



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E
ESTATÍSTICA

Aubedir Seixas Costa

SOBRE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL
NÃO-LINEAR DO TIPO HIPERBÓLICO-PARABÓLICO
EM DOMÍNIO COM FRONTEIRA MÓVEL

Belém/PA
2005

Livros Grátis

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E
ESTATÍSTICA

Aubedir Seixas Costa

SOBRE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL
NÃO-LINEAR DO TIPO HIPERBÓLICO-PARABÓLICO
EM DOMÍNIO COM FRONTEIRA MÓVEL

Dissertação Apresentada ao Corpo Docente do
Programa de Pós-Graduação em Matemática
e Estatística da Universidade Federal do Pará
como requisito parcial para obtenção do Título
de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Ferreira

Área de concentração: *Análise*

Belém/PA
2005

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIA EXATA E NATURAIS
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Aubedir Seixas Costa

SOBRE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL
NÃO-LINEAR DO TIPO HIPERBÓLICO-PARABÓLICO
EM DOMÍNIO COM FRONTEIRA MÓVEL

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Data da defesa: 12 de dezembro de 2005.

Conceito:

Banca Examinadora

Prof. Dr. JORGE FERREIRA - Orientador

Prof. Dr. MAURO DE LIMA SANTOS - Membro

Prof. Dr. DUCIVAL CARVALHO PEREIRA - Membro

A minha primeira e grande mestra, minha Mãe.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por cada dia desta empreitada e por me permitir chegar até o final deste curso.

A minha esposa Ana Cláudia e ao meu filho Cláuber, pela dedicação, paciência e apoio durante esta caminhada. Sua ajuda foi fundamental.

A minha Mãe Maria Gregória Seixas e a minha irmã Izabel as pessoas que mais se empenharam na minha formação pessoal e acadêmica.

Ao Professor Dr. Jorge Ferreira, pela orientação eficaz e amiga, pelo incentivo, confiança, credibilidade e dedicação na elaboração deste trabalho.

Ao Professor Mauro Lima Santos pelo apoio e colaboração que enriqueceu este trabalho.

Aos Professores: João Dos Santos Protázio, Ducival Carvalho Pereira, pelo incentivo e participação na minha formação acadêmica.

A todos que compõem o Corpo Docente do Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística.

Aos colegas do mestrado pelo incentivo, companherismo e cooperação durante o curso. Em especial: Lindomar, Carlos Alessandro, Heleno, Sebastião, Helena, Irazel, Ana Paula, Silvia,...

A todos que formam o Campus Universitário do Baixo Tocantins pelo apoio total. Em especial aos professores, Damião Bezerra, Waldir Abreu, Antônio Otaviano, Joice Otânia, Adelino Ferranti, Francisca Carvalho... pelos incentivos incondicionais.

“Aprendi o silêncio com os faladores, a tolerância com os intolerantes, a bondade com os maldosos; e, por estranho que pareça, sou grato a esses professores. ”.

Kahlil Gibran, 1883-1931;

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência da solução fraca global para a equação diferencial parcial do tipo hiperbólica-parabólica não-linear.

$$(P) \begin{cases} (k_1(x, t)u')' + k_2(x, t)u' - \Delta u - \Delta u'' + |u'|^\rho u' = f & \text{em } Q, \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad (k_1 u)(x, 0) = u_1(x) & . \end{cases}$$

Onde k_1, k_2, f, u_0 e u_1 são funções que satisfazem as condições apropriadas, então obtemos a existência da solução fraca global com dados iniciais nulos e não-nulos respectivamente.

Palavra-Chave:

Abstract

In this work we study the existence of the global weak solution for the nonlinear partial differential equation of the hyperbolic-parabolic type

$$(P) \begin{cases} (k_1(x, t)u')' + k_2(x, t)u' - \Delta u - \Delta u'' + |u'|^\rho u' = f & \text{in } Q, \\ u = 0 & \text{on } \Sigma, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad (k_1 u)(x, 0) = u_1(x), \end{cases}$$

where k_1, k_2, f, u_0 and u_1 are functions that satisfy appropriate conditions. We obtain the existence of the global weak solution with null and not null initial data respectively.

Key Words:

SUMÁRIO

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	2
1 Preliminares	8
1.1 Teoria das Distribuições Escalares	8
1.1.1 Espaços Funções Testes	8
1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$	10
1.1.3 Distribuições Escalares	11
1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional	13
1.2 Espaços de Sobolev	15
1.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$	15
1.3 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais	21
1.4 O Teorema Espectral	24
1.5 Outros Resultados Importantes	26
2 Existência de solução global fraca com dados iniciais nulos	37
2.1 Estimativas a priori	45
2.1.1 Estimativas a priori I	45
2.1.2 Estimativa a priori II	48
2.2 Análise do termo não-linear	50
2.3 Resumo das convergências	50
2.4 Passagem do limite	51
2.5 Verificação dos dados iniciais	53
3 Existência de solução global fraca com dados não-nulos	59

3.1 Estimativas apriori	62
3.1.1 Estimativas apriori I*	62
3.1.2 Estimativa apriori II*	65
3.2 Análise do termo não-linear	67
3.3 Resumo das convergências	67
3.4 Passagem do limite*	68
3.5 Verificação dos dados iniciais*	70

BIBLIOGRAFIA**75**

Introdução

Os estudos de problemas de contorno definido em regiões variáveis teve início em 1923, a partir do trabalho de *Francisco Tricomi*, que estava interessado em estudar fluidos transônicos, a partir do operador diferencial

$$T[y] = yZ_{yy} + Z_{yy}, (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2.$$

Se $y > 0$, T é elíptica; $y < 0$, T é hiperbólica e se $y = 0$, T é parabólica. Esse problema diferente originado de uma aplicação a indústria aeronáutica deu origem a uma série de investigações. Em 1958, G.Fichera procurou desenvolver uma teoria geral considerando apenas operadores lineares, utilizando métodos clássicos. Um modelo matemático que expressa esse tipo de problema é determinado por equações diferenciais parciais não-lineares em domínio cilíndricos. O exemplo mais famoso deste tipo de equação é:

$$u_t u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

denominada equação harmônica de Karman. Esta equação expressa a compressibilidade de um fluxo de gás em um meio transônico.

Um grande número de trabalhos envolvendo equações hiperbólica-parabólica são desenvolvidos em domínios cilíndricos e apenas poucos destes são estudados em domínios não-cilíndricos. No presente trabalho faremos um estudo detalhado deste tipo de equação em domínio não-cilíndrico.

Seja Q um domínio não-cilíndrico do R^{n+1} , com fronteira lateral Σ . Seja Ω um aberto limitado do R^n com fronteira bem regular Γ e $T > 0$ um número real fixado, porém arbitrário. Seja $Q_0 = \Omega \times (0, T)$ um cilindro com fronteira lateral que denotamos por Σ' tal que $Q \subset Q_0$.

Em Q consideremos o seguinte problema misto:

$$(P) \begin{cases} (k_1(x, t)u'(x, t))' + k_2(x, t)u'(x, t) - \Delta u(x, t) - \Delta u''(x, t) + \\ |u'(x, t)|^\rho u'(x, t) = f \text{ em } Q \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ u(0) = 0, \quad (k_1 u')(0) = 0, \end{cases} \quad (0.1)$$

sendo k_1 , k_2 , e f funções satisfazendo condições apropriadas. O problema (P) é uma versão não-linear da equação:

$$u'' - \Delta u - \Delta u'' = 0$$

que modela as vibrações transversais de uma vareta fina no espaço tridimensional. Para maiores informações ver [11].

Os problemas lineares, e não-lineares, para equações e sistemas de equações em domínios não-cilíndricos têm sido tratados por diversos autores dentre eles: J.L.Lions [9], que introduziu o método da penalização para resolver o problema de existência de solução. Usando o mesmo método, L.A. Medeiros, ver [12], estudou a existência de solução fraca para o problema misto:

$$u'' - \Delta u + F(u) = 0 \text{ em } Q, \quad (0.2)$$

sendo $F(s)$ uma função contínua que satisfazem $sF(s) \geq 0$ e Q um domínio crescente.

J.Cooper e C.Bardos, ver [4], estudaram a existência e unicidade de soluções para a equação (0.2) introduzindo o termo não-linear $F(u) = |u|^\alpha u$, ($\alpha > 0$) e considerando a fronteira Σ de Q globalmente "time-like", e Q não necessariamente crescente.

Em 1970, Strauss, ver [17], estudou o problema (P) com $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, sem o termo $-\Delta u''$ e com a não-linearidade considerada em [12], isto é:

$$u'' - \Delta u + F(u) = f \text{ em } Q. \quad (0.3)$$

Podemos destacar, ainda, os trabalhos envolvendo a equação

$$k_1(x)u''(x, t) + k_2(x)u'(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \text{ em } Q, \quad (0.4)$$

sendo $k_1(x) \geq 0$ e $k_2(x) \geq \beta > 0, \forall x \in \Omega$. Este resultado foi obtido por Bensoussan-Lions-Papanicolau, ver [1], considerando dados iniciais não-nulos. Medeiros, ver [12], estudou a existência de soluções fracas para a equação (0.4) mas considerando o termo não-linear $|u|^\rho u, \rho > 0$. Vragov, ver [18], estudou (0.4) para o caso em que k_1, k_2 dependem de $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$, mas com condições iniciais nulas. Lar'kin, ver [10], estudou (0.4) com condições não-lineares mais gerais e com k_1, k_2 dependendo de $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$, incluindo também f com fortes restrições. Em 1988, D.C.Pereira, ver [14], estudou a existência e a unicidade de solução para a equação:

$$k_1(x, t)u''(x, t) - \Delta u(x, t) - \Delta u''(x, t) + |u(x, t)|^\rho u(x, t) = f(x, t) \text{ em } Q, \quad (0.5)$$

com $\rho > 0$ se $n = 1, 2$ e $0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}$ se $n \geq 3$.

Em 1995, Ferreira, ver [7], estudou a existência e decaimento exponencial, quando $t \rightarrow +\infty$, das soluções fracas do problema misto para a equação hiperbólica-parabólica não-linear:

$$(k_1(x, t)u'(x, t))' + k_2(x, t)u'(x, t) + A(t)u(x, t) + F(u) = f(x, t) \text{ em } Q, \quad (0.6)$$

sendo $F(s)$ uma função contínua que satisfaz $sF(s) \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}$ e $\{A(t), t \geq 0\}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(H_0^1(\Omega); H^{-1}(\Omega))$, generalizando a formulação original de (0.4).

Outros trabalhos que também tiveram significativa relevância na área foram os de: Ferreira-Pereira [8], Ferreira [9] e Ferreira-Lar'kin [10].

O objetivo deste trabalho é mostrar a existência de soluções globais fracas do problema (P) sobre a hipótese em que Q é monótono crescente. A partir daqui daremos uma interpretação geométrica do domínio não-cilíndrico do problema no qual usaremos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} \Omega_s &= \text{int}(\overline{Q} \cap \{t = s\}), \quad 0 < t < T \\ \phi &\neq \Omega_0 = \text{int}(\overline{Q} \cap \{t = 0\}), \\ \Omega_T &= \text{int}(\overline{Q} \cap \{t = T\}), \end{aligned}$$

$\Gamma = \partial\Omega$, $\Gamma_s = \partial\Omega_s$ e $\Sigma_s = \cup \Gamma_s$ com $0 < s < T$ fronteira lateral de Q com $\partial Q = \overline{\Omega_0} \cup \Sigma \cup \Gamma_s$

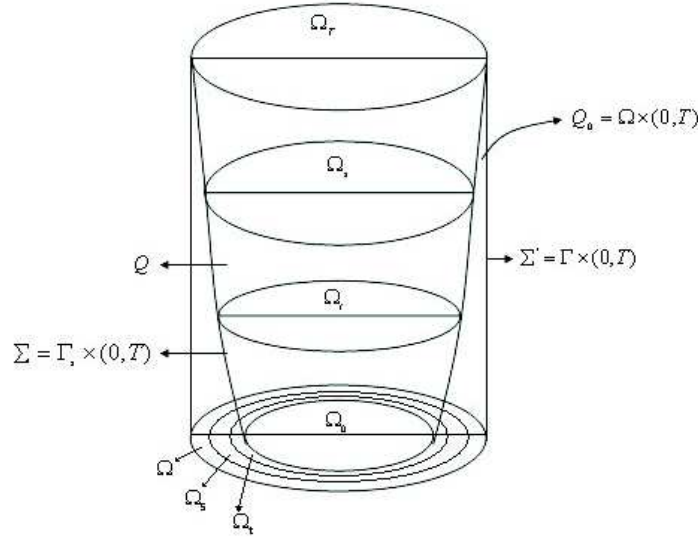


Figura 1 *Interpretação geométrica*

O domínio não-cilíndrico deve satisfazer as seguintes hipóteses:

(H.1). Ω_t cresce com t , isto é, se $\Omega_t^* = Proj_{\{t=0\}}$ então $\Omega_t^* \subset \Omega_s^*$ se $t < s$;

(H.2). Para cada $t \in (0, T)$, Ω_t possui a seguinte propriedade de regularidade: Se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $u = 0$ quase sempre em $\Omega \setminus \Omega_t^*$ então $u|_{\Omega_t^*} \in H_0^1(\Omega_t^*)$.

Identificaremos assim $\Omega_t^* = \Omega_t$.

Defiremos a seguir os espaços funcionais que surgem no estudo de problemas em domínios não-cilíndricos. Esses espaços são de fundamental importância para o nosso estudo, pois neles iremos encontrar a solução desejada para o nosso problema (P). Sejam $1 \leq p, q < +\infty$ e

$L^q(0, T; L^p(\Omega)) = \{f \in L^q(0, T; L^p(\Omega)); f(x, t) = 0 \text{ quase sempre em } \Omega \setminus \Omega_t\}$,

para quase todo $t \in (0, T)$, com a norma:

$$\|f\|_{L^q(0, T; L^p(\Omega))} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_{L^p(\Omega)}^q dt \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{se } 1 \leq q < +\infty.$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(0, T; L^p(\Omega))} = \sup_{t \in (0, T)} \|f(t)\|_{L^p(\Omega)}, \quad \text{se } q = +\infty.$$

$L^q(0, T; H_0^1(\Omega)) = \{f \in L^q(0, T; H_0^1(\Omega)); f(x, t) = 0 \text{ quase sempre em } \Omega \setminus \Omega_t\}$,

para quase todo $t \in (0, T)$, com a norma:

$$\|f\|_{L^q(0,T;H_0^1(\Omega))} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^q dt\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{se } 1 \leq q < +\infty.$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} = \sup_{t \in (0,T)} \|f(t)\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \text{se } q = +\infty$$

A proposição seguinte será importante para o nosso estudo, pois garante determinar a solução do problema nos espaços funcionais:

Proposição 0.0.1. *Seja $w : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-mensurável. Então $w(x, t) = 0$ quase sempre em $\Omega \setminus \Omega_t$ para quase todo $t \in (0, T)$ se, e somente se, $w = 0$ quase sempre em $Q_0 \setminus Q$.*

Dem.: Ver [15].

Os lemas seguintes são de muita importância para o nosso trabalho, pois eles nos darão subsídios para análise do termo não-linear $|u'|^\rho u'$ do problema.

Lema 0.0.1. *Se Ω é um aberto limitado do \mathbb{R}^n e $0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}$ se $n \geq 3$ e $0 < \rho < \infty$ se $n = 1, 2$, então $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+2)}(\Omega)$*

Demo.: Ver [12].

Lema 0.0.2. *Seja $u' \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega))$ tal que $u'' \in L^2(0, +\infty; H_0^1(\Omega))$. Seja M uma função definida por*

$$M(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{em } Q_0 \setminus Q \cup \Omega_0 \times \{0\} \\ 0 & \text{em } Q \cup \Omega_0 \times \{0\} \end{cases} \quad (0.7)$$

então $\int_0^t (M(s)u'(s), u''(s)) ds \geq \frac{1}{2}|M(t)u'(t)|^2 - \frac{1}{2}|M(0)u'(0)|^2$.

Dem.: Ver [18].

Para a existência de soluções usaremos o método da penalização de Lions, ver [11], que consiste, mediante ao uso de uma função de penalização M , transformar o problema (P) num outro problema penalizado perturbado (P^ϵ) , $(0 < \epsilon < 1)$ definido no cilindro Q_0 . Isto é:

$$(P^\epsilon) : k_{1\epsilon}u_\epsilon'' + k_1'u_\epsilon' + k_2u_\epsilon' - \Delta u_\epsilon - \Delta u_\epsilon'' + |u_\epsilon'|^\rho u_\epsilon' + \frac{1}{\epsilon}Mu_\epsilon' = \tilde{f}, \quad (0.8)$$

sendo $k_{1\epsilon} = k_1 + \epsilon > 0$.

A partir daqui projetamos o problema (P^ϵ) sobre um subespaço de dimensão finita V_m de $H_0^1(\Omega)$. Desejamos encontrar as soluções aproximadas

$$u_{em}(t) = \sum_{j=1}^m g_{jem}(t)w_j(x), 0 \leq t < t_{em} \leq T, \quad (0.9)$$

solução do seguinte sistema de equações diferenciais não-lineares

$$(P^{em}) \begin{cases} (k_{1\epsilon}u''_{em}, v) + (k'_1u'_{em}, v) + (k'_1u'_{em} + (k_2u'_{em} + (-\Delta u_{em}, v) + \\ (-\Delta u''_{em}, v) + (|u'_{em}|^\rho u'_{em}, v) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{em}, v) = (\tilde{f}, v), \forall v \in V_m. \end{cases} \quad (0.10)$$

Aqui usaremos o método de *Faedo-Galerkin* para obter as soluções aproximadas u_{em} do sistema P^{em} . A seguir mediante estimativas a priori e passando o limite quando $m \rightarrow \infty$ obtemos a solução u_ϵ de (P^ϵ) e finalmente voltando ao domínio não-cilíndrico, encontramos a solução de (P) .

Estrutura do Trabalho

Este trabalho encontra-se dividido em 3 capítulos, a saber:

Na introdução do trabalho estão englobadas, a motivação física do problema, e a história de alguns problemas do tipo misto em domínios cilíndricos e não-cilíndricos.

No capítulo 1 apresentamos as definições básicas das teorias das equações diferenciais parciais, alguns teoremas, lemas e proposições que nos auxiliarão como pré-requisitos necessários para melhor compreensão dos capítulos subsequentes, além da formulação do problema e das técnicas que serão usadas para obtermos nossos resultados.

O capítulo 2 será dedicado ao estudo da existência de soluções globais fracas do problema (P) com os dados iniciais nulos.

No capítulo 3 estenderemos o resultado do capítulo anterior, considerando as condições iniciais não-nulas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo utilizaremos definições e noções básicas da Teoria das Equações Diferenciais Parciais, bem como alguns teoremas, lemas e proposições que nos auxiliarão como pré-requisitos necessários para melhor compreensão dos capítulos subsequentes. Sendo assim, não nos preocuparemos com as demonstrações de possíveis resultados utilizados preliminarmente, mas mencionaremos as referências bibliográficas onde as respectivas demonstrações poderão ser encontradas.

