

Universidade Federal de Santa Catarina  
Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica

Homogeneização e Corretor para a  
Equação da Onda em Domínios  
com Pequenos Buracos

Angela Sacamoto

Orientador: Prof. Dr. Joel Santos Souza

Florianópolis

agosto de 2005

# **Livros Grátis**

<http://www.livrosgratis.com.br>

Milhares de livros grátis para download.

# Homogeneização e Corretor para a Equação da Onda em Domínios com Pequenos Buracos

por

**Angela Sacamoto**

Esta dissertação foi julgada para a obtenção do Título de “Mestre”,  
Área de Concentração Equações Diferenciais Parciais, e aprovada em sua forma  
final pelo Curso de Pós-Graduação em Matemática e  
Computação Científica.

---

Igor Mozolevski (Coordenador)

Comissão Examinadora

---

Prof. Dr. Joel Santos Souza (UFSC-Orientador)

---

Prof. Dr. Gustavo A. T. Fernandes da Costa (UFSC)

---

Prof. Dr. Marcelo M. Cavalcanti (UEM)

---

Prof. Dr. Ruy Coimbra Charão (UFSC)

**Florianópolis, agosto de 2005.**

*“ Porque Deus é poderoso para fazer infinitamente mais além daquilo que pedimos  
ou pensamos ”*

Efésios 3:20

*ao meu esposo, Cláuber*

# Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à *Deus* pela realização deste trabalho.

Agradeço ao meu esposo, *Cláuber*, pela compreensão, dedicação, carinho e incentivo em todos os momentos.

Agradeço à minha mãe, aos meus irmãos e amigos, pelo apoio e incentivo.

Agradeço aos professores: *Joel*, pela orientação e pelos conhecimentos transmitidos; *Ruy Charão*, *Gustavo*, e *Marcelo*, que fizeram parte da banca examinadora desta dissertação, pela assistência e pelas sugestões apresentadas.

Agradeço aos professores *Valéria* e *Doherty*, pelo apoio e amizade.

Agradeço à secretária *Elisa* pela eficiência na resolução dos assuntos burocráticos.

Por fim, agradeço ao *CNPq*, pelo suporte financeiro concedido durante um ano e meio.

# Resumo

Nesta dissertação, estudamos a homogeneização da equação da onda com condições de fronteira de *Dirichlet* homogêneas num domínio contendo pequenos buracos, periodicamente distribuídos na direção de cada eixo-coordenado. Para este problema, provamos a convergência do processo de homogeneização e resultados de correção. As demonstrações serão desenvolvidas de acordo com o quadro abstrato de hipóteses introduzido por *D. Cioranescu* e *F. Murat* para o estudo de problemas elípticos, o qual está baseado no uso adequado de funções testes adaptadas à geometria do problema.

# Abstract

In this work we study the homogenization of the wave equation with homogeneous *Dirichlet* boundary conditions in a domain containing small holes periodically distributed in the direction of each coordinate axis. For this problem we prove the convergence of the process of homogenization and corrector results. The proofs are developed according the abstract framework of hypotheses introduced by *D. Cioranescu* and *F. Murat* for the study of elliptic problems, which is based on the use of suitable test functions adapted to the geometry of the problem.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Resultados Básicos</b>	<b>7</b>
1.1 Cálculo Vetorial . . . . .	7
1.2 Análise Funcional . . . . .	8
1.3 Distribuições e Espaços de Sobolev . . . . .	17
1.4 Imersões em Espaços de Sobolev . . . . .	21
<b>2 Contexto Geométrico</b>	<b>23</b>
2.1 Geometria do Problema . . . . .	23
2.2 Alguns Resultados Elípticos . . . . .	26
2.3 Alguns Resultados de Compacidade . . . . .	34
2.4 Um Operador Quase-extensão . . . . .	39
<b>3 Existência e Unicidade de Soluções Fracas</b>	<b>44</b>
3.1 Apresentação do Problema . . . . .	44
3.2 Existência de Solução . . . . .	46
3.3 Unicidade da Solução Fraca . . . . .	54
<b>4 Homogeneização da Equação da Onda</b>	<b>56</b>
4.1 O Processo de Homogeneização . . . . .	56
4.2 Semi-continuidade Inferior da Energia . . . . .	66

<b>5</b>	<b>Resultados de Correção</b>	<b>69</b>
5.1	Convergência Forte da Energia . . . . .	69
5.2	Resultado Auxiliar . . . . .	71
5.3	Corretor para a Equação da Onda . . . . .	77
<b>6</b>	<b>O Caso dos Buracos Menores que o Tamanho Crítico</b>	<b>81</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>85</b>
A.1	Medidas de Radon (ou medidas de ordem zero) . . . . .	85
A.2	Um Resultado de Densidade . . . . .	86
	<b>Referências</b>	<b>89</b>

# Introdução

O método de homogeneização é uma técnica que possibilita várias aplicações, destacando-se entre elas, a modelagem de fenômenos físicos caracterizados por problemas com múltiplas escalas, ou seja, o comportamento macroscópico é resultante da superposição de fenômenos que ocorrem em diversas escalas inferiores. A abordagem matemática destes problemas pode ser feita utilizando-se as técnicas da teoria da homogeneização. Citamos alguns exemplos onde esta situação ocorre com frequência:

- A modelagem de escoamentos (monofásicos e multifásicos) acoplados a dispersão de contaminantes, transporte de calor e massa e deformações/tensões em formações geológicas heterogêneas são processos que envolvem múltiplas escalas. A correta descrição de processos que ocorrem na escala de campo (quilômetros) tais como a macro-dispersão em reservatórios de petróleo bem como o transporte de contaminantes em aquíferos está fortemente atrelada ao atendimento dos diversos fenômenos que ocorrem nas escalas inferiores. Exemplos: na escala do poro ( $mm$ ), onde valem as equações da Mecânica do Contínuo; na escala de laboratório ( $cm$ ), onde vale a lei de Darcy...
- Na Mecânica dos Materiais, vários modelos macroscópicos de plasticidade em metais são correlacionados com fenômenos microscópicos referentes ao movimento de discordâncias ocorridos na microestrutura cristalográfica do material. Analogamente, fenômenos de plasticidade em meios granulares estão fortemente ligados a fenômenos de fricção na estrutura microscópica granular.
- Na área da climatologia e meteorologia, o acoplamento entre modelos de pre-

visão climática globais macroscópicos com modelos regionais microscópicos, por exemplo, relativos à precipitação e temperaturas locais, envolve o entendimento de um processo como múltiplas escalas conhecido como *downscaling*.

- Na Mecânica de Fluidos, o fenômeno de turbulência está associado ao movimento de flutuação das partículas de fluido em torno da velocidade média da corrente fluida. A influência da perturbação relacionada com a flutuação sobre o comportamento do fluido a nível macroscópico envolve o estabelecimento de um modelo com múltiplas escalas.
- Na área da biologia estrutural, o processo envolvendo múltiplas escalas é bastante freqüente. Por exemplo, o correto entendimento do campo de forças que atua na estrutura e arranjo de proteínas está fortemente relacionado com os dados relativos às seqüências de DNA sendo também governado pelas forças atômicas que atuam na microfísica. Além disso, o estudo de propagação de populações e epidemias em ecossistemas envolve fenômenos com múltiplas escalas advindos do acoplamento entre interações globais e locais entre as espécies.
- Na área da farmacologia, o transporte macroscópico de drogas nos organismos vivos é fortemente determinado pela micro-físico-química resultante das complexas interações que ocorrem entre fármacos e células.

Como vimos, a teoria de homogeneização é uma técnica que permite modelar fenômenos de transporte e difusão numa escala macroscópica através de informações numa escala microscópica. Como exemplo, o escoamento de um fluido, em um rio ou em um lago, com obstáculos, onde estes obstáculos seriam constituídos por uma região com árvores. Numa escala “microscópica”, de alguns metros, as equações que descrevem um tal escoamento, são as equações de *Navier-Stokes*, numa geometria muito complicada. No entanto, fenômenos de grande interesse ocorrem numa escala de quilômetros, escala “macroscópica”. As equações desse escoamento nesta escala podem ser bem mais tratáveis quando escritas em termos de grandezas médias, onde os

efeitos locais de flutuação são incorporados a certos parâmetros desses novos modelos. Busca-se assim, obter exatamente o correto tratamento, na escala macroscópica, de efeitos não lineares descritos pela equação de *Navier-Stokes* numa escala microscópica.

O tratamento matemático, em geral, do método de homogeneização se dá em duas abordagens.

A primeira é exemplificada em *J. L. Lions* (cf. [16]), onde estuda-se o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u_\epsilon = f_\epsilon, & \text{em } \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon \text{ satisfazendo a certas condições de fronteira,} \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\Omega_\epsilon$  denota um domínio aberto limitado “perfurado” do  $\mathbb{R}^n$ , obtido de um aberto  $\Omega$  do  $\mathbb{R}^n$  pela extração de um certo número de orifícios distribuídos periodicamente com período  $\epsilon > 0$ . Problemas deste tipo aparecem no estudo da torsão elástica de um tronco cilíndrico com  $r$  cavidades ou furos. Obviamente que, para  $\epsilon > 0$  poderíamos resolver o problema (1) usando métodos variacionais, mas tal procedimento dependeria de  $\epsilon$ , ou seja, o espaço no qual se aplicaríamos os métodos dependeria de  $\epsilon$ . Por outro lado, a obtenção de uma solução aproximada de (1), para  $\epsilon$  suficientemente pequeno, demandaria muito esforço do ponto de vista da análise numérica e computacional. É necessário, portanto, um método que nos proporcione uma solução aproximada do problema (1) e que não dependa de  $\epsilon$ . Para isto usamos o método de homogeneização.

Para que obtenhamos a homogeneização do problema (1) realizamos um desenvolvimento de ordem qualquer em  $\epsilon$  para  $u_\epsilon$ :

$$u_\epsilon(x) = u_0(x, y) + \epsilon u_1(x, y) + \epsilon^2 u_2(x, y) + \dots + \epsilon^j u_j(x, y) + \dots$$

onde  $y = \frac{x}{\epsilon}$ ,  $x$  representa uma variável macroscópica e  $y$  uma variável microscópica.

As funções  $u_0, u_1, u_2, \dots$  são construídas independentes de  $\epsilon$ , de tal forma que se tenha algum controle de erro, por exemplo

$$\|u_\epsilon - (u_0 + \epsilon u_1 + \dots + \epsilon^m u_m)\| \leq C \epsilon^m,$$

com uma norma adequada, ou ainda que o erro seja de ordem  $\epsilon^m$ , num espaço de *Sobolev* sobre  $\Omega_\epsilon$ , para todo  $m \in \mathbb{N}$ . Desta forma, podemos afirmar que a solução aproximada do problema (1) será:

$$u_0 + \epsilon u_1 + \dots + \epsilon^m u_m.$$

As funções  $u_j$  da expansão assintótica se dá impondo-se a condição de que  $u_\epsilon$  seja solução do problema (1) com a vantagem destes problemas, agora, estarem definidos em todo domínio  $\Omega$ . Esta seria a abordagem através da expansão assintótica. Fazendo-se uso desta abordagem, relaciona-se os efeitos microscópicos e macroscópicos de fenômenos envolvendo escoamentos de fluidos.

A segunda abordagem será exemplificada nesta dissertação no decorrer dos próximos capítulos.

Nesta dissertação, estudamos o artigo de *D. Cioranescu, P. Donato, F. Murat e E. Zuazua* de 1991, mais precisamente, a homogeneização da equação da onda

$$\begin{cases} u_\epsilon'' - \Delta u_\epsilon = f_\epsilon & \text{em } \Omega_\epsilon \times (0, T), T > 0 \\ u_\epsilon(x, 0) = u_\epsilon^0(x) & \text{em } \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon'(x, 0) = u_\epsilon^1(x) & \text{em } \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon = 0 & \text{sobre } \Sigma_\epsilon = \Gamma_\epsilon \times (0, T), \Gamma_\epsilon = \partial\Omega_\epsilon \end{cases} \quad (2)$$

com os seguintes dados  $u_\epsilon^0 \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$ ,  $u_\epsilon^1 \in L^2(\Omega_\epsilon)$ ,  $f_\epsilon \in L^1(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$ , em um domínio perfurado  $\Omega_\epsilon$ , obtido pela extração de subconjuntos fechados de um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , aberto e limitado, distribuídos periodicamente com período  $2\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ , na direção de cada eixo coordenado.

Nosso objetivo é obter a convergência, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , da seqüência das soluções  $u_\epsilon$ , do problema (2), e identificar a equação satisfeita pelo limite  $u$ , ou seja, caracterizar o limite dessa seqüência como sendo a solução definida em todo domínio  $\Omega$  e obter resultados de correção, isto é, resultados de aproximação para as soluções  $u_\epsilon$  quando  $\epsilon$  é pequeno.

Em toda a apresentação deste trabalho, os conjuntos  $\Omega_\epsilon$  serão supostos satisfazerem as condições do quadro funcional abstrato introduzido por *D. Cioranescu* e *F. Murat* para o estudo da homogeneização de problemas elípticos em domínios perfurados com pequenos buracos com condições de fronteira de *Dirichlet* homogêneas, (cf. [9]).

Este trabalho é somente concebido para dados de fronteira de *Dirichlet* homogêneos, o caso de dados de *Newman* homogêneos deve ser tratado de modo diferente, (cf. [6]).

Dividimos este trabalho em seis capítulos e um apêndice:

No capítulo 1, apresentamos resultados básicos para o estudo das E.D.P.'s, resultados de análise funcional e espaços de *Sobolev*. No capítulo 2, apresentamos o contexto geométrico do problema a ser estudado, como também, resultados sobre a homogeneização de problemas elípticos. No capítulo 3, mostramos a existência e a unicidade de solução para o problema (2), para cada  $\epsilon > 0$ , fixado, através do método de *Faedo - Galerkin*. No capítulo 4, fazemos as seguintes hipóteses sobre os dados do problema (2):

$$\begin{cases} \tilde{u}_\epsilon^0 \rightharpoonup u_0, & \text{fracamente em } H_0^1(\Omega), \\ \tilde{u}_\epsilon^1 \rightharpoonup u_1, & \text{fracamente em } L^2(\Omega), \\ \tilde{f}_\epsilon \rightharpoonup f, & \text{fracamente em } L^1(0, T; L^2(\Omega)), \end{cases}$$

onde  $\tilde{u}_\epsilon^0$ ,  $\tilde{u}_\epsilon^1$  e  $\tilde{f}_\epsilon$  representam, respectivamente, as extensões por zero fora de  $\Omega_\epsilon$  das funções  $u_\epsilon^0$ ,  $u_\epsilon^1$  e  $f_\epsilon$ . Mostramos, com essas hipóteses, que  $\tilde{u}_\epsilon \xrightarrow{*} u$ , fraco-estrela em  $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ , onde  $u$ , definida em todo  $\Omega$ , é a solução do problema homogeneizado

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \mu u = f & \text{em } \Omega \times (0, T), T > 0 \\ u(x, 0) = u_0 & \text{em } \Omega \\ u'(x, 0) = u_1 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \quad (3)$$

onde  $\mu$  é uma medida de *Radon* finita e não negativa.

Esse é o principal resultado deste trabalho, que é demonstrado no teorema 4.1. No capítulo 5, apresentamos o resultado de correção para a equação da onda. Para isso, fazemos novas hipóteses sobre os dados, a saber,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\epsilon^0 \in H_0^1(\Omega_\epsilon); \\ \exists g_\epsilon \in H^{-1}(\Omega), \text{ tal que} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_\epsilon^0 = g_\epsilon, \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ g_\epsilon \rightarrow g, \text{ fortemente em } H^{-1}(\Omega), \\ \tilde{u}'_\epsilon \rightarrow u^1, \text{ fortemente em } L^2(\Omega), \\ \tilde{f}_\epsilon \rightarrow f, \text{ fortemente em } L^1(0, T; L^2(\Omega)), \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4)$$

o que permite-nos mostrar que  $\tilde{u}_\epsilon$  pode ser escrita como

$$\tilde{u}_\epsilon = uw_\epsilon + r_\epsilon,$$

onde  $u$  é a solução de (3),  $w_\epsilon$  a função dada pelo quadro abstrato de hipóteses e o resíduo  $r_\epsilon$  satisfaz

$$r_\epsilon \rightarrow 0, \text{ fortemente em } C^0([0, T]; L^2(\Omega)).$$

O termo  $uw_\epsilon$ , chamado de corretor, é então uma boa aproximação da solução  $u_\epsilon$ . Temos, também, que

$$\tilde{u}'_\epsilon \rightarrow u', \text{ fortemente em } C^0([0, T]; L^2(\Omega)).$$

No capítulo 6, consideramos o caso dos buracos menores do que o tamanho crítico, apresentado no capítulo 2, e finalmente, no Apêndice, demonstramos a densidade de  $\mathcal{D}(\Omega)$  em  $H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega; d\mu)$  quando  $\mu$  é uma medida de Radon finita e não negativa de  $H^{-1}(\Omega)$ .



# Capítulo 1

## Resultados Básicos

Neste capítulo enunciaremos algumas definições e alguns resultados auxiliares que serão utilizados nos capítulos posteriores, omitiremos as demonstrações por se tratarem de resultados conhecidos. Também, neste capítulo, fixaremos as notações a serem usadas no presente trabalho.

### 1.1 Cálculo Vetorial

#### Função Escalar e Campo Vetorial

Uma função  $u$  cujo domínio é um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e cuja imagem está contida em  $\mathbb{R}$ , isto é,  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , é dita ser uma *função escalar*. Por outro lado a aplicação  $U : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que associa a cada  $x$  no seu domínio  $\Omega$  um vetor  $U(x)$ , é denominada um *campo vetorial*.

#### Gradiente, Divergente e Laplaciano

Se  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável, então o *gradiente* de  $u$ , denotado por  $\nabla u$ , é definido como o vetor do  $\mathbb{R}^n$  dado por

$$\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Se  $U : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo vetorial de classe  $C^1$ , definimos o *divergente* de  $U$ , denotado por  $\operatorname{div}U$ , por

$$\operatorname{div}U = \nabla \cdot U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

onde  $\nabla$  é o operador definido como  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ .

O *Laplaciano* é definido como

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right),$$

e é denotado por  $\Delta u$ .

### Identidades Úteis

Se  $u$  e  $v$  são funções escalares de classe  $C^1$ ,  $c$  uma constante real, e  $U, V$  campos vetoriais também de classe  $C^1$ , então as seguintes identidades podem ser demonstradas:

1.  $\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v$
2.  $\nabla(cu) = c\nabla u$
3.  $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$
4.  $\operatorname{div}(U + V) = \operatorname{div}U + \operatorname{div}V$
5.  $\operatorname{div}(uU) = u\operatorname{div}U + U \cdot \nabla u$ .

## 1.2 Análise Funcional

### Funcionais e Operadores Lineares - Espaço Dual

Seja  $X$  um espaço vetorial normado sobre  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Um *funcional linear* sobre  $X$  é uma aplicação  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  linear.

Denotamos por  $X'$  o *espaço dual* de  $X$  dado por

$$X' = \{f : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{ linear e contínua}\}.$$

O espaço  $X'$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  com as operações usuais

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in X;$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad x \in X, \alpha \in \mathbb{K}.$$

A norma em  $X'$  é dada por

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X} \{|f(x)| ; \|x\|_X \leq 1\}.$$

Temos que  $(X', \|\cdot\|_{X'})$  é um espaço de *Banach*.

Quando  $f \in X'$  e  $x \in X$ , geralmente denotaremos  $\langle f, x \rangle$  no lugar de  $f(x)$ . Dizemos que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é um produto escalar na dualidade  $X', X$ .

Também podemos tomar o dual de  $X'$ , denotado por  $X''$ , que também é chamado de *espaço bidual* de  $X$ .

A norma em  $X''$  é dada por

$$\|\xi\|_{X''} = \sup_{f \in X'} \{|\langle \xi, f \rangle| ; \|f\|_{X'} \leq 1\}.$$

Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços de *Banach*. Um *operador linear* é uma aplicação  $T : X \rightarrow Y$  linear. Designaremos por  $\mathcal{L}(X, Y)$  o espaço dos operadores lineares e contínuos de  $X$  em  $Y$ , munido da norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \in X} \{\|T(x)\| ; \|x\|_X \leq 1\}.$$

**Teorema 1.1** *Se uma seqüência eqüicontínua de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  converge sim-*

plesmente num subconjunto denso  $D \subset X$ , então  $f_n$  converge uniformemente em cada parte compacta  $K \subset X$ .

*Demonstração:* Ver [12], p. 327.  $\square$

**Teorema 1.2 (Arzelá Áscoli)** *Seja  $K \subset \mathbb{R}$  compacto. Toda seqüência eqüicontínua e simplesmente limitada de funções  $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$  possui uma subseqüência uniformemente convergente.*

*Demonstração:* Ver [12], p. 329.  $\square$

**Teorema 1.3 (Banach-Steinhaus)** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach. Seja  $\{T_i\}_{i \in \mathbb{I}}$  uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de  $X$  em  $Y$ . Suponhamos que*

$$\sup_{i \in \mathbb{I}} \|T_i(x)\| < \infty, \quad \forall x \in X,$$

então,

$$\sup_{i \in \mathbb{I}} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \infty.$$

*Dito de outro modo, existe uma constante  $C$  tal que*

$$\|T_i(x)\| \leq C\|x\|, \quad \forall x \in X, \quad \forall i \in \mathbb{I}.$$

*Demonstração:* Ver [2], p.16.  $\square$

**Corolário 1.1** *Seja  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ ,  $X, Y$  Banach. Suponhamos que para cada  $x \in X$  existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) =: T(x)$ . Então temos*

$$(i) \sup_n \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty$$

$$(ii) T \in \mathcal{L}(X,Y)$$

$$(iii) \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

*Demonstração:* Ver [2], p. 17.  $\square$

### Topologias Fraca e Fraca-Estrela

Seja  $X$  um conjunto não vazio e  $\tau \subset \rho(X)$ . Suponhamos que

- (i)  $\emptyset, X \in \tau$
- (ii)  $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{I}} A_\alpha \in \tau$ , se  $A_\alpha \in \tau, \forall \alpha \in \mathbb{I}$
- (iii)  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$ , se  $A_i \in \tau, i = 1, 2, \dots, n$ ;

onde  $\rho(X)$  denota o conjunto das partes de  $X$ . Nesse caso, dizemos que  $\tau$  forma uma topologia sobre  $X$  e o par  $(X, \tau)$  é chamado de *espaço topológico*.

