LUZIA APARECIDA PALARO

A CONCEPÇÃO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE HENRI LEBESGUE

DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PUC/SP
São Paulo
2006

LUZIA APARECIDA PALARO

A CONCEPÇÃO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE HENRI LEBESGUE

Tese apresentada à Banca Examinadora da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, como exigência parcial para obtenção do Título de Doutor em Educação Matemática, sob a orientação do **Prof. Dr. Michael Otte** e co-orientação da **Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori**.

PUC/SP
São Paulo
2006

Banca Examinadora

Autorizo, exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta Tese por processos de fotocopiadoras ou eletrônicos.

Assinatura

Local e Data

“Não sei o que o mundo pode pensar de mim; mas eu mesmo me considero tão-somente um menino que, brincando na areia da praia, se diverte ao encontrar um seixo arredondado ou uma concha mais bonita que as comuns, enquanto o grande oceano da verdade jaz indecifrável ante meus olhos”

Isaac Newton (1642-1727)

A minha mãe Elvira, pelo incentivo e apoio em toda minha trajetória de vida.

A meu esposo, Antonio Vieira, pelo apoio e compreensão de minhas ausências neste período de estudos.

A minha querida sobrinha Bruna, por quem me sinto tão responsável.

A Ailson, meu irmão e Lú, minha cunhada, pelos exemplos de garra à vida, que nos têm transmitido dia após dia.

A G R A D E C I M E N T O S

Em especial

*Ao Professor Doutor **Michael Otte**, orientador desta pesquisa, pela grande amizade, paciência, incentivo, orientação imprescindível em meu saber acadêmico, além das valiosas lições de vida ...*

*À Professora Doutora **Sonia Barbosa Camargo Igliori**, co-orientadora deste trabalho, pelo empenho na consolidação do Projeto de Qualificação Inter-institucional (PQI) entre PUC-SP e UFMT, que me proporcionou as condições necessárias para estudar na PUC-SP e poder tornar realidade o desenvolvimento desta pesquisa.*

*Aos Professores Doutores **Benedito Antonio da Silva**, **Vincenzo Bongiovanni** e **Marcos Vieira Teixeira**, pelas sugestões e comentários pertinentes apresentados no Exame de Qualificação que muito contribuíram para a evolução deste trabalho;*

*À **Coordenação** e aos **Professores do Programa de Estudos de Pós-Graduados em Educação Matemática** da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, pelo apoio, atenção e contribuições em vários momentos do desenvolvimento desta pesquisa;*

À ***CAPES****, pela bolsa de estudos concedida, sem a qual seria difícil a realização desta investigação;*

À Professora Doutora ***Zara Issa Abud*** *(do Departamento de Matemática da USP), pelo acolhimento que me ofereceu durante as aulas sobre a Teoria da Medida e Integral de Lesbesgue;*

Aos ***Professores do Departamento de Matemática ICET/UFMT/Cuiabá****, pela compreensão, presteza, amizade, incentivo e apoio que demonstraram de forma constante durante a realização desta pesquisa;*

A meus ***colegas e amigos de curso****, em especial,* ***Cecília****, pela amizade e companheirismo nesta caminhada;*

A meus ***pais****,* ***irmãos****,* ***cunhadas****,* ***sobrinhas*** *e* ***esposo****, por compreenderem o motivo de minha ausência em tantas reuniões de família e outros momentos importantes;*

Ao ***Lar Nossa Senhora da Consolação*** *que me acolheu com tanto carinho, em um período importante ao desenvolvimento deste trabalho;*

Às amigas de pensionato ***Raimunda****,* ***Luzinete****,* ***Joana****,* ***Andréia*** *e especialmente,* ***Hariete****, pelo carinho e dedicação que sempre me dispensaram, neste período;*

Ao ***Francisco Olímpio da Silva****, grande amigo que me mostrou o exemplo do verdadeiro acolhimento;*

A ***todos aqueles*** *que contribuíram direta ou indiretamente para que este trabalho se tornasse realidade.*

Meu carinho

A Autora

RESUMO

O objetivo geral deste trabalho foi levantar os aspectos caracterizadores da concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue (1875-1941), que além de ter sido um dos mais eminentes matemáticos do século XX – pois revolucionou a Análise Matemática com a criação de uma nova teoria da medida e, fundamentado nesta, uma nova definição de integral –, foi também um professor extremamente dedicado e que se preocupava com a formação de professores e, muito contribuiu para os assuntos didáticos, históricos e filosóficos da Matemática. A metodologia do estudo baseou-se em uma pesquisa de caráter bibliográfico, sob a abordagem histórico-descritiva; iniciando-se com uma breve apresentação da vida e das obras de Lebesgue. Em seguida, foram apresentadas uma contextualização histórico-filosófica da Matemática de sua época e a filosofia da Matemática que propagava. Buscando realçar a originalidade de Lebesgue, pela sua forma de fazer Matemática, foi apresentado um estudo do desenvolvimento histórico do Cálculo, do século XVII até Lebesgue, sendo a teoria das funções o “fio condutor” desse desenvolvimento. Tendo como base este desenvolvimento histórico, é apresentado um estudo de como alguns livros didáticos de Cálculo e Análise definem a integração e como abordam o Teorema Fundamental do Cálculo, identificando assim, a perspectiva adotada. Por fim, é apresentado um estudo da obra Sobre a Medida das Grandezas de autoria de Lebesgue, buscando identificar aspectos do processo que Lebesgue considerava para o ensino da Matemática. O estudo concluiu que Lebesgue, construtivista que era, não gostava da tendência axiomática de fazer Matemática de sua época; dava ênfase a atividade e considerava a Matemática um instrumento que não tem objetos próprios; propagava uma filosofia da Matemática simples e utilitária, que seria apenas um relato das práticas desenvolvidas pelos matemáticos; considerava que, no ensino assim como na prática de fazer matemática, se deveria iniciar com uma atividade, a partir da qual poderiam ser abstraídos conceitos, fazer generalizações, deixando as definições axiomáticas por último.

Palavras-chave: Concepção de Educação Matemática, Henri Lebesgue, Filosofia da Matemática, História do Cálculo Integral, Integral de Lebesgue, Medida das grandezas.

ABSTRACT

The main aim of this study was to consider the aspects which characterises Henri Lebesgue's conception of Mathematics Education. Lebesgue (1875-1941), as well as being one of the most eminent mathematicians of the twentieth century and revolutionising Mathematical Analysis with the creation of a new theory of measure and hence a new definition of the integral, was also a extremely dedicated teacher. Concerned about teacher education, he contributed much to debates on didactical, historical and philosophical issues related to Mathematics. The methodology adopted for this study was based on research with a bibliographic character, with a historic-descriptive approach employed, beginning with a brief presentation of the life and works of Lebesgue. Following this, a historic-philosophical contextualisation of Mathematics of his epoch is presented, along with a description of the philosophy of Mathematics he defended. To highlight the originality of Lebesgue's mathematical practices, a study of the historical development of Calculus from the seventeenth century until his time is presented, with the theory of functions serving as the leading thread of this development. Using as a basis this historical development, a study is made of how some Calculus and Analysis textbooks define Integration and how they approach the Fundamental Theorem of Calculus. Finally, a study of the work About the Measure of Magnitude is presented, which identifies aspects of the process that Lebesgue proposed for the teaching of mathematics. The study concludes that Lebesgue, given his constructivist stance: was not keen in the axiomatic tendency that characterised the practice of Mathematics during his time; that he placed emphasis on activity considering Mathematics as a tool without its own objects:

that he defended a philosophy of Mathematics as simple and utilitarian, which would be a mere report on the practices of mathematician: and that he believed that teaching like the practice of mathematicians, should begin with an activity which could be used as the basis from which to abstract concepts and make generalization, leaving the axiomatic definitions until the end.

Keywords: Conceptions of Mathematics Education, Henri Lebesgue, Philosophy of Mathematical, History of Calculus, Lebesgue's Integral, Measure of magnitudes.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Henri León Lebesgue, matemático francês, viveu de 1875 a 1941 e muito contribuiu para o desenvolvimento da Matemática pura, com a criação de uma nova teoria da medida, inspirado nos estudos sobre a teoria da medida desenvolvida por Borel. Fundamentado nesta teoria, apresentou uma nova definição de integral, mais abrangente do que a de Riemann. Por suas realizações, Lebesgue, na História da Matemática, é considerado como um dos inovadores da Matemática moderna, pois transformou o Cálculo do século XIX no Cálculo moderno, ou seja, do século XX.

A virada do século XIX para o século XX, foi uma época em que todas as ciências exatas sofreram profundas mudanças e, como exemplo, citamos o “nascimento” da teoria da relatividade (Einsten, 1905), como sendo apenas uma das indicações mais expressivas e espetaculares desse período.

Lebesgue sempre foi muito crítico e bastante conservador em relação aos fundamentos filosóficos e lógicos da Matemática moderna desenvolvida por matemáticos, como Cantor (1845-1918) e Hilbert (1862-1943), dentre outros. Se por um lado, na Filosofia da Matemática, ele sempre demonstrou uma atitude didática conservadora e crítica; por outro lado, na Matemática, contribuiu muito para a generalização dos conceitos de função, medida e outros do cálculo. Na época, não mais se consideravam funções isoladas ou outros objetos e conceitos particulares, mas, sistemas ou classes de objetos fechados(as) para certos tipos de operações ou características. Como Denjoy, Felix e Montel (1957, p. 3) destacaram:

> Lebesgue introduziu a espécie das funções *mensuráveis*. O progresso era imenso. [...] Uma série convergente de funções contínuas não é usualmente uma função contínua. [...] Mas o limite de uma série convergente de funções mensuráveis é mensurável. Donde, todas as funções encontradas nos problemas de Análise são mensuráveis.[1]

Por sua concepção genética, construtiva, Lebesgue abordava mesmo os assuntos mais elevados e as teorias abstratas à base de exemplos e considerações concretas, partindo sempre de situações que historicamente caracterizam a gênese dos conceitos pretendidos. Suas idéias eram originais e não concordava com o modo de fazer Matemática de sua época; e, por isso, sentiu muita dificuldade até que suas descobertas fossem aceitas, porque o problema estava no fato de suas idéias serem revolucionárias e abstratas demais, para a sua época. Segundo Denjoy, Felix e Montel (1957, p. 15),

> A aceitação dos trabalhos de Lebesgue pelos mestres da época foi bastante cautelosa. Muitos temiam ver instaurar-se uma teratologia das funções. [...] Somente Picard defendeu as pesquisas de Lebesgue e apreciou suas qualidades.[2]

Como professor, parece que não gostava de construções complicadas, tanto que não abordava o conceito de número por meio das estruturas axiomáticas – forte tendência da época – e empenhava-se para tratar os problemas da forma mais direta possível, iniciando de situações mais concretas. Preferia abordar o conceito de número, partindo do conceito de medição, pois, como argumentava, por meio deste os números com representação decimal tornam-se mais “naturais”. No entanto, apresenta uma abordagem profunda para o conceito de medição. Desta forma, “parece” mostrar que a Matemática mais avançada relaciona-se com a Matemática mais elementar, ou seja, a teoria da

[1] Lebesgue introduisit l’espèce des fonctions *mensurables*. Le progrès était immense. [...] Une suite convergente de fonctions continues n’est pas habituellement une fonction continue. [...] Mais la limite d’une suite convergente de fonctions mensurables est mensurable. Dès lors, toutes les fonctions rencontrées dans les problèmes de l’Analyse sont mensurables.

[2] L’accueil des travaux de Lebesgue par les maîtres de l’époque fut assez réservé. Beaucoup redoutaient de voir s’instaurer une tératologie des fonctions. [...] Seul, Picard défendit les recherches de Lebesgue et apprécia ses qualités.

medida apresentada por ele tem a ver com a preocupação e a forma como preferia apresentar os números na representação decimal.

Lebesgue negava que a Matemática pura tivesse objetos próprios, isto faz sentido quando consideramos que, para ele, a Matemática aplicada é o fundamento da Matemática pura (OTTE, 2003a, p. 6). Tinha também a convicção de que a prática dos matemáticos e do ensino da Matemática precisavam de uma filosofia da Matemática que ele chamava de “filosofia de segunda zona”.

Estas características peculiares, chamam a atenção, pois além de ter sido um grande matemático, foi também um professor dedicado, atento à Matemática que se ensinava e se aprendia na escola. Observava o processo de ensino desenvolvido pelos professores, bem como sugeridos pelos livros didáticos e, identificava obstáculos que, muitas vezes, levavam alunos e até mesmo professores a cometerem erros, mas esforçava-se para superá-los.

Em virtude das questões expostas, objetivando identificar aspectos caracterizadores da concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue, além de julgarmos importante um estudo de suas obras considerando todos os seus aspectos, propusemo-nos a:

- Pesquisar o contexto histórico-filosófico da Matemática da época em que viveu Lebesgue, buscando identificar as necessidades que o levaram às suas mais importantes criações matemáticas (Teoria da Medida e Teoria da Integração).

- Levantar as premissas da filosofia da Matemática que Lebesgue propagava e chamava de “filosofia da segunda zona” para contrastar com a filosofia acadêmica, que era dominada pelo chamado empirismo lógico ou filosofia analítica da ciência.

- Apresentar aspectos do desenvolvimento histórico do Cálculo do século XVII até Lebesgue, sendo a teoria das funções o “fio condutor” desse desenvolvimento e, em comparação com esse desenvolvimento, identificar as perspectivas adotadas atualmente em alguns livros didáticos de Cálculo e Análise.

- Pesquisar como Lebesgue pensava o processo de ensino e aprendizagem da Matemática e o papel do professor nesse processo.

Por ter sido uma pessoa bastante pragmática, não é fácil construir uma imagem precisa de suas opiniões sobre a Matemática e seu ensino. Por isso, elaboramos uma estrutura ilustrativa dos fatos de forma que uns iluminem aos outros. Dividimos, então, este texto em seis capítulos, assim, distribuídos:

No primeiro capítulo - *Henri Lebesgue: uma personalidade na história da Matemática* -, apresentamos um breve estudo sobre a vida e obra do autor, contando um pouco de seu percurso escolar; sua trajetória profissional; os questionamentos e as primeiras publicações que culminaram em sua tese de doutoramento; os assuntos matemáticos aos quais mais se aplicou; e.sua dedicação ao ensino, História e Filosofia da Matemática.

No segundo capítulo – *A Filosofia da Matemática na França, na virada do século XIX para o século XX* –, objetivamos apresentar uma contextualização filosófica da época, na qual Lebesgue estava inserido, bem como ilustrar sua atuação nesse período. Então, abordamos três aspectos:

Primeiro, a caracterização da revolução da Matemática ocorrida no século XIX, descrita por Pierre Boutroux (1920). Conforme o autor citado, no início do século XIX, ocorreu uma revolução na Matemática descrita por ele, como uma transição de um ideal sintético a uma concepção analítica da Matemática. Isto se justifica pelo fato de que, por necessidade das ciências, os cientistas obrigaram-se a ir além das relações matemáticas restritas às combinações algébricas. Com isso, surge a Matemática pura, estabelecendo suas bases em análises de provas e intuição de conceitos cada vez mais abstratos e, então, na virada do século XIX para o século XX, Boutroux identifica uma nova ruptura dada pela quebra da harmonia preestabelecida que existia entre objetivo e método matemático.

Um dos aspectos mais importantes dessa transformação da Matemática foi a criação e aplicação da axiomática moderna no sentido de Hilbert e Zermelo. Por isso, apresentamos uma discussão que aconteceu, em 1905, entre Borel, Hadamard, Baire e Lebesgue sobre a teoria dos conjuntos. A discussão foi motivada por uma publicação de Zermelo (1904) na qual, para provar que todo conjunto pode ser bem ordenado, enunciou um princípio que se tornou muito polêmico e conhecido como axioma da escolha. Um dos questionamentos levantados em virtude desse axioma refere-se à aceitação de um objeto matemático sem que se tenha condições de descrevê-lo ou representá-lo concretamente. Lebesgue foi um dos matemáticos que não acreditava na possibilidade de provar que um objeto matemático existe sem que tenha sido descrito ou construído por meio de algumas de suas características.

Terminamos o capítulo discutindo aspectos da filosofia da Matemática que Lebesgue propagava e denominava “filosofia da segunda zona”. O autor tinha tendências empiristas e construtivistas, acreditava que a filosofia da Matemática deveria simplesmente explicar as práticas úteis desenvolvidas pelos matemáticos. Dava ênfase às aplicações; considerava que a Matemática aplicada era o fundamento da Matemática pura; pensava a Matemática pura mais como uma linguagem do que como uma ciência definida em termos de seus objetos particulares; acreditava que a existência ou fatos não tinham sentido fora das possibilidades da definição ou determinação.

No capítulo III, *Aspectos do desenvolvimento histórico do Cálculo até o século XVIII*. O objetivo do capítulo é proporcionar uma identificação da época e o contexto histórico-matemático das bases da teoria da integração que antecederam Cauchy, Riemann e Lebesgue, caracterizando a origem e auge do Teorema Fundamental do Cálculo. Como conseqüência marcante do período, identificamos três aspectos característicos do Cálculo Integral do início do século XIX.

Em primeiro lugar, funções eram identificadas como séries ou fórmulas, não se fazendo a distinção entre função e fórmula. Este foi o grande problema pelo qual Euler não conseguiu definir continuidade de uma função, pois continuidade não é uma característica da fórmula. Em segundo lugar, destacamos o fato de que o conceito fundamental do Cálculo era a diferenciação e, por isso, a continuidade era tão importante, pois a característica de ser diferenciável pode ser descrita em termos da continuidade. Uma função f é considerada diferenciável num ponto x_0 se existir uma função g contínua em x_0, tal que $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, g(x)$. Em terceiro lugar, destacamos que a integração era definida pelo Teorema Fundamental do Cálculo, ou seja, como a operação inversa da diferenciação e não como uma operação independente.

No capítulo IV, *Teoria da integração de Cauchy a Lebesgue*, o principal objetivo é ilustrar a originalidade de Lebesgue – sua forma de fazer Matemática – que, ao analisar a definição de integral em vigor na época, sob uma perspectiva totalmente diferente de seus predecessores Cauchy e Riemann, consegue apresentar uma nova teoria de integração tão inovadora que revolucionou a Análise Matemática. Para abordar o ponto de vista adotado pelo autor, deixando claro a que se referem as críticas que ele faz em relação ao procedimento adotado na época, julgamos necessário discutir a evolução da teoria da integração ocorrida no século XIX dada por Cauchy e, posteriormente, por Riemann.

Com uma visão diferente da de sua época, Cauchy rompe com os aspectos do século XVIII, citados acima, caracterizados como entraves para o desenvolvimento do Cálculo e apresenta a integração independente da diferenciação, baseada na idéia de soma (S). Dessa forma, o Teorema Fundamental do Cálculo que fazia parte da definição de integral, perde sua “pompa” de fundamental e torna-se um teorema verdadeiramente, necessitando ser provado.

Aproximadamente trinta anos mais tarde, Riemann apresenta uma generalização do conceito de integral definida dado por Cauchy, aplicável a uma classe de funções muito mais ampla. Partiu do mesmo procedimento usado por

Cauchy, mas, diferentemente deste, que se preocupou com condições suficientes para definir a soma que caracteriza a integral, Riemann voltou-se às condições necessárias, ou seja, procurou saber quais características uma função deve ter para que se possa garantir a existência da soma S.

A atitude de Cauchy caracteriza um estilo sintético de fazer Matemática, ou seja, a partir de objetos dados previamente são construídos outros objetos. Para definir integral, ele considerou inicialmente uma função sendo contínua, um intervalo fechado, uma divisão desse intervalo em subintervalos e depois com esses elementos usando o procedimento que fornece a soma S, ele construiu um novo conceito: o conceito de integral. Em contrapartida, a atitude de Riemann caracteriza um novo estilo de fazer Matemática, que é o estilo analítico. Ele não se prendeu ao processo que fornece a soma S e foi além. Não fez nenhuma exigência inicial à função a ser usada e analisando o processo de cálculo de S, quis apenas saber quais características uma função deve ter para que essa soma S exista.

Até Lebesgue, podemos dizer que o procedimento na construção da integral permaneceu praticamente o mesmo. Só as condições e premissas foram precisadas cada vez mais à base da análise de provas. Mas, Lebesgue, praticamente 50 anos depois da definição de integral de Riemann, questionando a construção de Cauchy e de Riemann, rompeu totalmente com o procedimento tradicional e introduziu uma nova perspectiva, ou seja, uma teoria de medida e de conjuntos mensuráveis, tendo por base a teoria da medida de Borel.

Levando em consideração os aspectos do desenvolvimento histórico do Cálculo, abordados nos capítulos III e IV; no capítulo V, *Uma discussão sobre o Teorema Fundamental do Cálculo apresentado em alguns livros didáticos*, tivemos como objetivo mostrar como alguns livros didáticos de Cálculo e Análise definem a integração, como apresentam o Teorema Fundamental do Cálculo – considerado verdadeiramente como fundamental nos séculos XVII e XVIII, pois era uma conseqüência da definição de integral; perdendo sua pompa de fundamental com as definições de integral de Cauchy e Riemann e, sendo restabelecido por Lebesgue, pela consideração de que a integral indefinida é uma função de conjuntos e não de pontos, – identificando assim a perspectiva adotada nestas obras, ou seja, a que período da história estão mais relacionadas. Para tanto, iniciamos o capítulo discutindo os dois sentidos do termos “Integrar” (determinar uma primitiva ou encontrar uma integral definida), cuja equivalência (no sentido de que a resolução de um implica a resolução do outro), em certos casos, propicia o Teorema Fundamental do Cálculo.

No capítulo VI, *Idéias contidas na obra Sobre a medida das grandezas de Henri Lebesgue*, objetivamos apresentar aspectos do processo que o autor considerava para o ensino da Matemática. Para ele, a Matemática pura tem origem na Matemática aplicada e a Matemática aplicada, por sua vez, origina-se na “medida de grandezas”; por isso, o processo de medição é de fundamental importância. Como ele argumenta:

> A medida de grandezas é o ponto de partida de todas as aplicações matemáticas e desde que a matemática aplicada obviamente precede a matemática pura (lógica matemática), é normalmente suposto que a geometria originou da medida de áreas e volumes. Além disso, medida nos fornece os números, o próprio objeto da análise. Por isso, discutimos a medida das grandezas para todos os níveis do ensino: primário, secundário e superior. O estudo feito em todos esses três níveis do ensino nos dá um exemplo do esforço de entender e coordenar a totalidade, que contribuiria, me parece, mais efetivamente para o treinamento dos futuros professores do que o trabalho que é exigido deles agora, isto é, um refinamento lingüístico de aulas isoladas.[3] (LEBESGUE, 1966, p. 11).

Esta idéia de Lebesgue justifica o fato de tomarmos como principal referência, para este capítulo, a obra *Sobre a medida das grandezas* (1935), sem contar que nesta ele apresenta seu julgamento sobre o ensino da Matemática. Mas, não nos referimos a obra completa, por entendermos que o procedimento adotado pelo autor nos primeiros capítulos, particularmente, naquele que trata de áreas, repete-se no tratamento de outros assuntos.

[3] Measure is the starting point of all mathematical applications, and since applied mathematics obviously preceded pure mathematics (mathematical logic), it is usually supposed that geometry originated in the measure of areas and volumes. Furthermore, measure provides us with numbers, the very subject of analysis. Therefore, we discuss the measure of quantities at all three levels of teaching: primary, secondary, and higher. The study of what is done at all three teaching levels furnishes us with an example of an effort to coordinate and to comprehend the whole, which, it seems to me, would contribute more effectively to the training of future teachers than the work that is now required of them – verbal refinement of isolated lessons.

Além dos seis capítulos, nesta tese, incluímos uma seção de anexos na qual apresentamos alguns dos artigos que foram utilizados no desenvolvimento da pesquisa, por julgarmos que são significativos aos que se interessam pela História e Epistemologia da Matemática. Na intenção de torná-los acessíveis aos que não dominam a língua francesa, acrescentamos nesta seção a tradução (nossa) de alguns dos anexos para a língua portuguesa. Além disso, informamos que as traduções que aparecem no corpo do trabalho, salvo menção contrária, também, são nossas.

C A P Í T U L O I

HENRI LEÓN LEBESGUE: UMA PERSONALIDADE NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Henri León Lebesgue foi um notável matemático francês. Pessoa modesta, não tinha a dimensão da importância de seus trabalhos na área científica (PERRIN, 1948, p. 286). Tornou-se famoso por ser o criador de uma das mais importantes teorias matemáticas da primeira metade do século XX (MAY, 1966, p. 1), uma nova teoria da integração.

É tido como um dos grandes renovadores da Análise Matemática, sendo suas criações consideradas originais e ousadas, permitindo grande progresso na área da Análise (PERRIN, 1948, p. 286). No desenvolvimento da Matemática, sua influência perdura até os dias atuais, pois suas idéias e métodos são ferramentas científicas indispensáveis usadas nas mais diversas áreas da Matemática pura e aplicada.

Conforme refere Perrin (Ibid., p. 286), Lebesgue sempre demonstrou personalidade forte e grande bondade. Nasceu no dia 28 de junho do ano de 1875 na cidade de Beauvais, localizada aproximadamente a 90 km de Paris, na França. Filho de uma família modesta: seu pai foi tipógrafo, bibliotecário e com interesses intelectuais e a mãe foi professora de escola primária (MAY, 1966, p. 1).

Na época em que estudava na escola primária, ainda muito jovem, perdeu o pai. Na ocasião, sua extraordinária habilidade para com a Matemática já era notada, o que lhe garantiu continuar seus estudos, pois, por iniciativa de um de seus professores e com o apoio do prefeito de Beauvais ganhou uma bolsa municipal para poder continuar os estudos, fazendo o ensino fundamental em sua cidade e o ensino médio no Lycée de Paris (MONTEL, 1941, p. 197).

Sempre muito dedicado, objetivava ingressar na École Normale Supérieure na qual foi admitido em 1894, onde demonstrou sua independência deixando de lado os estudos que não eram de seu interesse (MAY, 1966, p. 1).

Era irreverente e sempre questionava as declarações dadas por seus professores. Em certa ocasião, tomou um lenço nas próprias mãos, amassou-o e mostrou-o a seus colegas estudantes, buscando convencê-los da falsidade de um importante teorema da geometria. Para Lebesgue, o lenço amarrotado, a perfeita imagem da irregularidade pode ser planificada, ao passo que a teoria clássica ensina que isto é possível somente com cones, cilindros e superfícies geradas por tangentes a uma curva não plana (MONTEL, 1941, p. 198). A geometria clássica é regida por hipóteses de regularidade, que são convenientes, mas, muitas vezes, irrelevantes, porém, em sua obra, Lebesgue sempre se empenhou para resolver problemas, evitando hipóteses supérfluas (PERRIN, 1948, p. 286).

Essa irreverência aliada a seu perspicaz senso crítico favoreceu suas descobertas. No entanto, quando se graduou, em 1897, recebeu o título de professor de escola secundária, conseguindo apenas um terceiro lugar, ficando abaixo de outros matemáticos menos hábeis do que ele (MAY, 1966, p. 2).

Após ter se graduado, trabalhou por dois anos em uma biblioteca em Beauvais e, nesta época, pôde mostrar suas grandes idéias com suas quatro primeiras publicações (Ibid., p. 2):

1ª *Sur l'approximation des fonctions* (Sobre a aproximação das funções), 1898;

2ª *Sur les fonctions de plusieurs variables* (Sobre as funções de várias variáveis), 1899a;

3ª *Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan* (Sobre algumas superfícies não regulares aplicáveis sobre o plano), 1899b;

4ª *Sur la définition de l'aire d'une surface* (Sobre a definição de área de uma superfície), 1899c.

Na primeira dessas publicações, Lebesgue apresentou uma prova simples do teorema da aproximação de Weierstrass, cuja prova existente achou "muito inteligente" (MAY, 1966, p. 2). A terceira publicação, baseada no lenço amarrotado, caracteriza a origem de sua grande descoberta, atualmente, denominada integral de Lebesgue (MONTEL, 1941, p. 198). Esta publicação, quase não teve êxito por causa da oposição de alguns analistas convencionais que ficaram horrorizados diante de funções patológicas, por não possuírem derivadas (MAY, 1966, p. 2). Dentre esses analistas, estava Charles Hermite (1822-1901) que em uma correspondência a Thomas Jan Stieltjès (1856-1894) escreve "'Eu evito com medo e horror esse uso lamentável das funções que não têm derivadas.'"[4] (LEBESGUE, 1922, p. 13).

Para muitos matemáticos, Lebesgue tornou-se o homem das funções sem derivadas, embora não tenha se dedicado ao estudo e às considerações dessas funções. Começou, então, a sentir as conseqüências de ser um inovador, pois foi alvo de observações por sua suposta falta de interesse em funções e superfícies bem comportadas e suposta predileção por tipos patológicos de funções (Ibid., p. 13-14).

Aprovado no exame de seleção, em 1899, tornou-se professor no Lycée Central em Nancy, assumindo um contrato com uma pesada carga horária (PERRIN, 1948, p. 287). Mesmo assim, deu continuidade à pesquisa no intuito de

[4] 'Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas de dérivées.'

concluir suas idéias que resultaram na formulação da Teoria da Medida em 1901. De 1900 a 1901, escreveu e publicou os artigos científicos *Sur la définition de certaines intégrales de surface* (Sobre a definição de algumas integrais de superfície), 1900a; *Sur le minimum de certaines intégrales* (Sobre o mínimo de algumas integrais), 1900b e *Sur une généralisation de l'intégrale définie* (Sobre uma generalização de integral definida), 1901.

Em 1902, Lebesgue defendeu sua tese de doutorado *Intégrale, longueur, aire* (Integral, comprimento, área), na qual apresenta uma nova teoria de integração de funções de variáveis reais. Além de ser uma das realizações da Análise moderna que amplia a extensão da Análise de Fourier, sua tese foi tão "completa" e "perfeita" que não deixou espaço bastante para exploração cooperativa (MAY, 1966, p. 2). Na época, sua tese foi aprovada depois de alguma oposição e suas idéias ainda continuaram sendo criticadas (Ibid., p. 2).

Em 1902, Lebesgue levou uma cópia da tese para Camille Jordan (1838-1922) e este, posteriormente, ter-lhe-ia dito para que continuasse com sua pesquisa científica, pois esta ainda lhe traria grande alegria, da qual teria de aprender a desfrutar. Disse ainda que ele seria motivo de surpresa e que não seria bem entendido ou aceito no mundo escolar, pois nem os próprios matemáticos lêem um ao outro. Por sorte, no entanto, esta estimativa apresentada por Jordan revelou-se ser muito pessimista. (LEBESGUE, 1957b, p. 91-92).

Embora aborrecido pelas críticas e, também, por suas próprias dúvidas, Lebesgue escreveu numerosos documentos explorando sua integral; providenciou o primeiro apontamento universitário para a Universidade de Rennes em 1902. Deu um curso no Collège de France sobre sua nova integral nos anos de 1902 e 1903 e sobre série trigonométrica em 1904 e 1905 (MAY, 1966, p. 3). Suas aulas-conferência, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Lições sobre a integração e a pesquisa das funções primitivas) e *Leçons sur les séries trigonométriques* (Lições sobre as séries trigonométricas), foram publicadas como monografias por Borel (LEBESGUE, 1904, 1906).

O trabalho foi lido e rapidamente avaliado e divulgado e, em pouco tempo, acabou sendo reconhecido, como uma obra-prima de enorme repercussão. Por parecer mais flexível, mais facilmente empregada, a utilização da nova integral superou a da integral de Riemann, não demorando muito a ser usada por um grande número de analistas em todo o mundo. Tendo sido ensinada a estudantes universitários, em 1914, por Griffith Conrad Evans (1887-1973) no Rice Institute, tornou-se um componente básico do currículo em Análise (MAY, 1966, p. 4).

O trabalho de doutorado de Lebesgue foi considerado por John Chales Burkill (1900-1993) como sendo a melhor dissertação que um matemático já havia escrito (BURKILL, 1944, p. 58 apud MAY, 1966, p. 2). No entanto, Lebesgue tinha consciência de que seu trabalho foi possível graças a trabalhos prévios, dentre eles, o conceito de medida de conjunto desenvolvido por Émile Borel (MAY, 1966, p. 2).

Na verdade, a definição de integral de Lebesgue nem "pairava no ar" e poderia ter permanecido desconhecida por muito tempo ainda (DENJOY, 1949, p. 578 apud MAY, 1966, p. 2). Em relação a isto, Charles Émile Picard (1856-1941) que foi presidente da comissão de avaliação da tese de doutorado de Lebesgue escreve: "Riemann parecia ter investigado a idéia de integral definida tão profundamente quanto possível. Lebesgue mostrou que este não era o caso."[5] (PICARD, 1917, p. 21 apud MAY, 1966, p. 2).

Para Paul Antoine Aristide Montel (1876-1975), a integral de Lebesgue foi o principal algoritmo para o estudo das funções descontínuas, criado depois da série de Fourier (MONTEL, 1941, p. 198). Para Michael Loève (1907-1979), "Ele deu o passo decisivo em sua tese. ... De fato, a Teoria da Medida contemporânea ainda dança as melodias de Lebesgue."[6] (LOÈVE, 1965 apud MAY, 1966, p. 2).

[5] Riemann seemed to have investigated as deeply as possible the idea of the definite integral. Lebesgue showed that this was not at all the case.

[6] He took the decisive step in his thesis ...In fact, contemporary theory of measure still dances to Lebesgue's tunes.

Com o passar do tempo, as idéias de Lebesgue foram se tornando cada vez mais dominantes e penetrantes em Análise. No entanto, ele próprio não teve a influência que poderia esperar. Não era uma pessoa política – não tinha interesse em políticas partidárias fora nem dentro da comunidade acadêmica (MAY, 1966, p. 3).

Mas como merecimento pelos seus trabalhos: conseguiu uma vaga para lecionar na Faculdade de Ciências da Universidade de Rennes, no período de 1902 a 1906, ascendendo à categoria de mestre de conferências. Em seguida, de 1906 a 1910, tornou-se professor na Universidade de Poitiers; e, ainda em 1910, foi nomeado mestre de conferências na Sorbonne, onde ficou até 1919 (PERRIN, 1948, p. 289). Em 1920 e 1921, exerceu a função de professor titular na mesma instituição e ocupou uma cadeira de Matemática no Collège de France (MONTEL, 1941, p. 197), onde continuou ensinando até o fim de sua vida.

Lebesgue recebeu vários prêmios e outras honras pelo seu compromisso com o magistério do Collège de France em 1921 (MAY, 1966, p. 3). A primeira década do século XX foi para Lebesgue um período de intensa produtividade científica. Nesses anos, publicou mais de 40 documentos, incluindo os já citados *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* e *Leçons sur les séries trigonométriques*, nos quais faz praticamente a primeira apresentação sistemática de todas as suas principais realizações científicas. Reconhecido como um dos matemáticos notáveis de seu tempo, as publicações posteriores de Lebesgue, embora bastante extensas, não acrescentaram muito à reputação científica, adquirida pelas atividades de pesquisa durante esta primeira década do século XX. Tendo por base *Oeuvres Scientifiques de Henri Lebesgue* (Obras científicas de Henri Lebesgue), no anexo 1, listamos em ordem cronológica as 165 publicações feitas por Lebesgue no decorrer de sua vida.

Em 1922, depois da morte do grande geômetra Camille Jordan (1838-1922), Henri Lebesgue foi eleito membro da Academia de Ciências de Paris (PERRIN, 1948, p. 290). Na época, já havia feito mais de 90 publicações, entre livros e artigos, sobre teoria dos conjuntos, integração, área e comprimento, teoria da medida, série trigonométrica, aproximação polinomial, cálculo de variações, probabilidade geométrica, topologia, e geometria algébrica – todas listadas no anexo 1. Em 1924, ele se tornou Sócio Honorário da Société Royale de Londres e, subseqüentemente, de muitas outras instituições científicas da França e estrangeiro, tais como: Académie dei Lincei à Rome; Royal Académies Royales de Danemark, de Belgique et de Roumanie e Académie polonaise des Sciences et des Lettres. Várias universidades conferiram-lhe o título de doutor honoris causa (PERRIN, 1948, p. 290). No geral, as honras acadêmicas só lhe foram dadas quando já tinha passado o apogeu de seu poder de inspiração criativa.

Durante os aproximadamente vinte anos restantes de sua vida, ele continuou escrevendo sobre os mesmos tópicos pelos quais tinha se interessado em período prévio, mas, desta vez, sobre um ponto de vista filosófico, pedagógico e histórico (MAY, 1966, p. 3). Além de sua função de mestre de conferências no Collège de France, em razão da preocupação com problemas pedagógicos, Lebesgue lecionou por um longo tempo em duas Écoles Normales Supérieures, dedicando generosamente seu tempo para ajudar as pessoas por meio de seu ensino e pesquisa (Ibid., p. 3), e muito contribuiu com a revista suíça *L'Enseignement Mathématique* (PERRIN, 1948, p. 290).

Lebesgue não era um especialista limitado, foi um grande estudante, inovador e professor. Muitos de seus trabalhos emergiram de observações simples, intuitivas e atentas do passado, porém, muito profundas e que ninguém ainda havia pensado. Para ele, a observação e o estudo de trabalhos anteriores foram, em parte, essenciais ao desenvolvimento da pesquisa científica. No artigo *Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan* (Notas sobre a vida e os trabalhos de Camille Jordan), publicado pela primeira vez, em 1923, Lebesgue escreve:

> [...] o matemático deve explorar o domínio em que trabalha, observar o papel dos diferentes seres matemáticos que aí ele encontra, mantê-los vivos [...] em resumo, o matemático transforma-se em naturalista.[7] (LEBESGUE, 1957b, p. 97).

[7] [...] le mathématicien doit explorer le domaine où il travaille, observer le role des différents êtres mathématiques qu'il y rencontre, les regarder vivre [...] bref, le mathématicien se transforme en naturaliste.

Posteriormente, em 1928, no prefácio da segunda edição de suas *Leçons sur l'intégration,* Lebesgue escreve:

> [...] para fazer trabalho útil, é necessário marchar ao longo dos caminhos abertos por trabalhos anteriores; caso contrário, corre-se um risco muito grande de criar uma ciência sem ligações com o resto da matemática.[8] (LEBESGUE, 1928 apud MAY, 1966, p. 4).

Montel (MONTEL, 1941, p. 199), em *Notice nécrologique sur M. Henri Lebesgue* (Notícia necrológica sobre o Sr. Henri Lebesgue), traduziu tudo isso com a frase: "Lebesgue olhou para as coisas velhas com novos olhos. Sabia a virtude do exame atento de um exemplo, de uma anomalia, de uma exceção"[9]. No artigo *Humbert et Jordan, Roberval et Ramus*, publicado em 1957, Lebesgue comenta que

> [...] reduzida às teorias gerais, a matemática seria apenas uma bela forma vazia de conteúdo. Morreria rapidamente, como morreram, momentaneamente, vários ramos de nossa ciência, justo no momento em que observações gerais pareciam dever proporcionar-lhes uma atividade nova; citarei, por exemplo, a teoria das formas ou as funções elípticas, tão ignoradas desde que Weierstrass simplesmente expôs os teoremas gerais. As teorias gerais respondem às questões que nos colocamos; infelizmente, elas as respondem muito facilmente, sem exigir de nós quase nenhum esforço, e como nos dão a solução de problemas antes que os tivéssemos estudado, enfraquecem nossa curiosidade e nos dispensam do conhecimento íntimo que conduziria a problemas novos. Elas normalmente, tornam até desdenhosas pesquisas particulares de onde poderiam surgir esses problemas novos, já que tais estudos não teriam a mesma elegância que a teoria geral.[10] (LEBESGUE, 1957a, p. 192-193).

As idéias de Lebesgue sobre ensino tinham essa característica e conservavam essa natureza da pesquisa Matemática. Por visar a importância dos

---

[8] [...] in order to useful work it is necessary to march along paths opened by previous workers; acting otherwise, one runs too great a risk of creating a science without links with the rest of mathematics.

[9] Lebesgue excellait à regarder les choses anciennes avec des yeux nouveaux. Il savait la vertu de l'examen attentif d'un exemple, d'une anomalie, d'une exception.

[10] [...] réduites aux théories générales, les mathématiques ne seraient qu'une belle forme vide de contenu. Elles mourraient vite, comme sont mortes, momentanément, plusieurs branches de notre science juste au mont où des vues générales semblaient devoir leur procurer une activité nouvelle; je citerai, par exemple, la théorie des formes, ou les fonctions elliptiques si ignorées depuis que Weierstrass en a si simplement exposé les théorèmes généraux. Les théories générales répondent aux questions qu'on s'était posées; malheureusement elles y répondent trop facilement, sans exiger de nous presque aucun effort, et, comme elles nous donnent la solution des probèmes avant que nous les avions étudiés, elles émoussent notre curiosité et nous dispensent de la connaissance intime qui aurait conduit à des problèmes nouveaux. Même, elles rendent volontiers dédaigneux pour les recherches particulières d'où pourraient surgir ces problèmes nouveaux, parce que de telles études ne sauraient avoir la même élégance que la théorie générale.

problemas em vez das teorias prontas, para ele, a Matemática viva poderia ser apresentada aos alunos em um estilo genético, o que faz necessário conhecer a história das idéias matemáticas para então poder explicar os conceitos matemáticos. Isto significa tentar apresentar as coisas simplesmente, deixando de lado o não essencial (MAY, 1966, p.5).

Por todas as suas realizações, Lebesgue não deve ser lembrado como um especialista limitado nem como um inovador que abandonou a pesquisa para ensinar, pois o tempo todo ele foi um analista atento às idéias matemáticas, valorizou e contribuiu, também, para a história dessas idéias, bem como para métodos de educação Matemática (Ibid., p. 5).

Foi um homem que, simplesmente, se dedicou ao trabalho, levou uma vida simples, aparentemente calma como estudante e feliz como pai de família. Muito educado conversava com seus alunos de forma amigável. Era generoso, bondoso, profundamente humano e sempre gostou de justiça, mas estava freqüentemente perturbado por acontecimentos desagradáveis. Por exemplo, é provável que a atitude mais insensível para com sua tese por parte de alguns grandes estudantes franceses como Jean Gaston Darboux (1842-1917) tenha lhe causado uma angústia considerável; também, a relação hostil com Émile. Borel, certamente, tenha estragado muitos momentos na vida de ambos – tinham temperamentos humanos diferentes, atitudes diferentes para com a vida ou, até mesmo, códigos morais dissimilares. No final de sua vida, dificilmente pôde ter estado alegre, pois sofreu com seu país que foi tomado pelos alemães. No entanto, os incidentes no plano pessoal não têm importância duradoura. Duradouro, sim, são os valores científicos criados por Lebesgue.

Lebesgue trabalhou praticamente até o momento de sua morte. Em 1941, já dominado por uma doença terminal, teimou em completar seu curso sobre construções geométricas do Collège de France, em parte, como uma demonstração de sua fé na liberação da ocupação alemã. Já acamado ele ditou o final de um livro sobre secções cônicas, intitulado *Les coniques*, sua primeira obra póstuma, publicada em 1942. Logo no início da obra, Lebesgue escreve que o único ensinamento que pode dar um professor, é "*pensar em frente dos estudantes*" (LEBESGUE, 1942, p. 1).

Para essa realização, ele acredita que o professor deveria constantemente enriquecer sua própria cultura matemática e, ao mesmo tempo, recusar-se a lembrar de suas próprias aulas e das rotinas prévias de pedagogos e livros didáticos. De acordo com seu pensamento, os estudantes nada ganham com soluções que satisfazem o lógico, mas não o ponto de vista humano (DENJOY; FELIX; MONTEL, 1957, p. 9).

Nos últimos quatro meses de enfermidade, apesar de permanecer lúcido, sua resistência física foi declinando rapidamente, acabou morrendo em 26 de julho de 1941 (MONTEL, 1941, p. 198), deixando sua mãe, a esposa e um casal de filhos.

De modo geral, o trabalho que Lebesgue desenvolveu é considerado bonito, original e profundo, refletindo pensamentos prudentes, equilíbrio e bom senso que continuará servindo por muito tempo ainda. As suas idéias, sem dúvida, serão mantidas como as de grandes personalidades, no que tange à criação Matemática de todos os tempos. Pela ousadia pioneira da Análise moderna, é considerado um dos grandes matemáticos do início do século XX.

CAPÍTULO II

FILOSOFIA DA MATEMÁTICA NA FRANÇA NA VIRADA DO SÉCULO XIX PARA O SÉCULO XX

II.1 REVOLUÇÃO DA MATEMÁTICA OCORRIDA NO SÉCULO XIX, SEGUNDO PIERRE BOUTROUX

Pierre Boutroux (1880-1922) foi um matemático francês, filho de Émile Boutroux e sobrinho de Henri Poincaré. Estudou na École Normale Supérieure em Paris e obteve sua licenciatura com a tese *L'imagination et les mathématiques selon Descartes*. Foi professor de Cálculo Integral em Poitiers de 1908 a 1920. Mas, no mesmo período, também, dedicou-se a outras instituições, não só na França, como também nos Estados Unidos. Em 1920, demitiu-se da cadeira em Poitiers e aceitou um convite para lecionar História da Ciência no Collège de France, onde ficou até a morte em 1922.

Dos trabalhos matemáticos de Boutroux, a maioria consiste em ampliar e elucidar estudos de outros matemáticos, em particular, de Painlevé, Poincaré e Émile Picard. Entretanto, nas áreas de História e Filosofia da Matemática que apresentou sua grande contribuição, em especial, com as obras *Les principes de l'analyse mathématique* (Os princípios da análise matemática), composta de dois volumes, o primeiro publicado em 1914 e o segundo em 1919 e *L'idéal* *scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et dans les temps modernes* (O ideal científico dos matemáticos na antiguidade e nos tempos modernos) publicada em 1920 (O'CONNOR; ROBERTSON, 2000).

Na primeira delas, Boutroux apresenta uma análise do desenvolvimento do pensamento matemático ocorrido na segunda década do século XX (CALINGER apud O'CONNOR e ROBERTSON, 2000).

Na última, Boutroux descreve a revolução ocorrida na Matemática no início do século XIX como uma transição de um ideal sintético a uma concepção analítica da Matemática. Na abordagem que faz sobre a História da Matemática, desde a Antiguidade, divide-a em três períodos:

i) O primeiro período, vai da Antiguidade ao Renascimento, pode ser indicado pelos nomes de Platão e Euclides.

ii) O segundo do século XVII ao século XIX, pode ser lembrado pelos nomes de Descartes e Leibniz.

iii) O terceiro período que compreende do final do século XIX até a época de Boutroux, primeiras décadas do século XX, pode ser lembrado pelos nomes de Bolzano e Cantor.

Para Boutroux, os períodos i) e ii)

> [...] supõem um tipo de harmonia preestabelecida entre o objetivo e o método da ciência matemática, entre os objetos que esta ciência almeja e os procedimentos que lhe permitem atingir estes objetos.[11] (BOUTROUX, 1920, p. 193).

Já, entre ii) e iii) percebe uma revolução, uma fundamental ruptura entre objeto e método, visto que a Matemática contemporânea é fundamentada na análise de conceitos.

[11] [...] supposent une sorte d'harmonie préétablie entre le but et la méthode de la science mathématique, entre les objets que poursuit cette science et les procédés qui lui permettent d'atteindre ces objets.

Para ele, existe uma diferença entre a Matemática de épocas anteriores e a Matemática contemporânea e argumenta:

> O que primeiro nos chama a atenção, quando comparamos a Matemática de nosso tempo àquela das épocas anteriores, é a extraordinária diversidade e o aspecto imprevisto dos caminhos e dos desvios nos quais esta ciência enveredou, é a aparente desordem em que ela executa suas idas e vindas, são suas manobras e mudanças de frente contínuas. A bela unidade que Euclides havia dado à geometria e que Descartes queria conferir à álgebra parece irremediavelmente perdida.[12] (BOUTROUX, 1920, p. 184).

No início do século XIX, por necessidade das ciências, os cientistas foram obrigados a ir além das relações matemáticas restritas às combinações algébricas. Assim, a Matemática pura surge estabelecendo suas bases em análises de provas e instituição de conceitos cada vez mais abstratos e a harmonia preestabelecida entre método e objeto começa a se romper.

