra-se para todos os outros casos que a diferença de comprimentos dos passos h_1 e h_2 que correspondem ao mesmo símbolo α é um número inteiro.

Nota: Observe que o *caso $\uparrow \alpha \downarrow$* é impossível. Suponha que temos um passo de tipo α precedido por um passo de tipo \uparrow e sucedido por um passo \downarrow . Então $AH(\uparrow) \leq D$, $AH(\downarrow) \leq D$ e $AH(\alpha) \leq 1$. Portanto o avanço horizontal desta seqüência não excede $2D + 1$. Logo antes deste caso acontecer o buraco seria enchido devido ao passo de tipo D . Ilustramos este caso a seguir:

Demonstração do item (b) Suponha que temos um símbolo D ; vamos analisar o que

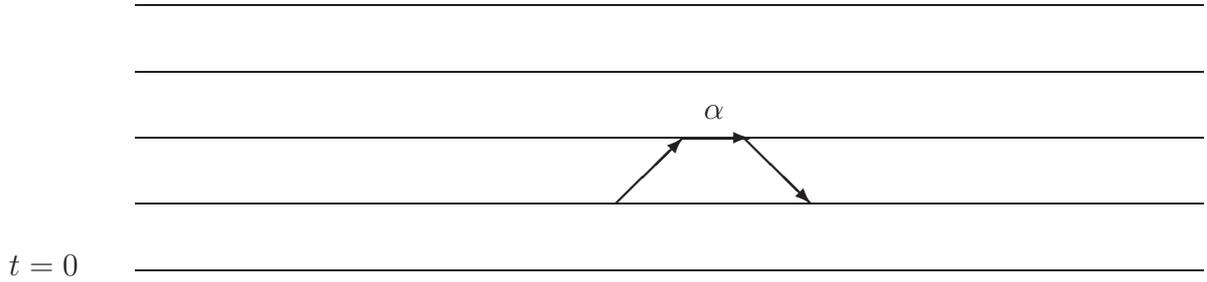


Figura 6.4: Ilustração da seqüência de passos impossíveis $\uparrow \alpha \downarrow$, pois a distância entre os pontos abaixo dos passos \uparrow e \downarrow é menor que $2D + 2$.

acontece antes e depois de D . Aqui temos quatro possíveis seqüências, a saber:

$$\alpha D \alpha, \quad \uparrow D \alpha, \quad \alpha D \downarrow, \quad \uparrow D \downarrow.$$

Todas elas são análogas. Consideraremos o caso mais complicado, $\uparrow D \downarrow$.

Sejam h_1 e h_2 os passos nos caminhos \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , respectivamente, que correspondem a este símbolo D .

Antes de h_1 e h_2 existem vários (talvez nenhum) passos de tipo \uparrow precedidos por um passo α , cuja coordenada final é um número inteiro, do lema 6.4. Depois de cada h_1 e h_2 existem vários (talvez nenhum) passos de tipo \downarrow , sucedidos por passos de tipo α cujo começo tem coordenada inteira, do lema 6.4.

O comprimento de h_1 é dado por: $(x'_2 - k_2) - (x'_1 + k_1)$ em que k_1, k_2 são os avanços horizontais dos passos \uparrow e \downarrow , respectivamente. De maneira análoga, o comprimento de h_2 é $(x''_2 - k_2) - (x''_1 + k_1)$. Portanto, a diferença dos comprimentos de h_1 e h_2 é um número inteiro. Ilustramos a seguir este caso:

Demonstração de (c) Conseqüência do fato da diferença dos comprimentos de cada dois passos horizontais (tipo α ou D) serem um número inteiro, como demonstrado pelos itens (a) e (b). *Lema 6.5 está provado.*

Lema 6.6. *Sejam H_1 e H_2 dois caminhos que realizam o mesmo código \mathcal{C} :*

- (a) *Os comprimentos de passos em H_1 e H_2 que correspondem a α são iguais.*
- (b) *Para cada símbolo de tipo D deste código existem não mais que $2D + 2$ possíveis valores de comprimentos (ou avanços horizontais) de passos que realizam este símbolo.*