1.1 Teoria das Distribuições Escalares

1.1.1 Espaços Funções Testes

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua. Denominamos suporte de φ , ao fecho, em Ω , do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω onde φ não se anula. Denotamos o suporte de φ por $\text{supp}(\varphi)$. Simbolicamente:

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega.$$

Usando a definição conclui-se que o $\text{supp}(\varphi)$ é o menor fechado, no qual φ se anula fora e valem as seguintes relações:

1. $\text{supp}(\varphi + \psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cup \text{supp}(\psi)$,
2. $\text{supp}(\varphi\psi) \subset \text{supp}(\varphi) \cap \text{supp}(\psi)$,
3. $\text{supp}(\lambda\varphi) = \text{supp}(\varphi)$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 1.1.1. *Seja $\varphi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = 1, \forall x \in (0, 1)$:*

Verifica-se que o $\text{supp}(\varphi) = (0, 1)$, que não é um conjunto compacto. No que segue, daremos um destaque especial às funções $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com suporte compacto contido em Ω e que são infinitamente diferenciáveis. Com esse intuito definiremos o espaço $C_0^\infty(\Omega)$, como sendo o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis tal que $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega$. Os elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ são denominados funções testes em Ω .

Exemplo 1.1.2. *Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, denotemos por $B_r(x_0)$ a bola aberta de centro x_0 de raio r , isto é, $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| < r\}$. Se $B_r(x_0) \subset \Omega$, define-se:*

$$\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{r^2}{\|x-x_0\|^2 - r^2}\right) & \text{se } \|x - x_0\| < r \\ 0 & \text{se } \|x - x_0\| \geq r. \end{cases}$$

Neste exemplo, verifica-se que $\text{supp}(\varphi) = \overline{B_r(x_0)}$ é um compacto e que $C_0^\infty(\Omega)$ é não-vazio. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar funcionais lineares contínuos definidos em $C_0^\infty(\Omega)$.

Observação 1.1.1. *Por um multi-índice, entendemos uma n -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de números inteiros não negativos. Denota-se por $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ a ordem do multi-índice e por D^α o operador derivação parcial, de ordem $|\alpha|$,*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Para $\alpha = (0, \dots, 0)$, temos por definição $D^0\varphi = \varphi$.

A seguir daremos noções de convergência em $C_0^\infty(\Omega)$, tornando-o um espaço vetorial topológico.

1.1.2 Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$

Diz-se que uma sucessão $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

(i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\text{supp}(\varphi) \subset K \text{ e } \text{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) $D^\alpha \varphi_n \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α .

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$, junto com a noção de convergência definida acima é um espaço vetorial topológico que denotamos por $\mathcal{D}(\Omega)$ é denominado espaços das funções testes.

Observação 1.1.2. Sendo Ω limitado, obtemos

$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo p , tal que $1 \leq p < \infty$.

com imersão contínua e densa. De fato, dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, temos que

$$\int_{\Omega} |\varphi(x)|^p dx \leq \sup_{x \in \Omega} |\varphi(x)|^p m(\Omega) < \infty.$$

Isto prova a inclusão algébrica. Para a continuidade, seja $\varphi_n \rightarrow \varphi$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Mostraremos que

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \rightarrow 0.$$

note que,

$$\int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx.$$

Logo pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx \\ &= \int_K \lim_{n \rightarrow \infty} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|^p dx = 0. \end{aligned}$$

Pode-se ainda mostrar que a imersão anterior é densa. Para isso ver [12]

1.1.3 Distribuições Escalares

Denomina-se distribuição escalar sobre Ω a toda forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma função $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

$$(i) \quad T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi), \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(ii) T é contínua, isto é, se $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para φ , em $\mathcal{D}(\Omega)$, então

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \quad \text{em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ , é denotado por $\langle T, \varphi \rangle$. Muniremos o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:

Considere o espaço de todas as distribuições sobre Ω . Neste espaço, diz-se que a sucessão $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, converge para T , quando a sucessão $(\langle T_\nu, \varphi \rangle)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em \mathbb{R} para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. O espaço das distribuições sobre Ω , com esta noção de convergência é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

As distribuições que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Definição 1.1.1. . Diz-se que uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω , quando u é integrável á Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$. Em símbolo temos:

$$u \in L^1_{loc}(\Omega) \iff \int_K |u(x)| dx < \infty$$

para todo compacto $K \subset \Omega$.

Exemplo 1.1.3. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e definamos $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx.$$

Nestas condições T_u é uma distribuição escalar sobre Ω .

De fato, não é difícil mostrar a linearidade de T_u , pois segue da linearidade da integral. Resta-nos mostrar que T_u é contínua; seja dada uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω convergindo em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ . Então

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_\nu \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| &= |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} u(x) (\varphi_\nu - \varphi)(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |u(x) (\varphi_\nu - \varphi)(x)| dx \\ &\leq \sup |\varphi_\nu - \varphi| \int_{\Omega} |u(x)| dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

pois, $\varphi_\nu \rightarrow \varphi$ uniformemente.

A distribuição T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u " e, usando o *Lema Du Bois Raymond*, tem-se que T_u é univocamente determinada por u , no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω . Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Lema 1.1.1 (de Du Bois Raymond). *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω .*

Dem.: Ver [16].

Vale salientar que existem distribuições não definidas por funções de $L^1_{loc}(\Omega)$, como pode ser visto no exemplo que se segue.

Exemplo 1.1.4. *Seja x_0 um ponto de Ω e definamos $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0).$$

É fácil verificar que δ_{x_0} é uma distribuição, conhecida por Distribuição de Dirac, em homenagem ao físico inglês Paul A.M. Dirac(1902-1984). Entretanto, mostra-se que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

De fato, suponhamos que a distribuição δ_{x_0} é definida por alguma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então tem-se que:

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Tomando $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ definida por

$$\xi(x) = \|x - x_0\|^2 \varphi(x)$$

daí,

$$\xi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \xi \rangle = \int_{\Omega} u(x) \|x - x_0\|^2 \varphi(x)dx = 0, \forall \xi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pela proposições (1.1), segue que $\|x - x_0\|^2 u(x) = 0$ quase sempre em Ω , logo $u(x) = 0$ quase sempre em Ω , isto é, $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ou seja, $\varphi(x_0) = 0, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, que é uma contradição.

Com essa noção de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico e temos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas

$$D(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega), 1 \leq p < \infty.$$

1.1.4 Convergência e Derivada Distribucional

Com o intuito de estudar os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

A motivação no conceito de derivada fraca e posteriormente o conceito de derivada distribucional, dado por *Sobolev*, se deve a fórmula de integração por partes do Cálculo, entretanto, este conceito foi generalizado para distribuições quaisquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multíndice. A derivada (no

sentido das distribuições de ordem α de T é definida como sendo o funcional linear

$$D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{R},$$

tal que

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Assim as funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ possuem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Observe que a aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que se

$$\lim_{v \rightarrow \infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v \rightarrow \infty} D^\alpha T_v = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Observação 1.1.3. *Outro resultado que vale a pena mencionar é que a derivada de uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$, não é, em geral, uma função de $L^1_{loc}(\Omega)$, como mostra o exemplo que vem a seguir. Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções, conhecidos sob a denominação de Espaços de Sobolev.*

Exemplo 1.1.5. *Seja u a função de Heaviside, isto é, u é definida em \mathcal{R} e tem a seguinte forma:*

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

assumindo qualquer valor em $x = 0$.

Esta função u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$ mas sua derivada $u' = \delta_0$ não pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Como $\delta_0 \notin L^1_{loc}(\Omega)$, basta verificar que $u' = \delta_0$.

De fato:

$$\langle u', \varphi \rangle = - \langle u, \varphi' \rangle = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = \int_\infty^0 \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle, \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.1.4. Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, para cada $|\alpha| \leq k$, então a noção de derivada no sentido clássico coincide com a noção derivada no sentido das distribuições, isto é

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u} \forall |\alpha| \leq k.$$

Isto é uma consequência simples da fórmula de integração de Gauss.

1.2 Espaços de Sobolev

Apresentaremos nesta seção uma classe de espaços fundamentais para o estudo das Equações Diferenciais Parciais, que são os *espaços de Sobolev*.

1.2.1 O espaço $H^m(\Omega)$

Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n com fronteira bastante regular Γ . Foi observado na seção anterior que se $u \in L^p(\Omega)$, u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Viu-se que $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Estamos interessados em espaços de distribuições $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais permaneçam em $L^p(\Omega)$. Tais espaços serão denominados *Espaços de Sobolev*.

O espaço vetorial $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, é o espaço das (classes de) funções reais $v : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, mensuráveis, tal que $|v|^p$ é integrável a *Lebesgue* em Ω .

Este espaço quando munido da norma

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

é espaço de *Banach* ver [2].

O conjunto de todas as funções mensuráveis v essencialmente limitadas em Ω é denotado por $L^\infty(\Omega)$, define-se a norma de v por

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{supess } |v(x)|, \forall v \in L^\infty(\Omega).$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é também um espaço de *Banach* ver [2].

No caso particular onde $p = 2$, temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*. Neste caso o produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx,$$

cuja norma induzida é:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Dados um inteiro $m > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω , é o espaço vetorial denotado por $W^{m,p}(\Omega)$, constituído das funções $u \in L^p(\Omega)$ para as quais $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α , com $|\alpha| \leq m$. Em símbolo temos

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \text{ multi-índice, com } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e se $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Em ambos os casos $W^{m,p}(\Omega)$ é um *espaço de Banach*.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$ e separável se $1 \leq p < \infty$.

No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de *Hilbert*, que denotaremos por $H^m(\Omega)$, isto é,

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) ; D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\},$$

as derivadas D^α , evidentemente, no sentido das distribuições.

Define-se em $H^m(\Omega)$ o produto escalar

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} dx, \forall u, v \in H^m(\Omega)$$

com norma induzida por este produto escalar dada por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} (D^\alpha u)_{L^2(\Omega)}^2 dx \right)^{1/2}.$$

Mostra-se, ver [11], que $H^m(\Omega)$ é espaço de *Hilbert separável*.

Para se ter uma idéia mais apurada dos espaços de Sobolev, descrevemos alguns casos particulares.

Em dimensão $n = 1$, temos,

$$H^1(a, b) = \left\{ u \in L^2(a, b); u' \in L^2(a, b) \right\}, \quad u' = \frac{du}{dt}.$$

Neste caso

$$\|u\|_{H^1(a,b)}^2 = \int_a^b [u(t)]^2 dt + \int_a^b [u'(t)]^2 dt.$$

Em dimensão $n \geq 2$, teremos

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \dots, n \right\}$$

e neste caso,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} [u(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_n, \end{aligned}$$

ou, de modo mais conciso, escrevemos

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

É oportuno observar que, embora o espaço vetorial das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto ocorre porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é "bem maior" que a norma de $L^p(\Omega)$ e por isso $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos seqüências convergentes. Isto motivou a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo a aderência de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. No caso $p = 2$ denotaremos esta aderência por $H_0^m(\Omega)$.

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e, em particular os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham papel fundamental na Teoria dos *Espaços de Sobolev* e por conseguinte, na Teoria das EDP's.

O Traço em $H^1(\Omega)$

Demonstra-se em [14] que as funções de $H^m(\Omega)$ podem ser aproximadas na norma de $H^m(\Omega)$, por função de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, onde $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ é o conjunto $\{\varphi|_{\bar{\Omega}}; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ no qual pode-se definir a restrição à fronteira Γ de Ω . Dada $\varphi \in H^1(\Omega)$, consideremos uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ com

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } H^1(\Omega).$$

Definimos o operador $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma)$ por

$$\gamma_0(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k|_{\Gamma},$$

onde o limite é considerado na norma de $L^2(\Gamma)$. O operador γ_0 , denominado operador de traço, é contínuo, linear e seu núcleo é $H_0^1(\Omega)$. Por simplicidade, escrevemos $\varphi|_{\Gamma}$ em vez de $\gamma_0\varphi$ e, dessa forma, podemos caracterizar o espaço $H_0^1(\Omega)$ por:

$$H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_{\Gamma} = 0\}.$$

A generalização do operador de traço para os espaços $H^m(\Omega)$ ocorre de

forma natural e, no caso $m = 2$, temos:

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^2(\Omega); \varphi|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0 \right\}.$$

O dual topológico do espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ se $1 \leq p < \infty$ com p e q índices conjugados. Se $\varphi \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $\varphi|_{\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Quando $p = 2$, $W_0^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H_0^m(\Omega)$, cujo dual recebe a notação $H^{-m}(\Omega)$.

A seguir anunciaremos sem demonstrar o teorema que caracteriza o $W^{-m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.2.1. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Então, $T \in W^{-m,p}(\Omega)$ se, e somente se, existem $g_\alpha \in L^q(\Omega)$ tal que $T = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha g_\alpha$.*

Dem.: Ver [16].

Proposição 1.2.1 (Caracterização de $H^{-1}(\Omega)$). *Se T for uma forma linear contínua sobre $H_0^1(\Omega)$, então existem $n+1$ funções u_0, u_1, \dots, u_n de $L^2(\Omega)$, tais que:*

$$T = u_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

Dem.: Ver [16].

De posse destes dois resultados podemos concluir que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, sendo o operador $\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, linear, contínuo e isométrico.

Lema 1.2.1 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção. Se $u \in H_0^1(\Omega)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C |\nabla u|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Demonstração: Suponhamos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitado na direção do eixo x_1 .

Seja $v \in H_0^1(\Omega)$, existe uma sucessão $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções de $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \rightarrow v$ em $H_0^1(\Omega)$, isto é,

$$\varphi_\nu \rightarrow v \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial v}{\partial x_i} \text{ em } L^2(\Omega), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Como Ω é limitado, existem a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $\forall x \in \Omega \quad a < \text{proj } x < b$ no qual a $\text{proj } x$ é a projeção de x sobre o eixo coordenado x_1 , agora dado $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, e $\varphi(a, x_2, \dots, x_n) = 0$. Temos:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_a^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) d\xi.$$

E da desigualdade de *Schwartz*, obtemos:

$$\begin{aligned} |\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 &= \left(\int_a^{x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) d\xi \right)^2 \\ &\leq (b-a) \int_a^{x_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Aplicando o *Teorema de Fubini* temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 dx &\leq (b-a) \int_{\Omega} \int_a^{x_1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 d\xi dx \\ &\leq (b-a)^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|\varphi|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a) \left[\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{1/2}.$$

Logo,

$$|u|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C |\nabla u|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Observação: Utilizando desigualdade de Poincaré podemos concluir que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla u|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

De fato; Consideremos a norma em $H_0^1(\Omega)$. Se $v \in H_0^1(\Omega)$, tem-se:

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = |v|_{L^2(\Omega)}^2 + |\nabla v|_{L^2(\Omega)}^2 \geq |\nabla v|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Da desigualdade de Poincaré-Friedrichs, obtém-se:

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq (1 + C) |\nabla v|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Conclui-se das desigualdades acima que em $H_0^1(\Omega)$, as normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $|\nabla v|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes.

1.3 Espaços $L^p(0, T; X)$ e Distribuições Vetoriais

Sejam X um espaço de Banach real, com a norma $\|\cdot\|_X$, T um número real positivo e χ_E a função característica do conjunto E . Uma função vetorial $\varphi :]0, T[\rightarrow X$, é dita simples quando assume apenas um número finito de valores distintos. Dada uma função simples $\varphi : (0, T) \rightarrow X$ com representação canônica

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^k \chi_{E_i} \varphi_i.$$

Onde cada $E_i \subset (0, T)$ é mensurável, $i = 1, 2, \dots, k$, e os conjuntos E_i são dois a dois disjuntos, $m(E_i) < \infty$ e $\varphi_i \in X$, $i = 1, 2, \dots, k$, definimos a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t) dt = \sum_{i=1}^k m(E_i) \varphi_i.$$

Dizemos que uma função vetorial $u : (0, T) \rightarrow X$ é Bochner integrável (\mathcal{B} - integrável) se existir uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples tal que:

- (i) $\varphi_\nu \rightarrow u$ em X , q.s em $(0, T)$;
- (ii) $\lim_{k, m \rightarrow \infty} \int_0^T \|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\|_X dt = 0$.

Neste caso, a integral de *Bochner* Ver [8] de u , é por definição, o vetor de X dado por

$$\int_0^T u(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi_\nu(t) dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X .

Uma função vetorial $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ é *fracamente mensurável* quando a função numérica $t \mapsto \langle \Phi, u(t) \rangle$ for mensurável, $\forall \Phi \in X'$, onde X' é o dual topológico de X ; dizemos que u é *fortemente mensurável* quando u for limite quase sempre de uma seqüência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções simples. Em particular, quando u for fortemente mensurável, então a aplicação $t \mapsto \|u(t)\|_X$ é *Lebesgue* mensurável.

Denotaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções $u : (0, T) \rightarrow X$ fortemente mensuráveis e tal que a função $t \mapsto \|u(t)\|_X^p$ é integrável à *Lebesgue* em $(0, T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de *Hilbert*, o espaço $L^2(0, T; H)$ é também um espaço de *Hilbert* cujo produto interno é dado por

$$(u, v)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T (u(s), v(s))_H ds.$$

Por $L^\infty(0, T; X)$ representaremos o espaço de *Banach* das (classes de) funções $u : (0, T) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ que são fortemente mensuráveis e tal que $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$. A norma em $L^\infty(0, T; X)$ é definida por

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in]0, T[} \|u(t)\|_X.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0, T; X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^q(0, T; X')$, onde p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. No caso, $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0, T; X)$ se identifica com

o espaço $L^\infty(0, T; X')$. A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral:

$$\langle u, v \rangle_{(L^p(0, T; X))' \times L^p(0, T; X)} = \langle u, v \rangle_{L^q(0, T; X') \times L^p(0, T; X)}$$

Definição 1.3.1. $f : [0, T] \rightarrow X$ é integrável se existe uma seqüência $\{S_k\}_k$ de funções vetoriais simples, tal que,

$$\int_0^T \|S_k(t) - f(t)\|_X dt \rightarrow 0, \text{ com } k \rightarrow \infty.$$

se f é integrável, define-se

$$\int_0^T f(t) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T S_k(t) dt.$$

A expressão $\int_0^T f(t) d\mu$ é dita integral de Bochner de f , em relação a μ .

Exemplo 1.3.1. Sejam $u \in L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$, e $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$. Consideremos a função $T_u : \mathcal{D}(0, T) \rightarrow X$, definida por

$$T_u(\varphi) = \int_0^T u(s) \varphi(s) ds,$$

onde a integral é calculada no sentido de Bochner em X . A aplicação T_u é linear e contínua de $\mathcal{D}(0, T)$ em X e por esta razão é denominada distribuição vetorial. A distribuição T_u é univocamente determinada por u e, neste sentido, podemos identificar u com a distribuição T_u por ela definida e, portanto, $L^p(0, T; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T; X)$ com injeção contínua e densa.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em X é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em X , o qual denotaremos por $\mathcal{D}'(0, T; X)$.