Como explica Otte:

> Matemática pura é a origem de um crescimento explosivo da atividade matemática que ocorreu por volta de 1800, cujas fontes podem ser brevemente caracterizadas por manifestar pela primeira vez que na história da matemática um grande número de conexões entre resultados e problemas, aparentemente muito diferentes, era detectado. A descoberta da geometria analítica de Descartes iniciou um processo que realmente se tornou dominante desde antes do século dezenove.[13] (OTTE, 2003a, p. 13).

O autor ainda acrescenta:

> Raciocínio operativo e um ponto de vista funcionalista, introduzido por esta operabilidade, foram necessários para alcançar a transição da matemática clássica para a perspectiva algébrica, que se inicia com Descartes. Um aspecto complementar desse processo, foi igualmente indispensável, embora, muito tarde, pode ser chamado 'geometrização' ou pensamento relacional. Ele se tornou

[12] Ce qui nous frappe tout d'abord lorsque nous comparons la Mathématique de notre temps à celle des époques antérieures, c'est l'extraordinaire diversité et l'aspect imprévu des voies et des détours où cette science s'est engagée, c'est le désordre apparent dans lequel elle exécute ses marches et contre-marches, ce sont ses manoeuvres et changements de front continuels. La belle unité qu'Euclide avait donnée à la géométrie et que Descartes voulait conférer à l'algèbre paraît irrémédiablement perdue.

[13] Pure mathematics is the child of an explosive growth of mathematical activity that occurred around 1800 and that, in its sources, may be briefly characterized by stating that for the first time in the history of mathematics a great number of connections between apparently very different results and problems were detected. Descartes' discovery of analytical geometry already initiated a process that really became dominant since early nineteenth century.

> dominante no início do século XIX, quando a álgebra transformou-se de uma 'linguagem' a uma ciência de estruturas.[14] (OTTE, 2003a, p. 13).

Conforme o próprio Boutroux argumenta, a ruptura ocorrida na História da Matemática no início do século XIX, decorre de dois acontecimentos. Primeiro, a harmonia preestabelecida já não existe mais.

> A harmonia da qual falamos quase desapareceu completamente. Quando se propõe um problema, nos é impossível prever quais são os procedimentos – a maioria das vezes bastante indiretos – que permitirão resolvê-lo. Inversamente, por maior conhecedor que seja do mecanismo de sua arte, o matemático não enxerga sempre, claramente, os problemas em que deve aplicar esta arte. [...] Em outros termos, um dualismo manifesta-se no seio da Matemática pura.[15] (BOUTROUX, 1920, p. 194).

Segundo, a Matemática tornou-se uma ciência analítica que tem por fundamento o pensamento conceitual.

> O fato matemático é independente do revestimento lógico ou algébrico sob o qual buscamos representá-lo: de fato, a idéia que temos é mais rica e mais plena que todas as definições que podemos dar, que todas as formas ou combinações de signos ou de proposições pelas quais nos é possível exprimi-lo. A expressão de um fato matemático é arbitrária, convencional. Ao contrário, o fato em si, ou seja, a verdade que ele contém impõe-se a nosso espírito, alheio a toda convenção. Assim, não poderíamos fazer uma descrição do desenvolvimento das teorias matemáticas se quiséssemos ver nas fórmulas algébricas e nas combinações lógicas os próprios objetos cujo estudo o matemático persegue. Ao contrário, todos os caracteres destas teorias se explicam facilmente se admitimos que a álgebra e as proposições lógicas são apenas a linguagem na qual se traduz um conjunto de noções e de fatos objetivos.[16] (Ibid., p. 203, 204).

---

[14] Operative reasoning and a functionalist perspective introduced by this operability were necessary to achieve the transition from classical mathematics to the algebraic outlook beginning with Descartes. A complementary aspect of this process, which was equally indispensable although it came much later, may be called 'geometrization' or relational thinking. It became dominant at the beginning of the nineteenth century, when algebra was transformed from a 'language'into a science of structures.

[15] L'harmonie dont nous venons de parler a presque complètement disparu. Lorsqu'on nous propose un problème, il nous est impossible de prévoir quels sont les procédés – le plus souvent très indirects – qui permettront de le résoudre. Inversement, quelque rompu qu'il soit au mécanisme de son art, le mathématicien ne voit pas toujours clairement quels sont les problèmes auxquels il doit appliquer cet art. […]. En d'autres termes, un dualisme se manifeste au sein de Mathématiques pures.

[16] Le fait mathématique est indépendant du vêtement logique ou algébrique sous lequel nous cherchons à le représenter: en effet, l'idée que nous en avons est plus riche et plus pleine que toutes les définitions que nous pouvons en donner, que toutes les formes ou combinaisons de signes ou de propositions par lequelles il nous est possible de l'exprimer. L'expression d'un fait mathématique est arbitraire, conventionnelle. Par contre, le fait lui-même, c'est-à-dire la vérité qu'il contient, s'impose à notre esprit en dehors de toute convention. Ainsi l'on ne pourrait pas rendre compte du développement des théories mathématiques si l'on voulait voir dans les formules algébriques et dans les combinaisons logiques les objets mêmes dont le mathématicien poursuit l'étude. Au contraire tous les caractères de ces théories s'expliquent aisément si l'on admet que l'algèbre et les propositions logiques ne sont que le langage dans lequel on traduit um ensemble de notions et de faits objectifs.

Boutroux tece argumentações sobre a ruptura que ele percebe no desenvolvimento histórico da Matemática, mas também lembra que é muito comum as pessoas relacionarem esse desenvolvimento ao conceito de infinito, como se a instituição do mesmo é que caracterizasse o divisor de águas na Matemática. Mas se isso fosse verdade deveria, então, existir uma ruptura separando Leibniz de Descartes, pois, Descartes trabalhou com polinômios e Leibniz, para construir o Cálculo Infinitesimal, com séries infinitas.

No entanto, Boutroux não concorda com isso, tanto que divide a História da Matemática em apenas três períodos, conforme já mencionado, colocando Descartes e Leibniz juntos no segundo e contrastando somente o terceiro período. Para ele, não há diferença entre as obras de Descartes e Leibniz, pois ambas derivam de uma mesma concepção sintetista da ciência, pois, concebem o método matemático como uma combinação de símbolos baseados em um sistema algébrico. Assim, os sistemas algébricos de Descartes e Leibniz “[...] distinguem-se, sobretudo pela circunstância que um efetua sobre combinações infinitas aquilo que o outro faz sobre o finito.” Então, questiona: “Ora, será que, do ponto de vista técnico, está aí uma diferença essencial?”[17] (BOUTROUX, 1920, 127).

Não, para ele esta diferença não é essencial, é apenas uma questão de técnica, pois:

> O cálculo de séries não é – do ponto de vista técnico – de outra natureza que o cálculo algébrico elementar; só que não nos conduz diretamente ao objetivo porque nos dá o que procuramos apenas de modo aproximado. Ora, a idéia de aproximação [...] não tem nada a ver com o dinamismo. Ao menos, entretanto, que se queira admitir que a existência do fato matemático obtido por aproximação é o resultado dessa própria aproximação. Mas aí está uma visão que o próprio Leibniz não teria adotado e que, por outro lado, é de ordem puramente metafísica.[18] (Ibid., p. 128).

---

[17] [...] se distinguent surtout par cette circonstance que l'un effectue sur des combinaisons infinies ce que l'autre fait sur le fini. Or, est-ce là, du point de vue technique, une différence essentielle?

[18] Le calcul de séries n'est pas – au point de vue technique – d'une autre nature que le calcul algébrique élémentaire; seulement il ne nous conduit pas directement au but parce qu'il ne nous donne ce que nous cherchons que d'une manière approchée. Or l'idée d'approximation [...] n'a rien à voir avec le dynamisme. A moins, toutefois, que l'on ne veuille admettre que l'existence du fait mathématique obtenu par approximation est le résultat de cette approximation même. Mais c'est là une vue que Leibniz lui-même n'eût pas adoptée et qui, d’ailleurs, est d’ordre purement métaphysique.

O desenvolvimento que Boutroux descreveu mostra-se claramente nas obras de Georg Cantor (1845-1918) sobre a teoria dos conjuntos. Assim, temos disso a plena liberdade de construir conceitos matemáticos (além da exigência da consistência lógica). Esta liberdade é baseada na liberdade da construção de, cada vez mais, novos conjuntos (iguais às extensões de conceitos). Na Matemática, este processo é chamado "definição por abstração".

Um exemplo disso é a construção de números reais à base de classes de equivalência de racionais. Como escrevem Courant e Robbins:

> [...] podemos afirmar com Cantor que qualquer seqüência $a_1, a_2, a_3, ...$ de números racionais define um número real se ela «convergir». Entende-se por convergência o fato de que a diferença $(a_m - a_n)$ entre quaisquer dois elementos da seqüência tende a zero quando a_m e a_n estão suficientemente distantes na seqüência, isto é, à medida que m e n tendem para o infinito. (As sucessivas aproximações decimais de qualquer número têm esta propriedade, pois duas aproximações decimais quaisquer após a n-ésima podem diferir por no máximo 10^{-n}.) Como existem muitas maneiras de aproximar o mesmo número real por uma seqüência de números racionais, dizemos que duas seqüências convergentes de racionais $a_1, a_2, a_3, ...$ e $b_1, b_2, b_3, ...$ definem o mesmo número real se $a_n - b_n$ tendem a zero à medida que n aumenta indefinidamente. As operações de adição, etc., para estas seqüências são bastante fáceis de definir. (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 86).

II.2 DISCUSSÃO APRESENTADA EM *CINCO CARTAS SOBRE A TEORIA DOS CONJUNTOS*, PUBLICADAS EM 1905, SOBRE O AXIOMA DA ESCOLHA DE ZERMELO

No final do século XIX, os matemáticos sentiam necessidade de fundamentar a Matemática em bases lógicas seguras. Assim, em 1889, Peano (1858-1932) apresenta uma construção axiomática do conjunto dos números naturais. Em 1899, Hilbert (1862-1943) desenvolve uma base axiomática da geometria elementar. Em 1908, Zermelo (1871-1953) elabora a teoria axiomática dos conjuntos.

A teoria intuitiva de conjunto fracassou com a descoberta dos paradoxos de Russell; por isso, foi necessário responder com mais precisão, o que é um conjunto legítimo e a axiomatização foi a resposta a esta pergunta. Como afirma Moore: “Na tradição Cantoriana, pode-se ver a axiomatização de Zermelo respondendo à pergunta: o que é um conjunto?”[19] (MOORE, 1982, p. 8).

Da mesma forma que Hilbert não se preocupou em definir o que é um ponto ou uma reta, mas, sim, as relações entre esses objetos; Zermelo também não se incomodou em definir um conjunto, mas, só as relações como, por exemplo, pertinência e inclusão.

Ernest Zermelo foi um dos matemáticos que mais se destacaram no empreendimento de axiomatizar devidamente a Teoria dos Conjuntos (ÁVILA, 2000, p. 10), foi quem enunciou, pela primeira vez, um princípio, conhecido, atualmente, como axioma da escolha ou axioma de Zermelo, usando-o para provar que “qualquer conjunto pode ser bem ordenado”. A primeira publicação sobre o assunto surgiu de uma carta que escreveu a Hilbert, em 1904, e publicada por este (Hilbert) na *Mathematische Annalen* no mesmo ano. No final da carta, Zermelo observa que a prova da ordenação de um conjunto depende do

> [...] princípio que existem correspondências que indicam a cada conjunto um elemento do mesmo também para infinitas coleções de conjuntos ou, em termos formais, que o produto infinito de conjuntos não vazios também é um conjunto não vazio. Este princípio lógico, embora não possa ser reduzido a um princípio mais simples ainda é sempre usado nas deduções matemáticas sem escrúpulos.[20] (ZERMELO, 1904, p. 516).

Esta observação secundária transformou-se no mais importante e mais controvertido axioma da teoria dos conjuntos. Em 1908, Zermelo apresenta da seguinte forma o axioma da escolha:

[19] Within the Cantorian tradition, one can view Zermelo’s axiomatization as answering the question: what is a set?

[20] [...] Prinzip, dass es auch für eine unendliche Gesamtheit von Mengen immer Zuordnungen gibt, bei denen jeder Menge eines ihrer Elemente entspricht, oder formal ausgedrückt, dass das Produkt einer unendlichen Gesamtheit von Mengen, deren jede mindestens ein Element enthält, selbst von Null verschieden ist. Dieses logische Prinzip lasst sich zwar nicht auf ein noch einfacheres zurückführen, wird aber in der mathematischen Deduktion überall unbedenklich angewendet.

> Dada uma família T de conjuntos não-vazios, há uma função f que associa a cada membro A de T um elemento $f(A)$ de A.[21] (ZERMELO apud MOORE, 1982, p. 5).

Este "princípio" gerou controvérsias entre os matemáticos. Dentre elas, o fato de Zermelo nada ter dito sobre como as escolhas eram feitas; a característica não construtiva dessa "função escolha" provocou muita descrença e intensa discussão que se baseou na crença de que uma afirmação da existência de um objeto lógico ou matemático só poderia ser cumprida por meio de uma construção explícita. Por isso, a crença moderna causou contestações, e alguns matemáticos questionaram a aceitação da função f sem condições de descrevê-la ou representá-la concretamente.

Na discussão sobre este axioma, mostra-se nitidamente uma controvérsia entre os matemáticos. Uns exigiam dos axiomas plausibilidade e clareza intuitiva; outros pensavam nos axiomas não como verdadeiros ou falsos, mas, sim, como hipóteses que deveriam ser úteis e consistentes. Praticamente cinqüenta anos depois da publicação de Zermelo, Lynn H. Loomis, professor na Universidade de Harvard, publica uma opinião sobre o axioma da escolha que é muito comum hoje em dia:

> O axioma fundamental da teoria dos conjuntos que tem formulações equivalentes no lema de Zorn, o axioma da escolha e a hipótese da boa-ordenação serão livremente usados neste livro. De fato, o uso deste axioma é absolutamente essencial para o sucesso de alguns métodos abstratos tal como os encontrados na teoria de Gelfand das álgebras de Banach. Muitos matemáticos têm dúvidas sobre a validade do axioma da escolha, mas eles devem se lembrar que Gödel mostrou que, se a matemática é consistente sem o axioma da escolha, então, ela permanece consistente se este axioma é adicionado (e, similarmente, para a generalizada hipótese do contínuo). Assim, um teorema que é provado com a ajuda do axioma da escolha não pode ser contestado, a menos que a matemática já contenha uma inconsistência que não tem nada a ver com o axioma da escolha.[22] (LOOMIS, 1953, p. 2).

---

[21] Given any family T of non-empty sets, there is a function f which assigns to each member A of T an element $f(A)$ of A.

[22] The fundamental axiom of set theory which has equivalent formulations in Zorn's lemma, the axiom of choice and the well-ordering hipothesis will be freely used throughout this book. In fact, its use is absolutely essential for the success of certain abstract methods such as found in Gelfand's theory of Banach algebras. Many mathematicians feel dubious about the validity of the axiom of choice, but it must be remembered that Gödel has shown that, if mathematics is consistent without the axiom of choice, then it remains consistent if this axiom is added (and similarly for the generalized continuum hipothesis). Thus a theorem which is proved with the aid of the axiom of choice can never be disproved, unless mathematics already contains an inconsistency which has nothing to do with the axiom of choice.

Após a divulgação da carta de Zermelo, o primeiro a se manifestar contrário e fortemente a seus argumentos foi Émile Borel (1871-1956) – atendendo um pedido de David Hilbert (1862-1943), editor do *Mathematische Annalen*, para que se manifestasse sobre a questão da prova de Zermelo – que, em 1905, publicou o artigo *Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles* (Algumas observações sobre os princípios da teoria dos conjuntos), (anexo 2).

Nesse artigo, Borel (1905, p. 194) argumenta que um dos problemas mais importantes que se pode citar em relação a um conjunto qualquer M é:

A – Colocar M sob a forma de um conjunto bem ordenado.

Acrescenta que o importante resultado obtido por Zermelo pode ser assim enunciado: para resolver o problema A, é suficiente saber resolver o problema B que segue:

B – Para um dado subconjunto não vazio qualquer M' de M, escolher em M' um elemento m' denominado elemento distinguido de M'. Tal escolha deverá ser feita para todos os subconjuntos não vazios M' de M.

Entretanto, Borel afirma que Zermelo "não" demonstrou que essa equivalência resolve sempre o problema A. Para Borel,

> É evidente que toda solução do problema A fornece uma solução particular do problema B; porém a recíproca não era evidente e é ao Sr. Zermelo que devemos o fato de saber que: *os problemas* A *e* B *são equivalentes*.
>
> Mas este resultado, qualquer que seja seu interesse, não poderia ser considerado como fornecedor de uma solução geral do problema A. De fato, para que o problema B possa ser considerado como resolvido relativamente a um dado conjunto M, precisaria fornecer um meio ao menos teórico de determinar o elemento distinguido m' de um subconjunto qualquer M'; este problema parece dos mais árduos, se supormos, para fixar as idéias, que M coincide com o contínuo.[23] (Ibid., p. 194).

[23]Il est évident que toute solution du problème A fournit une solution particulière du problème B; mais la réciproque n'était pas évidente et c'est à M. Zermelo que nous devons de savoir que: *les problèmes* A *e* B *sont équivalents*.
Mais ce résultat, quel que soit son intérêt, ne saurait être considéré comme fournissant une solution générale du problème A. En effet, pour que le problème B puisse être regardé comme résolu relativement à un ensemble donné M, il faudrait donner un moyen au moins théorique de déterminar l'élément distingué m' d'un sous-ensemble quelconque M'; et ce problème paraît des plus ardus, si l'on suppose, pour fixer les idées, que M coincide avec le continu.

Borel afirma, então, que não considera válido o seguinte raciocínio de Zermelo de que:

> [...] é possível, em um conjunto particular M', escolher *ad libitum*, o elemento distinguido m'; esta escolha podendo ser feita para cada um dos conjuntos M', pode ser feita para o conjunto desses conjuntos.[24] (ZERMELO apud BOREL, 1905, p. 194-195).

Para Borel, o argumento de Zermelo é equivalente a dizer que, para bem ordenar um conjunto M, é suficiente escolher, arbitrariamente em M, um primeiro elemento m_1, depois, designando M_1 o conjunto M do qual se retira m_1, escolher arbitrariamente em M_1 um elemento m_2, continuando, assim, transfinitamente até esgotar todos os elementos de M. Na concepção de Borel, "[...] nenhum matemático aceitará como válido este último raciocínio."[25], pois, para ele, qualquer escolha arbitrária não-enumerável está fora dos domínios da Matemática (BOREL, 1905, p. 195).

O artigo de Borel, publicado no *Mathematische Annalen*, culminou em uma troca de cinco correspondências envolvendo os eminentes matemáticos franceses Jacques Hadamard (1862-1943), René Baire (1874-1932), Henri Lebesgue (1875-1941) e o próprio Borel, na qual eles expuseram suas opiniões sobre a nota de Zermelo de 1904. Estas correspondências foram publicadas por Hadamard, no *Bulletin de la Société Mathématique de France* em 1905 com o título *Cinq lettres sur la théorie des ensembles* (Cinco cartas sobre a teoria dos conjuntos), (anexo 3).

Primeira carta: de Hadamard a Borel

A primeira dessas cartas foi escrita por Hadamard e endereçada a Borel. Nela, Hadamard afirma não concordar com as críticas de Borel sobre a demonstração de Zermelo. Primeiramente, ao contrário de Borel, Hadamard não estabelece nenhuma analogia entre o raciocínio, usado para numerar os

---

[24] [...] il est possible, dans un ensemble particulier M', de choisir *ad libitum* l'élément distingué m'; ce choix pouvant être fait pour chacun des ensembles M', peut être fait pour l'ensemble de ces ensembles.
[25] [...] aucun mathématicien ne regardera comme valable ce dernier raisonnement.

elementos de um conjunto, que exige um número infinito de escolhas sucessivas, cada uma dependendo das anteriores e o princípio de Zermelo em que as escolhas, às quais se refere, são independentes umas das outras (HADAMARD, 1905, p. 261).

Lembrando que Borel não aceita esta forma de operar, quando se trata de um conjunto não enumerável de escolhas, Hadamard afirma não ver diferença entre o caso de infinitos enumeráveis e o de infinitos não enumeráveis. Para ele, esta diferença só se manifestaria se houvesse uma dependência qualquer entre as escolhas consideradas (Ibid., p. 261-262).

Quanto à crítica de Borel (1905, p. 194) de que nada é dito sobre como descrever a função escolha, Hadamard concorda que Zermelo não forneceu nenhum meio para realizar a operação da qual ele (Zermelo) fala, ou seja, "determinar efetivamente a correspondência procurada" e acrescenta que parece improvável que alguém pudesse fornecê-la (HADAMARD, 1905, p. 262).

Para Hadamard, duas questões são levantadas: uma se refere à "determinação efetiva da correspondência pesquisada" e a outra à "existência de tal correspondência". A distinção fundamental que estabelece entre as duas questões, refere-se, como lembra, à diferença estabelecida por Jules Tannery, em 1897, entre: uma correspondência (função) que pode ser "definida" e uma correspondência que pode ser "descrita". Tannery (1897, p. 131-133) usou o termo "definir" no sentido de indicar a existência, enquanto "descrever" significou, para ele, dar as características somente. Por isso, para Hadamard, muitas questões da Matemática mudariam completamente de sentido e soluções, se a palavra "definida" fosse substituída pela "descrita" (HADAMARD, 1905, 262).

A título de ilustração, na semiótica esta diferença da qual fala Tannery, é marcada pela distinção entre dois tipos de signos: índices e ícones. O índice indica o objeto sem dar suas características e o ícone dá as características do objeto sem, no entanto, indicar sua existência. Por exemplo, a palavra "amanhã" é um índice, pois não dá nenhuma característica do dia ao qual se refere. Para saber qual é esse dia, é preciso saber quando a palavra “amanhã” foi dita ou escrita, ou seja, só se entende um índice se se souber o contexto em que ele está inserido. Já, o desenho de um “unicórnio” é um exemplo de ícone, pois nos dá as características do objeto “unicórnio”, mas isso não nos garante sua existência.

Hadamard (1905, p. 262-263) aceita o uso de correspondências às quais constata a *existência* sem poder *descrevê-las* e argumenta que Borel também usou correspondências desse tipo em seu estudo sobre as séries.

Como exemplificação de correspondência em que constatamos a existência sem que, no entanto, possamos descrevê-la, citamos o conceito de continuidade. Conforme argumenta Otte (1993, p. 231), ao contrário do que se pensava antes de Cauchy (1789-1857) e Bolzano (1781-1848), a continuidade não é uma propriedade da forma de representação simbólica ou descrição concreta da função, sendo, assim, não exige uma *descrição*. A continuidade é uma propriedade que só pode ser conseguida em uma conceituação abstrata de correspondência funcional, em uma conceituação que surge das classes de equivalência das representações simbólicas.

Segunda carta: de Baire a Hadamard

Ao tomar conhecimento do teor da carta que Borel recebeu de Hadamard, Baire escreveu a Hadamard para expor suas reflexões sobre a mesma.

Para Baire (in: HADAMARD, 1905, p. 263), numa opinião diferente de Hadamard, as escolhas sucessivas dos elementos m’ pertencentes aos conjuntos M' dependem, cada uma, das precedentes. Além disso, Baire questiona se a expressão *conjunto* que Zermelo usa o tempo todo tem um sentido, pois para ele nem sempre parece ter, por considerar que:

> Desde que se fale de infinito (mesmo enumerável, e é aqui que estou tentando ser mais radical que Borel), a assimilação, *consciente ou inconsciente*, com um saco de bolas, que se dá, de mão-em-mão, deve completamente desaparecer e estamos, a meu ver, no *virtual*, isto é, fazemos convenções que nos permitem subseqüentemente, um objeto sendo definido *por uma nova convenção*, afirmar algumas propriedades desse objeto.[26] (BAIRE in: HADAMARD, 1905, p. 263-264).

Na opinião de Baire (Ibid., 1905, p. 264), o fato de um conjunto ser dado, não significa que se possa considerar as suas partes também como dadas. Para ele, não faz sentido conceber, como fez Zermelo, que em cada subconjunto um elemento é escolhido, embora seja uma concepção que não apresente contradição. Para Baire, Zermelo demonstrou que

> [...] não percebemos contradição ao conceber que, em todo conjunto que será definido, os elementos têm entre eles relações de posição idênticas àquelas que têm os elementos dos conjuntos bem ordenados.[27] (Ibid., p. 264).

No entanto, faz a seguinte crítica:

> Para dizer, depois disso, que estabelecemos que todo conjunto pode ser colocado sob a forma de um conjunto bem ordenado, é preciso dar às palavras uma extensão extraordinária e, acrescentarei, enganosa.[28] (Ibid., p. 264).

Nesta carta, Baire quis expressar a Hadamard que a prova de Zermelo é consistente mas que, no entanto, não tem sentido.

Terceira carta: de Lebesgue a Borel

A terceira das cinco cartas foi escrita por Lebesgue em resposta a uma solicitação de Borel para que expusesse sua opinião sobre a Nota de Zermelo e a Carta de Hadamard (LEBESGUE in: HADAMARD, 1905, p. 264).

---

[26] Dès qu'on parle d'infini (même dénombrable, et c'est ici que je suis tenté d'être plus radical que Borel), l'assimilation, *consciente ou inconsciente*, avec un sac de billes qu'on donne de la main à la main, doit complètement disaparaître, et nous sommes, à mon avis, dans le *virtuel*, c'est-à-dire que nous faisons des conventions qui nous permettent altérieurement, un objet étant défini *par une nouvelle convention*, d'affirmer certaines propriétés de cet objet.

[27] [...] nous n'apercevons pas de contradiction à concevoir que, dans tout ensemble qu'on nous définira, les éléments aient entre eux des relations de position identiques à celles qu'ont les éléments des ensembles bien ordennés.

[28] Pour dire après cela qu'on a établi que tout ensemble peut être mis sous la forme d'un ensemble bien ordenné, il faut donner aux mots une extension extraordinaire et, j'ajouterai, trompeuse.

Lebesgue concorda que foi muita engenhosidade de Zermelo demonstrar que se sabe resolver o problema A (colocar um conjunto M sob a forma bem ordenada) todas as vezes que se souber resolver o problema B (fazer corresponder a cada subconjunto M' de M um elemento particular m' de M'). No entanto, faz a seguinte crítica:

> Infelizmente, o problema B é fácil de ser resolvido, ao que parece, somente para os conjuntos que se sabe bem ordenar; por conseqüência, não temos uma solução geral do problema A.[29] (LEBESGUE in: HADAMARD, 1905, p. 264-265).

Para o autor citado (p. 265), definir um conjunto é nomear uma propriedade que caracterize seus elementos, mas, tomando-se por base a definição dada por Zermelo, não se sabe nada sobre os elementos do conjunto M nem como fazer a distinção entre eles e, menos ainda, classificá-los como seria preciso para resolver o problema A.

Na opinião de Lebesgue, Hadamard, diferente de Borel, interpretou a nota de Zermelo "[...] como um ensaio, não de resolução efetiva de A, mas de demonstração da existência da solução."[30] (Ibid., p. 265). Mas, a questão levantada por Lebesgue é não acreditar ser possível provar que um objeto matemático exista sem que o mesmo tenha sido descrito. Aqui reaparece a distinção feita por Tannery. Lebesgue, como construtivista, não acredita que podemos mostrar a existência de um objeto sem construí-lo por meio de algumas de suas características. Por pensar assim, Lebesgue (Ibid., p. 265) afirma que não se pode fazer distinção entre o problema A e o problema C, assim, enunciado:

C: Todo conjunto pode ser bem ordenado?

Relembrando que Zermelo fala da existência de uma correspondência entre os subconjuntos M' de M e alguns elementos m' distinguidos desses

---

[29] Malheureusement le problème B n'est facile à résoudre, à ce qu'il semble, que pour les ensembles qu'on sait bien ordonner; par suite on n'a pas une solution générale du problème A.

[30] [...] comme un essai, non pas de résolution effective de A, mais de démonstration d'existence de la solution.

subconjuntos, Lebesgue argumenta que não acha evidente poder usar esta existência no sentido apresentado por Zermelo. Para Lebesgue, seria evidente escolher um elemento m' em M' se M' existisse em um sentido quase kroneckeriano, ou seja, se fosse possível nomear alguns dos elementos de M' (LEBESGUE in: HADAMARD, 1905, p. 266).

Se uma classe ou um conjunto de objetos pudesse ser definida(o) somente como afirmou Lebesgue, ou seja, nomeando uma propriedade que caracteriza seus elementos, neste caso, a Matemática seria uma ciência analítica de conceitos (apresentada por meio de descrições) e isso Lebesgue, ao que parece, não aceitava. Para ele, a Matemática aplicada foi mais importante do que a Matemática pura e, na Matemática aplicada, sempre há métodos para identificar objetos sem descrevê-los. Ele pareceu empirista e idealista ao mesmo tempo, o que se caracteriza em uma contradição.

Vale a pena destacar um aspecto muito importante e claramente enunciado por Lebesgue. Para ele, o ponto “chave” é a identidade dos objetos e não a existência concreta dos mesmos. Na Matemática pura, certamente, não existem objetos concretos, mas há necessidade de identificar entidades. Em outro texto, escrito também, em 1905, mas, publicado só em 1971, Lebesgue esclarece novamente a distinção entre existência e identidade escrevendo:

> Quando um Idealista quer determinar uma função, ele não busca uma propriedade característica que permitiria, a ele como aos outros, ter a certeza de pensar sempre na mesma função, se contenta em dizer que escolheu esta função, que a determina; afirma aos outros e a si mesmo que é sempre na mesma função que pensa. Esta afirmação, que o Idealista reconhece e declara incontrolável, parece não ter sentido para o Empirista.[31] (LEBESGUE, 1971, p. 39).

[31] Quand un Idéaliste veut déterminer une fonction il n’en cherche pas une propriété caractéristique qui lui permettrait, à lui comme aux autres, d’être certain de penser toujours à la même fonction, il se contente de dire qu’il choisit cette fonction, qu’il la détermine; il affirme aux autres, il s’affirme à lui-même que c’est toujours à la même fonction qu’il pense. Cette affirmation, que l’Idéaliste reconnaît et déclare incontrôlable, paraît dépourvue de sens à l’Empiriste.

Quarta carta: de Hadamard a Borel

Depois de ler as cartas escritas por Baire e Lebesgue, Hadamard escreveu a Borel. Nesta correspondência, argumenta que depois da carta de Lebesgue, tudo ficou muito claro para ele, no sentido que a questão em discussão tem a ver com a distinção entre o que é determinado e o que pode ser descrito. A esse respeito, Lebesgue, Baire e Borel adotaram, a visão kroneckeriana (HADAMARD, 1905, p. 269). Kronecker, por exemplo, só aceitava a existência de números descritos por meio de uma regra ou um algoritmo para calcular os dígitos na representação decimal. Desta maneira, só um conjunto enumerável de números poderia ser descrito.

Hadamard argumenta que, enquanto Baire, Borel e Lebesgue concordam com a idéia de que não se pode demonstrar a existência de um objeto matemático sem o descrever, ele tem opinião contrária. Pois, ele, assim como Zermelo, admitem a existência do conjunto das correspondências entre os subconjuntos M' e os elementos distinguidos m'. No entanto, concorda com o fato de que é impossível nomear os elementos desse conjunto (Ibid., p. 269-270).

Hadamard entende que a discussão suscitada sobre a nota de Zermelo, tem o mesmo teor que a levantada entre Riemann e Weierstrass, no que diz respeito à noção de função. Para ele, a lei que Lebesgue exige, parece assemelhar-se à expressão analítica que cobrava Weierstrass (Ibid., p. 270).

A saber, a discussão entre Riemann e Weierstrass referia-se ao fato de como introduzir uma função complexa diferenciável. Weierstrass achava que deveria ser por séries e Riemann achava que deveria ser geometricamente, o que caracteriza uma briga por gosto ou estilo. Os dois aceitavam a função, mas queriam representá-la de forma diferente.

Quinta carta: de Borel a Hadamard

Nesta carta, Borel reforça algumas objeções já feitas anteriormente. Em primeiro, o problema da identidade dos objetos matemáticos:

> Como o Sr. Zermelo pode assegurar de que nos diversos pontos de seu argumento, ele fala *da mesma* escolha do elemento distinguido, já que não o caracteriza por nada *para ele mesmo*.[32] (BOREL in: HADAMARD, 1905, p. 272).

Além disso, Borel acrescenta:

> Pode-se perguntar qual é o valor real desses argumento que não considero como válidos absolutamente e que, no entanto, conduzem subseqüentemente a resultados efetivos. De fato, parece que, se eles fossem totalmente desprovidos de valor, não conduziriam a nada, pois seriam agregados de palavras vazias de sentido. Creio que seriamos assim muito severos e que, eles têm um valor análogo àqueles de algumas teorias da Física matemática, pelas quais não pretendemos exprimir a realidade, mas ter um guia que nos permita, por analogia, descobrir novos fenômenos, que faltam depois verificar.[33] (Ibid., p. 273).

II.3 A FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE HENRI LEBESGUE

Henri Lebesgue sempre se preocupou com as questões relacionadas ao ensino da Matemática, dedicando-se à Didática, História e Filosofia da mesma. No entanto, suas idéias a esse respeito são pouco conhecidas e divulgadas. Por isso, objetivamos apresentar nesta tese alguns aspectos da filosofia da Matemática propagada por ele. Já percebemos as tendências empiristas e construtivistas no pensamento de Lebesgue. Segundo Moore, Lebesgue e seus colegas Borel, Baire e Poincaré (1854-1912), às vezes, são também chamados “semi-intuicionistas” (MOORE, 1982, p. 92).

---

[32] Comment M. Zermelo peut-il être assuré qu’aux divers points de son raisonnement il parle *du même* choix de l’élément distingué, puisqu’il ne le caractérise par rien *pour lui-même*.

[33] On peut se demander quelle est la valeur réelle de ces raisonnements que je ne regard pas comme valables absolument et qui cependant conduisent ultérieurement à des résultats effectifs. Il semble en effet que, s’ils étaient dépourvus de toute valeur, ils ne pourraient conduire à rien, car ce seraient des assemblages de mots vides de sens. Je crois qu’on serait ainsi trop sévère et qu’ils ont une valeur analogue à celle de certaines théories de Physique mathématique, par lesquelles nous ne prétendons pas exprimer la réalité, mais avoir un guide qui nous permette, par analogie, de découvrir des phénomènes nouveaux, qu’il reste ensuite à vérifier.

Para Lebesgue, a Matemática tem valor como instrumento, por isso, os processos de medição exercem importância fundamental.

> A medida é o ponto de partida de todas as aplicações matemáticas e desde que a matemática aplicada precedia a matemática pura (isto é, a lógica matemática), é normalmente suposto que a geometria surgiu da medida de áreas e volumes. Além disso, as medidas nos fornecem os números, o próprio objeto da análise. Por isso, nós discutimos a medida das grandezas para todos os níveis do ensino: primário, secundário e superior. O estudo feito em todos esses três níveis do ensino nos dá um exemplo do esforço de entender e coordenar a totalidade, que contribuiria, como me parece, mais efetivamente para o treinamento dos futuros professores do que o trabalho que é exigido deles agora, isto é, um refinamento lingüístico de aulas isoladas.[34] (LEBESGUE, 1966, p. 11).

Vale a pena acrescentar três observações a esse respeito:

1º) A mais fundamental é que, de acordo com a opinião de Lebesgue, a Matemática aplicada é o fundamento da Matemática pura.

2º) Lebesgue tem uma visão bastante formal da Matemática pura, ou seja, ele usa os termos "matemática pura" e "lógica matemática" como sinônimos, significando que a Matemática pura é mais uma linguagem do que uma ciência definida em termos de seus objetos particulares.

3º) Vale a pena observar que, para Lebesgue, o conceito de Educação Matemática é estreitamente ligado à Filosofia da Matemática.

A filosofia da Matemática que ele defende e considera simples e utilitária, deveria simplesmente explicar as práticas úteis desenvolvidas pelos matemáticos.

II.3.1 A epistemologia Matemática do ponto de vista das aplicações

Com vimos, Lebesgue (1935, p. 2) considerava que a medida de quantidade é o início da Matemática aplicada que, por sua vez, marca o início e

[34] Measure is the starting point of all mathematical applications, and since applied mathematics obviously preceded pure mathematics (mathematical logic), it is usually supposed that geometry originated in the measure of areas and volumes. Furthermore, measure provides us with numbers, the very subject of analysis. Therefore, we discuss the measure of quantities at all three levels of teaching: primary, secondary, and higher. The study of what is done at all three teaching levels furnishes us with an example of an effort to coordinate and to comprehend the whole, which, it seems to me, would contribute more effectively to the training of future teachers than the work that is now required of them – verbal refinement of isolated lessons.

os fundamentos da Matemática pura; e, ainda, a medida fornece o número, ou seja, o próprio objeto da Análise. Para ele,

> [...] os Antigos construíam, com a ajuda das frações, um contínuo perfeitamente suficiente para todas as experiências humanas, relativa a precisão que pudessem alcançar, porém insuficiente logicamente.[35] (LEBESGUE, 1935, p. 181).

É insuficiente em razão do surgimento do problema das grandezas incomensuráveis. Problema este considerado como o primeiro grande obstáculo de uma matematização ou aritmetização do mundo.

Pitágoras, que viveu no século V a.C., acreditava que todas as coisas são números. Tudo, no mundo, seja a construção de pirâmides, as coisas da natureza, a harmonia da música ou o que quer que seja expressa uma série de relações numéricas e pode ser descrita por essas relações. Aos pitagóricos, a tragédia era que sua mais bem conhecida descoberta refutava esse ponto de vista, a saber, o famoso teorema de Pitágoras a respeito dos triângulos retângulos que, provavelmente, levou a descoberta dos incomensuráveis. De acordo com o teorema de Pitágoras, o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo, no qual os outros dois lados fossem o comprimento de uma unidade, seria igual à raiz quadrada de dois. O problema é que a raiz quadrada de dois é irracional, isto é, ela não pode ser expressa como a razão entre dois números inteiros. Esta questão mostra que o processo de medição é um processo de aproximação que exige lidar com o problema do infinito já nos fundamentos dos números reais. Só no século XIX foi desenvolvida uma teoria do infinito atual, primeiro por Bernhard Bolzano (1781-1848) e depois em uma forma mais abrangente por Georg Cantor (1845-1918).

---

[35] [...] les Anciens avaient construit, à l'aide des fractions, un continu parfaitement suffisant pour toutes les expériences humaines, quelque précision qu'elles puissent atteindre, mais infuffisant logiquement.

O pitagorismo moderno é representado por Cantor e pela idéia de que tudo é conjunto e de novo o problema do contínuo – como mostra a hipótese do contínuo de Cantor –, fornece um dos mais importantes desafios. Esta idéia de que tudo é conjunto, teve muita importância na reforma da Matemática Moderna na época de 1960 a 1970.

Cantor cria a teoria dos conjuntos infinitos como uma ontologia, ou seja, uma teoria geral de objetos da Matemática. Isto representa a criação de uma base com fundamentos universais para toda a Matemática. Tem a convicção de que todos os conceitos matemáticos são explicáveis pela teoria de conjuntos: os números são explicados em termos da teoria dos conjuntos e o resto deveria ser explicado por meio dos números, ou seja, em termos da aritmética ou da teoria dos números. Além do conceito de número, de função, outro conceito central e de fundamental importância que só pôde ser resolvido com a introdução da teoria dos conjuntos, é o de igualdade ou equação. Na geometria, desde Euclides ($\cong$300 a.C.), pensava-se claramente que igualdade geométrica era congruência, o que gerou confusão, porque figuras que são claramente distintas, poderiam ainda ser congruentes. Mas a teoria dos conjuntos esclarece essas diferenças, de forma que: duas figuras geométricas são iguais quando consistem dos mesmos pontos e congruentes quando têm formas e dimensões iguais. Isto manifesta não uma maneira de falar sobre o mundo, mas falar sobre os objetos matemáticos.

Dentre outros aspectos, Cantor mostrou que nem todos os conjuntos infinitos têm a mesma potência; que, dado um conjunto A qualquer, é sempre possível construir um outro conjunto B com uma cardinalidade maior. Cantor também mostrou que o contínuo do conjunto dos números reais não é equivalente a nenhum conjunto enumerável e, por isso, existem, pelo menos, dois tipos de infinidade: a enumerável dos inteiros e a não enumerável dos reais. Isto significa que não está mais óbvio como a Matemática como atividade (a atividade de medição, por exemplo) e a teoria dos conjuntos, em geral, podem ser relacionadas. Já os números naturais podem ser introduzidos de duas maneiras diferentes: por meio do aspecto ordinal ou do aspecto cardinal.

Como Platão (428-347 a.C.), Cantor acredita que a Matemática tem objetos ideais, isto é, conjuntos infinitos, da mesma forma que o mundo tem objetos concretos.

Lebesgue, ao contrário de Cantor, foi mais modesto. Não tinha a intenção de explicar o mundo ou a Matemática e recusava a fundamentação de Cantor, pois entendia que nem tudo no mundo é representado por conjunto (LEBESGUE, 1935, p. 5). Nesta perspectiva, parece que, para Lebesgue, conjunto não é tão fundamental à Matemática. Como vimos na discussão sobre a teoria dos conjuntos, ele exigia que os conjuntos deveriam ser caracterizados por intermédio de um conceito para que pudessem existir.

Podemos, então, levantar três teses:

(1) Para Lebesgue, tudo é medição.

(2) Para Pitágoras, tudo é número, significando que todas as medidas resultariam em números racionais.

(3) Para Cantor, tudo é conjunto, significando que a Matemática deveria ser uma teoria de pura extensão e todos os conceitos deveriam ser considerados, em extensão, em termos da teoria de conjuntos. Cantor, Frege e Russell, por exemplo, tentaram basear o conceito de número na teoria dos conjuntos.

A tese (1) assume uma posição algorítmica, prática, ou construtiva. Lebesgue fala dos processos de determinação de relações numéricas. As teses (2) e (3) defendem posições teóricas ou metafísicas que já não são totalmente viáveis. A teoria de conjuntos, por exemplo, não fornece por si uma teoria de medição, pois, como ilustração, o intervalo $[0, 1]$ tem a mesma cardinalidade que a reta infinita. Lebesgue costumava chamar atenção para o fato, por meio de um aparente paradoxo: $"1 = 2"$.

Este paradoxo surge de uma questão que o autor apresenta e discute no artigo *Quelques remarques sur la définition de l'aire des surfaces* (Algumas observações sobre a definição de área de superfícies), extraído de uma carta que endereçou a Sierpinski, publicado, em 1925, na *Fundamenta Mathematicae*, (anexo 4); e, posteriormente, em 1935, discute novamente, a mesma questão, na obra *Sur la mesure des grandeurs* (Sobre a medida das grandezas).

Em essência, a questão é: Considerando-se um triângulo ABC, conforme a Figura II.1, sendo D, E, F os pontos médios de AB, BC, AC, respectivamente, tem-se que a linha quebrada $BDEFC$ tem por comprimento $AB + AC$. Repetindo a operação e G, H, I, J, K, L sendo os pontos médios de $BD, BE, DE, EF, EC, FC,$ respectivamente, tem-se $AB + AC = BG + GH + HI + IE + EJ + JK + KL + LC$. Continuando o processo indefinidamente, admitindo-se de modo implícito que o comprimento de uma curva é o limite dos comprimentos das curvas tendendo para ela, tem-se que a linha quebrada tem BC por limite, ou seja, o limite de seus comprimentos, isto é, o comprimento comum $AB + AC$ é igual a BC (LEBESGUE, 1925, p. 160-161).

Examinando atentamente a questão, Lebesgue (Ibid., p. 163) observa que: todo número igual ou superior a BC mede o segmento BC. Após dez anos, volta ao assunto argumentando:

> [...] nossas linhas quebradas em dentes de serra que tendem para BC, têm por medida $AB + AC$, quer dizer, não importa qual número superior à BC. Portanto, se se tem uma seqüência de linhas poligonais tendendo a uma curva *C* e cujos comprimentos têm um limite *L*, operando-se sobre cada lado destas linhas, bem como sobre BC deduzimos novas linhas cujo limite dos comprimentos será tal número que desejarmos, superior à *L*. *Os limites dos comprimentos das linhas poligonais tendendo para uma curva C são todos números superiores a algum número* L_0 *e esse número* L_0.[36] (LEBESGUE, 1935, p. 98).

Por exemplo, no caso de um triângulo eqüilátero de lado unitário chegaremos, pelo raciocínio descrito anteriormente, a $BC = 2$, ou seja, $1 = 2$.

[36] [...] nos lignes brisées en dents de scie, que tendent vers BC ont pour mesure $AB + AC$, c'est-à-dire n'importe quel nombre supérieur à BC. Donc, si l'on a une suite de lignes polygonales tendant vers une courbe *C* et dont les longueurs ont une limite *L*, en opérant sur chaque côté de ces lignes comme sur BC on en déduit de nouvelles lignes dont le limite des longueurs sera tel nombre qui nous plaira, supéieur à *L*. *Les limites des longueurs de lignes polygonales tendant vers une courbe C sont tous les nombres supérieurs à un nombre* L_0 *et ce nombre* L_0.

Ainda, conforme sugere a Figura II.2, a medida de BC poderia variar dependendo do triângulo inicialmente idealizado, de forma que qualquer número maior que 1 poderia corresponder à medida de BC, o que não faz sentido.

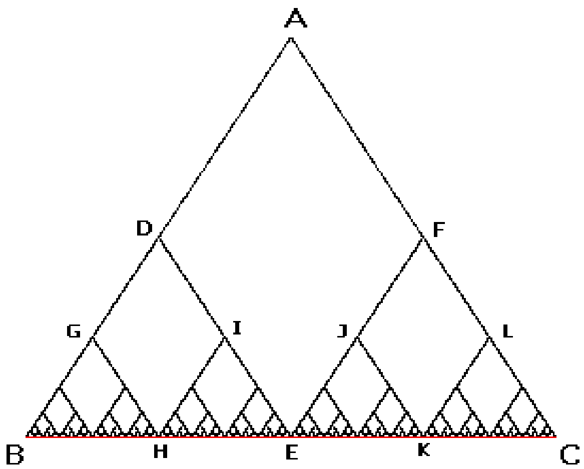


Fig. II.1

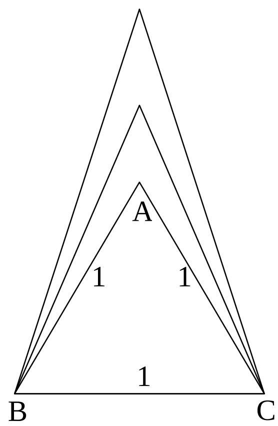


Fig. II.2

Por isso, Lebesgue afirma que, para obter o valor aproximado do segmento BC,

> [...] convém não escolher o caminho poligonal *BGHIEJKLC*, em outras palavras, é preciso evitar os caminhos inutilmente complicados. [...] Portanto, devemos escolher polígonos simples; [...][37] (LEBESGUE, 1925, p. 162-163).

Lebesgue define que o comprimento de uma curva é o menor dos limites dos comprimentos das seqüências de polígonos, tendendo uniformemente à curva. Por isso, o único procedimento que ele considera para o exemplo dado é a medida direta do segmento BC, ou seja, para determinar a medida do segmento BC usa-se o próprio segmento BC (Ibid., p. 161; 163).

Para Lebesgue, o resultado da medição só tem valor ou sentido se relacionado a um procedimento bem aceitável, bem determinado de medição. Por isso, não se deve buscar aproximações, mas, sim, como chamamos atualmente,

[37] [...] convient de ne pas choisir le chemin polygonal *BGHIEJKLC*, en d'autres termes, il faut éviter les chemins inutilement compliqués. [...] Donc il nous faut choisir des polygones simples; [...]

o ínfimo e o supremo de todos os limites, ou seja, a medida exterior e a medida interior, assim definidas por Lebesgue:

> Um conjunto *E* sendo dado, podemos por uma infinidade de maneiras cobrir seus pontos com um número finito ou infinito enumerável de intervalos. O conjunto E_1 dos pontos desses intervalos contém *E*, portanto, a medida $m(E)$ de *E* é no máximo igual à $m(E_1)$ de E_1, ou seja, no máximo igual à soma dos comprimentos dos intervalos considerados. O limite inferior dessa soma é um limite superior de $m(E)$, o qual denominaremos a medida exterior de *E*, $m_e(E)$.
>
> Supomos que todos os pontos de *E* pertençam a um segmento AB. Chamaremos complementar de *E* em relação à AB, $C_{AB}(E)$, o conjunto $AB - E$. Uma vez que a medida de $C_{AB}(E)$ é no máximo $m_e[C_{AB}(E)]$, aquela de *E* é ao menos $m(AB) - m_e[C_{AB}(E)]$. Este número não depende daquele dos segmentos AB contendo *E* escolhido; nos o chamaremos de medida interior de *E*, $m_i(E)$. Dois conjuntos iguais têm medidas interiores iguais e medidas exteriores iguais. Além disso, uma vez que se tem: $m_e(E) + m_e[C_{AB}(E)] \geq m(AB)$ a medida exterior jamais é inferior à medida interior. Se o problema da medida é possível, a medida de um conjunto *E* está compreendida entre os dois números $m_e(E)$, $m_i(E)$ que acabamos de definir.
>
> Chamaremos *conjuntos mensuráveis* [...] *aqueles cujas medidas exterior e interior são iguais*, o valor comum destes dois números será a medida do conjunto, se o problema da medida for possível.[38] (LEBESGUE, 1902, p. 7-8).