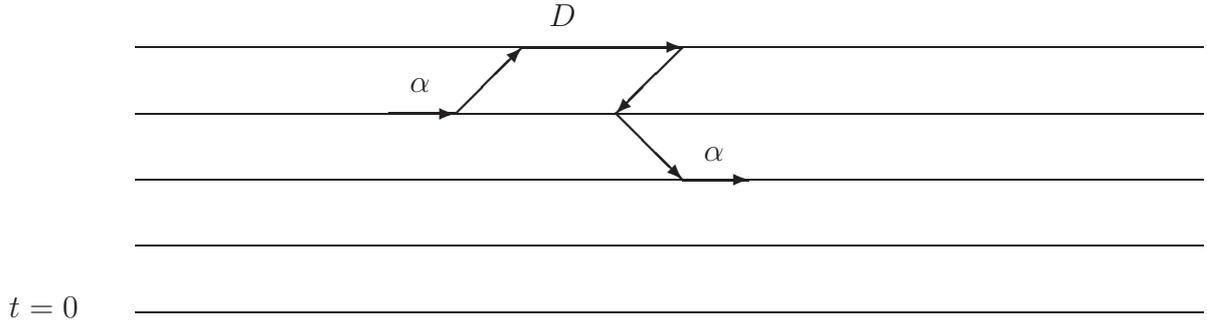


Figura 6.5: Ilustração do item (b) do lema 6.5 onde um passo de tipo D pode ser precedido por passos de tipo \uparrow ou α e sucedido por passos de tipo \downarrow ou α .

Demonstração de (a) Conseqüência imediata do fato de que o comprimento de qualquer passo de tipo α pertence a $[0, 1]$ e do lema 6.5.

Demonstração de (b) Evidente pois existe número $d \in (0, 1]$, quais realizam este símbolo, tal que todos passos tomam só valores $d, d + 1, \dots, d + 2D + 1$. *Lema 6.6 está provado.*

Lema 6.7. *Para cada código \mathcal{C} o número de caminhos, que realizam este código não excede o avanço horizontal deste código multiplicado por $(2D + 2)^k$ onde k é o número de passos de tipo D deste código.*

Demonstração: Dizemos que dois caminhos são *congruentes* se um pode ser obtido do outro por uma translação horizontal. Consideremos classes de equivalência, onde caminhos congruentes são equivalentes.

Do lema 6.6 item (b), para cada símbolo de tipo D , os passos correspondentes podem ter no máximo $2D+2$ possíveis comprimentos, logo o número de possíveis caminhos não congruentes que realizam este código não excede $(2D + 2)^k$, em que k é o número de símbolos tipo D em \mathcal{C} .

Segundo o lema 6.5 item (c), para cada dois caminhos que realizam o mesmo código \mathcal{C} , a diferença entre os avanços horizontais destes caminhos é um número inteiro. Logo o número de possíveis caminhos em cada classe de equivalência não excede $(x_2 - x_1)$. Portanto, o número de caminhos que realizam o código \mathcal{C} não excede $(x_2 - x_1) \cdot (2D + 2)^k$. *Lema 6.7 está provado.*

Lema 6.8. *O comprimento do código correto \mathcal{C} não é menor que*

$$\frac{AH(\mathcal{C})}{(2D+2)}. \quad (6.2)$$

Demonstração: Como o avanço horizontal de cada símbolo não excede $2D+2$, temos que

$$AH(\mathcal{C}) \leq (2D+2) \cdot |\mathcal{C}|.$$

de onde segue imediatamente (6.2). *Lema 6.8 está provado.*

Lema 6.9. *Para cada n , o conjunto de caminhos corretos com n passos é finito.*

Demonstração: Conseqüência direta do lema 6.7.

6.4 Estimações

A partir do lema 6.7 temos que a soma do lado direito de (6.1) não excede, para todos T ,

$$P\left([a, b] \subseteq \mu^T\right) \leq \sum \text{peso}(\mathcal{C}) \cdot AH(\mathcal{C}) \cdot (2D+2)^k, \quad (6.3)$$

onde o somatório é feito sobre todos os códigos corretos. Lembremos que $AH(\mathcal{C}) \geq b-a$ e $AV(\mathcal{C}) = 0$, para todo código correto. Aqui k é o número de símbolos tipo D no código \mathcal{C} . Logo nossa tarefa é estimar o lado direito de (6.3).