Definição 1.3.2. Seja $T \in \mathcal{D}'(0, T; X)$. A derivada de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em X dada por

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Por $C^0([0, T]; X)$, $0 < T < \infty$, estamos representando o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme

$$\|u\|_{C^0([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X ..$$

Por $C_w^0([0, T]; X)$, denotaremos o espaço das funções $u : [0, T] \rightarrow X$ fracamente contínuas, isto é, a aplicação $t \mapsto \langle v, u(t) \rangle_{X', X}$ é contínua em $[0, T]$, $\forall v \in X'$.

Quando $X = H$ é um espaço de Hilbert, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \mapsto (u(t), v)_H$, $v \in H$.

1.4 O Teorema Espectral

Sejam V e H espaços de Hilbert reais, cujas normas e produtos internos serão representados, respectivamente, por, $\|\cdot\|$, $((\cdot, \cdot))$ e $|\cdot|$, (\cdot, \cdot) . Suponhamos que $V \subsetneq H$, V denso em H e a injeção de V em H é contínua.

A terna $\{V, H, ((\cdot, \cdot))\}$ determina um operador linear A caracterizado por: o domínio do operador A é o subespaço vetorial $D(A)$ de V dado por

$$D(A) = \{u \in V; \exists f \in H \text{ tal que } ((u, v)) = (f, v), \forall v \in V\}$$

e $Au = f$.

Temos então que

$$((u, v)) = (Au, v), \forall u \in D(A) \text{ e } v \in V.$$

Demonstra-se em Milla [13], que A é um operador auto-adjunto não limitado de H e $D(A) \hookrightarrow V \hookrightarrow H$, com injeções contínuas e densas, além disso A tem espectro discreto.

Supondo que a imersão de V em H é compacta, segue-se da Teoria Espectral, que existe um sistema ortonormal completo de H , enumerável, $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$, constituído de autovetores de A , cujos autovalores correspondentes $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ satisfazem à

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots, \lambda_j \rightarrow \infty \text{ quando } j \rightarrow \infty.$$

Para cada α real, o operador A^α é caracterizado por

$$D(A^\alpha) = \left\{ u \in H; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{2\alpha} |(u, w_\nu)|^2 < \infty \right\}$$

e

$$A^\alpha u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^\alpha (u, w_\nu) w_\nu \in H, u \in D(A^\alpha).$$

Dado $u \in H$, então

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} (u, w_\nu) w_\nu.$$

Em $D(A^\alpha)$ consideremos o produto interno e a norma definidos, respectivamente, por

$$(u, v)_{D(A^\alpha)} = (A^\alpha u, A^\alpha v)$$

e

$$|u|_{D(A^\alpha)} = |A^\alpha u|.$$

Temos $D(A^\alpha)$ munido do produto interno $(u, v)_{D(A^\alpha)}$ é um espaço de Hilbert e dados $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 > \alpha_2 \geq 0$, a imersão de $D(A^{\alpha_2})$ em $D(A^{\alpha_1})$ é compacta.

Sendo A um operador positivo, então o operador $S = A^{\frac{1}{2}}$ está bem definido, então é denominado raiz quadrada positiva de A e é caracterizado por

$$D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = V, \left|A^{\frac{1}{2}}\right| = \|u\|, \forall u \in V.$$

No qual segue-se o operador A será definido pelo terno $\{V, H, ((u, v))\}$ nas condições do Teorema Espectral.

1.5 Outros Resultados Importantes

A seguir enunciaremos mais alguns resultados que serão utilizados posteriormente.

Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que f satisfaz as condições de Carathéodory sobre D se

- $f(t, x)$ é mensurável em t , para cada x fixo;
- $f(t, x)$ é contínua em x , para cada t fixo;
- Para cada compacto K em D , existe uma função real integrável $m_K(t)$ tal que $|f(t, x)| \leq m_K(t)$, para todo $(t, x) \in D$.

Consideremos o retângulo $R = \{(t, x) \in \mathcal{R}^{n+1}; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$, com $a, b > 0$.

Teorema 1.5.1 (Carathéodory). *Seja $f : R \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre R . Então, sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$ ($\beta > 0$), existe uma solução do problema de valor inicial*

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(t_0) = X_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Dem: Vamos mostrar para o caso $t \geq \tau$. Definimos a função M

$$M(t) = 0 \quad (t < \tau) \quad (1.2)$$

$$M(t) = \int_{\tau}^t m(s) ds \quad (t \leq t \leq \tau + a). \quad (1.3)$$

M é contínua e não decrescente, pois $m(t) \geq 0$
 $M(\tau) = 0$

Portanto, $(t, \xi \pm M(t)) \in R$ para algum intervalo $\tau \leq t \leq \tau + \beta$. Escolhendo β de modo que $\tau + \beta \leq \tau + a$ definimos as seguintes aproximações φ_j ($j = 1, 2, \dots$) por

$$\varphi_j(t) = \xi \quad \left(\tau \leq t \leq \tau + \frac{\beta}{j} \right) \quad (1.4)$$

$$\varphi_j(t) = \xi + \int_{\tau}^{t-\beta/j} f(s, \varphi_j(s)) ds \quad \left(\tau + \frac{\beta}{j} < t \leq \tau + \beta\right) \quad (1.5)$$

Note que $\varphi_1(t) = \xi \forall t \in (\tau, \tau + \beta)$

Fixado $j \geq 1$ a integral em (1.5) só tem sentido se

$$\tau < t - \frac{\beta}{j} < \tau + \frac{\beta}{j} \Leftrightarrow \tau + \frac{\beta}{j} < t \leq \tau + \frac{2\beta}{j}.$$

Daí segue-se, que em (6) tem-se φ_j é contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \frac{\beta}{j}$ e pelo exposto acima, desde que $(t, \xi) \in R$ a equação (1.5) define φ_j como uma função contínua no intervalo $\tau + \frac{\beta}{j} < t \leq \tau + \frac{2\beta}{j}$ e além disso, temos

$$\begin{aligned} \varphi_j(t) = \xi + \int_{\tau}^{t-\beta/j} f(s, \varphi(s)) ds &\Rightarrow |\varphi_j(t) - \xi| = \left| \int_{\tau}^{t-\beta/j} f(s, \varphi(s)) ds \right| \\ |\varphi_j(t) - \xi| &\leq \int_{\tau}^{t-\beta/j} |f(s, \varphi(s))| ds \Rightarrow |\varphi_j(t) - \xi| \leq \int_{\tau}^{t-\beta/j} m(s) ds \end{aligned}$$

por (1.4) e, portanto,

$$|\varphi_j(t) - \xi| \leq M\left(t - \frac{\beta}{j}\right). \quad (1.6)$$

Afirmção: $\varphi_j(t)$ é uma função contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \beta$. Provamos essa afirmação usando indução finita

$n = 1$ ok!

Suponha que para $n = k$ temos φ_j está definida em $\tau \leq t \leq \tau + \frac{k\beta}{j}$ para $1 < k < j$ assim temos $\varphi_j(t) = \xi + \int_{\tau}^{\tau - \frac{k\beta}{j}} f(s, \varphi_j(s)) ds$ de modo análogo, concluimos que $\varphi_j(t)$ é contínua em $\tau + \frac{k\tau}{j} \leq t \leq \tau + \frac{(k+1)\tau}{j}$. Portanto, $\varphi_j(t)$ é contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \frac{(k+1)\tau}{j}$. É fácil ver que φ_j satisfaz (1.6). Portanto, por indução, (1.5) define φ_j como uma função contínua em $\tau \leq t \leq \tau + \beta$, para todo $j \in \mathbf{N}$ satisfazendo

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi_j(t) = \xi & \tau \leq t \leq \tau + \frac{\beta}{j} \\ |\varphi_j(t) - \xi| \leq M\left(t - \frac{\beta}{j}\right) & \tau + \frac{\beta}{j} \leq t \leq \tau + \beta \end{array} \right.$$

φ_j é equicontínua.

Devemos mostrar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer t_1, t_2 tais que $|t_1 - t_2| < \delta$ temos $|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| < \epsilon \quad \forall j$. Sabemos que

$$|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| \leq |M(t_1 - \frac{\beta}{j}) - M(t_2 - \frac{\beta}{j})|$$

.

Sendo M contínua em $[\tau, \tau + \beta]$ vem que M é uniformemente contínua. Logo,

$$|t_1 - t_2| = |(t_1 - \frac{\beta}{j}) - (t_2 - \frac{\beta}{j})| < \delta \Rightarrow |M(t_1 - \frac{\beta}{j}) - M(t_2 - \frac{\beta}{j})| < \epsilon$$

Donde segue nossa afirmação.

φ_j é equilimitada

Note que

$$|\varphi_j(t) - \xi| \leq M(t - \frac{\beta}{j}) \forall j.$$

Sendo M contínua em $[\tau, \tau + \beta]$, logo limitada, então existe $C > 0$ tal que $|M(t)| \leq C$. Desde que

$$|\varphi_j(t) - \xi| \leq M(t - \frac{\beta}{j})$$

Segue que

$$|\varphi_j(t)| \leq |\xi| + C \quad \forall j \in \mathbf{N}.$$

Desta forma, a sequência (φ_j) está nas condições do teorema de Àrzela-Ascoli, Assim existe uma subsequência (φ_{j_k}) que converge uniformemente em $[\tau, \tau + \beta]$ para uma função contínua φ .

Mostremos que tal função limite, é solução de (1.1).

Sendo $f(t, x)$ contínua em x para cada t fixo decorre da que

$$f(t, \varphi_{j_k}(t)) \longrightarrow f(t, \varphi(t)) \quad \forall t$$

e, usando (1.4) segue que

$$|f(t, \varphi_{j_k})(t)| \leq m(t).$$

Desde que $m(t)$ é Lebesgue integrável a função f está nas condições do teorema da convergência dominada de Lebesgue, resultando portanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\tau}^t f(s, \varphi_{j_k}(s)) ds = \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

para todo $t \in [\tau, \tau + \beta]$ temos:

$$\varphi_{j_k}(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi_{j_k}(s)) ds - \int_{t-\beta/j_k}^t f(s, \varphi_{j_k}(s)) ds.$$

Quando, $k \rightarrow \infty$ o segundo termo integral tende a zero, e usando as considerações anteriores vêm que

$$\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

donde segue o resultado.

Corolário 1.5.1 (Prolongamento de solução). *Seja $D = [0, \omega] \times B$, com $0 < \omega < \infty$ e $B = \{x \in \mathcal{R}^n; |x| \leq b\}$, $b > 0$ e f nas condições de Carathéodory. Seja $\varphi(t)$ uma solução de*

$$\begin{cases} X' = f(t, X) \\ X(0) = X_0, |X_0| \leq b. \end{cases}$$

Dem.: Ver [.] Suponhamos que em qualquer intervalo I onde $\varphi(t)$ está definida, se tenha, $|\varphi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então φ tem um prolongamento até $[0, \omega]$.

Proposição 1.5.1. *Sejam V e H espaços de Hilbert, V continuamente imerso em H , $u \in L^p(0, T; V)$ e $u' \in L^p(0, T; H)$, com $1 \leq p < \infty$, então $u \in C^0([0, T]; H) \cap C_w^0([0, T]; V)$.*

Demonstração: Ver [12].

Observação 1.5.1. : *Como consequência do conceito de topologia fraca e fraco- \star , segue:*

Definição 1.5.1 (Convergência Fraca). . *Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de E . Então $u_\nu \rightharpoonup u$ se, e*

$$\langle \varphi, u_\nu \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle, \forall \varphi \in E'.$$

Definição 1.5.2 (Convergência Fraca Estrela). *Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de E' . Diz-se $\varphi_\nu \rightharpoonup \varphi$ fraco -★ se, somente se,*

$$\langle \varphi_\nu, u \rangle \rightarrow \langle \varphi, u \rangle, \forall u \in E.$$

Proposição 1.5.2 (Compacidade de Aubin-Lions). *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, B_0 e B_1 reflexivos, a imersão de B_0 em B é compacta, B imerso continuamente em B_1 , e, W o espaço*

$$W = \{u \in L^2(0, T; B_0); u' \in L^2(0, T; B_1)\}$$

equipado da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^2(0, T; B_0)} + \|u'\|_{L^2(0, T; B_1)}$. Então W é um espaço de Banach, e a imersão de W em $L^2(0, T; B)$ é compacta.

Demonstração: Ver [12].

Observação 1.5.2. *Como conseqüência da Compacidade de Aubin-Lions, temos que se $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em $L^2(0, T; B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em $L^2(0, T; B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada em W . Daí, segue que existe uma subseqüência $(u_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de (u_ν) tal que $u_{\nu_k} \rightarrow u$ forte em $L^2(0, T; B)$.*

Lema 1.5.1. *Consideremos X um espaço de Hilbert com dual X' e Y um outro espaço de Hilbert tal que $X \hookrightarrow Y$. Seja*

$$W = \{u \in L^2(0, T; X); u' \in L^2(0, T; X')\}.$$

Então

$$\frac{d}{dt}(u(t), v(t))_Y = \langle u'(t), v(t) \rangle_{X, X'} + \langle u(t), v'(t) \rangle_{X, X'}.$$

Demonstração: Ver [2].

Lema 1.5.2 (Lema de Lions). *Sejam \mathcal{O} um aberto limitado do $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, g_μ e g funções de $L^q(\mathcal{O})$, $1 < q < \infty$, tal que*

$$\|g_\mu\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq C, \quad g_\mu \rightarrow g$$

quase sempre em \mathcal{O} . Então $g_\mu \rightarrow g$ na topologia fraca de $L^q(\mathcal{O})$.

Demonstração. Ver [12].

Lema 1.5.3 (Lema de Fatou). *Seja (f_n) uma seqüência em $M^+(X, \mathfrak{M})$. Então,*

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Onde $M^+(X, \mathfrak{M})$ a coleção de todas as funções mensuráveis, não negativas, definidas em X , a valores reais estendida.

Demonstração. Ver [16].

Teorema 1.5.2 (da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja $(f_n)_n$ uma seqüência de funções integráveis definidas em X . Suponha que*

1. $(f_n)_n$ converge q.s. para uma função real, mensurável, f .
2. Existe uma função integrável g , tal que $|f_n| \leq g, \forall n$. Então f é integrável e

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Ver [16]

Teorema 1.5.3 (Representação de Riez). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $\varphi \in (L^p)'$. Então existe um único $u \in L^{p'}$ tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int u f, \quad \forall f \in L^p.$$

Além disso,

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração. Ver [2].

Como consequência destes resultados temos as seguintes identificações:

$$i) L^2 \cong (L^2)'$$

$$ii) L^{p'} \cong (L^p)'$$

Teorema 1.5.4 (Desigualdade de Sobolev). *Considere $1 \leq p < N$, então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

onde p^* é tal que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

e existe uma constante $C = C(p, N) = \frac{(N-1)p}{N-p}$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração: Ver [2].

Observação 1.5.3. $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, $m \geq 1$, inteiro, tal que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}.$$

Demonstração: Ver [2].

Proposição 1.5.3 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ com*

$$p, p' \geq 1 \text{ e } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Então

$$f, g \in L^1 \text{ e } \int |f \cdot g| \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração: Ver [2].

Teorema 1.5.5 (Banach-Alaoglu). *Sejam E um espaço de Banach separável e E' o seu dual topológico. Então o conjunto*

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\}$$

é compacto na topologia fraca estrela.

Demonstração: Ver [2].

Teorema 1.5.6 (Regularidade para um problema de Dirichlet). *Sejam Ω um aberto de classe C^2 com Γ limitado [ou com $\Omega = \mathbb{R}_+^N$]. Seja $f \in L^2(\Omega)$ e seja $u \in H_0^1(\Omega)$ verificando*

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi + \int_{\Omega} u \varphi = \int_{\Omega} f \varphi, \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$ onde C é uma constante que depende somente de Ω . E mais, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in H^m(\Omega)$, então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \text{ com } \|u\|_{H^{m+2}} \leq C\|f\|_{H^m};$$

em particular se $m > \frac{N}{2}$, então $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Então se Ω é de classe C^∞ e se $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [2].

Dizemos que uma seqüência (φ_ν) converge para φ em $L^p(\Omega)$ se

$$\|\varphi_\nu - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0,$$

$1 \leq p \leq \infty$. Se p e q são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ com $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(\Omega)$, que denotaremos por $[L^p(\Omega)]'$, é o espaço $L^q(\Omega)$. No caso de $1 \leq p < \infty$ o espaço vetorial $L^p(\Omega)$ é separável e, para $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.

Definição 1.5.3. *Seja H um espaço de Hilbert. Chama-se base Hilbertiana de H uma seqüência de elementos (ω_n) de H tais que*

$$\begin{cases} \text{(i)} & |\omega_n| = 1 \quad \forall n, (\omega_n, \omega_m) = 0 \quad \forall n, m, m \neq n; \\ \text{(ii)} & \text{O espaço gerado pela } (\omega_n) \text{ é denso em } H. \end{cases}$$

A seguinte proposição estabelece que a convergência em $L^p(\Omega)$ da origem a uma convergência pontual.

Proposição 1.5.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in L^p(\Omega)$ e $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $L^p(\Omega)$ convergindo para u em $L^p(\Omega)$. Então existe uma subseqüência de (u_k) , ainda denotada por (u_k) , tal que*

(i) $u_k(x) \rightarrow u(x)$, q.s. em Ω ;

(ii) $|u_k(x)| \leq h(x)$, q.s. em Ω , $\forall k \in \mathbb{N}$, com $h \in L^p(\Omega)$.

Demonstração: Ver [2].

Lema 1.5.4 (Lema de Gronwall). : *Sejam $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e não-negativas, $\alpha \geq 0$. Se*

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) ds,$$

então,

$$\varphi(t) \leq \alpha \exp \left[\int_a^t \psi(s) ds \right], \forall t \in [a, b].$$

Em particular, $\varphi(t)$ é limitada e se $\alpha = 0$, então $\varphi \equiv 0$.

Demonstração. Fazendo $\omega(t) = \alpha + \int_a^t \varphi(s) \psi(s) ds$, decorre da hipótese que $\varphi(t) \leq \omega(t)$ e pelo teorema fundamental do cálculo, segue que $\omega'(t) = \varphi(t) \psi(t)$. Logo,

$$\omega'(t) \leq \omega(t) \psi(t),$$

donde segue,

$$\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \leq \psi(t).$$

Integrando a última desigualdade de a até t , obtemos

$$\int_a^t \frac{\omega'(s)}{\omega(s)} ds \leq \int_a^t \psi(s) ds.$$

Assim

$$\int_a^t \frac{d}{ds} \ln(\omega(s)) ds \leq \int_a^t \psi(s) ds.$$

Portanto,

$$\ln \left(\frac{\omega(t)}{\omega(a)} \right) \leq \int_a^t \psi(s) ds,$$

isto é,

$$\omega(t) \leq \alpha \exp \left(\int_a^t \psi(s) ds \right), \quad t \in [a, b].$$

Desta desigualdade e de $\varphi(t) \leq \omega(t)$.