**Definição 1.1** *Seja  $X$  um espaço de Banach. A topologia fraca sobre  $X$ , denotada por  $\sigma(X, X')$ , é a topologia menos fina sobre  $X$ , que torna contínua todas as aplicações  $f \in X'$ .*

**Notação:** Dada uma seqüência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  em  $X$ , denotaremos por  $x_n \rightharpoonup x$ , a convergência de  $x_n$  para  $x$ , na topologia fraca  $\sigma(X, X')$ .

**Proposição 1.1** *Seja  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência em  $X$ . Então,*

- (i)  $x_n \rightharpoonup x$  em  $\sigma(X, X')$  se, e somente se,  $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \quad \forall f \in X'$ ;
- (ii) se  $x_n \rightarrow x$  fortemente, então  $x_n \rightharpoonup x$  fracamente em  $\sigma(X, X')$ ;
- (iii) se  $x_n \rightharpoonup x$  fracamente em  $\sigma(X, X')$ , então  $\|x_n\|$  é limitada e  $\|x\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$ ;
- (iv) se  $x_n \rightharpoonup x$  fracamente em  $\sigma(X, X')$  e se  $f_n \rightarrow f$  fortemente em  $X'$  (isto é,  $\|f_n - f\|_{X'} \rightarrow 0$ ), então  $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ .

*Demonstração:* Ver [2], p.37.  $\square$

Seja  $X$  espaço de Banach e consideremos  $x \in X$  fixo. Definamos a aplicação  $J_x : X' \rightarrow \mathbb{K}$ , por  $\langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle$ .

As aplicações  $J_x$  são lineares e contínuas. Logo,  $J_x \in X''$ ,  $\forall x \in X$ .

Definamos, agora, a aplicação canônica  $J : X \rightarrow X''$  dada por  $J(x) = J_x$ .

Dizemos que  $X$  é *reflexivo* se  $J(X) = X''$ . Em geral, temos  $J(X) \subset X''$ .

**Proposição 1.2** *Seja  $X$  espaço de Banach reflexivo, consideremos  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência em  $X$ , limitada. Então existe uma subseqüência  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  convergindo na topologia fraca  $\sigma(X, X')$ .*

*Demonstração:* Ver [2], p.50.  $\square$

**Definição 1.2** *A topologia fraca-estrela, denotada por  $\sigma(X', X)$ , é a topologia menos fina sobre  $X'$ , que torna contínuas todas as aplicações  $J_x$ .*

**Notação:** Dada uma seqüência  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  em  $X'$ , denotaremos por  $f_n \xrightarrow{*} f$ , a convergência de  $f_n$  para  $f$  na topologia fraca-estrela  $\sigma(X', X)$ .

**Proposição 1.3** *Seja  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência em  $X'$ . Então,*

(i)  $f_n \xrightarrow{*} f$  em  $\sigma(X', X)$  se, e somente se,  $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ ,  $\forall x \in X$ ;

(ii) se  $f_n \rightarrow f$ , fortemente, então  $f_n \rightharpoonup f$  fracamente em  $\sigma(X', X'')$ ,

se  $f_n \rightharpoonup f$  em  $\sigma(X', X'')$ , então  $f_n \xrightarrow{*} f$  em  $\sigma(X', X)$ ;

(iii) se  $f_n \xrightarrow{*} f$  em  $\sigma(X', X)$  então  $\|f_n\|$  é limitada e  $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$ ;

(iv) se  $f_n \xrightarrow{*} f$  em  $\sigma(X', X)$  e se  $x_n \rightarrow x$  fortemente em  $X$  (isto é,  $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$ ),

então  $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ .

*Demonstração:* Ver [2], p.41.  $\square$

Seja  $X$  espaço métrico. Dizemos que  $X$  é *separável* se ele possui um subconjunto enumerável e denso.

**Proposição 1.4** *Seja  $X$  espaço de Banach separável e consideremos  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência limitada em  $X'$ , então existe uma subseqüência  $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  que converge fraco-estrela em  $X'$ .*

*Demonstração:* Ver [2], p.50.  $\square$

**Teorema 1.4 (Alaoglu-Bourbaki)** *Seja  $X$  espaço de Banach. Então o conjunto  $B_{X'} = \{f \in X' / \|f\| \leq 1\}$ , é compacto na topologia fraca-estrela  $\sigma(X', X)$ .*

*Demonstração:* Ver [2], p.43.  $\square$

### Espaços $L^p$

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , aberto. Definimos o espaço  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , como sendo o conjunto das funções  $u$  definidas em  $\Omega$  com valores em  $\mathbb{K}$ , mensuráveis tais que  $|u|^p$  é integrável no sentido de *Lebesgue* em  $\Omega$ , isto é,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{K} ; u \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Se  $p = \infty$ , definimos o espaço  $L^\infty(\Omega)$  como sendo o conjunto das funções  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  mensuráveis e essencialmente limitadas em  $\Omega$ , isto é,

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{K} ; u \text{ é mensurável e } |u(x)| \leq C \text{ q. s. em } \Omega\}.$$

Os espaços  $L^p$ , para  $1 \leq p < \infty$  e  $L^\infty$  são espaços de *Banach* com as seguintes normas, respectivamente

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)| = \inf \{C : |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Se  $p = 2$ , temos que  $L^2(\Omega)$  é um espaço de *Hilbert* com o produto interno

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

Temos que  $L^p(\Omega)$  é reflexivo para todo  $1 < p < \infty$  e que  $L^p(\Omega)$  é separável para

todo  $1 \leq p < \infty$ .

O teorema abaixo identifica o dual de  $L^p(\Omega)$  com  $L^q(\Omega)$ , onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

**Teorema 1.5 (Representação de Riesz)** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $1 < p < \infty$ ,  $\varphi \in (L^p(\Omega))'$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então existe uma única  $u \in L^q(\Omega)$  tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} u f, \quad \forall f \in L^p(\Omega), \quad e$$

$$\|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'} = \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

*Demonstração:* Ver [2], p.61.  $\square$

Se  $p = \infty$ , temos

**Teorema 1.6** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $\varphi \in (L^1(\Omega))'$ . Então existe uma única  $u \in L^\infty(\Omega)$  tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} u f, \quad \forall f \in L^1(\Omega), \quad e$$

$$\|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

*Demonstração:* Ver [2], p.63.  $\square$

A seguir, enunciaremos alguns resultados úteis para os espaços  $L^p$ .

**Observação 1.1** *Quando não especificarmos, estaremos considerando  $\Omega$  um aberto do  $\mathbb{R}^n$ .*

### Desigualdade de Hölder

*Suponhamos que  $p_i \geq 1$ ,  $i = 1, \dots, m$  são tais que*

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1.$$

*Se  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$  para  $i = 1, \dots, m$  então temos que  $\prod_{i=1}^m f_i \in L^1(\Omega)$  e ainda*

$$\int_{\Omega} \left| \prod_{i=1}^m f_i(x) \right| dx \leq \prod_{i=1}^m \left( \int_{\Omega} |f_i(x)|^{p_i} dx \right)^{\frac{1}{p_i}}.$$



### Desigualdade de Cauchy-Schwarz para funções $L^2(\Omega)$

Sejam  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  duas funções em  $L^2(\Omega)$ . Então

$$|(u, v)_{L^2(\Omega)}| = \left| \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\| \|v\|.$$

**Teorema 1.7** *Seja  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de funções em  $L^p(\Omega)$  e  $f \in L^p(\Omega)$ , tais que  $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ . Então existe uma subseqüência  $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  tal que*

(i)  $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$  q.s. em  $\Omega$ ,

(ii)  $|f_{n_k}(x)| \leq h(x) \forall k$  e q.s. em  $\Omega$ , com  $h \in L^p(\Omega)$ .

*Demonstração:* Ver [2], p.58.  $\square$

**Teorema 1.8 (Convergência Dominada de Lebesgue)** *Seja  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência de funções em  $L^1(\Omega)$ . Suponhamos que*

(i)  $\{f_n\} \rightarrow f(x)$ , q. s. em  $\Omega$ ;

(ii) existe  $h \in L^1(\Omega)$  tal que para cada  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq h(x)$  q. s. em  $\Omega$ . Então,

$$f \in L^1(\Omega) \text{ e } \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

*Demonstração:* Ver [2], p.54.  $\square$

**Teorema 1.9 (Densidade)** *O espaço  $C_0(\Omega)$ , espaço das funções contínuas em  $\Omega$  com suporte compacto em  $\Omega$ , é denso em  $L^1(\Omega)$ , isto é, para toda  $u \in L^1(\Omega)$  e para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $v \in C_0(\Omega)$  tal que  $\|u - v\|_{L^1(\Omega)} < \epsilon$ .*

**Teorema 1.10 (Fubini)** *Suponhamos que  $f \in L^1((0, T) \times \Omega)$ ,*

*então para quase todo  $t \in (0, T)$ ,*

$$f(t, x) \in L^1_x(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} f(t, x) dx \in L^1_t((0, T)).$$

Igualmente, para quase todo  $x \in \Omega$ ,

$$f(t, x) \in L_t^1((0, T)) \quad e \quad \int_0^T f(t, x) dt \in L_x^1(\Omega).$$

Portanto temos

$$\int_0^T \int_{\Omega} f(t, x) dx dt = \int_{\Omega} \int_0^T f(t, x) dt dx = \int_{(0, T) \times \Omega} f(t, x) dt dx.$$

### Os Espaços $C([0, T]; Y)$ e $L^p(0, T; Y)$

Sejam  $Y$  um espaço de *Banach*,  $T > 0$  um número real e  $1 < p < \infty$ .

Definimos o espaço  $C([0, T]; Y)$  como sendo o conjunto das funções  $u : [0, T] \rightarrow Y$ , tais que  $t \mapsto \|u(t)\|_Y$  é contínua em  $[0, T]$ .

A norma em  $C([0, T]; Y)$  é dada por

$$\|u\|_{C([0, T]; Y)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_Y.$$

Definimos o espaço  $L^p(0, T; Y)$  como sendo o conjunto das funções  $u : (0, T) \rightarrow Y$  tais que  $u$  é mensurável e  $\|u(t)\|_Y \in L^p(0, T)$ .

A norma em  $L^p(0, T; Y)$  é dada por

$$\|u\|_{L^p(0, T; Y)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_Y^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço  $L^p(0, T; Y)$ , munido da norma acima, constitui um espaço de *Banach*.

Observemos que se  $1 < p < \infty$  e  $Y$  é reflexivo, então  $L^p(0, T; Y)$  também é reflexivo. E, se  $Y$  é separável, então  $L^p(0, T; Y)$  é separável, para  $1 \leq p < \infty$ .

O espaço  $L^q(0, T; Y')$ , sendo  $Y'$  o dual topológico de  $Y$  e  $q$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $1 \leq p < \infty$ , é dito ser o dual topológico de  $L^p(0, T; Y)$ .

Se  $p = 2$  e  $Y$  é um espaço de *Hilbert*, então temos que  $L^2(0, T; Y)$  é um espaço de

*Hilbert* com produto interno

$$(u, v)_{L^2(0,T;Y)} = \int_0^T (u(t), v(t))_Y dt$$

e norma

$$\|u\|_{L^2(0,T;Y)}^2 = \int_0^T \|u(t)\|_Y^2 dt.$$

Quando  $p = \infty$ , definimos o espaço  $L^\infty(0, T; Y)$ , como sendo o conjunto das funções  $u : (0, T) \rightarrow Y$  mensuráveis e essencialmente limitadas em  $Y$ , ou seja,

$$\sup \text{ess} \|u(t)\|_Y < \infty.$$

A norma em  $L^\infty(0, T; Y)$  é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;Y)} = \sup \text{ess} \|u(t)\|_Y.$$

## 1.3 Distribuições e Espaços de Sobolev

### Distribuições

Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ . Definimos *suporte* de  $f$  e escrevemos  $\text{supp } f$ , como sendo o fecho do conjunto  $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$  em  $\Omega$ .

Designaremos por  $C_0^\infty(\Omega)$  o espaço das funções  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ , de classe  $C^\infty$  em  $\Omega$  e que possuam suporte compacto contido em  $\Omega$ .

Dados  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  e  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , definimos o operador derivação de ordem  $\alpha$  definido por

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

onde  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

Se  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ , definimos  $D^\alpha u = u$ .

Em  $C_0^\infty(\Omega)$ , introduzamos a seguinte noção de convergência:

**Definição 1.3** Dizemos que uma seqüência  $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ , converge para zero, e denotamos  $\varphi_\nu \rightarrow 0$ , quando existe um subconjunto compacto  $K \subset \Omega$ , tal que

$$(i) \text{ supp}\varphi_\nu \subset K, \quad \forall \nu \in \mathbb{N},$$

$$(ii) D^\alpha \varphi_\nu \rightarrow 0 \text{ uniformemente em } \Omega, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Dizemos que uma seqüência  $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$  converge para  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  quando a seqüência  $\{\varphi_\nu - \varphi\}$  converge para zero no sentido acima definido.

O espaço  $C_0^\infty(\Omega)$ , com essa noção de convergência, denomina-se *espaço das funções testes* e é representado por  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Denominamos *distribuição sobre  $(\Omega)$* , a toda forma linear e contínua em  $\mathcal{D}(\Omega)$ . O conjunto de todas as distribuições sobre  $\Omega$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , com as operações usuais de soma de funções e produto por escalar; e é representado por  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

Em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , temos a seguinte noção de convergência: *dizemos que uma seqüência  $\{T_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ , converge para  $T$  em  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , se*

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{K}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Definimos a derivada de ordem  $\alpha$  de  $T$ , de uma distribuição  $T$  sobre  $\Omega$ , como sendo o funcional  $D^\alpha T$ , em  $\mathcal{D}(\Omega)$ , dado por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle; \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Temos que  $D^\alpha T$  também é uma distribuição. Assim, temos que toda distribuição sobre  $\Omega$  possui derivadas de todas as ordens, as quais constituem, também, distribuições sobre  $\Omega$ .

## Espaços de Sobolev

Sejam  $m \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq p < \infty$ . Representamos por  $W^{m,p}(\Omega)$  o espaço vetorial de todas as funções  $u \in L^p(\Omega)$ , tais que  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ ,  $\forall |\alpha| \leq m$ , sendo  $D^\alpha u$  a derivada no sentido das distribuições sobre  $\Omega$ , isto é,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) / D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ com } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço  $W^{m,p}(\Omega)$  é chamado de *espaço de Sobolev* de ordem  $m$  relativo ao espaço  $L^p(\Omega)$ .

Quando  $p = 2$ , escrevemos  $H^m(\Omega)$  no lugar de  $W^{m,2}(\Omega)$ .

O espaço  $W^{m,p}(\Omega)$  é um espaço de *Banach*, com a seguinte norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço  $H^m(\Omega)$  é um espaço de *Hilbert* com o produto interno

$$((u, v))_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

Definamos o espaço  $W_0^{m,p}(\Omega)$  como sendo o fecho de  $\mathcal{D}(\Omega)$  em  $W^{m,p}(\Omega)$ , ou seja,

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Sejam  $1 \leq p < \infty$  e  $q$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Representamos por  $W^{-m,q}(\Omega)$  o dual topológico de  $W_0^{m,p}(\Omega)$ . Conseqüentemente, representamos o dual topológico de  $H_0^m(\Omega)$  por  $H^{-m}(\Omega)$ .

Quando  $m = 1$ , temos o espaço de *Hilbert*  $H^1(\Omega)$  munido do produto interno

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v) + (\nabla u, \nabla v),$$

e da norma induzida

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (|u|^2 + |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

### Desigualdade de Poincaré-Friedrichs

Seja  $\Omega$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$ . Se  $v \in H_0^1(\Omega)$ , então

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{[L^2]^n},$$

onde  $C$  é uma constante que depende somente de  $\Omega$

Como conseqüência desta desigualdade, considera-se a norma de  $H_0^1(\Omega)$ ,

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

sendo  $\|v\|_{H^1(\Omega)}$  e  $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$  equivalentes.

*Demonstração:* Ver [2], p.174.  $\square$

### Teorema da Divergência e Fórmula de Green

Seja  $\Omega$  um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$ , com fronteira de classe  $C^1$ . Então valem as seguintes fórmulas

(i)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F(x)) dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \eta(x) dx, \quad F \in [H^1(\Omega)]^n$$

(ii)

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u dx, \quad v \in H_0^1(\Omega), u \in H^2(\Omega).$$

### Desigualdade de Gronwall

Suponhamos que  $u$ ,  $v$  e  $w$  são funções positivas satisfazendo

$$w(t) \leq v(t) + \int_0^t u(s)w(s) ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Então temos que

$$w(t) \leq v(t) + \int_0^t u(s)v(s)e^{\int_s^t u(r)dr} ds.$$

*Demonstração:* Ver [24], p.13.  $\square$

**Corolário 1.2** *Suponha que sejam válidas as hipóteses da Desigualdade de Gronwall, e consideremos  $v$  uma função crescente. Então temos*

$$w(t) \leq v(t)e^{\int_0^t u(s)ds}.$$

*Em particular, se  $v(t) = C$ , temos*

$$w(t) \leq Ce^{\int_0^t u(s)ds}.$$

*Demonstração:* Ver [24], p. 14.  $\square$

## 1.4 Imersões em Espaços de Sobolev

Sejam  $V$  e  $H$  espaços de *Hilbert*, tais que  $V \subseteq H$  e seja  $\iota : V \rightarrow H$ , a injeção canônica de  $V$  em  $H$  que a cada  $v \in V$  associa  $\iota(v) = v$  como elemento de  $H$ . Dizemos que o operador linear  $\iota$  é o operador de *imersão* de  $V$  em  $H$ .

Dizemos que a imersão  $\iota : V \rightarrow H$  é contínua e indicaremos por  $\hookrightarrow$ , quando existe uma constante  $C > 0$  tal que  $\|v\|_H \leq C\|v\|_V$ ,  $\forall v \in V$ .

Um exemplo simples é o caso  $V = H_0^1(\Omega)$  e  $H = L^2(\Omega)$  ou  $V = H^1(\Omega)$  e  $H = L^2(\Omega)$ , ou ainda  $V = H^m(\Omega)$  e  $H = L^2(\Omega)$ .

Dizemos que a imersão  $\iota : V \rightarrow H$  é compacta e indicaremos por  $\hookrightarrow^c$ , quando a imagem dos limitados de  $V$ , por  $\iota$ , são conjuntos relativamente compactos de  $H$ , isto é conjuntos cujo fecho é compacto em  $H$ , ou ainda, quando as seqüências limitadas em  $V$  são levadas por  $\iota$  em seqüências que possuem subseqüências convergentes em  $H$ .

**Teorema 1.11** *Seja  $\Omega$  um aberto de classe  $C^1$  com fronteira  $\Gamma$  limitada e seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Então,*

*se  $1 \leq p < n$ , tem-se que  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$  onde  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ ,*

*se  $p = n$ , tem-se que  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [p, +\infty)$ ,*

*se  $p > n$ , tem-se que  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ .*

**Teorema 1.12 (Rellich-Kondrachov)** *Suponhamos  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , aberto, limitado e de classe  $C^1$ . Então,*

*se  $p < n$ , tem-se que  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ,  $\forall q \in [1, p^*)$  onde  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ ,*

*se  $p = n$ , tem-se que  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [1, +\infty)$ ,*

*se  $p > n$ , tem-se que  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ .*

*Demonstração:* Ver [2], p.169.  $\square$

**Teorema 1.13 (Sobolev)** *Se  $1 \leq p \leq n$ , tem-se  $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$  para  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ .*

*Demonstração:* Ver [24], p. 120.



# Capítulo 2

## Contexto Geométrico

Neste capítulo apresentaremos a estrutura geométrica do problema a ser estudado, a qual nos permitirá introduzir o quadro funcional abstrato de hipóteses construído por *D. Cioranescu* e *F. Murat*. Apresentaremos, alguns resultados de homogeneização de problemas elípticos, supondo satisfeitas as hipóteses de tal quadro e também resultados de compacidade nos espaços  $L^p(0, T; X)$  sendo  $X$  um espaço de *Banach*. Também introduziremos o operador “quase-extensão”,  $P_\epsilon$ , que será de grande utilidade nos próximos resultados.

### 2.1 Geometria do Problema

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), domínio limitado. Consideremos  $\Omega_\epsilon$  o domínio obtido pela extração do conjunto fechado  $S_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} S_i^\epsilon$ , de  $\Omega$ , ou seja,

$$\Omega_\epsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N(\epsilon)} S_i^\epsilon,$$

onde  $S_i^\epsilon$  são “pequenos” subconjuntos fechados (buracos) de  $\Omega$ ,  $\epsilon$  é um parâmetro que tende a zero enquanto  $N(\epsilon)$ , o número de buracos, é um inteiro que tende ao infinito.

Essa estrutura possibilita-nos obter o quadro funcional abstrato de hipóteses, construído por *D. Cioranescu* e *F. Murat*, no qual supõe-se a existência de uma família

adequada de funções testes.

Admitiremos, então, que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Existe uma seqüência } (w_\epsilon, \mu_\epsilon, \gamma_\epsilon) \text{ de funções testes, tais que:} \\ (i) \quad w_\epsilon \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \|w_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_0; \\ (ii) \quad w_\epsilon = 0 \text{ em } S_\epsilon; \\ (iii) \quad w_\epsilon \rightharpoonup 1, \text{ fracamente em } H^1(\Omega), \text{ e q.s. em } \Omega; \\ (iv) \quad -\Delta w_\epsilon = \mu_\epsilon - \gamma_\epsilon \text{ onde } \mu_\epsilon, \gamma_\epsilon \in H^{-1}(\Omega) \text{ com} \\ \quad \mu_\epsilon \rightarrow \mu, \text{ fortemente em } H^{-1}(\Omega), \\ \quad \langle \gamma_\epsilon, v_\epsilon \rangle_\Omega = 0 \text{ para todo } v_\epsilon \in H_0^1(\Omega) \\ \quad \text{tal que } v_\epsilon = 0 \text{ em } S_\epsilon. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Em (2.1) estamos representando por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ , o par dualidade entre  $H^{-1}(\Omega)$  e  $H_0^1(\Omega)$ . Daqui em diante, continuaremos adotando tal notação.