Definição 6.11. *Dizemos que um código é **quase-correto** se satisfaz as condições 1, 2 e 3 da definição 6.8 (definição de código correto).*

Definição 6.12. *Denotamos por*

$$\sigma_m^n(x, t) \quad (6.4)$$

a soma dos pesos dos códigos quase-corretos, os quais tem avanço horizontal x , avanço vertical t , comprimento n e o n -ésimo símbolo de tipo $m \in \{\downarrow, \alpha, D, \uparrow\}$.

Nota: Observe que $\sigma_m^n(x, t)$ é finito para todo n natural, pois é soma de pesos de códigos, os quais por sua vez são finitos.

Denotamos,

$$\begin{aligned} A &= \theta_1^l \cdot p^{-l_1} + \theta_2^l \cdot p^{-l_2} + \cdots + \theta_\xi^l \cdot p^{-l_\xi} = \sum_j \theta_j^l \cdot p^{-l_j} = E(p^{-L}), \\ B &= \theta_1^r \cdot p^{r_1} + \theta_2^r \cdot p^{r_2} + \cdots + \theta_\eta^r \cdot p^{r_\eta} = \sum_j \theta_j^r \cdot p^{r_j} = E(p^R). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Observemos que se $p = 1$ então $A = B = 1$. Verifiquemos as derivadas de A e B no ponto $p = 1$:

$$\frac{dA}{dp} = \frac{d}{dp}E(p^{-L}) = E\frac{d}{dp}p^{-L} = E(-L \cdot p^{-L-1}).$$

Avaliando em $p = 1$, temos:

$$\left. \frac{dA}{dp} \right|_{p=1} = E(-L) < 0.$$

Analogamente:

$$\frac{dB}{dp} = \frac{d}{dp}E(p^R) = E\frac{d}{dp}p^R = E(R \cdot p^{R-1}),$$

então:

$$\left. \frac{dB}{dp} \right|_{p=1} = E(R) < 0.$$

Verifica-se que estas derivadas são menores que zero, logo para $p > 1$ temos $A < 1$ e $B < 1$.

Introduzimos os parâmetros $p = e$ e $q = \sqrt{A/B}$, onde e é a base de logaritmos naturais e A, B foram definidos em (6.5).

Lema 6.10. $e^x \geq x$, se $x \geq 0$.

Demonstração: $e^x = 1 + x + \dots \geq x$, para todo $x \geq 0$. *Lema 6.10 está provado.*

Definição 6.13. Denotamos

$$\Sigma_m^n = \sum_x \sum_t \sigma_m^n(x, t) \cdot p^x \cdot q^t \quad (6.6)$$

Este somatório converge pois só um número finito de termos é diferente de zero.

A equação (6.6) implica

$$\begin{aligned} P\left([a, b] \subseteq \mu^T\right) &\leq \sum_x \sum_m \sum_{n=n_0}^{\infty} \sigma_m^n(x, 0) \cdot x \\ &\leq \sum_x \sum_m \sum_{n=n_0}^{\infty} \sigma_m^n(x, 0) \cdot p^x \\ &\leq \sum_m \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_x \sum_t \sigma_m^n(x, t) \cdot p^x \cdot q^t \\ &\leq \sum_m \sum_{n=n_0}^{\infty} \Sigma_m^n \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde Σ_m^n está definido em (6.6) e $n_0 = \frac{AH(\mathcal{C})}{2D+2}$. Devemos estimar (6.7).

Para tal introduzimos os vetores:

$$V_n = \left(\Sigma_{\downarrow}^n, \Sigma_{\alpha}^n, \Sigma_D^n, \Sigma_{\uparrow}^n \right)$$

e a matriz,

$$M = \begin{pmatrix} Aq^{-1} & \alpha p & 0 & 0 \\ Aq^{-1} & \alpha p & \gamma & qB \\ Aq^{-1} & \alpha p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha p & \gamma & qB \end{pmatrix}.$$

Os próximos lemas explicam porque estas definições são importantes.