Lema 1.5.5. *Se $\theta \in L^p(0, T_0)$ e $v \in V$, então*

$$\xi(t, x) = \theta(t)v(x) \in L^p(0, T_0; V).$$

Demonstração. *Devemos mostrar que $|\xi(t, x)|_v \in L^p(0, T_0)$, ou seja,*

$$\int_0^{T_0} |\xi(t, x)|_v^p dt < \infty.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} |\xi(t, x)|_v^p dt &= \int_0^{T_0} |\theta(t)v(x)|_v^p dt = \int_0^{T_0} |\theta(t)|^p |v(x)|_v^p dt \\ &= |v(x)|_v^p \int_0^{T_0} |\theta(t)|^p dt, \end{aligned}$$

mas decorre da hipótese que: $\int_0^{T_0} |\theta(t)|^p dt < \infty$.

Assim, segue o Lema.

Lema 1.5.6. *Se $u_m \rightarrow u$ em $L^p(0, T_0; X)$, então*

$$\|u_m(t)\|_X \rightarrow \|u(t)\|_X \quad \text{em } L^p(0, T_0)$$

Demonstração. *Queremos mostrar que*

$$\| \|u_m(t)\|_X - \|u(t)\|_X \|_{L^p(0, T_0)}^p \rightarrow 0.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \left\| \|u_m(t)\|_X - \|u(t)\|_X \right\|_{L^p(0, T_0)}^p &= \int_0^{T_0} \left| \|u_m(t)\|_X - \|u(t)\|_X \right|^p dt \\ &\leq \int_0^{T_0} \|u_m(t) - u(t)\|_X^p dt, \end{aligned}$$

mas decorre da hipótese que:

$$\int_0^{T_0} \|u_m(t) - u(t)\|_X^p dt \rightarrow 0$$

e, portanto, segue o Lema.

$L^2(\Omega)$ é o espaço vetorial das (classes) funções definidas em Ω cujo o qadrado é integrável a Lebesgue.

Definimos o produto escalar e norma, respectivamente, em $L^2(\Omega)$ por

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_{\Omega} u(x)v(x)ds, \forall u, v \in L^2(\Omega) \\ |u| &= \int_{\Omega} u^2 dx \end{aligned}$$

Capítulo 2

Existência de solução global fraca com dados iniciais nulos

Neste capítulo obtivemos a existência de soluções globais fracas para o seguinte problema degenerado

$$(P) \begin{cases} (k_1(x, t)u'(x, t))' + k_2(x, t)u'(x, t) - \Delta u(x, t) - \Delta u''(x, t) + \\ |u'(x, t)|^\rho u'(x, t) = f \text{ em } Q \\ u = 0 \text{ sobre } \Sigma \\ u(0) = 0, \quad (k_1 u')(0) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

no domínio não-cilíndrico Q contido no cilindro $Q_0 = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$, onde Ω é um aberto limitado do R^n com fronteira Γ bem regular. Consideremos Ω_t definido anteriormente (Introdução). Daremos a seguir as hipóteses apropriadas das funções k_1, k_2, f e ρ .

(A.1): $k_1(x, t) \geq 0$, $k_2(x, t) \geq d > 0$, quase sempre em Q ;

$k_1 \in C^1([0, T]; L^\infty(\Omega_t))$;

$k_2 \in C^0([0, T]; L^\infty(\Omega_t))$;

$\mu(x, t) = k_2(x, t) - \frac{1}{2}|k_1'(x, t)| \geq \delta_0 > 0$ quase sempre em Q .

(A.2): $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega_t))$,

$0 < \rho < \infty$ se $n = 1$ ou $n = 2$,

$0 < \rho < \frac{2}{n-2}$, se $n \geq 3$.

Teorema 2.0.7. *Assumimos as hipóteses: (H.1)-(H.2), (A.1)-(A.2).*

Então dado $T > 0$, existe $u : Q \rightarrow \mathcal{R}$ na classe:

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t)); \quad (2.2)$$

$$u' \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_t)); \quad (2.3)$$

$$\sqrt{k_1}u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t)), \quad (2.4)$$

$$u'' \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_t)) \quad (2.5)$$

e satisfaz:

$$\begin{cases} (k_1(x, t)u'(x, t))' + k_2(x, t)u'(x, t) - \Delta u(x, t) - \Delta u''(x, t) + \\ + |u'(x, t)|^\rho u'(x, t) = f \text{ no sentido de } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_t)) \\ u(0) = 0; (k_1u')(0) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Demonstração: Usaremos o método da Penalização de Lions, para obter a existência de soluções para o problema (P). Seja M a função definida no lema (0.0.2). Considere \tilde{f} o prolongamento de f respectivamente a Q_0 , sendo tal prolongamento definido como zero fora de Q .

Agora, para cada $\epsilon > 0$, consideremos o seguinte problema:

$$(P^\epsilon) : \begin{cases} \frac{d}{dt}(k_{1\epsilon}u'_\epsilon) + k_2u'_\epsilon - \Delta u_\epsilon - \Delta u''_\epsilon + |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon = \tilde{f}, \\ u_\epsilon(0) = 0 \text{ e } (k_{1\epsilon}u'_\epsilon)(0) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Aqui (P^ϵ) é o problema perturbado penalizado de (P) definido em (0.8). Como $Q \subset Q_0$ e $\Omega_t \subset \Omega$ então,

$$k_1 \in C^1([0, T]; L^\infty(\Omega)) \quad (2.8)$$

$$k_2 \in C^0([0, T]; L^\infty(\Omega)) \quad (2.9)$$

$$\tilde{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.10)$$

Provaremos primeiro o resultado à seguir.

Teorema 2.0.8. *Sejam k_1 , k_2 e \tilde{f} como acima e M nas condições do lema (0.0.2). Então para cada $0 < \epsilon < 1$, existe uma função $u_\epsilon : Q_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

$$u_\epsilon \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (2.11)$$

$$u'_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (2.12)$$

$$\sqrt{k_1}u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.13)$$

$$u''_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (2.14)$$

e satisfaz (P^ϵ)

$$(P^\epsilon) \begin{cases} k_{1\epsilon}u''_\epsilon + k'_1u'_\epsilon + k_2u'_\epsilon - \Delta u_\epsilon - \Delta u''_\epsilon + |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon = \tilde{f} \\ u_\epsilon(0) = 0 \text{ e } (k_1u'_\epsilon)(0) = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Demonstração: Para obter a solução do problema (P^ϵ) usaremos o método de *Faedo-Galerkin* que nos dará uma sequência de soluções aproximadas para o problema definido a seguir. Posteriormente, mediante estimativas a priori, mostraremos que essa sequência converge, numa topologia adequada para solução do problema (P^ϵ) .

Seja $\{w_j\}$ uma base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$ e $V_m = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_m] \subset H_0^1(\Omega)$ um subespaço de dimensão m ($\dim V_m = m$) gerado pelos primeiros elementos de $\{w_j\}$. Para todo $0 < \epsilon < 1$ queremos encontrar:

$$u_{\epsilon m}(t) = \sum_{j=1}^m g_{j\epsilon m}(t)w_j(x), 0 \leq t < t_{\epsilon m} \leq T \quad (2.16)$$

solução do sistema de equações diferenciais não-lineares em t ,

$$\begin{cases} (k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}, v) + (k'_1u'_{\epsilon m}, v) + (k_2u'_{\epsilon m} + (-\Delta u_{\epsilon m}, v) + (-\Delta u''_{\epsilon m}, v) \\ + (|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}, v) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{\epsilon m}, v) = (\tilde{f}, v), \forall v \in V_m \\ u_{\epsilon m}(0) = 0 \text{ e } u'_{\epsilon m}(0) = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Substituindo $u_{\epsilon m}$ em (2.17), tomando $v = w_j$ e usando o fato de $\{w_j\}$ ser sistema ortonormal completo em $L^2(\Omega)$ e ainda $(w_j, w_i) = \delta_{ij}$ obtemos

$$\begin{cases} k_{1\epsilon}g''_{j\epsilon m}(t) + k'_1g'_{j\epsilon m}(t) + k_2g'_{j\epsilon m}(t) + \lambda_j g_{j\epsilon m}(t) + \tilde{\lambda}_j g''_{j\epsilon m}(t) + \\ |u'_{\epsilon m}|^\rho g'_{j\epsilon m}(t) + \frac{1}{\epsilon}Mg'_{j\epsilon m}(t) = (\tilde{f}, v) \\ g_{\epsilon m,j}(0) = (u_{\epsilon m,j}(0), w_j) = 0, g'_{\epsilon m,j}(0) = (u'_{\epsilon m,j}(0), w_j) = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

ou seja

$$\begin{cases} g''_{j\epsilon m}(t) + \frac{k'_1+k_2+|u'_{\epsilon m}|^{\rho+\frac{1}{\epsilon}}M}{k_{1\epsilon}+\lambda_j} g'_{j\epsilon m}(t) + \frac{\lambda_j}{k_{1\epsilon}+\lambda_j} g_{j\epsilon m}(t) = \frac{1}{k_{1\epsilon}+\lambda_j}(\tilde{f}, v) \\ g_{\epsilon m j}(0) = (u_{\epsilon m j}(0), w_j) = 0, g'_{\epsilon m j}(0) = (u_{\epsilon m j}(0), w_j) = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Temos então a forma matricial do sistema (2.18)

$$\begin{cases} X'' + BX' + CX + = D \\ X(0) = O, X'(0) = O \end{cases} \quad (2.20)$$

onde

$$B = \begin{bmatrix} \frac{k'_1+k_2+|u'_{\epsilon m}|^{\rho+\frac{1}{\epsilon}}M}{k_{1\epsilon}+\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{k'_1+k_2+|u'_{\epsilon m}|^{\rho+\frac{1}{\epsilon}}M}{k_{1\epsilon}+\lambda_m} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{k_{1\epsilon}+\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\lambda_m}{k_{1\epsilon}+\lambda_m} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_{1\epsilon}+\lambda_1}(\tilde{f}, w_1) \\ \vdots \\ \frac{1}{k_{1\epsilon}+\lambda_m}(\tilde{f}, w_m) \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} g_{\epsilon m 1}(t) \\ \vdots \\ g_{\epsilon m m}(t) \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} g'_{\epsilon m 1}(t) \\ \vdots \\ g'_{\epsilon m m}(t) \end{bmatrix}, \quad X'' = \begin{bmatrix} g''_{\epsilon m 1}(t) \\ \vdots \\ g''_{\epsilon m m}(t) \end{bmatrix}.$$

Aqui denotemos a mx1 matriz coluna nula por

$$O = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0. \end{bmatrix}$$

Onde B, C, são matrizes de ordem mxm e D, X, X', X'' são de ordem mx1, assim podemos reescrever a equação (2.19) como segue:

$$\begin{cases} X'' = -BX' - CX + D \\ X(0) = 0, X'(0) = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Transformemos o problema (2.17) em um sistema de equações diferenciais ordinarias (E.D.O.) de 1ª ordem não linear, tomando

$$Y = \begin{bmatrix} X \\ X' \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad Y' = \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix}$$

onde

$$Y' = \begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' \\ -BX' - CX + D \end{bmatrix}$$

Ou ainda

$$\begin{bmatrix} X' \\ X'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X' \\ -BX' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{O} \\ -CX \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O \\ D \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Aqui \bar{O} e O são matrizes nulas de ordem $m \times m$ e $m \times 1$ respectivamente. Reescrevendo a equação (2.22), temos

$$Y' = \begin{bmatrix} \bar{O} & I \\ -C & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O \\ D \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Aqui I é a matriz identidade de ordem $m \times m$. Agora tomemos:

$$F_1(X, t) = \begin{bmatrix} \bar{O} & I \\ -C & -B \end{bmatrix}$$

$$F_2(X, t) = \begin{bmatrix} O \\ D \end{bmatrix}$$

Temos o seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias

$$\begin{cases} Y' & = F(Y, t) \\ Y(0) & = \tilde{O} \end{cases} \quad (2.24)$$

Onde \tilde{O} é a matriz nula de ordem $2m \times 2m$ e $F(Y, t) = F_1(Y, t)Y + F_2(Y, t)$. Nosso objetivo é mostrar que o problema (2.24), logo o problema (2.17), possui solução local. Vamos verificar que a função $F(Y, t)$ satisfaz as condições de Carathéodory.

1ª Condição de Carathéodory: $F(Y, t)$ é mensurável em t , para cada Y fixado. Isto é:

$F_2(Y, t)$ são mensuráveis em t , para cada Y fixado. Com efeito, $F_2(Y, t)$ é mensurável em t , pois da hipótese (A.1), e ainda, $0 < \tilde{\lambda}_j, \quad j = 1, \dots, m$,

temos que $(k_{1\epsilon} + \tilde{\lambda}_j > 0)$ é contínua em t e daí $\frac{1}{k_{1\epsilon} + \tilde{\lambda}_j}(\tilde{f}, v)$ é contínua, e pela hipótese (A.2), temos que $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega_t))$ é mensurável em t , para Y fixado, logo \tilde{f} é mensurável em t , e portanto D é mensurável em t e O é mensurável em t conseqüentemente $F_2(Y, t)$ é mensurável em t para Y fixado.

$F_1(Y, t)Y$ é mensurável em t . Basta comprovar que as entradas \bar{O} , I , $-B$, $-C$ de $F_1(Y, t)$ são mensuráveis. Para B ser mensurável devemos provar que $\frac{k'_1 + k_2 + |u'_{\epsilon m}|^\rho + \frac{1}{\epsilon}M}{k_{1\epsilon} + \tilde{\lambda}_1}$ é mensurável. De fato: Da hipótese (A.1) k'_1, k_2 são contínuas em t . A função $s \mapsto |s|^\rho$ é contínua, e portanto a função $t \mapsto |u'_{\epsilon m}(t)|^\rho$ é contínua, então logo mensurável, por outro lado $\frac{1}{\epsilon}M$ é mensurável. da primeira parte temos que $\frac{1}{k_{1\epsilon} + \tilde{\lambda}_j}$ é mensurável. Portanto B é mensurável em t para Y fixado. Portanto $-B$ é mensurável.

C é mensurável em t , pois $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, m$ são autovalores do operador $-\Delta$, portanto mensuráveis, logo $\frac{\lambda_j}{k_{1\epsilon} + \tilde{\lambda}_j}$ é mensurável. Portanto $-C$ é mensurável

Como \bar{O} e I são as matrizes nula e indentidade respectivamente, logo são mensuráveis em t .

Portanto $F_1(Y, t)$ é mensurável em t , para Y fixado

2ª Condição de Carathéodory

Suponha t fixado, devemos mostrar que $F(Y, t)$ é contínua em Y .

É verdade que $F_2(Y, t)$ é contínua em Y , pois $\frac{1}{k_{1\epsilon} + \tilde{\lambda}_j}(\tilde{f}, w_j)$ é contínua, visto que $k_1 \in C^1([0, T]; C^0(\bar{\Omega}))$ e $\tilde{\lambda}_j, j = 1, 2, \dots, m$ são autovalores do operador $-\Delta$, logo $k_{1\epsilon} + \tilde{\lambda}_j > 0$ é contínua, conseqüentemente $\frac{1}{k_{1\epsilon} + \tilde{\lambda}_j} > 0$, logo contínua e além disso (\tilde{f}, w_j) é contínua, pois $\tilde{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e não depende Y . Portanto $F_2(Y, t)$ é contínua em Y para t fixado.

Sabemos que: $k'_1, k_2 \in C^0([0, T]; C^0(\bar{\Omega})) \Rightarrow k_1, k_2$ contínua.

A função $s \rightarrow |s|^\rho$ é contínua \Rightarrow a função $t \rightarrow |u'_{\epsilon m}(t)|^\rho$ é contínua.

$\frac{1}{\epsilon}M(x, t) \in L^\infty(Q_0)$. Portanto cada entrada de $F_1(Y, t)$ é contínua em Y para t fixo.

Agora para cada $j = 1, 2, \dots, m$ a função projeção π_j , definida por

$$\pi_j(Y) = g_{emj}(t) \quad (2.25)$$

onde $g_{emj}(t) = (u_{em}, w_j)$, é contínua.

Para cada t fixo a função $Y \rightarrow u_\epsilon(t)$ definida por

$$u_{em}(t) = (\sum_{j=1}^m g_{emj} w_j) \quad (2.26)$$

onde $\sum_{j=1}^m g_{emj} w_j = \sum_{j=1}^m \pi_j(Y) w_j$ é contínua para cada t fixado, pois é combinação linear finita de funções contínuas, e ainda, para cada $i \in N$, $i = 1, 2, \dots, m$ a função projeção

$$\pi_j(Y) = g'_{emi}(t) \quad (2.27)$$

Onde $g'_{emi}(t) = (u'_{em}, w_i)$, é contínua.

Daí, para cada t fixado a função $Y \rightarrow u'_\epsilon(t)$ definida por

$$u'_{em}(t) = \sum_{i=1}^m g'_{emi} w_i \quad (2.28)$$

Onde $\sum_{i=1}^m g'_{emi}(t) = \sum_{i=1}^m \pi(Y) w_i$ é contínua. Então $F_1(Y, t)Y$ é contínua. Portanto a função $F(Y, t)$ é contínua em Y , para cada t fixado.

3º Condição de Crathéodory.

Pretendemos mostrar que existe uma função real $m(t)$ integrável em $[0, T]$ tal que

$$\|F(Y, t)Y\|_{R^{2m \times m}} \leq m_k(t), \forall (Y, t) \in V \quad (2.29)$$

Onde K é um compacto de V , e $V = E \times [0, T]$ com

$$E = \{Y \in R^{2m \times 1}; \|Y\|_{R^{2m \times 1}} \leq \delta, \delta > 0\} \quad (2.30)$$

Observação 2.0.4. *As normas em R^n (para cada $n \in N$) são equivalentes. Denotemos por $\|\cdot\|_{p \times q}$ a norma do máximo em $R^{p \times q}$*

Temos que

$$F(Y, t) = F_1(Y, t)Y + F_2(Y, t) \quad (2.31)$$

logo,

$$\|F(Y, t)\|_{2m \times 1} \leq \|F_1(Y, t)Y\|_{2m \times 1} + \|F_2(Y, t)\|_{2m \times 1}$$

note que

$$\|F_1(Y, t)Y\|_{2m \times 1} = \|F_1(Y, t)\|_{2m \times 2m} \|Y\|_{2m \times 1}$$

e daí, temos:

$$\|F(Y, t)\|_{2m \times 1} \leq \|F_1(Y, t)\|_{2m \times 2m} \|Y\|_{2m \times 1} + \|F_2(Y, t)\|_{2m \times 1}$$

como $\|Y\|_{2m \times 1} \leq \delta$, ou seja,

$$\|F(Y, t)\|_{2m \times 1} \leq \delta \|F_1(Y, t)\|_{2m \times 2m} + \|F_2(Y, t)\|_{2m \times 1}$$

devemos provar que $\|F_1(Y, t)\|_{2m \times 2m}$, $\|F_2(Y, t)\|_{2m \times 1}$ são limitadas, isto é, devemos majorar cada entrada de $F_1(Y, t)$, e $F_2(Y, t)$.

Note que: (a) $\|k_{1\epsilon}\|_{C^1([0, T]; L^\infty(\Omega))} \leq \|k_1(x, t)\| + \epsilon < \infty \Rightarrow \exists c_1; \|k_{1\epsilon}\| \leq c_1$.