**Observação 2.1** *Em algumas demonstrações que se seguem, usaremos a seguinte hipótese no lugar da hipótese (iv) em (2.1):*

$$(v) \left\{ \begin{array}{l} \text{Consideremos a seqüência } v_\epsilon \text{ e a função } v \text{ tais que:} \\ \quad v_\epsilon \rightharpoonup v, \text{ fracamente, em } H^1(\Omega), \\ \quad v_\epsilon = 0, \text{ sobre } S_i^\epsilon, \quad 1 \leq i \leq N(\epsilon). \\ \text{Então, para toda função } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ temos:} \\ \quad \langle -\Delta w_\epsilon, \varphi v_\epsilon \rangle_\Omega \longrightarrow \langle \mu, \varphi v \rangle_\Omega \end{array} \right.$$

É de fácil verificação a implicação de (iv) em (v).

**Exemplo 2.1** *Um exemplo, onde o quadro de hipóteses (2.1) é satisfeito, se dá ao considerarmos o caso em que  $\Omega$  é periodicamente perfurado, com um período  $2\epsilon$  na direção de cada eixo -coordenado, por buracos  $S_i^\epsilon$  dados por:*

$$S_i^\epsilon = a_\epsilon S + 2\epsilon \sum_{k=1}^n i_k e_k, \quad (2.2)$$

sendo  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  um multi-índice de  $\mathbb{Z}^n$ ,  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^n$  e  $S$  um conjunto fechado contido na bola  $B_1$ , de raio 1 e centro na origem, (no caso  $n = 2$ , admite-se que  $S$  contém uma bola centrada na origem, (cf. [14], obs 2.2), e  $a_\epsilon < \epsilon$  satisfaz:

$$\begin{cases} \epsilon^2 \log a_\epsilon \longrightarrow -C_0, & \text{se } n = 2 \\ a_\epsilon \epsilon^{-n/n-2} \longrightarrow C_0, & \text{se } n \geq 3 \end{cases} \quad (2.3)$$

para um dado  $C_0 > 0$ .

O caso modelo é dado por

$$\begin{cases} a_\epsilon = \delta_\epsilon \exp\left(\frac{-C_0}{\epsilon^2}\right), & \text{se } n = 2, \text{ com } \epsilon^2 \log \delta_\epsilon \rightarrow 0 \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0, \text{ e} \\ a_\epsilon = C_0 \epsilon^{\frac{n}{n-2}}, & \text{se } n \geq 3 \end{cases} \quad (2.4)$$

e  $S$  sendo escolhido como a bola unitária do  $\mathbb{R}^n$ .

Se  $a_\epsilon$  for dado por (2.3) ou (2.4), podemos construir “explicitamente” as funções  $w_\epsilon$ : sobre o cubo  $P_i^\epsilon$  de tamanho  $2\epsilon$  com centro  $x_i^\epsilon = 2\epsilon \sum_{k=1}^n i_k e_k$ , consideremos a função  $w_\epsilon \in H^1(P_i^\epsilon)$  definida por

$$\begin{cases} \Delta w_\epsilon = 0 \text{ em } B_i^\epsilon \setminus S_i^\epsilon \\ w_\epsilon = 0 \text{ em } S_i^\epsilon \\ w_\epsilon = 1 \text{ em } P_i^\epsilon \setminus B_i^\epsilon. \end{cases} \quad (2.5)$$

A função  $w_\epsilon$  definida em (2.5), em cada  $P_i^\epsilon$ , satisfaz (2.1) com

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{C_0} \frac{\pi}{2} \text{ se } n = 2 \\ \mu = \frac{C_0^{n-2}}{2^n} \cdot \text{Cap}(S, \mathbb{R}^n), \text{ se } n \geq 3 \end{cases} \quad (2.6)$$

onde  $\text{Cap}(S, \mathbb{R}^n) = \inf_{\substack{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \\ \varphi = 1 \text{ em } S}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^2 dx$  é a capacidade em  $\mathbb{R}^n$  do buraco fechado  $S$ .

**Observação 2.2** No exemplo (2.1), o tamanho  $a_\epsilon$  definido em (2.3) é crítico no seguinte sentido: se tomarmos  $r_\epsilon$  como sendo o tamanho dos buracos, com  $r_\epsilon \ll a_\epsilon$ ,

isto é, quando

$$\begin{cases} \epsilon^2 \log r_\epsilon \longrightarrow -\infty, & \text{se } n = 2 \\ \epsilon^{n/n-2}/r_\epsilon \longrightarrow +\infty, & \text{se } n \geq 3, \end{cases} \quad (2.7)$$

a hipótese (2.1) é satisfeita, mas em (iii),  $w_\epsilon \rightarrow 1$ , fortemente em  $H^1(\Omega)$  e, em (iv),  $\mu_\epsilon$  e  $\gamma_\epsilon$  convergem fortemente para zero; neste caso  $\mu = 0$ . Por outro lado, se tomarmos  $a_\epsilon \ll r_\epsilon$ , o que corresponde a substituir  $\infty$  por 0 em (2.7), podemos demonstrar que não existe seqüência de funções  $w_\epsilon$  satisfazendo (i), (ii), e (iii) do quadro de hipóteses (2.1).

O tamanho  $a_\epsilon$  dado em (2.3) é portanto, o único para o qual (2.1) é satisfeito com convergência fraca, e não forte, de  $w_\epsilon$  para 1 em (iii).

## 2.2 Alguns Resultados Elípticos

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados sobre a homogeneização de problemas elípticos, supondo-se que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito.

**Lema 2.1** *Suponhamos que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito. Então a distribuição  $\mu$  que aparece em (iv) é dada por*

$$\langle \mu, \varphi \rangle_\Omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \varphi |\nabla w_\epsilon|^2 dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Logo,  $\mu$  é uma medida de Radon positiva e pertence a  $H^{-1}(\Omega)$ . Também,  $\mu$  é finita.

*Demonstração:* Seja  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , então pelas hipóteses (iii) e (iv) em (2.1), segue que

$$\langle -\Delta w_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle_\Omega = \langle \mu_\epsilon - \gamma_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle_\Omega = \langle \mu_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle_\Omega - \langle \gamma_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle_\Omega = \langle \mu_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle_\Omega \rightarrow \langle \mu, \varphi \rangle_\Omega$$

Por outro lado, pela fórmula de Green, temos

$$\begin{aligned}
\langle -\Delta w_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle_\Omega &= \int_\Omega \nabla w_\epsilon \cdot \nabla(\varphi w_\epsilon) dx \\
&= \int_\Omega \nabla w_\epsilon \cdot (\varphi \nabla w_\epsilon + w_\epsilon \nabla \varphi) dx \\
&= \int_\Omega |\nabla w_\epsilon|^2 \varphi dx + \int_\Omega w_\epsilon \nabla w_\epsilon \cdot \nabla \varphi dx.
\end{aligned}$$

Notemos que o segundo termo desta igualdade tende a zero, pois usando a hipótese (iii) de (2.1) e o teorema de *Rellich-Kondrachov*, temos que,  $w_\epsilon \rightarrow 1$ , fortemente em  $L^2(\Omega)$ , e  $\nabla w_\epsilon \rightarrow 0$ , fracamente em  $[L^2(\Omega)]^n$ .

Assim, obtemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle -\Delta w_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle_\Omega = \langle \mu, \varphi \rangle_\Omega, \text{ e}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle -\Delta w_\epsilon, \varphi w_\epsilon \rangle_\Omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \varphi |\nabla w_\epsilon|^2 dx$$

Da unicidade do limite, segue que

$$\langle \mu, \varphi \rangle_\Omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega \varphi |\nabla w_\epsilon|^2 dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

□

**Observação 2.3** *Um resultado de J. Deny (1950) nos diz que, se  $\Omega$  é um conjunto aberto do  $R^n$  e  $\mu$  uma medida de Radon positiva tal que  $\mu \in H^{-1}(\Omega)$ , então, para todo  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $v$  é mensurável com relação à medida  $d\mu$ ,  $v$  pertence a  $L^1(\Omega; d\mu)$ , e  $\langle \mu, v \rangle_\Omega = \int_\Omega v d\mu$ .*

Podemos definir, então, sem ambigüidade, o espaço

$$V = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega; d\mu) \tag{2.8}$$

que é um espaço de *Hilbert* munido do produto interno

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} uv d\mu. \quad (2.9)$$

**Definição 2.1** Para qualquer  $v \in L^2(\Omega_\epsilon)$  definimos  $\tilde{v}$  como a extensão de  $v$  por zero fora de  $\Omega_\epsilon$ , isto é,

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{se } x \in \Omega_\epsilon \\ 0 & \text{se } x \in S_\epsilon. \end{cases}$$

**Teorema 2.1** Suponhamos que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito e consideremos a seqüência de problemas de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta v_\epsilon = g_\epsilon, & \text{em } \mathcal{D}'(\Omega_\epsilon) \\ v_\epsilon \in H_0^1(\Omega_\epsilon). \end{cases} \quad (2.10)$$

onde  $g_\epsilon \in H^{-1}(\Omega)$  é tal que

$$g_\epsilon \rightarrow g, \text{ fortemente em } H^{-1}(\Omega).$$

Então a seqüência  $\tilde{v}_\epsilon$ , satisfaz

$$\tilde{v}_\epsilon \rightharpoonup v, \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega),$$

onde  $v = v(x)$  é a única solução de

$$\begin{cases} -\Delta v + \mu v = g, & \text{em } \mathcal{D}(\Omega) \\ v \in V. \end{cases} \quad (2.11)$$

*Demonstração:* Multiplicando a equação em (2.10) por uma função teste  $u \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$ , obtemos, por meio da integração por partes e da fórmula de *Green*, a formulação variacional do problema (2.10) dada por

$$\begin{cases} \int_{\Omega_\epsilon} \nabla v_\epsilon \cdot \nabla u = \langle g_\epsilon, u \rangle_{\Omega_\epsilon} \\ v_\epsilon \in H_0^1(\Omega_\epsilon) \end{cases} \quad (2.12)$$

Pelas desigualdades de *Cauchy-Schwarz* e de *Poincaré-Friedrichs*, temos

$$\int_{\Omega} |\nabla \tilde{v}_\epsilon|^2 \leq \|g_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{v}_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \frac{1}{\alpha} \|\nabla \tilde{v}_\epsilon\|_{L^2(\Omega)},$$

onde  $\alpha > 0$  é a constante dada pela desigualdade de *Poincaré-Friedrichs*

Assim, temos

$$\|\tilde{v}_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \|g_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \frac{1}{\alpha} \|\tilde{v}_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)},$$

o que nos dá,

$$\|\tilde{v}_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|g_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \frac{1}{\alpha}.$$

Isto nos diz, que  $\tilde{v}_\epsilon$  é limitada em  $H_0^1(\Omega)$ , que é um espaço de *Hilbert* reflexivo. Assim, existe uma subsequência  $\tilde{v}_\epsilon$  tal que

$$\tilde{v}_\epsilon \rightharpoonup v, \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega).$$

E, como  $H_0^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^2(\Omega)$ , temos que existe subsequência  $\tilde{v}_\epsilon$  tal que

$$\tilde{v}_\epsilon \rightarrow v, \text{ fortemente em } L^2(\Omega).$$

Agora, usando as hipóteses (i) e (ii) de (2.1), temos que para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , a função  $\varphi w_\epsilon$  pertence a  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ . Com isso, podemos usar a formulação (2.12) para tal função.

Assim,

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla v_\epsilon \cdot \nabla (w_\epsilon \varphi) = \langle g_\epsilon, w_\epsilon \varphi \rangle_{\Omega_\epsilon}$$

o que nos dá

$$\int_{\Omega} \varphi \nabla \tilde{v}_\epsilon \cdot \nabla w_\epsilon + \int_{\Omega} w_\epsilon \nabla \tilde{v}_\epsilon \cdot \nabla \varphi = \langle g_\epsilon, w_\epsilon \varphi \rangle_{\Omega}. \quad (2.13)$$

Analisemos as convergências em (2.13):

Pela hipótese (iii) em (2.1) e pelo teorema de *Rellich-Kondrachov*, concluímos que

$$w_\epsilon \rightarrow 1, \text{ fortemente em } L^2(\Omega). \quad (2.14)$$

Analisemos, agora, a primeira parcela do primeiro membro de (2.13). Pela fórmula de *Green*, temos:

$$\int_{\Omega} \varphi \nabla \tilde{v}_\epsilon \nabla w_\epsilon = \langle -\Delta w_\epsilon, \varphi \tilde{v}_\epsilon \rangle_{\Omega} - \int_{\Omega} \tilde{v}_\epsilon \nabla \varphi \nabla w_\epsilon.$$

Pela hipótese (v) de (2.1) temos que

$$\int_{\Omega} \tilde{v}_\epsilon \nabla \varphi \nabla w_\epsilon \rightarrow \int_{\Omega} \varphi \nabla \varphi \nabla 1 = 0$$

Dos resultados obtidos, passando o limite quando  $\epsilon \rightarrow 0$  em (2.13) temos

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi + \langle \mu v, \varphi \rangle_{\Omega} = \langle g, \varphi \rangle_{\Omega}.$$

Logo, a função  $v$  é solução de (2.11) e é única, pois  $\mu$  é positiva. E ainda, a unicidade do limite, implica que a seqüência toda,  $\tilde{v}_\epsilon$ , e não apenas uma subsequência, converge para  $v$ .

□

**Teorema 2.2 (Semi-continuidade inferior fraca da energia)** *Suponhamos que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito. Então, para toda seqüência  $v_\epsilon$  e para toda função  $v$  tais que  $v_\epsilon \rightharpoonup v$ , fracamente, em  $H_0^1(\Omega)$  e  $v_\epsilon = 0$  em  $S_\epsilon$ , temos:*

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla v_\epsilon|^2 \geq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \langle \mu, v^2 \rangle$$

*Demonstração:* Seja  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Temos que



$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla(v_{\epsilon} - w_{\epsilon}\varphi)|^2 &= \int_{\Omega} |\nabla v_{\epsilon} - \varphi\nabla w_{\epsilon} - w_{\epsilon}\nabla\varphi|^2 \\
&= \int_{\Omega} |\nabla v_{\epsilon}|^2 - \varphi\nabla v_{\epsilon}\nabla w_{\epsilon} - w_{\epsilon}\nabla v_{\epsilon}\nabla\varphi - \varphi\nabla w_{\epsilon}\nabla v_{\epsilon} + (\varphi\nabla w_{\epsilon})^2 \\
&\quad + \varphi w_{\epsilon}\nabla w_{\epsilon}\nabla\varphi - w_{\epsilon}\nabla\varphi\nabla v_{\epsilon} + \varphi w_{\epsilon}\nabla\varphi\nabla w_{\epsilon} + (w_{\epsilon}\nabla\varphi)^2 \\
&= \int_{\Omega} |\nabla v_{\epsilon}|^2 - 2\varphi\nabla v_{\epsilon}\nabla w_{\epsilon} - 2w_{\epsilon}\nabla v_{\epsilon}\nabla\varphi + 2\varphi w_{\epsilon}\nabla w_{\epsilon}\nabla\varphi \\
&\quad + |\varphi\nabla w_{\epsilon}|^2 + |w_{\epsilon}\nabla\varphi|^2.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Agora, notemos que

$$\langle -\Delta w_{\epsilon}, \varphi v_{\epsilon} \rangle = \int_{\Omega} \varphi\nabla v_{\epsilon}\nabla w_{\epsilon} + \int_{\Omega} v_{\epsilon}\nabla\varphi\nabla w_{\epsilon}. \tag{2.16}$$

Substituindo (2.16) em (2.15), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |(\nabla v_{\epsilon} - w_{\epsilon}\varphi)|^2 &= \int_{\Omega} |\nabla v_{\epsilon}|^2 + \int_{\Omega} |w_{\epsilon}|^2 |\nabla\varphi|^2 + \int_{\Omega} |\varphi|^2 |\nabla w_{\epsilon}|^2 \\
&\quad - 2 \int_{\Omega} w_{\epsilon}\nabla v_{\epsilon}\nabla\varphi + \int_{\Omega} \varphi w_{\epsilon}\nabla w_{\epsilon}\nabla\varphi \\
&\quad - 2\langle -\Delta w_{\epsilon}, \varphi v_{\epsilon} \rangle + 2 \int_{\Omega} v_{\epsilon}\nabla\varphi\nabla w_{\epsilon}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Consideremos, agora, uma subsequência  $v_{\epsilon'}$  de  $v_{\epsilon}$ , tal que  $\int_{\Omega} |\nabla v_{\epsilon'}|^2$  seja convergente.

Assim, usando a hipótese de que  $v_{\epsilon} \rightharpoonup v$ , fracamente em  $H_0^1(\Omega)$  e  $v_{\epsilon} = 0$  em  $S_{\epsilon}$ , o teorema de *Rellich-Kondrachov*, as hipóteses (iii) e (v) de (2.1) e o Lema (2.1), conseguimos passar o limite no segundo membro de (2.17), obtendo:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla(v_{\epsilon'} - w_{\epsilon'}\varphi)|^2 &= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla v_{\epsilon'}|^2 + \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 + \langle \mu, \varphi^2 \rangle \\
&\quad - 2 \int_{\Omega} \nabla v \nabla\varphi - 2\langle \mu, \varphi v \rangle.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Escolhendo  $v_{\epsilon'}$  de tal forma que:

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla v_{\epsilon}|^2 = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|v_{\epsilon}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \|v'_{\epsilon'}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla v_{\epsilon'}|^2,$$

temos

$$\begin{aligned} \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla(v_{\epsilon} - w_{\epsilon}\varphi)|^2 &= \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla v_{\epsilon}|^2 + \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 + \langle\mu, \varphi^2\rangle \\ &\quad - 2 \int_{\Omega} \nabla v \nabla\varphi - 2\langle\mu, \varphi v\rangle. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Observemos, agora, que o primeiro membro de (2.19) é positivo, logo, podemos concluir que

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla v_{\epsilon}|^2 \geq 2 \int_{\Omega} \nabla v \nabla\varphi - \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 + 2\langle\mu, \varphi v\rangle - \langle\mu, \varphi^2\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.20)$$

Finalmente, tomando  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ , em (2.20), temos

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla v_{\epsilon}|^2 \geq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \langle\mu, v^2\rangle.$$

□

**Teorema 2.3** *Suponhamos que as hipóteses do teorema (2.2) sejam satisfeitas e que a seqüência  $v_{\epsilon}$  satisfaça:*

$$\int_{\Omega} |\nabla v_{\epsilon}|^2 \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \langle\mu, v^2\rangle. \quad (2.21)$$

Então

$$(v_{\epsilon} - w_{\epsilon}v) \rightarrow 0, \text{ fortemente em } W_0^{1,1}(\Omega). \quad (2.22)$$

*Demonstração:* Usando a hipótese (2.21) e a igualdade em (2.18) do teorema (2.2), temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla(v_{\epsilon} - w_{\epsilon}\varphi)|^2 &= \int_{\Omega} |\nabla v|^2 + \langle \mu, v^2 \rangle + \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \langle \mu, \varphi^2 \rangle \\
&\quad - 2 \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi - 2 \langle \mu, \varphi v \rangle \\
&= \int_{\Omega} |\nabla(v - \varphi)|^2 + \langle \mu, (v - \varphi)^2 \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Assim, se  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ , tomamos  $\varphi = v$  em (2.23), o que nos dá  $(v_{\epsilon} - w_{\epsilon}v) \rightarrow 0$ , fortemente, em  $H_0^1(\Omega)$ . Mas, se  $v$  não pertence a  $\mathcal{D}(\Omega)$ , então como  $v \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\forall \eta > 0$  e  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  fixo, existe  $\varphi(\eta)$  tal que  $\|v - \varphi\|_{H_0^1(\Omega)} < \eta$ .

Com isso, de (2.23), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla(v_{\epsilon} - w_{\epsilon}\varphi)|^2 &\leq \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}} \|v - \varphi\|_{W_0^{1,1}}^2 \\
&= \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}} \int_{\Omega} |\nabla(v - \varphi)|^2 \\
&= \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}} \int_{\Omega} 2(v - \varphi) \nabla(v - \varphi).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Em (2.24), usando as desigualdades de *Cauchy-Schwartz* e de *Poincaré-Friedrichs*, obtemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla(v_{\epsilon} - w_{\epsilon}\varphi)|^2 &\leq \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}} 2 \left[ \int_{\Omega} |\nabla(v - \varphi)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_{\Omega} |(v - \varphi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}} 2 \|\nabla(v - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} \|v - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}} 2C \|\nabla(v - \varphi)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&< \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}} 2 \|v - \varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\
&< \eta^2 + \|\mu\|_{W^{-1,\infty}} 2\eta^2 \\
&= \eta^2(1 + 2\|\mu\|_{W^{-1,\infty}}).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Assim,  $\exists \epsilon_0 > 0$ , tal que  $\forall \epsilon < \epsilon_0$ , temos

$$\|v_{\epsilon} - w_{\epsilon}\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C_1^2 \eta^2,$$

mas, sendo

$$\|v_\epsilon - w_\epsilon v\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} \leq \|v_\epsilon - w_\epsilon \varphi\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} + \|w_\epsilon(v - \varphi)\|_{W_0^{1,1}(\Omega)},$$

segue que

$$\begin{aligned} \|v_\epsilon - w_\epsilon v\|_{W_0^{1,1}(\Omega)} &\leq C_1 \eta + \int_{\Omega} |\nabla[w_\epsilon(v - \varphi)]| \\ &= C_1 \eta + \int_{\Omega} |\nabla w_\epsilon(v - \varphi) + w_\epsilon \nabla(v - \varphi)| \\ &\leq C_1 \eta + \|\nabla w_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \|v - \varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|w_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(v - \varphi)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_1 \eta + 2C \|\nabla w_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(\varphi - v)\|_{L^2(\Omega)} \\ &= C_1 \eta + C_2 \eta, \end{aligned}$$

sempre que  $\epsilon < \epsilon_0$ , o que demonstra (2.22). Observemos que, na estimativa acima, novamente usamos as desigualdades de *Cauchy-Schwartz* e *Poincaré-Friedrichs*.

□

O próximo resultado segue como um corolário dos teoremas anteriores.