Retornando às teses levantadas anteriormente e buscando a diferença entre os pontos de vista de Pitágoras e Lebesgue quanto aos números irracionais ou às grandezas incomensuráveis, percebemos que Pitágoras acreditava que tudo pode ser representado pelas propriedades intrínsecas dos inteiros e suas

---

[38] Un ensemble E étant donné, on peut d'une infinité de manières enfermer ses points dans un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles. L'ensemble E_1 des points de ces intervalles contient *E* donc la mesures $m(E)$ de *E* est au plus égale à celle $m(E_1)$ de E_1, c'est à dire au plus égale à la somme des longueurs des intervalles considérés. La limite inférieure de cette somme est une limite supérieure de $m(E)$, nous l'appellorons la mesure extérieure de *E*, $m_e(E)$.

Supposons que tous les points de *E* appartiennent à un segment AB. Nous appellerons complémentaire de *E* par rapport à AB, $C_{AB}(B)$, l'ensemble $AB - E$. Puisque la mesure de $C_{AB}(B)$ est au plus $m_e[C_{AB}(E)]$ celle de *E* est au moins $m(AB) - m_e[C_{AB}(E)]$. Ce nombre ne dépend pas de celui des segmens AB contenant *E* choisi; nous l'appellerons la mesure intérieure de *E*, $m_i(E)$. Deux ensembles égaux ont des mesures intérieures égales et des mesures extérieures égales, D'ailleurs puisque l'on a: $m_e(E) + m_e[C_{AB}(E)] \geq m(AB)$ la mesure extérieure n'est jamais inférieure à la mesure intérieure. Si le problème de la mesure est possible, la mesure d'un ensemble *E* est comprise entre les deux nombres $m_e(E)$, $m_i(E)$ que nous venons de définir.

Nous appellerons *ensembles mesurables* [...] *ceux dont les mesures extérieure et intérieure sont égales*, la valeur commune de ces deux nombres sera la mesure de l'ensemble, si le problème de la mesure est possible.

razões (BOYER, 1996, p. 53). Lebesgue considerava que o importante é o processo da determinação do número, ou seja, o processo de medição (LEBESGUE, 1935, p. 2). Como já vimos, pregava que existência ou fatos não têm sentido fora das possibilidades da definição ou determinação. Para ele, a teoria de conjuntos em si não é suficiente para resolver o problema da aplicação da aritmética.

> A aritmética, utiliza somente um número pequeno de experiências empíricas, cada uma das quais tendo sido repetida muitas vezes por cada homem, desde que os homens existem. Desta forma, sabemos, sem hesitar, em quais casos a aritmética se aplica e em quais casos ela não se aplica. Nestes últimos casos, a idéia de aplicar a aritmética não nos ocorre nem um instante; pensamos em aplicar a aritmética somente quando ela se aplica, de modo que nos esquecemos que existem casos em que ela não se aplica: [...]
>
> – Em uma jaula coloco dois animais e, em seguida, mais dois; quantos animais a jaula contém? – Sua má fé, você diz, é mais gritante ainda; isso depende da espécie desses animais, um poderia devorar os outros; é necessário também saber se a contagem deve acontecer imediatamente ou daqui a um ano, quando alguns animais poderiam estar mortos ou ter dado cria. Em resumo, você fala de coleções as quais não se sabe se são imutáveis, se cada objeto conserva sua individualidade, se não há objetos que aparecem ou desaparecem.
>
> – O que quer dizer, senão que certas condições devem estar reunidas para que a aritmética se aplique? Quanto à regra que você deve me dar, para reconhecer se ela se aplica, é certamente, experimentalmente, mas não tem nenhum valor lógico. Ela é o testemunho que a aritmética se aplica quando se aplica. E é por isso que não podemos demonstrar que dois e dois fazem quatro, que é, contudo, verdade por excelência, pois jamais nos enganamos usando-a.[39] (Ibid., p. 5-6).

Na realidade, Lebesgue dá ênfase à atividade e à língua. A importância disso está na superação da dicotomia entre sujeito e objeto. O empirismo destacava a importância do objeto da realidade objetiva. O idealismo, ao

---

[39] L'arithmétique, elle, n'utilise qu'un très petit nombre d'expériences, dont chacune a été répétée un nombre prodigieux de fois par chaque homme, depuis qu'il y a des hommes. Aussi nous savons, sans hésitation, dans quels cas l'arithmétique s'applique, dans quels cas elle ne s'applique pas. Dans ces derniers cas, l'idée d'appliquer l'arithmétique ne nous effleure pas un instant; nous ne pensons à appliquer l'arithmétique que lorsqu'elle s'applique, si bien que nous oublions qu'il y a des cas où elle ne s'applique pas: [...]
– Dans une cage je mets deux animaux, puis encore deux animaux; combien la cage contient-elle d'animaux?
– Votre mauvaise foi, dites-vous, est plus éclatante encore; cela dépend de l'espèce de ces animaux, l'un d'entre eux pourrait dévorer les autres; il faut aussi savoir si le décompte doit avoir lieu immédiatement ou dans un an, alors que des animaux pourraient être morts ou avoir eu des petits. En somme, vous parlez de collections desquelles on ne sait si elles sont immuables, si chaque objet y garde son individualité, s'il n'y a pas des objets qui apparaissent ou disparaissent.
– Qu'est-ce à dire, sinon que certaines conditions doivent être remplies pour que l'arithmétique s'applique? Quant à la règle, pour reconnaître si elle s'applique, que vous venez de me donner, elle est certes excellente pratiquement, expérimentalement, mais ele n'a aucune valeur logique. Elle est l'aveu que l'arithmétique s'applique quand elle s'applique. Et c'est pourquoi on ne peut pas démontrer que deux et deux font quatre, ce qui est pourtant la vérité par excellence, car jamais nous ne nous trompons en l'utilisant.

contrário, dá ênfase só às idéias. Já a atividade é uma relação entre sujeito e objeto, e o desenvolvimento da atividade e seus instrumentos caracteriza o conhecimento. Para Lebesgue, a Matemática é um instrumento, este é o ponto de vista da atividade.

Neste sentido, na tentativa de superar a contradição infértil entre empirismo e idealismo, Lebesgue foi uma pessoa muito importante que sempre destacou o papel fundamental da atividade, pois não existe relação entre realidade e objeto sem a atividade. Por exemplo, as frases, os teoremas, a própria linguagem não têm relação com a realidade em si mesmo. É o uso da linguagem que estabelece este relacionamento entre “a fala” e o “do que se está falando”. Lebesgue observava estes fatos a respeito da Matemática aplicada; quanto à Matemática pura, Lebesgue, como nós vimos na discussão sobre o axioma da escolha, foi bastante idealista.

A importância dada por ele à atividade surge do fato que o resultado da medição está relacionado à maneira como esta foi feita.

II.3.2 A contribuição de Lebesgue para o encontro realizado em Zurich sobre os Fundamentos e o Método da Ciência Matemática em 1938

No período de 6 a 9 de dezembro de 1938, matemáticos, lógicos e filósofos de diversos países reuniram-se na École Polytechnique Fédérale de Zurich, na Suíça, para apresentarem e discutirem suas visões a respeito do problema dos fundamentos e do método da ciência matemática no encontro denominado *Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques* (Discussões de Zurique sobre os fundamentos e o método da ciência matemática).

A discussão foi organizada pelo filósofo suíço Ferdinand Gonseth (1890-1975), professor da Escola Politécnica Federal de Zurique, um especialista da Filosofia das Ciências, em particular, da Matemática. Na época, sua forma de pensar gerou um significativo impacto no mundo científico, provocado pela crise dos fundamentos, declarada pelas primeiras contradições nascidas da teoria dos conjuntos de Cantor. Gonseth era contra o formalismo, acreditava que a dialética existia não só na Filosofia, mas também na Matemática. Por estar em busca de uma interpretação filosófica para a Matemática, resolveu organizar o encontro, no qual teve a honra de presidir os debates. Por julgar importante tornar público no mundo científico os resultados das discussões de Zurique, Gonseth publicou, em 1941, as palestras proferidas no referido encontro, que foram:

Discours d'ouverture (Discurso de abertura), pelo Prof. Dr. A Rohn, Presidente do Conselho da Escola Politécnica Federal de Zurique.

Sur la doctrine préalable des vérités élémentaires (Sobre a doutrina preliminar das verdades elementares), por F. Gonseth, Presidente dos debates e Professor da Escola Politécnica Federal de Zurique.

Sur la portée du théorème de Löwenhein-Skolem (Sobre o impacto do teorema de Löwenhein-Skolem), por Th. Skolem, Professor da Universidade de Oslo.

L'analyse générale et la question des fondements (A análise geral e a questão dos fundamentos), por M. Fréchet, Professor do Instituto Henri Poincaré de Paris.

Die Logik und das Grundlagenproblem (A lógica e o problema dos fundamentos da Matemática), por Jan Lukasiewicz, Professor da Universidade Joseph Pilsudski de Varsóvia, Polônia.

Les controverses sur la théorie des ensembles et la question des fondements (As controvérsias sobre a teoria dos conjuntos e a questão dos fundamentos), por H. Lebesgue, Professor do Colégio da França em Paris, tendo como interventor G. Polya, Professor da Escola Politécnica Federal de Zurique.

L'axiome du choix et l'hypothèse du continu (O axioma da escolha e a hipótese do contínuo), por W. Sierpinski, Professor da Universidade Joseph Pilsudski de Varsóvia.

Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration (Sobre as questões metodológicas atuais da teoria hilbertiana da demonstração), por P. Bernays, Professor da École Polytechnique Fédérale de Zurich.

A propos de la discussion sur les fondements des mathématiques (A propósito da discussão sobre os fundamentos da matemática), por M. P. Finsler, Professor da Université de Zurich.

Sur le rôle unificateur de l'idée de dialectique (Sobre o papel unificador da idéia de dialética), por M. F. Gonseth.

Além dos conferencistas, participaram também do encontro os matemáticos:

M. Barzin, professor da Université de Bruxelles.

J. J. Burckhardt, P. D. da Université de Zurich.

J. L. Destouches, pesquisador do Institut Henri Poincaré de Paris.

K. Dúrr, professor da Université de Zurich.

F. Enriques, professor da Université de Rome.

R. Feys, professor da Université Catholique de Bruxelles.

J. Franel, professor da École Polytechnique Fédérale de Zurich.

R. Fueter, professor da Université de Zurich.

M. Gut, professor da Université de Zurich.

H. Hopf, professor da École Polytechnique Fédérale de Zurich.

J. Jorgensen, professor da Université de Copenhague.

B. Von Kerekjarto, professor da Université de Budapest.

A. Kienast, professor da École Polytechnique Fédérale de Zurich.

L. Kollros, professor da École Polytechnique Fédérale de Zurich.

S. Mazurkiewitz, professor da Université Joseph Pilsudski de Varsovie.

A. Pfluger, professor da Université de Fribourg.

M. Plancherel, professor da École Polytechnique Fédérale de Zurich.

G. Polya, professor da École Polytechnique Fédérale de Zurich.

G. de Rahm, professor da Université de Lausanne.

W. Saxer, professor da École Polytechnique Fédérale de Zurich.

A. Speiser, professor da Université de Zurich.

E. Stiefel, comissão de cursos da École Polytechnique Fédérale de Zurich.

E. Völlm, P. D. da École Polytechnique Fédérale de Zurich.

R. Wavre, professor da Université de Genève.

E. Walter, professor em Zurich.

Lebesgue foi convidado para proferir uma palestra no encontro, assim, aproveitou a oportunidade para expor a todos os participantes sua concepção sobre a filosofia da Matemática, exemplificando com questões referentes aos fundamentos da teoria dos conjuntos. A cópia da publicação da palestra de Lebesgue – *Les controverses sur la théorie des ensembles et la question des fondements* – encontra-se no anexo 5.

Este é o único texto em que Lebesgue apresenta, de maneira mais coerente e ampla, sua filosofia da Matemática. Por isso, passamos a expor suas idéias sobre a mesma, explanada nessa palestra.

II.3.2.1 A filosofia da Matemática de Henri Lebesgue propagada em sua palestra: *As controvérsias sobre a teoria dos conjuntos e a questão dos fundamentos*

Na palestra, sobre o tema acima, Lebesgue inicia dizendo que a filosofia da Matemática pode ser criada somente pelo matemático reflexivo sobre a própria atividade e é exatamente sobre esta filosofia que ele vai falar (LEBESGUE, 1941, p. 109).

O autor explica que se trata de "uma filosofia utilitária e muito simples", diz que desejaria, simplesmente, que os matemáticos ousassem formular explicitamente os exames críticos que foram úteis, tendo em vista que só os matemáticos poderiam fazer uma filosofia da Matemática que fosse útil (LEBESGUE, 1941, p. 109). Isto porque, é o matemático que faz a Matemática e durante esta atividade, ele ganha algumas experiências que devem ser a base de uma filosofia da Matemática, ou seja, essa filosofia é nada mais do que uma manifestação explícita dessas experiências que todo matemático possui por causa de sua *práxis*.

Lebesgue classifica sua filosofia de "filosofia de segunda zona". Hoje em dia, talvez, falássemos de uma filosofia "naturalizada" em contraste a uma filosofia transcendente. O autor acredita que este seja o "único meio de acesso à filosofia verdadeira" (Ibid., p. 109). Para ele, as reflexões técnicas (dos matemáticos) podem ajudar os filósofos, da mesma forma, que as observações de trabalhadores manuais podem orientar, às vezes, os físicos e os químicos (Ibid., p. 110).

A idéia, aqui, é de que todo conhecimento surge da atividade, ou seja, tudo surge das operações concretas e depois vem a abstração, a generalização, a simbolização, transformando a prática em teorias. Esta é a atitude de Lebesgue. Em vez de buscar pelos fundamentos da Matemática, querendo saber, por exemplo, o que é um número, quais são os números e como se relacionam dentro da própria Matemática, busca pelos métodos e instrumentos. Só quer saber como funciona o processo de medição. Para ele, "A matemática será apenas mais um instrumento que outros, filósofos, físicos, engenheiros farão talvez um uso útil."[40]. (Ibid., p. 121).

Segundo Lebesgue, esta "filosofia de segunda zona" seria útil também para os pesquisadores. "Ela deveria examinar todos os capítulos da matemática, os

[40] Les mathématiques ne seront plus qu'un instrument dont d'autres, philosophes, physiciens, ingénieurs feront peut-être un emploi utile.

primeiros como os últimos e considerar as técnicas como os princípios."[41] (LEBESGUE, 1941, p. 110). Para Lebesgue, quando examinamos profundamente os elementos de nossa ciência, construídos desde séculos, "[...] examinamos uma obra feita e não estudamos o trabalho de pensamento de quem a construiu. Se vemos bem seus sucessos, somos infinitamente menos informados sobre seus erros e seus insucessos."[42] (Ibid., p. 110). Por isso, Lebesgue julga que a teoria dos conjuntos é de grande atração aos filósofos, pois permite que vejam como foi criado um capítulo da Matemática sem que se precise estudar técnicas difíceis da mesma.

Esta observação feita por Lebesgue é importante porque a maior parte da Filosofia da Matemática, praticada pelos filósofos, limita-se a alguns capítulos da Matemática, entendidos como essenciais na visão dos filósofos e que a partir daí todo o resto da Matemática funcionaria ou se desenvolveria da mesma forma.

Lebesgue argumenta que é preciso examinar a Matemática elementar como a Matemática mais sofisticada e que não se pode generalizar prematuramente, já que todas as áreas da Matemática podem nos trazer novas idéias e novos conhecimentos sobre a Matemática. Para ele: "Mostrar como se constrói a matemática é verdadeiramente estudar seus fundamentos, mas de um ponto de vista que nos faria amplamente sair do domínio da lógica."[43]. (Ibid., p. 110).

O autor considera que é totalmente a favor da filosofia que ele preconiza que

> [...] as observações, as conclusões às quais chegam aqueles que têm por um longo tempo estudado os métodos matemáticos, convergem totalmente ou parcialmente para as observações feitas por um homem que está tencionado simplesmente a

[41] Elle devrait examiner tous les chapitres des mathématiques, les premiers comme les derniers, envisager les techniques comme les principes.

[42] [...] on examine une oeuvre faite, on n'étudie pas le travail de pensée des gens qui l'ont construite. Si nous voyons bien leurs réussites, nous sommes infiniment moins renseignés sur leurs erreurs et leurs insuccès.

[43] Mostrer comment se construisent les mathématiques, c'est bien là en étudier les fondements, mais à un point de vue qui nous ferait largement sortir du domaine de la logique.

> guiar e a estimular sua imaginação afim de melhor adequar o raciocínio às questões que ele considera.[44] (LEBESGUE, 1941, p. 110-111).

Com isto, o autor quer dizer que deseja uma filosofia que seja útil ao praticante da Matemática, ou seja, ele não quer uma teoria separada das atividades matemáticas. Ele quer uma filosofia que oriente, que seja útil ao próprio matemático.

Lebesgue explica que o título de sua palestra era *As controvérsias sobre a teoria dos conjuntos e a questão dos fundamentos*, mas, ao observar que Sierpinski, posteriormente, falaria sobre *O axioma da escolha e a hipótese de contínuo*, preferiu falar apenas de uma dessas controvérsias, a saber, aquela relativa ao axioma da escolha (Ibid., p. 111). Isto porque quis deixar a platéia melhor preparada para a palestra de Sierpinski.

Para entrar na questão das controvérsias sobre o axioma da escolha, Lebesgue julga necessário primeiro contextualizar a teoria dos conjuntos. Começa falando do nascimento de um homem e que este, ainda como bebê, por sucessivas experiências descobre os limites de seu corpo, o "meu e o resto" e subdivide o "resto" em imagens distintas (Ibid., p. 111).

Com a divisão do mundo em objetos distintos, surge a idéia de enumeração. O problema matemático da enumeração, segundo Lebesgue, foi delimitado pelo sentimento de confiança absoluta dado por certos resultados. Para ele, foi por meio de experiências sucessivas marcadas de sucessos e de erros que os homens conquistaram seu objeto de estudo, bem como o modo de raciocínio apropriado a esse estudo (Ibid., p. 110-111).

Isto porque, na Matemática, os resultados podem se relacionar uns com os outros. Não existe uma teoria que não tenha nada a ver com uma outra sobre o mesmo assunto. A continuidade, com o caráter cumulativo dos resultados,

[44] [...] des observations, des conclusions auxquelles sont arrivés ceux qui ont longuement étudié les méthodes des mathématiques, convergent totalement ou partiellement avec des observations faites par un homme qui s'est proposé simplement de guider et de stimuler son imagination afin de mieux approprier le raisonnement aux questions qu'il envisageait.

sempre existiu, desde o princípio da Matemática, por isso, para ele, não há contradição na Matemática.

Lebesgue refere-se à conquista do infinito como uma conquista difícil, que trouxe muitas dúvidas e erros e tentativas várias foram feitas no sentido de se argumentar sobre o mesmo (LEBESGUE, 1941, p. 111).

Entretanto, na tentativa de preservar os caminhos da Matemática tidos, até então, como seguros, é que o infinito atual chegou a ser rejeitado (Ibid., p. 113), tudo em virtude dos limites do domínio da Matemática. Durante vinte séculos, falou-se, sem real conhecimento e sob vários nomes, da passagem ao limite como um modo de fórmula mágica, desobrigada de qualquer prova (Ibid., p. 112). Mas, por fim, os matemáticos entenderam o que significa o termo infinito. Com o uso do processo de cortes, no século XIX,

> [...] torna-se claro que o número, o mais geral, só poderia ser obtido graças a uma infinidade atual de números anteriormente adquiridos, que seria necessário, portanto, admitir um raciocínio que ousasse utilizar como premissas uma infinidade atual de proposições correspondendo de um modo biunívoco aos pontos anteriormente obtidos e considerados.[45] (Ibid., p. 112).

Lebesgue lembra que foi com a teoria dos conjuntos de Cantor que se chegou à constância nos resultados que se deve exigir na Matemática, pois conquistou o domínio do infinito por um discurso lógico e mostrou, também, como fazer algumas distinções como, por exemplo, entre cardinal e ordinal. Em um conjunto finito de números, cardinalidade ou ordinalidade resulta nos mesmos números; já os conjuntos infinitos quebram esta harmonia, esta correspondência entre cardinal e ordinal. Como os exemplos de Cantor dizem respeito a conjuntos, Lebesgue conclui que "a lógica da aritmética não é transportada aos conjuntos", pois, a aritmética permite associar um número somente às coleções finitas (Ibid., p. 113-114).

[45] [...] il devint clair que le nombre le plus général ne pouvait être atteint que grâce à une infinité actuelle de nombres antérieurement acquis, qu'il fallait donc admettre un raisonnement que ose utiliser comme prémisses une infinité actuelle de propositions correspondant d'une façon biunivoque aux points antérieurement abtenus et considérés.

Comenta que em relação à delimitação do objeto, Cantor não faz nenhuma referência, mas, embora tenha feito uso de uma linguagem muito geral, foi extremamente prudente. Desse modo, as dificuldades começaram a surgir quando outras pessoas entraram no campo da discussão da teoria dos conjuntos sem se sentirem na obrigação de atribuir às palavras um sentido matemático bem preciso, ou seja, passaram a usar palavras praticamente vazias de significado, tornando, assim, objeto e objetivo menos claros (LEBESGUE, 1941, p. 114).

Ele também chama a atenção às dificuldades encontradas relativas à consideração do conjunto de todos os conjuntos, mas, pela transformação de opinião provocada por Cantor, as contradições foram chamadas de paradoxos, o que é menos preocupante (Ibid., p. 114). Isto porque uma contradição pode destruir uma teoria matemática ou a Matemática, o que é responsabilidade do matemático, ao passo que o paradoxo não, pois ele passa a ser objeto de estudo dos filósofos.

Para Lebesgue (Ibid., p. 114), a teoria dos conjuntos não fornece nenhuma teoria da aplicação da aritmética, pois “a aritmética se aplica quando se aplica”, ainda, a teoria dos conjuntos no sentido de Cantor obrigava os matemáticos a adicionarem métodos e axiomas que parecem abalar a solidez da Matemática aplicada. Como argumenta,

> Graças a este raciocínio por recorrência transfinita, a teoria dos conjuntos [bem ordenados] é desenvolvida com a mesma simplicidade e a mesma beleza que aquela dos inteiros. Como não fazer aproveitar da mesma vantagem a teoria dos conjuntos em geral? É então que o Sr. Zermelo proclama que todo conjunto pode ser bem ordenado, e esta foi a briga![46] (Ibid., p. 115-116).

Então, relata que

> Dois partidos se formaram a favor e contra isso que se tem chamado às vezes o teorema, às vezes o axioma de Zermelo. Nenhuma demonstração, nem mesmo nenhuma discussão era possível entre esses dois partidos, pois eles não tinham lógica comum. Era a própria lógica que estava em discussão [...]

---

[46] Grâce à ce raisonnement par récurrence transfinie, la théorie des ensembles s’est développée avec la même simplicité et la même beauté que celle des entiers. Comment ne pas faire profiter du même avantage la théorie des ensembles en général? C’est alors que M. Zermelo proclama que tout ensemble peut être bien ordonné, et ce fut la bagarre!

- Vocês utilizam uma infinidade de escolhas sem lei, portanto não determinadas, diziam alguns; porém, vocês sabem bem que só se pode argumentar sobre os seres determinados; há aí uma obrigação que vocês tinham sempre respeitado, é por aí terem fracassado que encontramos os paradoxos da teoria dos conjuntos.
- Sim, diziam os outros, deve-se argumentar sobre seres determinados, mas não é necessário determiná-los por uma lei, cujo enunciado jamais intervém na seqüência. Minhas escolhas são determinadas porque eu as penso determinadas. No mais, em tal parte, vocês também fizeram escolhas sem lei![47] (LEBESGUE, 1941, p. 116).

Contudo, na opinião de Lebesgue, os dois grupos desejavam o crescimento da Matemática, sem que a solidez da mesma fosse comprometida. “Só que o partido ‘a favor’, pensava mais no crescimento e o partido ‘contra’, na solidez.” (Ibid., p. 116). Para ele, as duas tendências eram indispensáveis e acrescenta que

> “É necessário ir em frente, portanto, ter audácia; para obter os resultados é necessário ousar. A timidez é, contudo, algumas vezes preferível à temeridade: Cauchy se resignando à determinação que ele declara um pouco dura, de utilizar apenas as séries convergentes, fez produzir, em pouco tempo, mais progresso do que se tinha feito em um século de utilização de todas as séries. [...] não se pode dar *a priori* razão à uma ou outra dessas tendências. O que se faz necessário, é que cada um trabalhe segundo suas possibilidades: que os que se sentem capazes de utilizar uma lógica nova a utilizem, os resultados que eles obterão permitirão decidir, precisando o objeto e o argumento.”[48] (Ibid., p. 116).

Em trinta anos de uso do axioma de Zermelo, Lebesgue lembra que nenhuma contradição foi encontrada. No entanto, para ele, a questão não é apenas de formalismo. Não basta conseguir coleções de palavras que satisfaçam as regras gramaticais da não-contradição, pois o sentido das palavras também

---

[47] Deux partis se formèrent pour et contre ce qu’on a appelé tantôt le théorème, tantôt l’axiome de Zermelo. Aucune démonstration, ni même aucune discussion n’était possible entre ces deux partis car ils n’avaient pas de logique commune. C’était la logique même qui était en discussion, [...]
Vous utilisez une infinité de choix sans loi, donc non déterminés, disaient les uns; or vous savez bien qu’on ne peut raisonner que sur des êtres déterminés; il y a là une obligation que vous aviez toujours respectée, c’est pour y avoir failli qu’on a rencontré les paradoxes de la théorie des ensembles.
Oui, disaient les autres, il faut raisonner sur des êtres déterminés, mais il n’est pas nécessaire de les déterminer par une loi, dont l’énoncé n’intervient jamais dans la suite. Mes choix sont déterminés parce que je les pense déterminés. Au reste, à tel endroit, vous aussi vous avez fait des choix sans loi!

[48] Il faut aller de l’avant, donc avoir de l’audace; pour obtenir des résultats il faut oser. La timidité est pourtant parfois préférable à la témérité: Cauchy, se résignant à la détermination qu’il déclare un peu dure, de n’utiliser que les séries convergentes, fit faire, en peu de temps, plus de progrès qu’on en avait fait en un siècle d’utilisation de toutes les séries. [...] on ne peut donner *a priori* raison à l’une ou l’autre de ces tendances. Ce qu’il faut, c’est que chacun travaille selon ses possibilités: que ceux qui se sentent capables d’utiliser une logique nouvelle l’utilisent, les résultats qu’ils obtiendront permettront de décider, en précisant le sujet et le raisonnement.

importa. Nesse sentido, durante esses trinta anos de uso do axioma de Zermelo, ele diz não ter percebido nenhum progresso (LEBESGUE, 1941, p. 117).

O autor afirma que seria necessário: fazer desaparecer o sentido mágico da palavra “determinado”, precisando-a e mostrando a que serve a lei, se é verdade que ela é necessária; mostrar porque a antiga lógica era inadequada ao estudo dos conjuntos e que a nova lógica segue o processo mental da determinação dos conjuntos; “[...] chegar a remeter a um mesmo processo mental a construção de um conjunto por fornecer sucessivos elementos e a definição de um conjunto pelo enunciado de uma propriedade característica desses elementos.”[49] (Ibid., p. 118).

Lebesgue argumenta que está expondo suas idéias, mas não quer decidir em favor da posição puramente negativa que adotou, pois, para ele nada é considerado definitivo. Expondo suas exigências, ele quer mostrar que a discussão sobre o axioma de Zermelo não é uma questão puramente lógica, pois a lógica não serve para convencer ou criar confiança (Ibid., p. 118-119).

Para ele, essa confiança surge quando o resultado procurado é harmonioso com o que se espera, mas essa razão de confiança é muito precária se não existir um meio de controle, ou seja:

> [...] estudando uma ordem de questões, adquirimos pouco a pouco, por correlações sucessivas, a intuição, a presciência, mas também constatamos que tal argumento, pouco a pouco aperfeiçoado, cada vez melhor delimitado e controlado, nunca conduz a contradições e nos dá sempre resultados de acordo com nossa presciência cada vez mais refinada. Assim, cada vez mais, disciplinamos nossa visão e, ao mesmo tempo, construímos a lógica que, no capítulo estudado, nos servirá de último controle. Um resultado se harmoniza com nossa intuição no mundo do pensamento, nada nos choca, o raciocínio é conforme a regra; a confiança acontece.[50] (Ibid., p. 120).

---

[49] [...] arriver à ramener à un même processus mental la construction d’un ensemble par apports successifs d’éléments, et la définition d’un ensemble par l’énoncé d’une propriété caractéristique de ces éléments.

[50] [...] en étudiant un ordre de questions nous acquérons peu à peu, par des corrections seccessives, l’intuition, la préscience, mais aussi nous constatons que tel raisonnement, peu à peu perfectionné, de mieux en mieux délimité et manié, ne conduit jamais à des contradictions et nous donne toujours des résultats en accord avec notre préscience de plus em plus affinée. Nous avons ainsi, à la fois discipliné notre rêve et en même temps construit la logique qui, dans le chapitre étudié, nous servira d’ultime contrôle. Um résultat s’accord avec notre intuition dans le monde de la pensée, rien ne nous choque, le raisonnement est conforme à la règle; la confiance s’ensuit.

No entanto, questiona que esta confiança seja legítima, pergunta de onde vem a certeza matemática e, então, argumenta:

> Esta é apenas uma pobre pequena certeza relativa, mas é a mais absoluta das certezas relativas que o homem soube atingir. Ela vem do fato que, em matemática, sentimos muito melhor que em outros lugares os limites da validade de nossos processos de pesquisas e de nossas conclusões. Colocando numa jaula um leão e um coelho, alguém não diria um e um fazem dois. Também, a aritmética, que se aplica apenas quando se aplica, se aplica sempre nos casos onde nós a aplicamos porque, nos outros, a tentação de aplicá-la nem nos ocorre. É do mesmo modo para os capítulos da matemática mais elevada; desde que são solidamente fundamentados, não nos enganamos mais sobre os limites de sua aplicação, ou pelo menos, se nos enganamos, reconhecemos rapidamente nosso erro e estamos todos de acordo; considerando que, no momento de sua construção, estávamos divididos e terminamos freqüentemente com contradições. Não nos surpreendemos de nos ver adquirir, mesmo nos capítulos elevados da ciência, um modo de intuir nossa investigação sobre a legitimidade de nossas conclusões. É que, quanto mais nos elevamos em matemática, mais nos ocupamos com os seres puramente lógicos, com os símbolos, mais vamos em direção a uma lógica formal, quer dizer, para o simples.[51] (LEBESGUE, 1941, p. 120-121).

No entendimento de Lebesgue (Ibid., p. 121), para que a ciência matemática pudesse merecer elogios, os matemáticos a limitaram pouco a pouco, ou seja: o significado dos conceitos, sua adaptação ao real, o valor dos axiomas, tudo isso seria assunto dos filósofos; o confronto entre aplicações e incertezas, seria objeto do físico e do engenheiro; enquanto o matemático se ocupa apenas com o raciocínio dedutivo e considera apenas o raciocínio todo feito, pois a construção de um raciocínio lógico não se faz logicamente. Acrescenta ainda que "[...] enclausurado na sua torre de marfim, o matemático acredita fazer figura de triunfante. Na realidade, ele é apenas uma peça de uma fábrica logística."[52] e, "A

[51] Ce n'est qu'une pauvre petite certitude relative, mais c'est la plus absolue des certitudes relatives que l'homme ait su atteindre. Elle vient de ce que, en mathématiques, nous sentons beaucoup mieux qu'ailleurs les limites de la validité de nos procédés de recherches et de nos conclusions. En mettant dans une cage un lion et un lapin, personne ne dirait un et un font deux. Aussi, l'arithmétique, qui ne s'applique que quand elle s'applique, s'applique toujours dans le cas où nous l'appliquons car, dans les autres, la tentation de l'appliquer ne nous effleure même pas. Il en est de même pour les chapitres de mathématique plus élevés; dès qu'ils sont solidement assis, nous ne nous trompons plus sur les limites de leur application, ou du moins, si nous trompons, nous reconnaissons vite notre erreur et nous sommes tous d'accord; alors qu'au moment de leur construction, nous étions divisés et aboutissions souvent à des contradictions. Qu'on ne s'étonne pas de nous voir acquérir, même dans les chapitres élevés de la science, une sorte de flair nous renseignant sur la légitimité de nous conclusions. C'est que, plus on s'élève en mathématiques, plus on a affaire à des êtres purement logiques, à des symboles, plus on va vers une logique formelle c'est-à-dire vers le simple.

[52] [...] enfermé dans sa tour d'ivoire, le mathématicien croit faire figure de triomphateur, en réalité il n'est plus qu'un rouage d'une usine logistique.

matemática é apenas um instrumento que, outros, filósofos, físicos, engenheiros farão talvez um uso útil.”[53] (LEBESGUE, 1941, p. 121).

Lebesgue termina sua palestra comentando que a atividade de pensar matematicamente é muito complexa, todo homem que pensa matematicamente, constrói, ao mesmo tempo, o objeto de seus pensamentos, o objetivo de seus pensamentos e o método dirigindo seus pensamentos. A “filosofia da segunda zona”, da qual ele fala, tem por objetivo considerar essa atividade em todo sua complexidade. Por isso, como ele acrescenta: “Seria necessário que os estudos sobre os fundamentos e sobre a metodologia da matemática abrissem um amplo espaço para a psicologia ou, até mesmo, para a estética”[54] (Ibid., p. 122).

II.3.3 A Matemática tem objetos?

Enquanto Frege (1848-1925) acredita que os números são objetos, para Lebesgue aritmética é uma língua que se mostra e desenvolve-se nas aplicações.

Considerando a equação $2+2=4$, para Frege "$2+2$" e "4" são duas representações do mesmo objeto (número). Esta interpretação pressupõe a existência de número como objeto em um sentido platônico. Tal visão recebe fortes objeções por matemáticos notáveis, para os quais a existência direta do objeto matemático só produz sentido relativamente a uma língua. Lebesgue, por exemplo, defende um tratamento da aritmética completamente dentro do sistema decimal de numeração. Ao questionar o que levaria à recusa de uma tal abordagem, faz a seguinte argumentação:

> Antes de tudo nossos hábitos metafísicos: ‘Não é blasfêmia chamar símbolo o número que constituía a própria essência das coisas?’ Eis aqui a crença que surge sob as formas mais variadas. Por exemplo, diremos: podemos certamente empregar indiferentemente a palavra inglesa *chair* ou a palavra francesa *chaise* porque se aplicam ao mesmo objeto. Qual é o análogo do objeto cadeira no emprego dos símbolos 101 da numeração binária e 5 na numeração decimal? Como não há

[53] Les mathématiques ne seront plus qu’un instrument dont d’autres, philosophes, physiciens, ingénieures feront peut-être un emploi utile.
[54] Il faudrait que les études sur les fondements et sur la méthode des mathématiques fassent une large place à la psychologie, voire même à l’esthétique.

> cadeira escondida debaixo de 5, poderemos certamente solucionar o caso por uma pirueta verbal e falar da entidade metafísica 5, que substituirá a realidade física cadeira. Em suma, isto será evitar responder.[55] (LEBESGUE, 1935, p. 7-8).

Para Lebesgue, o conhecimento é construído com proposições, frases completas e não com conceitos, objetos ou idéias. Traduzir palavra por palavra, de uma língua para outra, é possível somente no caso dos substantivos usados com sentido concreto. No mais, as traduções são feitas sentença por sentença. Não é a palavra "número" que precisa ser explicada, mas, as sentenças onde ela aparece.

Podemos ilustrar a complementaridade dessas atitudes com um problema simples, ou seja, a respeito da prova de equivalência de fórmulas. Já nos casos como $ab = ba$ existem dois caminhos. Ou você imagina contar uma quantidade (caixa de garrafas, por exemplo) de duas maneiras, ou você faz uma prova formal à base dos axiomas de Peano.

Lebesgue é hábil para distinguir entre proposições verdadeiras e falsas, porque ele considera a aritmética como uma disciplina aplicada. De acordo com ele, Matemática é nada, exceto um instrumento para outras ciências. Aritmética não é uma teoria de sua própria aplicabilidade ou, como disse: "a aritmética se aplica quando ela se aplica" (Ibid., p. 6). Ele considerou a Matemática pura incompleta, conforme cresce.

> A descrição do ato de contar mostrou que a escolha da seqüência de números (palavras ou símbolos) era de importância teórica acessória; é apenas a escolha de uma língua entre todas aquelas que existem ou que se pode imaginar. Mas não podemos nos expressar sem escolher alguma.[56] (Ibid., p. 8).

[55] Avant tout nos habitudes métaphysiques: "N'est-ce pas un blasphème d'appeler symbole le nombre que était jadis l'essence même des choses?" voici la crainte que se fait jour sous les formes les plus variées. Par exemple on dira: on peut certes employer indifféremment le mot anglais *chair* ou le mot français *chaise* parce qu'ils s'appliquent au même objet, quelle est l'analogue de l'objet chaise dans l'emploi des symboles 101 de la numération binaire et 5 de la numération décimale? Comme il n'y a pas de chaise cachée sous 5, on pourra certes se tirer d'affaire par une pirouette verbale et parler de l'entité métaphysique 5 qui remplacera la réalité physique chaise; ce sera en somme refuser de répondre.

[56] La description des dénombrements a montré que le choix de la suite des nombres (mots ou symboles) était d'importance théorique accessoire; ce n'est que le choix d'une langue parmi toutes celles qui existent ou qu'on peut imaginer. Mais on ne peut s'exprimer sans en choisir une.

II.3.4 Considerações

Para Lebesgue, toda a Matemática inicia-se pela medida de quantidade que gera os números. Não tem pretensão de explicar o mundo ou a Matemática. O importante na Matemática é conhecer o processo de medição, ou seja, de determinação dos números. Dá ênfase à atividade que relaciona sujeito e objeto. Preocupa-se com a aplicação, mas não tem como garantir sua existência, pois para ele “a aritmética se aplica quando se aplica”.

Para ele, a Filosofia da Matemática só pode ser criada pelos matemáticos, com o objetivo de explicar as práticas matemáticas profícuas desenvolvidas pelos matemáticos. A Matemática é apenas um instrumento para outras ciências. Então, ao invés de se preocupar com os fundamentos da Matemática, preocupa-se com o processo da atividade, ou seja, com os processos reais do desenvolvimento da percepção da Matemática, como o matemático trabalha, resolve problemas, faz provas e constrói teorias. A atividade é a essência dessa “filosofia de segunda zona”.

Lebesgue defende um tratamento da aritmética no âmbito do sistema decimal de numeração. O conhecimento é construído por proposições e não com conceitos, objetos ou idéias. Desta forma, não é a palavra “número” que precisa ser explicada, mas, as sentenças onde ela aparece.

CAPÍTULO III

ASPECTOS DO DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CÁLCULO ATÉ O SÉCULO XVIII: ORIGEM E AUGE DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

III.1 A RELAÇÃO ENTRE QUADRATURA E TANGENTE: ORIGENS

Na primeira metade do século XVII, matemáticos dedicaram-se aos problemas de quadraturas e tangentes às curvas do tipo $y = x^n$; um deles foi Pierre de Fermat (1601-1665), que muito contribuiu para o desenvolvimento do Cálculo (BOYER, 1992, p. 15).

Fermat é considerado o precursor do Cálculo Diferencial, tendo em vista que foi o primeiro a chegar ao conceito moderno de reta tangente a uma curva dada em um determinado ponto da mesma. Ao resolver problemas de máximo e de mínimo, considerou o comportamento característico das funções nas proximidades de seus valores extremos (EDWARDS JR., 1979, p. 122). Assim, para encontrar os pontos de máximo ou mínimo de uma função, deveria comparar o valor funcional da função em um determinado ponto x com o valor funcional em um ponto $x+E$, muito próximo de x. Fermat expressou sua idéia da seguinte forma:

> *Substitua-se, na expressão que deverá levar a um máximo ou a um mínimo, a incógnita A pela soma de duas incógnitas $A+E$, e considerem-se as duas expressões como 'aproximadamente iguais, como diz Diofante'. Em seguida, simplifique-se em ambos os membros o que pode ser simplificado, permanecendo então somente os termos que encerram o fator E. Divida-se tudo por E e despreze-se os termos que ainda contenham E. Então resta, finalmente, a equação que nos fornece o valor de A que irá reproduzir o máximo ou o mínimo.*
> (FERMAT apud KARLSON, 1961, p. 363).

Em linhas gerais e notação moderna, conforme apresentado por Karlson (KARLSON, 1961, p. 366), o método de Fermat expressa que: para saber se $f(A)$ assume um máximo (ou um mínimo), determinam-se as expressões $f(A)$ e $f(A+E)$, consideradas aproximadamente iguais, tendo em vista que E corresponde a um valor infinitamente pequeno. Assim, a diferença entre as expressões é zero, ou seja, $f(A+E)-f(A)=0$. Igualdade esta que dividida por E resulta: $\frac{f(A+E)-f(A)}{E}=0$. Por fim, eliminando-se todos os termos que apresentam o fator E, o que corresponde a fazer $E=0$, obtém-se a equação $\left[\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right]_{E=0}=0$, que resolvida fornece os valores de A, correspondentes aos pontos de máximo ou mínimo. Empregando o mesmo método, Fermat resolve também o problema da construção da reta tangente a uma curva, em um determinado ponto da mesma.

Este método é equivalente ao cálculo da derivada $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ igualada a zero. Pois, como se sabe, para que uma função diferenciável tenha ponto de máximo ou de mínimo em um intervalo aberto, é necessário que a derivada da função, neste ponto, seja zero.

No caso de uma função ser diferenciável, o fato da derivada ser igual a zero é uma condição necessária para que a mesma tenha um ponto de máximo ou de mínimo num intervalo aberto; no entanto, não é suficiente. Por este motivo, o método de Fermat não é eficiente para determinar pontos de máximos ou de mínimos, muito menos para fazer a distinção entre eles, mas é eficiente para determinar os pontos críticos de uma função.

Mas, segundo Boyer, esta falta de clareza por parte de Fermat não diminui sua genialidade, já que suas idéias fecundas ajudaram a solucionar muitos problemas referentes ao Cálculo; assim, “Há plena razão para se reconhecer [...] que Fermat foi o inventor do Cálculo Diferencial.” (BOYER, 1992, p. 15).

Além de um método para determinar a tangente de curvas do tipo $y = x^n$, Fermat apresentou, também, um método para determinar a integral dessas curvas que “... era o mais refinado entre os existentes na época, e está mais próximo da integral de Riemann do que qualquer outro anterior ao século XIX.” (Ibid., p. 14).

Para determinar a área sob a curva $y = x^2$ em um intervalo que vai de 0 a T, como exemplifica Boyer (Ibid., p. 14), Fermat levantava as ordenadas da curva nos pontos, cujas abscissas eram respectivamente T, ET, E^2T, E^3T, etc., sendo E uma quantidade menor que um. Com essas ordenadas, obtém uma seqüência de retângulos circunscritos à curva, que é uma aproximação da área sob a curva (Figura III. 1). As áreas desses retângulos são $T^2(T - ET)$, $E^2T^2(ET - E^2T)$, $E^4T^2(E^2T - E^3T)$, ... e a soma dessas áreas é $T^3(1-E)(1+E^3+E^6+E^9+...) = T^3(1-E)\left(\frac{1}{1-E^3}\right) = \frac{T^3}{1+E+E^2}$. Fazendo E tender a um, as larguras dos retângulos tendem a zero, e a soma das áreas dos retângulos aproximam-se da área sob a curva, ou seja, $\frac{T^3}{3}$. Por raciocínio análogo, Fermat mostrou que isso é válido a todos os valores racionais de n, exceto para $n = -1$ (Ibid., p. 14). Em notação moderna, a generalização do resultado obtido por Fermat é expresso por $\int_0^T x^n dx = \frac{T^{n+1}}{n+1}$.

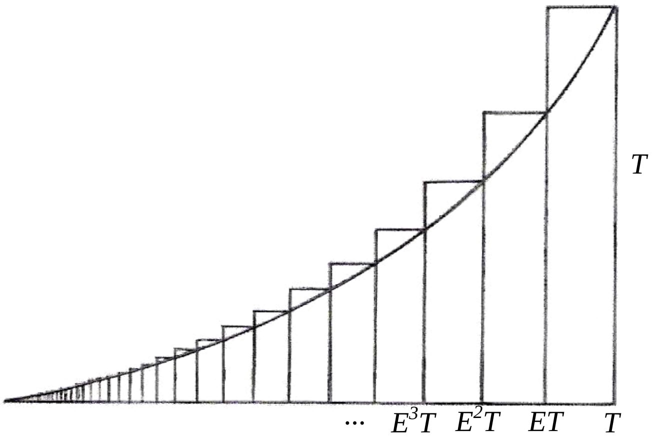


Fig. III.1 (BOYER, 1992, p. 14)

Fermat conhecia bem as regras de diferenciação e de integração, sabia que na diferenciação multiplicava-se o coeficiente pelo expoente e subtraía-se deste último uma unidade; na integração, o expoente era aumentado de uma unidade e o coeficiente dividido pelo novo expoente. No entanto, parece não ter achado significativa essa relação recíproca entre as duas operações (BOYER, 1992, p. 15).

Outros matemáticos contemporâneos a Fermat ativeram-se ao fato dos dois problemas poderem ser diretamente relacionados por meio do conceito de movimento. O primeiro a deixar claro esse entendimento foi Torricelli (BARON, 1985, v. 2, p. 39).

Evangelista Torricelli, italiano, nasceu perto de Faenza, em 1608, morreu em Florença, em 1647, aos 39 anos de idade. Dentre suas realizações, apresentou dois métodos para calcular a área da região limitada por uma ciclóide, um usando o método dos indivisíveis de Cavalieri[57] (1598-1647), o outro, o método de exaustão de Arquimedes-Eudoxo[58] (séculos III e IV a.C.); para

[57] Cavalieri considerava que uma figura geométrica é composta de um número infinitamente grande de indivisíveis. Assim, considerava uma superfície plana sendo formada de uma infinidade de segmentos de reta paralelos; e um sólido, formado de uma infinidade de secções planas paralelas. No entanto, não deixou claro se essas unidades indivisíveis tinham ou não espessura. (EDWARDS JR. 1979, p. 104).

[58] “Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade e do resto novamente subtrai-se não menos que a metade e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie.” (BOYER, 1974, p. 67).

construir a tangente à ciclóide num ponto genérico da mesma, empregou o método de composição de movimentos já usado por Galileu (1564-1643) e Descartes (1596-1650), dentre outros. Estes resultados foram apresentados por Torricelli em *De parabole*, publicada em 1644 (BOYER, 1974, p. 260).

Levando em consideração: as investigações medievais e o trabalho de Galileu em que o movimento de um ponto, ao longo de uma reta com velocidade variando, é representado por um gráfico que relaciona velocidade e tempo, cuja distância total percorrida pelo ponto é representada pela área sob tal gráfico. A abordagem de Cavalieri de que uma área pode ser pensada como sendo formada de segmentos ou "indivisíveis", Torricelli acabou relacionando tangentes e quadraturas. Conforme descreve Edwards (EDWARDS JR., 1979, p. 138-139) em linguagem atual, o raciocínio de Torricelli resume-se como segue:

a) Considerando um ponto em movimento, a distância total percorrida pelo ponto é dada pela área sob a curva velocidade-tempo, pois a distância percorrida durante um elemento infinitesimal de tempo é igual ao produto deste elemento tempo pela velocidade instantânea (Figura III. 2).