(b) $\|k_{2\epsilon}\|_{C^1([0, T]; L^\infty(\Omega))} \leq \infty \Rightarrow \exists c_2 > 0; \|k_2(x, t)\| \leq c_2$.

(c) $\|\lambda_i\| \leq \infty \forall i, i = 1, 2, \dots, m \Rightarrow \lambda_i \leq \lambda_m$.

(d) $\|\tilde{\lambda}_i\| \leq \infty \forall i, i = 1, 2, \dots, m \Rightarrow \tilde{\lambda}_i \leq \tilde{\lambda}_m$.

(e) $\|k'_1(x, t)\|_{C^1([0, T]; C^0(\bar{\Omega}_t))} < \infty \Rightarrow \exists c_3; \|k_1(x, t)\| \leq c_3$.

(f) $\|\frac{1}{\epsilon} M\| \leq \frac{1}{\epsilon}$ (ϵ fixado) $\Rightarrow \|\frac{1}{\epsilon} M\|_{Q_0} \leq c_4$, $c_4 > 0$.

g) Da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que $\|(\tilde{f}, w_i)\| \leq \|\tilde{f}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}$, $\forall j, j = 1, 2, \dots, m$.

(h) $\|u_{\epsilon m}(t)\|^\rho$ é limitada. De fato, temos que $\|Y\|_{2m \times 1} \leq \delta \Rightarrow |g_{\epsilon m j}| \leq \delta$, $j = 1, 2, \dots, m$ logo

$$\begin{aligned} |u_{\epsilon m j}|^2 &= \left(\sum_{j=1}^m g_{\epsilon m j}(t) w_j, \sum_{j=1}^m g_{\epsilon m j}(t) w_j \right) = \sum_{j=1}^m g_{\epsilon m j}(t) (w_j, \sum_{j=1}^m g_{\epsilon m j}(t) w_j) = \\ &= \sum_{j=1}^m g_{\epsilon m j}(t)^2 \leq m \delta^2 = c_5. \end{aligned}$$

Para $\rho \leq 2$ temos que

$$|u_{\epsilon m j}|^\rho = (|u_{\epsilon m j}|^2)^{\frac{\rho}{2}} \leq (c_5)^{\frac{\rho}{2}} = c_6.$$

Por (a), (b), (c), (d), (e), (g) e como as funções $O_{m \times m}$, $I_{m \times m}$ são limitadas,

temos que $F_1(Y, t)$ é limitada, isto é, existe $c > 0, c \in R$ tal que

$$\|F_1(Y, t)\|_{2m \times 2m} \leq c.$$

Basta tomar

$$c = \max\left\{\frac{c_2}{c_1}, \frac{c_3}{c_1}, \frac{\tilde{\lambda}}{c_1}, \frac{c_4}{c_1}, \frac{c_6}{c_1}, \|O\|_{m \times m}, \|I\|_{m \times m}\right\}$$

De (f) $\|C\| \leq c_1^{-1} \|\tilde{f}\|_L^2(0, T; L^2(\Omega_t)) < \infty = \frac{1}{c_1} \|f|_{\Omega_t}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_t))}$ portanto C é limitada e por sua vez $F_2(Y, t)$ é limitada e podemos tomar

$$\|F_2(Y, t)\| \leq \frac{1}{c_1} |f(t)|$$

e portanto

$$\|F(Y, t)\| \leq \delta c + \frac{1}{c_1} |f(t)|$$

Tomemos, agora $m_k(t) = \delta c + \frac{1}{c_1} |f(t)|$. Note que $m_k(t)$ é integrável, pois $|f(t)|$ é integrável, pelo fato de

$$f \in L^2(0, T; L^2(\Omega_t)) \hookrightarrow L^1(0, T; L^2(\Omega_t)).$$

Portanto $\|F(Y, t)\| \leq m_k(t)$.

2.1 Estimativas apriori

2.1.1 Estimativas apriori I

Em (P^ϵ) tomemos $w_j = u'_{\epsilon m}$, isto é.

$$\begin{aligned} & (k_{1\epsilon} u''_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (k_1 u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (k_2 u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (-\Delta u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (-\Delta u''_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) \\ & + (|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + \frac{1}{\epsilon} (M u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) = (\tilde{f}, u'_{\epsilon m}). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Da primeira fórmula de Green e sendo $u_{\epsilon m} = 0$ em \sum teremos:

$$(-\Delta u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) = (\nabla u_{\epsilon m}, \nabla u'_{\epsilon m}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u_{\epsilon m}|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{\epsilon m}\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \quad (2.33)$$

$$(-\Delta u''_{em}, u'_{em}) = (\nabla u''_{em}, \nabla u'_{em}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u'_{em}|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'_{em}\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (2.34)$$

Temos ainda que

$$(k_{1\epsilon} u''_{em}, u'_{em}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\sqrt{k_{1\epsilon}} u'_{em}|^2 - \frac{1}{2} (k'_1 u'_{em}, u'_{em}). \quad (2.35)$$

Substituindo (2.33) , (2.34) e (2.35) em (2.32) e depois integrando de 0 à t e usando a definição de produto interno em $L^2(\Omega)$ obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\sqrt{k_{1\epsilon}} u'_{em}(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} \left| \frac{1}{2} k'_1 + k_2 \right| |u'_{em}(s)|^2 dx ds + \frac{1}{2} \|u_{em}(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ & + \frac{1}{2} \|u'_{em}(t)\|_{H_0^1}^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{em}(s)|^{\rho+2} dx ds + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \int_{\Omega} |M u'_{em}|^2 dx ds = \\ & \int_0^t (\tilde{f}, u'_{em}(s)) ds. \end{aligned} \quad (2.36)$$

De acordo com a hipótese (A.1) $\frac{1}{2} k'_1 + k_2 \geq \delta_0 > 0$ e usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e depois a desigualdade elementar $2ab \leq a^2 + b^2$ teremos

$$\begin{aligned} & |\sqrt{k_{1\epsilon}} u'_{em}(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\delta_0 \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{em}(s)|^2 dx ds + \|u_{em}(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u'_{em}(t)\|_{H_0^1}^2 \\ & + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{em}(s)|^{\rho+2} dx ds + \frac{2}{\epsilon} \int_0^t \int_{\Omega} |M u'_{em}(s)|^2 ds \leq 2 \int_0^t |(\tilde{f}, u'_{em}(s))| ds \\ & \leq \int_0^t |\tilde{f}(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t |u'_{em}(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \end{aligned} \quad (2.37)$$

considerando

$$\begin{aligned} G_{em}(t) &= |\sqrt{k_{1\epsilon}} u'_{em}(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\delta_0 \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{em}(s)|^2 dx ds + \|u_{em}(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \\ & + \|u'_{em}(t)\|_{H_0^1}^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{em}(s)|^{\rho+2} dx ds + \frac{2}{\epsilon} \int_0^t \int_{\Omega} |M u'_{em}(s)|^2 dx ds. \end{aligned}$$

Agora, observando que $G_{em} \geq 0$, e cada um de seu termos são também positivos, segue de (2.37) que:

$$G_{em}(t) \leq \int_0^t |\tilde{f}|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t |u'_{em}|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Como $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ logo limitada, então existe uma constante $C_1 \geq 0$ e, por ser $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ obtemos

$$G_{\epsilon m}(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t G_{\epsilon m}(s) ds,$$

portanto, pela desigualdade de Gronwall teremos

$$G_{\epsilon m}(t) \leq C$$

$C > 0$ independente de ϵ, m, t . Assim,

$$\begin{aligned} & |\sqrt{k_{1\epsilon}} u'_{\epsilon m}(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\delta_0 \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{\epsilon} m(s)|^2 dx ds + \|u_{\epsilon m}(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u'_{\epsilon m}(t)\|_{H_0^1}^2 \\ & + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+2} dx ds + \frac{2}{\epsilon} \int_0^t \int_{\Omega} |M u'_{\epsilon m}(s)|^2 dx ds \leq C \end{aligned} \quad (2.38)$$

Da desigualdade (2.38) podemos garantir que:

$$\|u_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} = \text{supess}\|u_{\epsilon m}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C, \quad (2.39)$$

$$\|u'_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} = \text{supess}\|u'_{\epsilon m}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C, \quad (2.40)$$

$$\|\sqrt{k_{1\epsilon}} u'_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} = \text{supess}\|\sqrt{k_{1\epsilon}} u'_{\epsilon m}\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \quad (2.41)$$

$$\left| \frac{2}{\epsilon} M u'_{\epsilon m} \right|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C, \quad (2.42)$$

independente de ϵ, m, t . E como

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \Rightarrow L^2(\Omega)(0, T, H_0^1) \hookrightarrow L^2(0, T, L^2(\Omega)) \Rightarrow$$

$$|u'_{\epsilon m}|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq C_2$$

$\forall m, \forall t \in [0, t_{\epsilon m})$, independente de ϵ, m, t .

Logo pelo prolongamento de soluções de Carathéodory podemos estender a solução $u_{\epsilon m}(t)$ a todo intervalo $[0, T]$. Daí, segue-se que:

- $(u_{\epsilon m}(t))$ é limitada em $L^\infty(0, T, H_0^1\Omega)$;
 $(u'_{\epsilon m}(t))$ é limitada em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$;
 $(\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}(t))$ é limitada em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$;
 $(\frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m})$ é limitada em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Como os espaços onde as sequências acima estão limitadas são espaços de Banach separáveis, podemos deduzir a existência de uma subsequência de $(u_{\epsilon m}(t))$ a qual denotaremos por $(u_{\epsilon m}(t))$ tal que:

$$\begin{aligned}
 u_{\epsilon m} &\rightharpoonup u_\epsilon \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\
 u'_{\epsilon m} &\rightharpoonup u'_\epsilon \text{ fraco em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)) \\
 \sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m} &\rightharpoonup \sqrt{k_{1\epsilon}}u'_\epsilon \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\
 \frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m} &\rightharpoonup \frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon \text{ fraco em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega))
 \end{aligned}$$

2.1.2 Estimativa apriori II

Em $P^{\epsilon m}$ tomemos $v = u''_{\epsilon m}$ logo

$$\begin{aligned}
 &(k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + (k'_1u'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + (k_2u'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + (-\Delta u_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + \\
 &+ (-\Delta u''_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + (|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) = (\tilde{f}, u''_{\epsilon m}) \quad (2.43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + (-\Delta u''_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) = (\tilde{f}, u''_{\epsilon m}) - \\
 &-((k'_1 + k_2)u'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) - (-\Delta u_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) - (|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}). \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

Temos que

$$(-\Delta u''_{\epsilon m}, u''_{\epsilon m}) = (\nabla u''_{\epsilon m}, \nabla u''_{\epsilon m}) = |\nabla u_{\epsilon m}|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u''_{\epsilon m}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad (2.45)$$

substituindo (2.45) em (2.44), usando a desigualdade triangular e de Cauchy-Schwarz e depois integrando de 0 à t obtemos:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^t |\sqrt{k_{1\epsilon}}u''_{\epsilon m}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{\epsilon m}(s)\|^2 ds + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t (Mu'_{\epsilon m}(s), u''_{\epsilon m}(s)) ds = \\
 &\int_0^t |\tilde{f}(s)| |u''_{\epsilon m}(s)| ds + \int_0^t |k'_1 + k_2| |u'_{\epsilon m}(s)| |u''_{\epsilon m}(s)| ds + \int_0^t |\nabla u_{\epsilon m}| |u''_{\epsilon m}(s)| ds \\
 &+ \int_0^t |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+1} |u''_{\epsilon m}(s)| ds. \quad (2.46)
 \end{aligned}$$

Agora usando o lema (0.0.2), e as desigualdades, de Cauchy-Schwarz e a elementar $ab \leq \frac{1}{4\eta}a^2 + \eta b^2$ $\eta > 0$ obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t |\sqrt{k_{1\epsilon}}u''_{em}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds + \frac{1}{2\epsilon}|M(t)u'_{em}(t)|^2 - \frac{1}{2\epsilon}|M(0)u'_{em}(0)|^2 ds \\
& \leq \frac{1}{4\eta} \int_0^t |\tilde{f}(s)|^2 ds + \eta \int_0^t |u''_{em}(s)|^2 ds + \frac{1}{4\eta} \int_0^t |k'_1 + k_2|^2 |u'_{em}(s)|^2 ds + \\
& \eta \int_0^t |u''_{em}(s)|^2 ds + \frac{1}{4\eta} \int_0^t |\nabla u_{em}(s)|^2 ds + \eta \int_0^t |u''_{em}(s)|^2 ds + \\
& \frac{1}{4\eta} \int_0^t |u'_{em}(s)|^{2(\rho+1)} ds + \eta \int_0^t |u''_{em}(s)|^2 ds. \tag{2.47}
\end{aligned}$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}$ e $u'(0) = 0$, logo podemos reescrever (2.47)

$$\begin{aligned}
& \int_0^t |\sqrt{k_{1\epsilon}}u''_{em}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds + \frac{1}{2\epsilon}|M(t)u'_{em}(t)|^2 \leq \frac{1}{4\eta} \int_0^t |\tilde{f}(s)|^2 ds \\
& + c_2\eta \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds + \frac{1}{4\eta} \int_0^t |k'_1 + k_2|^2 |u'_{em}(s)|^2 ds + c_2\eta \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds \\
& + \frac{1}{4\eta} \int_0^t \|u_{em}(s)\|^2 ds + c_2\eta \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds + \frac{1}{4\eta} \int_0^t |u'_{em}(s)|^{2(\rho+1)} ds \\
& + c_2\eta \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds. \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Das estimativas a priori I u_{em} , u'_{em} são limitadas, $k_1 \in L^\infty(\Omega)$, $k_2 \in L^\infty(\Omega)$ logo, também são limitadas e além disso pelo lema (0.0.1) temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}$ logo $|u'_{em}|^\rho u'_{em}$ é limitada. De fato

$$\begin{aligned}
& \| |u'_{em}|^\rho u'_{em} \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 = \int_0^T |u'_{em}(t)|_{L^{(\rho+1)}}^{2(\rho+1)} dt \leq c_1 \int_0^T \|u'_{em}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \\
& \leq cT. \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
& \int_0^t |\sqrt{k_{1\epsilon}}u''_{em}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds + \frac{1}{2\epsilon}|M(t)u'_{em}(t)|^2 \\
& \leq c + 4c_2\eta \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds. \tag{2.50}
\end{aligned}$$

e conseqüentemente

$(1 - 4\eta) \int_0^t \|u''_{em}(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \leq c_5$ sempre que $\eta < \frac{1}{4}$ logo, temos que

$$\|u''_{em}(s)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq C, \quad (2.51)$$

$C > 0$ independente $\epsilon, m, t, \forall t \in [0, t_{em})$. Portanto,

$(u''_{em}(t))$ é limitada em $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$;

De maneira análoga à **Estimativa I**, obtemos

$u''_{em} \rightarrow u''_{\epsilon}$ fraco em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ quando $m \rightarrow \infty$

2.2 Análise do termo não-linear

Temos da primeira estimativa, que (u'_{em}) é limitada em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ e na segunda estimativa obtivemos que (u''_{em}) é limitada em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$, mas temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \cong [L^2(\Omega)]'$. Pelo teorema da compacidade de Aubin-Lions existe uma subsequência de (u'_{em}) que ainda denotaremos por (u'_{em}) tal que

$u'_{em} \rightarrow u'_\epsilon$ forte em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Como a função $s \rightarrow |s|^\rho s$ é uma função contínua, logo a função $t \rightarrow |u'_{em}(t)|^\rho u'_{em}(t)$ é também contínua e como $u'_{em} \rightarrow u'_\epsilon$ em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Temos que,

$|u'_{em}|^\rho u'_{em} \rightarrow |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon$ quase sempre em $Q_0 = \Omega \times (0, T)$

Agora por (2.49) e pela convergência acima e do lema de Lions obtemos a seguinte convergência $|u'_{em}|^\rho u'_{em} \rightarrow |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon$ fraco em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$

2.3 Resumo das convergências

$u_{em} \rightarrow u_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$

$u'_{em} \rightarrow u'_\epsilon$ fraco estrela em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$

$\sqrt{k_{1\epsilon}} u'_{em} \rightarrow \sqrt{k_{1\epsilon}} u'_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$

$\frac{1}{\epsilon} M u'_{em} \rightarrow \frac{1}{\epsilon} M u'_\epsilon$ fraco em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$

$|u'_{em}|^\rho u'_{em} \rightarrow |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon$ fraco em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$

$u''_{em} \rightarrow u''_{\epsilon}$ fraco em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ quando $m \rightarrow \infty$,

2.4 Passagem do limite

Temos que $u_{\epsilon m} \rightarrow u_{\epsilon}$ fraco estrela em $L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$, então,
 $\int_0^T (u_{\epsilon m}, v) dt \rightarrow \int_0^T (u_{\epsilon}, v) dt, \forall v \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_0)$ e além disso $u_{\epsilon m} \rightarrow u_{\epsilon}$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$.