**Corolário 2.1** *Suponhamos que as hipóteses, em (2.1), sejam satisfeitas. Então, as soluções  $v_\epsilon$  dos problemas de Dirichlet, em (2.10), em  $\Omega_\epsilon$ , verificam*

$$\tilde{v}_\epsilon = w_\epsilon v + r_\epsilon,$$

com  $r_\epsilon \rightarrow 0$ , fortemente em  $W_0^{1,1}(\Omega)$ , sendo  $v$  a solução de (2.11).

## 2.3 Alguns Resultados de Compacidade

Consideremos  $X$  e  $Y$  dois espaços de Banach reflexivos tais que  $X \subset Y$ , com imersão contínua e densa.

Definamos o seguinte espaço

$$C_s^0(0, T; Y) := \{f \in L^\infty(0, T; Y) : t \mapsto \langle f(t), v \rangle_{Y, Y'} \text{ cont\u00ednua de } [0, T] \text{ em } \mathbb{R}, \\ \text{para qualquer } v \in Y' \text{ fixado} \}$$

Ent\u00e3o temos os seguintes resultados:

**Lema 2.2** *Consideremos  $g_\epsilon$  uma seq\u00fc\u00eancia de fun\u00e7\u00f5es tal que*

$$\begin{cases} g_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} g, & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; X) \\ g_\epsilon \rightarrow g, & \text{fortemente em } C^0(0, T; Y). \end{cases} \quad (2.26)$$

Ent\u00e3o

$$g_\epsilon \rightarrow g, \text{ fortemente em } C_s^0([0, T]; X),$$

isto \u00e9, para todo  $v \in X'$ , a fun\u00e7\u00e3o  $h_\epsilon : t \mapsto \langle g_\epsilon(t), v \rangle_{X, X'}$  pertence a  $C^0([0, T])$  e satisfaz

$$h_\epsilon \rightarrow h, \text{ forte, em } C^0([0, T]), \quad (2.27)$$

onde  $h$  \u00e9 definida por  $h : t \mapsto \langle g(t), v \rangle_{X, X'}$ .

*Demonstra\u00e7\u00e3o:* Do fato de  $L^\infty(0, T; X) \cap C_s^0(0, T; Y) = C_s^0(0, T; X)$ , (cf. [18], lema 8.1 p.297), segue por (2.26) que  $g_\epsilon$  pertence a  $C_s^0(0, T; X)$  e assim,  $h_\epsilon$  pertence a  $C_0([0, T])$ .

Afim de demonstrarmos a converg\u00eancia em (2.27), mostraremos que  $h_\epsilon$  \u00e9 uma seq\u00fc\u00eancia de *Cauchy*.

Seja  $\tilde{v} \in Y'$  e definamos a fun\u00e7\u00e3o

$$\hat{h}_\epsilon \mapsto \langle g_\epsilon(t), \tilde{v} \rangle_{Y, Y'}.$$

Temos,

$$\begin{aligned}
|h_\epsilon(t) - h_{\epsilon'}(t)| &\leq |h_\epsilon(t) - \hat{h}_\epsilon(t)| + |\hat{h}_\epsilon(t) - \hat{h}_{\epsilon'}(t)| \\
&= |\langle g_\epsilon(t), v - \hat{v} \rangle_{X, X'}| + |\langle g_\epsilon(t) - g_{\epsilon'}(t), \hat{v} \rangle_{Y, Y'}| + |\langle g_{\epsilon'}(t), v - \hat{v} \rangle_{X, X'}| \\
&\leq (\|g_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; X)} + \|g_{\epsilon'}\|_{L^\infty(0, T; X)}) \|v - \hat{v}\|_{X'} \\
&\quad + \|g_\epsilon - g_{\epsilon'}\|_{C^0([0, T]; Y)} \|\hat{v}\|_{Y'}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Combinando (2.26), (2.28) e a densidade de  $Y'$  em  $X'$ , segue que  $h_\epsilon$  é uma seqüência de *Cauchy* em  $C^0([0, T])$ , que é completo. Logo  $h_\epsilon \rightarrow h$ , fortemente, em  $C^0([0, T])$ . □

**Proposição 2.1** *Suponhamos, agora, que a imersão  $X \subset Y$  seja compacta. Consideremos  $g_\epsilon$  uma seqüência tal que:*

$$\begin{cases} g_\epsilon \rightharpoonup g, & \text{fracamente em } L^1(0, T; X) \text{ e} \\ g'_\epsilon \rightharpoonup g', & \text{fracamente em } L^1(0, T; Y). \end{cases}$$

Então,

$$g_\epsilon \rightarrow g, \text{ fortemente em } C^0([0, T]; Y).$$

*Demonstração:* Por um resultado de *J. Simon*, (cf. [25], teorema 3), para obtermos a convergência desejada, basta provarmos que

$$\|g_\epsilon(\cdot + h) - g_\epsilon(\cdot)\|_{L^\infty(0, T-h; Y)} \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0, \text{ uniformemente em } \epsilon. \tag{2.29}$$

Temos que

$$\|g_\epsilon(\cdot + h) - g_\epsilon(\cdot)\|_{L^\infty(0, T-h; Y)} \leq \sup_{t \in [0, T-h]} \int_t^{t+h} \|g'_\epsilon(s)\|_Y ds. \tag{2.30}$$

Mas, por outro lado, *J. Diestel* e *J.J. Uhl*, (cf. [10], p. 104), nos diz que a norma em  $Y$  de uma seqüência que converge fracamente em  $L^1(0, T; Y)$  é uniformemente

integrável sobre  $[0, T]$ . Assim, o lado direito de (2.30) converge para zero, quando  $h \rightarrow 0$ , uniformemente em  $\epsilon$ , o que demonstra (2.29).

□

**Corolário 2.2** *Suponhamos que a imersão  $X \subset Y$  seja compacta. Consideremos  $g_\epsilon$  uma seqüência que satisfaz*

$$\begin{cases} g_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} g, & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0, T; X) \\ g'_\epsilon \rightharpoonup g', & \text{fracamente em } L^1(0, T; Y). \end{cases}$$

Então,  $g_\epsilon$  converge fortemente para  $g$  em  $C_s^0([0, T]; X)$ , isto é,

$$\langle g_\epsilon(\cdot), v \rangle_{X, X'} \rightarrow \langle g(\cdot), v \rangle_{X, X'}, \quad \text{fortemente em } C^0([0, T]), \quad \forall v \in X'.$$

*Demonstração:* A demonstração deste corolário é uma consequência direta do lema 2.2 e da proposição 2.1.

□

**Proposição 2.2** *Suponhamos que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito e consideremos uma seqüência de funções  $v_\epsilon$  em  $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon)) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$  satisfazendo*

$$\begin{cases} \tilde{v}_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} v, & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \tilde{v}'_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} v', & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (2.31)$$

Então,

$$\langle \theta, \tilde{v}_\epsilon(\cdot) \rangle_\Omega \rightarrow \langle \theta, v(\cdot) \rangle_\Omega, \quad \text{fortemente em } C^0([0, T]), \quad (2.32)$$

para qualquer  $\theta \in H^{-1}(\Omega)$ , e por outro lado,

$$v \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.33)$$

*Demonstração:* Fazendo  $X = H_0^1(\Omega)$  e  $Y = L^2(\Omega)$  no corolário 2.2, obtemos a convergência em (2.32).

Notemos que (2.32) nos diz que

$$\tilde{v}_\epsilon(t) \rightharpoonup v(t), \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega) \quad \forall t \in [0, T] \text{ fixado.}$$

Assim, usando os teoremas (2.1) e (2.2), obtemos que, para qualquer  $t \in [0, T]$  fixado,

$$v(t) \in V,$$

$$\|v(t)\|_V^2 = \left\{ \int_\Omega |\nabla v(x, t)|^2 dx + \int_\Omega |v(x, t)|^2 d\mu(x) \right\} \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\Omega |\nabla \tilde{v}_\epsilon(x, t)|^2 dx.$$

Como

$$\sup_{t \in [0, T]} \text{ess} \int_\Omega |\nabla \tilde{v}_\epsilon(x, t)|^2 dx = \|\tilde{v}_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C_0,$$

para algum  $C_0 < \infty$ , segue que

$$v(t) \in V \quad \forall t \in [0, T] \text{ e que } \sup_{t \in [0, T]} \text{ess} \|v(t)\|_V^2 \leq C_0.$$

Para mostrarmos que  $v \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ , resta mostrar a mensurabilidade da função  $v : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega; d\mu)$ , uma vez que  $v \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ .

Para isto, sendo  $L^2(\Omega; d\mu)$  separável, é suficiente demonstrar, pelo teorema de mensurabilidade de *Pettis*, cf. [10], teo 2, p.42, que  $v$  é fracamente mensurável.

Como  $v \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ , segue da observação (2.3), que  $v \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega; d\mu))$ . Assim, a função  $t \mapsto \int_\Omega v(x, t) \psi(x) d\mu(x)$  é mensurável para alguma  $\psi \in C^0(\overline{\Omega})$ . Aproximemos, agora,  $\varphi \in L^2(\Omega; d\mu)$  por uma seqüência  $\psi_n \in C^0(\overline{\Omega})$ .

Como  $v(t) \in L^2(\Omega; d\mu)$ ,  $\forall t \in [0, T]$ , temos

$$\int_\Omega v(x, t) \psi_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_\Omega v(x, t) \varphi(x) d\mu(x), \quad \forall t \in [0, T].$$

Isso demonstra a mensurabilidade da função  $t \mapsto \int_\Omega v(x, t) \varphi(x) d\mu(x)$ .

□



## 2.4 Um Operador Quase-extensão

Vamos introduzir, agora, o operador  $P_\epsilon$ , dado por

$$P_\epsilon \psi = w_\epsilon \tilde{\psi}, \quad \text{em } \Omega, \quad \forall \psi \in L^2(\Omega_\epsilon), \quad (2.34)$$

onde  $\tilde{\psi}$  é a extensão de  $\psi$  por zero nos buracos  $S_\epsilon$ .

Esse operador nos será de grande utilidade nos próximos resultados.

**Observação 2.4** *Observemos que o operador  $P_\epsilon$  não é um operador extensão, pois  $P_\epsilon \psi$  não coincide com  $\psi$  em  $\Omega_\epsilon$ , pois  $w_\epsilon$  não coincide com um neste conjunto.*

*No entanto, para qualquer  $\varphi \in L^2(\Omega_\epsilon)$ , temos  $P_\epsilon \varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$ , fortemente em  $L^2(\Omega)$ . De fato! [ Seja  $\varphi \in L^2(\Omega_\epsilon)$ , então  $P_\epsilon \varphi = w_\epsilon \tilde{\varphi}$ . Por (i) e (iii) de (2.1), segue que  $(P_\epsilon \varphi - \tilde{\varphi}) \rightarrow 0$ , q. s. em  $\Omega$  e*

$$\begin{aligned} |P_\epsilon \varphi - \tilde{\varphi}|^2 &= |w_\epsilon \tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}|^2 = |\tilde{\varphi}|^2 + |1 - w_\epsilon|^2 \\ &\leq 2|\tilde{\varphi}|^2(1 + |w_\epsilon|^2) \leq 2|\tilde{\varphi}|^2(1 + \mu_0^2) = C|\tilde{\varphi}|^2, \end{aligned}$$

*isto nos diz que  $(P_\epsilon \varphi - \tilde{\varphi})$  é limitada por uma função pertencente a  $L^1(\Omega)$ . Logo, pelo teorema 1.8, segue que  $P_\epsilon \varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$  em  $L^1(\Omega)$ , e por consequência em  $L^2(\Omega)$ . ]*

*Assim, podemos dizer que  $P_\epsilon$  atua como um operador "quase-extensão".*

**Proposição 2.3** *Suponhamos que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito. Então,*

$$\begin{cases} P_\epsilon \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_\epsilon); L^2(\Omega)), \\ \|P_\epsilon\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\epsilon); L^2(\Omega))} \leq M_0. \end{cases} \quad (2.35)$$

*Além disso, o operador  $P_\epsilon$  é estendido a um operador definido em  $H^{-1}(\Omega_\epsilon)$ , e para qualquer  $\epsilon > 0$  e qualquer  $q \in (1, \frac{n}{n-1})$ , temos*

$$\begin{cases} P_\epsilon \in \mathcal{L}(H^{-1}(\Omega_\epsilon); W^{-1,q}(\Omega)), \\ \|P_\epsilon\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega_\epsilon); W^{-1,q}(\Omega))} \leq C_q. \end{cases} \quad (2.36)$$

*Demonstração:* Seja  $\varphi \in L^2(\Omega_\epsilon)$ , então  $P_\epsilon\varphi = w_\epsilon\tilde{\varphi}$ . Claramente  $P_\epsilon \in \mathcal{L}(L^2(\Omega_\epsilon); L^2(\Omega))$ .

Também, temos

$$\|P_\epsilon\varphi\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} = \|w_\epsilon\tilde{\varphi}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|w_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \|\tilde{\varphi}\|_{L^2(\Omega)} \leq M_0\|\varphi\|_{L^2(\Omega_\epsilon)},$$

isto significa que  $\|P_\epsilon\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega_\epsilon); L^2(\Omega))} \leq M_0$ .

Provemos, agora, a asserção (2.36). Seja  $p > n$  fixado e consideremos o espaço  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Definamos o operador

$$R_\epsilon\varphi = \varphi w_\epsilon \big|_{\Omega_\epsilon}, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (2.37)$$

Temos

$$\nabla(R_\epsilon\varphi) = w_\epsilon\nabla\varphi + \varphi\nabla w_\epsilon, \quad \text{em } \Omega_\epsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla(R_\epsilon\varphi)|^2 dx &\leq 2 \int_{\Omega_\epsilon} |w_\epsilon|^2 |\nabla\varphi|^2 dx + 2 \int_{\Omega_\epsilon} |\varphi|^2 |\nabla w_\epsilon|^2 dx \\ &\leq 2M_0\|\varphi\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2 + 2C_p\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2 \|w_\epsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\leq C_p^2\|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

onde  $C_p$  não depende de  $\epsilon$ , uma vez que  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$  e  $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ .

Logo,

$$\begin{cases} R_\epsilon \in \mathcal{L}(W_0^{1,p}(\Omega); H_0^1(\Omega_\epsilon)), \text{ e} \\ \|R_\epsilon\|_{\mathcal{L}(W_0^{1,p}(\Omega); H_0^1(\Omega_\epsilon))} \leq C_p. \end{cases} \quad (2.38)$$

Consideremos, agora, o operador  $R_\epsilon^*$  definido em  $H^{-1}(\Omega_\epsilon)$ , por

$$\langle R_\epsilon^*\psi, \varphi \rangle_{W^{-1,q}(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)} = \langle \psi, R_\epsilon\varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega_\epsilon), H_0^1(\Omega_\epsilon)}, \quad \forall \psi \in H^{-1}(\Omega_\epsilon), \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

onde  $q$  é dado por  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

A identidade

$$\langle \psi, R_\epsilon \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega_\epsilon), H_0^1(\Omega_\epsilon)} = \int_{\Omega_\epsilon} \psi \varphi w_\epsilon dx = \int_{\Omega_\epsilon} P_\epsilon \psi \varphi dx, \quad \forall \psi \in L^2(\Omega_\epsilon), \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

demonstra que  $R_\epsilon^* = P_\epsilon$  é uma extensão de  $P_\epsilon$  e (2.38) imediatamente implica (2.36).  $\square$

**Proposição 2.4** *Suponhamos que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito e consideremos o operador  $P_\epsilon$  definido em (2.34). Seja  $v_\epsilon$  uma seqüência em  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon)) \cap W^{1,1}(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$  tal que*

$$\begin{cases} \tilde{v}_\epsilon \xrightarrow{*} v, & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ P_\epsilon v'_\epsilon \rightharpoonup v', & \text{fracamente, em } L^1(0, T; W^{-1,q}(\Omega)), \end{cases} \quad (2.39)$$

para algum  $q \in (1, \frac{n}{n-1})$ .

Então, para toda  $\varphi \in L^2(\Omega)$ , temos

$$\int_{\Omega} \tilde{v}_\epsilon(x, \cdot) \varphi(x) dx \rightarrow \int_{\Omega} v(x, \cdot) \varphi(x) dx, \quad \text{fortemente em } C^0([0, T]),$$

isto é,

$$\tilde{v}_\epsilon \rightarrow v, \quad \text{fortemente em } C_s^0([0, T]; L^2(\Omega)).$$

*Demonstração:* Notemos que

$$P_\epsilon v_\epsilon = w_\epsilon \tilde{v}_\epsilon \xrightarrow{*} v, \quad \text{fraco-estrela em } L^\infty(0, T; L_0^2(\Omega)). \quad (2.40)$$

De fato! Temos por (2.39)<sub>1</sub> que

$$\langle \tilde{v}_\epsilon, \psi \rangle \rightarrow \langle v, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Assim,

$$\int_0^T \langle \tilde{v}_\epsilon, \psi \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle v, \psi \rangle dt,$$

integrando em  $\Omega$  e aplicando *Fubini*, temos

$$\int_0^T \int_{\Omega} \tilde{v}_\epsilon \psi dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} v \psi dx dt. \quad (2.41)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\Omega} (P_\epsilon v_\epsilon - v) \psi dx dt \right| &= \left| \int_0^T \int_{\Omega} (w_\epsilon \tilde{v}_\epsilon + w_\epsilon v - w_\epsilon v - v) \psi dx dt \right| \\ &\leq M_0 \left| \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{v}_\epsilon - v) \psi dx dt \right| + \left| \int_0^T \int_{\Omega} (w_\epsilon - 1) v \psi dx dt \right|. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Logo, combinando (iii) de (2.1), (2.41) e (2.42), segue que

$$\int_0^T \int_{\Omega} (P_\epsilon v_\epsilon - v) \psi dx dt \rightarrow 0, \quad \forall \psi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)), \quad \text{quando } \epsilon \rightarrow 0,$$

o que demonstra (2.40).

Assim, por (2.39)<sub>2</sub> e (2.40), a seqüência  $g_\epsilon = P_\epsilon v_\epsilon$  satisfaz as hipóteses do corolário (2.2) com  $X = L^2(\Omega)$  e  $Y = W^{-1,q}(\Omega)$ .

Logo,

$$P_\epsilon v_\epsilon \rightarrow v, \quad \text{fortemente em } C_s^0([0, T]; L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$w_\epsilon \tilde{v}_\epsilon \rightarrow v, \quad \text{fortemente em } C_s^0([0, T]; L^2(\Omega)),$$

o que nos dá,

$$\int_{\Omega} w_\epsilon \tilde{v}_\epsilon \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad \text{fortemente em } C^0([0, T]), \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega). \quad (2.43)$$

Agora, notemos que

$$\int_{\Omega} \tilde{v}_\epsilon \varphi dx = \int_{\Omega} w_\epsilon \tilde{v}_\epsilon \varphi dx + \int_{\Omega} \tilde{v}_\epsilon \varphi (1 - w_\epsilon) dx. \quad (2.44)$$

Mas, por (i) e (iii) de (2.1), por (2.39) e pelo *T.C.D.L.*, temos

$$\left| \int_{\Omega} \tilde{v}_{\epsilon} \varphi (1 - w_{\epsilon}) dx \right| \leq \|\tilde{v}_{\epsilon}\|_{L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))} \|\varphi(1 - w_{\epsilon})\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0. \quad (2.45)$$

Assim, combinando (2.43), (2.44) e (2.45), segue que

$$\int_{\Omega} \tilde{v}_{\epsilon} \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} v \varphi dx, \text{ fortemente em } C^0([0, T]).$$

□

# Capítulo 3

## Existência e Unicidade de Soluções Fracas

Neste capítulo apresentaremos, através do método de *Faedo - Galerkin*, as condições para a existência e unicidade de solução fraca do Problema de *Cauchy* associado à equação da onda, no domínio  $\Omega_\epsilon$  definido no capítulo 2, para cada  $\epsilon > 0$  fixado. Dividiremos este capítulo em três seções. Na seção 3.1 apresentaremos o problema, na seção 3.2 mostraremos a existência de solução fraca para o problema enunciado na seção 3.1 e na seção 3.3 mostraremos a unicidade da solução.

### 3.1 Apresentação do Problema

Consideremos  $\Omega_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , um conjunto aberto, limitado e bem regular. Representaremos por  $\Gamma_\epsilon$  a fronteira de  $\Omega_\epsilon$ , por  $Q_\epsilon$  o cilindro  $Q_\epsilon = \Omega_\epsilon \times (0, T)$  e por  $\Sigma_\epsilon$  a fronteira lateral de  $Q_\epsilon$ , isto é,  $\Sigma_\epsilon = \Gamma_\epsilon \times (0, T)$ .

O problema consiste em:

Dados  $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$  e  $u_0 \in L^2(\Omega_\epsilon)$ , encontrar  $u = u(x, t)$  definida em  $Q_\epsilon$ ,

tal que:

$$\begin{cases} u_\epsilon'' - \Delta u_\epsilon = f_\epsilon & \text{em } Q_\epsilon = \Omega_\epsilon \times (0, T), T > 0 \\ u_\epsilon(0) = u_\epsilon^0 & \text{em } \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon'(0) = u_\epsilon^1 & \text{em } \Omega_\epsilon \\ u_\epsilon = 0 & \text{sobre } \Sigma_\epsilon = \Gamma_\epsilon \times (0, T). \end{cases} \quad (3.1)$$

**Observação 3.1** Em (3.1) estamos representando por  $u_\epsilon'$  e a derivada de  $u_\epsilon(x, t)$  em relação a  $t$  e por  $u_\epsilon''$  a derivada de  $u_\epsilon'$  em relação a  $t$ .

Formularemos agora, o conceito de solução fraca.

Para  $u, v \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$ , consideremos a forma de Dirichlet

$$((u, v)) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Uma solução fraca para o problema hiperbólico (3.1), é uma função  $u_\epsilon : (0, T) \rightarrow H_0^1(\Omega_\epsilon)$ , tal que

$$\frac{d}{dt}(u_\epsilon'(t), v) + ((u_\epsilon(t), v_\epsilon)) = (f_\epsilon(t), v_\epsilon), \quad \forall v_\epsilon \in H_0^1(\Omega_\epsilon),$$

sendo esta igualdade entendida no sentido das distribuições.

Enunciaremos então, o seguinte teorema, a ser demonstrado nas seções 3.2 e 3.3.