Lema 6.11. (6.6) *satisfazem as condições iniciais:*

$$\Sigma_{\downarrow}^1 = 1, \quad \Sigma_{\alpha}^1 = \alpha, \quad \Sigma_D^1 = 0, \quad \Sigma_{\uparrow}^1 = 0.$$

Demonstração: Pois de acordo com a definição da variável L temos os possíveis passos:

$$(-l_1, -1), \dots, (-l_{\xi}, -1),$$

onde $P(L = l_1) + \dots + P(L = l_{\xi}) = 1$. A segunda condição é justificada pois cada passo horizontal ocorre com probabilidade α . E, de acordo com nossa definição de códigos corretos é impossível que um código comece com símbolos de tipo D ou \uparrow . *Lema 6.11 está provado.*

Lema 6.12. *Para todos $n \geq 2$:*

- (i) $\Sigma_{\downarrow}^n = Aq^{-1} \left(\Sigma_{\downarrow}^{n-1} + \Sigma_{\alpha}^{n-1} + \Sigma_D^{n-1} \right)$.
- (ii) $\Sigma_{\alpha}^n = \alpha p \left(\Sigma_{\downarrow}^{n-1} + \Sigma_{\alpha}^{n-1} + \Sigma_D^{n-1} + \Sigma_{\uparrow}^{n-1} \right)$.
- (iii) $\Sigma_D^n = \gamma \left(\Sigma_{\alpha}^{n-1} + \Sigma_{\uparrow}^{n-1} \right)$.
- (iv) $\Sigma_{\uparrow}^n = qB \left(\Sigma_{\alpha}^{n-1} + \Sigma_{\uparrow}^{n-1} \right)$.

em que $\gamma = p^{(2D+2)}(2D+3)$.

Demonstração: Inicialmente, consideremos a demonstração do item (i). Seguinte definição (6.6):

$$\Sigma_{\downarrow}^n = \sum_x \sum_t \sigma_{\downarrow}^n(x, t) \cdot p^x \cdot q^t, \tag{6.8}$$

em que

$$\begin{aligned}\sigma_{\downarrow}^n(x, t) &= \sum_{h=1}^{\xi} \theta_h^l \sigma_{\downarrow}^{n-1}(x + l_h, t + 1) + \sum_{h=1}^{\xi} \theta_h^l \sigma_{\alpha}^{n-1}(x + l_h, t + 1) + \\ &+ \sum_{h=1}^{\xi} \theta_h^l \sigma_D^{n-1}(x + l_h, t + 1).\end{aligned}$$

Então (6.8) torna-se:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\downarrow}^n &= \left(\sum_x \sum_t \sum_{h=1}^{\xi} \theta_h^l \sigma_{\downarrow}^{n-1}(x + l_h, t + 1) \cdot p^x \cdot q^t + \right. \\ &+ \sum_x \sum_t \sum_{h=1}^{\xi} \theta_h^l \sigma_{\alpha}^{n-1}(x + l_h, t + 1) \cdot p^x \cdot q^t + \\ &\left. + \sum_x \sum_t \sum_{h=1}^{\xi} \theta_h^l \sigma_D^{n-1}(x + l_h, t + 1) \cdot p^x \cdot q^t \right).\end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned}\Sigma_{\downarrow}^n &= \left(\sum_x \sum_t \sum_{h=1}^{\xi} \theta_h^l \sigma_{\downarrow}^{n-1}(x + l_h, t + 1) \cdot p^{x+l_h} \cdot q^{t+1} \cdot p^{-l_h} \cdot q^{-1} + \right. \\ &+ \sum_x \sum_t \sum_{h=1}^{\xi} \theta_h^l \sigma_{\alpha}^{n-1}(x + l_h, t + 1) \cdot p^{x+l_h} \cdot q^{t+1} \cdot p^{-l_h} \cdot q^{-1} \\ &\left. + \sum_x \sum_t \sum_{h=1}^{\xi} \theta_h^l \sigma_D^{n-1}(x + l_h, t + 1) \cdot p^{x+l_h} \cdot q^{t+1} \cdot p^{-l_h} \cdot q^{-1} \right), \\ \Sigma_{\downarrow}^n &= q^{-1} \cdot \sum_{h=1}^{\xi} \theta_h^l \cdot p^{-l_h} \left(\sum_x \sum_t \sigma_{\downarrow}^{n-1}(x + l_h, t + 1) \cdot p^{x+l_h} \cdot q^{t+1} + \right. \\ &+ \sum_x \sum_t \sigma_{\alpha}^{n-1}(x + l_h, t + 1) \cdot p^{x+l_h} \cdot q^{t+1} \\ &\left. + \sum_x \sum_t \sigma_D^{n-1}(x + l_h, t + 1) \cdot p^{x+l_h} \cdot q^{t+1} \right).\end{aligned}$$