Temos ainda que $u'_{\epsilon m} \rightarrow u'_{\epsilon}$ fraco estrela em $L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega))$ conseqüentemente

$$\int_0^T (u'_{\epsilon m}, v) dt \rightarrow \int_0^T (u'_{\epsilon}, v) dt, \forall v \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_0)$$

isto significa que

$u'_{\epsilon m} \rightarrow u'_{\epsilon}$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$. Agora, da continuidade de k_2 e k'_1 decorre que:

$$k_2 u'_{\epsilon m} \rightarrow k_2 u'_{\epsilon} \text{ em } \mathcal{D}'(Q_0)$$

$$k'_1 u'_{\epsilon m} \rightarrow k'_1 u'_{\epsilon} \text{ em } \mathcal{D}'(Q_0)$$

Por outro lado, tomando $v = w\theta$, $\theta \in (D)(0; T)$ e $w \in L^2(\Omega)$, então

$$\int_0^T (u'_{\epsilon m}, w)\theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (u'_{\epsilon}, w)\theta(t) dt, \quad \forall w \in L^2(\Omega), \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

A função $t \rightarrow (u'_{\epsilon m}, w)$ é uma distribuição em $L^2\Omega$ e

$$(u'_{\epsilon m}, w) \rightarrow (u'_{\epsilon}, w) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T) \quad \forall w \in L^2(\Omega).$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}(u'_{\epsilon m}, w) \rightarrow \frac{d}{dt}(u'_{\epsilon}, w) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T) \quad \forall w \in L^2(\Omega)$$

conseqüentemente

$$\frac{d}{dt}u'_{\epsilon m} \rightarrow \frac{d}{dt}u'_{\epsilon} \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)) \equiv \mathcal{D}'(Q_0).$$

Onde $\frac{d}{dt}u'_{\epsilon m}$, $\frac{d}{dt}u'_{\epsilon}$ é a derivada distribucional de $u'_{\epsilon m}$, u'_{ϵ} respectivamente. Como $u'_{\epsilon m}$ é uma função contínua e sua derivada existe quase sempre em $(0, T)$, logo

$$\langle \frac{d}{dt}u'_{\epsilon m}, \theta \rangle = - \int_0^T u'_{\epsilon m} \theta'(t) dt = \int_0^T u''_{\epsilon m} \theta(t) dt \rightarrow \langle u''_{\epsilon}, \theta \rangle, \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T)$$

Se denotarmos $\frac{d}{dt}u'_{\epsilon m} = u''_{\epsilon m}$ e $\frac{d}{dt}u'_{\epsilon} = u''_{\epsilon}$, temos que

$$\int_0^T (u''_{\epsilon m}, v) dt \rightarrow \int_0^T (u''_{\epsilon}, v) dt, \quad \forall v \in L^2(\Omega)$$

Tomando $v = w\theta$, $w \in L^2(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, teremos

$$\int_0^T (u''_{\epsilon m}, w)\theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (u''_{\epsilon}, w)\theta(t) dt, \quad \forall w \in L^2(\Omega), \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

Portanto

$$u''_{\epsilon m} \rightarrow u''_{\epsilon} \quad \text{em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)) \equiv \mathcal{D}'(Q_0).$$

Conseqüentemente

$$k_{1\epsilon} u''_{\epsilon m} \rightarrow k_{1\epsilon} u''_{\epsilon} \quad \text{em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)) \equiv \mathcal{D}'(Q_0).$$

Mas $L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv (L^2(, T; L^2(\Omega)))' \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_0)$, e como $u'_{\epsilon m} \rightarrow u'_{\epsilon}$, e $u''_{\epsilon m} \rightarrow u''_{\epsilon}$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$ e pela continuidade de Δ em $\mathcal{D}'(Q_0)$, temos que

$$\begin{cases} -\Delta u_{\epsilon m} \rightarrow -\Delta u_{\epsilon} & \text{em } \mathcal{D}'(Q_0) \\ -\Delta u_{\epsilon m} \rightarrow -\Delta u''_{\epsilon} & \text{em } \mathcal{D}'(Q_0). \end{cases}$$

Temos, ainda, que

$$|u'_{\epsilon m}|^{\rho} u'_{\epsilon m} \rightarrow |u'_{\epsilon}|^{\rho} u'_{\epsilon} \quad \text{fraco em } L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Tomando $v = w\theta$, $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e $w \in L^2(\Omega)$ então

$$\int_0^T (|u'_{\epsilon m}|^{\rho} u'_{\epsilon m}, w)\theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (|u'_{\epsilon}|^{\rho} u'_{\epsilon}, w)\theta(t) dt, \quad \forall w \in L^2(\Omega), \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

Conseqüentemente

$$|u'_{\epsilon m}|^{\rho} u'_{\epsilon m} \rightarrow |u'_{\epsilon}|^{\rho} u'_{\epsilon} \quad \text{em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)).$$

Temos, também que:

$$\frac{1}{\epsilon} M u'_{\epsilon m} \rightarrow \frac{1}{\epsilon} M u'_{\epsilon} \quad \text{fraco em } L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

Tomando $v = w\theta$, $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e $w \in L^2(\Omega)$ então

$$\int_0^T \left(\frac{1}{\epsilon} M u'_{\epsilon m}, w\right)\theta(t) dt \rightarrow \int_0^T \left(\frac{1}{\epsilon} M u'_{\epsilon}, w\right)\theta(t) dt, \quad \forall w \in L^2(\Omega), \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

Como $L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv (L^2(, T; L^2(\Omega)))' \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_0)$, conseqüentemente $\frac{1}{\epsilon} M u'_{\epsilon m} \rightarrow \frac{1}{\epsilon} M u'_{\epsilon}$ em $\mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$.

As convergências obtidas até aqui nos permite passar o limite na equação

abaixo, quando $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \frac{d}{dt}((k_{1\epsilon}u'_{\epsilon m}(t))v(x))\theta(t)dt + \int_0^T (k_2u'_{\epsilon m}(t), v(x))\theta(t)dt \\
& + \int_0^T (-\Delta u_{\epsilon m}(t), v(x))\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u''_{\epsilon m}(t), v(t))\theta(t)dt \\
& + \int_0^T (|u'_{\epsilon m}(t)|^\rho u'_{\epsilon m}(t), v(x))\theta(t)dt + \int_0^T \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{\epsilon m}(t), v(t))\theta(t)dt \\
& \rightarrow \int_0^T ((k_{1\epsilon}u'_\epsilon(t))', v(t))\theta(t)dt + \int_0^T (k_2u'_\epsilon(t), v(x))\theta(t)dt \\
& + \int_0^T (-\Delta u_\epsilon(t), v(x))\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u''_\epsilon(t), v(x))\theta(t)dt \\
& + \int_0^T (|u'_\epsilon(t)|^\rho u'_\epsilon(t), v(x))\theta(t)dt + \int_0^T \frac{1}{\epsilon}(Mu'_\epsilon(t), v(x))\theta(t)dt \\
& = \int_0^T (\tilde{f}, v(x))\theta(t)dt.
\end{aligned}$$

Como V_m é denso em $H_0^1(\Omega)$, a igualdade acima é válida para todo $\theta \in \mathcal{D}'(0, T)$, $\forall v \in V_m$

Passando o limite quando $m \rightarrow \infty$ em $(P^{\epsilon m})$ e usando as convergências obtidas teremos

$$\begin{aligned}
& (k_{1\epsilon}u'_\epsilon)' + k_2u'_\epsilon - \Delta u_{\epsilon m} - \Delta u''_\epsilon + |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon(t) = \tilde{f}(t) \\
& \text{no sentido de } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Pelo exposto acima podemos afirmar que u_ϵ satisfaz as condições do teorema 2.0.8

2.5 Verificação dos dados iniciais

Considerando $\theta \in C^1([0, T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e $v \in H_0^1(\Omega)$.

Mas $u_{\epsilon m} \rightarrow u_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$. Logo

$$\int_0^T (u_{\epsilon m}, v)\theta'(t)dt \rightarrow \int_0^T (u_\epsilon, v)\theta'(t)dt. \quad (2.52)$$

Por outro lado

$u'_{em} \rightarrow u'_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$

logo

$$\int_0^T (u'_{em}, v)\theta(t)dt \rightarrow \int_0^T (u'_\epsilon, v)\theta(t)dt \quad (2.53)$$

integrando por partes as integrais acima então usamos a definição de θ , e obtemos:

$$1. -(u_{em}(0), v)\theta(0) - \int_0^T (u_{em}, v)\theta'(t)dt$$

$$2. -(u_{em}(0), v)\theta(0) - \int_0^T (u_{em}, v)\theta'(t)dt.$$

De (2.52) e das igualdades (1) e (2) obtemos

$$(u_{em}(0), v) \rightarrow (u_\epsilon(0), v), \quad (2.54)$$

mas $u_{em}(0) = 0 \rightarrow 0$ forte em $H_0^1(\Omega)$.

Ou seja

$$(u_{em}(0), v) \rightarrow (0, v) \quad (2.55)$$

por (2.54) e (2.55) e pela unicidade de limite, temos:

$$(u_\epsilon(0), v) = (0, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Logo, segue-se que $u_\epsilon(0) = 0$.

Agora verificaremos que $(k_{1\epsilon}u'_\epsilon)(0) = 0$.

Multiplicando o problema P^{em} por $\theta \in C^1([0, T])$ tal que $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$ e integrando de 0 à T obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^T ((k_{1\epsilon}u'_{em})', v)\theta(t)dt + \int_0^T (k_2u'_{em}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_{em}, v)\theta(t)dt \\ & + \int_0^T (-\Delta u''_{em}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (|u'_{em}|u'_{em}, v)\theta(t)dt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T (Mu'_{em}, v)\theta(t)dt \\ & = \int_0^T (\tilde{f}, v)\theta(t)dt \end{aligned}$$

integrando por partes a 1ª integral da igualdade acima, teremos:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T ((k_{1\epsilon}u'_{em})', v)\theta'(t)dt + \int_0^T (k_2u'_{em}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_{em}, v)\theta(t)dt \\
& + \int_0^T (-\Delta u''_{em}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (|u'_{em}|u'_{em}, v)\theta(t)dt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T (Mu'_{em}, v)\theta(t)dt \\
& = \int_0^T (\tilde{f}, v)\theta(t)dt.
\end{aligned}$$

Se $m \rightarrow \infty$, utilizando as convergências obtidas e pelo fato que V_m é denso em $H_0^1(\Omega)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T ((k_{1\epsilon}u'_\epsilon m, v)\theta'(t)dt + \int_0^T (k_2u'_\epsilon, v)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_\epsilon, v)\theta(t)dt \\
& + \int_0^T (-\Delta u''_\epsilon, v)\theta(t)dt + \int_0^T (|u'_\epsilon|u'_\epsilon, v)\theta(t)dt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T (Mu'_\epsilon, v)\theta(t)dt \\
& = \int_0^T (\tilde{f}, v)\theta(t)dt \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Seja a função

$$\theta_\beta(t) = \begin{cases} -\frac{t}{\beta} + 1; & 0 < t \leq \beta \\ 0; & \beta < t \leq T. \end{cases} \quad (2.56)$$

Ora substituindo θ'_β e θ_β na expressão acima obtemos:

$$\frac{1}{\beta} \int_0^\beta (k_{1\epsilon}u'_\epsilon, v)dt + \int_0^\beta h(t)\theta_\beta(t)dt = 0 \quad (2.57)$$

onde

$$h(t) = (k_2u'_\epsilon, v) + (-\Delta u_\epsilon, v) + (-\Delta u''_\epsilon, v) + (|u'_\epsilon|u'_\epsilon, v) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_\epsilon, v) - (\tilde{f}, v).$$

Temos que $k_{1\epsilon}u'_\epsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e da igualdade

$$(k_{1\epsilon}u'_{em})' + k_2u'_{em} - \Delta u_{em} - \Delta u''_{em} + |u'_{em}|^\rho u'_{em} + \frac{1}{\epsilon}Mu'_{em}(t) = \tilde{f}(t)$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$

implica que

$$(k_{1\epsilon}u'_\epsilon)' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \implies k_{1\epsilon}u'_\epsilon \in C_w^0([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Como $|\theta_\beta(t)| \leq 1$, $\forall t \in [0, T]$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^\beta h(t)\theta_\beta(t)dt = 0 \quad (2.58)$$

sendo $(k_{1\epsilon}u'_\epsilon)' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \implies k_{1\epsilon}u'_\epsilon \in C_w^0([0, T]; L^2(\Omega))$ resulta que

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} \int_0^\beta (k_{1\epsilon}u'_\epsilon, v)dt = ((k_{1\epsilon}u'_\epsilon)(0), v). \quad (2.59)$$

Passando o limite quando $\beta \rightarrow 0$ em (2.57), e de (2.58) e de (2.59) obtemos:

$$((k_{1\epsilon}u'_\epsilon)(0), v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

e pela densidade de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ temos

$$(k_{1\epsilon}u'_\epsilon)(0) = 0.$$

O que prova o teorema (2.0.8)

Demonstração do teorema (2.0.7)

Observemos que as estimativas obtidas são independentes de ϵ . Portanto, pelos os mesmos argumentos usado para obter u_ϵ de $u_{\epsilon m}$, no qual é solução de $(P^{\epsilon m})$, podemos passar o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$, em u_ϵ ou a uma subsequência de u_ϵ tal que:

$$u_\epsilon \rightarrow u \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (2.60)$$

$$u'_\epsilon \rightarrow \text{fraco em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (2.61)$$

$$\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_\epsilon \rightarrow \sqrt{k_{1\epsilon}}u' \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.62)$$

$$|u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon \rightarrow |u'|^\rho u' \text{ fraco em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.63)$$

$$u''_\epsilon \rightarrow u''_\epsilon \text{ fraco em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (2.64)$$

$$\frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon \rightarrow \frac{1}{\epsilon}Mu' \text{ fraco em } L^2(0, T, H_0^1(\Omega)) \quad (2.65)$$

quando $m \rightarrow \infty$.

Da 1ª estimativa obtivemos:

$$\frac{2}{\epsilon} \int_0^t \int_{\Omega} |Mu'_\epsilon|^2 dt \leq C, \quad (2.66)$$

onde C é uma constante positiva independente de ϵ .

Usando a definição de M obtemos:

$$M(x, t)u'_\epsilon = \begin{cases} u'_\epsilon; & \text{em } Q_0 \setminus Q \cup \Omega_0 \times \{0\} \\ 0; & Q \cup \Omega_0 \times \{0\}. \end{cases} \quad (2.67)$$

Da desigualdade (2.66) temos que $\frac{2}{\epsilon}|Mu'_\epsilon| \leq C$, logo $|Mu'_\epsilon| \leq \frac{\epsilon C}{2}$, passando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos $0 \leq |Mu'_\epsilon| \leq 0$. Por definição $M \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e de (2.61) segue-se que

$$Mu'_\epsilon \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.68)$$

Mas por (2.65) e de (2.68), podemos concluir que:

$$Mu' = 0 \text{ quase sempre em } Q_0 \setminus Q \cup \Omega_0 \times \{0\}. \quad (2.69)$$

Mas, novamente da definição, $M = 1$ em $Q_0 \setminus Q \cup \Omega_0 \times \{0\}$, como consequência obtemos $u' = 0$ quase sempre em $Q_0 \setminus Q \cup \Omega_0 \times \{0\}$. Aplicando a proposição (0.0.1) obtemos $u(x, t) = 0$ quase sempre em $\Omega \setminus \Omega_t$ para quase todo $t \in (0, T)$. Como $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ teremos que

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t)).$$

De modo análogo, obtemos:

$$\begin{aligned} u' &\in L^2(0, T; L^2(\Omega_t)) \\ \sqrt{k_1}u' &\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t)) \\ u'' &\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t)). \end{aligned}$$

Por outro lado, tomando $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ e pela continuidade de $\frac{d}{dt}$ obtemos:

$$\int_Q \frac{d}{dt}(k_{1\epsilon}u'_\epsilon)\varphi(x, t) dx dt \rightarrow \int_Q \frac{d}{dt}(k_1u')\varphi(x, t) dx dt$$

isto significa que

$$\frac{d}{dt}(k_{1\epsilon}u'_\epsilon) \rightarrow \frac{d}{dt}(k_1u'). \quad (2.70)$$

Restringindo a equação do teorema (2.0.8) a nosso domínio não-cilíndrico Q , usando a definição de M , \tilde{f} , as convergências (2.60)-(2.65), (2.70), a proposição (0.0.1) e passando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ em (2.7):

Obtemos

$$\frac{d}{dt}(k_1u') + k_2u' - \Delta u - \Delta u'' + |u'|^\rho u' = f \text{ no sentido de } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.71)$$

De (2.71) é fácil ver que u satisfaz (2.6).

Para mostrar as condições iniciais $u(0) = 0$ e $(k_1u')(0) = 0$ usa-se os mesmos argumentos aplicados para mostrar que $u_\epsilon(0) = 0$ e $(k_{1\epsilon}u'_\epsilon)(0) = 0$, o que completa a demonstração do nosso resultado relacionado com os dados nulos.

Capítulo 3

Existência de solução global fraca com dados não-nulos

Seja Q um domínio não-cilíndrico contido em $Q_0 = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$, onde Ω é um aberto limitado do R^n com fronteira Γ bem regular.

Em Q consideremos o seguinte problema misto,

$$(P) \begin{cases} (k_1(x, t)u')' + k_2(x, t)u' - \Delta u - \Delta u'' + |u'|^\rho u' = f & \text{em } Q \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ u(0) = u_0 & \text{em } H_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 & \text{em } H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.1)$$

O objetivo deste capítulo será obter as soluções globais fracas para o problema (P) com os dados iniciais não-nulos. **Observação:** A primeira intensão do nosso estudo foi encontrar as soluções fracas para o seguinte problema:

$$\begin{cases} (k_1(x, t)u')' + k_2(x, t)u' - \Delta u - \Delta u' + |u'|^\rho u' = f & \text{em } Q \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ u(0) = u_0 & \text{em } H_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 & \text{em } H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.2)$$

Uma das dificuldades encontradas foi passar o limite no termo não-linear $|u'|^\rho u'$. Para isso teríamos que fazer a segunda estimativa compondo o problema aproximado com u''_ϵ , ao fazer isso nos deparamos com a seguinte dificuldade

$$|\sqrt{k_{1\epsilon}}u''_{\epsilon m}|^2 \leq C + \eta \int_0^t \|u''_{\epsilon m}\|^2 ds,$$

o que foi impossível estimar $u''_{\epsilon m}$.

A primeira idéia foi tomar $\sqrt{k_{1\epsilon}} = \sqrt{k_1 + \epsilon} \geq \sqrt{\epsilon}$, assim a estimativa de

$u''_{\epsilon m}$ vai depender de ϵ . O que não é possível, pois $\epsilon > 0$ (ϵ é pequeno). A não ser que $K_1(x, t) \geq d > 0$. O que não satisfaria nossa expectativa, pois perderíamos o caráter hiperbólico-parabólico, de forma que teríamos apenas um problema hiperbólico e daí teríamos o resultado de existência com $k_1(x, t) \geq 0$, mas sem o termo $k_2(x, t)u'$.

Para estudar de fato o problema hiperbólico-parabólico, conservamos $k_1(x, t) \geq 0$, mas tivemos que substituir a dissipação $\Delta u'$ por uma dissipação mais forte $\Delta u''$ o que foi possível estimar u'' e conseqüentemente passar o limite na parte não-linear $|u'|^\rho u'$.

Faremos a seguir as seguintes hipóteses a cerca das funções k_1, k_2, f e ρ .

(A.1): $k_1(x, t) \geq 0$, $k_2(x, t) \geq d > 0$ quase sempre em Q .

$k_1 \in C^1([0, T]; L^\infty(\Omega_t))$

$k_2 \in C^0([0, T]; L^\infty(\Omega_t))$

$\mu(x, t) = k_2(x, t) - \frac{1}{2}|k'_1(x, t)| \geq \delta_0 > 0$ em Q

(A.2): $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega_t))$,

$u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$,

$0 < \rho < \infty$ se $n = 1$ ou $n = 2$

$0 < \rho < \frac{2}{n-2}$, se $n \geq 3$

Teorema 3.0.1. *Assumiremos as hipóteses: (H.1)-(H.2), (A.1)-(A.3) consideradas no teorema (2.0.7): Então dado $T > 0$, existe $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ na Classe:*

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t)); \quad (3.3)$$

$$u' \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_t)); \quad (3.4)$$

$$\sqrt{k_1}u' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t)), \quad (3.5)$$

$$u'' \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega_t)) \quad (3.6)$$

e satisfaz:

$$\begin{cases} (k_1(x, t)u'(x, t))' + k_2(x, t)u'(x, t) - \Delta u(x, t) - \Delta u''(x, t) + |u'(x, t)|^\rho u'(x, t) = f \\ \text{no sentido de } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_t)) \\ u(0) = u_0; \quad (k_1 u')(0) = u_1. \end{cases}$$

Demonstração: Usaremos o método da Penalização de Lions, para obter a existência de soluções para o problema (P). Seja M a função definida no lema (0.0.2). Considere \tilde{f} o prolongamento de f respectivamente a Q_0 , sendo tal prolongamento definido como zero fora de Q .