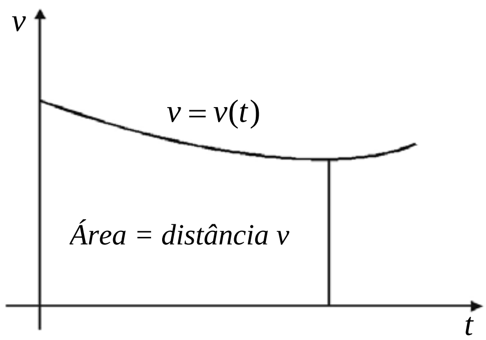


Fig. III.2 (EDWARDS, 1979, p. 138)

Se, por exemplo, o ponto inicia seu movimento no tempo $t=0$ e sua velocidade é $v=t^n$ num tempo t; então, a distância y percorrida é dada pela área sob a curva $v=t^n$, ou seja,

$$y=\frac{t^{n+1}}{n+1} \tag{1}$$

b) O mesmo movimento pode ser representado, também, por um gráfico que relaciona espaço percorrido e tempo. Considerando que o ponto se movimente ao longo de uma curva $y = y(t)$ com duas componentes velocidade: uma velocidade horizontal 1 (velocidade considerada uniforme, de modo que a distância horizontal pode ser considerada como a medida do tempo) e uma velocidade vertical v (velocidade do ponto cujo movimento está representado na Figura III. 2), o vetor velocidade desse ponto é a resultante de um vetor horizontal de comprimento 1 e um vetor vertical de comprimento v (Figura III. 3). Assim, a inclinação da reta tangente à curva $y = y(t)$ é a velocidade v.

Considerando, como exemplo, que a distância percorrida por um ponto no tempo t é dada pela equação (1); então, a velocidade é dada por

$$v = t^n \qquad (2)$$

que é a inclinação da reta tangente à curva $y = \frac{t^{n+1}}{(n+1)}$.

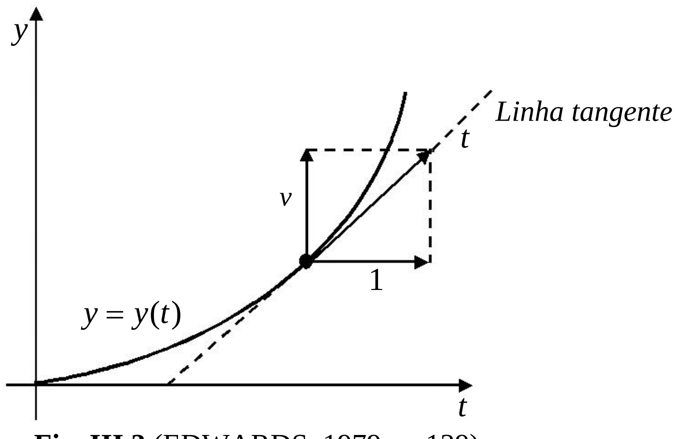


Fig. III.3 (EDWARDS, 1979, p. 139)

Levando em consideração o fato de que:

a) a área sob a curva $y = x^n$ é $\frac{x^{n+1}}{(n+1)}$ e que

b) a curva $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ tem inclinação x^n, Torricelli percebeu, pelo menos de uma forma intuitiva, a relação inversa entre as equações (1) e (2), ou seja, entre os problemas das quadraturas e das tangentes.

A relação inversa percebida, ou seja, que a inclinação da reta tangente à curva $y = y(t)$ que representa a área (Figura III. 3) é igual à ordenada da curva original $v = v(t)$ (Figura III. 2), corresponde a uma primeira formulação do Teorema Fundamental do Cálculo, ou seja, que a taxa de variação da área sob uma curva é igual à sua ordenada que marca o início do desenvolvimento de um cálculo algorítmico (EDWARDS JR., 1979, p. 139).

Na opinião de Boyer (1974, p. 261-262), se Torricelli tivesse vivido mais é possível que se tornasse o inventor do Cálculo. Segundo Baron (1985, v. 2, p. 42), quando Torricelli morreu, a maior parte de seus trabalhos ainda não havia sido publicada, mas muitas de suas idéias foram transmitidas por seu discípulo Stefano degli Angeli (1623-1697) a Issac Barrow (1630-1677) e James Gregori.

James Gregory (1638-1675), matemático escocês, foi um dos predecessores de Newton e morreu ainda jovem, com apenas trinta e seis anos de idade. Em 1663, foi para a Itália onde estudou vários anos com Stefano degli Angeli (1623-1697), com quem aprendeu os métodos italianos sobre indivisíveis (BOYER, 1974, p. 282). Ainda na Itália, publicou, nos anos de 1667 e 1668, as obras *Vera circuli et hyperbolae quadratura* e *Geometriae pars universalis*, respectivamente (BARON, 1985, v. 2, p. 42). Na primeira, apresentou muitos resultados importantes referentes à Análise Infinitesimal e preocupou-se em generalizar o algoritmo de Arquimedes (método de exaustão), aplicando-o na quadratura de elipses e hipérboles (BOYER, 1974, p. 282). Na segunda obra, de caráter essencialmente geométrico de difícil entendimento, apresentou uma primeira exposição sistemática, contendo operações para a determinação de arco, tangente, área e volume, presentes em um trabalho de Cálculo Infinitesimal (BARON, 1985, v. 2, p. 43-44). Segundo Boyer (1974, p. 282): se Gregory “[...] tivesse expresso sua obra analiticamente, poderia ter-se antecipado a Newton na invenção do Cálculo, pois conhecia virtualmente todos os elementos fundamentais pelo fim de 1668.” (BOYER, 1974, p. 282).

Para Baron (1985, v. 2, p. 44), Gregory tinha clara compreensão da relação inversa entre o problema de quadratura e o da tangente, conhecido atualmente como Teorema Fundamental do Cálculo. Só não se sabe se ele o considerava "fundamental".

Contemporâneo de James Gregory, Isaac Barrow nasceu em Londres, em 1630, e morreu em Cambridge, em 1677. Era considerado um conservador em Matemática, por não gostar do formalismo da Álgebra. Editou obras de Euclides, Apolônio e Arquimedes e, também, publicou suas próprias obras, *Lectiones opticae* em 1669 e *Lectiones geometriae* em 1670, ambas com a ajuda de seu pupilo Newton (BOYER, 1974, p. 284), que em contrapartida acabou se beneficiando com a forma de determinar áreas e tangentes a curvas.

Um avanço significativo ao desenvolvimento do Cálculo foi o método de Barrow para a determinação de tangentes a curvas, pelo chamado triângulo diferencial ou infinitesimal (BOYER, 1992, p. 42-43), que muito se assemelha ao processo moderno de diferenciação (EVES, 1995, p. 434). Este método difere do de Fermat, pelo fato de que enquanto Fermat fazia uso de uma única quantidade E, Barrow fazia uso de duas, equivalentes aos modernos Δx e Δy (BOYER, 1974, p. 284).

Para construir a tangente à curva da Figura III.4 no ponto P, por exemplo, Barrow, conforme descrito por Eves (1995, p. 434-435), considerava T como sendo o ponto de intersecção da tangente com o eixo das abscissas, marcava sobre a curva um ponto Q infinitamente próximo de P. Considerava, assim, os triângulos PTM e PQR semelhantes, valendo a relação: $\frac{RP}{QR}=\frac{MP}{TM}$. Fazendo $QR=e$ e $RP=a$, e indicando as coordenadas de P por x e y, e as coordenadas de Q por $x-e$ e $y-a$, substituía x e y, na equação da curva, por $x-e$ e $y-a$, respectivamente. Desconsiderava todas as potências de a e e de expoentes maiores que um, encontrando a razão $\frac{a}{e}$ para pontos infinitamente próximos, representando a inclinação da curva. Sendo M um ponto conhecido,

$OT = OM - TM = OM - MP\left(\frac{QR}{RP}\right)$, ou seja, $OT = x - y\left(\frac{e}{a}\right)$ fornece as coordenadas do ponto T, o que possibilita traçar a tangente à curva, no ponto P.

Segundo Eves (1995, p. 435), a importância para o desenvolvimento do Cálculo, no processo apresentado por Barrow, está na razão $\frac{a}{e}$, modernamente representada por $\frac{dy}{dx}$.

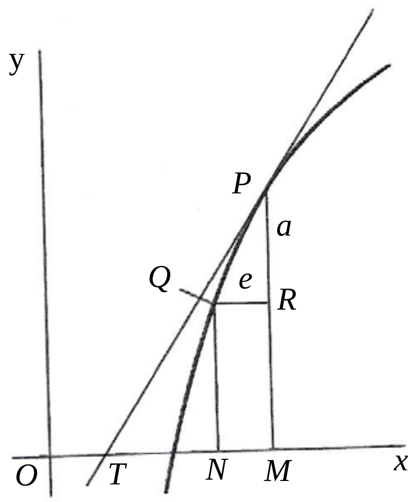
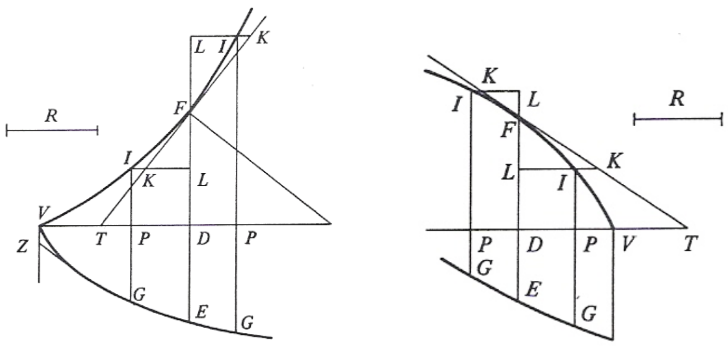


Fig. III.4 (EVES, 1995, p. 435)

Barrow "gostava de pensar em grandezas geométricas, como sendo geradas por um fluxo uniforme de pontos" (BOYER, 1974, p. 284), à maneira de Torricelli. Embora não se opondo ao uso dos métodos algébricos, mostrava preferência pelos métodos ortodoxos de demonstrações geométricas (BARON, 1985, v. 2, p. 45).

"Apesar de indícios tênues que apontam noutra direção, em geral, considera-se que Barrow foi o primeiro a perceber, de maneira plena, que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra." (EVES, 1995, p. 435). Na proposição 11, da lição X, de sua obra *Lectiones geometriae*, publicada em 1670, Barrow faz a seguinte demonstração, do que hoje é conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo:

> Seja qualquer curva ZGE, com eixo VD; suponhamos primeiro que as ordenadas VZ, PG, DE perpendiculares a VD, cresçam continuamente a partir do primeiro VZ. Seja a curva VIF tal que, traçando-se qualquer reta EDF perpendicular a VD (que corta a curva nos pontos E, F e VD em D), o retângulo sob DF e qualquer reta dada R, pode ser respectivamente igual ao espaço interceptado $VDEZ$; faça agora $DE : DF :: R : DT$, e trace a reta TF: esta tocará a curva VIF.



> Tome qualquer ponto I na curva VIF (primeiro acima do ponto F, em direção ao início V) e, através disto, trace as retas IG e KL paralelas a VZ e VD, respectivamente, (cortando a curva como o *esquema), então* $LF : LK :: (DF : DT ::) DE : R$*; então* $LF \cdot R = LK \cdot DE$*. Mas (por superposição)* $LF \cdot R$ *é igual ao espaço* $PDEG$*. Portanto* $LK \cdot DE = PDEG < DP \cdot DE$*. Daí* $LK < DP$*, ou* $LK < LL$*.*
>
> *Novamente tome qualquer ponto* I*, abaixo do ponto* F*, e faça o mesmo procedimento anterior. Então, por razões semelhantes, parece que* $LK \cdot DE = PDEG > DP \cdot DE$*; portanto* $LK > DP$*, ou* LI*. Donde se conclui que a reta inteira* $TKFK$ *cai dentro (ou fora) da curva* $VIFI$*.*
> *As coisas continuam como antes se as ordenadas* VZ*,* PG*,* DE *continuam a decrescer; a conclusão e o raciocínio serão os mesmos, com uma única diferença - é que a curva* VIF *é côncova com relação ao eixo* VD*.* (BARROW apud BARON, 1985, p. 45).

A demonstração apresentada por Barrow é baseada em curvas, tangentes e quadraturas, e não em uma notação baseada em coordenadas cartesianas e notação funcional. Afinal, na época, não havia nenhuma convenção para traçar eixos, este é um fato que acaba dificultando a compreensão da demonstração.

Como se sabe, uma das características fundamentais inerentes à História da Matemática é a necessidade incessante de adequação de conceitos, métodos e maneiras de pensar e agir, ao problema apresentado. Isto justifica o fato de que em busca de facilitar a compreensão da demonstração apresentada por Barrow faz-se necessário traduzir seus resultados e métodos para uma linguagem algébrica e geométrica moderna.

Edwards Jr. (1979, p. 139-140) faz uma descrição sucinta da demonstração de Barrow, acima citada. Para tanto, sugere que, primeiramente, se considere, por conveniência, conforme a Figura III.5, os eixos y e z com orientações opostas entre si e perpendiculares ao eixo x. Seguindo, então, o procedimento desenvolvido por Barrow: considera-se dada uma função $y = f(x)$ positiva e crescente. Denota-se, então, pela função $z = A(x)$ a área compreendida entre a curva $y = f(x)$ e o segmento $[0, x]$ contido no eixo x. Sendo dado um ponto $D(x_0, 0)$ pertencente ao eixo x, T será um ponto, convenientemente localizado, também, sobre o eixo x tal que $DT = \frac{DF}{DE} = \frac{A(x_0)}{f(x_0)}$. Com estas considerações feitas, Barrow afirma que a reta TF toca a curva $z = A(x)$ somente no ponto $F(x_0,\ A(x_0))$.

Para provar esta afirmação, considera-se um ponto $I = (x_1,\ A(x_1))$ pertencente à curva $z = A(x)$, tal que $x_1 < x_0$, mostra-se que, neste caso, o ponto K (intersecção da reta horizontal IL com a reta TF) localiza-se à direita do ponto I. Levando em consideração a obtenção do ponto T, nota-se que $\frac{LF}{LK} = \frac{DF}{DT} = DE$, logo $LF = LK \times DE$; observa-se, também, que $LF = DF - PI = A(x_0) - A(x_1) < DP \times DE$, pois $y = f(x)$ é uma função crescente. Conseqüentemente, $LK \times DE < DP \times DE$, mostrando que $LK < DP$, ou seja, provando que o ponto K localiza-se à direita de I. Repetindo, então, o processo, mostrando que para $x_1 > x_0$, o ponto K localiza-se à esquerda de I, prova-se, assim, que TF é tangente à curva $z = A(x)$, no ponto F.

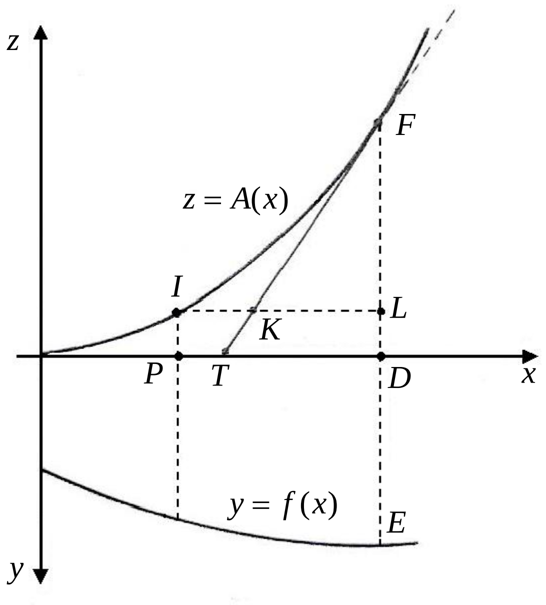


Fig. III.5 (EDWARDS, 1979, p. 140)

Edwards Jr. (1979, p. 139) chama a atenção para o fato da inclinação da reta TF ser $\frac{DF}{DE} = \frac{A(x_0)}{A(x_0)/f(x_0)} = f(x_0)$; observa que Barrow apresentou uma prova de que a reta TF é tangente à curva $z = A(x)$ no sentido apresentado pelos antigos gregos, ou seja, que a reta tangente a uma curva toca a mesma em um único ponto. Conclui que se Barrow tivesse apresentado analiticamente a reta TF, com inclinação $A'(x_0)$ propriamente definida, poderia ter chegado a $A'(x_0) = f(x_0)$, ou seja, poderia ter formulado explicitamente o Teorema Fundamental do Cálculo.

Segundo Boyer (1974, p. 285), apesar do grande feito e da clareza que tinha da relação inversa entre os problemas das tangentes e quadraturas, podemos dizer que a escolha de Barrow pelos métodos geométricos, em uma época em que estavam em alta os métodos algébricos, impediu-o de fazer uso eficaz de tal relação e seus contemporâneos achavam suas demonstrações geométricas muito difíceis de serem entendidas. Conforme comentam Dahan-

Dalmedico e Peiffer (1986, p. 189): "*Em Barrow*, [...] [a] *pesada formulação geométrica que evita cuidadosamente todo recurso aos procedimentos analíticos de Descartes e Fermat, torna* [esse teorema] *totalmente inoperante.*"[59]

Apesar de todo o desenvolvimento do Cálculo apresentado até a época de Barrow, necessitava-se de uma fundamentação lógica para o mesmo, bem como de um simbolismo geral apropriado e da criação de regras analíticas formais (EVES, 1995, p. 435). Em resumo, era preciso um Cálculo manipulável e aplicável. Neste contexto, surgem Newton e Leibniz que, apesar de terem trabalhado independentemente e de forma diferente, contribuíram com a criação do almejado Cálculo aplicável e de caráter universal, caracterizado como base para o Cálculo moderno.

III.2 CONTRIBUIÇÕES DE NEWTON E LEIBNIZ

Pela apresentação – embora sucinta – já feita neste capítulo, podemos perceber que, com base nas criações e evoluções dos problemas relacionados à quadratura e determinação de retas tangentes, bem como nos procedimentos de suas resoluções, ocorridos no período pré-histórico do Cálculo[60], não podemos negar que muitos dos matemáticos, que antecederam Newton e Leibniz, já haviam criado métodos de cálculo (EDWARS JR., 1979, p. 189). Entretanto, de utilidade limitada, uma vez que a maioria era aplicável apenas a problemas que envolviam polinômios ou que, de alguma forma, pudessem ser transpostos para a forma polinomial. Mas, na segunda metade do século XVII, era evidente a necessidade de um algoritmo geral aplicável, irrestritamente, a todas as funções racionais ou irracionais, algébricas ou transcendentes que pudessem resolver problemas até então tidos como insolúveis (BOYER, 1992, p. 17).

[59] Chez Barrow, [...] [la] lourde formulation géométrique, qui évite soigneusement tout recours aux procédés analytiques de Descartes et Femat, rend [ce théorème] totalement inopérant.
[60] Entendemos por período pré-histórico do Cálculo, o período que antecede a Newton e Leibniz.

Neste contexto, Newton e Leibniz unificaram os procedimentos de resolução apresentados por seus predecessores; reconheceram a natureza inversa da diferenciação e da integração; estabeleceram fórmulas, regras e algoritmos possíveis de serem aplicados a uma ampla classe de curvas, possibilitando a resolução de muitos problemas com um mínimo de esforço (Ibid., 1992, p. 17).

Como afirmam Dahan-Delmedico e Peiffer (1986, p. 190), Newton e Leibniz podem ser considerados como fundadores do Cálculo Diferencial e Integral, pelo fato da generalidade de seus métodos e de suas técnicas terem feito da Análise Infinitesimal um ramo autônomo, independente da Geometria.

III.2.1 O Cálculo de Newton

III.2.1.1 O binômio de Newton e as séries infinitas

Isaac Newton (1642-1727) nasceu na aldeia de Woolsthorpe, teve uma vida tranqüila, com todo seu tempo dedicado aos estudos. Em 1661, ingressou no Trinity College, em Cambridge; inicialmente, com o intuito de estudar Química, ciência pela qual sempre demonstrou interesse (BOYER, 1974, p. 287).

No tempo de Newton, a Universidade de Cambridge não oferecia cursos de Matemática para alunos de graduação, mas lendo um livro de astrologia e assistindo a um curso de natureza filosófica, oferecido por Barrow que abordava problemas referentes a espaço, tempo e movimento, teve sua atenção voltada para a Matemática (BARON, 1985, v. 3, p. 8). Esse despertar levou-o a estudar os *Elementos* de Euclides, *La Géométrie* de Descartes (1596-1650), obras de Kepler (1571-1630), a *Arithmetica infinitorum* de Wallis (1616-1703), dentre outras (EVES, 1995, p. 436). Algumas dessas, provavelmente, recomendadas por Barrow (BARON, 1985, v. 3, p. 8).

Em 1665, Newton já estava criando sua própria Matemática, ao descobrir como representar uma função em termos de séries infinitas; inventando o método das fluxões[61] (taxas de variações) de fluentes (quantidades variáveis continuamente) como, por exemplo, comprimentos, áreas, volumes, distâncias, temperaturas, atualmente, chamado de Cálculo Diferencial; e ligando, por fim, os dois problemas: das séries infinitas e das taxas de variação (BOYER, 1974, p. 287). No período de 1665 a 1666, quando já havia se graduado, Newton fez quatro de suas mais importantes descobertas: o teorema binomial, o cálculo, a lei da gravitação e a natureza das cores (Ibid., p. 287).

De muito tempo, já eram conhecidos os coeficientes binomiais para potências inteiras e, também, a regra de sucessão para coeficientes; no entanto, não se fazia a transição de uma potência inteira para fracionária. Wallis foi o primeiro a usar os expoentes fracionários, mas, não foi capaz de escrever uma expansão para $(x - x^2)^{\frac{1}{2}}$ ou para $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ (Ibid., p. 287).

Em 1664 ou 1665, Newton descobriu o teorema do binômio generalizado, cujo processo de desenvolvimento relata, em 1676, em uma carta que enviou a Henry Oldenburg (secretário da Sociedade Real de Londres), mas destinada a Leibniz (Ibid., p. 289). Este relato é apresentado por Baron (1985, v. 3, p. 14-16).

[61] Também chamado de método dos fluxos.

Nele, Newton conta que estudou o trabalho de Wallis sobre a determinação da área sob curvas, cujo eixo ou base comum é x e cujas ordenadas são da forma $(1-x^2)^m$, com m inteiro e cujos desenvolvimentos binomiais e quadraturas já eram conhecidos. Veja alguns resultados organizados nos dados da Tabela III.1.

Tabela III.1

Ordenada	**Desenvolvimento da potência**	**Quadratura ou área**
$(1-x^2)^{\frac{0}{2}}$	1	x
$(1-x^2)^{\frac{2}{2}}$	$1-x^2$	$x \quad -\frac{1}{3}x^3$
$(1-x^2)^{\frac{4}{2}}$	$1-2x^2+x^4$	$x \quad -\frac{2}{3}x^3 \quad +\frac{1}{5}x^5$
$(1-x^2)^{\frac{6}{2}}$	$1-3x^2+3x^4-x^6$	$x \quad -\frac{3}{3}x^3 \quad +\frac{3}{5}x^5 \quad -\frac{1}{7}x^7$

Analisando, então, essas áreas ou quadraturas (terceira coluna da tabela III.1), notou que os primeiros termos são todos iguais a x; todos os segundos termos têm parte literal x^3, todos os terceiros têm parte literal x^5 e, assim, por diante, com os expoentes em progressão aritmética; os denominadores dos primeiros termos são todos iguais a 1, dos segundos são iguais a 3, dos terceiros iguais a 5, ..., formando a mesma progressão aritmética que os expoentes de x, ou seja, 1, 3, 5, 7, ...; e os coeficientes numéricos dos numeradores correspondem aos algarismos que formam o triângulo de Pascal, conforme os dados da Tabela III.2.

Tabela III.2

	x	$-\frac{x^3}{3}$	$+\frac{x^5}{5}$	$-\frac{x^7}{7}$	$+\frac{x^9}{9}$
$n=0$	**1**	0	0	0	0
$n=1$	**1**	**1**	0	0	0
$n=2$	**1**	**2**	**1**	0	0
$n=3$	**1**	**3**	**3**	**1**	0
$n=4$	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**

Em seguida, Newton resolve intercalar, na série de curvas de expoentes inteiros, as curvas $y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, $y=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$, $y=(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$, etc., cujos desenvolvimentos binomiais e quadraturas eram o que ele estava procurando. Considerando primeiramente a curva $y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ e tendo redescoberto a fórmula de Pascal $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$ para n inteiro positivo (KATZ, 1998, p. 507), resolveu aplicar a mesma fórmula para $m=\frac{k}{2}$ (k inteiro positivo). Assim, por exemplo, para $m=\frac{1}{2}$, encontra que os coeficientes dos numeradores são:

$$\binom{\frac{1}{2}}{0}=1;\ \binom{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2};\ \binom{\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}=-\frac{1}{8};\ \binom{\frac{1}{2}}{3}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{6}=\frac{1}{16};\ ...$$

Então, conclui que a área sob a curva $y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ é dada pela expressão:

$$x-\frac{1/2\,x^3}{3}-\frac{1/8x^5}{5}-\frac{1/16x^7}{7}-\frac{5/128x^9}{9} \qquad (1)$$

Ao repetir o processo, chega às áreas das demais curvas do tipo $y=(1-x^2)^{\frac{k}{2}}$ (k inteiro positivo).

Observando o desenvolvimento binomial de $(1-x^2)^m$, para m inteiro, ou seja, os valores 1; $1-x^2$; $1-2x^2+x^4$; $1-3x^2+3x^4-x^6$; etc. (segunda coluna da Tabela III.1), Newton percebeu que poderia intercalar a estes o desenvolvimento binomial da série de curvas intercaladas, usando o mesmo procedimento das áreas, omitindo, apenas, os denominadores 1, 3, 5, 7, etc., encontrando que $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ é o valor da expansão binomial infinita

$$1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\frac{5}{128}x^8 \qquad (2)$$

Assim, conclui que a série (1), que é a área da região sob a curva $y=(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, poderia ser encontrada achando primeiro o desenvolvimento binomial (2) e depois determinando a área, por integração dos termos da referida série; e que, por raciocínio análogo, é possível obter a área de qualquer curva do tipo $y=(1-x^2)^m$, com m fracionário positivo ou negativo (KATZ, 1998, p. 508).

Esta descoberta levou Newton a perceber que as operações realizadas com as séries infinitas são muito semelhantes às feitas com as expressões polinomiais finitas, pois estão sujeitas às mesmas leis gerais. Assim, as séries infinitas deixaram de ser consideradas formas de aproximação, passaram a ser percebidas como outras formas das funções que representavam (BOYER, 1974, p. 289), possibilitando a determinação de quadraturas que, até então, não tinham sido conseguidas por seus predecessores. Como ele próprio argumenta:

> E tudo que a análise comum [isto é, a álgebra] executa por meio de Equações com número finito de Termos (desde que possa ser feito) esse novo método sempre pode executar por Meio de Equações infinitas. Por isso não hesitei em dar a isso o nome da *Análise* também. Pois os raciocínios aqui não são menos certos que na outra; nem as Equações menos exatas; embora nós Mortais cujos Poderes de raciocínio estão restritos a Limites estreitos, não possamos nem exprimir, nem conceber todos os Termos dessas Equações de modo a saber exatamente delas as Quantidades que queremos... Para concluir, podemos decidir com justiça que pertence à *Arte Analítica*, aquilo por cuja ajuda as Áreas e Comprimentos etc. das Curvas podem ser exatamente e geometricamente determinados. (NEWTON apud BOYER, 1974, p. 289-290).

Em 1669, tendo por base as descobertas de 1665-1666, Newton escreve *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (Sobre análises para equações com infinitos termos) – a primeira obra, na qual apresenta seu Cálculo – que só foi publicada em 1711 (EDWARDS JR., 1979, p. 26).

Esta publicação mostra que, ao contrário de Isaac Barrow, seu mais importante mentor que tinha predileção pelos métodos geométricos, Newton – comumente considerado um expoente da geometria pura – interessava-se pelos métodos algébricos e usava notações e instrumentos algorítmicos (BOYER, 1974, p. 290). Estudando a *Geometria* de Descartes, assimilou a idéia de aplicar a Álgebra à Geometria (BARON, 1985, v. 3, p. 19).

Na *De analysi*, Newton apresenta uma regra geral com a qual afirma que para a curva simples $y = ax^{\frac{m}{n}}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$), a área é dada por $\dfrac{ax^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \dfrac{an}{m+n} \cdot x^{\frac{m+n}{n}}$, e para uma curva composta por curvas simples, ou seja, composta por vários termos, a área será a composição das áreas resultantes de cada um dos termos (Ibid., v. 3, p. 20). A demonstração que Newton fornece para essa regra de cálculo de área, é apresentada por Baron (Ibid., v. 3, p. 23-24), e resume-se no que segue:

Considera inicialmente uma curva qualquer, $AD\delta$ (Figura III.6), sendo: a base $AB = x$; a ordenada perpendicular $BD = y$; a área da região $ABD = z$; o acréscimo da base de uma quantidade infinitesimal $B\beta = o$; $BK = v$; o acréscimo da área z em função do acréscimo infinitesimal da base, ou seja, a área do retângulo $B\beta HK$, dado por $o \cdot v$ é igual à área $B\beta\delta D$. Portanto, $A\beta = x + o$ e $A\delta\beta = z + ov$. Apresentadas essas premissas, Newton determina y, a partir de uma relação arbitrária entre x e z.

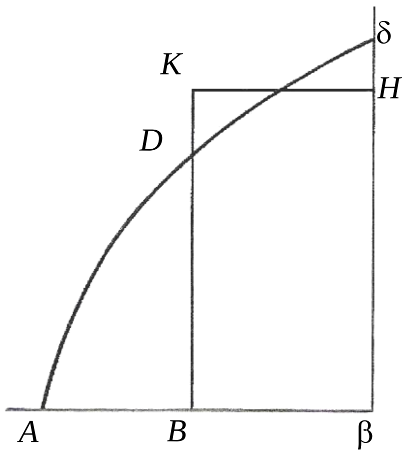


Fig. III.6. (BARON, 1985, p. 24, vol. 3)

A título de exemplificação, ele considera uma curva $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ ou $\frac{4}{9}x^3 = z^2$; substitui x por $x + o = A\beta$ e z por $z + ov = A\beta\delta$, e obtém:

$$(z+ov)^2 = \frac{4}{9}(x+o)^3 \Rightarrow z^2 + 2zov + o^2v^2 = \frac{4}{9}(x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3).$$

Tendo considerado $\frac{4}{9}x^3 = z^2$, então, despreza $\frac{4}{9}x^3$ e z^2, sobrando $2zov + o^2v^2 = \frac{4}{9}(3x^2o + 3xo^2 + o^3)$, que dividido por o, resulta $2zv + ov^2 = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2)$.

Supondo que $B\beta$ é infinitamente pequeno, Newton considera que v e y são iguais e os termos que apresentam o fator o desaparecem, restando: $2zv = \frac{4}{9}3x^2 \Rightarrow zv = \frac{2}{3}x^2$. Pela consideração de que $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ e v é igual a y, $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y = \frac{2}{3}x^2$ e, portanto, $x^2 = x^{\frac{3}{2}}y$ que, conseqüentemente, fornece $y = x^{\frac{1}{2}}$ que é a taxa de variação instantânea da área no ponto de abscissa x.

Reciprocamente, conhecendo a taxa de variação instantânea da "área" $y = x^{\frac{1}{2}}$, Newton determina a área sob a curva $z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

Para generalizar o problema: Sendo $z = \frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$, fazendo $\frac{n}{m+n}a = c$ e $n + m = p$, Newton obtém $z = cx^{\frac{p}{n}}$ ou $z^n = c^n x^p$.

Substituindo x por $x+o$ e z por $z+ov$ ou $z+oy$, surge: $(z+oy)^n = c^n(x+o)^p \Rightarrow c^n(x^p + pox^{p-1} + ...) = z^n + noyz^{n-1} + ...$

Newton omite os demais termos pelo fato de sempre serem eliminados por apresentarem potências de o com expoentes maiores que 1, conforme podemos observar no exemplo acima.

Elimina, então, os termos $c^n x^p$ e z^n e divide o que sobra por o, resultando: $c^n px^{p-1} = nyz^{n-1} \Rightarrow c^n px^{p-1} = \frac{nyz^n}{z}$, logo, $c^n px^{p-1} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}}$.

Multiplica a última igualdade por $\frac{1}{c^n x^p}$ e obtém $px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$ ou $ny = pcx^{\frac{p-n}{n}}$.

Sendo $c = \frac{na}{m+n}$ e $p = m+n$, efetuando as substituições, Newton encontra que $(p-m)y = nax^{\frac{m}{n}} \Rightarrow ny = nax^{\frac{m}{n}}$, logo, $y = ax^{\frac{m}{n}}$. Reciprocamente, se $ax^{\frac{m}{n}} = y$, então, $z = \frac{na}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$.

Observação: A regra apresentada não é válida para $\frac{m}{n} = -1$, pois resulta um denominador igual a zero.

Em notação moderna, se $z = f(x)$ e $\int_0^x ydx = z$, então, $y = \frac{dz}{dx} = f'(x)$.

O fato de uma área poder ser obtida pelo processo inverso da diferenciação já era do conhecimento de outros matemáticos, como já comentamos. Mas, como afirma Bourbaki:

> Newton primeiro concebe a idéia de substituir todas as operações, de caráter geométrico, da análise infinitesimal contemporânea, por uma operação analítica única, a diferenciação, e pela resolução do problema inverso; operação que, evidentemente, o método das séries de potência lhe permite executar com extrema facilidade.[62] (BOURBAKI, 1960, p. 210).

III.2.1.2 Método das fluxões

Quando Newton escreveu o *De analysi*, já havia experimentado outras notações e outras formas de demonstrações. Em 1666, havia escrito um pequeno tratado no qual aborda problemas de Cálculo com base na idéia de curva, sendo gerada pelo movimento contínuo de um ponto (BARON, 1985, v. 3, p. 25). Com base nessa idéia e inspirado pelo modelo da mecânica teórica, o que o levou a introduzir o tempo (no sentido de fluxo uniforme), como variável universal de toda correspondência funcional, em 1671, ele escreveu o *Tractatus de methodis serierum et fluxionum* (Tratado sobre os métodos das séries e fluxões), publicado em 1736 (DAHAN-DALMEDICO; PEIFFER, 1986, p. 192).

Nesta obra, ao considerar, por exemplo, uma curva do tipo $f(x, y) = 0$, Newton chama a abscissa x e a ordenada y de “fluentes”, ou seja, quantidades que fluem (variam) com o tempo; à taxa de variação ou velocidade do fluente, Newton dá o nome de “fluxo” do fluente representado por $\dot{x}$ e $\dot{y}$ que, em notação moderna corresponde, respectivamente, a $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$, sendo t o tempo (EVES, 1995, p. 439). Considerando que x cresce com velocidade uniforme, então, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ é uma constante e a variável independente x que aumenta

62 Newton le premier conçoit l’idée de remplacer touts les opérations, de caractère géométrique, de l’analyse infinitésimale contemporaine, par une opération analytique unique, la différentiation, et par la résolution du problème inverse; opération que bien entendu la méthode des séries de puissances lui permettent d’exécuter avec une extrême facilité.

uniformemente, pode, para Newton, representar uma "medida" de tempo; e, a um incremento infinitamente pequeno sofrido por um fluente, como x, por exemplo, em um intervalo de tempo o, também, infinitamente pequeno, ele chama de "momento" do fluente e o denota por $\dot{x}o$, que é o produto de sua respectiva velocidade pelo tempo – modernamente $\dot{x}o = dx$ (BOYER, 1992, p. 48-49).

O o, que Newton apresentou na obra *De analysi*, como um incremento geral, passa agora a representar um período de tempo infinitamente pequeno (BARON, 1985, v. 3, p. 29). Assim, Newton considera que, se uma relação $f(x,y)=0$ é válida para x e y, em todos os instantes, é válida também para $x+\dot{x}o$ e $y+\dot{y}o$, uma vez que $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ são incrementos infinitamente pequenos e, desse modo, considera $f(x,y)=f(x+\dot{x}o, y+\dot{y}o)$. Como ele próprio exemplifica em sua obra:

> Se o momento de x é representado pelo produto de sua celeridade $\dot{x}$ por uma quantidade indefinidamente pequena *o* (isto é, $\dot{x}o$), o momento de y será $\dot{y}o$, pois $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ estão entre si como $\dot{x}$ está para $\dot{y}$. Mas, visto que os momentos como $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ são as acessões indefinidamente pequenas das quantidades fluentes x e y, pelas quais essas quantidades são aumentadas através de diversos intervalos de tempo indefinidamente pequenos, segue-se que essas quantidades, x e y, após qualquer intervalo de tempo indefinidamente pequeno, tornam-se $x+\dot{x}o$ e $y+\dot{y}o$. Portanto, a equação que em todos os instantes expressa indiferentemente a relação entre as quantidades fluentes expressará também a relação entre $x+\dot{x}o$ e $y+\dot{y}o$ como entre x e y; de modo que $x+\dot{x}o$ e $y+\dot{y}o$ podem substituir essas quantidades na mesma equação em lugar de x e y. (NEWTON apud BOYER, 1992, p. 49).

Mas o trabalho de Newton apresentava falhas na forma de expressar sua idéia, já que não deixava muito claro o que vinha a ser o símbolo o e a razão pela qual desprezava os termos em que o aparecia com expoente maior que 1 (DAVIS; HERSH, 1985, p. 277-278). Assim, na terceira exposição de seu Cálculo, escrita, em 1676, com o título *De quadratura curvarum* e publicada em 1704, Newton tenta evitar as quantidades infinitamente pequenas e as quantidades que fluem, explica o método das fluxões com base no conceito das primeiras e das últimas razões (DAHAN-DALMEDICO; PEIFFER, 1986, p. 193).

III.2.1.3 Método das primeiras e últimas razões

Com esse método, as fluxões são interpretadas geometricamente em termos de primeiras e últimas razões e foi com o qual Newton chegou mais perto de uma fundamentação lógica convincente para seu Cálculo (BOYER, 1992, p. 21).

Em um trecho do *De quadratura*, Newton exprime a primeira e a última razão, exemplificando-as com a seguinte exposição:

> A QUADRATURA DAS CURVAS.
>
> Não considerarei aqui as quantidades matemáticas como sendo compostas de partes *extremamente pequenas*, mas como sendo *geradas* por um *movimento contínuo*. Linhas são descritas, e ao descrevê-las são geradas. Não por um alinhamento de partes, mas por um movimento contínuo de pontos. As superfícies são geradas pelo movimento de linhas, os sólidos pelo movimento de superfícies, os ângulos pela rotação dos seus lados, o tempo por um fluxo contínuo, etc. [...]
>
> E desta maneira os antigos nos ensinaram a gerar retângulos justapondo-se linhas retas móveis ao longo de retas imóveis numa posição ou situação normal a elas.
>
> Percebe-se que as quantidades que aumentam em tempos iguais e que são geradas por esse aumento serão maiores ou menores conforme a sua velocidade, na qual aumentam e são geradas, seja maior ou menor; esforcei-me para encontrar um método que determinasse as quantidades das velocidades, dos movimentos ou incrementos, que as geraram. Chamando de fluxões às velocidades dos movimentos ou dos aumentos e de fluentes às quantidades geradas, esclareci aos poucos (nos anos 1665 e 1666) o método das fluxões, que aproveito aqui na Quadratura das curvas.
> As fluxões são semelhantes aos aumentos dos fluentes, os quais são gerados em intervalos de tempos iguais, mas são infinitamente pequenos; e para ser mais exato,

> diria que estão na primeira razão dos aumentos nascentes, mas podem ser representados por quaisquer linhas proporcionais a elas. Se as áreas ABC, $ABDG$ forem descritas pelas ordenadas BC e BD, que se movem uniformemente ao longo da base AB, então as fluxões dessas áreas estarão entre si como as ordenadas BC e BD que as descrevem e poderão ser representadas por aquelas ordenadas; isto é, tais ordenadas estão na mesma proporção que os aumentos nascentes das áreas.
>
> Deixe a ordenada BC deslocar-se da sua posição BC para uma nova posição bc; complete o paralelogramo $BCEb$, trace a linha reta VTH tocando a curva em C e cortando os prolongamentos de bc e BA em T e V; agora os aumentos gerados da abscissa AB, da ordenada BC e da curva ACc serão Bb, Ec e Cc; e os lados do triângulo CET estão na primeira razão desses aumentos nascentes. Portanto, as fluxões de AB, BC e AC são como os lados CE, ET e CT do triângulo CET e poderão ser representadas por aqueles lados, ou, equivalentemente, pelos lados do triângulo VBC que é semelhante a CET.
>
> O mesmo acontece se tomarmos as fluxões na última razão das partes ínfimas. Trace a linha reta Cc e prolongue-a até K. Com a ordenada bc em sua posição original BC faça os pontos C e c se aproximarem. A linha reta CK vai coincidir com a tangente CH e o triângulo ínfimo CEc tornar-se-á semelhante ao triângulo CET. Seus lados ínfimos CE, Ec e Cc estarão na mesma proporção que os lados CE, ET e CT do outro triângulo CET. Portanto, as fluxões das linhas AB, BC e AC terão a mesma razão. Se os pontos C e c estiverem numa distância pequena qualquer, CK estará a uma distância pequena da tangente CH. Quando a linha reta CK coincidir com a tangente CH, e quando as últimas razões das linha EC, Ec e Cd forem encontradas, os pontos C e c deverão se aproximar e coincidir exatamente. Erros, por menores que sejam, não devem ser negligenciados na matemática. (NEWTON, apud BARON, 1985, v. 3, p. 31-33).

Considerando que: i) as áreas de ABC e de $ABDG$ (Figura III.7) são geradas por movimentos infinitamente pequenos das ordenadas BC e BD; e ii) que a linha DBC ao ser deslocada para dbc, descrevendo um movimento uniforme sobre AB, provoca um aumento das áreas de ABC e de $ABDG$ dado, respectivamente, pelas áreas de $BCcb$ e de $BbdD$; Newton considera que existe uma proporção entre as fluxões e os aumentos dos fluentes, ou seja: $\frac{fluxão\ de\ ABC}{fluxão\ de\ ABDG} = \frac{área\ de\ BCcb}{área\ de\ BbdD}$.

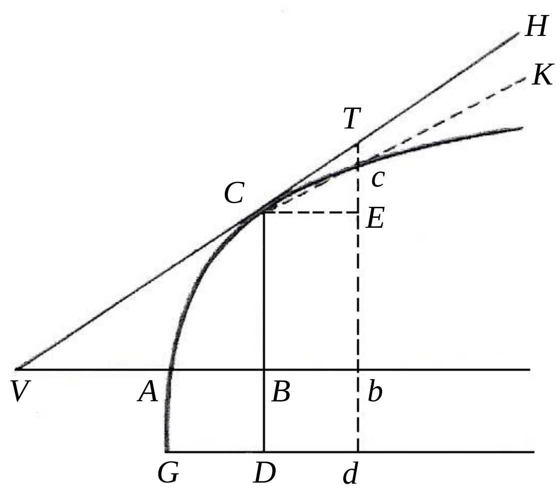


Fig. III.7. (BARON, 1985, v. 3, p. 31)

Entretanto, Newton considera os aumentos dos fluentes, não apenas como infinitamente pequenos, mas também, "nascentes" no sentido de "chegar a existir". Assim, $\frac{fluxão\ de\ ABC}{fluxão\ de\ ABDG} =$ a primeira razão dos aumentos nascentes, ou seja, $\frac{fluxão\ de\ ABC}{fluxão\ de\ ABDG} = \frac{BC}{BD}$.

Agora, considerando que com o deslocamento de BC em bc, os aumentos gerados pelas quantidades AB, BC, AC são, respectivamente, dados por Bb, Ec e Cc. Considerando ainda que os lados do triângulo CET estão na *primeira razão* desses aumentos nascentes, Newton conclui que as quantidades AB, BC, AC são proporcionais aos lados respectivos do triângulo CET. Mas argumenta que o mesmo acontece, considerando as fluxões na última razão das quantidades ínfimas, ou seja, fazendo bc se aproximar da posição original BC, o ponto c aproxima-se de C e o segmento de reta Cc aproxima-se da tangente VT. Assim, o triângulo ínfimo torna-se semelhante ao triângulo CET, e os lados do triângulo ínfimo estarão na mesma razão que os respectivos lados do triângulo CET e que, por sua vez, estarão na mesma razão que os comprimentos das linhas AB, BC e AC da curva, sendo as últimas razões, razões de igualdade.

A fluxão $\dot{y}$ de Newton é a razão das quantidades ínfimas (também chamadas de evanescentes), ou seja, é a razão entre a variação de y e a variação de t, representadas atualmente por Δy e Δt. Para Newton, “Por razão última das quantidades evanescentes, deve-se entender a razão das quantidades, não antes de desaparecerem nem depois, mas com as quais elas desaparecem.” (NEWTON apud BOYER, 1992, p. 21); e “Quantidades e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente à igualdade e antes do fim desse tempo se aproximam mais uma da outra que por qualquer diferença dada, se tornam por fim iguais.”[63] (NEWTON apud EDWARDS JR. 1979, p. 225). Isso mostra que Newton tinha clareza do conceito de limite. Conceito este que é o alicerce de seu Cálculo (EDWARDS JR., 1979, p. 225).

III.2.1.4 Newton e o Teorema Fundamental do Cálculo

No *Tractatus de methodis* (Tratado sobre o método) de 1671, Newton enuncia claramente os problemas fundamentais do Cálculo: “Sendo dada a relação das quantidades fluentes, encontrar a relação de suas fluxões. E inversamente.”[64] (NEWTON apud DAHAN-DALMEDICO; PEIFFER, 1986, 192). Com isso, ele está dizendo que considerando um ponto em movimento, esse movimento é descrito, dando a posição e a velocidade do ponto em relação ao tempo. Chama a relação posição-tempo de fluente e a relação velocidade-tempo de fluxão; qualquer uma das relações sendo dada, a outra pode ser determinada. Além de descobrir o Teorema Fundamental do Cálculo, usa-o para resolver problemas de cálculo de área (KATZ, 1998, p. 514).

Com seus estudos, Newton percebeu que encontrar a distância percorrida por um ponto em um dado intervalo de tempo, sendo dada a velocidade do mesmo, é equivalente a encontrar a área sob a curva que representa a velocidade (KATZ, 1998, p. 514). Considerando o exemplo apresentado por Katz (Ibid., p.

[63] Quantities, and the ratios of quantities, which in any finite time converge continually to equality, and before the end of that time approach nearer to each other than by any given difference, become ultimately equal.
[64] Étant donné la relation des quantités fluentes, trouver la relation de leurs fluxions. Et inversement.

514): para Newton a curva AFD (Figura III.8), era gerada pelo movimento de x e y, e a área de $AFDB$ era gerada pelo movimento da ordenada BD. Era evidente para ele que a fluxão da área era a ordenada multiplicada pela fluxão de BD. Isto significa que sendo z a área sob a curva, então, $\dot{z} = y\dot{x}$, ou $\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = y$. Em notação moderna: se $A(x)$ representa a área sob $y = f(x)$ de 0 a x, então, $\frac{dA}{dx} = f(x)$.

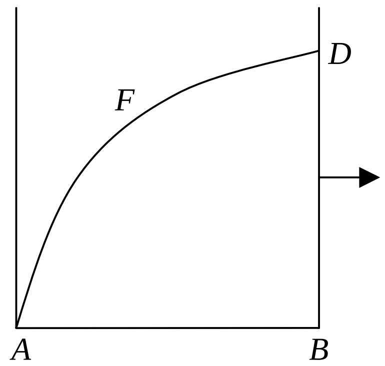


Fig. III.8. (KATZ, 1998, p. 514)

Newton apresentou os fundamentos de seu Cálculo em três momentos diferentes, de forma tal que evidencia sua constante busca de uma fundamentação cada vez mais sólida e aprimorada, com a qual seus métodos analíticos pudessem ser justificados. Conseguiu mostrar que seus métodos eram aplicáveis a um grande número de problemas, envolvendo curvas algébricas simples, expressões algébricas que envolvem raiz, seções cônicas e outras mais. Mas apesar de toda sua dedicação, as bases lógicas sobre as quais seu cálculo estava calcado, não foram convincentes e ainda causaram preocupação e controvérsia que perduraram por mais de um século após sua morte.