De acordo com nossa definição (6.6) e (6.5), temos

$$\Sigma_{\downarrow}^n = Aq^{-1} \left(\Sigma_{\downarrow}^{n-1} + \Sigma_{\alpha}^{n-1} + \Sigma_D^{n-1} \right). \quad (6.9)$$

Demonstramos agora o item (ii). Temos a relação:

$$\Sigma_{\alpha}^n = \sum_x \sum_t \sigma_{\alpha}^n(x, t) \cdot p^x \cdot q^t,$$

em que

$$\sigma_\alpha^n(x, t) = \alpha \left(\sigma_\downarrow^{n-1}(x-1, t) + \sigma_\alpha^{n-1}(x-1, t) + \sigma_D^{n-1}(x-1, t) + \sigma_\uparrow^{n-1}(x-1, t) \right),$$

assim

$$\begin{aligned} \Sigma_\alpha^n &= \alpha \left(\sum_x \sum_t \sigma_\downarrow^{n-1}(x-1, t) \cdot p^x \cdot q^t + \right. \\ &\quad + \sum_x \sum_t \sigma_\alpha^{n-1}(x-1, t) \cdot p^x \cdot q^t + \\ &\quad + \sum_x \sum_t \sigma_D^{n-1}(x-1, t) \cdot p^x \cdot q^t + \\ &\quad \left. + \sum_x \sum_t \sigma_\uparrow^{n-1}(x-1, t) \cdot p^x \cdot q^t \right), \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \Sigma_\alpha^n &= \alpha p \left(\sum_x \sum_t \sigma_\downarrow^{n-1}(x-1, t) \cdot p^{x-1} \cdot q^t + \right. \\ &\quad + \sum_x \sum_t \sigma_\alpha^{n-1}(x-1, t) \cdot p^{x-1} \cdot q^t + \\ &\quad + \sum_x \sum_t \sigma_D^{n-1}(x-1, t) \cdot p^{x-1} \cdot q^t + \\ &\quad \left. + \sum_x \sum_t \sigma_\uparrow^{n-1}(x-1, t) \cdot p^{x-1} \cdot q^t \right). \end{aligned}$$

Assim, da definição (6.6):

$$\Sigma_\alpha^n = \alpha p \left(\Sigma_\downarrow^{n-1} + \Sigma_\alpha^{n-1} + \Sigma_D^{n-1} + \Sigma_\uparrow^{n-1} \right). \quad (6.10)$$

Demonstramos agora o item (iii). Temos:

$$\Sigma_D^n = \sum_x \sum_t \sigma_D^n(x, t) \cdot p^x \cdot q^t,$$

onde

$$\sigma_D^n(x, t) = (2D+3) \left(\sigma_\alpha^{n-1}(x-(2D+2), t) + \sigma_\uparrow^{n-1}(x-(2D+2), t) \right).$$

Logo,

$$\Sigma_D^n = (2D+3) \left(\sum_x \sum_t \sigma_\alpha^{n-1}(x-(2D+2), t) \cdot p^x \cdot q^t + \sum_x \sum_t \sigma_\uparrow^{n-1}(x-(2D+2), t) \cdot p^x \cdot q^t \right),$$

daí

$$\begin{aligned}\Sigma_D^n &= p^{(2D+2)}(2D+3) \left(\sum_x \sum_t \sigma_\alpha^{n-1}(x - (2D+2), t) \cdot p^{x-(2D+2)} \cdot q^t + \right. \\ &\quad \left. + \sum_x \sum_t \sigma_\uparrow^{n-1}(x - (2D+2), t) \cdot p^{x-(2D+2)} \cdot q^t \right).\end{aligned}$$

Denotando $p^{(2D+2)}(2D+3) = \gamma$, logo:

$$\Sigma_D^n = \gamma \left(\Sigma_\alpha^{n-1} + \Sigma_\uparrow^{n-1} \right). \quad (6.11)$$