**Teorema 3.1** Consideremos  $f \in L^1(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$ ,  $u_\epsilon^0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $u_\epsilon^1 \in L^2(\Omega_\epsilon)$ . Então, existe uma única função  $u_\epsilon : Q_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfazendo:

$$\begin{cases} u_\epsilon \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon)); \\ u_\epsilon' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon)); \\ u_\epsilon'' \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon)) \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt}(u_\epsilon'(t), v_\epsilon) + ((u_\epsilon(t), v_\epsilon)) = (f_\epsilon(t), v_\epsilon), \quad \forall v_\epsilon \in H_0^1(\Omega_\epsilon), \text{ no sentido de } \mathcal{D}'(0, T); \quad (3.3)$$

$$u_\epsilon(0) = u_\epsilon^0 \text{ e } u'_\epsilon(0) = u_\epsilon^1. \quad (3.4)$$

Na demonstração desse teorema usaremos o método de *Faedo - Galerkin*, o qual consiste em aproximar a solução desejada, por soluções de problemas análogos, mas em dimensão finita.

## 3.2 Existência de Solução

Dividiremos a demonstração da existência de solução para o problema enunciado no teorema (3.1) em quatro etapas, a saber:

- (i) construção de soluções aproximadas em subespaços de dimensão finita;
- (ii) estimativas a priori sobre as soluções aproximadas;
- (iii) passagem ao limite das soluções aproximadas;
- (iv) verificação da condição inicial.

### Etapa (i) - Problema Aproximado

Seja  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$  um espaço de Hilbert separável, segue que existe uma seqüência de vetores

$$w_{\epsilon 1}, w_{\epsilon 2}, \dots, w_{\epsilon m}, \dots$$

tais que:

- $w_{\epsilon j} \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$ ,  $\forall j = 1, 2, \dots, m, \dots$ ;
- $w_{\epsilon 1}, w_{\epsilon 2}, \dots, w_{\epsilon m}$  são linearmente independentes para cada  $m$  fixo;
- as combinações lineares finitas dos  $w_{\epsilon j}$  são densas em  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ .

Seja, então,  $W_{\epsilon m} = [w_{\epsilon 1}, w_{\epsilon 2}, \dots, w_{\epsilon m}]$  o subespaço  $m$ -dimensional de  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ , gerado pelos  $m$  primeiros vetores.



Queremos encontrar

$$u_{\epsilon m} : (0, T) \rightarrow W_{\epsilon m}$$

sob a forma:

$$u_{\epsilon m}(t) = \sum_{j=1}^m g_{\epsilon jm}(t) w_{\epsilon j},$$

sendo os  $g_{\epsilon jm}$  determinados pelas seguintes condições:

$$\frac{d}{dt}(u'_{\epsilon m}(t), v) + ((u_{\epsilon m}(t), v)) = (f_{\epsilon}(t), v), \quad \forall v \in W_{\epsilon m}, \quad (3.5)$$

$$u_{\epsilon m}(0) = u_{\epsilon m}^0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} u_{\epsilon m}^0 = u_{\epsilon}^0 \text{ em } H_0^1(\Omega_{\epsilon}), \quad (3.6)$$

$$u'_{\epsilon m}(0) = u_{\epsilon m}^1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} u_{\epsilon m}^1 = u_{\epsilon}^1 \text{ em } L^2(\Omega_{\epsilon}), \quad (3.7)$$

Substituindo  $v_{\epsilon}$  por  $w_{\epsilon j}$ ,  $0 < j \leq m$ , em (3.5), resulta que as funções  $t \rightarrow (u_{\epsilon m}(t), w_{\epsilon j})$  devem satisfazer

$$\frac{d}{dt}(u'_{\epsilon m}(t), w_{\epsilon j}) + ((u_{\epsilon m}(t), w_{\epsilon j})) = (f_{\epsilon}(t), w_{\epsilon j}), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Agora, notemos que  $u_{\epsilon}^0 \in H_0^1(\Omega_{\epsilon})$ , logo pode ser aproximada pelos  $w_{\epsilon j}$ . Assim, existem  $\alpha_{jm} \in \mathbb{R}$ , tais que

$$u_{\epsilon}^0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \alpha_{jm} w_{\epsilon j}, \quad (3.8)$$

e como queremos

$$u_{\epsilon m}(t) = \sum_{j=1}^m g_{\epsilon jm}(t) w_{\epsilon j},$$

temos

$$u_{\epsilon m}(0) = \sum_{j=1}^m g_{\epsilon jm}(0) w_{\epsilon j}. \quad (3.9)$$

Fazendo  $u_{\epsilon m}^0 = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm} w_{\epsilon j}$ , de (3.8) e (3.9), deduzimos que (3.6) equivale a

$$g_{\epsilon jm}(0) = \alpha_{jm}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.10)$$

Analogamente, usando a densidade de  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$  em  $L^2(\Omega_\epsilon)$ , concluímos que  $u_\epsilon^1$  também pode ser aproximada pelos  $w_{\epsilon j}$ , com isso, existem  $\beta_{jm} \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , tais que que

$$u_\epsilon^1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \beta_{jm} w_{\epsilon j}.$$

Assim, tomando  $u_{\epsilon m} = \sum_{j=1}^m \beta_{jm} w_{\epsilon j}$ , obtemos que a condição em (3.7) equivale a

$$g'_{\epsilon jm}(0) = \beta_{jm}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.11)$$

Obtemos então o sistema

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^m g'_{\epsilon jm}(t)(w_{\epsilon j}, w_{\epsilon i}) + \sum_{j=1}^m g_{\epsilon jm}(t)((w_{\epsilon j}, w_{\epsilon i})) = (f_\epsilon(t), w_{\epsilon j}), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (3.12)$$

$$g_{\epsilon jm}(0) = \alpha_{jm}, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (3.13)$$

$$g'_{\epsilon jm}(0) = \beta_{jm}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.14)$$

Notemos que o sistema dado por (3.12), (3.13) e (3.14), constitui um sistema linear de equações ordinárias, que pode ser escrito numa forma adequada à aplicação do teorema de existência de *Carathéodory*. Logo, existe a solução aproximada  $u_{\epsilon m}(t)$ , para  $t$  no intervalo  $[0, T]$ .

### **Etapa (ii) - Estimativas a priori**

Fazendo  $v_\epsilon = u'_{\epsilon m}(t) \in W_{\epsilon m}$  em (3.5), obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ |u'_{\epsilon m}(t)|^2 + ((u_{\epsilon m}(t), u_{\epsilon m}(t))) \} = (f_\epsilon(t), u'_{\epsilon m}(t)) \quad (3.15)$$

Vimos na etapa (i) que  $u_{\epsilon m}(t)$  existe em  $[0, t_m)$ . Então, tomando  $0 < t < t_m$  e integrando (3.15), temos

$$|u'_{\epsilon m}(t)|^2 + ((u_{\epsilon m}(t), u_{\epsilon m}(t))) = |u'_{\epsilon m}(0)|^2 + ((u_{\epsilon m}(0), u_{\epsilon m}(0))) + 2 \int_0^t (f_{\epsilon}(s), u'_{\epsilon m}(s)) ds \quad (3.16)$$

Notemos que de (3.6) e da desigualdade de *Poincaré-Friedricks*, podemos concluir que  $((u_{\epsilon m}(0), u_{\epsilon m}(0)))$  é convergente, logo limitada. De modo análogo, de (3.7) também temos que  $|u'_{\epsilon m}(0)|$  é convergente e com isso limitada.

Vamos analisar, agora, o termo  $2 \int_0^t (f_{\epsilon}(s), u'_{\epsilon m}(s)) ds$ .

Pela desigualdade de *Schwarz* e da desigualdade  $2ab \leq a^2 + b^2$ , temos:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t (f_{\epsilon}(s), u'_{\epsilon m}(s)) ds &\leq 2 \int_0^t |f_{\epsilon}(s)| |u'_{\epsilon m}(s)| ds \\ &= 2 \int_0^t |f_{\epsilon}(s)|^{\frac{1}{2}} |f_{\epsilon}(s)|^{\frac{1}{2}} |u'_{\epsilon m}(s)| ds \\ &\leq \int_0^T |f_{\epsilon}(s)| ds + \int_0^t |f_{\epsilon}(s)| |u'_{\epsilon m}(s)|^2 ds \end{aligned} \quad (3.17)$$

Como  $f_{\epsilon} \in L^1(0, T; L^2(\Omega_{\epsilon}))$ , temos que a primeira integral do segundo membro, em (3.17), é um número independente de  $m$ .

Assim, das estimativas acima e de (3.16) obtemos:

$$|u'_{\epsilon m}(t)|^2 + \|u_{\epsilon m}(t)\|^2 \leq C + \int_0^t |f_{\epsilon}(s)| |u'_{\epsilon m}(s)|^2 ds. \quad (3.18)$$

Segue, agora, pela desigualdade de *Gronwall*, que  $|u'_{\epsilon m}(t)|$  é limitada por uma constante em  $[0, T)$ , independente de  $m$ .

E, pela desigualdade de *Poincaré-Friedricks*,  $\|u_{\epsilon m}(t)\|$  também é limitada por uma constante em  $[0, T)$ , independente de  $m$ .

Com isso,

$$\begin{aligned} \{u_{\epsilon m}(t)\}_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega_{\epsilon})) \text{ independentemente de } m; \\ \{u'_{\epsilon m}(t)\}_{m \in \mathbb{N}} &\text{ é limitada em } L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega_{\epsilon})) \text{ independentemente de } m. \end{aligned} \quad (3.19)$$

### Etapa (iii) - Passagem ao limite

Pelas estimativas (3.19), segue que existem subsequências  $\{u_{\epsilon\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  de  $\{u_{\epsilon m}\}_{m \in \mathbb{N}}$  e  $\{u'_{\epsilon\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  de  $\{u'_{\epsilon m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ , tais que:

$$u_{\epsilon\nu} \xrightarrow{*} u_{\epsilon}, \text{ fraco-estrela em } L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega_{\epsilon})), \quad (3.20)$$

e

$$u'_{\epsilon\nu} \xrightarrow{*} u'_{\epsilon}, \text{ fraco-estrela em } L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega_{\epsilon})). \quad (3.21)$$

Isto significa que para toda  $w \in L^1(0, T; H^1(\Omega_{\epsilon})) \subset L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_{\epsilon}))$  tem-se:

$$\int_0^T \langle u_{\epsilon\nu}(t), w(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle u_{\epsilon}(t), w(t) \rangle dt. \quad (3.22)$$

Identificando  $L^2(\Omega_{\epsilon})$  ao seu dual, via teorema da representação de *Riesz*, temos que para cada  $w \in L^1(0, T; L^2(\Omega_{\epsilon}))$ , vale que:

$$\int_0^T \langle u'_{\epsilon\nu}(t), w(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle u'_{\epsilon}(t), w(t) \rangle dt. \quad (3.23)$$

Como a forma bilinear  $((\cdot, \cdot))$  é contínua em  $H_0^1(\Omega_{\epsilon})$ , ao fixarmos uma coordenada, a forma resultante será contínua em  $H_0^1(\Omega_{\epsilon})$ . Com isso, pela convergência fraco-estrela de  $u_{\epsilon m}$ , temos que:

$$\int_0^t ((u_{\epsilon m}(t), w(t))) dt \rightarrow \int_0^t ((u_{\epsilon}(t), w(t))) dt. \quad (3.24)$$

Notemos que (3.20) e (3.21) nos diz que  $u_{\epsilon} \in L^{\infty}(0, T; H_0^1(\Omega_{\epsilon}))$  e  $u'_{\epsilon} \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega_{\epsilon}))$ .

Mostremos, agora, que  $u_{\epsilon}$  é solução da equação em (3.3), no sentido de  $\mathcal{D}'(0, T)$ .

Consideremos  $m_0$  fixo e  $\nu > m_0$ . Multiplicando a equação aproximada (3.5) por  $\theta \in \mathcal{D}'(0, T)$  e integrando de 0 a  $T$ , obtemos

$$\int_0^T (u''_{\epsilon\nu}(t), v)\theta(t) dt + \int_0^T ((u_{\epsilon\nu}(t), v))\theta(t) dt = \int_0^T (f_{\epsilon}(t), v)\theta(t) dt,$$

para toda  $v \in W_{\epsilon m_0}$ .

Integrando por partes a primeira integral, obtemos

$$-\int_0^T (u'_{\epsilon\nu}(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u_{\epsilon\nu}(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f_\epsilon(t), v)\theta(t)dt.$$

Tomando o limite quando  $\nu \rightarrow \infty$ , por (3.22) e (3.23), obtemos

$$-\int_0^T (u'_\epsilon(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((u_\epsilon(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f_\epsilon(t), v)\theta(t)dt \quad (3.25)$$

para toda  $v \in W_{\epsilon m_0}$ .

Como  $t \rightarrow (u'_\epsilon(t), v) \in L^\infty(0, T)$ , esta função define uma distribuição sobre  $(0, T)$ .

A primeira integral em (3.25) é derivada desta distribuição, logo

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u'_\epsilon(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T ((u_\epsilon(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f_\epsilon(t), v)\theta(t)dt \quad (3.26)$$

para toda  $v \in W_{\epsilon m_0}$  e  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ .

Pelo fato dos  $W_{\epsilon m_0}$  serem densos em  $H_0^1(\Omega_\epsilon)$ , podemos concluir de (3.26) que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u'_\epsilon(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T ((u_\epsilon(t), v))\theta(t)dt = \int_0^T (f_\epsilon(t), v)\theta(t)dt$$

para toda  $v \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$  e  $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ .

Isto nos diz que  $u_\epsilon$  é solução da equação em (3.3) no sentido de  $\mathcal{D}'(0, T)$ .

Mostremos, agora, que  $u''_\epsilon \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$ .

Como  $u'_\epsilon \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$ ,  $u'_\epsilon$  define uma distribuição vetorial  $\tilde{u}'_\epsilon$ , dada por:

$$\langle \tilde{u}'_\epsilon, \varphi \rangle = \int_0^T (u'_\epsilon(t), v)\varphi(t)dt \in L^2(\Omega_\epsilon) \subset H^{-1}(\Omega_\epsilon). \quad (3.27)$$

Assim,  $\tilde{u}'_\epsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T), H^{-1}(\Omega_\epsilon))$  e possui derivada no sentido das distribuições vetoriais, daí,

$$\langle (\tilde{u}'_\epsilon)', \varphi \rangle = -\langle \tilde{u}'_\epsilon, \varphi' \rangle = -\int_0^T (u'_\epsilon(t), v) \varphi'(t) dt \in H^{-1}(\Omega_\epsilon),$$

o que nos dá  $(\tilde{u}'_\epsilon)' \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(0, T), H^{-1}(\Omega))$ .

Então, podemos calcular  $\langle (\tilde{u}'_\epsilon)', \varphi \rangle \in H^{-1}(\Omega_\epsilon)$  em  $v \in H_0^1(\Omega_\epsilon)$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \langle (\tilde{u}'_\epsilon)', \varphi \rangle, v)_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} &= \langle (\tilde{u}'_\epsilon, \varphi'), v)_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} \\ &= -\left( \int_0^T (u'_\epsilon(t), v) \varphi'(t) dt, v)_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} \\ &= -\int_0^T (u'_\epsilon(t) \varphi'(t), v) dt \\ &= -\int_0^T (u'_\epsilon(t), v) \varphi'(t) dt \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle (\tilde{u}'_\epsilon)', \varphi \rangle, v)_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} = \int_0^T \frac{d}{dt} (u'_\epsilon(t), v) \varphi(t) dt. \quad (3.28)$$

Mas,  $u_\epsilon \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$  nos dá que  $-\Delta u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$ .

Então,

$$\langle \langle \Delta u, \varphi \rangle, v)_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} = \int_0^T (-\Delta u, v) \varphi(t) dt \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\epsilon). \quad (3.29)$$

De modo análogo, temos  $f_\epsilon \in L^1(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))$ , assim,  $f_\epsilon(t) \in H^{-1}(\Omega_\epsilon)$ , o que nos dá

$$\langle \langle \tilde{f}_\epsilon(t), \varphi \rangle, v)_{H_0^1(\Omega_\epsilon)} = \int_0^T (f_\epsilon(t), v) \varphi(t) dt \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\epsilon). \quad (3.30)$$

Agora, identificando  $u_\epsilon$  com a distribuição  $\tilde{u}_\epsilon$  dada em (3.27), sendo  $u_\epsilon$  solução da equação (3.3), concluímos de (3.28), (3.29) e (3.30), que  $u_\epsilon$  satisfaz a equação

$$u_\epsilon'' - \Delta u = f_\epsilon$$

no sentido das distribuições vetoriais em  $H^{-1}(\Omega_\epsilon)$  e também  $u_\epsilon'' \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$ .

#### **Etapa (iv) - Verificação das condições iniciais**

Observemos que, pelas estimativas obtidas para  $u_{\epsilon m}$  e  $u'_{\epsilon m}$ , temos que  $(u_{\epsilon m})$  é limitada em  $H^1(Q_\epsilon)$ . E, como  $H^1(Q_\epsilon) \hookrightarrow L^2(Q_\epsilon)$ , segue que a subsequência  $(u_{\epsilon n_k})$  converge para  $u_\epsilon$ , fortemente em  $L^2(Q_\epsilon)$ , logo, converge fracamente em  $L^2(Q_\epsilon)$ .

Assim, para  $\theta \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ ,  $\theta(0) = 1$ ,  $\theta(T) = 0$ , temos:

$$\int_0^T (u_{\epsilon\nu}(t), v)\theta'(t)dt \rightarrow \int_0^T (u_\epsilon(t), v)\theta'(t)dt$$

Ao integrarmos por partes, como  $u_\epsilon \in C^0([0, T]; L^2(\Omega_\epsilon))$ , segue que:

$$\left\{ - \int_0^T (u'_{\epsilon\nu}(t), v)\theta(t)dt - (u_{\epsilon\nu}(0), v) \right\} \rightarrow \left\{ - \int_0^T (u'_\epsilon(t), v)\theta(t)dt - (u_\epsilon(0), v) \right\}.$$

Usando (3.23), concluímos que:

$$(u_{\epsilon\nu}(0), v) \rightarrow (u_\epsilon(0), v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_\epsilon).$$

Assim,

$$(u_{\epsilon\nu}(0)) \rightharpoonup u_\epsilon(0), \quad \text{fracamente em } L^2(\Omega_\epsilon).$$

Por construção temos que

$$u_{\epsilon\nu}(0) = u_{\epsilon\nu}^0 \rightarrow u_\epsilon^0, \quad \text{fortemente em } H_0^1(\Omega_\epsilon).$$

Logo,

$$u_{\epsilon\nu}(0) \rightharpoonup u_\epsilon^0, \quad \text{fracamente em } L^2(\Omega_\epsilon).$$

Assim, pela unicidade do limite fraco, segue que  $u_\epsilon(0) = u_\epsilon^0$ .

Analogamente concluímos que  $u'_\epsilon(0) = u_\epsilon^1$ .

### 3.3 Unicidade da Solução Fraca

Nesta seção demonstraremos, com as hipóteses do teorema (3.1), que a solução encontrada é única.

Na seção 3.2 vimos que toda solução  $u_\epsilon$  do teorema (3.1), satisfaz

$$-\int_0^T ((u'_{\epsilon\nu}(t), \nu)\theta'(t))dt + \int_0^T ((u_{\epsilon\nu}(t), \nu))\theta(t)dt = \int_0^T (f_\epsilon(t), \nu)\theta(t)dt + (u'_{\epsilon\nu}(0), \nu), \forall \theta \in C^1([0, T]; \mathbb{R}),$$

Notemos que  $z(t) = \theta(t)\nu \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega_\epsilon)) \subset L^1(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$ .

Assim, supomos  $u_\epsilon$  e  $u_\epsilon^*$  duas soluções nas condições do teorema (3.1). Temos que  $w_\epsilon = u_\epsilon - u_\epsilon^*$  satisfaz:

$$-\int_0^T (w'_\epsilon(t), z'(t))dt + \int_0^T ((w_\epsilon(t), z(t)))dt = 0 \quad \forall z \in C^1([0, T]; H_0^1(\Omega_\epsilon)). \quad (3.31)$$

Seja  $s \in (0, T)$ .

Observemos que  $w_\epsilon$  é solução nas condições do teorema (3.1), com  $f_\epsilon = 0$ ,  $w_\epsilon(0) = w'_\epsilon(0) = 0$ .

Temos que  $w_\epsilon \in L^1(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$ , assim

$$z(x) = \begin{cases} -\int_0^s w_\epsilon(\xi)d\xi, & \text{se } t \leq s \\ 0 & \text{se } t > s. \end{cases} \quad (3.32)$$

é uma função de  $C^1([0, T]; H_0^1(\Omega_\epsilon))$ .

Temos  $z'(t) = w_\epsilon(t)$ .

Substituindo  $z(t)$ , dada em (3.32), em (3.31), temos que:

$$\int_0^s (w'_\epsilon(t), w_\epsilon(t))dt + \int_0^s ((z'(t), z(t)))dt = 0,$$

o que nos dá:

$$\int_0^s \frac{d}{dt} [((z(t), z(t))) - |w_\epsilon(t)|^2]dt = 0.$$



Mas,  $z(s) = 0$  e  $w_\epsilon(0) = 0$ , logo,  $((z(0)), z(0)) + |w_\epsilon(s)|^2 = 0$ . Como  $((z(0)), z(0)) > 0$ , temos que  $|w_\epsilon(s)|^2 = 0$ , logo  $w_\epsilon(0) = 0$ ,  $\forall s \in [0, T]$ .

Portanto a solução fraca do teorema (3.1) é única.

# Capítulo 4

## Homogeneização da Equação da Onda

Neste capítulo mostraremos o resultado de homogeneização para a equação da onda, e também, a semi-continuidade inferior da energia.

### 4.1 O Processo de Homogeneização

O capítulo 3 nos garante a existência e a unicidade da solução da equação da onda no domínio  $\Omega_\epsilon$ , para  $\epsilon > 0$ , fixado, vamos obter nesta seção a solução desta equação em todo o domínio  $\Omega$ . Vamos, para isto, fazer  $\epsilon \rightarrow 0$ . Isto é o que chamamos de resultado de homogeneização, que é apresentado no seguinte Teorema.