III.2.2 O Cálculo de Leibniz

III.2.2.1 Origem do Cálculo de Leibniz

Contemporâneo de Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig, Alemanha; aos 15 anos ingressou na Universidade de Leipzig, obtendo seu grau de bacharel quando estava com 17 anos. Estudou Lógica, Direito, Filosofia e Matemática; posteriormente, obteve o grau de doutor em Direito, na Universidade de Altdorf, em Nuremberg e, então, entrou para o serviço diplomático, ali ficando até sua morte (BOYER, 1974, p. 292-293).

Em 1672, foi para Paris, cumprindo uma missão diplomática e teve a oportunidade de conhecer Christian Huygens (1629-1695) que lhe deu aulas de Matemática, iniciando pelo estudo das obras de Pascal (1623-1662), Barrow (1630-1677), Cavalieri (1598-1647) e Descartes (1596-1650), dentre outros (BOYER, 1992, p. 45).

Em razão de uma outra missão diplomática, no ano seguinte foi para Londres onde participou de reuniões da Royal Society, da qual veio a se tornar sócio. Quando, em 1676, voltou novamente a Londres, apresentou a máquina de calcular que havia inventado (BOYER, 1974, p. 293). Nesse meio tempo, de 1673 a 1676, que Leibniz estudou e familiarizou-se com os métodos infinitesimais (LEIBNIZ, 1995, p. 16) e fez muitas descobertas matemáticas, criando seu Cálculo, com a descoberta do Teorema Fundamental do Cálculo e uma notação para o mesmo, bem como fórmulas elementares de diferenciação (EVES, 1995, p. 442-443).

Leibniz sempre teve como objetivo encontrar uma linguagem simbólica geral, pela qual pudesse traduzir todos os processos de raciocínio e argumentação, por meio de regras lógicas, facilitando a obtenção de conhecimentos e propiciando novas invenções. Imbuído desse intuito, procurou criar uma notação que tornasse as relações matemáticas explícitas (BARON, 1985, p. 43-44). Leibniz foi um dos maiores inventores de símbolos matemáticos (STRUIK, 1987, p. 111).

Assim como Newton, Leibniz iniciou suas descobertas na área do Cálculo, com trabalhos que envolviam séries infinitas, estudando a relação inversa entre somas e diferenças de seqüências numéricas (KATZ, 1998 p. 522). Em 1672, Huygens (1639-1695) propôs a Leibniz que tentasse encontrar a soma dos recíprocos dos números triangulares, ou seja, sendo $a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 6,\ a_4 = 10,$ $a_5 = 15,\ ...,\ a_n = \frac{r(r+1)}{2}$, ... (com r inteiro positivo) os números triangulares, Leibniz deveria determinar a soma $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + ... + \frac{2}{r(r+1)}$ (BARON, 1985, p. 44).

Em 1666, Leibniz havia estudado seqüência de diferenças. Conforme exemplificam Dahan-Dalmedico e Peiffer (1986, p. 195), ao estudar a seqüência de números quadrados $0, 1, 4, 9, 16, 25, 36$, determinando $(1-0), (4-1), (9-4),$ $(16-9), (25-16), (36-25)$, Leibniz formou a seqüência diferença $1, 3, 5, 7, 9, 11$ e constatou que a soma dos termos desta última seqüência é igual à diferença entre o último e o primeiro termo da seqüência de números quadrados, ou seja,

$$(1-0) + (4-1) + (9-4) + (16-9) + (25-16) + (36-25) = 36 - 0 = 36.$$

Generalizando, Leibniz pensou em uma seqüência $a_1, a_2, a_3, ...$, com base na qual formou uma segunda seqüência $b_1 = a_2 - a_1$, $b_2 = a_3 - a_2$, $b_3 = a_4 - a_3$, ... cuja soma dos n primeiros termos é dada por

$$b_1 + b_2 + b_3 + ... = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + ... + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1,$$

concluindo que: as seqüências, cujos termos podem ser escritos como diferenças, podem ter seus termos somados com muita facilidade (BARON, 1985, v. 3, p. 44).

Leibniz resolve, então, usar o mesmo raciocínio para encontrar a soma dos recíprocos dos números triangulares. Fazendo $\frac{2}{r(r+1)} = \frac{2}{r} - \frac{2}{r+1}$, consegue escrever a seqüência dos recíprocos dos números triangulares pela seqüência de diferenças $\left(\frac{2}{1}-\frac{2}{2}\right), \left(\frac{2}{2}-\frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right), ..., \left(\frac{2}{r}-\frac{2}{r+1}\right)$; encontra a soma dos n primeiros termos da seqüência, ou seja,

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{2}{r(r+1)} = \left(\frac{2}{1}-\frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2}-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right) + ... + \left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right) = 2 - \frac{2}{n+1};$$

e, por fim, a soma da série infinita $\sum_{r-1}^{\infty} \frac{2}{r(r+1)} = 2$, que é a soma procurada (Ibid., p. 44-45).

O resultado bem-sucedido serviu de incentivo para que Leibniz encontrasse muitas outras somas de seqüências e adquirisse muita habilidade para somar séries infinitas, o que foi de grande utilidade para a invenção de seu cálculo (Ibid., p. 46). Para estabelecer uma ligação desses resultados com o Cálculo Infinitesimal, Leibniz interpretava uma seqüência de números, como uma seqüência de valores de uma função e a diferença entre dois números como a diferença entre dois valores vizinhos da função. Esta diferença, Leibniz acabou representando por dy e a soma dessas diferenças por $\int dy = y$ (DAHAN-DALMEDICO; PEIFFER, 1986, p. 195).

Assim como Cavalieri e outros, Leibniz também percebeu que a quadratura de uma curva poderia ser obtida pela adição de uma seqüência de ordenadas eqüidistantes (Fig. III.9), pois ao considerar a distância entre as ordenadas, igual a 1, a soma dessas ordenadas corresponde a um valor que se aproxima da área sob a curva. Além disso, percebeu que as diferenças entre ordenadas consecutivas dão uma aproximação da inclinação da reta tangente; quanto menor for a escolha para a unidade 1, ou seja, quanto menor for a escolha para a distância entre as ordenadas, mais finos serão os retângulos formados, e mais a quadratura e a tangente aproximam-se dos valores exatos; por isso, para Leibniz, se a unidade escolhida fossem infinitamente pequena, os resultados seriam exatos (BARON, 1985, v. 3, p. 46).

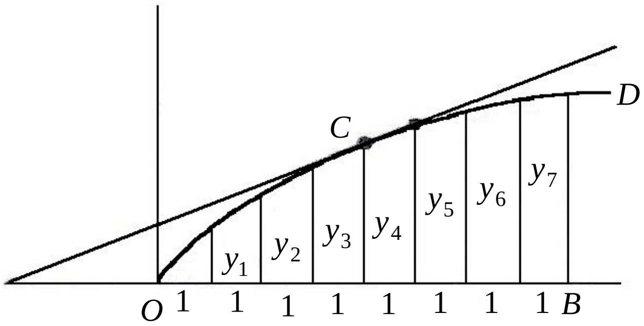


Fig. III.9. (BARON, 1985, v. 3, p. 46)

Visto que a soma das seqüências fornece a quadratura, e as diferenças fornecem as tangentes, sendo as diferenças o inverso das somas, isto sugeriu a Leibniz que os problemas de determinação de áreas e tangentes correspondem a operações inversas (Ibid., p. 46).

III.2.2.2 Triângulo característico

Apesar de suas descobertas, Leibniz tinha consciência de que seu conhecimento era muito limitado em relação ao Cálculo Infinitesimal. Estudando obras de Pascal (1623-1662) e de Barrow, deparou-se com o triângulo infinitesimal ou "característico"[65], usado por Pascal para determinar a quadratura de senos e por Barrow para determinar a tangente a uma curva em um determinado ponto da mesma. Isso levou Leibniz a presumir que a relação inversa entre os problemas de quadraturas e os de tangentes poderia ser justificada pelo triângulo característico (BOYER, 1974, p. 295).

A obra de Pascal, na qual Leibniz se inspirou para criar o triângulo característico, foi *Traité des sinus du quart de cercle* (Tratado sobre os senos de

[65] Termo que Leibniz atribuiu ao triângulo infinitesimal, por considerá-lo um elemento característico da curva (DAHAN-DALMEDICO; PEIFFER, 1986, p. 196).

um quadrante de um círculo); o que chamou sua atenção foi a seguinte passagem, conforme descrição feita por Katz (1998, p. 490): considerando o quadrante ABC de um círculo unitário e sendo D um ponto para o qual o seno é DI, Pascal traçou uma pequena tangente EDE' à curva ABC em D e os segmentos ER e $E'R'$ perpendiculares ao raio AC (Figura III.10). Notando que os triângulos EKE' e DIA são semelhantes, encontrou que $\frac{DI}{DA} = \frac{E'K}{EE'} = \frac{RR'}{EE'}$ e, portanto, $DI \cdot EE' = DA \cdot RR'$. Considerando que, para um intervalo RR' infinitamente pequeno, o segmento EE' é considerado igual ao arco de círculo, Pascal afirma que o retângulo formado pelo seno DI e o arco infinitesimal (ou a tangente EDE'), representado por EE', é igual ao retângulo formado pelo raio DA e a parte do eixo entre as extremidades do arco dada por RR', ou seja, Pascal mostrou que a soma dos senos ou quadratura de qualquer arco de um quadrante de um círculo é igual à porção da base entre os senos extremos multiplicada pelo raio do círculo.

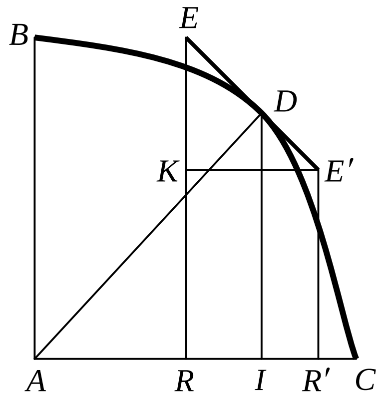


Fig. III.10. (KATZ, p. 490)

Leibniz percebeu que esse triângulo infinitesimal que Pascal inscreveu em círculos, poderia ser generalizado e aplicado a curvas arbitrárias. Na Figura III.11, conforme exemplificação de Baron (1985, v. 3, p. 47), OcC é uma curva arbitrária; $\tau = cg$ é uma tangente à curva em c; $n = ce$ é a normal à curva, também, em c; e $y = cb$ é obtido pela projeção ortogonal do ponto c sobre o eixo horizontal. Tomando um ponto c' pertencente à tangente, mas tão próximo de c que cc' é confundido com a própria curva, Leibniz obtém o triângulo característico cdc' em

c, que é semelhante aos triângulos cbe e gbc, chegando às relações $cd : dc' : cc' = y : v : n = t : y : \tau$ (em notação atual, $\frac{cd}{y} = \frac{dc'}{v} = \frac{cc'}{n}$ e $\frac{cd}{t} = \frac{dc'}{y} = \frac{cc'}{\tau}$), úteis em transformações de quadraturas.

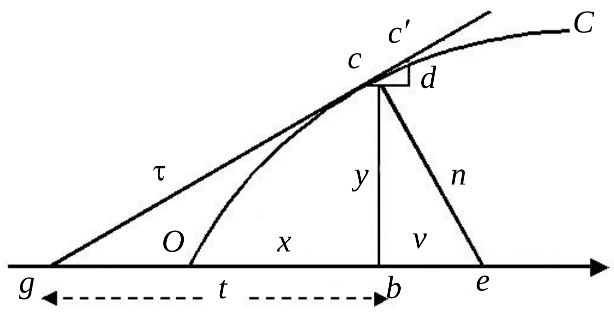


Fig. III.11. (BARON, 1985, v. 3, p. 47)

III.2.2.3 Conceitos básicos: diferenciais e integrais

Em 1675, Leibniz busca dar um tratamento analítico ao Cálculo Infinitesimal que tinha descoberto. Cria o símbolo $\int$ para indicar somas e passa a usar d para indicar diferenças, operação inversa de $\int$. Mais ainda, almejando uma simbologia que traduzisse os argumentos do Cálculo, busca regras operacionais para $\int$ e d (Ibid., p. 57).

Leibniz chamava de "diferencial" a diferença infinitamente pequena entre dois valores consecutivos da mesma variável (Ibid., p. 58). Tomando, como exemplo, a curva da Figura III.12, para cada ordenada y existe uma abscissa x correspondente. Como as ordenadas são consideradas infinitamente próximas, uma da outra, a diferença dy entre duas ordenadas consecutivas é infinitamente pequena; da mesma forma, a diferença dx entre duas abscissas consecutivas também é infinitamente pequena e representa a distância entre duas ordenadas y (BARON, 1985, v. 3, p. 58).

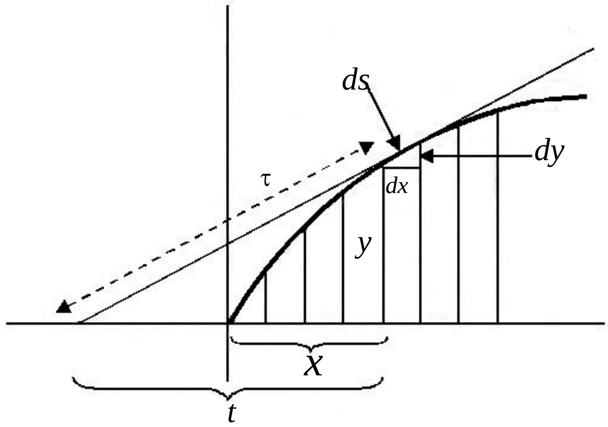


Fig. III.12. (BARON, 1985, v. 3, p. 58)

Apesar de não ter definido diferenciais, Leibniz apresentou a seguinte explicação para uso que fazia das mesmas:

> É importante considerar quantidades infinitamente pequenas tais que, quando se procura sua razão, elas possam ser consideradas não nulas, mas que sejam desprezíveis sempre que aparecem com quantidades incomparavelmente maiores. Assim, quando temos $x+dx$, dx é desprezada. Mas é diferente se procuramos a diferença entre $x+dx$ e x, pois então as quantidades finitas desaparecem. Do mesmo modo não podemos ter xdx e $dxdx$ mantidas juntas. Daí, se precisamos diferenciar xy, escrevemos $(x+dx)(y+dy)-xy = xdy + ydx + dxdy$.
>
> Mas nessa altura $dxdy$ deve ser rejeitada por ser incomparavelmente menor que $xdy + ydx$. Assim em qualquer caso particular o erro é menor que qualquer quantidade finita. (LEIBNIZ apud BOYER, 1992, p. 50).

Leibniz considerou que, para cada ponto (x, y) de uma curva qualquer, pode ser formado um triângulo característico, cujas dimensões são dx, dy e ds, sendo esta última a hipotenusa do triângulo característico, que se confunde com o comprimento do arco e que se prolongada resulta na tangente à curva em (x, y). Então, para determinar a tangente em (x, y), basta determinar a razão $\frac{dy}{dx}$; e considerando que a relação entre y e x normalmente é dada pela equação da curva, para determinar a razão entre dy e dx é necessário diferenciar essa equação, encontrando a subtangente[65] t, que com o ponto (x, y) possibilita a construção da tangente à curva em (x, y) (BARON, 1985, p. 58).

Em 1684, suas descobertas sobre o Cálculo Diferencial foram publicadas na Acta Eruditorum – uma revista científica periódica alemã, que ele ajudou a fundar – com o título *Nova methodus pro maximis et minimis, item que tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur* (Um novo método para máximos e mínimos e, também, para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais). Nesta obra, Leibniz apresenta um método geral que se aplica às funções algébricas racionais ou irracionais e às transcendentes, bem como as seguintes fórmulas para seu Cálculo Diferencial: $dc = 0$ para c constante; $d(u+v) = du + dv$; $d(uv) = udv + vdu$; $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$; $d(u^n) = nu^{n-1}$ (BOYER, 1974, p. 296).

III.2.2.4 Leibniz e o Teorema Fundamental do Cálculo

Em 1686, Leibniz publicou um artigo onde apresenta seu Cálculo Integral, e enfatiza a relação inversa entre diferenciação e integração (Ibid., p. 296).

Considera a integral como sendo a área sob uma curva. Assim, conforme esboçado na Figura III.13, pensa na área como sendo composta por muitas faixas retangulares verticais infinitamente finas ydx e indica a soma das áreas de todas essas faixas por $\int ydx$, que é a área sob a curva $y = f(x)$ e compreendida entre as retas $y = 0$ e $y = x$; considerando que a diferencial da área de OCB é a área do retângulo ydx à direita, ou seja, $d\int ydx = ydx$, mostra a relação inversa entre d e $\int$ e, reciprocamente, $\int dy = y$ (BARON, 1985, v. 3, p. 60).

[65] "Comprimento da projeção, sobre o eixo dos x, do segmento de uma tangente a uma curva, compreendido pelo ponto de tangência e pela interseção da tangente com aquele eixo." (FERREIRA, 1004, p. 1187).

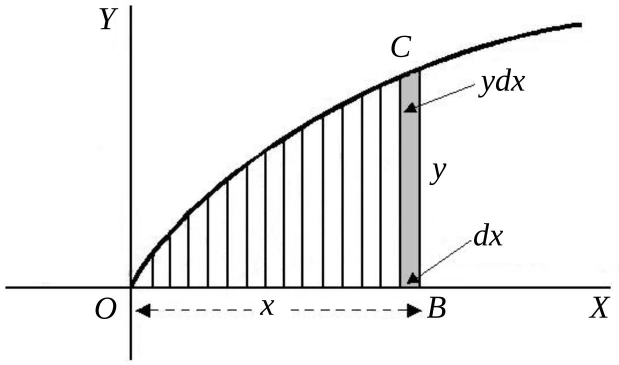


Fig. III.13. (BARON, 1985, v. 3, p. 60)

Apesar de seus métodos também serem aplicáveis às equações algébricas e transcendentes, assim como o Cálculo de Newton, o Cálculo de Leibniz também apresenta incoerências, pois não define o que vem a ser "quantidades infinitamente pequenas" nem tampouco dá prova da validade de se desprezar tais quantidades no decorrer do desenvolvimento dos cálculos (BOYER, 1992, p. 22).

III.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE O CÁLCULO DO SÉCULO XVII

Desde sua criação até os dias atuais, o Cálculo passou por transformações fundamentais, vindo a se firmar somente no século XIX (BARON, 1985, v. 4, p. 22). Apesar do grande feito de Newton e Leibniz, seus Cálculos apresentavam incoerências (EVES, 1995, p. 444); mas, mesmo assim, o Cálculo criado no século XVII (em particular, o de Leibniz) foi amplamente divulgado e sua aplicabilidade acabou por atrair muitos matemáticos, mas, que, normalmente, utilizavam processos que não gozavam de justificativas lógicas (Ibid., p. 444).

Um exemplo é a contradição encontrada no primeiro postulado de L'Hospital (1661-1704), quando afirma que uma quantidade pode aumentar ou diminuir e mesmo assim permanecer a mesma, surgindo, então, as seguintes questões: Como isto é possível? Será que essa quantidade existe de fato? Qual o grau de confiabilidade dos resultados encontrados? (BARON, 1985, v.4, p. 15-16).

A verdade é que as quantidades infinitamente pequenas, tão usadas, ainda não tinham sido definidas, o que colocava em cheque toda uma teoria, já que certos procedimentos eram simplesmente aceitos como verdadeiros, embora não possuíssem justificativas plausíveis. Como explicar, por exemplo, que em algumas questões, no decorrer de seu desenvolvimento, inicialmente, considera-se que quantidades infinitamente pequenas são diferentes de zero e logo, em seguida, que são iguais a zero? (Ibid., p. 22).

Estas e outras incoerências fortaleceram a idéia de que os fundamentos do Cálculo Infinitesimal ainda eram inconsistentes e necessitavam de mudanças conceituais. Esta necessidade acabou se estendendo aos outros ramos da Matemática; assim, os conceitos de função, de limite, de continuidade, de diferenciabilidade e de integrabilidade precisavam ser definidos (EVES, 1995, p. 462). Alguns conceitos básicos, depois de generalizados, tornaram-se complexos e abstratos como, por exemplo, o conceito de espaço, dimensão, convergência e integrabilidade. No Cálculo Infinitesimal, as variáveis cederam lugar às funções e o conceito fundamental passou a ser o de função derivada, cuja definição está calcada no conceito de limite.

CAPÍTULO IV

TEORIA DA INTEGRAÇÃO DE CAUCHY A LEBESGUE

IV. 1 DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE FUNÇÃO NOS SÉCULOS XVII E XVIII

A evolução do conceito de função é longa e tumultuada, a compreensão dessa idéia e, conseqüentemente, sua generalização foram gradativas até atingir seu atual significado. Tendo duas raízes: uma liga o conceito de função à idéia de cálculo, como no caso das equações; enquanto a outra tem ligação com a lei natural. Segundo Michael Otte:

> Considerando historicamente, o conceito de função tem dupla raiz. Primeiro, ele se desenvolve ao lado do conceito de lei, particularmente junto com o conceito de lei natural. Ele surge também do conceito de operação aritmética-algébrica, do conceito de algoritmo e das concepções gerais de máquina. Adicionar o número 5, por exemplo, representa uma função do total dos números que associa, digamos, 2 a 7, 4 a 9, 15 a 20 etc. Esta concepção de função como operação ou "máquina" liga-se claramente ao conceito de funcionalismo. Não se pensa na operação concreta ou na máquina concreta, mas na função por ela preenchida. Eu obtenho esta função, num processo de definição por abstração, das classes de operadores, das máquinas, das correspondências etc., funcionalmente equivalentes. Ao invés de adicionar 5, por exemplo, eu poderia, da mesma forma, isto é, numa forma funcionalmente equivalente, primeiro adicionar 10 e depois subtrair 5. (...)
>
> O desvinculamento do conceito de função das modalidades concretas, que a caracteriza como uma operação ou máquina, só ocorreu no final do século XIX, e traz até hoje certas dificuldades cognitivas. Isto tem a ver com o fato de que nós pensamos as operações ou as máquinas apenas no sentido de objetivos a serem alcançados; pensamos em efetividade, em proveito etc., mas dificilmente percebemos a conexão entre operação e lei. Uma máquina, assim se diz, tem de

> preencher uma determinada função, tem de "garantir uma vantagem", mas ela não explica nada. Um algoritmo resolve problemas, mas não descreve realidade alguma, enquanto, sob certas circunstâncias, seria desapropriado perguntar, inversamente, pelas vantagens oferecidas pelas leis de Newton, ou pelos problemas que uma certa teoria pode solucionar.
>
> A afirmação de que o conceito de função tem uma dupla raiz engloba ao mesmo tempo a tese de que ele só poderia, efetivamente, ser desenvolvido numa complementaridade entre aspectos operativos e concretos. (...)
>
> A primeira concepção do conceito de função é descritiva, e considera uma função como uma lei de dependência entre uma grandeza variável e outras quaisquer, da mesma forma como, para um objeto móvel, o caminho percorrido é função do tempo gasto para percorrê-lo. Podemos dizer que, de um modo geral, as alterações de estado e de natureza das coisas reais no tempo, ao lado das conexões causa-efeito, constituem as experiências essenciais para a segunda raiz do conceito de função.
>
> Esta concepção do conceito de função tornou-se um dos fundamentos da revolução científica ocorrida nas ciências naturais no século XVIII. (...)
>
> Na própria matemática já se revelava a necessidade de avançar com as concepções do século XVII e resolver a conexão entre o conceito de função e sua representação simbólica ou descrição estrutural. Lobatschewskj (1793-1856), por exemplo, escreve, em 1834: 'A definição geral exige que uma função de x seja um número para cada x dado, e que ela varie progressivamente com x. O valor de uma função pode ser dado por uma expressão analítica, ou por uma condição que forneça um meio de verificar todos os números e escolher um entre eles; finalmente, pode existir a dependência, mas permanecendo todavia desconhecida'. Digno de nota nesta descrição definitória, e apenas aparentemente supérfluo, é a enumeração das diferentes modalidades, pelas quais uma correspondência funcional poderia ser dada. Exatamente esta heterogeneidade e pluralidade fundamentam a formação do conceito abstrato-teórico de função pelo processo de definição por abstração. (OTTE, 1993, p. 228-232).

Apesar da gênese do conceito de função ser anterior a Leibniz e seus contemporâneos, como descrito e argumentado por Youschkevitch (1981), o termo função foi usado pela primeira vez por Leibniz, em manuscritos datados de 1673 e, em particular, no *La méthode inverse des tangentes ou au sujet des fonctions* (O método inverso das tangentes ou sobre as funções), para designar quantidades geométricas variáveis relacionadas a uma curva como, por exemplo, coordenadas, tangentes, subtangentes, raios de curvatura, etc. (DAHAN-DALMEDICO; PEIFFER, 1986, p. 217).

Leibniz não só introduziu o termo função, mas ligou-o também ao problema da regularidade do mundo, ou seja, com a noção de lei da natureza. Em um texto sobre o princípio ou lei da continuidade, de 1687, o autor escreveu:

> Se numa série de quantidades dadas [conhecidas] dois casos continuamente se aproximam um ao outro com o efeito que no final eles ficam um só, então, necessariamente a mesma coisa deveria acontecer na série de quantidades dependentes, que são procuradas.
>
> Tudo isso depende do seguinte princípio, que é mais geral ainda: uma ordem no dado corresponde uma ordem no procurado.[67] (LEIBNIZ apud CASSIRER, 1966, p. 129).

Em seguida, apresenta alguns exemplos do funcionamento do princípio da continuidade na teoria das cônicas. Mas, só no século XIX, na obra de Bolzano surgiu uma definição rigorosa e coerente do conceito de função contínua.

Em seu artigo *Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^e siècle*[68] (O conceito de função até meados do século XIX) de 1981, Youschkevitch faz uma análise histórica do conceito de função no que concerne a formação da idéia de função, sua generalização e compreensão gradual, a significação que ela adquire com o progresso do pensamento científico e filosófico e o papel desempenhado no decorrer das diferentes etapas de seu processo. Para tanto, divide esse processo até meados do século XIX em três importantes etapas: a Antiguidade, a Idade Média e o Período Moderno, assim:

Na Antiguidade, o estudo dos diferentes casos de dependência entre duas quantidades não proporcionou as noções gerais de quantidades variáveis e de funções.

Na Idade Média, na ciência européia do século XIV, essas noções são pela primeira vez e de uma maneira precisa expressas ao mesmo tempo sob uma forma geométrica e mecânica. Mas, como na Antiguidade, cada caso concreto de dependência entre duas quantidades era definido por uma descrição verbal ou por um gráfico mais que por fórmula.

[67] Wenn in der Reihe der gegebenen Grössen zwei Fälle sich stetig einander nähern, sodass schliesslich der eine in den anderen übergeht, so muss notwendig in der entsprechenden Reihe der abgeleiteten oder abhängigen Grössen, die gesucht werden, dasselbe eintreten. Es hängt dies von dem folgenden, noch allgemeineren Prinzip ab: Einer geregelten Ordnung im Gegebenen entspricht eine geregelte Ordnung im Gesuchten.

[68] Artigo traduzido com a autorização das Editores SPRINGER a partir do texto inglês, presente em "Archive for History of Exact Sciences" volume 16 (1976).

No Período Moderno, a partir do século XVI e, especialmente, durante o século XVII, as expressões analíticas das funções começam a prevalecer; e a classe das funções analíticas, geralmente, expressas por meio de somas de séries infinitas, tornaram-se a principal classe utilizada.

Na primeira metade do século XVII, Descartes (1569-1650) e Fermat (1601-1665), independentes um do outro, aplicaram a Álgebra à Geometria – culminando na moderna Geometria Analítica – e apresentaram o método analítico para introduzir a relação de dependência funcional entre quantidades variáveis, no sentido que uma delas permite determinar a outra. A partir dessa época, o pensamento funcional tornou-se predominante nos trabalhos de criação matemática (YOUSCHKEVITCH, 1981, p. 25-27).

Para Youschkevitch, a representação de funções por meio de equações caracteriza uma revolução no desenvolvimento da Matemática, pois, a utilização de expressões analíticas e as operações com as quais são produzidas, seguindo certas regras específicas, conferem ao estudo das funções um caráter de verdadeiro cálculo, abrindo horizontes inteiramente novos (Ibid., p. 26). O método analítico de expressar dependência funcional mostrou-se tão eficaz que rapidamente foi estendido ao Cálculo Infinitesimal e a outros ramos da Matemática e assegurou à noção de função um lugar central em todas as ciências exatas (EVES, 1995, p. 462).

Entre Descartes e Fermat, Descartes desenvolveu de um modo mais detalhado, em *La Géométrie* de 1637, a idéia de introduzir analiticamente uma função (YOUSCHKEVITCH, 1981, p. 25). Classificava as curvas em geométricas (atualmente, chamadas de algébricas), como sendo aquelas onde as duas coordenadas x e y são relacionadas por uma equação algébrica $P(x, y) = 0$; ou mecânicas (não geométricas) (DAHAN-DALMEDICO; PEIFFER, 1986, p. 214-215). A respeito do assunto das definições implícitas, Boutroux tece o seguinte comentário:

> A álgebra, vimos, é a arte de combinar signos literais (representando grandezas) por meio de operações conhecidas. Em princípio, estas operações podem ser

> quaisquer e arbitrariamente definidas: porém os primeiros algebristas não conheciam outras operações que aquelas aritméticas, quer dizer, a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão, a elevação a uma potencia inteira e a extração de uma raiz de ordem inteira. Combinando estas operações de uma maneira qualquer, e as usando sobre uma ou várias quantidades variáveis e sobre os números fixos, obtemos uma grande variedade de "*funções*" de uma ou várias variáveis. Aliás, podemos aumentar o número dessas funções utilizando a noção de relação implícita: seja $F(x, y)$ uma função já conhecida (definida por meio de uma combinação de operações conhecidas) de x e y: a relação $F(x, y) = 0$ pode ser considerada como definindo y em *função* implícita de x. Por esse desvio, os algebristas obtêm uma rica família de funções de uma variável, aliás muito diversas, que chamamos hoje "funções-algébricas".[69] (BOUTROUX, 1920, p. 117).

Em meados do século XVII, Newton e Leibniz, dentre outros, com a descoberta do desenvolvimento das séries infinitas, tornam possível representar analiticamente toda relação funcional estudada até a época (YOUSCHKEVITCH, 1981, p. 27). Com isso, como considerou Boutroux (1920, p. 117), a teoria do desenvolvimento em séries é tida como a descoberta mais notável e mais fecunda dessa nova Matemática inaugurada por Newton e Leibniz.

O conceito de função foi evoluindo, tendo como suporte os conhecimentos disponíveis em cada época para justificá-lo, caracterizando a necessidade e o interesse em generalizar e ampliar conceitos. Johann Bernoulli (1667-1748) que trocou correspondências com Leibniz de 1694 a 1698, apresenta a primeira definição explícita de uma função como expressão analítica em seu artigo *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres* (Considerações sobre o que se tem, até o presente momento, sobre soluções de problemas de isoperímetros) de 1718 (YOUSCHKEVITCH, 1981, p. 35). Para ele, funções eram expressões analíticas (fórmulas) que envolviam somente uma quantidade variável e algumas constantes. Dessa forma, as

---

[69] L'algèbre, nous l'avons vu, est l'art de combiner des signes littéraux (représentant des grandeurs) au moyen d'opérations connues. En principe ces opérations peuvent être quelconques et arbitrairement définies: toutefois les premiers algébristes ne connaissaient d'autres opérations que celle de l'arithmétique, c'est-à-dire l'addition, la soustraction, la multiplication, la division, l'élévation à une puissance entière et l'extraction d'une racine d'ordre entier. En combinant ces opérations d'une manière quelconque, et les faisant porter sur une ou plusieurs quantités variables et sur des nombres fixes, on obtient une grande variété de "*fonctions*" d'une ou plusieurs variables. D'ailleurs on peut accroître le nombre de ces fonctions en utilisant la notin de relation implicite: soit $F(x, y)$ une fonction déjà connue) définie au moyen d'une combinaison d'opérations connues) de x e y: a relation $F(x,y) = 0$ peut être considérée comme définissant y en *fonction* implicite de x. Par ce détour, les algébristes obtiennent une riche famille de foncions d'une variable, d'aillures très diverses, que l'on appelle aujourd'hui "fonctions algébriques".

potências x^n e as fórmulas como $(a+x)^3bx^2$, sendo a e b constantes, eram consideradas funções de x (BARON, 1985, v. 4, p. 35).

Na época, os fundamentos do Cálculo eram bastante insatisfatórios (EVES, 1995, p. 462). Assim, em meados do século XVIII, como argumenta Youschkevitch (1981, p. 9), o próprio método analítico de representar funções já se mostrava inadequado, surgindo, então, uma nova definição geral de função que acabou se tornando universalmente aceita em Análise Matemática.

Leonhard Euler (1707-1783) que foi aluno de Johann Bernoulli, em *Introduction in analysin infinitorum* (Introdução à análise de infinitos) de 1748, padroniza o uso do termo função. Para ele, “Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo que seja, por tal quantidade e por números ou quantidades constantes.”[70] (EULER apud YOUSCHKEVITCH, 1981, p. 36).

A quantidade variável a que se refere era uma “[...] quantidade indeterminada ou, se desejarmos, uma quantidade universal, que compreende todos os valores determinados.”[71] (Ibid., p. 36).

Com essa definição, parece que as funções analíticas incluíam: expressões algébricas e séries infinitas como, por exemplo, as séries de Taylor.

Segundo Valiron (1948, p. 160), nessa obra, Euler faz a distinção entre as funções algébricas e as funções transcendentes. As algébricas – compreendendo, em particular, os polinômios e as frações racionais – eram classificadas como explícitas ou implícitas: uma função de x é considerada explícita quando seu valor y é resultante de um número finito de somas, diferenças, produtos, quocientes, potências com expoentes racionais sobre x e as constantes; do contrário a função é implícita. As funções transcendentes sendo as

---

[70] Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée de quelque manière que ce soit, de cette quantité et de nombres ou de quantités constantes.

[71] [...] quantité indéterminée ou, si l’on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.

trigonométricas, as logarítmicas, as trigonométricas inversas e as exponenciais e, ainda, séries de potências e outras expressões que envolvem limites. Como acrescenta Valiron, Euler não se limita ao caso em que a variável é real, mas introduz variável complexa nas funções elementares.

Diferente das funções no sentido moderno, as expressões analíticas de Euler são fórmulas ou partes de fórmulas com as quais se efetuam cálculos analíticos; como conseqüência há funções no sentido moderno que não eram aceitas no século XVIII, por não terem uma representação analítica (BARON, 1985, v. 4, p. 36). Um exemplo é a função de Dirichlet. No entanto, foi graças a Euler que o conceito de função passou a assumir um papel de destaque no Cálculo e o interesse pelo estudo geométrico das curvas cedeu lugar ao estudo das fórmulas e suas relações, tornando-se parte da Análise (Ibid., p. 35).

O conceito de função apresentado por Euler era limitado, para ele, as funções que tivessem as mesmas propriedades que as expressões analíticas mais comuns eram consideradas “bem-comportadas” ou contínuas (Ibid., p. 36). Assim, no sentido de Euler, uma função contínua é formada por uma única expressão analítica, enquanto uma função descontínua (também chamada, por ele, de “mista” ou “irregular” e, algumas vezes, de “mecânica”) é formada por mais de uma expressão analítica (YOUSCHKEVITCH, 1981, p. 42), mas, cujo gráfico é uma curva única. Isto significa que o termo descontinuidade de Euler é atribuído à descontinuidade na forma analítica de representar uma relação.

A suposição de que uma função fosse “bem-comportada” remonta a problemas de continuidade e diferenciabilidade (BARON, 1985, v. 4, p. 36). Segundo interpretação de Grattan-Guinness (1970, p. 6-8), na analogia entre o pensamento de Euler e a atualidade, o termo “função contínua” de Euler é sinônimo do atual “função diferenciável”. Quanto às funções arbitrárias, que são descontínuas no sentido atual em um número infinito de pontos em um intervalo finito, não parecem ter sido seriamente consideradas na época de Euler (HAWKINS, 1970, p. 4).

Como afirma Bochner, a propriedade essencial de uma função matemática abstrata é a continuidade, assim, “[...] as concepções de função e de continuidade evoluíram simultaneamente.”[72] (BOCHNER, 1974, p. 845).

IV.2 CONTRIBUIÇÃO DE BERNHARD BOLZANO

Bernhard Bolzano (1781-1848) era um padre tcheco cujas opiniões teológicas desagradavam sua igreja e tinha inclinação à Lógica e à Matemática (em especial, à Análise), sendo considerado o precursor da aritmetização da Análise (EVES, 1995, p. 529-530).

Segundo Dahan-Dalmedico e Peiffer (1986, p. 202), Bolzano foi o primeiro a apresentar uma concepção clara das noções básicas do Cálculo Infinitesimal, tais como: continuidade, derivada e ligação entre continuidade e derivabilidade; no entanto, seu trabalho matemático foi desconsiderado por seus contemporâneos por aproximadamente meio século, até porque não era considerado um matemático, mas, um filósofo.

Dentre outros feitos, Bolzano quis dar uma prova rigorosa do teorema fundamental da álgebra, pois não achava correto usar de intuição geométrica para determinar essas raízes, mas considerava o teorema do valor médio essencial e, por isso, quis apresentar uma prova rigorosa de tal teorema sem usar infinitesimais ou intuição geométrica. Então, em 1817, publicou uma obra intitulada *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* (Prova puramente analítica do teorema que entre dois valores que produzem resultados opostos [em signo] existe, pelo menos, uma raiz real da equação).

Na realidade, ele provou o seguinte teorema mais geral:

[72] [...] the conceptions of function and of continuity have evolved simultaneously.

> Se duas funções de x, fx e ϕx são contínuas ou para todos os valores de x ou somente para aqueles que estão entre α e β e se $f\alpha < \phi\alpha$ e $f\beta > \phi\beta$, então, sempre existe um certo valor x, entre α e β para o qual $fx = \phi x$ [73] (BOLZANO,1980, p. 177).

Para dar este teorema, teve de definir o tipo de função a que se aplica o teorema do valor médio e, então, na mesma obra, apresenta a seguinte definição de função contínua:

> [...] a expressão que uma função fx varia de acordo com a lei de continuidade para todos os valores de x, significa que: se x é um tal valor, a diferença $f(x+\omega) - f(x)$ pode ser feita menor que qualquer quantidade definida, desde que ω possa ser tomado tão pequeno quanto se queira.[74] (Ibid., p. 162).

Bolzano (Ibid., p. 180) provou que os polinômios são contínuos neste sentido; ou seja, uma coisa que Euler tomava como definição, transforma-se em um teorema. No mesmo artigo, Bolzano provou o teorema sobre o supremo e usava este fato para uma prova rigorosa do teorema do valor médio.

[73] If two functions of x, fx and ϕx, vary according to the law of continuity either for all values x or only for those which lie between α and β, and if $f\alpha < \phi\alpha$ and $f\beta > \phi\beta$, then there is always a certain value of x between α and β for which $fx = \phi x$.

[74] [...] the expression that a function fx varies according to the law of continuity for all values of x inside means just that: if x is some such value, the difference $f(x+\omega) - f(x)$ can be made smaller than any given quantity provided ω can be taken as small as we please.

IV.3 CONTRIBUIÇÃO DE AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY

Na busca do rigor da Análise, destaca-se Augustin-Louis Cauchy (1798-1857), o mais importante analista da primeira metade do século XIX. Nascido em Paris, formou-se em engenharia civil na École des Ponts e Chaussées. Influenciado por Lagrange e Laplace, abandonou a engenharia para se dedicar aos estudos científicos, tornando-se professor da École Polytechnique, de Paris. Sua extensa produção científica versa sobre os mais diversos ramos da Matemática.

Na Matemática avançada, desenvolveu trabalhos em convergência e divergência de séries infinitas, teoria das funções reais e complexas, equações diferenciais, determinantes, probabilidade e física-matemática. Responsável pela fundamentação do Cálculo, foi um dos primeiros a dar um tratamento rigoroso de limites, funções contínuas, derivadas, integrais e séries infinitas. Neste subcapítulo, vamos destacar dois fatos particularmente importantes das obras de Cauchy: em primeiro lugar, a nova idéia de função contínua e, em segundo, a definição de integração independente da diferenciação.

Desde os séculos XVII e XVIII, a Álgebra e a Análise Algébrica caracterizam os ramos mais importantes da Matemática. Como o pensamento matemático, inclusive, a álgebra das séries infinitas depende da Análise, a melhor língua para analisar um problema é a Álgebra. Este é o motivo que levou a Álgebra a ser considerada uma língua universal, com a qual se desfruta todo o pensamento matemático. Assim, a Matemática passou a significar traduzir em termos algébricos. Mas, no século XIX, Cauchy mostrava preferência por Matemática pura, em forma elegante e dava muita atenção às provas rigorosas. Na introdução do Cours d'*Analyse de L'École Royale Polytechnique*, Cauchy retrata o novo espírito da Matemática do século XIX, ao escrever:

> Quanto aos métodos, eu procurei lhes dar todo o rigor que se exige na geometria, de maneira a jamais recorrer a argumentos deduzidos da generalidade da álgebra. Argumentos desta espécie, apesar de muito comumente admitidos, sobretudo na passagem das séries convergentes às séries divergentes, e das quantidades reais às expressões imaginárias podem ser considerados, me parece, somente, como induções apropriadas para fazer pressentir algumas vezes a verdade, mas que se harmonizam pouco com a exatidão tão ostentada das ciências matemáticas.[75] (CAUCHY, 1821, p. ij-iij).

Isso demonstra o desejo de Cauchy, de voltar ao rigor que se exige na Geometria, tal como foi apresentado por Euclicles (séc IV a.C.). Ao se referir ao século XVIII, que foi dominado pela Álgebra, indica que os problemas que o motivaram a voltar para o rigor geométrico, foram: os problemas do Cálculo, ou seja, os problemas da convergência e dos limites e dos números imaginários. Na época, havia equações algébricas que não eram entendidas por possuírem raízes apenas imaginárias.

Por fim, Cauchy demonstra sua concepção de que o raciocínio algébrico serve apenas para gerar hipóteses e idéias, mas não para fornecer provas rigorosas, pois considera que estas devem ser baseadas no pensamento aritmético. Como escreveu Lebesgue (1926, p. 55), comumente se diz que Descartes reduziu a Geometria à Álgebra, mas Cauchy completou a obra de Descartes ao reduzir toda a Geometria à Aritmética, pois reduziu por meio de função numérica toda a Geometria à Geometria da reta.

Na época em que foi professor da École Polytechnique, Cauchy escreveu três importantes livros: *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (Curso de análise da École Polytechnique) (1821), *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (Resumo das lições sobre o cálculo infinitesimal) (1823) e *Leçons sur le calcul différentiel* (Lições sobre o cálculo diferencial) (1829). "Nessas obras, ele deu ao Cálculo elementar o caráter que tem hoje. Rejeitando o procedimento de Lagrange, através do teorema de Taylor, tornou fundamental o conceito de limite

[75] Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner tout la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, sur-tout dans le passage des séries convergents aux séries divergents, et des quantités réelles aux expressions imaginaire, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des science mathématiques.

de d'Alembert, mas deu-lhe um caráter aritmético mais preciso." (BOYER, 1996, p.355).

O conceito de limite foi essencial para dois aspectos básicos da nova Análise e do Cálculo, que são de nosso interesse neste trabalho. Primeiro, foi necessário para uma definição coerente de continuidade de uma função. Segundo, permitiu uma introdução da noção de integral independente do Cálculo Diferencial.

O fio condutor dessa transformação foi o problema de descrever uma noção mais geral de função matemática e, nesse contexto, Cauchy apresenta a seguinte definição para o termo "função":

> Quando quantidades variáveis estão de tal modo ligadas entre si que, o valor de uma delas sendo dado, pode-se obter os valores de todas as outras, concebe-se normalmente estas diversas quantidades expressas por meio de uma dentre elas, que recebe, então, o nome de *variável independente*; e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são as que se chama de funções desta variável.[76] (CAUCHY, 1821, p. 31).

Quanto ao termo "limite", Cauchy define-o da seguinte forma:

> Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma mesma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de modo a finalmente diferir deste de tão pouco quanto se queira, este último é chamado o *limite* de todos os outros.[77] (Ibid., p. 19).

Quanto ao termo quantidade infinitamente pequena, define-o assim: "[...] uma quantidade variável torna-se *infinitamente pequena*, quando seu valor numérico decresce indefinidamente de maneira a convergir para o limite zero."[78] (Ibid., p. 37).

[76] Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable indépendant*; et les autres quantités, exprimées au moyen de la variable indépendante, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de cette variable.

[77] Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres.

[78] [...] une quantité variable devient *infiniment petite*, lorsque sa valeur numérique décroit indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro.

Estando de posse do conceito de limite e infinitésimos e considerando α uma quantidade infinitamente pequena, ou seja, $\lim_{i \to 0} \alpha = 0$, Cauchy pôde apresentar uma definição para função contínua. Embora a continuidade seja uma propriedade da função em um ponto, Cauchy definiu-a sobre um intervalo, como segue:

> Entre os objetos que se relacionam à consideração dos infinitamente pequenos, deve-se colocar as noções relativas à continuidade ou à descontinuidade das funções. Examinamos de inicio sob esse ponto de vista as funções de uma única variável.
>
> Seja $f(x)$ uma função da variável x, e suponhamos que, para cada valor de x intermediário entre dois limites dados, esta função admita constantemente um valor único e finito. Se, partindo de um valor x compreendido entre estes limites, atribui-se à variável x um acréscimo infinitamente pequeno α, a função ela própria receberá por acréscimo a diferença
>
> $$f(x+\alpha) - f(x),$$
>
> que dependerá, ao mesmo tempo, da nova variável α e do valor de x. Isto posto, a função $f(x)$ será, entre os dois limites atribuídos à variável x, função *contínua* desta variável, se, para cada valor de x intermediário entre esses limites, o valor numérico da diferença
>
> $$f(x+\alpha) - f(x)$$
>
> decresce indefinidamente com aquele de α. Em outros termos, *a função $f(x)$ permanecerá contínua em relação a x entre os limites dados, se entre estes limites, um acréscimo infinitamente pequeno da variável produzir sempre um acréscimo infinitamente pequeno da própria função.*
>
> Diz-se ainda que a função $f(x)$ é, na vizinhança de um valor particular atribuído à variável x, função contínua dessa variável, todas as vezes que ela é contínua entre dois limites de x, mesmo muito próximos, que contém o valor do qual se trata.[79] (CAUCHY, 1821, p. 43).

[79] Parmi les objets qui se rettachent à la considération des infiniment petits, on doit placer les notions relatives à la continuité ou à la discontinuité des fonctions. Examinons d'abord sous ce point de vue les fonctions d'une seule variable.

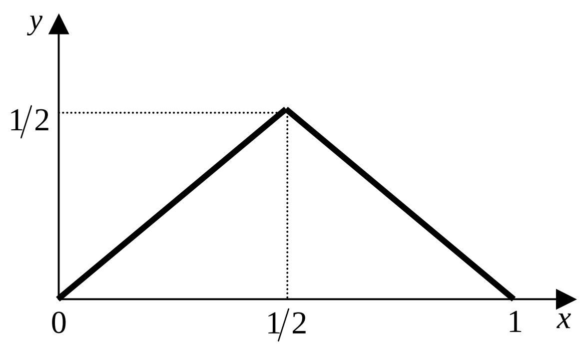
Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence $f(x+\alpha) - f(x)$, qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence $f(x+\alpha) - f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, *la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.*

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois que'elle est continue entre deux limites de x, même très-rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

Cauchy mostra ter sido bem consciente de que a definição de continuidade apresentada por Euler foi totalmente incoerente, pois como escreveu em seu artigo *Mémoire sur les fonctions continues* (Memória sobre as funções contínuas): "[...] uma simples mudança de notação será suficiente freqüentemente para transformar uma função contínua em função descontínua e reciprocamente."[80] (CAUCHY, 1844, p.116).