E finalmente para o item (iv), temos que a soma dos pesos dos códigos com comprimento n cujo último símbolo foi de tipo \uparrow é dado por

$$\Sigma_\uparrow^n = \sum_x \sum_t \sigma_\uparrow^n(x, t) \cdot p^x \cdot q^t,$$

onde

$$\sigma_\uparrow^n(x, t) = \sum_{h=1}^{\eta} \theta_h^r \sigma_\alpha^{n-1}(x - r_h, t - 1) + \sum_{h=1}^{\eta} \theta_h^r \sigma_\uparrow^{n-1}(x - r_h, t - 1),$$

logo temos:

$$\begin{aligned}\Sigma_\uparrow^n &= \left(\sum_x \sum_t \sum_{h=1}^{\eta} \theta_h^r \sigma_\alpha^{n-1}(x - r_h, t - 1) \cdot p^x \cdot q^t + \right. \\ &\quad \left. + \sum_x \sum_t \sum_{h=1}^{\eta} \theta_h^r \sigma_\uparrow^{n-1}(x - r_h, t - 1) \cdot p^x \cdot q^t \right),\end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned}\Sigma_\uparrow^n &= \left(\sum_x \sum_t \sum_{h=1}^{\eta} \theta_h^r \sigma_\alpha^{n-1}(x - r_h, t - 1) \cdot p^{x-r_h} \cdot q^{t-1} \cdot p^{r_h} \cdot q^1 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_x \sum_t \sum_{h=1}^{\eta} \theta_h^r \sigma_\uparrow^{n-1}(x - r_h, t - 1) \cdot p^{x-r_h} \cdot q^{t-1} \cdot p^{r_h} \cdot q^1 \right),\end{aligned}$$

de (6.6)

$$\Sigma_\uparrow^n = q \left(\sum_{h=1}^{\eta} p^{r_h} \cdot \theta_h^r \cdot \Sigma_\alpha^{n-1} + \sum_{h=1}^{\eta} p^{r_h} \cdot \theta_h^r \cdot \Sigma_\uparrow^{n-1} \right),$$

ainda, de (6.5)

$$\Sigma_\uparrow^n = qB \left(\Sigma_\alpha^{n-1} + \Sigma_\uparrow^{n-1} \right). \quad (6.12)$$

Lema 6.12 está provado.

Podemos escrever as relações (6.9), (6.10), (6.11) e (6.12), do lema 6.12 como a seguir:

$$V_{n+1} = V_n \cdot M,$$

para todos n naturais.

Do corolário 6.1 uma condição necessária e suficiente para que os módulos dos autovalores de uma matriz sejam menores que um número real λ , é que todos os determinantes dos menores principais da matriz $\lambda I - M$ sejam maiores que zero. Vejamos se para $\lambda = 1$ conseguimos satisfazer as condições do teorema. Segue que:

$$I - M = \begin{pmatrix} 1 - Aq^{-1} & -\alpha p & 0 & 0 \\ -Aq^{-1} & 1 - \alpha p & -\gamma & -qB \\ -Aq^{-1} & -\alpha p & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha p & -\gamma & 1 - qB \end{pmatrix}.$$

Lembramos que escolhemos: $q = \sqrt{A/B}$ e $p = e$. Substituindo os parâmetros p e q na matriz $I - M$ temos:

$$I - M = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{AB} & -\alpha p & 0 & 0 \\ -\sqrt{AB} & 1 - \alpha p & -\gamma & -\sqrt{AB} \\ -\sqrt{AB} & -\alpha p & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha p & -\gamma & 1 - \sqrt{AB} \end{pmatrix}.$$

É mais simples tomarmos os determinantes dos menores principais do canto inferior direito. Segue do corolário 6.1:

$$1 - \sqrt{AB} > 0 \tag{a}$$

logo $\sqrt{AB} < 1$. Devemos ter ainda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma & 1 - \sqrt{AB} \end{vmatrix} > 0 \tag{b}$$

calculando o determinante temos:

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{AB} &> 0 \\ \sqrt{AB} &< 1 \end{aligned}$$

Observamos que os resultados (a) e (b) são iguais.