**Teorema 4.1** *Suponhamos que o quadro de hipóteses (2.1) seja satisfeito e consideremos as seqüências de dados satisfazendo:*

$$\begin{cases} \tilde{u}_\epsilon^0 \rightharpoonup u^0, \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega) \\ \tilde{u}_\epsilon^1 \rightharpoonup u^1, \text{ fracamente em } L^2(\Omega) \\ \tilde{f}_\epsilon \rightharpoonup f, \text{ fracamente em } L^1(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (4.1)$$

Então, a seqüência de soluções  $u_\epsilon$  de (3.1) satisfaz

$$\begin{cases} \tilde{u}_\epsilon \xrightarrow{*} u, & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \tilde{u}'_\epsilon \xrightarrow{*} u', & \text{fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \end{cases} \quad (4.2)$$

onde  $u = u(x, t)$  é a única solução da equação da onda homogenizada:

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \mu u = f, & \text{em } Q = \Omega \times (0, T) \\ u = 0, & \text{em } \Sigma = \Gamma \times (0, T), \Gamma = \partial\Omega \\ u(0) = u^0, & \text{em } \Omega \\ u'(0) = u^1, & \text{em } \Omega \\ u \in C^0([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)), \end{cases} \quad (4.3)$$

onde  $V = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, d\mu)$  definido em (2.8) e  $\mu$  é uma medida de Radon dada pelo Lema (2.1).

**Observação 4.1** Notemos que, devido ao produto escalar  $a(\cdot, \cdot)$  de  $V$ , definido em (2.9), a formulação variacional da equação da onda, em (4.3)<sub>1</sub> é:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} \int_\Omega u(x, t)v(x)dx + a(u(t), v) = \int_\Omega f(x, t)v(x)dx, \\ \text{em } \mathcal{D}'(0, T), \quad \forall v \in V \\ u \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (4.4)$$

Notemos, também, que de acordo com o Teorema 2.2, a função  $u^0$  (que é o limite fraco em  $H_0^1(\Omega)$  das funções  $\tilde{u}_\epsilon^0$  que se anulam sobre os buracos  $S_\epsilon$ ) pertence a  $V$ , logo não existe contradição entre as duas condições  $u(0) = u^0$  e  $u \in C^0([0, T]; V)$ . Observemos que os resultados clássicos garantem a existência e a unicidade de soluções de (4.3).

De fato, a unicidade é garantida na larga classe  $L^\infty(0, T; V) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ .

É válido, também, observarmos que  $\tilde{f}_\epsilon$  é assumida convergir fraco em  $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ , que é uma hipótese mais forte que ser limitada neste espaço.  $\square$

*Demonstração:* (do teorema (4.1)) Procederemos a demonstração em quatro etapas:

### 1ª etapa - Estimativas a priori

Das estimativas obtidas em (3.19) segue-se que existe uma subsequência  $\{u_{em}\}_{m \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\begin{cases} u_{em} \overset{*}{\rightharpoonup} u_\epsilon, & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon)) \\ u'_{em} \overset{*}{\rightharpoonup} u'_\epsilon, & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon)) \end{cases} \quad (4.5)$$

Assim, pelo teorema de *Banach-Steinhaus*, temos:

$$\begin{cases} \|u_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_{em}\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))} \leq C, & \forall \epsilon > 0 \\ \|u'_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|u'_{em}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\epsilon))} \leq C, & \forall \epsilon > 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

onde  $C$  não depende de  $\epsilon$  devido as condições em (4.1).

Logo,

$$\begin{cases} \tilde{u}_\epsilon \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), & \text{independentemente de } \epsilon > 0 \\ \tilde{u}'_\epsilon \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), & \text{independentemente de } \epsilon > 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Com isso, existe uma subsequência, a qual continuaremos a denotar por  $\tilde{u}_\epsilon$ , tal que:

$$\begin{cases} \tilde{u}_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u, & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \tilde{u}'_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u', & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (4.8)$$

Assim, pela proposição(2.2), segue que

$$u \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.9)$$

### 2ª etapa - Passagem ao limite na equação (3.1)<sub>1</sub>

Sejam  $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  e  $w_\epsilon$  a seqüência de funções do quadro de hipóteses (2.1). Consideremos a função teste  $\psi(t)w_\epsilon(x)\varphi(x)$  e vamos compô-la com a equação (3.1)<sub>1</sub>.

Temos:

$$\langle u_\epsilon, \psi''(t)w_\epsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\epsilon} + \langle -\Delta u_\epsilon, \psi(t)w_\epsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\epsilon} = \langle f_\epsilon, \psi(t)w_\epsilon(x)\varphi(x) \rangle_{Q_\epsilon}. \quad (4.10)$$

**Observação 4.2** Em (4.10) estamos representado por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Q_\epsilon}$  o par dualidade entre  $L^1(0, T; H^{-1}(\Omega_\epsilon))$  e  $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega_\epsilon))$ .

Integrando por partes, na variável  $x$ , o segundo termo do primeiro membro de (4.10), obtemos:

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} &= \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \nabla(\psi w_\epsilon \varphi) dx dt = \\ &= \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi \nabla w_\epsilon \varphi dx dt + \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi w_\epsilon \nabla \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Mas, por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \langle -\Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} &= \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \nabla(\psi u_\epsilon \varphi) dx dt = \\ &= \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi \nabla u_\epsilon \varphi dx dt + \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dx dt, \end{aligned} \quad (4.12)$$

então segue que

$$\begin{aligned} \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi \nabla w_\epsilon \varphi dx dt &= \\ &= \langle -\Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} - \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Substituindo (4.13) em (4.11), obtemos

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} &= \langle -\Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} - \\ &- \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dx dt + \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi w_\epsilon \nabla \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (4.14)$$

E, substituindo (4.14) em (4.10), temos

$$\begin{aligned} & \langle u'_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} + \langle -\Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} - \int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dx dt + \\ & + \int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi w_\epsilon \nabla \varphi dx dt = \langle f_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

**Análise dos termos de (4.15):**

Antes de analisarmos, termo a termo, a equação (4.15), faremos algumas considerações.

Notemos que, em (4.8) temos a convergência

$$\tilde{u}_\epsilon \xrightarrow{*} u, \text{ fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)),$$

que implica na convergência

$$\int_0^T \langle \tilde{u}_\epsilon, v \rangle_\Omega dt \rightarrow \int_0^T \langle u, v \rangle_\Omega dt, \quad \forall v \in L^1(0, T; H^{-1}(\Omega)),$$

em particular, para  $v(x, t) = \varphi(x)\psi(x)$ , com  $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $\psi \in L^1(0, T)$ , assim,

$$\int_0^T \langle \tilde{u}_\epsilon, \varphi \rangle_\Omega \psi dt \rightarrow \int_0^T \langle u, \varphi \rangle_\Omega \psi dt, \quad \forall \varphi \in H^{-1}(\Omega), \quad \psi \in L^1(0, T).$$

Com isso,

$$\int_0^T \left( \int_\Omega \tilde{u}_\epsilon \varphi dx \right) \psi dt \rightarrow \int_0^T \left( \int_\Omega u \varphi dx \right) \psi dt, \quad \forall \varphi \in H^{-1}(\Omega), \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Pelo teorema de *Fubini*, segue que

$$\int_\Omega \left( \int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt \right) \varphi dx \rightarrow \int_\Omega \left( \int_0^T \psi u dt \right) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in H^{-1}(\Omega), \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Isto significa que

$$\int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt \rightharpoonup \int_0^T \psi u dt \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega), \quad (4.16)$$

logo, por *Rellich-Kondrachoff*, (inclusão compacta de  $H^{-1}(\Omega)$  em  $L^2(\Omega)$ ), segue que

$$\int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt \rightarrow \int_0^T \psi u dt \text{ fortemente em } L^2(\Omega).$$

E, como  $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$ , segue que  $\psi'' \in \mathcal{D}(0, T)$ , logo,

$$\int_0^T \psi'' \tilde{u}_\epsilon dt \rightharpoonup \int_0^T \psi'' u dt \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega) \text{ e fortemente em } L^2(\Omega). \quad (4.17)$$

Vamos, agora, à análise dos termos em (4.15).

### 1º termo:

Estendendo por zero fora de  $\Omega_\epsilon$  e aplicando o teorema de *Fubini* no primeiro termo, obtemos

$$\langle u_\epsilon, \psi'' w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} = \int_0^T \int_\Omega \tilde{u}_\epsilon \psi'' w_\epsilon \varphi dx dt = \int_\Omega w_\epsilon \varphi \left( \int_0^T \psi'' \tilde{u}_\epsilon dt \right) dx. \quad (4.18)$$

Usando a hipótese (iii) de (2.1) e o teorema de *Rellich-Kondrachoff*, para uma subsequência, ainda denotada por  $w_\epsilon$ , temos que

$$w_\epsilon \rightarrow 1, \text{ fortemente, em } L^2(\Omega). \quad (4.19)$$

Assim, de (4.16) e (4.19), temos a seguinte convergência em (4.18)

$$\langle u_\epsilon, \psi'' w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} \rightarrow \int_\Omega \varphi \left( \int_0^T \psi'' u dt \right) dx. \quad (4.20)$$

**2º termo:**

Pela hipótese (iv) de (2.1) ( $-\Delta w_\epsilon = \mu_\epsilon - \gamma_\epsilon$ ), e pelo teorema de *Fubini*, segue que

$$\begin{aligned} \langle -\Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} &= \langle (\mu_\epsilon - \gamma_\epsilon), \psi u_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} = \\ &= \left\langle (\mu_\epsilon - \gamma_\epsilon), \left( \int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt \right) \varphi \right\rangle_\Omega \\ &= \left\langle \mu_\epsilon, \left( \int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt \right) \varphi \right\rangle_\Omega, \end{aligned} \quad (4.21)$$

pois,  $\langle \gamma_\epsilon, \varphi \int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt \rangle_\Omega = 0$ .

Logo, de (4.16) e de (iv) em (2.1), temos a seguinte convergência em (4.21)

$$\langle -\Delta w_\epsilon, \psi u_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} \rightarrow \left\langle \mu, \left( \int_0^T \psi u dt \right) \varphi \right\rangle_\Omega. \quad (4.22)$$

**3º termo:**

Aplicando o teorema de *Fubini* e estendendo por zero fora de  $\Omega_\epsilon$ , temos

$$\int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dx dt = \int_\Omega \nabla w_\epsilon \cdot \left( \int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt \right) \nabla \varphi dx.$$

Pela hipótese (iii) de (2.1), para uma subsequência, que ainda denotaremos pelo mesmo símbolo, temos que  $\nabla w_\epsilon \rightharpoonup 0$ , fracamente, em  $L^2(\Omega)$ . Daí e de (4.16), temos

$$\int_{Q_\epsilon} \nabla w_\epsilon \cdot \psi u_\epsilon \nabla \varphi dx dt \rightarrow 0. \quad (4.23)$$

**4º termo:**

Aplicando o teorema de *Fubini* e estendendo por zero fora de  $\Omega_\epsilon$ , temos

$$\int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi w_\epsilon \nabla \varphi dx dt = \int_\Omega w_\epsilon \nabla \varphi \cdot \nabla \left( \int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt \right) dx. \quad (4.24)$$



Por (4.16)<sub>1</sub>, para uma subsequência, ainda denotada pelo mesmo símbolo, temos que:

$$\nabla \left( \int_0^T \psi \tilde{u}_\epsilon dt \right) \rightharpoonup \nabla \left( \int_0^T \psi u dt \right), \text{ fracamente, em } [L^2(\Omega)]^n. \quad (4.25)$$

Assim, de (4.19) e (4.25) obtemos a seguinte convergência em (4.24):

$$\int_{Q_\epsilon} \nabla u_\epsilon \cdot \psi w_\epsilon \nabla \varphi dx dt \rightarrow \int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla \left( \int_0^T \psi u dt \right) dx. \quad (4.26)$$

### 5º termo:

Também aplicando o teorema de *Fubini* e estendendo por zero fora de  $\Omega_\epsilon$ , temos que

$$\langle f_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} = \int_\Omega w_\epsilon \varphi \left( \int_0^T \psi \tilde{f}_\epsilon dt \right) dx, \quad (4.27)$$

e da hipótese (4.1)<sub>3</sub> temos que

$$\int_0^T \psi \tilde{f}_\epsilon dt \rightharpoonup \int_0^T \psi f dt, \text{ fracamente, em } L^2(\Omega).$$

Assim, desta convergência e de (4.19), obtemos em (4.27) que

$$\langle f_\epsilon, \psi w_\epsilon \varphi \rangle_{Q_\epsilon} \rightarrow \int_\Omega \varphi \left( \int_0^T \psi f dt \right) dx. \quad (4.28)$$

Agora, usando as convergências obtidas em (4.20), (4.22), (4.23), (4.26) e (4.28), segue de (4.15), que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \varphi \left( \int_0^T \psi'' u dt \right) dx + \left\langle \mu, \left( \int_0^T \psi u dt \right) dx \right\rangle \\ & + \int_\Omega \nabla \varphi \nabla \left( \int_0^T \psi u dt \right) dx = \int_\Omega \varphi \left( \int_0^T \psi f dt \right) dx, \end{aligned}$$

por *Fubini* e pelo teorema de *Deny* (ver observação (2.2)), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \psi'' \left( \int_{\Omega} u \varphi dx \right) dt + \int_0^T \psi \left( \int_{\Omega} u \varphi d\mu \right) dt \\ + \int_0^T \psi \left( \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \right) dt = \int_0^T \psi \left( \int_{\Omega} \varphi f dx \right) dt. \end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de  $\psi \in \mathcal{D}(0, T)$ , segue demonstrado que

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u(x, t) \varphi(x) dx + a(u, \varphi) = \int_{\Omega} f \varphi dx, \quad \text{em } \mathcal{D}'(0, T), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (4.29)$$

Por (4.9) e pela densidade de  $\mathcal{D}(\Omega)$  em  $V$  (ver apêndice A), segue que (4.29) pode ser estendida para toda função  $v \in V$ , o que demonstra (4.4) que equivale a (4.3)<sub>1</sub> e (4.3)<sub>2</sub>.

### 3ª etapa - Passagem ao limite nos dados iniciais

De (4.8) e da proposição (2.2), temos que

$$\langle \varphi, \tilde{u}_{\epsilon}(\cdot) \rangle_{\Omega} \rightarrow \langle \varphi, u(\cdot) \rangle_{\Omega}, \quad \text{fortemente em } C^0([0, T]), \quad \forall \varphi \in H^{-1}(\Omega). \quad (4.30)$$

Com isso e de (4.1)<sub>2</sub>, obtemos que  $u(0) = u^0$ .

Mostremos agora que  $u'(0) = u^1$ , para isto, aplicaremos a proposição (2.4) a  $v_{\epsilon} = u'_{\epsilon}$ .

Verifiquemos que  $P_{\epsilon} u''_{\epsilon} \rightharpoonup u''$ , fracamente em  $L^1(0, T; W^{-1,q}(\Omega))$ . De fato! Temos

$$u''_{\epsilon} = \Delta u_{\epsilon} + f_{\epsilon},$$

assim,

$$P_{\epsilon} u''_{\epsilon} = P_{\epsilon} \Delta u_{\epsilon} + P_{\epsilon} f_{\epsilon}.$$

Por (4.8)<sub>1</sub>, segue que  $\|\Delta u_{\epsilon}\|_{L^{\infty}(0,T;H^{-1}(\Omega_{\epsilon}))} \leq C$ , logo, pela proposição (2.1), temos

$$\|P_{\epsilon} \Delta u_{\epsilon}\|_{L^{\infty}(0,T,W^{-1,q}(\Omega))} \leq C_q, \quad \forall q \in \left(1, \frac{n}{n-1}\right).$$

Analisemos o termo  $P_\epsilon f_\epsilon$ . Pelas hipóteses (i) de (2.1) e (4.1) temos que  $w_\epsilon \tilde{f}_\epsilon$  é limitada em  $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ , também  $\int_E w_\epsilon \tilde{f}_\epsilon dt$  é relativamente compacta na topologia fraca de  $L^2(\Omega)$  para qualquer subconjunto mensurável  $E$  de  $[0, T]$ , pois as funções  $t \mapsto \|\tilde{f}_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}$  são uniformemente integráveis sobre  $[0, T]$ , devido ao fato de que a sequência  $\tilde{f}_\epsilon$  ser relativamente compacta em  $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ , cf. [10] corolário 13 p.76, podemos aplicar o teorema de *Dunford*, (cf. [10], teorema 1, p. 101).

Logo,  $P_\epsilon f_\epsilon = w_\epsilon \tilde{f}_\epsilon$  é relativamente compacto na topologia fraca de  $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ .

Com isso,  $P_\epsilon u''_\epsilon = P_\epsilon \Delta u_\epsilon + P_\epsilon f_\epsilon$  é relativamente compacto na topologia fraca de  $L^1(0, T; W^{-1,q}(\Omega))$ .

Assim, por (2.1) e (4.8)<sub>2</sub>, segue que

$$P_\epsilon u'_\epsilon = w_\epsilon \tilde{u}'_\epsilon \xrightarrow{*} u', \text{ fraco-estrela, em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Mas,  $(P_\epsilon u'_\epsilon)' = P_\epsilon u''_\epsilon$ , logo,

$$P_\epsilon u''_\epsilon \rightharpoonup u'', \text{ fracamente em } L^1(0, T; W^{-1,q}(\Omega)). \quad (4.31)$$

Logo, por (4.8)<sub>2</sub>, 4.31 e pela proposição 2.4, segue que

$$\int_\Omega \tilde{u}'_\epsilon(x, \cdot) \varphi(x) dx \rightarrow \int_\Omega u'(x, \cdot) \varphi(x) dx, \text{ fortemente em } C^0([0, T]), \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega). \quad (4.32)$$

Portanto, usando (4.1)<sub>2</sub>, segue que  $u'(0) = u^1$ .

#### 4ª etapa - Conclusão da demonstração

Demonstramos, pela extração de uma subsequência (ainda denotada por  $(u_\epsilon)$  que a subsequência  $(u_\epsilon)$  satisfaz (4.2) onde o limite

$$u \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$$

e satisfaz (4.3).

A unicidade da solução de (3.3), permite-nos deduzir que a seqüência inteira satisfaz (4.2).

Portanto, o teorema (4.1) está provado. □

## 4.2 Semi-continuidade Inferior da Energia

Nesta seção, mostraremos um resultado de convergência pontual (no tempo) e a propriedade de semi-continuidade inferior da energia.

Definamos, para qualquer  $t \in [0, T]$  a energia  $E - \epsilon(\cdot)$  por

$$E_\epsilon(t) = \frac{1}{2} \|u'_\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_\epsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2. \quad (4.33)$$

Temos a seguinte identidade da energia,

$$E_\epsilon(t) = E_\epsilon(0) + \int_0^t \int_{\Omega_\epsilon} f_\epsilon(x, s) dx ds. \quad (4.34)$$

**Teorema 4.2** *Suponhamos que as hipóteses do teorema (4.1) sejam satisfeitas. Então, para qualquer  $t \in [0, T]$ , fixado temos*

$$\begin{cases} \tilde{u}_\epsilon(t) \rightharpoonup u(t), & \text{fracamente, em } H_0^1(\Omega), \\ \tilde{u}'_\epsilon(t) \rightharpoonup u'(t), & \text{fracamente, em } L^2(\Omega), \end{cases} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 d\mu(x) &\leq \\ &\leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u_\epsilon(x, t)|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\int_{\Omega} |u'(x, t)|^2 dx \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} |u'_\epsilon(x, t)|^2 dx \quad e \quad (4.37)$$

$$E(t) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} E_\epsilon(t), \quad (4.38)$$

onde a energia  $E_\epsilon(\cdot)$  é definida em (4.33) e a energia  $E(\cdot)$  é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}|u'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}|\nabla u(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}|u(t)|_{L^2(\Omega, d\mu)}^2. \quad (4.39)$$

*Demonstração:* Em (4.30), obtemos

$$\langle \varphi, \tilde{u}_\epsilon(\cdot) \rangle_\Omega \longrightarrow \langle \varphi, u_\epsilon(\cdot) \rangle_\Omega, \text{ fortemente em } C^0([0, T]), \forall \varphi \in H^{-1}(\Omega).$$

Em particular,  $\forall t \in [0, T]$ , temos

$$\langle \varphi, \tilde{u}_\epsilon(t) \rangle_\Omega \rightarrow \langle \varphi, u_\epsilon(t) \rangle_\Omega,$$

isto é

$$\tilde{u}_\epsilon(t) \rightharpoonup u(t), \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega), \forall t \in [0, T],$$

o que nos dá (4.35)<sub>1</sub>.

Analogamente, de (4.32) temos

$$\int_\Omega \tilde{u}'_\epsilon(x, \cdot) \varphi(x) dx \rightarrow \int_\Omega u'(x, \cdot) \varphi(x) dx, \text{ fortemente em } C^0([0, T]), \forall \varphi \in L^2(\Omega).$$

Em particular,  $\forall t \in [0, T]$ , temos

$$\langle \varphi, \tilde{u}'_\epsilon(t) \rangle_{L^2(\Omega), L^2(\Omega)} \rightarrow \langle \varphi, u'_\epsilon(t) \rangle_{L^2(\Omega), L^2(\Omega)}, \forall \varphi \in L^2(\Omega),$$

isto é,

$$\tilde{u}'_\epsilon(t) \rightharpoonup u'(t), \text{ fracamente em } L^2(\Omega), \forall t \in [0, T],$$

o que nos dá (4.35)<sub>2</sub>.

Já a asserção em (4.36) segue diretamente do teorema (2.2).

De (4.35)<sub>2</sub> segue que

$$\int_{\Omega} |u'(x, t)|^2 dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_{\epsilon}} |u'(x, t)|^2 dx \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u'_{\epsilon}(x, t)|^2 dx.$$

Agora, combinando (4.36) e (4.37) temos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x, s)|^2 d\mu(x) + \int_{\Omega} |u'(x, s)|^2 dx \\ & \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega_{\epsilon}} |\nabla u_{\epsilon}(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega_{\epsilon}} |u'_{\epsilon}(x, t)|^2 dx \right\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x, s)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, s)|^2 d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u'(x, s)|^2 dx \\ & \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\epsilon}} |\nabla u_{\epsilon}(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\epsilon}} |u'_{\epsilon}(x, t)|^2 dx \right\}, \end{aligned}$$

isto é,

$$E(t) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} E_{\epsilon}(t),$$

o que demonstra (4.38).