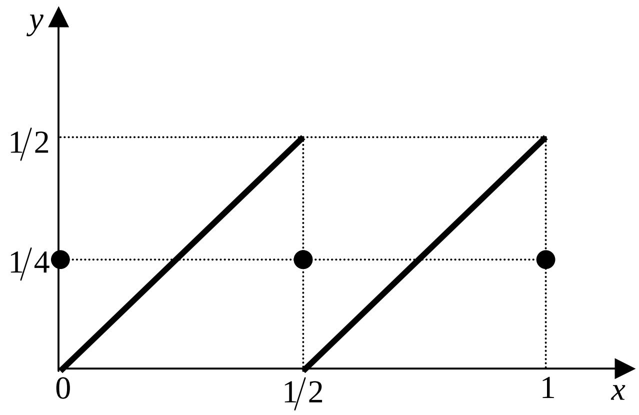
Bruno Belhoste, nascido em 1952, escreveu uma biografia de Cauchy que tem por título *Cauchy: um mathématicien légitimiste au XIX^e siècle* (Cauchy: um matemático legitimista do século XIX), publicada em 1985. Nesta obra, Belhoste apresenta a diferença entre as idéias de continuidade de Euler e de Cauchy, por meio dos seguintes exemplos:

Continuidade de um função, segundo Euler e segundo Cauchy.



A função f definida em $[0, 1]$ por $f(x) = x$ para $0 \leq x < \frac{1}{2}$ e $f(x) = 1 - x$ para $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ é descontínua no sentido de Euler, porque ela é definida por várias expressões analíticas diferentes sobre $[0, 1]$, mas ela é contínua no sentido de Cauchy.

[80] [...] un simple changement de notation suffira souvent pour transformer une fonction continue en fonction discontinue, et réciproquement.



A função g, definida em $[0, 1]$ por $g(x) = \frac{1}{4} - \sum_{1}^{\infty} \frac{sin\, 4\pi\, p(x)}{p}$, é contínua no sentido de Euler, porque ela é definida por uma única expressão analítica em $[0, 1]$, mas ela é descontínua no sentido de Cauchy nos pontos 0, $1/2$ e 1. Na verdade, a definição de Euler não é pertinente: f pode, pois, ser definida em $[0, 1]$ por uma única expressão analítica:

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{0}^{\infty} \frac{\cos(2(2p+1)\pi x)}{(2p+1)^2}$$

enquanto g pode também ser definida por várias expressões analíticas mais simples em $[0, 1]$:

$g(x) = x$ para $0 < x < \frac{1}{2}$, $g(x) = x - \frac{1}{2}$ para $\frac{1}{2} < x < 1$ e $g(0) = g(\frac{1}{2}) = g(1) = (\frac{1}{4})$. (BELHOSTE, 1985, p. 106).

Como observa Youschkevitch (1981, p. 62), a definição de continuidade de uma função, apresentada por Cauchy que difere essencialmente da continuidade global no sentido de Euler, representa um avanço em direção à atual definição de continuidade local.

Como explica Otte (2003b, p. 42), fica claro que uma função matemática tem de ser entendida como uma classe de equivalências de representações concretas dela e não podem ser identificadas com uma dessas representações. E o axioma da extensionalidade fornece a relação de equivalência. A característica de ser contínua só pode ser atribuída a uma classe e não a uma representação de uma função. “Uma função no sentido de Cauchy e Dirichlet pode assim ser entendida como uma classe de expressões analíticas ou fórmulas equivalentes, na qual a relação de equivalência é baseada no axioma da extensionalidade." (OTTE, 2003, p. 42).

Numa analogia, podemos exemplificar, dizendo que: da mesma forma que não se define uma fração por uma de suas representações, também, não se define uma função por uma de suas representações analíticas.

Desta maneira, é possível, desde Cauchy, identificar funções por certas propriedades das mesmas e raciocinar sobre estas funções sem a necessidade de representá-las explicitamente. Por exemplo, em vez de dar uma função linear diretamente pela fórmula $f(x) = ax$, Cauchy (1821, p. 103-104) prova que uma função contínua para a qual vale a propriedade $f(x+y) = f(x) + f(y)$, pode ser representada por $f(x) = ax$.

Em 1923, é publicada uma outra obra de Cauchy intitulada *Résumé des Leçons données a l'École Royale Polytechnique, sur le Calcul Infinitésimal* (Resumo das lições dadas na Escola Real Politécnica sobre o Cálculo Infinitesimal). Nesta obra, o principal objetivo do autor é conciliar o rigor, que ele prega no *Cours d'analyse* de 1821 com a simplicidade resultante da consideração direta das quantidades infinitamente pequenas (CAUCHY, 1823, p. 10). Dividida em quarenta lições, as vinte primeiras referem-se ao Cálculo Diferencial e as vinte últimas, ao Cálculo Integral.

Na vigésima primeira lição, Cauchy trata das integrais definidas. Ao contrário de definir a integração, como operação inversa da diferenciação, que era a idéia comumente usada no século XVIII, Cauchy abordou-a diretamente, usando a idéia de soma, como segue:

> Supomos que a função $y = f(x)$ sendo contínua em relação à variável x entre dois limites finitos $x = x_0$ e $x = X$, designa-se por x_1, x_2, ..., x_{n-1} novos valores de x interpolados entre esses limites e que vão sempre crescendo ou decrescendo do primeiro limite até o segundo. Poderemos nos servir desses valores para dividir a diferença $X - x_0$ em elementos
>
> $$x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ x_3 - x_1,\ ...,\ X - x_{n-1} \qquad (1)$$

que serão todos de mesmo sinal. Isto posto, concebemos que se multiplique cada elemento pelo valor de $f(x)$ correspondente à *origem* desse mesmo elemento, ou seja, multiplicamos o elemento $x_1 - x_0$ por $f(x_0)$, o elemento $x_2 - x_1$ por $f(x_1)$,..., e, finalmente, o elemento $X - x_{n-1}$ por $f(x_{n-1})$; e seja

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + ... + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \qquad (2)$$

a soma dos produtos assim obtidos. A quantidade S dependerá evidentemente: 1º do número n de elementos nos quais se dividirá a diferença $X - x_0$; 2º dos próprios valores desses elementos e, portanto, do modo da divisão adotado. Contudo, é importante observar que, se os valores numéricos dos elementos tornam-se muito pequenos e o número n muito grande, o modo de divisão terá sobre o valor de S apenas uma influência insensível. É, efetivamente, isso que podemos demonstrar como segue:

Se admitíssemos todos o elementos da diferença $X - x_0$ reduzidos a um único, que seria essa própria diferença, teríamos simplesmente

$$S = (\mathrm{X} - x_0) f(x_0).$$

Quando, ao contrário, consideramos as expressões (1) como elementos da diferença $\mathrm{X} - x_0$, o valor de S, determinado nesses casos pela equação (2), é igual à soma dos elementos multiplicada por uma média entre os coeficientes

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2),..., f(x_{n-1}).$$

[...]. Aliás, estes coeficientes sendo valores particulares da expressão

$$f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

que correspondem aos valores de θ compreendidos entre zero e a unidade, provaremos, por raciocínios semelhantes aos que usamos na sétima Lição, que a média da qual se trata é um outro valor da mesma expressão, correspondente a um valor de θ compreendido entre os mesmos limites. Poderemos, portanto, substituir a equação (2) pela seguinte

$$S = (X - x_0)\ f[x_0 + \theta(X - x_0)] \qquad (4)$$

na qual θ será um número inferior à unidade.

[...] Portanto, quando os elementos da diferença $\mathrm{X} - x_0$ tornam-se infinitamente pequenos, o modo da divisão não terá mais que uma influência insensível sobre o valor de S; e se se diminuir indefinidamente os valores numéricos desses elementos, aumentando seu número, o valor de S terminará sendo sensivelmente constante ou, em outros termos, ele alcançará um certo limite que dependerá unicamente da forma da função $f(x)$ e dos valores extremos x_0 e X atribuídos à

> variável x. Este limite é o que chamamos uma *integral definida*.[75] (CAUCHY, 1823, p. 122-125).

Ao definir a integração independente da diferenciação, o Teorema Fundamental do Cálculo que relaciona as duas operações como inversas, deixou de ser um corolário da definição de integração e precisou ser provado. Cauchy provou-o na 26ª lição do *Résumé des Leçons données ...* Para apresentar essa prova, Cauchy usou o teorema do valor médio para integrais, ou seja,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = (X - x_0)\ f\left[x_0 + \theta(X - x_0)\right] \qquad \text{(i)}$$

---

[75] Supposons que, la fonction $y = f(x)$ étant continue par rapport à variable x entre deux limites finies $x = x_0,\ x = X$, on désigne par $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ de nouvelles valeurs de x interposées entre ces limites, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. On pourra se servir de ces valeurs pour diviser la différence $X - x_0$ en éléments

$$x_1 - x_0\,,\ x_2 - x_1\,,\ x_3 - x_1\,,\ ...,\ X - x_{n-1} \qquad (1)$$

qui seront tous de même signe. Cela posé, concevons que l'on multiplie chaque élément par la valeur de $f(x)$ correspondant à l'*origine* de ce même élément, savoir l'élément $x_1 - x_0$ por $f(x_0)$, o elemento $x_2 - x_1$ por $f(x_1), ...,$ e, finalmente, o elemento $X - x_{n-1}$ por $f(x_{n-1})$; e seja

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + ... + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}) \qquad (2)$$

la somme des produits ainsi obtenus. La quantité S dépendra évidemment: 1º du nombre *n* des éléments dans lesquels on aura divisé la différence $X - x_0$; 2º des valeurs mêmes de ces éléments et, par conséquent, du mode de division adopté. Or il import de remarquer que, si les valeurs numériques des éléments deviennent très petites et le nombre n très considérable, le mode de division n'aura plus sur la valeur de S qu'une influence insensible. C'est, effectivement, ce que l'on peut démontrer comme il suit.
Si l'on supposait tous les éléments de la différence $X - x_0$ réduits à un seul qui serait cette différence elle-même, on aurait simplement

$$S = (X - x_0) f(x_0) \qquad (3)$$

Lorsque, au contraire, on prend les expressions (1) pour éléments de la différence $X - x_0$, la valeur de S, déterminée dans ce cas par l'équation (2), est égale à la somme des éléments multipliée par une moyenne entre les coefficients $f(x_0), f(x_1), f(x_2), ..., f(x_{n-1})$. [...] D'ailleurs, ces coefficients étant des valeurs particulières de l'expression $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$ qui correspondent à des valeurs de θ comprises entre zéro et l'unité, on prouvera, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage dans la septième Leçon, que la moyenne dont il s'agit est une autre valeur de la même expression, correspondante à une valeur de θ comprise entre les mèmes limites. On pourra donc à l'équation (2) substituer la suivante

$$S = (X - x_0)\, f[x_0 + \theta(X - x_0)] \qquad (4)$$

dans laquelle θ sera un nombre inférieur à l'unité.
[...]. Donc, lorsque les éléments de la différence $X - x_0$ deviennent intiniment petits, le mode de division n'a plus sur la valeur de S qu'une influence insensible; et, si l'on fait décroître indéfinitement les valeurs numériques de ces éléments, en augmentant leur nombre, la valeur de S finira par ètre sensiblement constante ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite que dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x)$ et des valeurs extrêmes x_0 e X attribuées à la variable x. Cette limite est ce qu'on appelle une *intégrale définie*.

em que $0 \le \theta \le 1$; e o teorema da aditividade que garante que:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{X} f(x)dx \tag{ii}$$

sendo ξ um valor interpolado entre x_0 e X (CAUCHY, 1823, p. 134-137).

O Teorema Fundamental do Cálculo afirma que: Se f é uma função contínua em $[x_0,\ X]$, se $x \in [x_o, X]$ e se $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$, então $F'(x) = f(x)$.

Para provar o teorema, Cauchy inicia afirmando que:

> Se, na integral definida $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, variamos um dos dois limites, por exemplo a quantidade X, a própria integral variará com esta quantidade; e, se substituímos o limite X, que se tornou variável, por x, obteremos como resultado uma nova função de x, que será o que chamamos uma integral tomada a partie da *origem* $x = x_0$. Seja:
>
> $$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx \tag{1}$$
>
> esta nova função.[76] (Ibid., p. 151).

Em seguida, da fórmula (i) obtém

$$F(x) = (x - x_0) f[x_0 + \theta(x - x_0)] \text{ e } F(x_0) = 0, \tag{2}$$

sendo θ um número entre 0 e 1.

E, da fórmula (ii) obtém

$$\int_{x_o}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_o}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx = \alpha f(x + \theta\alpha) \text{ ou} \tag{3}$$
$$F(x+\alpha) - F(x) = \alpha f(x + \theta\alpha)$$

---

[76] Si, dans l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, on fait varier l'une des deux limites, par exemple la quantité X, l'intégrale variera elle-même avec cette quantité; et, si l'on remplace la limite X devenue variable par x, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction de x, qui sera ce qu'on appelle une intégrale prise à partir de l'origine $x = x_0$. Soit (1) $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ cette fonction nouvelle.

E, então, conclui que:

> Segue das equações (2) e (3) que, se a função $f(x)$ é finita e contínua na vizinhança de um valor particular atribuído à variável x, a nova função $F(x)$ será não somente finita, mas ainda contínua na vizinhança desse valor, uma vez que um acréscimo infinitamente pequeno em x corresponderá um acréscimo infinitamente pequeno em $F(x)$. Portanto, se a função $f(x)$ permanece finita e contínua, desde $x = x_0$ até $x = X$, será da mesma maneira para a função $F(x)$. Além disso, se dividimos ambos os membros da fórmula (3) por α, passando aos limites, concluiremos que
>
> $$F'(x) = f(x). \tag{4}$$
>
> Portanto, a integral (1), considerada como função de x, tem por derivada a função $f(x)$ contida sob o sinal $\int$ dessa integral.[77] (CAUCHY, 1823, p. 151-152).

Como afirma Katz (1998, p. 719), essa versão do Teorema Fundamental do Cálculo pode ser considerada a primeira a satisfazer os padrões modernos de rigor, pois foi a primeira em que F foi claramente definida por meio de uma prova da existência da integral definida. Apesar de Cauchy ter considerado como uma das hipóteses originais, para a existência da integral definida de f, o fato de f precisar ser contínua no intervalo de integração, ele também percebeu que sua definição poderia ser aplicada nos casos em que f tivesse um número finito de descontinuidade no intervalo dado, bastando subdividir o intervalo de integração em subintervalos pelos pontos de descontinuidade e, então, definir a integral como sendo o limite de uma soma.

[77] Il suit des équations (2) et (3) que, si la fonction $f(x)$ est finie et continue dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, la nouvelle fonction $F(x)$ sera non seulement finie, mais encore continue dans le voisinage de cette valeur, puisqu'à un accroissement infiniment petit de x correspondra un accroissement infiniment petit de $F(x)$. Donc, si la fonction $f(x)$ reste finie et continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, il en sera de même de la fonction $F(x)$. Ajoutons que, si l'on divise par α les deux membres de la formule (3), on en conclura, en passant aux limites, (4) $F'(x) = f(x)$. Donc l'intégrale (1), considérée comme fonction de x, a pour dérivée la fonction $f(x)$ renfermée sous le signe $\int$ dans cette intégrale.

IV.4 CONTRIBUIÇÃO DE BERNHARD RIEMANN

Bernhard Riemann (1826-1866) foi quem mais profundamente influenciou os matemáticos do século XX. Nascido na aldeia de Hanover, na Alemanha, estudou nas Universidades de Berlim e Göttingen. De início, seu objetivo era estudar Teologia e tornar-se um pastor luterano, assim como seu pai, mas acabou trocando a Teologia pela Matemática. embora não tenha feito muitas publicações, o pouco que publicou foi o suficiente para alterar o curso da Matemática na Análise, Geometria e Teoria dos Números (BOYER, 1974, p. 406).

Segundo Boyer (1996, p. 383), Riemann como estudante, passou vários semestres em Berlim onde obteve de Jacobi e Dirichlet seu preparo matemático. Segundo Hawkins (1970, p. 16), foi esse contato com Dirichlet que o levou a se interessar por problemas relacionados ao estudo da teoria das séries trigonométricas. Em 1851, obteve o grau de doutor na Universidade de Göttingen, com a tese intitulada *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* (Princípios fundamentais para uma teoria geral das funções de uma grandeza variável complexa).

Como o próprio título da tese sugere, a intenção de Riemann foi desenvolver uma teoria das funções complexas que ainda não existia. Inicia o primeiro capítulo – onde define função de uma grandeza variável complexa – resumindo, em termos gerais, as definições comumente aceitas na época referentes às funções reais, com as seguintes palavras:

> Se designamos por z uma grandeza variável que pode assumir sucessivamente todos os valores reais possíveis, então, quando a cada um desses valores corresponde um valor único da grandeza indeterminada w, diz-se que w é uma função de z, e, enquanto z cobre de uma maneira contínua todos os valores compreendidos entre dois valores fixos, quando w varia igualmente de uma maneira contínua, diz-se que esta função w é continua nesse intervalo.
>
> Essa definição não estipula nenhuma lei entre os valores isolados da função, é evidente, porque quando foi organizada essa função para um intervalo determinado, o modo de seu prolongamento fora desse intervalo resta totalmente arbitrário.

> A maneira como a grandeza *w* depende de *z* pode ser dada por uma lei matemática, de modo que, pelas operações de cálculo, pode-se, para cada valor *z*, determinar o valor correspondente de *w*. A possibilidade de serem determinadas para todos os valores de *z*, compreendidos num intervalo dado, pela mesma lei de dependência, era antigamente atribuída somente às funções de uma certa classe (*funções contínuas* na terminologia de Euler); mas as pesquisas modernas têm mostrado que existem as expressões analíticas para as quais toda função contínua pode ser representada num intervalo dado. É, portanto, indiferente definir a dependência da grandeza w da grandeza *z* como dada arbitrariamente ou como repousando sobre operações de cálculo determinadas. As duas definições são equivalentes para a seqüência de teoremas a que nos referimos.[84] (RIEMANN, 1953, p. 3-4).

Isso mostra que a visão que se tinha de função contínua, na época de Riemann, era idêntica à formulada por Cauchy cerca de 30 anos antes, caracterizando a continuidade global e não pontual, como o fez Bolzano.

Para obter a habilitação para lecionar na Alemanha, em 1854, Riemann submeteu à Universidade de Göttingen sua tese *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (Sobre a possibilidade de representar uma função por uma série trigonométrica), que foi publicada no volume 13 dos Anais da Sociedade Real das Ciências. Com trinta e quatro páginas, a referida tese foi dividida em nove capítulos.

No primeiro capítulo, ele conta a história do problema que iniciou, em 1747, com d'Alembert e, no ano seguinte, com Euler de tentar representar o movimento da corda vibrante de um instrumento musical em temos de funções matemáticas (Ibid., p. 227-232).

---

[84] Denkt man sich unter z eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle möglichen reellen Werthe annehmen kann, so wird, wenn jedem ihrer Werthe ein einziger Werth der unbestimmten Grösse w entspricht, w eine Function von z genannt, und wenn, während z alle zwischen zwei festen Werthen gelegenen Werthe stetig durchläuft, w ebenfalls stetig sich ändert, so heisst diese Function innerhalb dieses Intervalls stetig oder continuirlich.

Diese Definition setzt offenbar zwischen den einzelnen Werthen der Function durchaus kein Gesetz fest, indem, wenn über diese Function für ein bestimmtes Intervall verfügt ist, die Art ihrer Fortsetzung ausserhalb desselben ganz der Willkür überlassen bleibt.

Die Abhängigkeit der Grösse w von z kann durch ein mathematisches Gesetz gegeben sein, so dass durch bestimmte Grössen-operationen zu jedem Werthe von z das ihm entsprechende w gefunden wird. Die Fähigkeit, für alle innerhalb eines gegebenen Intervalls liegenden Werthe von z durch dasselbe Abhängigkeitsgesetz bestimmt zu werden, schrieb man früher nur einer gewissen Gattung von Functionen zu (functiones continuae nach Euler's Sprachgebrauch); neuere Untersuchungen haben indess gezeigt, dass es analytische Ausdrücke giebt, durch welche eine jede stetige Function für ein gegebenes Intervall dargestellt werden kann. Es ist daher einerlei, ob man die Abhängigkeit der Grösse w von der Grösse z als eine willkürlich gegebene oder als eine durch bestimmte Grössenoperationen bedingte definirt. Beide Begriffe sind in Folge der erwähnten Theoreme congruent.

O segundo capítulo, Riemann (1953, p. 232) inicia comentando que, quase 50 anos se passaram, sem que o assunto sobre as representações analíticas das funções tivesse algum progresso e, de repente, uma observação de Fourier, em 1807, lança uma nova luz sobre o assunto. Fourier observa que, na série trigonométrica

$$f(x) = a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + ... + \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + ...,$$

os coeficientes são determinados pelas fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx , \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx .$$

Pelo fato desses coeficientes serem representados por integrais, o problema da integração acabou entrando na teoria das funções. Ou seja, a antiga questão de saber se uma função poderia ser representada analiticamente, transformava-se na questão de saber se uma função é integrável.

No terceiro capítulo, tece comentários sobre a discussão entre Bessel, Dirichlet e Cauchy que tentaram analisar com mais precisão essa observação de Fourier e provar a validade dessas fórmulas, mas não conseguiram com toda generalidade. Analisando essas tentativas, Riemann observa que não eram satisfatórias, pois não se tinha clareza do que era uma integral.

O quarto capítulo nos é, particularmente, importante, pois é nele que Riemann define integral. Para iniciá-lo, Riemann escreve:

> A falta de precisão que existe a respeito de alguns pontos fundamentais da doutrina da integral definida obriga-nos a fazer algumas observações preliminares sobre o conceito da integral definida e sobre sua existência.
>
> Então, primeiramente, o que deveríamos entender por $\int_a^b f(x)dx$?
>
> Para determinar isso, nós pressupomos entre a e b uma série de valores $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ e designamos para ser mais sucinto $x_1 - a$ por δ_1, $x_2 - x_1$, por $\delta_2, ..., b - x_{n-1}$, por δ_n e por ε uma fração positiva. Então, o valor da soma $S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + ... + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$ depende da escolha dos intervalos δ e das quantidades ε [85]. Mas, se ela tem a

[85] Na realidade, em linguagem matemática atual, ε designa um conjunto de frações $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ e δ um conjunto de intervalos $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$.

característica de se aproximar infinitamente a um limite determinado A quando todos os δ são infinitamente pequenos, independentemente de como foram escolhidos os ε e os δ, então, esse valor chama-se $\int_a^b f(x)dx$.

Se ela não tiver essa característica, a expressão $\int_a^b f(x)dx$ não terá sentido.[86] (RIEMANN, 1953, p. 239).

No quinto capítulo, Riemann (Ibid., p. 240-241) apresenta as condições necessárias e suficientes para que uma função seja integrável. Para tanto, considera inicialmente uma função f limitada e uma partição de $[a, b]$. Designa por D_i a maior oscilação da função em $[x_{i-1}, x_i]$, ou seja, a diferença entre o maior e o menor valor da função nesse intervalo. Então, para que $\int_a^b f(x)dx$ exista, a soma $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + ... + \delta_n D_n$ deve se tornar infinitamente pequena com o maior subintervalo δ da partição tendendo a zero, ficando assim estabelecido o primeiro critério de integrabilidade de Riemann.

O segundo critério de integrabilidade de Riemann é recíproco ao primeiro; ou seja, se uma função f é sempre limitada, e se, para todos os valores de δ decrescendo indefinidamente, a grandeza total s, dos intervalos nos quais as oscilações da função são maiores que uma quantidade σ dada, podendo ser reduzida indefinidamente, a soma S convergirá quando todos os δ tenderem a zero.

---

86 Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x)dx$ zu verstehen?

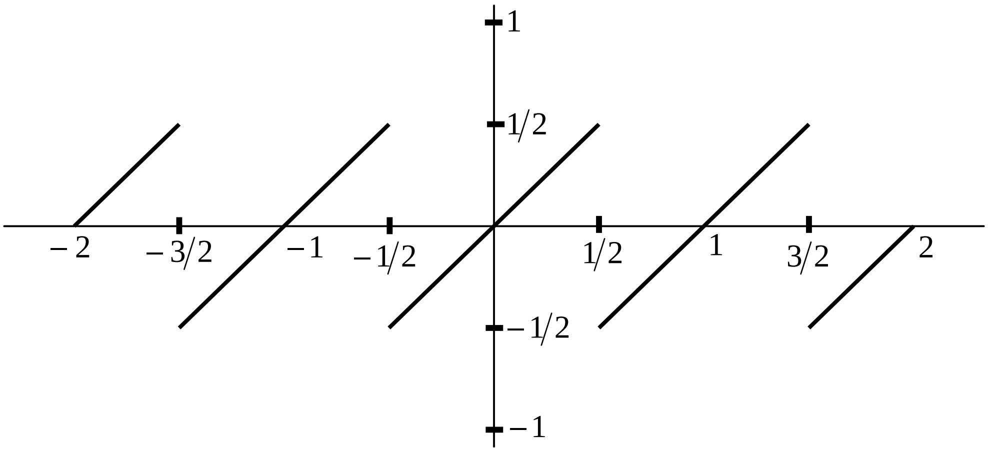
Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen *a* und *b* der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch δ_1, $x_2 - x_1$ durch $\delta_2, ..., b - x_{n-1}$ durch δ_n und durch ε einen positiven ächten Bruch.. Es wird alsdann der Werth der Summe $S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + ... + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$ von der Wahl der Intervalle δ und der Grössen ε abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int_a^b f(x)dx$.

Hat sie diese Eigenschaft nicht, so hat $\int_a^b f(x)dx$ keine Bedeutung.

No sexto capítulo, constrói alguns exemplos de funções integráveis e, dentre eles, apresenta o seguinte exemplo de função integrável, descontínua em um conjunto infinito de pontos:

Se $x = k + \frac{1}{2}$, $k \in N$, colocamos $f(x) = 0$; do contrário, $f(x)$ é a diferença de x com o inteiro mais próximo. A função f é, portanto, descontínua nos pontos $x = \frac{n}{2}$ com n primo. (Veja Figura.IV.1). Assim, Riemann define a função

$$f(x) = (x) + \frac{(2x)}{2^2} + \ldots + \frac{(nx)}{n^2} + \ldots$$



$y = (x)$ para $-2 \le x \le 2$

Fig. .IV.1

Esta função definida por Riemann é descontínua em todos os pontos da forma $x = m/2n$, onde m e $2n$ são primos entre si. Os limites de f à esquerda e à direita nesses pontos x são obtidos pelas seguintes somas:

$$f(x+) = f(x) - \left(\frac{1}{2n^2}\right)\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\right] = f(x) - \left(\frac{\pi^2}{16n^2}\right)$$

e

$$f(x-) = f(x) + \left(\frac{1}{2n^2}\right)\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\right] = f(x) + \left(\frac{\pi^2}{16n^2}\right),$$

que podem ser verificadas em Ávila (1986, p. 51-60). Assim, f é descontínua em um subconjunto denso de números reais; como para qualquer número $\sigma > 0$ existe somente um número finito desses pontos $x = \frac{m}{2n}$ para os quais o salto, $f(x-) - f(x+) = \frac{\pi^2}{8n^2}$, é maior que σ, satisfazendo seu segundo critério de integrabilidade, então, f é integrável, em qualquer intervalo fechado.

Segundo Edwards Jr. (1979, p. 326), a definição de integral de Riemann,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,(x_i - x_{i-1}),$$

com $\bar{x}_i$ sendo um valor qualquer de $(x_i - x_{i-1})$, foi a mais geral possível baseada diretamente no processo usado por Cauchy de aproximar somas associadas às partições do intervalo de integração em subintervalos. Como afirma Hawkins (1970, p. 32), Riemann estendeu a definição de integral dada por Cauchy, reconhecendo a não necessidade da continuidade da função a ser integrada, distinguindo, assim, continuidade de integrabilidade e criando o conceito de função integrável independente de qualquer consideração de continuidade.

Nos demais capítulos de sua tese, Riemann trata da teoria de Fourier para representações de funções arbitrárias.

Como afirma, em 1880, Bois-Reymond (apud HAWKINS, 1970, p. 34), parecia que Riemann tinha estendido o conceito de função integrável aos últimos limites. Contudo, nas três ultimas décadas do século XIX, a definição de integral de Riemann foi reformulada de vários modos, até que no início do século XX sofreu algumas generalizações (EDWARDS JR., 1979, p. 326).

IV.5 CONTRIBUIÇÃO DE HENRI LEBESGUE

IV.5.1 Integral de Lebesgue

No artigo *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, publicado em 1901, Lebesgue faz sua primeira exposição sobre a generalização da integral de Riemann e o inicia com as seguintes palavras:

> No caso das funções contínuas, há identidade entre as noções de integral e de função primitiva. Riemann definiu a integral de algumas funções descontínuas, mas todas as funções derivadas não são integráveis, no sentido de Riemann. O problema da pesquisa das funções primitivas não é, portanto, resolvido por integração e, pode-se desejar uma definição de integral contendo como caso particular aquela definição de Riemann e permitindo resolver o problema das funções primitivas.
>
> Estas duas condições impostas *a priori* à completa generalização da integral são evidentemente compatíveis, porque toda função derivada integrável, no sentido de Riemann, tem por integral uma de suas funções primitivas.[87] (LEBESGUE, 1901, p. 1).

Ao analisar a definição de integral de Riemann, Lebesgue questiona exatamente esse procedimento tradicional usado pelo matemático, no qual os indivisíveis vão sendo somados na ordem em que vão sendo fornecidos pela variação de x.

Em 1926, ao realizar em Copenhague, a conferência *Sur le développement de la notion d'intégrale* (Sobre o desenvolvimento da noção de integral), (anexo 6), Lebesgue faz a seguinte crítica a respeito desse procedimento tradicional:

> Se $\underline{f_i}$ e $\overline{f}_i$ designam os limites inferior e superior de $f(x)$ em (x_i, x_{i+1}), S está compreendida entre
>
> $$\underline{S} = \sum \underline{f_i}\,(x_{i+1} - x_i) \quad \text{e} \quad \overline{S} = \sum \overline{f}_i\,(x_{i+1} - x_i)\,.$$
>
> Riemann demonstrou que é suficiente que

[87] Dans le cas des fonctions continues, il y a identité entre les notions d'intégrale et de fonction primitive. Riemann a défini l'intégrale de certaines fonctions discontinues, mais toutes les fonctions dérivées ne sont pas intégrables, au sens de Riemann. Le problème de la recherche des fonctions primitives n`est donc pas résolu par l'intégration, et l'on peut désirer une définition de l'intégrale comprenant comme cas particulier celle de Riemann et permettant de rèsoudre le problème des fonctions primitives.

Ces deux conditions imposées *a priori* à toute généralisation de l'intégrale sont évidemment compatibles, car toute fonction dérivée intégrable, au sens de Riemann, a pour intégrale une de ses fonctions primitives.

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum \left(\overline{f_i} - \underline{f_i}\right)(x_{i+1} - x_i)$$

> tenda a zero, para uma seqüência particular de divisões de (ab) (domínio da função) em intervalos (x_i, x_{i+1}) cada vez menores para que a definição de Cauchy pudesse ser aplicada. Darboux acrescenta que as passagens ao limite habitual efetuadas sobre $\underline{S}$ e $\overline{S}$, dão sempre dois números determinados $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ e $\overline{\int_a^b} f(x)dx$; em geral, diferentes e iguais somente quando a integral de Cauchy-Riemann existe.
>
> Do ponto de vista lógico, essas definições são muito naturais, não são? Contudo, podemos dizer que elas não têm praticamente servido a nada. Aquela definição de Riemann, em particular, tem o inconveniente de se aplicar apenas raramente e, num certo sentido, por acaso.[88] (LEBESGUE, 1926, p. 56).

Uma das razões mais importantes que justifica o fato da integral de Riemann não ser um instrumento suficientemente poderoso tem a ver com as premissas restritas dessa teoria. Montel (1876-1975) – amigo de Lebesgue desde a École Normale Supérieure onde foi admitido em 1895 (um ano depois de Lebesgue) – deu, com Denjoy e Felix, a seguinte explicação:

> Essa definição de integral, publicada por Riemann, precisada por Darboux, é de um profundo interesse. É uma bela construção lógica. Mas ela oferecia à Análise um instrumento de fraco poder. Os teoremas gerais sobre a integração de séries convergentes eram demonstrados apenas sob condições bastante restritivas, limitando exageradamente seu campo de aplicação. Os problemas fundamentais, [...] cujo progresso estava parado por insuficiência da ferramenta de integração, eram numerosos. Suas soluções eram obtidas apenas nos casos particulares, para as dadas [funções] contínuas ou afetadas de descontinuidades muito simples.[89] (DENJOY; FELIX; MONTEL, 1957, p. 2).

---

[88] Si $\underline{f_i}$ et $\overline{f_i}$ désignent les bornes inférieure et supérieure de $f(x)$ dans (x_i, x_{i+1}), S est comprise entre $\underline{S} = \sum \underline{f_i}(x_{i+1} - x_i)$ et $\overline{S} = \sum \overline{f_i}(x_{i+1} - x_i)$. Riemann montre qu'il suffit que $\overline{S} - \underline{S} = \sum (\overline{f_i} - \underline{f_i})(x_{i+1} - x_i)$ tende vers zéro pour une suite particulière de divisions de (ab) en intervalles (x_i, x_{i+1}) de plus en plus petits pour que la définition de Cauchy puisse être employée. Darboux ajoute que les passages à la limite habituel effectués sur $\underline{S}$ e $\overline{S}$ donnent toujours deux nombres déterminés $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ e $\overline{\int_a^b} f(x)dx$; en général différents, égaux seulement lorsque l'intégrale de Cauchy-Riemann existe.

Du point de vue logique, voici des définitions très naturelles, n'est-ce pas? Pourtant, on peut dire qu'elles n'ont pratiquement servies à rien. Celle de Riemann, en particulier, a l'inconvénient de ne s'appliquer que rarement et, en quelque sorte, par hasard.

[89] Cette définition de l'intégrale, publiée par Riemann, précisée par Darboux, est d'un profond intérêt. C'est une très belle construction logique. Mais elle offrait à l'Analyse un instrument de bien faible puissance. Les théorèmes généraux sur l'intégration des suites convergentes n'étaient démontrés que sous des conditions très restrictives, limitant exagérément leur champ d'application. Les problèmes fondamentaux, [...] dont le progrès était arrêté par l'insuffisance de l'outil d'intégration, étaient nombreux. Leur solution n'était obtenue que dans des cas particuliers, pour des donnés continues ou affectées de discontinuités très simples.

Na realidade, o que é importante nas funções contínuas é o fato de que a variação dos valores funcionais é “controlada” pela variação dos argumentos da função. Esta foi a idéia de função contínua desde Leibniz, que conectava essa idéia à de lei da natureza (veja p. 111).

Como Lebesgue escreve:

> [...] é bem evidente que a partição de (*a*, *b*) em intervalos (x_i, x_{i+1}) cada vez menores faz as diferenças $\overline{f_i} - \underline{f_i}$ cada vez menores se $f(x)$ é contínua e em virtude dessa continuidade é claro que essa partição fará ainda $\overline{S} - \underline{S}$ tender a zero se há apenas alguns pontos de descontinuidade. Não temos nenhuma razão de esperar que o mesmo acontecerá para uma função descontínua em toda parte. Então, é claro, pegar os intervalos (x_i, x_{i+1}) cada vez menores, quer dizer, valores de $f(x)$ relativos a valores de x cada vez mais próximos entre si, não garante que tenhamos valores de $f(x)$ com diferenças cada vez menores.[90] (LEBESGUE, 1926, p. 56).

Lebesgue (1904) chama a atenção para o fato de que nas funções descontínuas a situação é outra, com os valores de $f(x)$ podendo oscilar amplamente, mesmo em subintervalos pequenos do domínio. Como exemplo, citamos a função

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \end{cases}.$$

Examinando o comportamento da mesma, Figura IV.2, observamos que para valores de x próximos de zero, variações pequenas em x, não produzem variações pequenas em $f(x)$.

[90] [...] est bien évident que le morcellement de (a, b) en intervalles (x_i, x_{i+1}) de plus en plus petits rendra les différences $\overline{f_i} - \underline{f_i}$ de plus em plus petites si $f(x)$ est continue, en vertu de cette continuité méme, s’il est clair que ce morcellement fera tendre encore $\underline{S} - \overline{S}$ vers zéro s’il n’y a que quelques points de discontinuité, on n’a aucune raison d’espérer qu’il en sera de même pour une fonction discontinue partout. Alors, en effet, prendre des intervalles (x_i, x_{i+1}) de plus en plus petits, c’est-à-dire des valeurs de $f(x)$ relatives à des valeurs de x de plus en plus voisines, ne garantit nullement que l’on prend des valeurs de $f(x)$ de moins en moins différentes.

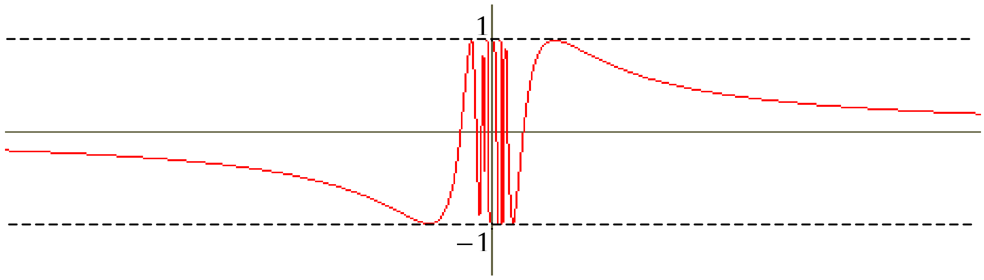


Fig. IV.4 (Fonte: http://www.walterzorn.com/grapher/grapher_e.htm)

Lebesgue, então, pensou a teoria da integração com base na análise da variação da função, que caracteriza seu procedimento.

Faz uma analogia entre o procedimento usado por Riemann e o empregado por um comerciante não sistemático que, para saber quanto de dinheiro tem em caixa, vai somando as moedas e as notas, conforme estas vão chegando à sua mão. Mas adota uma perspectiva diferente, comparando-se a um comerciante metódico que primeiro agrupa as moedas e notas de mesmo valor para então efetuar sua soma, assim, Lebesgue procura agrupar os indivisíveis de grandezas comparáveis. Conforme disse:

> Os geômetras do século XVII consideravam a integral de $f(x)$ [...] como a soma de uma infinidade de indivisíveis, em que cada um era a ordenada, positiva ou negativa, de $f(x)$. Pois bem!! Nós, simplesmente, agrupamos os indivisíveis de grandeza comparável; nós fazemos, como se diz em álgebra, a reunião e a redução dos termos similares. Podemos dizer ainda que, com o procedimento de Riemann, tentava-se somar os indivisíveis, tomando-os na ordem em que eles eram fornecidos pela variação de x, operava-se, portanto, como o faria um comerciante sem método que contaria moedas e notas ao acaso da ordem em que elas lhe chegariam à mão; enquanto que nós operamos como o comerciante metódico que diz:
>
> eu tenho $m(E_i)$ moedas de 1 coroa valendo $1m(E_1)$,
> eu tenho $m(E_2)$ moedas de 2 coroas valendo $2m(E_2)$,
> eu tenho $m(E_3)$ notas de 5 coroas valendo $5m(E_3)$,
>
> etc., tenho, portanto, ao todo:
>
> $$S = 1m(E_1) + 2m(E_2) + 5m(E_3) + ...$$
>
> Os dois procedimentos conduzirão, certamente, o comerciante ao mesmo resultado pois, independente da quantidade de dinheiro que ele tenha, há apenas um número finito de notas para contar; mas para nós que temos de adicionar uma infinidade de

> indivisíveis, a diferença entre os dois métodos é fundamental.[91] (LEBESGUE, 1926, p. 58).

Denjoy, Felix e Montel davam outro exemplo bem prático do raciocínio de Lebesgue.

> [...] calcular a altura média de um rio depois de uma estiagem, sobre o período de um ano (não bissexto), quando a altura cotidiana, medida em centímetros, é observada. Para Riemann, a cada fração do ano constituída por um dia particular, ou seja 1/365, aplicar-se-á um fator, constituindo o peso atribuído a esta fração, e o peso será a altura da água nesse dia. Serão somados os trezentos e sessenta e cinco produtos. Para Lebesgue, serão colecionadas as diversas alturas distintas observadas entre a mais baixa e a mais alta. A cada dessas alturas aplicar-se-á um fator-peso que será a fração do ano (número de dias dividido por 365) onde o nível registrou essa altura. Somam-se os resultados.[92] (DENJOY; FELIX; MONTEL, 1957, p. 2-3).

Ao utilizar essa idéia, para encontrar e agrupar valores funcionais que sejam aproximadamente iguais em uma função f, ao invés de fazer uma partição do intervalo $[a, b]$ que corresponde ao domínio da função, Lebesgue (1926, p. 57-58) propõe que se faça a partição do intervalo $(\underline{f}, \overline{f})$, onde $\underline{f}$ e $\overline{f}$ são os limites inferior e superior de $f(x)$ em $[a, b]$. Para cada um dos intervalos $[y_i, y_{i+1}]$ da partição de $(\underline{f}, \overline{f})$, considera os valores de $f(x)$ definidos por $y_i \leq f(x) \leq y_{i+1}$. Como exemplo, veja Figura IV.3.

[91] Les Géomètres du XVII^{ème} Siècle considéraient l'intégrale de $f(x)$ [...] comme la somme d'une infinité d'indivisibles dont chacun était l'ordennée, positive ou négative, de $f(x)$. Eh bien! nous avons tout simplement groupés les indivisibles de grandeur comparable; nous avons, comme on dit en algèbre, fait la réunion, la réduction des termes semblables. On peut dire encore que, avec le procédé de Riemann, on essayait de sommer les indivisibles en les prenant dans l'ordre où ils étaient fournis par la variation de x, on opérait donc comme le ferait un commerçant sans méthode qui compterait pièces et billets au hasard de l'ordre où ils lui tomberaient sous la main; tandis que nous opérons comme le commerçant méthodique qui dit: j'ai $m(E_1)$ pièces de 1 couronne valant $1 \cdot m(E_1)$, j'ai $m(E_2)$ pièces de 2 couronnes valant $2 \cdot m(E_2)$, j'ai $m(E_3)$ billets de 5 couronnes valant $5 \cdot m(E_3)$, etc., j'ai donc en tout: $S = 1 \cdot m(E_1) + 2 \cdot m(E_2) + 5 \cdot m(E_3) + \ldots$. Les deux procèdés conduiront, certes, le commerçant au même résultat parceque, si riche qu'il soit, il n'a qu'un nombre fini de billets à compter; mais pour nous, qui avons à additionner une finité d'indivisibles, la différence entre les deux façons de faire est capitale.

[92] [...] calculer la hauteur moyenne d'une rivière au-dessus d'un étiage, sur la période d'une année (non bissextile), quand la hauteur quotidienne, mesurée en centimètres, est notée. Avec Riemann, à toute fraction d'année constituée par une journée particulière, soit 1/365, on appliquera un facteur, constituant le poids attribué à cette fraction, et ce poids sera la hauteur des eaux ce jour-là. On ajoutera les trois cent soixante-cinq produits. Avec Lebesgue, on collationnera les diverses hauteurs distinctes observées entre la plus basse et la plus élevée. A chacune de ces hauteurs on appliquera un facteur-poids qui sera la fraction d'année (nombre de jours divisé par 365) où le niveau s'est inserit à cette hauteur. On ajoute les résultats.

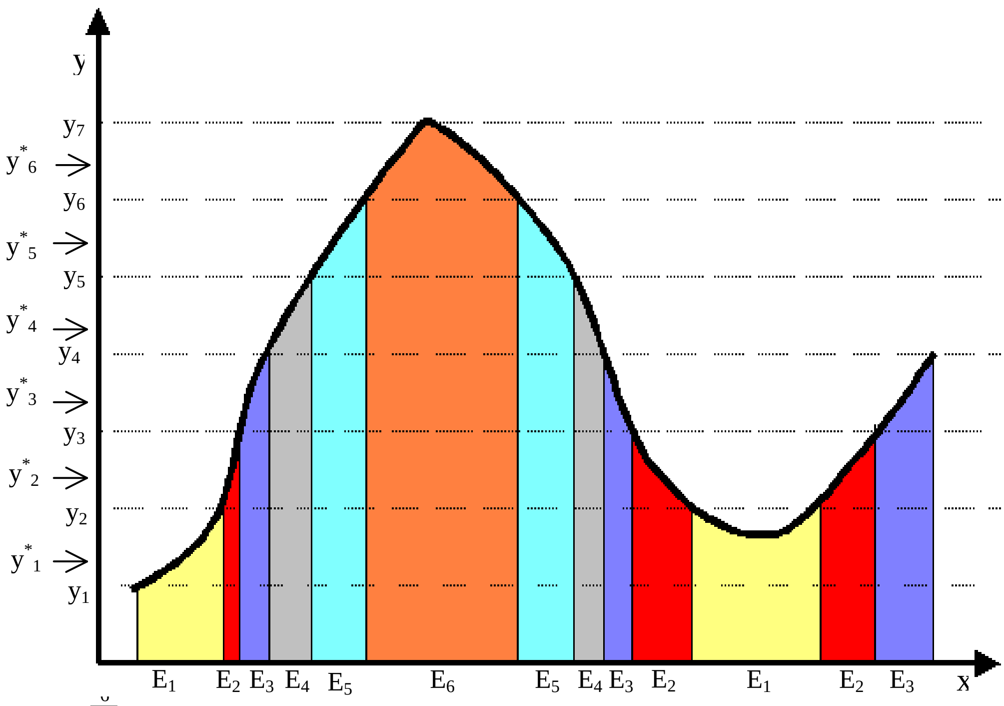
Os valores correspondentes de x formam o conjunto E_i, que desempenha um papel análogo ao do intervalo (x_i, x_{i+1}) na definição de integral de Cauchy-Riemann, pois informa os valores de x que dão para $f(x)$ valores aproximadamente iguais. Considerando y_i^* um número qualquer, tal que

$$y_i \leq y_i^* \leq y_{i+1},$$

Lebesgue chega à soma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} y_i^* m(E_i),$$

com $m(E_i)$ sendo a medida do conjunto dos valores x, tais que $y_i \leq f(x) \leq y_{i+1}$.



$$S_6 = \sum_{i=1} y_i^* m(E_i) = y_1^* m(E_1) + y_2^* m(E_2) + y_3^* m(E_3) + y_4^* m(E_4) + y_5^* m(E_5) + y_6^* m(E_6),$$

sendo: E_1 composto de dois intervalos, E_2 composto de três intervalos, E_3 composto de três intervalos, E_4 composto de dois intervalos, E_5 composto de dois intervalos, e E_6 composto de um intervalo.

Fig. IV.3

No limite, quando *n* tende a infinito, as diferenças $(y_{i+1} - y_i)$ tendem a zero e a soma S_n transforma-se na integral de Lebesgue.

Para definir o número $m(E_i)$ atribuído a E_i, Lebesgue (1926, p. 58) faz uma analogia entre essa medida de comprimento e o número de notas ou moedas do comerciante metódico. Assim, $m(E_i)$ será a soma dos comprimentos dos intervalos que compõem E_i, podendo o número desses intervalos ser finito ou infinito.

Lebesgue explica que, no caso geral, o procedimento é o seguinte:

> [...] encerramos E_i em um número finito ou infinito enumerável de intervalos; sendo $l_1, l_2, ...$ os comprimentos desses intervalos. Desejaríamos evidentemente que tivéssemos:
>
> $$m(E_i) \le l_1 + l_2 + ...$$
>
> Se procurarmos o limite inferior do segundo membro, para todos os sistemas possíveis de intervalos podendo servir para cobrir E_i, este limite será portanto um limite superior de $m(E_i)$. Por esta razão, representamo-lo por $\overline{m(E_i)}$ e temos:
>
> $$m(E_i) \le \overline{m(E_i)} \qquad 3$$
>
> Se C é o conjunto dos pontos de (a,b) não fazendo parte de E_i, temos da mesma maneira:
>
> $$m(C) \le \overline{m(C)}.$$
>
> Mas, desejamos evidentemente ter:
>
> $$m(E_i) + m(C) = m[(a,b)] = b - a;$$
>
> portanto, devemos ter
>
> $$m(E_i) \ge b - a - \overline{m(C)} \qquad 4$$
>
> As desigualdades 3 e 4 dão, portanto, os limites superior e inferior de $m(E_i)$. Vemos facilmente que essas duas desigualdades jamais são contraditórias. Quando os limites inferior e superior de E_i são iguais, $m(E_i)$ está definida e, dizemos, então, que E_i é mensurável.
>
> **Uma função $f(x)$ para a qual os conjuntos E_i são mensuráveis, quaisquer que sejam os y_i, é dita mensurável**. Para uma tal função, a fórmula $S = \sum \eta_i \, m(E_i)$ define uma soma S. Demonstramos facilmente que, quando

> fazemos variar a escolha dos y_i de modo que ε tende para zero, os S tendem a um limite determinado que é, por definição, $\int_a^b f(x)dx$.[93] (LEBESGUE, 1926, p. 59-60, grifo nosso).