Para o determinante do terceiro menor principal,

$$\begin{vmatrix} 1 - \alpha p & -\gamma & -\sqrt{AB} \\ -\alpha p & 1 & 0 \\ -\alpha p & -\gamma & 1 - \sqrt{AB} \end{vmatrix} > 0 \tag{c}$$

daí,

$$\alpha p \cdot \begin{vmatrix} -\gamma & -\sqrt{AB} \\ -\gamma & 1 - \sqrt{AB} \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 - \alpha p & -\sqrt{AB} \\ -\alpha p & 1 - \sqrt{AB} \end{vmatrix} > 0$$

ou seja:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha p - \sqrt{AB} - \alpha \gamma p &> 0 \\ \alpha p(-1 - \gamma) &> -1 + \sqrt{AB} \end{aligned}$$

Como $p(-1 - \gamma) < 0$, temos equivalentemente:

$$\alpha < \frac{1 - \sqrt{AB}}{p(1 + \gamma)}.$$

E finalmente, para a matriz toda, temos

$$|I - M| = \begin{vmatrix} 1 - \sqrt{AB} & -\alpha p & 0 & 0 \\ -\sqrt{AB} & 1 - \alpha p & -\gamma & -\sqrt{AB} \\ -\sqrt{AB} & -\alpha p & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha p & -\gamma & 1 - \sqrt{AB} \end{vmatrix} > 0 \quad (d)$$

daí

$$(1 - \sqrt{AB}) \cdot \begin{vmatrix} 1 - \alpha p & -\gamma & -\sqrt{AB} \\ -\alpha p & 1 & 0 \\ -\alpha p & -\gamma & 1 - \sqrt{AB} \end{vmatrix} + \alpha p \cdot \begin{vmatrix} -\sqrt{AB} & -\gamma & -\sqrt{AB} \\ -\sqrt{AB} & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma & 1 - \sqrt{AB} \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{aligned} &(1 - \sqrt{AB})(1 - \sqrt{AB} - \alpha p - \alpha \gamma p) + \\ &+ \alpha p \left(-\sqrt{AB}(1 - \sqrt{AB}) - AB\gamma - (1 - \sqrt{AB})\sqrt{AB}\gamma \right) > 0 \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\alpha p(-1 - \gamma + AB) > 2\sqrt{AB} - AB - 1$$

ainda,

$$\alpha < \frac{(1 - \sqrt{AB})^2}{p(1 + \gamma - AB)}$$

Assim de (a), (b), (c) e (d) temos as três condições:

$$\begin{cases} \sqrt{AB} < 1; \\ \frac{1 - \sqrt{AB}}{p(1 + \gamma)} > \alpha; \\ \frac{(1 - \sqrt{AB})^2}{p(1 + \gamma - AB)} > \alpha. \end{cases} \quad (6.13)$$

Onde A e B estão definidos em (6.5). Devemos escolher os parâmetros adequados de maneira a satisfazer todas as desigualdades (6.13) acima.

Com estes valores de p e q escolhidos, temos satisfeito a primeira desigualdade de (6.13). Ou seja, existem A e B menores que 1, tais que:

$$\sqrt{AB} < 1.$$

É claro que os denominadores da segunda e terceira desigualdade de (6.13) são positivos. Assim basta que tomemos o menor valor de α para satisfazer ambas as desigualdades. Logo escolhemos

$$\alpha^* = \min\left(\frac{1 - \sqrt{AB}}{p(1 + p\beta)}, \frac{(1 - \sqrt{AB})^2}{p(1 + p\beta - AB)}\right).$$

e a partir do corolário 6.1 e dos parâmetros p , q e α^* concluímos que todos os módulos dos autovalores de M são menores que um. Logo (6.7) converge.

Para cada vetor V_n denotamos por $|V_n|$ a soma de suas componentes. Assim,

$$P\left([a, b] \subseteq \mu^T\right) \leq \sum_{n=n_{min}}^{\infty} |V_n|. \quad (6.14)$$

onde n_{min} é o número minimal de símbolos num código completo com avanço maior ou igual a $b - a$. É claro que $n_{min} \rightarrow \infty$ quando $b - a \rightarrow \infty$. Como está provado que a soma (6.7) é finita, podemos fazer esta soma menor que uma constante $c < 1$ escolhendo $b - a$ suficientemente grande. Logo a seqüência de nossos conjuntos aleatórios não enche a reta. *O item ii) de nosso teorema principal está provado.*

CAPÍTULO 7

Discussões e sugestões de pesquisa

O maior resultado desta dissertação é o teorema principal. Este teorema permite-nos observar quando a seqüência $(W_{pas}W_DW_\alpha)^t\delta_\emptyset$ em medidas regulares enche a reta. Ou seja, ele propicia um meio para verificar quando o operador aplicado um número suficientemente grande de vezes, de forma iterativa, “esquece” a condição inicial.