□

# Capítulo 5

## Resultados de Correção

Neste capítulo estabeleceremos e demonstraremos o resultado de correção para a equação da onda. Para isto serão necessárias hipóteses especiais sobre os dados. Uma das principais etapas da demonstração é a convergência forte da energia em  $C^0([0, T])$ .

### 5.1 Convergência Forte da Energia

Com relação à condição inicial  $u_\epsilon^0$ , suporemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\epsilon^0 \in H_0^1(\Omega_\epsilon); \\ \exists g_\epsilon \in H^{-1}(\Omega), \text{ tal que} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_\epsilon^0 = g_\epsilon, \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ g_\epsilon \rightarrow g, \text{ fortemente em } H^{-1}(\Omega). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Assim, pelo teorema (2.1), temos

$$\tilde{u}_\epsilon^0 \rightharpoonup u^0, \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega),$$

onde  $u^0 = u^0(x)$  é a única solução de

$$\begin{cases} -\Delta u^0 + \mu u^0 = g, \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u^0 \in V. \end{cases}$$

**Teorema 5.1** *Suponhamos que as hipóteses do teorema (4.1) sejam satisfeitas e que a seqüência de dados  $u_\epsilon^0, u_\epsilon^1, f_\epsilon$  satisfaçam (5.1) e*

$$\begin{cases} \tilde{f}_\epsilon \rightarrow f, \text{ fortemente em } L^1(0, T; L^2(\Omega)), \\ \tilde{u}_\epsilon^1 \rightarrow u^1, \text{ fortemente em } L^2(\Omega). \end{cases} \quad (5.2)$$

Então,

$$E_\epsilon(t) \rightarrow E(t), \text{ fortemente em } C^0([0, T]), \quad (5.3)$$

onde  $E_\epsilon(\cdot)$  e  $E(\cdot)$  são dadas por (4.33) e (4.39), respectivamente.

*Demonstração:* Temos as seguintes identidades:

$$E_\epsilon(t) = E_\epsilon(0) + \int_0^t \int_{\Omega_\epsilon} f_\epsilon(x, s) u'_\epsilon(x, s) dx ds \quad e$$

$$E(t) = E(0) + \int_0^t \int_{\Omega} f(x, s) u'(x, s) dx ds,$$

com

$$E_\epsilon(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\epsilon} |u_\epsilon^1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\epsilon} |\nabla u_\epsilon^0|^2 dx \quad e$$

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^1|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u^0|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u^0| d\mu.$$

Pelo teorema (4.1) e pela hipótese (5.2)<sub>1</sub>, temos

$$\int_0^t \int_{\Omega_\epsilon} f_\epsilon(x, s) u'_\epsilon(x, s) dx ds \rightarrow \int_0^t \int_{\Omega} f(x, s) u'(x, s) dx ds,$$

para qualquer  $t \in [0, T]$ .



Por outro lado, das hipóteses (5.1), (5.2)<sub>2</sub> e do teorema (2.3) resulta que

$$E_\epsilon(0) \rightarrow E(0).$$

Logo,

$$E_\epsilon(t) \rightarrow E(t), \quad \text{para qualquer } t \in [0, T], \quad (5.4)$$

o que é apenas uma convergência pontual no tempo.

Para obtermos a convergência uniforme da energia, usaremos o teorema 1.2. Mostraremos, então, que a família de energias  $\{E_\epsilon(t)\}_{\epsilon>0}$  é equicontínua. Com efeito, sejam  $t \in [0, T]$  e  $h > 0$  suficientemente pequeno. Então, temos:

$$\begin{aligned} |E_\epsilon(t+h) - E_\epsilon(t)| &= \left| \int_t^{t+h} \int_{\Omega_\epsilon} f_\epsilon(x, s) u'_\epsilon(x, s) dx ds \right| \\ &\leq \int_t^{t+h} \int_{\Omega} |\tilde{f}_\epsilon(x, s)| |\tilde{u}'_\epsilon(x, s)| dx ds \\ &\leq \|\tilde{u}'_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \int_t^{t+h} \|\tilde{f}_\epsilon(s)\|_{L^2(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

Como  $\tilde{u}'_\epsilon$  é limitada em  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  e  $\tilde{f}_\epsilon \rightarrow f$ , fortemente em  $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ , temos que

$$|E_\epsilon(t+h) - E_\epsilon(t)| \rightarrow 0, \quad \text{quando } h \rightarrow 0, \quad \text{uniformemente em } \epsilon, \quad (5.5)$$

o que nos diz que a família de funções  $\{E_\epsilon(t)\}_{\epsilon>0}$  é equicontínua.

Logo, de (5.4), (5.5) e do teorema 1.2, segue-se a convergência (5.3). □

## 5.2 Resultado Auxiliar

Vamos definir, agora,

$$e_\epsilon(v)(t) = \frac{1}{2}|v'(t)|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 + \frac{1}{2}|\nabla v(t)|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2, \quad (5.6)$$

para  $v \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega_\epsilon)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega_\epsilon))$ , e

$$e(v)(t) = \frac{1}{2}|v'(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}|\nabla v(t)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}|v(t)|_{L^2(\Omega; d\mu)}^2, \quad (5.7)$$

para  $v \in C^0([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ .

Temos, então, o seguinte resultado:

**Proposição 5.1** *Suponhamos que as hipóteses do teorema (5.1) sejam satisfeitas, então*

$$e_\epsilon(u_\epsilon - w_\epsilon \varphi)(\cdot) \rightarrow e(u - \varphi)(\cdot), \quad \text{fortemente em } C^0([0, T]), \quad (5.8)$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{D}(0, T; \mathcal{D}(\Omega))$ .

*Demonstração:* Temos que

$$\begin{aligned} e_\epsilon(u_\epsilon - w_\epsilon \varphi)(t) = & e_\epsilon(u_\epsilon)(t) + e_\epsilon(w_\epsilon \varphi)(t) - \int_{\Omega} \tilde{u}'_\epsilon(x, t) w_\epsilon(x) \varphi'(x, t) dx \\ & - \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_\epsilon(x, t) \cdot \nabla (w_\epsilon(x) \varphi(x, t)) dx. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Tomando o limite em cada termo do lado direito da equação (5.9), temos

**1º termo.** Como  $e_\epsilon(u_\epsilon)(t) = E_\epsilon(t)$ , do teorema 5.1, segue que

$$e_\epsilon(u_\epsilon)(\cdot) \rightarrow e(u)(\cdot), \quad \text{fortemente em } C^0([0, T]). \quad (5.10)$$

**2º termo.** Derivando-se no tempo mostra-se que a função  $|w_\epsilon \varphi(\cdot)|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2$  é limitada em  $W^{1, \infty}(0, T) \hookrightarrow C^0([0, T])$ , pelo teorema (1.12)(iii).

Assim, usando (iii) de (2.1), obtemos que

$$|w_\epsilon \varphi'(\cdot)|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 = |w_\epsilon \varphi'(\cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow |\varphi'|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \text{fortemente em } C^0([0, T]), \quad (5.11)$$

e também que

$$\int_0^t |w_\epsilon \varphi(s)|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 ds \rightarrow \int_0^t |\varphi(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad \text{fortemente em } C^0([0, T]). \quad (5.12)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_0^t |\nabla(w_\epsilon \varphi(s))|_{[L^2(\Omega_\epsilon)]^n}^2 ds &= \int_0^t |\nabla(w_\epsilon \varphi(s))|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 ds \\ &= \int_0^t (\nabla(w_\epsilon \varphi(s)), \nabla(w_\epsilon \varphi(s))) ds \\ &= \int_0^t \langle -\operatorname{div}[\nabla(w_\epsilon \varphi(s))], w_\epsilon \varphi(s) \rangle ds \\ &= \int_0^t \langle -\operatorname{div}[\nabla w_\epsilon \varphi(s) + w_\epsilon \nabla \varphi(s)], w_\epsilon \varphi(s) \rangle ds \\ &= - \int_0^t \langle \operatorname{div}(\nabla w_\epsilon) \varphi(s) + \nabla w_\epsilon \cdot \nabla \varphi(s) + \operatorname{div}(\nabla \varphi(s)) w_\epsilon + \nabla w_\epsilon \cdot \nabla \varphi(s), w_\epsilon \varphi(s) \rangle ds \\ &= - \int_0^t \langle \Delta w_\epsilon \varphi(s) + 2\nabla w_\epsilon \cdot \nabla \varphi(s) + \Delta \varphi(s) w_\epsilon, w_\epsilon \varphi(s) \rangle ds \\ &= - \int_0^t \langle \Delta w_\epsilon \varphi(s), w_\epsilon \varphi(s) \rangle ds - 2 \int_0^t (\nabla w_\epsilon \cdot \nabla \varphi(s), w_\epsilon \varphi(s)) ds \\ &\quad - \int_0^t (\Delta \varphi(s) w_\epsilon, w_\epsilon \varphi(s)) ds \\ &= - \int_0^t \langle \Delta w_\epsilon \varphi(s), w_\epsilon \varphi(s) \rangle_\Omega ds - 2 \int_0^t \int_\Omega \nabla w_\epsilon \cdot \nabla \varphi(s) w_\epsilon \varphi(s) dx ds \\ &\quad - \int_0^t \int_\Omega \Delta \varphi(s) |w_\epsilon|^2 \varphi(s) dx ds \end{aligned}$$

Por (iii) e (iv) de (2.1), podemos tomar o limite em cada termo do lado direito, e observando que cada termo é limitado em  $W^{1,\infty}(0, T)$ , obtemos

$$- \int_0^t \int_\Omega \Delta \varphi(s) |w_\epsilon|^2 \varphi(s) dx ds \rightarrow - \int_0^t \int_\Omega \Delta \varphi(s) \varphi(s) dx ds, \quad (5.13)$$

fortemente em  $C^0([0, T])$ ;

$$- \int_0^t \int_\Omega \nabla w_\epsilon \cdot \nabla \varphi(s) w_\epsilon \varphi(s) dx ds \rightarrow 0, \quad \text{fortemente em } C^0([0, T]); \quad (5.14)$$

e

$$\begin{aligned} \langle -\Delta w_\epsilon \varphi(s), w_\epsilon \varphi(s) \rangle_\Omega &= \langle -\Delta w_\epsilon, w_\epsilon \varphi^2(s) \rangle_\Omega = \langle \mu_\epsilon - \gamma_\epsilon, w_\epsilon \varphi^2(s) \rangle_\Omega \\ &= \langle \mu_\epsilon, w_\epsilon \varphi^2(s) \rangle_\Omega \longrightarrow \langle \mu, \varphi^2(s) \rangle_\Omega, \end{aligned}$$

fortemente em  $C^0([0, T])$ .

Logo,

$$-\int_0^t \langle \Delta w_\epsilon \varphi(s), w_\epsilon \varphi(s) \rangle_\Omega ds \rightarrow -\int_0^t \langle \mu, \varphi^2(s) \rangle_\Omega ds, \quad (5.15)$$

fortemente em  $C^0([0, T])$ .

Combinando (5.11) e (5.15), obtemos que

$$e_\epsilon(w_\epsilon \varphi(\cdot)) \rightarrow e(\varphi)(\cdot), \quad \text{fortemente em } C^0([0, T]). \quad (5.16)$$

**3º termo.** Notemos que, de (4.32), temos

$$\int_\Omega \tilde{u}'_\epsilon(x, \cdot) \psi(x) dx \rightarrow \int_\Omega u'(x, \cdot) \psi(x) dx, \quad \text{fortemente em } C^0([0, T]), \quad \forall \psi \in L^\infty(\Omega),$$

assim, como

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_\Omega \tilde{u}'_\epsilon(x, t) (w_\epsilon(x) - 1) \psi(x) dx \right| \leq \|\tilde{u}'_\epsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \|w_\epsilon - 1\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0,$$

por (iii) de (2.1), e assim

$$\int_\Omega \tilde{u}'_\epsilon(x, t) w_\epsilon(x) \psi(x) dx \rightarrow \int_\Omega u'(x, t) \psi(x) dx, \quad \text{fortemente em } C^0([0, T]). \quad (5.17)$$

Aproximando  $\varphi'(x, t)$  em  $C^0([0, T]; L^2(\Omega))$  por funções da forma  $\sum_{i=1}^n \eta_i(t) \psi_i(x)$ , onde  $\eta_i$  são funções contínuas sobre  $[0, T]$  e as  $\psi_i$  pertencem a  $L^\infty(\Omega)$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,

deduzimos, de (5.17) e por (i) de (2.1), que

$$\int_{\Omega} \tilde{u}'_{\epsilon}(x, t) w_{\epsilon}(x) \varphi'(x, t) dx \rightarrow \int_{\Omega} u'(x, t) \varphi'(x, t) dx, \quad \text{fortemente em } C^0([0, T]). \quad (5.18)$$

**4º termo.** Observemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_{\epsilon}(x, s) \cdot \nabla (w_{\epsilon}(x) \varphi(x, s)) dx &= \langle -\Delta w_{\epsilon}, \tilde{u}_{\epsilon}(t) \varphi(t) \rangle_{\Omega} \\ &- 2 \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, t) \nabla w_{\epsilon}(x) \cdot \nabla \varphi(x, t) dx - \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, t) w_{\epsilon}(x) \Delta \varphi(x, t) dx. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Consideremos a função

$$t \mapsto -2 \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, t) \nabla w_{\epsilon}(x) \cdot \nabla \varphi(x, t) dx - \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, t) w_{\epsilon}(x) \Delta \varphi(x, t) dx.$$

Agora, do teorema (4.1), temos que  $\tilde{u}_{\epsilon}$  é limitada em  $W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ , logo a função é limitada em  $W^{1, \infty}(0, T)$  e é relativamente compacta em  $C^0([0, T])$ .

Com isso,

$$\begin{aligned} &-2 \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, t) \nabla w_{\epsilon}(x) \cdot \nabla \varphi(x, t) dx - \int_{\Omega} \tilde{u}_{\epsilon}(x, t) w_{\epsilon}(x) \Delta \varphi(x, t) dx \\ &\quad \longrightarrow - \int_{\Omega} u(x, t) \Delta \varphi(x, t) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \cdot \nabla \varphi(x, t) dx, \end{aligned} \quad (5.20)$$

fortemente em  $C^0([0, T])$ .

Analisemos, agora, o termo  $\langle -\Delta w_{\epsilon}, \tilde{u}_{\epsilon}(t) \varphi(t) \rangle_{\Omega}$ .

Como,  $\tilde{u}_{\epsilon} = 0$  em  $S_{\epsilon}$ , segue que

$$\langle -\Delta w_{\epsilon}, \tilde{u}_{\epsilon}(t) \varphi(t) \rangle_{\Omega} = \langle \mu_{\epsilon}, \tilde{u}_{\epsilon}(t) \varphi(t) \rangle_{\Omega}.$$

Mas, como  $\mu \in H^{-1}(\Omega)$ , e  $\overline{L^2(\Omega)} = H^{-1}(\Omega)$  existe uma sequência  $\nu_k$  em  $L^2(\Omega)$  tal que

$$\|\nu_{\epsilon} - \mu\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{1}{k}. \quad (5.21)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\langle -\Delta w_\epsilon, \tilde{u}_\epsilon \varphi \rangle_\Omega - \langle \mu, u \varphi \rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)} &\leq \|\langle \mu_\epsilon - \mu, \tilde{u}_\epsilon \varphi \rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)} \\
&+ \|\langle \mu - \nu_k, \varphi(\tilde{u}_\epsilon - u) \rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)} \\
&+ \|\langle \nu_k, \varphi(\tilde{u}_\epsilon - u) \rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Por (iv) de (2.1) e por (4.2), temos

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\langle \mu_\epsilon - \mu, \tilde{u}_\epsilon \varphi \rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)} &\leq \\
&\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \|\tilde{u}_\epsilon \varphi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \|\mu_\epsilon - \mu\|_{H^{-1}(\Omega)} \right) = 0,
\end{aligned}$$

e, de (5.21), temos

$$\begin{aligned}
\|\langle \mu - \nu_k, \varphi(\tilde{u}_\epsilon - u) \rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)} &\leq \\
&\leq \|\varphi(\tilde{u}_\epsilon - u)\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \|\mu - \nu_k\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{\epsilon}{k}.
\end{aligned}$$

Além disso, de (4.2) e da proposição (2.1), temos que

$$\tilde{u}_\epsilon \rightarrow u, \text{ fortemente em } C^0([0, T], L^2(\Omega)), \text{ e}$$

portanto, para  $k$  fixado,

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\langle \nu_k, \varphi(\tilde{u}_\epsilon - u) \rangle_\Omega\|_{L^\infty(0,T)} &\leq \\
&\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \|\nu_k\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \|\tilde{u}_\epsilon - u\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{5.23}$$

De (5.22) e (5.23), segue que

$$\langle -\Delta w_\epsilon, \tilde{u}_\epsilon \varphi \rangle_\Omega \rightarrow \langle \mu, u \varphi \rangle_\Omega, \text{ fortemente em } C^0([0, T]).$$

Assim,

$$\int_\Omega \nabla \tilde{u}_\epsilon(x, t) \cdot \nabla w_\epsilon(x) \varphi(x, t) dx \rightarrow \int_\Omega \nabla u(x, t) \cdot \nabla \varphi(x, t) dx + \langle \mu, u \varphi \rangle_\Omega, \tag{5.24}$$

fortemente, em  $C^0([0, T])$ .

Portanto, por (5.10), (5.15), (5.18) e (5.24), segue que

$$e_\epsilon(u_\epsilon - w_\epsilon \varphi)(\cdot) \longrightarrow e(u - \varphi)(\cdot), \text{ fortemente em } C^0([0, T]), \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T; \mathcal{D}(\Omega)).$$

□

### 5.3 Corretor para a Equação da Onda

Nesta seção apresentaremos o resultado de correção para a equação da onda, em um domínio com pequenos buracos. Para isto usaremos a convergência forte da energia, demonstrada na seção 5.1 e o resultado auxiliar visto na seção 5.2.

**Teorema 5.2** *Suponhamos que as hipóteses do teorema (5.1) sejam satisfeitas. Se  $u$  denota a única solução do problema homogeneizado (4.3), então a seqüência de soluções  $\{u_\epsilon\}_{\epsilon>0}$  do problema (3.1) satisfaz:*

$$\tilde{u}'_\epsilon \rightarrow u', \text{ fortemente em } C^0([0, T]; L^2(\Omega)), \quad (5.25)$$

$$\tilde{u}_\epsilon = w_\epsilon u + r_\epsilon, \text{ com} \quad (5.26)$$

$$r_\epsilon \rightarrow 0, \text{ fortemente em } C^0([0, T]; W_0^{1,1}(\Omega)). \quad (5.27)$$

Além disso, se  $u \in C^0(\bar{\Omega} \times [0, T])$ , então

$$r_\epsilon \rightarrow 0, \text{ fortemente em } C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)). \quad (5.28)$$

Antes da demonstração do teorema 5.2, faremos a seguinte observação:

**Observação 5.1** *Se  $u \in \mathcal{D}(Q)$ , o teorema 5.2 é uma consequência direta da proposição 5.1. De fato, (5.26), e (5.28) seguem imediatamente de (5.8) e (5.25) é também uma*

conseqüência de (5.8), observando que

$$u'_\epsilon - u' = u'_\epsilon - w_\epsilon u' + (w_\epsilon - 1)u'.$$

Mas, se  $u$  não pertence a  $\mathcal{D}(Q)$ , o teorema 5.2 não pode ser obtido tão facilmente. Nesse caso, a solução  $u$  deverá ser aproximada por uma seqüência de funções regulares  $\varphi$  para deduzirmos (5.25), (5.26) e (5.27) de (5.8). É o que faremos na demonstração abaixo.

*Demonstração:* (do teorema 5.2) Pelo teorema 4.1, temos que

$$u \in C^0([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Seja  $(\varphi_k)$  uma seqüência em  $\mathcal{D}(Q)$  tal que

$$\varphi_k \rightarrow u, \text{ em } C^0([0, T]; V) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)), \quad (5.29)$$

quando  $k \rightarrow \infty$ .

Pela proposição (5.1), temos

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \|(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k)'\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right\} &\leq \\ &\leq 2\|e(u - \varphi_k)\|_{L^\infty(0, T)}, \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \|(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k)'\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \right. \\ \left. + \|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$



Notemos que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}'_\epsilon - u'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &= \|\tilde{u}'_\epsilon + w_\epsilon \varphi'_k - w_\epsilon \varphi'_k + \varphi'_k - \varphi'_k - u'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\leq \|\tilde{u}'_\epsilon - w_\epsilon \varphi'_k\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\varphi'_k(w_\epsilon - 1)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\quad + \|\varphi'_k - u'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Por (5.29), (5.30), (5.31) e (2.1), deduzimos que

$$\tilde{u}'_\epsilon \rightarrow u', \text{ fortemente em } C^0([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Logo, (5.25) está demonstrada.

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
&\|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon u)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} = \\
&= \|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon u) - \nabla(w_\epsilon \varphi_k) + \nabla(w_\epsilon \varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \\
&= \|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k) + \nabla(w_\epsilon(\varphi_k - u))\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \\
&\leq \|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|\nabla(w_\epsilon(\varphi_k - u))\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \\
&\leq C\|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla w_\epsilon(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \\
&\quad + \|w_\epsilon \nabla(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \\
&\leq C\|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon \varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + C\|\nabla w_\epsilon\|_{[L^2(\Omega)]^N} \cdot \|\varphi_k - u\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \\
&\quad + C\|w_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\varphi_k - u\|_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Assim, combinando (2.1), (5.29), (5.30) e (5.32), segue que

$$\nabla r_\epsilon = \nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon u) \rightarrow 0, \text{ fortemente, em } \mathbb{C}^0([0, T]; [L^1(\Omega)]^n).$$

o que demonstra (5.27).