Definição esta que se estende às funções de várias variáveis (Ibid., p. 60).

No que se refere à medida usada, o autor faz a seguinte consideração:

> O modo de definição da medida de conjuntos usada aqui é aquela de *C*. Jordan (*Cours d'analyse de I'École Polytechnique, Vol. I*); mas com esta modificação, essencial para nosso propósito, encerramos o conjunto E_i a medir em intervalos cujo número pode ser infinito, enquanto que Jordan empregava sempre somente um número finito de intervalos. O uso da infinidade enumerável, no lugar do número inteiro [de intervalos], é sugerido pelo trabalho de Borel, que, aliás, tinha utilizado ele próprio esta idéia em particular, para uma definição de medida (*Leçons sur la théorie des fonctions*).[94] (Ibid., p. 59-60).

Segundo Denjoy, Felix e Montel, o grande feito de Lebesgue foi a introdução das classes de funções mensuráveis e explica:

---

93 [...] enfermons E_i dans des intervalles, en nombre fini ou en infinité dénombrable; soient $l_1, l_2, ...$ les longueurs de ces intervalles. Nous désirons évidemment que l'on ait: $m(E_i) \leq l_1 + l_2 + ...$.

Si nous cherchons la borne inférieure du second membre pour tous les systèmes possibles d'intervalles pouvant servir à enfermer E_i, cette borne sera donc une limite supérieure de $m(E_i)$. Pour cette raison nous la notons $\overline{m(E_i)}$ et nous avons

$$m(E_i) \leq \overline{m(E_i)} \tag{3}$$

Si C est l'ensemble des points de (a,b) ne faisant pas partie de E_i, on a de même $m(C) \leq \overline{m(C)}$.

Or, on désire évidemment avoir $m(E_i) + m(C) = m[(a,b)] = b - a$; donc on doit avoir

$$m(E_i) \geq b - a - \overline{m(C)} \tag{4}$$

Les inégalités (3) et (4) donnent donc des limites supérieure et inférieure de $m(E_i)$. On voit facilement que ces deux inégalités ne sont jamais contradictoires. Lorsque les limites inférieure et supérieure de E_i sont égales, $m(E_i)$ est définie, nous dirons alors que E_i est mesurable.

Une fonction $f(x)$, pour laquelle les ensembles E_i sont mesurables quels que soient les y_i, est dite mensurable. Pour une telle fonction, la formule $S = \sum \eta_i m(E_i)$ définit une somme S. On démontre facilement que, lorsqu'on fait varier le choix des y_i de façon que ε tende vers zéro, les S tendent vers une limite déterminée qui est, par définition, $\int_a^b f(x)dx$.

94 Le mode de définition de la mesure des ensembles utilisé ici est celui de C. Jordan (*Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique, tome I*); mais avec cette modification, essentielle pour notre but, que nous enfermons l'ensemble E_i à mesurer dans des intervalles dont le nombre peut être infini, alors que C. jordan employait toujours seulement un nombre fini d'intervalles. Cet emploi de l'infinité dénombrable à la place du nombre entier est suggéré par les travaux de M. Borel qui, d'ailleurs, avait utilisé lui-même cette idée en particulier pour une définition de la mesure. (*Leçons sur la théorie des fonctions*).

> Lebesgue introduziu a espécie das funções *mensuráveis*. O progresso foi imenso. [...] Uma série convergente de funções contínuas não é normalmente uma função contínua. [...] Mas o limite de uma série convergente de funções mensuráveis é mensurável. A partir de então, todas as funções encontradas nos problemas de Análise são mensuráveis.[95] (DENJOY; FELIX; MONTEL, 1957, p. 3).

Uma função mensurável f não negativa é chamada integrável no sentido de Lebesgue se essa integral de Lebesgue $\int f d\mu$ é finita. Uma função mensurável arbitrária é integrável se f^+ e f^- são cada uma integrável no sentido de Lebesgue, onde f^+ e f^- denotam as partes positiva e negativa de f, respectivamente.

Em 1904, foi publicada a primeira edição da obra de Lebesgue *Leçons Sur l'Intégration et la Recherche des Fonctions Primitives.* O último capítulo dessa obra é destinado à sua teoria da integração, onde mostra que a integral de uma função limitada sobre $[a, b]$ verifica as seis propriedades seguintes:

1. Quaisquer que sejam *a, b, h*, temos $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx$.
2. Quaisquer que sejam *a, b, c*, temos $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$.
3. $\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx$.
4. Se temos $f \geqq 0$ e $b > a$, temos também $\int_a^b f(x)dx \geqq 0$.
5. Temos $\int_0^1 1 \times dx = 1$.
6. Se $f_n(x)$ tende crescentemente para $f(x)$, a integral de $f_n(x)$ tende para a integral de $f(x)$. (LEBESGUE, 1904, p. 98-99).

Esta última propriedade marca a diferença entre a definição de integral de Lebesgue e a de integral de Riemann, porque poderia acontecer que todas as f_n

[95] Lebesgue introduisit l'espèce des fonctions *mensurables*. Le progrès était immense. [...] Une suite convergente de fonctions continues n'est pas habituellement une fonction continue. [...] Mais la limite d'une suite convergente de fonctions mensurables est mensurable. Dès lors, toutes les fonctions rencontrées dans les problèmes de l'Analyse sont mensurables.

tivessem um número finito de pontos de descontinuidade, enquanto este não é mais o caso com f.

Com a mudança da perspectiva adotada na análise do problema de integração, Lebesgue estabelece dois aspectos como essenciais: explorar a natureza dos conjuntos E_i e suas medidas $m(E_i)$, e mostrar o tipo de medição usada. Então, sua teoria da integração depende de uma teoria generalizada de medição, pois, em alguns casos de derivadas, esses conjuntos são tão complicados que não são mensuráveis no sentido de Riemann. Lebesgue abordou este assunto em vários documentos. Em sua tese de doutorado, já na primeira página, faz o seguinte comentário:

> Sabe-se que existem funções derivadas que não são integráveis quando se assume, como fez o Sr Jordan, a definição de integral dada por Riemann; de modo que a integração, tal como a define Riemann, não permite em todos os casos resolver o problema fundamental do cálculo integral: encontrar uma função conhecendo sua derivada.[96] (LEBESGUE, 1902, p. 01).

Para fazer esta restauração do Teorema Fundamental do Cálculo, foram necessários uma nova teoria de medição e a consideração de que a integral indefinida é uma função de conjuntos e não de pontos (LEBESGUE, 1926, p. 65). Assim, a grande realização de Borel e Lebesgue foi a elaboração dessa teoria de medida.

Lebesgue fez duas coisas: além de basear a integral em uma teoria de medição, generalizou esta última de modo que um conjunto infinito discreto tenha medida zero. A título de exemplo, a função, já abordada anteriormente,

$$f:[0,1]\to \quad \text{definida por } f(x)=\begin{cases}1 & se\ x\ é\ irracional\\ 0 & se\ x\ é\ racional\end{cases},$$

não é Riemann integrável, tendo em vista que as somas superior e inferior são, respectivamente, iguais a 1 e 0. Mas é Lebesgue integrável, de valor igual a 1.

[96] On sait qu'il existe des fonction dérivées non intégrables, lorsque l'on adopte, comme le fait M[r] Jordan, la définition de l'intégrale qu'a donnée Riemann; de sorte que l'intégration, telle que l'a définie Riemann, ne permet pas dans tous les cas de résoudre le problème fondamental du calcul intégral: Trouver une fonction connaissant sa dérivée.

Isto porque, o conjunto dos x para os quais a função assume valor zero, é o conjunto dos racionais, que é enumerável e, portanto, tem medida zero.

IV.5.2 Teoria da Medida de Lebesgue

Por não gostar da teoria dos conjuntos e do método axiomático, quer construir todas as teorias matemáticas a partir de bases empíricas. É com este espírito que Lebesgue, tendo se baseado na teoria de Borel, apresenta, primeiro em sua tese (1902, p. 5-18), uma teoria da medição de grandezas, com o nome de Medida de Conjuntos. As idéias básicas que fundamentam esta teoria estão descritas no último capítulo desta nossa tese, em virtude da abordagem que fazemos sobre o ensino da matemática desenvolvido e defendido por Lebesgue. Mesmo não gostando da maneira de fazer Matemática de sua época, aceitava que não tinha como evitar as apresentações axiomáticas que era a tendência da época e, não demorou muito para que sua teoria fosse apresentada por outros matemáticos em termos axiomáticos, denominada Teoria da Medida de Lebesgue.

Agora nosso objetivo é apresentar as principais características dessa teoria. Para tanto, é necessário caracterizar uma função de conjunto.

Representando por ^{p} o espaço euclidiano de dimensão p $(p \geq 1)$, uma célula I em com pontos extremos a, b (com $a \leq b$) é um conjunto, que assume uma das quatro formas:

$$(a,\, b),\, [a,\, b],\, (a,\, b] \text{ ou } [a,\, b).$$

Se a for igual a b, a célula é o conjunto vazio.

As células são intervalos; no entanto, os conjuntos

$$(-\infty,\, a),\, (-\infty,\, a],\, [b,\, +\infty),\, (b,\, +\infty) \text{ e } (-\infty,\, +\infty)$$

que são também intervalos, não são células.

Uma célula I em ^{p} $(p > 1)$ é o produto cartesiano de p células $I_1, ..., I_p$ em , ou seja,

$$I = I_1 \times ... \times I_p \,,$$

assim, uma célula em ^{p} é, também, um intervalo em ^{p}, mas a recíproca nem sempre é verdadeira.

A medida de uma célula $I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_p$ qualquer em com pontos extremos $a \leq b$ é definida como sendo igual a $b - a$, ou seja,

$$l\,(I) = b - a \,.$$

A **medida** de uma célula I qualquer do espaço ^{p} $(p > 1)$ é definida como sendo o produto das medidas das células $I_1, ..., I_p$ em , ou seja,

$$l(I) = \prod_{i=1}^{p} (b_i - a_i) \,.$$

Obs.: A medida l de uma célula I em ^{p}, nos casos em que $p = 1, 2, 3$, denomina-se comprimento, área ou volume, respectivamente.

Um cubo I no espaço ^{p} é uma célula em que todos os lados I_p têm medidas iguais. No caso em que $l(I_p) = 1$ para todo $p \geq 1$, tem-se o

Axioma 1: $l(I) = 1$ se $I_p = 1, \ \forall p \geq 1$.

Pela definição de medida de célula, tem-se

Axioma 2: $l(\emptyset) = 0$.

A função l é finitamente aditiva, ou seja, se $A = I_1 \cup ... \cup I_n$ e se estes intervalos são disjuntos dois a dois, então, $l\,(A) = l(I_1) + ... + l(I_n)$.

Borel e Lebesgue propõem-se a associar a cada união de células

> [...] *um número positivo ou nulo que nós chamaremos sua medida e satisfaz as seguintes condições:*
>
> *1º Existem conjuntos cuja medida não é nula.*
>
> *2º Dois conjuntos iguais têm a mesma medida.*
>
> *3º A medida da soma de um número finito ou infinito enumerável de conjuntos, sem pontos comuns, dois a dois, é a soma das medidas desses conjuntos.*[97] (LEBESGUE, 1902, p. 6).

O progresso essencial obtido por Borel e Lebesgue na teoria da medida foi estabelecer – conforme a terceira condição acima – a σ-aditividade da função l, ou seja, se $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, $l(I) = \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i)$, quando $I_i \cap I_j = \varnothing$ e $i \neq j$.

Borel foi o primeiro a introduzir, em 1898, uma abordagem axiomática para a teoria de medição e, em 1928, fez o seguinte comentário:

> O procedimento que nós temos usado volta na realidade a isso: nós reconhecemos que uma definição da medida poderia ser útil somente se ela tivesse certas propriedades fundamentais: nós colocamos *a priori* essas propriedades e são elas que têm nos servido para definir a classe de conjuntos que consideramos como mensuráveis. Esta maneira de proceder apresenta grandes analogias com os métodos introduzidos pelo Sr. J. Drach, em Álgebra e na teoria das equações diferenciais [...] Em todo caso, ela procede à mesma idéia fundamental: definir os elementos novos que se introduz, com a ajuda de suas propriedades *essenciais*, quer dizer, daquelas que são estritamente indispensáveis aos raciocínios que devem ser seguidos.[98] (BOREL, 1928, p. 48).

A medida usada por Riemann é aditiva, mas não σ-aditiva. Medir no sentido de Jordan ou Riemann significa fazer aproximação por uniões finitas de células e, por isso, o conjunto dos números naturais (considerado como o

---

[97] [...] *un nombre positif ou nul que nous appellerons sa mesure et satisfaisant aux conditions suivants:*
1º Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle.
2º Deux ensembles égaux ont même mesure.
3º La mesure de la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points communs, deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles.

[98] Le procédé que nous avons employé revient en réalité à ceci: nous avons reconnu qu'une définition de la mesure ne pouvait être utile que si elle avait certaines propriétés fondamentales: nous avons posé *a priori* ces propriétés et ce sont elles qui nous ont servi à définir la classe d'ensembles que nous regardons comme mesurables. Cette manière de procéder présente de grandes analogies avec les méthodes introduites par M. J. Drach, en Algèbre et dans la théorie des équations différentielles [...] Dans tous les cas, elle procède à la mème idée fondamentale: définir les éléments nouveaux qu'on introduit, à l'aide de leurs propriétés essentielles, c'est-à-dire de celles qui sont strictement indispensables pour les raisonnements qui doivent suivre.

conjunto de pontos distintos na reta real), por exemplo, não tem uma medida no sentido de Riemann.

No entanto, para Lebesgue que usou σ-aditividade, esse conjunto tem uma medida e seu valor é zero.

De fato, pode-se cobrir o conjunto dos números naturais com células I_n de amplitude $\varepsilon > 0$ qualquer

$$m(\quad) = \sum_{i=n}^{\infty} l(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

como ε é tão pequeno quanto se queira, $m(\quad) = 0$

Conforme exemplificado, para medir um conjunto é preciso representá-lo ou aproximá-lo com uma soma de células. A intenção foi ampliar a noção de volume de um conjunto em ^{p} para conjuntos que são mais gerais que células ou intervalos. Para tanto a idéia de Lebesgue consiste, basicamente, em cobrir o conjunto a ser medido, com uma coleção enumerável de células e, então, minimizar a soma dos volumes dessas células, pegando o ínfimo de todas as coleções enumeráveis. Este volume generalizado que Lebesgue chamou de medida exterior e que escolhemos indicar por m^*, tem a vantagem de ser definido para todos os subconjuntos limitados de ^{p}.

DEFINIÇÃO**:** Se $E \subseteq {}^p$, definimos a medida exterior $m^*(E)$ de E como sendo a função m^* tal que:

$$0 \le m^*(E) = \bigcup_{k}^{inf} I_k \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \right\}, \tag{1}$$

tal que

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \,. \tag{2}$$

É possível perceber que todo subconjunto E de $\mathbb{R}^p$ está contido na união de um conjunto (I_k) de células em $\mathbb{R}^p$ e, portanto, a coleção de todos os conjuntos que satisfazem (2) é não vazia. Logo, o ínfimo apresentado em (1) é bem definido e $m^*(E) \geq 0$. Notamos ainda que, certamente, é possível ter $m^*(E) = +\infty$. Um exemplo, é o caso em que $E = \mathbb{R}^p$.

O intervalo de variação de $l(I_k)$ satisfaz à condição $0 \leq l(I_k) < +\infty$ para todo k e, então, a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) \qquad (3)$$

ou é convergente (neste caso, o valor das somas não depende da ordem da adição), ou é divergente, sendo a soma $+\infty$.

TEOREMA 1: A função m^* definida acima satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $m^*(\varnothing) = 0$.

(ii) $0 \leq m^*(E) \leq +\infty$ para todo $E \subseteq \mathbb{R}^p$.

(iii) Sendo $E \subseteq F$, então, $m^*(E) \leq m^*(F)$.

(iv) Se (E_k) é uma seqüência de subconjuntos de $\mathbb{R}^p$, então:

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(E_k).$$

Provas:

i) Sejam $I_k = (\varnothing)$, $k = 1, 2, ...$

Considera-se $\varnothing \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$.

Por definição

$$0 \le m*(\varnothing) = \inf_{\bigcup I_k} \sum_{k=1}^{+\infty} l(I_k) = \inf\{0\} = 0$$

ii) Válida como conseqüência da definição de m^* bastando tomar $E = \ ^{p}$.

iii) Se (I_k) é um conjunto de células, tal que $F \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$, então, da mesma forma $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} J_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$. Pela definição $m^*(E) \le m^*(F)$.

iv) É suficiente provar a afirmação no caso em que $m^*(E_n) < +\infty$ para cada $n \in$. Para um dado $\varepsilon > 0$ e, para cada $n \in$, existe uma coleção $(I_k^n)_k$ de células tal que $E_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k^n$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} m(I_k^n) \le m^*(E_n) + \varepsilon/2^n$.

Visto que $\{I_k^n : k, n \in \ \}$ é uma família enumerável de células que cobre o conjunto $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, segue da definição de m^* que:

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) \le \sum_{k,n=1}^{+\infty} m(I_k^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} m(I_k^n) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \left(m^*(E_n) + \varepsilon/2^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(E_n) + \varepsilon ,$$

e, desde que $\varepsilon > 0$ é arbitrário, a propriedade iv) está provada.

Uma vez que $0 \le m^*(E) < +\infty$ para algum conjunto $E \subseteq \ ^{p}$, então, a mudança de uma soma dupla para uma soma repetida é justificada.

A propriedade (iv), acima, afirma que m^* é σ-subaditiva na coleção de todos os subconjuntos de $\ ^{p}$. Em particular, segue dessa propriedade que se A e B são subconjuntos disjuntos (ou seja, $A \cap B = \varnothing$), então:

$$m^*(A \cup B) \le m^*(A) + m^*(B) .$$

Mas a medida exterior definida acima tem a grande desvantagem de, normalmente, não ser nem aditiva nem σ-aditiva, ou seja, nem sempre satisfaz a condição de igualdade $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$, com A e B sendo tais que $A \cap B = \varnothing$ (BARTLE, 1966, p. 135). Neste ponto, podemos colocar a definição:

Um conjunto $(E) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ é mensurável, no sentido de Lebesgue, se

$$m^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

vale destacar que existem conjuntos que não satisfazem esta igualdade, isto é, não são mensuráveis

Antes de especificar as condições necessárias para caracterizar a classe dos subconjuntos $E \subset {}^{p}$ que são mensuráveis, vamos apresentar o seguinte teorema importante:

TEOREMA 2: Considerando que o conjunto $U \subseteq$ é aberto e não vazio, existirá, então, uma família enumerável e disjunta de intervalos abertos do tipo $\{I_a\}_{a \in A}$, de forma que:

$$U = \bigcup_{a \in A} I_a .$$

Este teorema implica que todos os conjuntos abertos e todos os conjuntos fechados em são mensuráveis.

Para prová-lo, consideramos definida a seguinte relação em U: sendo $x, y \in U$, dizemos que xRy se existe um intervalo aberto J, tal que $\{x, y\} \subseteq J \subseteq U$.

Como R é uma relação de equivalência em U, particiona U em classes de equivalência. Para cada $x \in U$, denota-se por $\bar{x}$ a classe de equivalência que contém x. Demonstraremos que $\bar{x}$ é um intervalo aberto $\forall x \in U$. Para tanto, seja $x \in U$. Primeiro vemos que $\bar{x}$ é um intervalo; para isso, tomamos $a, b \in \bar{x}$, com $a < b$. Desta forma, os resultados possíveis são:

$$b \leq x,\ a < x < b,\ x \leq a .$$

Por serem todos similares, será discutido somente o caso $b \leq x$.

Se $a < b \leq x$, pela definição de R, tem-se $(a,x) \subseteq U$, $(b,x) \subseteq U$ e, portanto:

$$(a,b) \subseteq (a,x) \subseteq U\ .$$

Logo, $\bar{x}$ é um intervalo.

Para demonstrar que $\bar{x}$ é um intervalo aberto, basta provar que $\bar{x}$ é um conjunto aberto. Por isso, se $y \in \bar{x}$, resulta que existe um intervalo aberto J_y, tal que $\{x, y\} \subseteq J_y \subseteq U$ e, é imediato que, neste caso, $J_y \subseteq \bar{x}$. Portanto, $\bar{x}$ é um conjunto aberto. Assim, está demonstrado que $\bar{x}$ é um aberto.

Agora, levando em consideração que todo intervalo aberto de não vazio contém números racionais e que o conjunto é enumerável, tem-se que $\{\bar{x}, x \in U \cap \ \}$ também é enumerável.

Pelo fato do complemento de um conjunto aberto ser um conjunto fechado, os conjuntos fechados também são mensuráveis.

No início do século XX, Constantin Carathéodory (1873-1950) apresenta uma classe M de subconjuntos de $E \subseteq {}^{p}$ pela seguinte condição:

CONDIÇÃO **C**: Um conjunto $E \subseteq {}^{p}$ pertence a M se possuir a seguinte propriedade: para qualquer conjunto $A \subseteq {}^{p}$,

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)\ .$$

Carathéodory provou que M é uma σ-álgebra de conjuntos[99] para a qual a medida exterior fornece uma medida σ-aditiva (veja uma prova em BARTLE, 1966, p. 140).

Existem outras maneiras de selecionar a classe dos conjuntos mensuráveis. Kamke (1960, p. 59), por exemplo, define que M é mensurável se

---

[99] Sendo X um conjunto arbitrário, então, a família Σ de subconjuntos de X é uma σ-álgebra em X se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Ø e X pertencem a Σ;

(ii) se $E \in \Sigma$, então, o complemento $E^C = \mathrm{X} - E$ pertence a Σ;

(iii) se (E_n) é uma seqüência de conjuntos em Σ, então, a união $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ pertence a Σ.

$$\inf \ m^*(O \mid M) = 0 \text{,}$$

em que $O \mid M$ significa todos os conjuntos abertos O que cobrem M.

Lebesgue (1902, p. 7-8), diferente de Carathéodory e Kamke, considera um conjunto E pertencendo a um segmento AB (intervalo limitado) e define o complementar de E em relação à AB, $C_{AB}(E)$, como sendo o conjunto $AB - E$.

Como a medida de $C_{AB}(E)$ é no máximo $m^*\left[C_{AB}(E)\right]$, a medida de E é no mínimo $m(AB) - m^*\left[C_{AB}(E)\right]$. Este número não depende da escolha do segmento AB contendo o conjunto E e Lebesgue define-o como sendo a medida interior do conjunto E, $m_*(E)$, ou seja,

$$m_*(E) = m(AB) - m^*\left[C_{AB}(E)\right].$$

O autor citado argumenta que a medida exterior não é jamais inferior à medida inferior; se o problema da medida for possível, a medida de um conjunto E estará compreendida entre as medidas exterior e a interior de E, já definidas e, apresenta a seguinte definição de conjuntos mensuráveis:

> Chamaremos *conjuntos mensuráveis, aqueles cujas medidas exterior e interior são iguais*, o valor comum desses dois números será a medida do conjunto, se o problema da medida é possível.[100] (Ibid., p. 8).

Então, para Lebesgue, um conjunto E é mensurável se

$$m_*(E) = m^*(E)\,.$$

Como já se sabe, é sempre válida a desigualdade $m^*(A) \le m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$.

Assim, para verificar a condição (**C**), é necessário verificar que $m^*(A) \ge m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$. Temos, então:

[100] Nous appellerons *sensembles mesurables ceux dont les mesures extérieure et intérieure sont égales*, la valeur commune de ces deux nombres sera la mesure de l'ensemble, si le problème de la mesure est possible.

TEOREMA 3: Se os conjuntos E e F satisfazem a condição (**C**), então, $E \cap F$ também a satisfaz.

Prova:

Como E atende à condição (**C**), então:

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \tag{1}$$

para qualquer $A \subseteq {}^{p}$. Mas como F também atende à condição (**C**), então:

$$m^*(A \cap E) = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E \cap F^c)\,. \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), obtém-se:

$$m^*(A) = m^*(A \cap E \cap F) + m^*(A \cap E \cap F^c) + m^*(A \cap E^c) \tag{3}$$

Por E satisfazer a condição (**C**) e fazendo $(A \cap (E \cap F^c) = B$, vem:

$$m^*(B) = m^*(B \cap E) + m^*(B \cap E^c)\,,$$

que resulta em:

$$m^*(A \cap (E \cap F)^c) = m^*(A \cap (E \cap F)^c \cap E) + m^*(A \cap (E \cap F)^c \cap E^c) \tag{4}$$

Sendo:

$$(E \cap F)^c \cap E = E \cap F^c \quad \text{e} \quad (E \cap F)^c \cap E^c = E^c \tag{5}$$

Substituindo (5) em (4), obtém-se:

$$m^*(A \cap (E \cap F)^c) = m^*(A \cap F^c \cap E) + m^*(A \cap E^c) \tag{6}$$

Substituindo (6) em (3), resulta:

$$m^*(A) = m^*(A \cap (E \cap F)) + m^*(A \cap (E \cap F)^c) \tag{7}$$

Assim, está provado que $(E \cap F)$ satisfaz a condição (**C**).

$(E \cap F)^c = E^c \cup F^c$. Como E e F satisfazem a condição (**C**), E^c e F^c e, também, $E^c \cup F^c$ a satisfazem. Por indução, temos que $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ também satisfaz a condição (**C**), ou seja, é mensurável.

TEOREMA 4: Se E é a união dos conjuntos E_i, com $i = 1,...,+\infty$, e se todos esses conjuntos obedecem à condição (**C**), tem-se a equação:

$$m^*(E) = \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(E_k)\,. \tag{8}$$

Prova:

Definindo

$$F_n = \bigcup\nolimits_{k=1}^{n} E_k\,, \tag{9}$$

mensurável para todo $n \in$, e sendo $A \subseteq {}^{p}$, tem-se:

$$m^*(A) = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap (F_n)^c) \tag{10}$$

Assim, pela definição de F_n, vem:

$$m^*(A) = m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} A \cap E_k\right) + m^*(A \cap (F_n)^c) \tag{11}$$

$$m^*(A) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap (F_n)^c) \tag{12}$$

Como $F_n \subseteq E$, então $A \cap (F_n)^c \supseteq A \cap E^c$ para todo $n \in$.

Desta forma, obtém-se:

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap E^c) \tag{13}$$

Como esta desigualdade é válida para todos os números naturais n, chega-se, então, a esta outra desigualdade:

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(A \cap E_k) + m^* A \cap E^c) \tag{14}$$

Agora, pelo Teorema 1 (iv), tem-se:

$$m^*(A \cap E) = m^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A \cap E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(A \cap E_k) \tag{15}$$

Portanto,

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)\,. \tag{16}$$

Fazendo $A = E$ em (14) e (16), obtém-se que

$$m^*(E) = \sum_{k=1}^{+\infty} m^*(E_k)\,,$$

de onde se conclui que m^* é σ-aditiva em M .

CAPÍTULO V

UMA DISCUSSÃO SOBRE O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS

V.1 INTRODUÇÃO

Historicamente, como já abordado, o Cálculo Infinitesimal ou, simplesmente, Cálculo dividido em Cálculo Integral e Cálculo Diferencial, originou-se de dois problemas distintos que surgiram em épocas e contextos bem diferentes. Os dois problemas foram tratados independentes um do outro até o final do século XVII quando, então, foi percebido que estes – os problemas das áreas e das tangentes – relacionavam-se inversamente pelo conhecido Teorema Fundamental do Cálculo que, na sua forma clássica, diz: Se uma função $F[a,b] \to$ possui derivada integrável, então, $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt$.

Com esse teorema, o difícil problema de calcular integrais definidas por intermédio de cálculo de limites de somas, pode ser transformado em um problema muito mais fácil, o de encontrar antiderivadas. Portanto, para determinar o valor de $\int_a^b f(x)dx$, sem precisar pensar em termos de soma, basta achar uma antiderivada F e depois calcular o número $F(b) - F(a)$.

Os polinômios reais formam naturalmente um espaço vetorial real, tendo como base os monômios $\{x^n,\ n = 0, 1, 2, ...\}$. A derivação d é uma aplicação linear neste espaço e, por isso, precisa ser definida só na base x^n. Agora, obviamente, d permite uma aplicação inversa: $D : nx^{n-1} \to x^n$ (para $n-1 \neq -1$)[101], ou seja, $D(x^n) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Então, d composta com D é igual à identidade e o Teorema Fundamental do Cálculo torna-se uma conseqüência da definição.

Temos, então, dois sentidos para a palavra “integrar”:

(A)→ Sendo dada uma função f definida sobre um intervalo fechado $[a,b]$ da reta, encontrar uma função F tal que $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$, ou seja, determinar uma primitiva ou antiderivada.

(B)→ Sendo dada uma função f definida sobre um intervalo fechado $[a,b]$ da reta, determinar a área delimitada pela curva de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$; ou seja, encontrar uma integral definida.

Vamos chamar estes dois problemas de equivalentes se a resolução de um implicar a resolução do outro (KOLMOGOROFF, 1932). Neste sentido, o Teorema Fundamental do Cálculo indicará uma equivalência se f obedecer certas condições.

Dependendo da caracterização de f, teremos diferentes possibilidades de relacionar o sentido (A) e o sentido (B) da palavra integrar.

Antes de Riemann, normalmente, buscavam-se condições suficientes para provar a existência da integral e, por isso, assumia-se que f era contínua, sendo esta característica uma condição suficiente para o chamado Teorema Fundamental do Cálculo, que diz que podemos resolver o problema (B) por meio da resolução de (A).

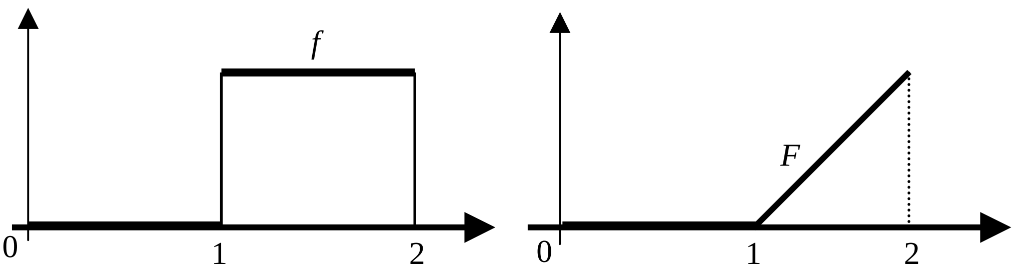
[101] Caso contrário, teremos uma função logarítmica e não uma função algébrica.

A partir do desenvolvimento do conceito de integral dado por Riemann e, posteriormente, Lebesgue, os matemáticos começaram a buscar condições necessárias para a “equivalência” dos problemas (A) e (B). Por isso, escolheram classes bem mais amplas de funções, ou seja, funções mensuráveis. É óbvio que a determinação de funções mensuráveis depende da medida escolhida (medida de Riemann-Jordan ou medida de Lebesgue).

Neste capítulo, vamos verificar como alguns livros didáticos tratam esse assunto, identificando assim a perspectiva que adotam e a que período da história se relacionam. Porém, primeiro, apresentamos alguns exemplos de funções para as quais não se aplica o Teorema Fundamental do Cálculo.

Exemplo 1) Seja a função $f:[0,\,2]\to$, definida por $f(x)=\begin{cases}0 & se\ x\le 1\\ 1 & se\, x>1\end{cases}$.

Observando a representação gráfica, Figura V.1a, percebemos que esta função f é integrável no sentido (B), sendo a área sob o gráfico de f em $[0,\,2]$ igual a 1. Mas não é integrável no sentido (A), pois não tem primitiva, ou seja, $F(x)=\begin{cases}0 & se\ x\le 1\\ x-1 & se\ x>1\end{cases}$, representada na Figura V.1b, não admite derivada em todos os pontos do intervalo $[0,\,2]$.



a b

Fig. V.1

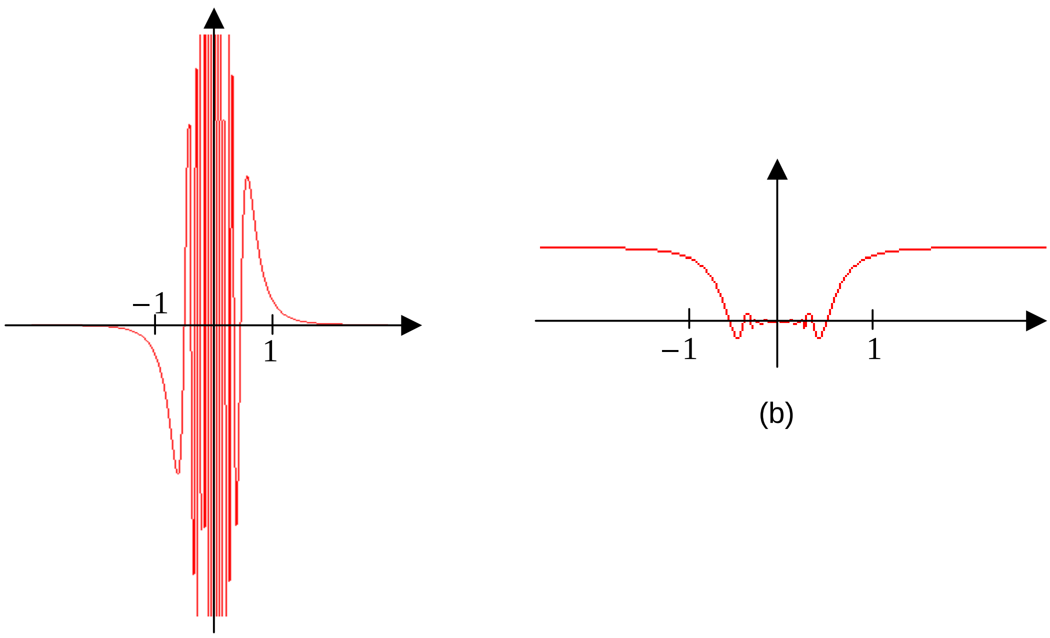
Exemplo 2) Seja a função $f:[-1,\,1]\to$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2x\cdot\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cdot\cos\dfrac{1}{x^2} & se\ \ x\neq 0 \\ 0 & se\ \ x=0 \end{cases}.$$

Esta função f, esboçada na Figura V.2a não é limitada no intervalo $[-1,\ 1]$ e, portanto, não é integrável no sentido (B). Mas, é integrável no sentido (A), tendo como antiderivada a função

$$F(x)=\begin{cases} x^2\cdot\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2} & se\ \ x\neq 0 \\ 0 & se\ \ x=0 \end{cases},$$

esboçada na Figura V.2b.



(a) (b)

Fig. V.2 (Fonte: http://www.walterzorn.com/grapher/grapher_e.htm)

Exemplo 3) Seja a função $f:[0,\,1]\rightarrow$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} 0 & se\ \ x\ é\ racional \\ 1 & se\, x\ é\ irracional \end{cases}.$$

Neste caso, a função f dada não é integrável nem no sentido (A) nem no sentido (B), se tomarmos por base a teoria da medida usada por Riemann que é aditiva.

No entanto, usando a teoria da medida de Lebesgue que é σ-aditiva, a função f é integrável no sentido (B), sendo a área igual a 1. Isso porque, considerando a função $g:[0,1]\to$ definida por $g(x)=1$, f e g são duas funções, para as quais $\{x: f(x)\neq g(x)\}$ tem medida zero, então, $\int_a^b f = \int_a^b g = 1$.

Agora, se $g(x)=1$, $G(x)=x$, então, g é integrável nos dois sentidos, (A) e (B). Mas acontece que $G'(x)\neq f(x)$, ou seja, não é possível a partir de G voltar à função original f, portanto, a função f continua não sendo integrável no sentido (A).

Vários livros[102] foram pesquisados; no entanto, faremos menção apenas a três dos destinados ao estudo introdutório do Cálculo e um ao estudo introdutório de Análise. São eles:

- *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 1, de George F. Simmons;
- *Cálculo*,Volume 1, de George B. Thomas Jr.;
- *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral*, de Willian Anthony Granville, Percey F. Smith e William Raymond Longley e
- *Curso de Análise,* Volume 1, de Elon Lages Lima.

A restrição a esses quatro livros justifica-se pelo fato de entendermos que as abordagens ou perspectivas encontradas neles, de alguma forma, repetem-se em todos os outros livros.

Restringimo-nos a identificar como esses livros didáticos introduzem as integrais e sob qual perspectiva abordam o teorema fundamental, na intenção de perceber em que período histórico que os caracterizam.

[102] De acordo com a relação apresentada na bibliografia consultada, correspondem às referências cujo sobrenome do autor é sucedido de * (asterisco).

V. 2 *CÁLCULO*, DE GEORGE F. SIMMONS

Esta obra foi publicada, pela primeira vez, em 1985, pela Editora McGraw-Hill e traduzida para o português por Seiji Hariki, sendo editada no Brasil em 1987, também, pela Editora McGraw-Hill. Na edição em português, o texto todo é composto de 22 capítulos e seis apêndices, distribuídos em dois volumes: o Volume I, com 12 capítulos e quatro apêndices, com 851 páginas; e o volume II, com 10 capítulos e dois apêndices, com 827 páginas.

No entanto, limitar-nos-emos ao primeiro volume, por ser neste que o autor trabalha o conceito de integral definida e o Teorema Fundamental do Cálculo.

Simmons introduz primeiro a idéia de integral indefinida ou antiderivada, por meio de um problema de determinação de uma função desconhecida, mas, cuja derivada é conhecida, seguida da seguinte definição:

> Se $f(x)$ é dada, então, a função $F(x)$ tal que
>
> $$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \qquad (2)$$
>
> chama-se uma *antiderivada* (ou *primitiva*) de $f(x)$, e o processo de achar $F(x)$ a partir de $f(x)$ é a *antiderivação* (ou *primitivação*). (...) $f(x)$ não precisa ter uma antiderivada única, mas se pudermos achar uma antiderivada $F(x)$, então, todas as outras terão a forma $F(x)+c$ para vários valores da constante c. (SIMMONS, 1987, v. 1, p. 232-233).

Posteriormente, no capítulo 6, de forma intuitiva o autor desenvolve um procedimento para o cálculo de áreas como limite de somas. Para tanto, considera $y = f(x)$ uma função não negativa, limitada e definida em um intervalo fechado $[a, b]$ e quer determinar a área limitada pelo gráfico de f, o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$. Subdivide o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2],..., [x_{n-1}, x_n]$, sendo o comprimento do k-ésimo intervalo dado por $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Escolhe um ponto x_k^* qualquer em cada um deles e calcula a soma $f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + ... + f(x_n^*)\Delta x_n$, que caracteriza uma aproximação da área procurada. Considera, então, que o comprimento do maior subintervalo tende a zero e chega à fórmula:

$$\textit{área da região} = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \tag{10}$$

(SIMMONS, 1987, v. 1, p. 272)

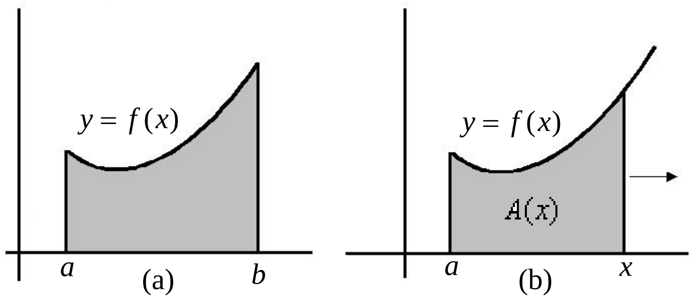
e faz, então, a seguinte observação:

> O limite (10) é simbolizado pela notação-padrão de Leibniz
>
> $$\int_a^b f(x)dx \tag{11}$$
>
> que se lê [...] "a *integral definida* de *a* a *b* de $f(x)dx$. Se adotarmos a notação (11),
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x \tag{12}$$
>
> então, o símbolo à esquerda tem a intenção de relembrar-nos da parte correspondente da soma aproximadora à direita. O *sinal de integral* $\int$ é uma letra S alongada, como em "soma", escolhida por causa da semelhança entre uma integral definida e uma soma de pequenas quantidades; a passagem ao limite em (12) é sugerida substituindo a letra $\sum$ pelo símbolo $\int$. Além disso, o símbolo usual Δ para incremento é substituído pela letra d, para lembrar-nos dessa operação-limite, exatamente como na notação de Leibniz dy/dx para a derivada. Os números *a* e *b* juntos do sinal de integral chamam-se *limites inferior e superior de integração*. Os limites de integração estão sempre presentes numa integral definida e ajudam-nos a distingui-la da integral indefinida $\int f(x)dx$.
>
> A função $f(x)$ em (11) chama-se *integrando* – o que está sendo integrado –, e a variável x é a *variável de integração*. O papel de dx como uma importante componente intuitiva de integrais definidas ficará mais claro no próximo capítulo. (Ibid., p. 272-273).

A ênfase de Simmons é dada ao termo "integrar" no sentido de determinar uma área, ou seja, encontrar uma integral definida.

Considerando o grau de dificuldade da definição de integral como limite de somas, bem como as limitações desse método – conforme o autor exemplificou com a resolução de alguns problemas envolvendo cálculo de áreas –, mostra a necessidade de um método mais eficiente e poderoso, denominado Teorema Fundamental do Cálculo, para a determinação de integrais definidas (Ibid., p. 274-278).

Para chegar ao estabelecimento de tal Teorema, Simmons parte de um problema do tipo: sendo dada uma função f, contínua e definida em $[a, b]$, determinar a área da região delimitada pelo gráfico da função $y = f(x)$, as retas $x = a$ e $x = b$, e o eixo das abscissas; para o qual apresenta o seguinte desenvolvimento:

> Em vez de pedir a área *fixada* à esquerda na Fig. 6.16a, pedimos a área *variável* produzida quando a extremidade direita é considerada móvel, de modo que a área seja uma função de x, como é sugerido pela Fig. 6.16*b*.
>
> 
>
>
> **Figura 6.16**
>
> Se essa função área é denotada por $A(x)$, então, é claro que $A(a) = 0$ e $A(b)$ é a área da figura dada em 6.16*a*. Nossa meta é achar uma fórmula explícita para $A(x)$ e, então, determinar a área desejada, fazendo $x = b$. Há vários passos nesse processo que consideraremos separadamente para torná-lo mais claro.
>
> **Passo 1** Começamos estabelecendo o fato crucial de que
>
> $$\frac{dA}{dx} = f(x) \qquad (4)$$
>
> Isto diz que a *taxa de variação da área A com relação a x é igual ao comprimento do lado direito da região*. Para provar essa asserção, devemos apelar para a definição de derivada:
>
> $$\frac{dA}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x}.$$
>
> Agora $A(x)$ é a área sob o gráfico entre a e x e $A(x + \Delta x)$. Logo, $A(x + \Delta x) - A(x)$ é a área entre x e $x + \Delta x$ (veja a região sombreada na Fig. 6.17). É fácil ver que essa área é exatamente igual à área de um retângulo com a mesma base cuja altura é $f(\bar{x})$, onde $\bar{x}$ é um ponto convenientemente escolhido entre x e $x + \Delta x$.

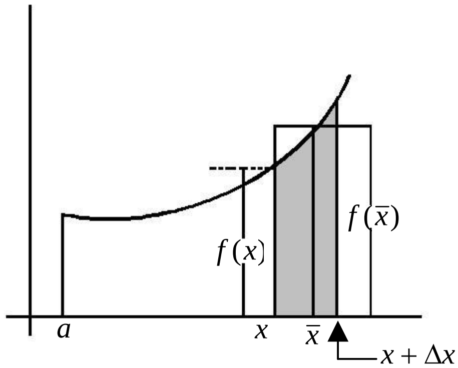


Figura 6.17

Isto nos permite completar a prova de (4) como se segue:

$$\frac{dA}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\bar{x})\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\bar{x}) = f(x),$$

pois $f(x)$ é contínua. (...)

Passo 2 [...] Por (4), $A(x)$ é uma das antiderivadas de $f(x)$. Mas, se $F(x)$ é qualquer antiderivada de $f(x)$, então, sabemos (...) que

$$A(x) = F(x) + c \tag{5}$$

para algum valor da constante *c*. Para determinar *c*, pomos $x = a$ em (5) e obtemos $A(a) = F(a) + c$; mas, como $A(a) = 0$, isto leva a $c = -F(a)$. Portanto,

$$A(x) = F(x) - F(a) \tag{6}$$

que é a fórmula desejada.

Passo 3 Tudo que resta é observar que

$$\int_a^b f(x)dx = A(b) = F(b) - F(a).$$

Resumimos nossas conclusões estabelecendo formalmente o **Teorema Fundamental do Cálculo**:

Se $f(x)$ *é contínua sobre um intervalo fechado* $[a, b]$ *e se* $F(x)$ *é qualquer antiderivada de* $f(x)$, *isto é* $(d/dx)F(x) = f(x)$, *ou de maneira equivalente,*

$$\int f(x)dx = F(x) \tag{7}$$

então,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{8}$$

(SIMMONS, 1987, v. 1, p. 278-281, grifo nosso)

Temos, então, duas observações a fazer. Em primeiro lugar, o Teorema Fundamental do Cálculo no sentido de Simmons estabelece uma “equivalência” entre os dois sentidos (A) e (B) da palavra integrar (veja discussão na página 158). Em segundo lugar, de acordo com Simmons, a classe das funções às quais se aplica esse teorema, é a das contínuas definidas nos intervalos fechados $[a, b]$.

V. 3 *CÁLCULO*, DE GEORGE B. THOMAS JR

Esta obra teve sua primeira edição publicada em língua inglesa em 1965; e 13 reimpressões até 1981. Alfredo Alves de Farias a traduziu para a Língua Portuguesa e sua primeira publicação no Brasil data de 1975, por Livros Técnicos e Científicos Editora, São Paulo.

Em relação a outros textos de cálculo, não apresenta diferenças marcantes, no que tange aos conteúdos apresentados e sua organização. Na publicação brasileira, o trabalho de Thomas Jr. foi organizado em 15 capítulos, distribuídos em quatro volumes. O primeiro foi destinado ao desenvolvimento dos conceitos básicos de diferenciação e integração.

No capítulo 4 deste volume, o autor inicia lembrando os dois sentidos do termo integrar, como segue:

> Hoje, a expressão “ïntegrar” tem dois sentidos quando empregada em relação ao cálculo. A significação mais profunda e mais fundamental é quase a mesma que a definição não-técnica: “indicar o todo de; dar a soma ou o total de” (Webster). A significação matemática da palavra neste sentido será amplamente ilustrada quando formos calcular áreas limitadas por curvas, volumes de vários sólidos, comprimentos de curvas, centros de gravidade, etc.
>
> O segundo significado matemático do verbo “integrar” é “achar uma função cuja derivada é dada”. É esse aspecto da integração que discutiremos nos dois parágrafos seguintes. (THOMAS JR., 1981, v.1, p. 168).

Em seguida, introduz a integral indefinida como a solução de uma equação diferencial, com o seguinte problema:

Suponhamos que a derivada dy/dx nos seja dada como uma função

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad a < x < b \tag{1}$$

e que desejemos achar $y = F(x)$. (THOMAS JR., 1981, v.1, p. 168).

Depois, as seguintes definições:

DEFINIÇÃO 1. *Uma equação como a (1), que dá a derivada como função de x (ou como função de x e y), é chamada uma equação diferencial*. (THOMAS JR., 1975, v.1, p. 169).

DEFINIÇÃO 2. *Dizemos que $y = F(x)$ é solução da equação diferencial (1) se, para $a < x < b$, F for diferenciável e*

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x). \tag{2}$$

(Ibid., p. 169)

O autor destaca que se F é uma integral de f em relação a x, ou seja, é uma solução da equação (1), então, todas as soluções de (1) são da forma $F + C$, sendo C uma constante arbitrária. Estas soluções podem ser indicadas por

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{3}$$

Thomas Jr. apresenta duas interpretações para esta equação:

1. Podemos cogitar do símbolo

$$\int \ldots dx \tag{4}$$

como significando "integral, em relação a x, de ...". O símbolo (4) é então interpretado como o *inverso* do símbolo

$$\frac{d}{dx}\ldots,$$

que significa "derivada, em relação a x, de ..." Nessa interpretação, o sinal de integral e o dx estão juntos; o sinal de integral especifica a operação de integração, e o dx indica que a "variável de integração" é x.