Agora, para cada $\epsilon > 0$, consideremos o seguinte problema:

$$(P^\epsilon) \begin{cases} (k_{1\epsilon}u'_\epsilon)' + k_2u'_\epsilon - \Delta u_\epsilon - \Delta u''_\epsilon + |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon = \tilde{f}, \\ u_\epsilon(0) = u_0 \\ (k_1u'_\epsilon)(0) = u_1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Aqui (P^ϵ) é o problema perturbado penalizado de (P) .

Como $Q \subset Q_0$ e $\Omega_t \subset \Omega$ então,

$$k_1 \in C^1([0, T]; L^\infty(\Omega)) \quad (3.8)$$

$$k_2 \in C^0([0, T]; L^\infty(\Omega)) \quad (3.9)$$

$$\tilde{f} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.10)$$

Denotaremos por \tilde{f} o prolongamento de f respectivamente a Q_0 , sendo tal prolongamento definido como zero fora de Q .

A prova do teorema (3.0.1) será uma consequência do seguinte resultado.

Teorema 3.0.2. *Sejam k_1 , k_2 e \tilde{f} como mencionado anteriormente e M definida acima. Então para cada $0 < \epsilon < 1$, existe uma função $u_\epsilon : Q_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tais que:*

$$u_\epsilon \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (3.11)$$

$$u'_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (3.12)$$

$$\sqrt{K_1}u'_\epsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (3.13)$$

$$u''_\epsilon \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (3.14)$$

e satisfaz,

$$\begin{cases} k_{1\epsilon}u''_\epsilon + k'_1u'_\epsilon + k_2u'_\epsilon - \Delta u_\epsilon - \Delta u''_\epsilon + |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon + \frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon = \tilde{f} \\ u_\epsilon(0) = u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \text{ e} \\ (k_1u'_\epsilon)(0) = u_1 \text{ em } H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.15)$$

Demonstração: Seja $\{w_j\}$ uma base Hilbertiana de $H_0^1(\Omega)$ e $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m] \subset H_0^1(\Omega)$ um subespaço de dimensão m ($\dim V_m = m$) gerado pelos primeiros elementos de $\{w_j\}$. Para todo $0 < \epsilon < 1$ queremos encontrar

$$u_{\epsilon m}(t) = \sum_{j=1}^m g_{j\epsilon m}(t)w_j(x), 0 \leq t < t_{\epsilon m} \leq T. \quad (3.16)$$

Solução do sistema de equações diferenciais não-lineares de primeira ordem em t

$$(P^{\epsilon m}) \begin{cases} (k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}, v) + (k'_1u'_{\epsilon m}, v) + (k'_1u'_{\epsilon m} + (k_2u'_{\epsilon m} + (-\Delta u_{\epsilon m}, v) + (-\Delta u''_{\epsilon m}, v) \\ + (|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}, v) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{\epsilon m}, v) = (\tilde{f}, v), \forall v \in V_m \\ u_{\epsilon m}(0) = u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ forte em } H_0^1(\Omega) \\ u'_{\epsilon m}(0) = u_{1m} \rightarrow u_1 \text{ forte em } H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (3.17)$$

Pelo teorema de Carathéodory ($P^{\epsilon m}$) admite solução $u_{\epsilon m} \in ([0, t_{\epsilon m}); V_m)$ tal que $u''_{\epsilon m}$ existe quase sempre em $[0; t_{\epsilon m})$ para algum $T > 0$. As estimativas a seguir nos permitiram prolongar as soluções aproximadas $u_{\epsilon m}$ a todo intervalo $[0, T]$.

3.1 Estimativas a priori

3.1.1 Estimativas a priori I*

Em ($P^{\epsilon m}$) tomemos $v = u'_{\epsilon m}$, isto é.

$$(k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (k_1u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (k_2u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (-\Delta u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + (-\Delta u''_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) \\ + (|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) = (\tilde{f}, u'_{\epsilon m}) \quad (3.18)$$

Da primeira fórmula de Green e sendo $u_{\epsilon m} = 0$ em \sum teremos:

$$(-\Delta u_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) = (\nabla u_{\epsilon m}, \nabla u'_{\epsilon m}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u_{\epsilon m}|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{\epsilon m}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad (3.19)$$

$$(-\Delta u''_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) = (\nabla u''_{\epsilon m}, \nabla u'_{\epsilon m}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u'_{\epsilon m}|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u'_{\epsilon m}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad (3.20)$$

Temos ainda que

$$(k_{1\epsilon}u''_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}|^2 - \frac{1}{2}(k'_1 u'_{\epsilon m}, u'_{\epsilon m}). \quad (3.21)$$

Substituindo (3.19) , (3.20) e (3.21) em (3.18) e depois integrando de 0 a t e usando a definição de produto interno em $L^2(\Omega)$ obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_{\Omega} (\frac{1}{2}k'_1 + k_2) |u'_{\epsilon m}(s)|^2 dx ds + \frac{1}{2} \|u_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\ & + \frac{1}{2} \|u'_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0} + \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+1} dx ds + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \int_{\Omega} |Mu'_{\epsilon m}|^2 dx ds = \\ & \int_0^t (\tilde{f}, u'_{\epsilon m}(s)) ds + \frac{1}{2} |\sqrt{k_{1\epsilon}}(0)u'_{\epsilon}(0)|^2 + \frac{1}{2} \|u_{\epsilon m}(0)\|^2 + \frac{1}{2} \|u'_{\epsilon m}\|^2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Pela hipótese (A.3) $\frac{1}{2}k'_1 + k_2 \geq \delta_0 > 0$ e usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e depois a desigualdade elementar $2ab \leq a^2 + b^2$, obtemos.

$$\begin{aligned} & |\sqrt{K_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}(t)|^2_{L^2(\Omega)} + 2\delta_0 \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{\epsilon m}(s)|^2 dx ds + \|u_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|u'_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0} \\ & + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+2} dx ds + \frac{2}{\epsilon} \int_0^t \int_{\Omega} |Mu'_{\epsilon m}(s)|^2 ds \leq 2 \int_0^t |(\tilde{f}, u'_{\epsilon m}(s))| ds \\ & \leq \int_0^t |\tilde{f}(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds + \int_0^t |u'_{\epsilon m}(s)|^2_{L^2(\Omega)} ds + |\sqrt{k_{1\epsilon}}(0)u'_{\epsilon}(0)|^2 + \|u_{\epsilon m}(0)\|^2 \\ & + \|u'_{\epsilon m}(0)\|^2, \end{aligned} \quad (3.23)$$

tomando

$$\begin{aligned} G_{\epsilon m} &= |\sqrt{K_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}(t)|^2_{L^2(\Omega)} + 2\delta_0 \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{\epsilon m}(s)|^2 dx ds + \|u_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\ & + \|u'_{\epsilon m}(t)\|^2_{H^1_0} + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+2} dx ds + \frac{2}{\epsilon} \int_0^t \int_{\Omega} |Mu'_{\epsilon m}(s)|^2 dx ds. \end{aligned}$$

De posse da convergência em (3.17) notemos que: $u_{\epsilon m}(0) = u_{0m} \rightarrow u_0$ forte em $H^1_0(\Omega)$ portanto limitada, além disso $u'_{\epsilon m}(0) = u_{1m} \rightarrow u_0$ forte em $H^1_0(\Omega)$ logo limitada.

Afirmção $|\sqrt{k_{1\epsilon}}(0)u'_{\epsilon m}(0)|$ é Limitada. De fato,

$$|\sqrt{k_{1\epsilon}(0)}u'_{\epsilon m}(0)|^2_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} |k_{1\epsilon}(0)||u_{1m}|^2 dx = \int_{\Omega} |k_1(0) + \epsilon||u_{1m}|^2 dx \leq (\sup k_1 + \epsilon) \int_{\Omega} |u_{1m}|^2 dx$$

Como $0 < \epsilon < 1$, $k_1 \in C^1([0, T]; L^\infty(\Omega))$ e $u_{1m} \rightarrow u_1$ forte em $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, logo $|\sqrt{k_{1\epsilon}(0)}u'_{\epsilon m}|^2_{L^2(\Omega)} \leq \sup(k_1 + \epsilon)|u'_1|^2 \leq C$ independente de t , m e ϵ .

Como $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ logo limitada, e pelo fato de $u'_{\epsilon m}$ ser limitada, visto a estimativa I do Capitulo 3, e voltando a desigualdade (3.23) obetmos

$$\begin{aligned} & |\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}(t)|^2_{L^2(\Omega)} + 2\delta_0 \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{\epsilon m}(s)|^2 dx ds + \|u_{\epsilon m}(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u'_{\epsilon m}(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ & + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |u'_{\epsilon m}(s)|^{\rho+2} dx ds + \frac{2}{\epsilon} \int_0^t \int_{\Omega} |Mu'_{\epsilon m}(s)|^2 dx ds \leq C \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde C é uma constante, independente de ϵ , m , t .

Da desigualdade (3.24) podemos garantir que:

$$\|u_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))} = \sup_{ess} \|u_{\epsilon m}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C, \quad (3.25)$$

$$\|u'_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))} = \sup_{ess} \|u'_{\epsilon m}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C, \quad (3.26)$$

$$\|\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} = \sup_{ess} \|\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{\epsilon m}\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \quad (3.27)$$

$$\left| \frac{2}{\epsilon} Mu'_{\epsilon m} \right|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq C, \quad (3.28)$$

independente de ϵ , m , t . E como

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \Rightarrow L^2(\Omega)(0, T, H_0^1) \hookrightarrow L^2(0, T, L^2(\Omega)) \Rightarrow$$

$$|u'_{\epsilon m}|_{L^2(0, T, L^2(\Omega))} \leq C_2$$

$\forall m, \forall t \in [0, t_{\epsilon m}]$, independente de ϵ , m , t .

Logo pelo prolongamento de soluções de Carathéodory podemos estender a solução $u_{\epsilon m}(t)$ a todo intervalo $[0, T]$. Daí, segue-se que:

$(u_{\epsilon m}(t))$ é limitada em $L^\infty(0, T, H_0^1\Omega)$;

$(u'_{\epsilon m}(t))$ é limitada em $L^2_\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$;

$(\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{em}(t))$ é limitada em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)(t))$;
 $(\frac{1}{\epsilon}u'_{em})$ é limitada em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Como os espaços onde as sequências acima estão limitadas são espaços de Banach separáveis, podemos deduzir a existência de uma subsequência de $(u_{em}(t))$ a qual denotaremos por $(u_{em}(t))$ tal que:

$$\begin{aligned} u_{em} &\rightarrow u_\epsilon \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ u'_{em} &\rightarrow u'_\epsilon \text{ fraco em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)) \\ \sqrt{k_{1\epsilon}}u'_{em} &\rightarrow \sqrt{k_{1\epsilon}}u'_\epsilon \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ \frac{1}{\epsilon}Mu'_{em} &\rightarrow \frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon \text{ fraco em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \end{aligned}$$

3.1.2 Estimativa a priori II*

Em (P^{em}) tomemos $v = u''_{em}$ logo

$$\begin{aligned} &(k_{1\epsilon}u''_{em}, u''_{em}) + (k'_1u'_{em}, u''_{em}) + (k_2u'_{em}, u''_{em}) + (-\Delta u_{em}, u''_{em}) + (-\Delta u''_{em}, u''_{em}) \\ &+ (|u'_{em}|^\rho u'_{em}, u''_{em}) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{em}, u''_{em}) = (\tilde{f}, u''_{em}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

ou seja

$$\begin{aligned} &(k_{1\epsilon}u''_{em}, u''_{em}) + (-\Delta u''_{em}, u''_{em}) + \frac{1}{\epsilon}(Mu'_{em}, u''_{em}) = (\tilde{f}, u''_{em}) + \\ &-((k'_1 + k_2)u'_{em}, u''_{em}) - (-\Delta u_{em}, u''_{em}) - (|u'_{em}|^\rho u'_{em}, u''_{em}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Temos que:

$$(-\Delta u''_{em}, u''_{em}) = (\nabla u''_{em}, \nabla u''_{em}) = |\nabla u_{em}|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u''_{em}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad (3.31)$$

substituindo (3.31) em (3.30), integrando de 0 à t obtemos:

$$\begin{aligned} &\int_0^2 |\sqrt{k_{1\epsilon}}u''_{em}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{em}(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t (Mu'_{em}(s), u''_{em}(s)) ds = \\ &\int_0^t |\tilde{f}(s)| |u''_{em}(s)| ds + \int_0^t |k'_1 + k_2| |u'_{em}(s)| |u''_{em}(s)| ds + \\ &\int_0^t |\nabla u_{em}| |u''_{em}(s)| ds + \int_0^t |u'_{em}(s)|^{\rho+1} |u''_{em}(s)| ds. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Agora, usando o lema (0.0.2), e as desigualdades de Cauchy-Schwarz e a elementar $ab \leq \frac{1}{4\eta}a^2 + \eta b^2$ $\eta > 0$ obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^2 |\sqrt{k_{1\epsilon}} u''_{em}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds + \frac{1}{2\epsilon} |M(t)u'_{em}(t)|^2 - \frac{1}{2\epsilon} |M(0)u'_{em}(0)|^2 ds \\
& \leq \frac{1}{4\eta} \int_0^t |\tilde{f}(s)|^2 ds + \eta \int_0^t |u''_{em}(s)|^2 ds + \frac{1}{4\eta} \int_0^t |k'_1 + k_2|^2 |u'_{em}(s)|^2 ds + \\
& \eta \int_0^t |u''_{em}(s)|^2 ds + \frac{1}{4\eta} \int_0^t |\nabla u_{em}(s)|^2 ds + \eta \int_0^t |u''_{em}(s)|^2 ds + \frac{1}{4\eta} \int_0^t |u'_{em}(s)|^{2(\rho+1)} \\
& + \eta \int_0^t |u''_{em}(s)|^2 ds. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

e como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ e pelas imersões convenientes, então podemos escrever

$$\begin{aligned}
& \int_0^2 |\sqrt{k_{1\epsilon}} u''_{em}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds + \frac{1}{2\epsilon} |M(t)u'_{em}(t)|^2 \leq \frac{1}{4\eta} \int_0^t |\tilde{f}(s)|^2 ds \\
& + c_2 \eta \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds + \frac{1}{4\eta} \int_0^t |k'_1 + k_2|^2 |u'_{em}(s)|^2 ds + c_3 \eta \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds \\
& + \frac{1}{4\eta} \int_0^t \|u_{em}(s)\|^2 ds + \eta \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds + \frac{1}{4\eta} \int_0^t |u'_{em}(s)|^{2(\rho+1)} \\
& + c_4 \eta \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Da primeira estimativa u_{em}, u'_{em} são limitadas, $k_1 \in L^\infty(\bar{\Omega}), k_2 \in L^\infty(\bar{\Omega})$ logo, também são limitadas e, além disso, pelo lema (0.0.1) temos que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}$ logo $|u'_{em}|^\rho u'_{em}$ é limitada. De fato

$$\begin{aligned}
& \| |u'_{em}|^\rho u'_{em} \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 = \int_0^T |u'_{em}(t)|_{L^{(\rho+1)}}^{2(\rho+1)} dt \leq c_1 \int_0^T \|u'_{em}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
& \leq cT. \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}
& \int_0^2 |\sqrt{k_{1\epsilon}} u''_{em}(s)|^2 ds + \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds + \frac{1}{2\epsilon} |M(t)u'_{em}(t)|^2 \\
& \leq c + 4\eta \int_0^t \|u''_{em}(s)\|^2 ds. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

e conseqüentemente

$(1 - 4\eta) \int_0^t \|u''_{em}(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \leq c_5$ sempre que $\eta < \frac{1}{4}$ logo, temos que

$$\|u''_{em}(s)\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \leq c, \quad (3.37)$$

c independente $\epsilon, m, t, \forall t \in [0, t_{em})$. Logo pelo prolongamento de soluções de Carathéodory podemos estender a todo intervalo $[0, T]$. Portanto:

$(u''_{em}(t))$ é limitada em $L^2(0, T, H_0^1(\Omega))$;

De maneira análoga à **Estimativa I**, obtemos

$u''_{em} \rightarrow u''_{\epsilon}$ fraco em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ quando $m \rightarrow \infty$.

3.2 Análise do termo não-linear

Temos, da primeira estimativa, que (u'_{em}) é limitada em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ e na segunda estimativa obtivemos que (u''_{em}) é limitada em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$, pelo fato de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \cong [L^2(\Omega)]'$ e pelo teorema da compacidade de Aubin-Lions existe uma subsequência de (u'_{em}) que ainda denotaremos por (u'_{em}) tal que

$u'_{em} \rightarrow u'_\epsilon$ forte em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Como a função $s \rightarrow |s|^\rho s$ é uma função contínua, logo a função $t \rightarrow |u'_{em}(t)|^\rho u'_{em}(t)$ é também contínua e como $u'_{em} \rightarrow u'_\epsilon$ fraco em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ então, temos que:

$|u'_{em}|^\rho u'_{em} \rightarrow |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon$ quase sempre em $Q_0 = \Omega \times (0, T)$

Agora, por (3.35) e pela convergencia acima e do lema de Lions deduzimos que:

$|u'_{em}|^\rho u'_{em} \rightarrow |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon$ quase sempre em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

3.3 Resumo das convergências

$u_{em} \rightarrow u_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$

$u'_{em} \rightarrow u'_\epsilon$ fraco estrela em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$

$\sqrt{k_{1\epsilon}} u'_{em} \rightarrow \sqrt{k_{1\epsilon}} u'_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$

$\frac{1}{\epsilon} M u'_{em} \rightarrow \frac{1}{\epsilon} M u'_\epsilon$ fraco em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$

$$|u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m} \rightarrow |u'_\epsilon|^\rho u'_\epsilon \text{ fraco em } L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

$$u''_{\epsilon m} \rightarrow u''_\epsilon \text{ fraco em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ quando } m \rightarrow \infty.$$

3.4 Passagem do limite*

Temos que $u_{\epsilon m} \rightarrow u_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, então,
 $\int_0^T (u_{\epsilon m}, v) dt \rightarrow \int_0^T (u_\epsilon, v) dt, \forall v \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_0)$ e além disso $u_{\epsilon m} \rightarrow u_\epsilon$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$.