Consideremos, agora, o caso em que  $u \in C^0(\overline{\Omega} \times [0, T])$ . Neste caso, a seqüência  $(\varphi_k)$  pode ser escolhida de maneira que satisfaça, além de (5.29), a seguinte hipótese

$$\varphi_k \rightarrow u, \text{ fortemente, em } C^0(\overline{\Omega} \times [0, T]).$$

Com isso, podemos estimar  $\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon u)$  em  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$  e não apenas em  $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ , como fizemos em (5.32). Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} \|\nabla(w_\epsilon(\varphi_k - u))\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} &\leq \\ &\leq \|\nabla w_\epsilon(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} + \|w_\epsilon \nabla(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \\ &\leq C \|\nabla w_\epsilon\|_{[L^2(\Omega)]^N} \cdot \|\varphi_k - u\|_{C^0(\overline{\Omega} \times [0, T])} + C \|w_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \cdot \|\varphi_k - u\|_{L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))}. \end{aligned}$$

Analogamente a (5.32), isso nos dá

$$\nabla r_\epsilon = \nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon u) \rightarrow 0, \text{ fortemente, em } C^0([0, T]; [L^2(\Omega)]^n),$$

o que demonstra (5.28).

□

# Capítulo 6

## O Caso dos Buracos Menores que o Tamanho Crítico

Neste capítulo estudaremos o caso particular onde os buracos são menores que o tamanho crítico. Neste caso, a sequência  $w_\epsilon$ , do quadro de hipóteses (2.1), converge fortemente em  $H^1(\Omega)$ , o que resulta  $\mu = 0$ . Os resultados de homogenização e correção, apresentados nos capítulos 4 e 5, continuam válidos neste caso, podendo ser melhorado o resultado de correção, substituindo-se  $w_\epsilon$  por 1, e assim a convergência forte dos dados agora implicará na convergência forte das soluções.

Admitiremos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Existe uma seqüência de funções testes } w_\epsilon \text{ que satisfaz} \\ (i) \quad w_\epsilon \in H^1(\Omega), \quad \|w_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_0 \\ (ii) \quad w_\epsilon = 0 \text{ em } S_\epsilon \\ (iii) \quad w_\epsilon \rightarrow 1, \text{ fortemente em } H^1(\Omega). \end{array} \right. \quad (6.1)$$

**Observação 6.1** *Notemos que a hipótese principal não é feita diretamente sobre a forma e o tamanho dos buracos, mas em termos da família de funções testes  $w_\epsilon$ . As hipóteses (6.1) dizem que o tamanho dos buracos  $r_\epsilon$  é menor que o tamanho crítico dado em (2.4), ou seja,  $r_\epsilon$  é tomado satisfazendo*

$$\begin{cases} \epsilon^2 \log r_\epsilon \rightarrow -\infty, & \text{se } n = 2 \\ \frac{\epsilon^{n/(n-2)}}{r_\epsilon} \rightarrow +\infty, & \text{se } n \geq 3. \end{cases} \quad (6.2)$$

A principal diferença entre as hipóteses (2.1) e (6.1) é que, em (iii) de (6.1), admitimos a convergência forte de  $w_\epsilon$ . Neste caso, a hipótese (iv) de (2.1) é claramente satisfeita com  $\gamma_\epsilon = 0$ ,  $\mu_\epsilon = -\Delta w_\epsilon$  e  $\mu = 0$ .

Notemos, também, que se admitirmos que (2.1) é satisfeita com  $\mu = 0$ , o uso de  $v_\epsilon = \varphi w_\epsilon$  com  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  em (iv) de (2.1), implica que

$$w_\epsilon \rightarrow 1, \text{ fortemente em } H_{Loc}^1(\Omega),$$

isto nos diz que a condição  $\mu = 0$  em (2.1) pode ser entendida como uma “versão local” de (6.1), onde  $H^1(\Omega)$  é substituída por  $H_{Loc}^1(\Omega)$ .

**Exemplo 6.1** Um exemplo em que o quadro de hipóteses (6.1) é satisfeito, se dá quando  $\Omega$  é periodicamente perfurado por buracos  $S_\epsilon$  da forma  $S$  dada no exemplo (2.1) e tamanho como em (6.2) (ver observação (2.2)).

Outro exemplo que satisfaz (6.1) é o caso onde  $S_\epsilon$  é a união de um número finito  $N$  (fixo) de buracos que se dissipam, ou seja,

$$S_\epsilon = \bigcup_{i=1}^N S_i^\epsilon,$$

com  $S_i^\epsilon$  conjuntos fechados tais que  $S_i^\epsilon \subset K$  para algum  $K$  tal que  $\overline{K} \subset \Omega$  e

$$\text{diam}(S_i^\epsilon) \rightarrow 0, \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

**Teorema 6.1** Suponhamos que o quadro de hipóteses (6.1) seja satisfeito e consideremos uma seqüência de dados que satisfazem (4.1). Então, a seqüência  $u_\epsilon$  de soluções de (3.1) satisfaz:

$$\begin{cases} \tilde{u}_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u, & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\ \tilde{u}'_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u', & \text{fraco-estrela em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \tilde{u}_\epsilon(t) \rightharpoonup u(t), & \text{fracamente em } H_0^1(\Omega) \\ \tilde{u}'_\epsilon \rightharpoonup u'(t), & \text{fracamente em } L^2(\Omega), \end{cases}$$

para todo  $t \in [0, T]$ , onde o limite  $u$  é a única solução de:

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = f, & \text{em } Q = \Omega \times (0, T) \\ u = 0, & \text{em } \Sigma = \partial\Omega \times (0, T) \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, & \text{em } \Omega \\ u \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (6.3)$$

Além disso, se os dados satisfazem

$$\begin{cases} \tilde{f}_\epsilon \rightarrow f, & \text{fortemente em } L^1(0, T; L^2(\Omega)) \\ \tilde{u}_\epsilon^0 \rightarrow u^0, & \text{fortemente em } H_0^1(\Omega), \\ \tilde{u}_\epsilon^1 \rightarrow u^1, & \text{fortemente em } L^2(\Omega), \end{cases} \quad (6.4)$$

então,

$$\begin{cases} \tilde{u}_\epsilon \rightarrow u, & \text{fortemente em } C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) \\ \tilde{u}'_\epsilon \rightarrow u', & \text{fortemente em } C^0([0, T]; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (6.5)$$

**Observação 6.2** Notemos que a substituição da hipótese (2.1) pela hipótese (6.1) implica que a condição (6.4) equivale à hipótese do teorema (5.1). [ Com efeito, quando (5.1) e (6.1) são satisfeitas, o teorema (2.1) nos dá a convergência forte de  $\tilde{u}_\epsilon^0$  para  $u^0$ , em  $H_0^1(\Omega)$ , pois  $\mu = 0$  em (2.10). Reciprocamente,  $g_\epsilon = -\Delta \tilde{u}_\epsilon^\epsilon$  e  $g = -\Delta u^0$  claramente satisfazem (5.1)].

*Demonstração:* ( do teorema (6.1)) A demonstração da primeira parte do teorema (6.1) (passagem ao limite em (3.1)) é uma mera reformulação dos teoremas (4.1) e

(4.2). Por outro lado, as hipóteses em (5.3) implicam que as hipóteses do teorema (5.2) sobre os dados  $u_\epsilon^0$ ,  $u_\epsilon^1$  e  $f_\epsilon$  são satisfeitas, então (6.5)<sub>2</sub> é dada por (5.25).

Para demonstrarmos (6.5)<sub>1</sub>, procederemos como na demonstração do teorema (5.2). Seja  $\varphi_k \in \mathcal{D}(Q)$  uma seqüência satisfazendo (5.29).

Assim, temos

$$\begin{aligned} \|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - u)\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)} &\leq \|\nabla(\tilde{u}_\epsilon - w_\epsilon\varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\quad + \|\nabla((1 - w_\epsilon)\varphi_k)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\quad + \|\nabla(\varphi_k - u)\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Raciocinando como na demonstração do teorema (5.2), e usando agora a convergência forte de  $w_\epsilon$  para 1, em  $H^1(\Omega)$ , no segundo termo após a desigualdade (6.6) ( esta é a novidade importante aqui), obtemos facilmente (6.5)<sub>1</sub>.

□

# Apêndice

Neste apêndice apresentaremos a definição e enunciaremos alguns resultados sobre medidas de Radon e provaremos a densidade de  $\mathcal{D}(\Omega)$  no espaço  $V$ , definido em (2.8).

## A.1 Medidas de Radon (ou medidas de ordem zero)

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , aberto e  $K$  um subconjunto compacto de  $\Omega$ . O espaço

$$C_c(\Omega) = \{\varphi \in C(\Omega) : \text{supp } \varphi \subseteq K\},$$

munido da norma

$$\|\varphi\|_K = \max \{|\varphi(t)| : t \in K\},$$

é um espaço de Banach.

**Definição A.1** *Seja  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência em  $C_c(\Omega)$ , escreveremos  $\varphi_n \rightarrow 0$  se, e somente se, existir um subconjunto compacto  $K \subset \Omega$ , tal que*

(i)  $\text{supp } \varphi_n \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$ ,

(ii)  $\varphi_n \rightarrow 0$ , uniformemente em  $\Omega$ .

*Dizemos, então, que  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge para zero, em (ou no sentido de)  $C_c(\Omega)$ .*

**Definição A.2** *Uma medida de Radon real  $\mu$ , em  $\Omega$ , é uma forma linear em  $C_c(\Omega)$ , que é contínua no sentido em que  $\{\varphi_n\}_n \subset C_c(\Omega)$  e  $\varphi_n \rightarrow 0$ , juntos, implicam  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\varphi_n) = 0$ .*

Analogamente define-se medida de Radon complexa.

**Proposição A.1** *Uma forma linear  $\mu$  em  $C_c(\Omega)$  é uma medida de Radon, se, e somente se, para todo conjunto  $k \subset \Omega$ , existir  $m_k > 0$  tal que*

$$\|\mu(\varphi)\| \leq m_k \|\varphi\|_K, \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega),$$

*com  $\text{supp } f$  contido em  $K$ .*

**Definição A.3** *Uma medida de Radon real  $\mu$ , em  $\Omega$ , é positiva no seguinte sentido: para toda  $\varphi \in C_c(\Omega)$ , com  $\varphi(x) \geq 0$ , para todo  $x \in \Omega$ ,*

$$\int_{\Omega} \varphi(x) d\mu(x) \geq 0.$$

*Nesse caso*

$$\mu(\varphi) = \sup\{\mu(\psi) : \psi \in C_{c+}(\Omega), \psi \leq \varphi\},$$

*para cada  $\varphi$  em  $C_{c+}(\Omega)$ , conjunto das funções positivas em  $C_c(\Omega)$ .*

**Exemplo A.1** *São exemplos de medidas de Radon: medida de Lebesgue, medida atômica, densidades, medida de Lebesgue-Stieltjes.*

## A.2 Um Resultado de Densidade

**Teorema A.1** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , aberto e limitado. Consideremos  $\mu \in H^{-1}(\Omega)$  uma medida de Radon finita e positiva sobre  $\Omega$ . Então  $\mathcal{D}(\Omega)$  é denso em  $V = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega; d\mu)$ .*

*Demonstração:* Dividiremos a demonstração em três etapas:



### 1ª etapa - Densidade de $V \cap L^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega; d\mu)$ em $V$

Sejam  $v \in V$  e  $r \geq 0$ . Definamos

$$T_r v = \begin{cases} r, & \text{se } v \geq r \\ v, & \text{se } |v| \leq r \\ -r, & \text{se } v \leq -r. \end{cases}$$

Temos que  $T_r v \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,  $\forall r \geq 0$  e que

$$T_r v \rightarrow v, \text{ fortemente em } H_0^1(\Omega), \text{ quando } r \rightarrow \infty.$$

Também,  $|T_r(x)| \leq r$ ,  $\forall x \in \Omega$ , exceto sobre um conjunto de capacidade zero.

Sendo  $\mu$  uma medida de Radon pertencente a  $H^{-1}(\Omega)$ , e como todo conjunto de capacidade zero é  $\mu$ -medida zero, temos que  $|T_r v(x)| \leq r$ ,  $\forall x \in \Omega$ , exceto sobre um conjunto de medida zero.

Logo,  $T_r v \in L^\infty(\Omega; d\mu) \subset L^2(\Omega; d\mu)$ . Com isso,  $T_r v \in V$ .

Da convergência forte de  $T_r v$  para  $v$ , em  $H_0^1(\Omega)$ , existe uma subsequência, ainda denotada pelo mesmo símbolo, tal que  $T_r v(x) \rightarrow v(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$ , exceto sobre um conjunto de capacidade zero.

Assim,  $T_r v(x) \rightarrow v(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$ , exceto sobre um conjunto de  $\mu$ -medida zero.

Aplicando o teorema de Lebesgue, temos  $T_r v \rightarrow v$ , fortemente em  $L^2(\Omega; d\mu)$ , quando  $r \rightarrow \infty$ .

Portanto,  $V \cap L^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega; d\mu)$  é denso em  $V$ .

### 2ª etapa - Densidade de $V \cap C_c^0(\Omega)$ em $V$

Consideremos  $v \in V \cap L^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega; d\mu)$  e  $v_r$  uma seqüência tal que

$$\begin{cases} v_r \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ para cada } r \text{ fixo,} \\ v_r \rightarrow v, \text{ fortemente em } H_0^1(\Omega), \text{ se } r \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Seja  $M = \|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \|v\|_{L^\infty(\Omega; d\mu)}$  e consideremos a seqüência  $w_r = T_{M+1}v_r$ . Temos que  $w_r \in C_c^0(\Omega)$ .

Sendo a aplicação  $T_{M+1} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ , contínua, segue que

$$w_r = T_{M+1}v_r \rightarrow T_{M+1}v = v, \text{ fortemente em } H_0^1(\Omega), \text{ se } r \rightarrow \infty.$$

Para uma subseqüência adequada, temos que  $w_r(x) \rightarrow v(x)$ ,  $\forall x \in \Omega$ , exceto sobre um conjunto de  $\mu$  - medida zero.

Como  $|w_r(x)| \leq M+1$ , exceto sobre um conjunto de  $\mu$  - medida zero, pelo teorema de *Lebesgue*,  $w_r \rightarrow v$ , fortemente em  $L^2(\Omega; d\mu)$ , se  $r \rightarrow \infty$ .

Logo, para  $v \in V \cap L^\infty(\Omega) \cap L^\infty(\Omega; d\mu)$ , temos

$$\begin{cases} w_r \in V \cap C_c^0(\Omega) \\ w_r \rightarrow v, \text{ fortemente em } V, \text{ quando } r \rightarrow \infty, \end{cases}$$

usando a 1ª etapa, segue que  $V \cap C_c^0(\Omega)$  é denso em  $V$ .

### 3ª etapa - Aproximação de funções de $V \cap C_c^0(\Omega)$ por funções de $\mathcal{D}(\Omega)$

Seja  $v \in V \cap C_c^0(\Omega)$  e definamos  $v_\epsilon = \rho * v$ , com  $\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \rho(\frac{x}{\epsilon})$ , onde  $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  é uma função não-negativa com suporte compacto contido na bola unitária do  $\mathbb{R}^n$  e satisfaz  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1$ .

Temos que, para  $\epsilon > 0$ , suficientemente pequeno,  $v_\epsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Também,

$$v_\epsilon \rightarrow v, \text{ fortemente em } H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

Sendo  $\mu$  uma medida de *Radon* finita, temos  $C(\overline{\Omega}) \hookrightarrow L^2(\Omega; d\mu)$ .

Logo,

$$v_\epsilon \rightarrow v, \text{ fortemente em } L^2(\Omega; d\mu), \text{ quando } \epsilon \rightarrow 0.$$

□

# Referências Bibliográficas

- [1] Brahim,S.-Otsmane; Francfort, G. A. and Murat, F. - Correctors for the homogenization of the wave and heat equations, *J. Math. Pures et Appl.* **71:3**, p. 197-231, (1992).
- [2] Brézis, H. - Análisis funcional, Teoría y aplicaciones. Alianza Editorial, S.A., Madrid, (1984).
- [3] Brézis, H.; Browder, F.E. - Some properties of higher order Sobolev spaces, *J. Math. Pures et Appl.* **61**, p. 242-259, (1982.)
- [4] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N. - Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev, **Vol I e II**, DMA/UEM, Maringá - (2000).
- [5] Cavalcanti, M. M.; Domingos Cavalcanti, V. N.; Soriano, J. A. and Souza, J. S. - Homogenization and uniform stabilization for a nonlinear hyperbolic equation in domains with holes of small capacity, *Electronic Journal of Differential Equation*, USA, v. 2004,**55**, p. 1-19, (2004).
- [6] Cioranescu, D.; Donato, P. - Exact internal controllability in perforated domains *J. Math. Pures et Appl.* **68**, p. 185-213, (1989).
- [7] Cioranescu, D.; Donato, P.; Murat, F.; Zuazua, E. - Homogenization and correctors for the wave equation in domains with small holes, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **18**, p. 251-293, (1991).

- [8] Cioranescu, D.; Donato, P.; Zuazua, E. - Exact boundary controllability for the wave equation in domains with small holes, *J. Math. Pures et Appl.*, **71**, p. 343-377, (1992).
- [9] Cioranescu, D.; Murat, F. - Un terme étrange venu d'ailleurs. Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications (H. Brézis and J. L. Lions, eds), *Collège de France Seminar*, **vol. II e III**, *Research Notes in Mathematics*, **vol. 60 e 70**, p. 93-138 e 154-178, (1982).
- [10] Diestel, J.; Uhl, J.J. - Vector Measures. Mathematical Surveys, **15**, American Mathematical Society, Providence, (1977).
- [11] Edwards, R.E. - Functional analysis: theory and applications. Dover Publications, INC. New York, (1995).
- [12] Lima, E.L. -Curso de análise vol. 1, IMPA, CNPq, Projeto Euclides, (1992)
- [13] Kacimi, H. - Homogénéisation de problèmes de Dirichlet avec des petitstrous  
Thèse de 3ème cycle, Université Paris VI, (1987).
- [14] Kacimi, H.; Murat, F. - Estimation de l'erreur dans des problèmes de Dirichlet où apparaît un terme étrange, Partial Differential Equations and the Calculus of Variations (F. Colombini, A. Marino, L. Modica and S. Spagnolo), vol.II, Essays in Honor of Ennio de Giorgi, Birkhäuser, Boston, p. 612-693, (1989).
- [15] Lesmes, J.- Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais - Conselho Nacional de Pesquisas - Instituto de Matemática Pura e Aplicada - Rio de Janeiro.
- [16] Lions, J.L. - Asymptotic expansions in perforated media with a periodic structure, *Rocky Mountain Journal of Mathematics* **10:1**, 125-140, (1980).
- [17] Lions, J.L. - Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles. Press de l'Université de Montreal, Montreal, (1965).

- [18] Lions, J.L.; Magenes, E. - Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1, Dunod, Paris, (1968).
- [19] Medeiros, L.A. - Exact controllability for the wave equations - HUM. 37<sup>o</sup> Seminário Brasileiro de Análise, Maio, (1993).
- [20] Medeiros, L.A.; Miranda, M.M. - Iniciação aos espaços de Sobolev e às equações diferenciais parciais. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1989).
- [21] Medeiros, L.A.; Mello, E.A. - Teoria da integração. IM - UFRJ, Rio de Janeiro, (1979).
- [22] Medeiros, L.A.; Rivera P.H. - Iniciação aos espaços de Sobolev. IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1977).
- [23] Medeiros, L.A.; Rivera P.H. - Espaços de Sobolev e equações diferenciais parciais - Textos de métodos matemáticos. . IM-UFRJ, Rio de Janeiro, (1975).
- [24] Rivera, J.E.M. - Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais. Série: textos avançados, LNCC, Petrópolis, Rio de Janeiro, (1999).
- [25] Simon, J. - Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$ , *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, **146 IV**, p. 65-96, (1987).
- [26] Souza, J.S. - Homogenization of the heat equation in open sets perforated with tiny holes, *Computational and applied Mathematics*, Rio de Janeiro, Brasil, **21**, n<sup>o</sup> **2**, p. 461-484, (2002).
- [27] Souza, J.S.; Kist, C.; Cavalcanti, M. - Homogenization for a nonlinear parabolic equation in domains with small holes, 54<sup>o</sup> *Seminário Brasileiro de Análise* - IBIILCE-UNESP, São José do Rio Preto, p. 515-530, (2001).
- [28] Tartar, L. - Cours Peccot au Collège de France mar (1977), partially written in: F. Murat, *H-Convergence*, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique de l'Université d'Alger, duplicated, p. 34, (1978).

# Livros Grátis

( <http://www.livrosgratis.com.br> )

Milhares de Livros para Download:

[Baixar livros de Administração](#)

[Baixar livros de Agronomia](#)

[Baixar livros de Arquitetura](#)

[Baixar livros de Artes](#)

[Baixar livros de Astronomia](#)

[Baixar livros de Biologia Geral](#)

[Baixar livros de Ciência da Computação](#)

[Baixar livros de Ciência da Informação](#)

[Baixar livros de Ciência Política](#)

[Baixar livros de Ciências da Saúde](#)

[Baixar livros de Comunicação](#)

[Baixar livros do Conselho Nacional de Educação - CNE](#)

[Baixar livros de Defesa civil](#)

[Baixar livros de Direito](#)

[Baixar livros de Direitos humanos](#)

[Baixar livros de Economia](#)

[Baixar livros de Economia Doméstica](#)

[Baixar livros de Educação](#)

[Baixar livros de Educação - Trânsito](#)

[Baixar livros de Educação Física](#)

[Baixar livros de Engenharia Aeroespacial](#)

[Baixar livros de Farmácia](#)

[Baixar livros de Filosofia](#)

[Baixar livros de Física](#)

[Baixar livros de Geociências](#)

[Baixar livros de Geografia](#)

[Baixar livros de História](#)

[Baixar livros de Línguas](#)

[Baixar livros de Literatura](#)  
[Baixar livros de Literatura de Cordel](#)  
[Baixar livros de Literatura Infantil](#)  
[Baixar livros de Matemática](#)  
[Baixar livros de Medicina](#)  
[Baixar livros de Medicina Veterinária](#)  
[Baixar livros de Meio Ambiente](#)  
[Baixar livros de Meteorologia](#)  
[Baixar Monografias e TCC](#)  
[Baixar livros Multidisciplinar](#)  
[Baixar livros de Música](#)  
[Baixar livros de Psicologia](#)  
[Baixar livros de Química](#)  
[Baixar livros de Saúde Coletiva](#)  
[Baixar livros de Serviço Social](#)  
[Baixar livros de Sociologia](#)  
[Baixar livros de Teologia](#)  
[Baixar livros de Trabalho](#)  
[Baixar livros de Turismo](#)