Como demonstrado, o fato do operador $W_{pas}W_DW_\alpha$ encher a reta depende fortemente da distribuição das variáveis aleatórias L e R . A demonstração da primeira parte do teorema considera $E(L) < E(R)$ e conclui que o operador enche a reta. Entretanto se $E(L) > E(R)$, nosso resultado apresenta um valor crítico para o qual qualquer valor inferior a ele fará com que o operador não encha a reta.

Nosso resultado é uma extensão do teorema apresentado por Toom, et. al. (1990) da versão discreta para a versão contínua. Este teorema também considera $E(L) > E(R)$ e prova que existe $\alpha^* > 0$ tal que se $\alpha < \alpha^*$ então a superposição de operadores aleatórios com um operador de passeio aleatório é não ergódico. Observa-se que este resultado é análogo ao obtido nesta dissertação.

Nosso resultado é importante no sentido de que estamos construindo uma teoria que tem como ponto limite a classificação de operadores na reta contínua. A grande contribuição deste trabalho é que ele propicia subsídios para outros pesquisadores, pois existem poucos resultados com esta classificação. Sugerimos como futuras pesquisas analisar o caso quando $E(L) = E(R)$ e “desembarassar” o resultado para o caso em que o operador W_α inclua segmentos $[i, i+1]$ para qualquer i real, pois nosso resultado é restrito ao fato de que W_α inclui somente segmentos com fronteiras inteiras.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FELLER, W. (1968) *An Introduction to Probability Theory and Applications*. Volume 1 third edition, Wiley & Sons Inc., New York, London.
- [2] GANTMACHER, F. R. (1959) *Applications of the theory of matrices*. Interscience publishers Ltda, New York, London.
- [3] NEUMANN, J. Von. (1963) The general and logical theory of automata *Collected Work*, edited by A. H. Taub, v.5, pp. 288.
- [4] TOOM, A. (1995) Cellular Automata with Errors: Problems for Students of Probability. *Topics in Contemporary Probability and its Applications*. Ed. J. Laurie Snell. CRC Press, pp. 117-157.
- [5] TOOM, A. (2001) *Contornos, Conjuntos Convexos e Autômatos Celulares*. 23º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, RJ.
- [6] TOOM, A. (1976) Unstable Multicomponent Systems. *Problemy Peredachi Informtsii*, v. 12, n. 3, pp. 78-84.
- [7] TOOM, A; VASILYEV, N; STAVSKAYA, O; MITYUSHIN, L; KURDYUMOV, G. L. and PIROGOV, S. (1990) Discrete Local Markov Systems. *Stochastic Cellular Systems: ergodicity, memory, morphogenesis*. Ed. by R. Dobrushin, V. Kryukov and A. Toom. Nonlinear Science: theory and applications, Manchester University Press;

- acoplamento de dois conjuntos, 12
- avanço do caminho, 27
- código, 27
- código correto, 28
- caminho, 25
- caminho correto, 26
- conjunto U , 9
- conjunto regular, 3
- corolário
 - do teorema de Perron-Frobenius, 23
- curva, 24
- curva fechada, 25
- definição
 - Σ_m^n , 35
 - $\sigma_m^n(x, t)$, 34
- matriz positiva, 22
- matriz redutível/irredutível, 23
- medida regular, 3
- operador
 - de enchimento, 5
 - de nascimento, 5
 - de passeio aleatório, 6
 - monótono, 12
 - uniforme, 5
- peso
 - do passo, 29
 - do símbolo, 29
- polinômio característico, 23
- ruína do jogador, 16
- soma dos pesos dos códigos, 34
- teorema
 - de Perron-Frobenius, 23
 - principal, 11
- translação, 4

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)