Temos ainda que $u'_{\epsilon m} \rightarrow u'_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ conseqüentemente

$$\int_0^T (u'_{\epsilon m}, v) dt \rightarrow \int_0^T (u'_\epsilon, v) dt, \forall v \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_0)$$

isto significa que

$$u_{\epsilon m} \rightarrow u_\epsilon \text{ em } \mathcal{D}'(Q_0).$$

Por outro lado, tomando $v = w\theta$, $\theta \in (D)(0; T)$ e $w \in L^2(\Omega)$, então

$$\int_0^T (u'_{\epsilon m}, w)\theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (u'_\epsilon, w)\theta(t) dt, \quad \forall w \in L^2(\Omega), \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

A função $t \rightarrow (u'_{\epsilon m}(t))$ é uma distribuição em $L^2\Omega$ então

$$(u'_{\epsilon m}, w) \rightarrow (u'_\epsilon, w) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T) \quad \forall w \in L^2(\Omega)$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}(u'_{\epsilon m}, w) \rightarrow \frac{d}{dt}(u'_\epsilon, w) \text{ em } \mathcal{D}'(0, T) \quad \forall w \in L^2(\Omega)$$

conseqüentemente

$$\frac{d}{dt}u'_{\epsilon m} \rightarrow \frac{d}{dt}u'_\epsilon \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)) \equiv \mathcal{D}'(Q_0).$$

Onde $\frac{d}{dt}u'_{\epsilon m}$, $\frac{d}{dt}u'_\epsilon$ é a derivada distribucional de $u'_{\epsilon m}$, u'_ϵ respectivamente. Como $u'_{\epsilon m}$ é uma função contínua e sua derivada existe quase sempre em $(0, T)$, logo

$$\langle \frac{d}{dt}u'_{\epsilon m}, \theta \rangle = - \int_0^T u'_{\epsilon m} \theta'(t) dt = \int_0^T u''_{\epsilon m} \theta(t) dt = \langle u''_\epsilon, \theta \rangle, \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

Se denotarmos $\frac{d}{dt}u'_{\epsilon m} = u''_{\epsilon m}$ e $\frac{d}{dt}u'_\epsilon = u''_\epsilon$, temos que

$$\int_0^T u''_{\epsilon m}, v) dt \rightarrow \int_0^T (u''_\epsilon, v) dt, \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

Tomando $v = w\theta$, $w \in L^2(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, teremos

$$\int_0^T (u''_{\epsilon m}, w)\theta(t) dt \rightarrow \int_0^T (u''_\epsilon, w)\theta(t) dt, \quad \forall w \in L^2(\Omega), \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T).$$

Portanto

$$u''_{em} \rightarrow u''_{\epsilon} \quad \text{em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)) \equiv \mathcal{D}'(Q_0).$$

Conseqüentemente

$$k_{1\epsilon} u''_{em} \rightarrow k_{1\epsilon} u''_{\epsilon} \quad \text{em } \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)) \equiv \mathcal{D}'(Q_0).$$

Mas $L^2(0, T; L^2(\Omega)) \equiv (L^2(, T; L^2(\Omega)))' \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_0)$, e como $u'_{em} \rightarrow u'_{\epsilon}$, e $u''_{em} \rightarrow u''_{\epsilon}$ em $\mathcal{D}'(Q_0)$ e pela continuidade de Δ em $\mathcal{D}'(Q_0)$, temos que

$$\begin{cases} -\Delta u_{em} \rightarrow -\Delta u_{\epsilon} & \text{em } \mathcal{D}'(Q_0) \\ -\Delta u''_{em} \rightarrow -\Delta u''_{\epsilon} & \text{em } \mathcal{D}'(Q_0). \end{cases}$$

De modo Análogo, temos:

$$|u'_{em}|^{\rho} u'_{em} \rightarrow |u'_{\epsilon}|^{\rho} u'_{\epsilon} \forall w \in \mathcal{D}'(Q_0)$$

$$\frac{1}{\epsilon} M u'_{em} \rightarrow \frac{1}{\epsilon} M u'_{\epsilon} \quad \text{em } \mathcal{D}'(Q_0)$$

$$k_2 u'_{em} \rightarrow k_2 u'_{\epsilon} \quad \text{em } \mathcal{D}'(Q_0)$$

$$k'_1 u'_{em} \rightarrow k'_1 u'_{\epsilon} \quad \text{em } \mathcal{D}'(Q_0).$$

As convergências obtidas até aqui nos permite passar o limite na equação abaixo, quando $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{d}{dt} ((k_{1\epsilon} u'_{em}(t))' v(x)) \theta(t) dt + \int_0^T (k_2 u'_{em}(t), v(x)) \theta(t) dt \\ & + \int_0^T (-\Delta u_{em}(t), v(x)) \theta(t) dt + \int_0^T (-\Delta u''_{em}(t), v(t)) \theta(t) dt \\ & + \int_0^T (|u'_{em}(t)|^{\rho} u'_{em}(t), v(x)) \theta(t) dt + \int_0^T \frac{1}{\epsilon} (M u'_{em}(t), v(t)) \theta(t) dt \\ & \rightarrow \int_0^T ((k_{1\epsilon} u'_{\epsilon}(t))', v(t)) \theta(t) dt + \int_0^T (k_2 u'_{\epsilon}(t), v(x)) \theta(t) dt \\ & + \int_0^T (-\Delta u_{\epsilon}(t), v(x)) \theta(t) dt + \int_0^T (-\Delta u''_{\epsilon}(t), v(x)) \theta(t) dt \\ & + \int_0^T (|u'_{\epsilon}(t)|^{\rho} u'_{\epsilon}(t), v(x)) \theta(t) dt + \int_0^T \frac{1}{\epsilon} (M u'_{\epsilon}(t), v(x)) \theta(t) dt \\ & = \int_0^T (\tilde{f}, v(x)) \theta(t) dt. \end{aligned}$$

Como V_m é denso em $H_0^1(\Omega)$, a igualdade acima é válida para todo $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$.

Passando o limite quando $m \rightarrow \infty$ em $(P^{\epsilon m})$ e usando as convergências obtidas teremos

$((k_{1\epsilon}u'_{\epsilon m})' + k_2u'_{\epsilon m} - \Delta u_{\epsilon m} - \Delta u''_{\epsilon m} + |u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m} + \frac{1}{\epsilon}Mu'_{\epsilon m}(t) = \tilde{f}(t)$ no sentido de $\mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega))$.

3.5 Verificação dos dados iniciais*

Considerando $\theta \in C^1([0, T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e $v \in H_0^1(\Omega)$.

Mas $u_{\epsilon m} \rightarrow u_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$. Logo

$$\int_0^T (u_{\epsilon m}, v)\theta'(t)dt \rightarrow \int_0^T (u_\epsilon, v)\theta'(t)dt. \quad (3.38)$$

Por outro lado

$u'_{\epsilon m} \rightarrow u'_\epsilon$ fraco estrela em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$

logo

$$\int_0^T (u'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt \rightarrow \int_0^T (u'_\epsilon, v)\theta(t)dt \quad (3.39)$$

integrando por partes as integrais (3.39) acima e usando a definição de θ obtemos:

1. $-(u_{\epsilon m}(0), v)\theta(0) - \int_0^T (u_{\epsilon m}, v)\theta'(t)dt$
2. $-(u_{\epsilon m}(0), v)\theta(0) - \int_0^T (u_{\epsilon m}, v)\theta'(t)dt$

De (3.38) e das igualdades (1) e (2) obtemos

$$(u_{\epsilon m}(0), v) \rightarrow (u_\epsilon(0), v). \quad (3.40)$$

Mas $u_{\epsilon m}(0) = u_{0m} \rightarrow u_0$ forte em $H_0^1(\Omega)$. Ou seja

$$(u_{\epsilon m}(0), v) \rightarrow (u_0, v), \quad (3.41)$$

por (3.40) e (3.41) e pela unicidade de limite, temos:

$$(u_\epsilon(0), v) = (u_0, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Logo, segue-se que $u_\epsilon(0) = u_0$.

Agora verificaremos que $(k_{1\epsilon}u'_\epsilon)(0) = u_1$.

Multiplicando o problema $(P^{\epsilon m})$ por $\theta \in C^1([0, T])$ tal que $\theta(T) = 0$ e $\theta(0) = 1$ e integrando de 0 à T obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^T ((k_{1\epsilon}u'_{\epsilon m})', v)\theta(t)dt + \int_0^T (k_2u'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt \\ & + \int_0^T (-\Delta u''_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (|u'_{\epsilon m}|u'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T (Mu'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt \\ & = \int_0^T (\tilde{f}, v)\theta(t)dt \end{aligned}$$

integrando por partes a 1ª integral da igualdade acima, teremos:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T ((k_{1\epsilon}u'_{\epsilon m})', v)\theta'(t)dt + \int_0^T (k_2u'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt \\ & + \int_0^T (-\Delta u''_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \int_0^T (|u'_{\epsilon m}|u'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T (Mu'_{\epsilon m}, v)\theta(t)dt \\ & = \int_0^T (\tilde{f}, v)\theta(t)dt. \end{aligned}$$

Se $m \rightarrow \infty$, utilizando as convergências obtidas e pelo fato que V_m é denso em $H_0^1(\Omega)$ obtemos:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T ((k_{1\epsilon}u'_\epsilon m, v)\theta'(t)dt + \int_0^T (k_2u'_\epsilon, v)\theta(t)dt + \int_0^T (-\Delta u_\epsilon, v)\theta(t)dt \\ & + \int_0^T (-\Delta u''_\epsilon, v)\theta(t)dt + \int_0^T (|u'_\epsilon|u'_\epsilon, v)\theta(t)dt + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T (Mu'_\epsilon, v)\theta(t)dt \\ & = \int_0^T (\tilde{f}, v)\theta(t)dt \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Seja a função

$$\theta_\beta(t) = \begin{cases} -\frac{t}{\beta} + 1; & 0 < t \leq \beta \\ 0; & \beta < t \leq T. \end{cases} \quad (3.42)$$

Ora substituindo θ'_β e θ_β na expressão acima obtemos:

$$\frac{1}{\beta} \int_0^\beta (k_{1\epsilon} u'_\epsilon, v) dt + \int_0^\beta h(t) \theta_\beta(t) dt = 0 \quad (3.43)$$

onde

$$h(t) = (k_2 u'_\epsilon, v) + (-\Delta u_\epsilon, v) + (-\Delta u''_\epsilon, v) + (|u'_\epsilon| u'_\epsilon v) + \frac{1}{\epsilon} (M u'_\epsilon, v) - (\tilde{f}, v)$$

Temos que $k_{1\epsilon} u'_\epsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ e da igualdade

$((k_{1\epsilon} u'_{\epsilon m})' + k_2 u'_{\epsilon m} - \Delta u_{\epsilon m} - \Delta u''_{\epsilon m} + |u'_{\epsilon m}|^\rho u'_{\epsilon m} + \frac{1}{\epsilon} M u'_{\epsilon m}(t) = \tilde{f}(t)$ no sentido de $L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$ implica que

$$(k_{1\epsilon} u'_\epsilon)' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \implies k_{1\epsilon} u'_\epsilon \in C_w^0([0, T]; L^2(\Omega))$$

Como $|\theta_\beta(t)| \leq 1, \forall t \in [0, T]$ então

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^\beta h(t) \theta_\beta(t) dt = 0 \quad (3.44)$$

sendo $(k_{1\epsilon} u'_\epsilon)' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \implies k_{1\epsilon} u'_\epsilon \in C_w^0([0, T]; L^2(\Omega))$ resulta que

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{\beta} \int_0^\beta (k_{1\epsilon} u'_\epsilon, v) dt = ((k_{1\epsilon} u'_\epsilon)(0), v). \quad (3.45)$$

Passando o limite quando $\beta \rightarrow 0$ em (3.43), de (3.44) e de (3.45) obtemos:

$$((k_{1\epsilon} u'_\epsilon)(0), v) = (u_1, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

e pela densidade de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ temos

$$(k_{1\epsilon} u'_\epsilon)(0) = u_1.$$

O que prova o teorema (3.0.2)

Demonstração do teorema (3.0.1)

Observamos que as estimativas obtidas são independentes de ϵ . Portanto, pelos mesmos argumentos usado para obter u_ϵ de $u_{\epsilon m}$, a qual é solução de $(P^{\epsilon m})$, podemos passar o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$, em u_ϵ ou a uma subsequência de u_ϵ tal que:

$$u_\epsilon \rightharpoonup u \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (3.46)$$

$$u'_\epsilon \rightharpoonup u' \text{ fraco em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (3.47)$$

$$\sqrt{k_{1\epsilon}}u'_\epsilon \rightarrow \sqrt{k_{1\epsilon}}u' \text{ fraco estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (3.48)$$

$$|u'_\epsilon|^\rho u' \rightarrow |u'|^\rho u' \text{ fraco em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (3.49)$$

$$u''_\epsilon \rightarrow u''_\epsilon \text{ fraco em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.50)$$

$$\frac{1}{\epsilon}Mu'_\epsilon \rightarrow \frac{1}{\epsilon}Mu' \text{ fraco em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \quad (3.51)$$

quando $m \rightarrow \infty$.

Da estimativa a priori I obtivemos:

$$\frac{2}{\epsilon} \int_0^t \int_\Omega |Mu'_\epsilon|^2 dt \leq C, \quad (3.52)$$

onde C é uma constante positiva independente de ϵ .

Restringindo nossa equação do **teorema** (3.0.1) ao domínio não-cilíndrico Q . Usando a definição de M obtemos:

$$M(x, t)u'_\epsilon = \begin{cases} u'_\epsilon; & \text{em } Q_0 \setminus Q \cup \Omega_0 \times \{0\} \\ 0; & Q \cup \Omega_0 \times \{0\} \end{cases} \quad (3.53)$$

Da desigualdade (3.52) temos que $\frac{1}{\epsilon}|Mu'_\epsilon| \leq C$, logo $|Mu'_\epsilon| \leq \frac{\epsilon C}{2}$, passando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos $0 \leq |Mu'_\epsilon| \leq 0$. Por definição $M \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e de (2.61) segue-se que

$$Mu'_\epsilon \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.54)$$

Mas por (3.51) e de (3.54), podemos concluir que:

$$Mu' = 0 \text{ quase sempre em } Q_0 \setminus Q \cup \Omega_0 \times \{0\}. \quad (3.55)$$

Mas, por definição, $M = 1$ em $Q_0 \setminus Q \cup \Omega_0 \times \{0\}$, como consequência obtemos $u' = 0$ quase sempre em $Q_0 \setminus Q \cup \Omega_0 \times \{0\}$. Aplicando a proposição (0.0.1) obtemos $u(x, t) = 0$ quase sempre em $\Omega \setminus \Omega_t$ para quase todo $t \in (0, T)$. Como $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ teremos que

$$u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t)).$$

De modo análogo, obtemos:

$$\begin{aligned} u' &\in L^2(0, T; L^2(\Omega_t)) \\ \sqrt{k_1}u' &\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t)) \\ u'' &\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_t)). \end{aligned}$$

Por outro lado, tomando $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$ e pela continuidade de $\frac{d}{dt}$ obtemos:

$$\int_Q \frac{d}{dt}(k_{1\epsilon}u'_\epsilon)\varphi(x, t)dxdt \rightarrow \int_Q \frac{d}{dt}(k_1u')\varphi(x, t)dxdt$$

isto significa que

$$\frac{d}{dt}(k_{1\epsilon}u'_\epsilon) \rightarrow \frac{d}{dt}(k_1u'). \quad (3.56)$$

Restringindo a equação do teorema (3.0.1) a nosso domínio não-cilíndrico Q , usando a definição de M , \tilde{f} , as convergências (3.46)-(3.51), (3.56), a proposição (0.0.1) e passando o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ em (3.7), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(k_1u') + k_2u' - \Delta u - \Delta u'' + |u'|^\rho u' = f \text{ no sentido de} \\ \mathcal{D}'(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (3.57)$$

De (3.57) segue imediatamente que u satisfaz

$$\begin{aligned} (k_1(x, t)u'(x, t))' + k_2(x, t)u'(x, t) - \Delta u(x, t) - \Delta u''(x, t) + |u'(x, t)|^\rho u'(x, t) = f \\ \text{no sentido de } L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega_t)). \end{aligned}$$

Para mostrar as condições iniciais $u(0) = u_0$ e $(k_1u')(0) = u_1$ usa-se os mesmos argumentos aplicados para mostrar que $u_\epsilon(0) = u_0$ e $(k_1u'_\epsilon)(0) = u_1$.

O que completa a demonstração do nosso resultado relacionado com os dados não-nulos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS and G. PAPANICOLAOU, Perturbations et augmentation des conditions initiales, in: Singular perturbation and boundary layer theory. Springer-Verlag, LION(1976), pp 10-26
- [2] H. BRÉZIS, Análisis Funcional. Teoría y aplicaciones. Alianza editorial. Madrid, Paris, 1984.
- [3] J. COOPER, L.A. MEDEIROS, The cauchy problem for nonlinear wave equations in domains with moving boundary, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. 26, fasc. IV, 829 - 838, 1972.
- [4] J. COOPER, C. BARDOS, A nonlinear wave equation in a time dependent domain. J. Math. Anal. Appl, 42, 29-60, 1973.
- [5] J. FERREIRA, M.A.ROJAS-MEDAR, On global weak solutions of a evolution equation in noncylindrical domain. Proceedings of the Ninth International Colloquium on Differential equations, Bulgária, P. 155-162, 1999.
- [6] J. FERREIRA, D.C. CARVALHO, Existence of global weak solutions of an equation of nonlinear vibrations. Boletim da Sociedade Brasileira Paranaense de Matemática. vol. 11(02), pp 70-90, 1990.
- [7] J. FERREIRA, Nonlinear hyperbolic-parabolic partial differential Equation in noncylindrical domain. Rendiconti del Circolo Matematico Di Palermo (Italia), vol. 44, serie II, pp 135-146, 1995.
- [8] J. FERREIRA, N.A.Lar'kin, Global solvability of a mixed problem for a nonlinear hyperbolic-parabolic equation in noncylindrical Domains. Portugaliae mathematica, vol. 53, fasc. 4-1996.
- [9] J.L. LIONS, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Paris, 1969.
- [10] N. LAR'KIN, Boundary problem in the large for a classe of hyperbolic-parabolic equation. Sib. Math. J. 18(6), pp 1003-1006, 1977.
- [11] A.H. LOVE, A treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover, New York, 1944.
- [12] L.A. MEDEIROS, nonlinear wave equations in domains with variable boundary, Arch. Rational Mech. Anal., 47 pp 47-58, 1972.
- [13] L.A. MEDEIROS, M.M.MIRANDA, Introdução aos espaços de sobolev e às equações diferenciais parciais. Textos de métodos matemáticos n° 25. IME/UFRJ, 1993.
- [14] D.C. PEREIRA, Problema misto para uma equação de vibrações não lineares. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, vol. 9(01), pp 31-43, 1988

- [15] T.N. RABELLO, Decaimento de energia de um sistema de equações hiperbólicas não lineares num domínio não cilíndrico. Tese de doutorado, ITA-São José dos Campos, 1990.
- [16] J.E.M. RIVERA, teoria das distribuições e equações diferenciais parciais. Série textos avançados, LNCC, 1999.
- [17] W.A. STRAUSS, On weak solutions of semilinear hyperbolic equation. Anais da Academia Brasileira de Ciências, vol. 42(4) pp 645-751, 1970.
- [18] N. VRAGOV, On a mixed problem of a hyperbolic-parabolic equation. Dolk. Akad. Nank-URSS, vol. 244(2) pp 1179-1183, 1975.

Livros Grátis

(<http://www.livrosgratis.com.br>)

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)
[Baixar livros de Matemática](#)
[Baixar livros de Medicina](#)
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)
[Baixar livros de Meteorologia](#)
[Baixar Monografias e TCC](#)
[Baixar livros Multidisciplinar](#)
[Baixar livros de Música](#)
[Baixar livros de Psicologia](#)
[Baixar livros de Química](#)
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)
[Baixar livros de Serviço Social](#)
[Baixar livros de Sociologia](#)
[Baixar livros de Teologia](#)
[Baixar livros de Trabalho](#)
[Baixar livros de Turismo](#)