2. Podemos considerar a eq. (2) escrita sob forma *diferencial*:

$$dF(x) = f(x)dx, \tag{5}$$

antes de se efetuar a operação indicada pelo sinal de integral. Então, introduzindo o sinal de integral em (5), isto é, “integrando” ambos os membros da equação, obtemos

$$\int dF(x) = \int f(x)dx\,.$$

Comparando esta equação com a (3), temos:

$$\int dF(x) = F(x) + C\,, \tag{6}$$

Em outras palavras, quando integramos a *diferencial* de uma função, obtemos a própria função mais uma constante arbitrária. De acordo com esta interpretação, então, cogitamos do símbolo $\int$ de integração (sem absorver o dx como parte do símbolo) como significando a operação que é a *inversa* da operação denotada pelo símbolo d da diferenciação. Esta é a interpretação que adotaremos neste livro. (THOMAS JR., 1981, v. 1, p. 170-171).

Esta formulação do problema mostra que o autor usa o sentido (A) do termo “integrar”, ou seja, o sentido de determinar uma primitiva.

Para abordar a integral definida, faz um estudo sobre o problema da determinação de áreas sob curvas. Primeiramente, considerando uma função $y = f(x)$, positiva e contínua em $[a, b]$, o autor define a área sob o gráfico da referida função como sendo o limite das somas das áreas de retângulos inscritos na curva, quando o número de retângulos cresce indefinidamente.

Posteriormente, para mostrar que as áreas podem ser calculadas com o auxílio do cálculo infinitesimal, considera novamente uma função f, positiva e contínua em $[a, b]$. Considerando, como exemplificado pela Figura V.3, um ponto c entre a e b, denota a área sob o gráfico de a até b como sendo

$$A_a^b = A_a^c + A_c^b\,, \tag{1}$$

e, quando $c = a$, denota a área de a até a por

$$A_a^a = 0 \tag{2}$$

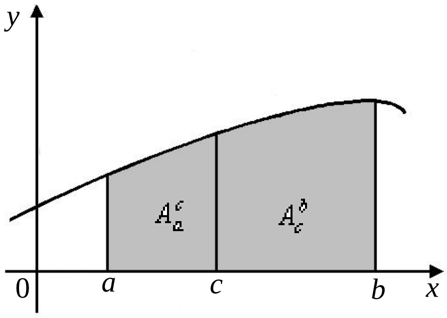


Fig. V.3

Usando o teorema do valor intermediário, considera que existe um ponto c entre a e b, tal que

$$A_a^b = f(c).(b-a) \tag{3}$$

Então, para calcular a área A_a^b, apresenta o seguinte desenvolvimento:

Para calcularmos a área A_a^b consideremos uma abscissa qualquer, x, entre a e b, a área A_a^x e a área $A_a^{x+\Delta x}$, onde $\Delta x \neq 0$ (Fig. 4-18). Deduzimos uma equação diferencial para a função área A_a^x. A solução desta equação diferencial, com a condição inicial $A_a^a = 0$, nos permitirá calcular a área de a a qualquer x e, em particular, de a a b.

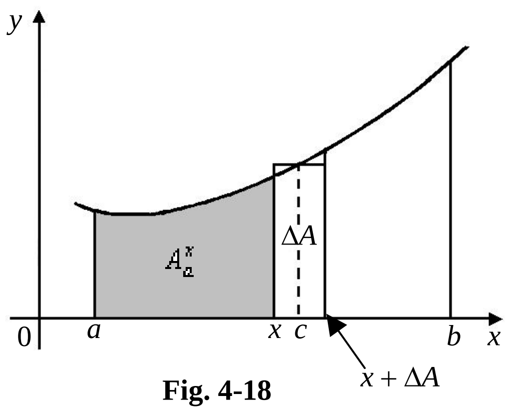


Fig. 4-18

Da equação.(1) temos $A_a^x + A_x^{x+\Delta x} = A_a^{x+\Delta x}$ de modo que

$$\Delta(A_a^x) = A_a^{x+\Delta x} - A_a^x = A_x^{x+\Delta x} \tag{6a}$$

Então, pela equação (5),

$$A_x^{x+\Delta x} = f(c).\Delta x \tag{6b}$$

onde c é um número entre x e $x+\Delta x$ que deve portanto tender para x quando $\Delta x \to 0$. Combinando (6a) e (6b) e dividindo por Δx, vem

$$\frac{\Delta A_a^x}{\Delta x} = f(c) \tag{7}$$

e, portanto,

$$\frac{dA_a^x}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A_a^x}{\Delta x} = \lim_{a \to x} f(c) = f(x)$$

onde a última linha decorre do fato de ser f contínua. Portanto, a área A_a^x satisfaz a equação diferencial

$$\frac{dA_a^x}{dx} = f(x) \tag{8a}$$

e a condição inicial

$$A_a^a = 0 \tag{8b}$$

Assim, se $F(x)$ é uma integral qualquer de $f(x)dx$, temos

$$A_a^x = \int_a^x f(x)dx = F(x) + C \tag{9a}$$

e

$$A_a^a = 0 = F(a) + C\ .$$

Donde

$$C = -F(a)$$

e

$$A_a^x = F(x) - F(a) \tag{9b}$$

Finalmente, fazendo $x = b$, temos

$$A_a^b = F(b) - F(a).$$

As equações (9a) *e* (9b) *resumem o método para achar, por integração, a área sob uma curva. Se a equação da curva é* $y = f(x)$*, integramos* f *, achando*

$$F(x) + C = \int f(x)dx \tag{10a}$$

Se o intervalo é $a \le x \le b$*, então calculamos*

$$A_a^b = F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a) \tag{10b}$$

(THOMAS JR., 1981, v. 1, p. 205-206)

Para apresentar o Teorema Fundamental do Cálculo Integral, Thomas Jr. faz o seguinte comentário:

> [...] fizemos um estudo sistemático do problema das áreas, e chegamos ao seguinte resultado:
>
> *Se a função* f *é positiva e contínua no intervalo* $a \le x \le b$*, então a área sob o seu gráfico é*
>
> $$A_a^b = \lim \sum f(c_k)\Delta x = \int f(x)dx]_a^b = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)\ . \tag{1}$$
>
> A primeira parte desta equação é apenas a definição de área como limite da soma de áreas de retângulos inscritos. A última parte da equação indica um processo rápido para obter este limite, por meio do cálculo. Eis aqui uma das mais fecundas

> idéias da matemática "moderna" ("moderna" no sentido de post-Renascença); a idéia central é: o limite pode ser calculado por integração. É isto, em essência, que constitui o ***Teorema Fundamental* do cálculo integral**, ligando entre si o processo de somação [...] e o processo de diferenciação que permite determinar a tangente a uma curva. É um fato notável que a inversa do "problema da tangente" (isto é, o inverso da diferenciação) proporcione um meio rápido para resolver o problema da somação. (THOMAS JR., 1981, v. 1, p. 209, grifo nosso).

Então, enuncia o Teorema Fundamental do Cálculo Integral, como segue:

> Seja f uma função contínua em $a \le x \le b$. Seja
>
> $$a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b \tag{2}$$
>
> um conjunto de números $a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < b$ que dividem o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais, cada um de comprimento
>
> $$\Delta x = \frac{(b-a)}{n} \tag{3}$$
>
> Seja $c_1, c_2, ..., c_n$ um conjunto de n números, um em cada subintervalo,
>
> $$a \le c_1 \le x_1,\ x_1 \le c_2 \le x_2,\ ...,\ x_{n-1} \le c_n \le b. \tag{4}$$
>
> Seja
>
> $$S_n = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + ... + f(c_n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \tag{5}$$
>
> Finalmente, seja $F(x)$ uma integral qualquer de $f(x)dx$,
>
> $$F(x) = \int f(x)dx \tag{6}$$
>
> Então, quando $n \to \infty$,
>
> $$\lim S_n = \lim \sum f(c_k)\Delta x = F(b) - F(a) \tag{7}$$
>
> (Ibid., p. 210)

Em relação a esta obra de Thomas Jr., fazemos as seguintes observações: tendo definido a integração como operação inversa da diferenciação, o Teorema Fundamental do Cálculo passou a ser uma conseqüência da definição. Então, o que precisou ser provado é que a integração neste sentido tem relação com o problema da medição de área. Para tanto, o autor usou o Teorema Fundamental do Cálculo Integral, tendo como pressuposto a condição de continuidade das funções às quais esse teorema aplica-se.

V.4 *ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL,* DE WILLIAN A. GRANVILLE, PERCEY F. SMITH E WILLIAM R. LONGLEY

Esta obra, cuja primeira publicação data de 1954, foi traduzida para a língua portuguesa por José Abdelhay. Composta de um volume de 714 páginas, com 27 capítulos, sua 5ª edição portuguesa foi publicada no Brasil, em 1966, pela Editora Científica do Rio de Janeiro.

Os autores dedicam-se ao estudo de integrais envolvendo do capítulo XII ao capítulo XVIII. Iniciam o capítulo XII, definindo a integração como operação inversa da diferenciação, como segue:

> **Integração.** O leitor já está familiarizado com as operações mutuamente inversas de adição e subtração, multiplicação e diferenciação, potenciação e radiciação. Nos exemplos que seguem, os segundos membros de uma coluna são, respectivamente, as funções inversas dos segundos membros da outra coluna.
>
> $$y = x^2 + 1. \qquad x = \pm\sqrt{y-1}\,;$$
>
> $$y = a^x, \qquad x = \log_a y\,;$$
>
> $$y = \operatorname{sen} x, \qquad x = arc\operatorname{sen} y\,.$$
>
> No cálculo diferencial aprendemos como calcular a derivada $f'(x)$ de uma dada função $f(x)$, uma operação indicada por
>
> $$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x),$$
>
> ou, se usarmos diferenciais, por
>
> $$df(x) = f'(x)dx\,.$$
>
> **Os problemas do cálculo integral dependem da *operação inversa*, precisamente**:
>
> *Achar uma função* $f(x)$ *cuja derivada*
>
> $$f'(x) = \phi(x) \qquad (1)$$
>
> *é dada.*

Ou, já que é usual usar diferenciais no cálculo integral, podemos escrever

$$df(x) = f'(x)dx = \phi(x)dx \tag{2}$$

e pôr o problema como segue:

Dada a diferencial de uma função, achar a função.

A função $f(x)$ assim achada chama-se uma *integral* da dada função, o processo de achá-la chama-se *integração* e a operação de integração é indicada pelo *sinal de integração* $\int$ posto antes da dada expressão diferencial; assim,

$$\int f'(x)dx = f(x), \tag{3}$$

lê-se *integral de* $f'(x)\,dx$ igual a $f(x)$. A diferencial dx indica que x é a *variável de integração*. Por exemplo,

(a) se $f(x) = x^3$, então, $f'(x)dx = 3x^2 dx$ e $\int 3x^2 dx = x^3$.

(b) se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então, $f'(x)dx = \cos x\, dx$ e $\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$.

(c) se $f(x) = arc\ tg\ x$, então, $f'(x)dx = \dfrac{dx}{1+x^2}$ e $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arc\ tg\ x$.

Como é aparente nas explicações acima, ***a derivação e a integração são operações inversas uma da outra***. Vamos pôr isso em destaque.

Diferenciando (3), temos,

$$d\int f'(x)dx = f'(x)dx. \tag{4}$$

Substituindo o valor de $f'(x)dx\,[= df(x)]$ de (2) em (3), obtemos

$$\int df(x) = f(x). \tag{5}$$

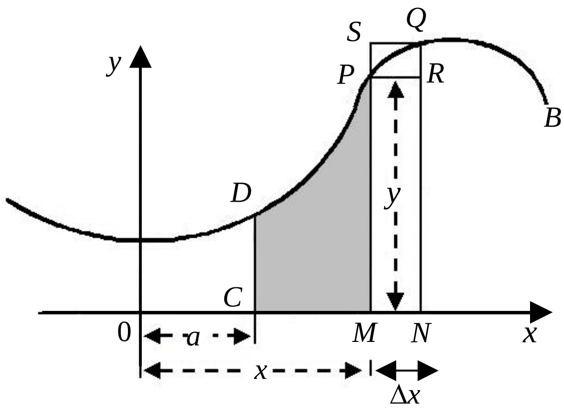
Portanto, considerados como símbolos de operação, $\dfrac{d}{dx}$ e $\int ...dx$ são inversos um do outro, ou, se estamos usando diferenciais, d e $\int$ são inversos um do outro.

Quando d é seguido por $\int$, eles se neutralizam, como em (4), mas quando $\int$ é seguido por d, como em (5), isto não se dá em geral.

A razão disto será vista [...] quando dermos a definição de constante de integração. (GRANVILLE; LONGLEY; SMITH, 1966, p. 230-232, grifo nosso).

Esta formulação do problema mostra que o sentido adotado ao termo “integrar”, nesta livro, é o sentido (A), ou seja, o sentido de determinar uma primitiva.

O capítulo XIV é destinado ao estudo de integral definida, inicia explorando a idéia de diferencial a área de uma região plana sob um curva, da seguinte maneira:

> Consideremos a função contínua $\phi(x)$ e seja $y = \phi(x)$ a equação da curva AB. Seja CD uma ordenada fixa e MP uma variável. Seja u a área da figura $CMPD$. Dando a x um pequeno acréscimo Δx, u toma uma acréscimo Δu (= área de $MNQP$). Completando os retângulos $MNRP$ e $MNQS$, vemos que
>
> Área $MNRP$ < área $MNQP$ < área $MNQS$,
>
> Ou $MP \cdot \Delta x < \Delta u < NQ$.
>
> 
>
>
> Façamos Δx tender a zero; como MP permanece fixo e NQ tende a MP (pois y é função contínua de x), obtemos
>
> $$\frac{du}{dx} = y\ (= MP),$$
>
> ou, usando diferenciais, $du = y\,dx$. (GRANVILLE; LONGLEY; SMITH, 1966, p. 293).

Então, enuncia o seguinte teorema:

> *A diferencial da área limitada por uma curva, o eixo dos xx, uma ordenada fixa e uma ordenada variável é igual ao produto da ordenada variável pela diferencial da correspondente abscissa.* (Ibid., p. 293).

Para chegar à formulação da definição de integral definida, desenvolve o seguinte raciocínio:

> Do teorema acima resulta que se a curva AB é o lugar dos pontos de
>
> $$y = \phi(x),$$
>
> então, $du = y\,dx$, ou

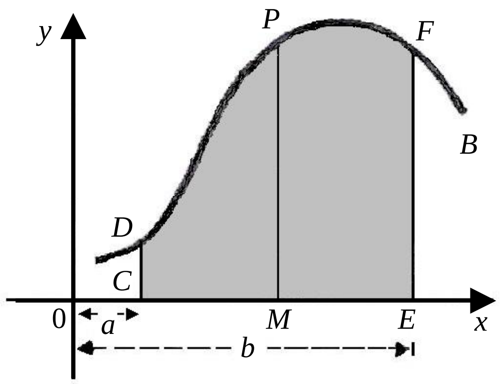
$$du = \phi(x)dx\,, \qquad (1)$$

onde du é a diferencial da área compreendida entre a curva, o eixo dos xx e as duas ordenadas. Integrando, obtemos

$$u = \int \Phi(x)dx\,.$$

Denotemos $\int \Phi(x)dx$ por $f(x) + C$.

$$\therefore u = f(x) + C\,. \qquad (2)$$



Determinamos C notando que $u = 0$ quando $x = a$. Substituídos estes valores em (2), obtemos

$$0 = f(a) + C\,,$$

e, portanto, $C = -f(a)$.

Logo, (2) torna-se

$$u = f(x) - f(a)\,. \qquad (3)$$

A área pedida $CEFD$ é o valor de u em (3) quando $x = b$.

Temos, pois,

$$\text{Área } CEFD = f(b) - f(a)\,.$$

(GRANVILLE; LONGLEY; SMITH, 1966, p. 294)

Chegam, assim, ao seguinte teorema:

A diferença entre os valores de $\int ydx$ para $x = b$ e $x = a$ dá a área limitada pela curva cuja ordenada é y, o eixo dos xx e as ordenadas correspondentes a $x = a$ e $x = b$. (Ibid., p. 294).

Por fim, definem a integral definida:

Esta diferença é representada pelo símbolo

$$\int_a^b ydx \quad \text{ou} \quad \int_a^b \Phi(x)dx\,, \tag{4}$$

[...] A operação é chamada de *integração entre limites* [...].

como (4) tem sempre um valor definido, ela diz-se uma ***integral definida***. Realmente, se

$$\int \Phi(x)dx = f(x) + C\,,$$

então, $\int_a^b \Phi(x)dx = [f(x)+C]_a^b = [f(b)+C]-[f(a)+C]$,

ou $\int_a^b \Phi(x)dx = f(b) - f(a)$,

havendo desaparecido a *constante de integração.* (GRANVILLE; LONGLEY; SMITH, 1966, p. 294-295, grifo dos autores).

Posteriormente, no capítulo XV, argumenta:

Até agora definimos a integração como operação inversa da derivação. Em muitas das aplicações do cálculo integral convém, porém, que a integração seja definida como um *processo de soma*. [...]

A definição que daremos no próximo parágrafo é de fundamental importância e é essencial que o leitor se familiarize com ela a fim de que possa aplicar o cálculo integral aos problemas da prática. (Ibid., p. 316, grifo nosso).

Inicia o próximo parágrafo com a seguinte definição:

Se $\phi(x)dx$ é a derivada de $f(x)$, então, (...) a integral definida

$$\int_a^b \phi(x)dx = f(b) - f(a) \tag{1}$$

fornece a área limitada pela curva $y = \phi(x)$, o eixo dos xx e as retas $x = a$ e $x = b$. (Ibid., p. 316),

que corresponde ao Teorema Fundamental do Cálculo. A partir dessa definição, os autores (Ibid., p. 318) chegam à seguinte igualdade:

$$\int_a^b \phi(x)dx = \lim_{n\to\infty}[\phi(x_1)\Delta x_1 + \phi(x_2)\Delta x_2 + ... + \phi(x_n)\Delta x_n]$$

que estabelece o Teorema Fundamental do Cálculo Integral, assim enunciado:

Seja $\phi(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Dividamos este em n subintervalos e sejam Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n os comprimentos destes. Em cada um dos subintervalos escolhamos um ponto e sejam x_1, x_2, ..., x_n as abscissas dos pontos escolhidos. O limite da soma

$$\phi(x_1)\Delta x_1 + \phi(x_2)\Delta x_2 + \ldots + \phi(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\Delta x_i \qquad (2)$$

quando n tende ao infinito de tal modo que cada subintervalo tenda a zero, é igual ao valor da integral definida $\int_a^b \phi(x)dx$.

A igualdade (A) pode ser abreviada como segue:

$$\int_a^b \phi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\Delta x_i \,. \qquad (3)$$

(GRANVILLE; (GRANVILLE; LONGLEY; SMITH, 1966, p. 316), 1966, p. 318)

Este teorema mostra que toda integral definida é o limite de uma soma do tipo (2) e todo limite de uma soma deste tipo pode ser calculado por uma integral.

Neste livro, observamos que os autores definiram a integração como operação inversa da diferenciação. Apresentam o Teorema Fundamental do Cálculo como uma definição; usaram o Teorema Fundamental do Cálculo Integral para provar que a integração, como a definiram, tem relação com o problema da medição de área. A classe das funções para as quais se aplica tal teorema, foi estabelecida pelo autores como sendo a classe das funções contínuas, definidas em um intervalo [a,b].

V. 5 *CURSO DE ANÁLISE*, DE ELON LAGES LIMA

Esta obra foi publicada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada e o CNPq, é composta de dois volumes, a primeira edição do primeiro volume foi datada de 1976 e a terceira edição, que foi a analisada, de 1982.

Diferente das obras anteriores destinadas a cursos introdutórios de Cálculo, o primeiro volume desta obra corresponde, conforme o próprio autor argumenta logo no início do prefácio da primeira edição, à “primeira parte de um curso de Análise” (LIMA, 1982, p. VII).

Lima inicia o capítulo sobre Integral de Riemann, afirmando que a principal motivação para o estudo deste tema encontra-se no problema assim formulado:

> Suponhamos dada uma função $f:[a,\, b] \to$, limitada no intervalo $[a,\, b]$. Admitamos, por simplicidade, que f seja não-negativa, isto é, $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,\, b]$. Consideremos o conjunto
>
> $$A = \{(x, y) \in \quad ^2;\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\},$$
>
> formado pelos pontos do plano compreendidos entre o eixo das abscissas, o gráfico de f, e as retas verticais $x = a$ e $x = b$. Qual a área deste conjunto? Em primeiro lugar, é necessário dizer o que significa a 'Área" de A e, em seguida, tentar calculá-la. (LIMA, 1982, v. 1, p. 238).

Considerando uma função $f:[a,\, b] \to$ limitada e uma partição P de $[a,\, b]$ dada pelo conjunto $\{a = t_0,\, t_1,\, ...,\, t_n = b\}$, para cada intervalo $[t_{i-1},\, t_i]$ vai existir um ínfimo m_i e um supremo M_i dos valores de f. A partir dessas considerações, Lima define

> [...] a *soma inferior* $s(f;\, P)$ e a *soma superior* $S(f;\, P)$ da função f relativamente à partição P pondo:
>
> $$s(f,\, P) = m_1 \cdot (t_1 - t_0) + ... + m_n \cdot (t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$$
>
> e
>
> $$S(f,\, P) = M_1 \cdot (t_1 - t_0) + ... + M_n \cdot (t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1}).$$
>
> Se m é o ínfimo e M o supremo de f em $[a,\, b]$, temos
>
> $$m(b-a) \leq s(f;\, P) \leq S(f;\, P) \leq M(b-a),$$
>
> para toda partição P do intervalo $[a,\, b]$. (Ibid., p. 240).

Considerando refinamentos da partição de $[a,\, b]$ e o supremo e o ínfimo relativos a todas essas partições de $[a,\, b]$, o autor define a integral inferior $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ como sendo o $\sup_P(f;\, P)$ e a integral superior $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ como sendo o $\inf_P(f;\, P)$. Por fim, apresenta a seguinte definição de função integrável:

> Uma função limitada $f:[a,\, b] \to$ chama-se *integrável* quando
>
> $$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

> E este valor comum é chamado *a integral* de f e indicado com
>
> $$\int_a^b f(x)dx \text{ ou simplesmente, } \int_a^b f \, .$$
>
> (LIMA, 1982, v. 1, p. 247)

Com esta definição, fica evidente que o autor está usando o sentido (2) do termo integrar, ou seja, encontrar a integral definida.

Lima apresenta também a discussão sobre as condições de integrabilidade de uma função por meio da formulação e prova de alguns lemas, teoremas e corolários. A saber:

> LEMA 4. *Sejam* σ, Σ *conjuntos limitados não-vazios de números reais. Suponhamos que, para quaisquer* $s \in \sigma$ *e* $S \in \Sigma$ *seja* $s \le S$. *Então* $\sup \sigma = \inf \Sigma$ *se, e somente se, para cada* $\varepsilon > 0$ *existem* $s \in \sigma$ *e* $S \in \Sigma$ *tais que* $S - s < \varepsilon$. (Ibid., p. 248).
>
> LEMA 5. *Seja* Y *um conjunto não-vazio limitado de números reais. Se* $m = \inf Y$ *e* $M = \sup Y$, *então,* $M - m = \sup\{|x - y|;\ x,\ y \in Y\}$. (Ibid., p. 249).
>
> COROLÁRIO. *Seja* $f:[a,\ b] \to$ *limitada. Para todo* $X \subset [a,\ b]$ *não-vazio, tem-se* $(f;\ X) = \sup\{|f(x) - f(y)|;\ x,\ y \in X\}$. (Ibid., p. 249).
>
> TEOREMA 4. Seja $f:[a,\ b] \to$ *limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:*
>
> *(1)* f *é integrável;*
>
> *(2) Para todo* $\varepsilon > 0$ *existem partições* P, Q *do intervalo* $[a,\ b]$ *tais que* $S(f;\ Q) - s(f;\ P) < \varepsilon$*;*
>
> *(3) Para todo* $\varepsilon > 0$, *existe uma partição* P *do intervalo* $[a,\ b]$ *tal que* $S(f;\ P) - s(f;\ P) < \varepsilon$*;*
>
> *(4) Para todo* $\varepsilon > 0$, *existe uma partição*
>
> $P = \{a = t_0,\ t_1,\ ...,\ t_n = b\}$ *do intervalo* $[a,\ b]$ *tal que* $\sum_{i=1}^{n} \omega_i \cdot (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$.
>
> (Ibid., p. 249).
>
> TEOREMA 5. *Sejam* $f,\ g:[a,\ b] \to$ *integráveis. Então:*
>
> 1. *Para* $a < c < b$, $f|[a,\ c]$ *e* $f|[c,\ b]$ *são integráveis e se tem*
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \, .$$
>
> *Reciprocamente, se* $f|[a,\ c]$ *e* $f|[c, b]$ *são integráveis, então* f *é integrável, e vale a igualdade acima.* [...] (Ibid., p. 250).

> TEOREMA 7. *Seja* $f:[a, b]\to$ *limitada. Se, para cada* $c\in[a, b)$, $f\,|[a, c]$, *é integrável, então* f *é integrável.* (LIMA, 1982, v. 1, p. 253).

> COROLÁRIO 1. *Seja* $f:[a, b]\to$ *limitada. Se, para* $a<c<d<b$ *quaisquer,* $f\,|[c, d]$ *é integrável, então* f *é integrável.* (Ibid., p. 253).

> COROLÁRIO 2. *Seja* $f:[a, b]\to$ *limitada, com um número finito de descontinuidades. Então,* f *é integrável.* (Ibid., p. 253).

Para tratar da questão referente à relação inversa entre derivação e integração, Lima (1982, v. 1, p. 254) inicia considerando uma função $f:[a, b]\to$ integrável. Referindo-se ao primeiro item do Teorema 5, já citado, afirma que, para todo $x\in[a, b]$ tem-se que $\int|[a, x]$ é integrável. Daí, define a função $F:[a, b]\to$ como sendo uma função primitiva da função $f:[a, b]\to$ e expressa por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Prova que F é uniformemente contínua em $[a, b]$ e para mostrar que f contínua implica F derivável, apresenta e prova o

> TEOREMA 8. *Seja* $f:[a, b]\to$ *integrável. Se* f *é contínua no ponto* $c\in[a, b]$, *então a função* $F:[a, b]\to$, *definida por* $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, *é derivável no ponto* c *e se tem* $F'(c)=f(c)$. (Ibid., p. 255).

então, enuncia o

> COROLÁRIO. *Dada* $f:[a, b]\to$ *contínua, existe* $F:[a, b]\to$ *derivável, tal que* $F'=f$. (Ibid., p. 256).

No entanto, argumenta que nem toda função integrável f possui primitiva e exemplifica mostrando que a função $f:[a, b]\to$ definida por $f(t)=\begin{cases}0 & se\ 0\le t<1\\ 1 & se\ 1\le t\le 2\end{cases}$ é seccionalmente contínua e sua integral $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ é $F(x)=\begin{cases}0 & para\ \ 0\le x\le 1\\ x-1 & para\ \ 1\le x\le 2\end{cases}$ que é uma função contínua. Mas, como a função F não é derivável no ponto $x=1$, ela não pode ser uma primitiva de f, ou seja, o fato de uma função ser integrável não garante que ela tenha uma primitiva (Ibid., 255-256).

Partindo do fato que se uma função $f:[a,b]\to$ possui uma primitiva $F:[a,b]\to$ argumenta que, então, existe uma infinidade delas, tais que se diferem entre si por uma constante, pois possuem a mesma derivada f. Como conseqüência desse fato, Lima apresenta o seguinte resultado:

> [...] *se* $F:[a,b]\to$ *é de classe* C^1 [ou seja, F é uma função continuamente derivável no intervalo $[a,b]$ com F' contínua], *então,* $\int_a^b F'(t)dt = F(b)-F(a)$. (LIMA, 1982, v. 1, p. 256).

Em seguida, formula o

> TEOREMA 9 (**Teorema Fundamental do Calculo**). S*e uma função* $F:[a,b]\to$ *possui derivada integrável, então* $F(b)-F(a)=\int_a^b F'(t)dt$. (Ibid., p. 256-257, grifo nosso).

Em seu livro, Lima usa o termo "integrar" no sentido (B), ou seja, de determinar a integral definida. Para mostrar que podemos calcular áreas por meio das antiderivadas, usa o Teorema Fundamental do Cálculo. Na formulação que faz do mesmo, fica evidente que, diferente dos outros autores, para mostrar a equivalência entre os problemas (A) – determinar uma primitiva – e (B) – determinar uma área –, Lima não se baseia em condições suficientes (continuidade da função f em $[a,b]$), mas, sim, em condições necessárias (integrabilidade da função f em $[a,b]$). A abordagem feita por Lima mostra uma perspectiva mais moderna, que se baseia no Cálculo de Riemann.

V.6 CONSIDERAÇÕES

Das obras observadas, percebemos que algumas definem a integração geometricamente, como sendo uma medição de área (limite de um somatório), ao passo que outras a definem, algebricamente, como operação inversa da diferenciação.

Quando a integração é definida como um somatório, como fizeram Simmons e Lima, é necessário provar que existe uma relação entre esta e a diferenciação, ou seja, que se pode resolver o problema (B) – determinar a área ou a integral definida – por meio da solução do problema (A) – determinação de uma primitiva ou antiderivada. Mostram essa “equivalência” entre (A) e (B) usando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Entretanto, quando a integração é definida, como operação inversa da diferenciação, como fizeram Thomas Jr. e Granville, Smith e Longley, a integração e a diferenciação são apenas operadores inversos na álgebra das funções (esta forma de definir integral, retrata bem o espírito algébrico dominante, nos séculos XVII e XVIII, na qual a atividade típica consistia em transformar fórmulas em outras fórmulas, como ilustra o capítulo III). Assim, o Teorema Fundamental do Cálculo é uma conseqüência da definição, e o que precisa ser provado é que a integração, neste sentido, tem relação com o problema da medição de área e, para tanto, usa-se o Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

Nos quatro livros, é estabelecida uma “equivalência” entre os dois sentidos (A) e (B) da palavra “integrar”. Mas, nos três livros de Cálculo, a pressuposta classe das funções às quais se aplicam, tanto o Teorema Fundamental do Cálculo como o Teorema Fundamental do Cálculo Integral, é a classe das “funções contínuas” definidas nos intervalos fechados $[a, b]$. Neste sentido, a perspectiva adotada nestas obras é a mesma do período que antecede Riemann e Lebesgue, pois se baseia em condições suficientes para que uma função f seja integrável, como fez Cauchy, (veja capítulo IV).

O livro de Análise, ao contrário, assume uma perspectiva mais moderna. Na formulação do Teorema Fundamental do Cálculo, por exemplo, Lima não se limita às condições suficientes (como a “continuidade” da função f), mas busca as condições necessárias para o estabelecimento de tal teorema, referindo-se às funções “integráveis”. Perspectiva, esta, usada pelos matemáticos baseada nos trabalhos de Riemann e Lebesgue, como ilustra o capítulo IV.

CAPÍTULO VI

IDÉIAS CONTIDAS NA *OBRA SOBRE A MEDIDA DAS GRANDEZAS*[103] DE HENRI LEBESGUE

Como já comentado no primeiro capítulo, Henri Lebesgue foi considerado um dos matemáticos mais inovadores do século XX e, como poucos, dedicou grande parte de sua vida ao ensino da Matemática. Para termos uma idéia de seu empenho nesta questão, basta observar no anexo 1 a listagem de suas publicações destinadas a assuntos pedagógicos em todos os níveis de ensino. Neste capítulo, com objetivo de ressaltar suas idéias que julgamos significativas para compreensão da didática ou do processo que ele considerava no ensino da Matemática, vamos nos ater à obra *Sur la mesure des grandeurs*. Isto porque, nela, Lebesgue apresenta um julgamento do ensino da Matemática, tendo como base a discussão sobre a aprendizagem de medida das grandezas, passando por todos os níveis de ensino, mostrando a evolução do assunto do nível mais elementar ao mais complexo.

Seu livro *Sur la mesure des grandeurs* (1935) é uma republicação de uma série de artigos da revista *Extrait de L'Enseignement Mathématique*, volumes XXXI (1931) a XXXIV (1935).

---

[103] Sur la mesure des grandeurs.

Na introdução, Lebesgue justifica que a escrita da obra, numa tendência pedagógica, dirigida aos professores da época, foi motivada pelos seus trinta anos de experiência no magistério, com vinte desses dedicados também à formação de professores de Matemática para lecionarem no segundo grau na França. Na época, parte do programa que ensinava, era relacionado ao currículo secundário e como conseqüência disso: ele analisou tais programas curriculares; identificou os obstáculos com os quais os alunos, com muita freqüência, deparavam-se e, também, analisou os livros didáticos que eram usados, buscando identificar as tendências de ensino neles contidas.

Lebesgue justifica a escolha do assunto “medida das grandezas” tratado na obra, por acreditar que este é a origem de todas as aplicações matemáticas e que a Matemática aplicada é a fonte da Matemática pura (LEBESGUE, 1935, p. 2). Para ele, a Matemática é uma linguagem que se refere às atividades e construções e, particularmente, não tem objetos próprios.

Inicia a obra tratando de números inteiros, depois trata de “números em geral”, indispensáveis às medidas de grandezas e, então, trata de áreas, volumes e grandezas em geral.

No decorrer da obra, descreve em detalhes o desenvolvimento de vários métodos de apresentação de fatos matemáticos, inclusive, métodos não muito conhecidos, buscando mostrar os pontos fortes e fracos de cada um. Mas, como esclarece, não com a intenção de sugerir como um determinado assunto deveria ser ensinado aos alunos, mas, sim, motivar uma discussão sobre o mesmo entre os professores, pois só as experiências dos professores poderiam possibilitar as adequações necessárias para que seu método pudesse ser levado à sala de aula (Ibid., p. 35). Explica, também, que não é porque aponta falhas na exposição clássica, que a está condenando, pelo contrário, quer ajudar a melhorá-la e argumenta, “Isso poderá ser obtido, a meu ver, somente por um estudo comparativo crítico dos diversos modos de exposição. Eu tentei fazer este estudo no que concerne à medida das grandezas."[104] (LEBESGUE, 1935, p. 177).

A obra estudada apresenta 184 páginas, além da introdução (páginas 1-3), foi dividida em oito capítulos: I) Comparação de conjuntos. Números inteiros (3-9); II) Comprimentos e números (10-34); III) Áreas (35-63); IV) Volumes (64-90); V) Comprimentos de curvas, áreas de superfícies (90-127); VI) Grandezas mensuráveis (127-141); VII) Integração e diferenciação (141-177) e VIII) Conclusões (177-184).

A seguir, apresentamos um resumo não da obra completa, mas de alguns tópicos que julgamos significativos, para ilustrar como Lebesgue pensava que deveria ser o processo de ensino da Matemática.

VI.1 COMPARAÇÃO DE CONJUNTOS E NÚMEROS INTEIROS

No primeiro capítulo, o autor argumenta que o homem foi levado à contagem pela necessidade de comparar dois conjuntos e que "[...] *número é considerado como o resultado da operação experimental de contagem* [...]"[105] (Ibid., p. 3).

Para ele, depois de explicado o processo de contagem, pode-se explicar o sistema de numeração em qualquer base, tendo em vista que existe uma correspondência absolutamente precisa entre eles. Mas sugere que se use, de início, o sistema decimal, que é uma linguagem universal que está a nossa disposição.

Para Lebesgue, os numerais não são nomes de objetos chamados números; os assuntos metafísicos não importam, mas, sim, questões semânticas.

[104] Ceci ne peut être obtenu, à mon avis, que par une étude comparative critique des divers modes d'exposition; j'ai essayé de faire cette étude en ce qui concerne la mesure des grandeurs.

[105] [...] nombre est considéré comme le résultat de l'opération expérimentale de dénombrement [...]

A tradução de uma língua (a língua dos decimais, por exemplo) para uma outra (a dos duais ou qualquer outra que se queira) é feita pelas proposições e não pelas palavras. Proposições são os elementos de qualquer julgamento e, por isso, temos de saber o que significam. Nas palavras de Lebesgue (1935, p. 7-8), “de um sistema de numeração para um outro [...] a correspondência é de perfeita precisão; não há nenhum inconveniente em se servir de um deles”[106]. Por isso, “não é a palavra número que é, portanto, necessário explicar, mas as frases nas quais esta palavra se encontra”[107] (Ibid., p. 7-8).

Este significado depende das atividades matemáticas, por isso, em relação aos números, ele dizia, “[...] nós dispomos de uma definição completa do número: a descrição da operação que o fornece.”[108] (Ibid., p. 4).

O autor considera a aritmética uma ciência experimental que se baseia na repetição de algumas observações empíricas e, por isso, sempre se sabe em quais casos ela (a aritmética) aplica-se ou não, tanto que neste último a idéia de aplicação nem ocorre e exemplifica:

> Em um copo, eu coloco dois líquidos; em um outro, dois líquidos. Eu coloco tudo em um vaso. Conterá este quatro líquidos? – É uma maldade, você diz, não uma questão de aritmética.[109] (Ibid., p. 5-6).

Assim, argumenta que se a resposta a esta pergunta fosse afirmativa, a aritmética estaria sendo tomada como uma ciência formal e:

> Nas exposições puramente lógica, nas quais a aritmética ocupa-se de símbolos vazios de significado, é graças somente a um axioma que dois e dois fazem quatro. Não tenho que falar aqui desse tipo de exposições, porém, posso dizer que, se sua importância matemática é considerável, se nos ensinaram muito, me pareceriam fadadas ao fracasso absoluto, se quiséssemos considerá-las como esclarecendo a noção de número sem recorrer à experiência.[110] (Ibid., p. 6).

106 D’un système de numération à un autre [...] la correspondance est de précision parfaite; il n’y a plus aucun inconvénient à se servir de l’un d’eux.

107 Ce n’est pas le mot nombre qu’il faut donc expliquer, mais les phrases où ce mot figure.

108 [...] nous disposons d’une définition complète du nombre: la description de l’opération qui le fournit.

109 Dans un verre je verse deux liquides, dans un autre deux liquides. Je verse le tout dans un vase, contiendra-t-il quatre liquides? – C’est de la vauvaise foi, dites-vous, ce n’est pas une question d’arithmétique.

110 Dans les exposés purement logiques, où l’arithmétique s’occupe de symboles vidés de toute signification, c’est grâce seulement à un axiome que deux et deux font quatre. Je n’ai pas à parler ici de ce genre d’exposés, mais je puis bien dire que, si leur importance mathématique est considérable, s’ils nous ont beaucoup appris, ils me paraîtraient voués à un insuccès absolu si on voulait les considérer comme élucidant la notion de nombre sans faire appel à l’expérience.

Na opinião de Lebesgue, a lógica trata de símbolos desprovidos de significado. Por exemplo, as intuições e experiências que guiam nossas aplicações da aritmética não podem ser formuladas em termos lógicos e formais. Por isso, Lebesgue dizia “[...] a aritmética aplica-se quando ela se aplica.”[111] (LEBESGUE, 1935, p. 7; 1941, p. 114).

VI.2 COMPRIMENTO DE SEGMENTOS E NÚMERO

Apoiando-se na descrição do processo de comparação de segmentos, Lebesgue introduz o conceito de “número em geral” e justifica essa escolha com o seguinte comentário:

> Eu a escolhi em concordância com a maneira tradicional de apresentar a geometria na qual os movimentos são utilizados para explorar o espaço. Esta maneira é, indubitavelmente, aquela que se desvia menos dos passos feitos por nossos antepassados para conquistarem as verdades experimentais que são a base da geometria.
>
> Nesta exposição, depois de ter indicado as necessidades que puderam conduzir os homens a comparar distâncias, a definir as palavras distâncias iguais ou desiguais, eu descreveria o procedimento de comparação: vamos dizer, de um segmento AB com o segmento U, chamado unidade.[112] (Ibid., p. 10).

Para tanto, considera inicialmente um segmento AB e um segmento U chamado unitário. Veja Figura VI.1.

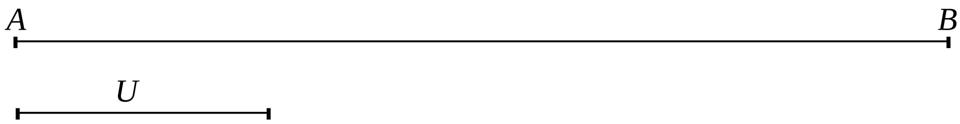


Fig. VI.1

Para comparar o segmento AB com o segmento U, aplica o segmento U sobre a semi-reta AB, a partir de A, marcando, inicialmente, o segmento $A\alpha$,

---

[111] ... l’arithmétique s’applique quand elle s’applique.

[112] Je la choisis en accord avec la manière traditionnelle de présenter la géometrie dans laquelle les mouvements sont utilisés pour explorer l’espace. Cette manière est, à coup sûr, celle qui s’écarte le moins des démarches qu’ont dû faire nos ancêtres pour conquerir les vérités expérimentales qui sont à la base de la géométrie.

Dans cet exposé, après avoir indiqué des besoins qui ont pu conduire les hommes à comparer des distances, à définir les mots distances égales ou inégales, je décrirais le procédé de comparaison: soit à comparer AB et le segment U, appelé l’unité.

depois o segmento $\alpha\beta$ e, assim, sucessivamente, conforme mostra a Figura VI.2, de forma que A_1 seja o último ponto a ser marcado que não ultrapasse o ponto B e B_1 seja o primeiro ponto marcado que ultrapasse B. Em seguida, conta quantas unidades U são necessárias para cobrir o segmento AB.[113]

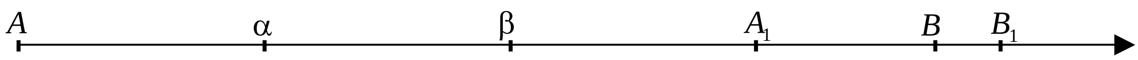


Fig. VI.2

Duas possibilidades, então, são possíveis:

Primeira: A_1 coincide com o ponto B. Neste caso, ele explica que para cobrir o segmento AB, necessita-se do segmento U, uma quantidade inteira de vezes. A título de exemplo, no segmento AB da Figura VI.3 essa quantidade é 3. Então, Lebesgue diz que o comprimento do segmento AB na unidade U é 3.

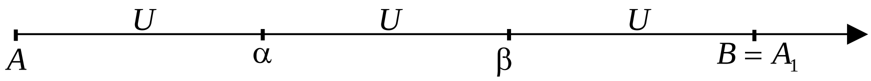


Fig. VI.3

Segunda: A_1 não coincide com o ponto B, portanto, o comprimento de AB não é um múltiplo inteiro de U. Então, Lebesgue diz que o comprimento de AB é um valor maior do que AA_1 e menor do que AB_1, pois B é um ponto do segmento unitário A_1B_1, mas que não coincide com o ponto B_1. A Figura VI.2 exemplifica esta situação com um caso em que o comprimento de AB é um valor maior do que $3U$ e menor do que $4U$.

Quando a segunda possibilidade acontece, Lebesgue orienta que se deve dividir o segmento U em dez partes iguais a U_1 – significando que $U_1 = \frac{1}{10}U$ – e repete o processo descrito, chegando a um segmento A_2B_2 contido em A_1B_1.

[113] Poder-se-ia, também, iniciar o processo de comparação, aplicando o segmento unitário sobre o segmento AB, a partir do ponto B. O resultado seria o mesmo.

Como B não coincide com B_1, o comprimento de AA_2 será um valor variando de $30U_1$ a $39U_1$. Conforme exemplificado na (Figura VI.4), este valor poderia ser, por exemplo, $37U_1$. Isto significa que o comprimento do segmento AB, em relação à unidade U_1 seria no mínimo igual a 37, mas, menor que 38.

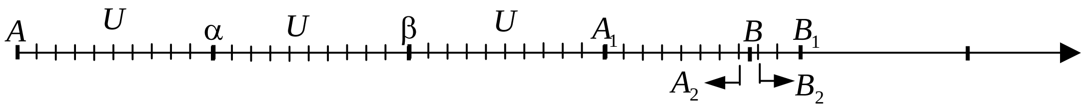


Fig. VI.4

O próximo passo, como explica Lebesgue, seria construir $U_2 = \frac{1}{10}U_1$, depois, $U_3 = \frac{1}{10}U_2$ e, assim, sucessivamente. Poderia ocorrer que o comprimento de AB na unidade U_2 estivesse entre 376 e 377, depois na unidade U_3 estivesse entre 3760 e 3761, depois na unidade U_4 estivesse entre 37602 e 37603, e assim sucessivamente.

Descrito o processo, Lebesgue (1935, p. 10) diz: "Trata-se agora de imaginar um símbolo, que se chamará *número e que é a síntese completa dessa seqüência indefinida de operações,* [...]"**[114]**. Levando em consideração que, para cada etapa do processo, a medida de AB é um valor compreendido entre dois valores que diferem de uma unidade, o resultado da comparação deverá ser sempre a menor seqüência obtida em cada uma das etapas. Assim, de acordo com o exemplo apresentado, os números serão: 3, 37, 376, 3760, 37602, ..., cada um obtido pelo acréscimo de um dígito à direita do anterior (Ibid., p. 10-11).

Desta forma, sendo dado um número e a etapa em que esse número aconteceu, Lebesgue argumenta ser possível saber quais são seus precedentes e em que etapa do processo apareceram. Por exemplo, se é dito que o número 37 foi obtido no segundo estágio, sabe-se, então, que o 3 foi obtido no primeiro. Agora, como argumenta, sendo dado um número sem a indicação da etapa em

[114] Il s'agit maintenant d'imaginer un symbole, qu'on appellera nombre et qui, étant le compte rendu complet de cette suite indéfinie d'opérations, [...]

que ele aconteceu, são infinitas as possibilidades de sua obtenção. Por exemplo, sendo dado o número 37 sem a indicação do estágio em que foi obtido, pode-se imaginar que:

1- O número 37 foi obtido no primeiro estágio ($37U$);

2- O número 37 foi obtido no segundo estágio e o 3 no primeiro ($3U$; $37U_1$);

3- O número 37 foi obtido no terceiro estágio, o 3 no segundo, e 0 (zero) no primeiro ($0U$; $3U_1$; $37U_2$);

4- O número 37 foi obtido no quarto estágio, 3 no terceiro, 0 (zero) no segundo e 0 (zero) no primeiro ($0U$; $0U_1$; $3U_2$; $37U_3$) e, assim por diante, chegando à representação:

   1- $37U$
   2- $37U_1 = 3{,}7U$
   3- $37U_2 = 0{,}37U$
   4- $37U_3 = 0{,}037U$

Lebesgue, então, comenta que esse registro conduziria “[...] à notação ordinária dos números.” (LEBESGUE, 1935, p. 11). Acrescenta, ainda, que com o uso desse processo,

> [...] nós estamos passando diretamente da noção de inteiro para aquela do número mais geral, sem ter de usar ou, se preferirmos, de destacar nem aquela de número decimal exato, nem aquela de número racional. Similarmente, passamos diretamente das operações sobre inteiros às operações dobre números gerais.[115] (Ibid., p. 11).

Mas, antes de chegar às operações, Lebesgue julga necessário perguntar “*se toda seqüência de dígitos indefinida para a direita, e contendo uma vírgula, é um número*. Isto é, se esta seqüência resulta da comparação de um segmento AB com a unidade U.”[116] (Ibid., p. 11). Em resposta, argumenta que conhecida a

---

[115] [...] nous sommes passés directement de la notion d’entier à celle du nombre le plus général sans avoir à utiliser ou, si l’on veut, à dégager ni celle de nombre décimal exact, ni celle de nombre rationnel. De même, on va passer directement des opérations sur les entiers aux opérations sur les nombres généraux.

[116] [...] *si toute suite de chiffres indéfinie vers la droite, et comportant une virgule, est un monbre*. C’est-à-dire si cette suite provient de la comparaison d’un segment AB à l’unité U .

seqüência, busca-se construir AB, a partir de A, sobre uma semi-reta AX, o que levará a uma seqüência de segmentos A_1B_1, A_2B_2,... encaixados uns nos outros e tendo B como ponto comum. Assim, como diz Lebesgue o segmento AB estará bem determinado, mas o comprimento de AB

> [...] será uma seqüência de dígitos, de onde partimos, somente se B não coincidir com nenhum dos pontos B_i. Vemos imediatamente que este caso (B coincidir com um dos B_i) se apresenta se, e somente se, todos os dígitos da seqüência são 9 a partir de um certa ordem. Tais seqüências são excluídas, todas as outras são números.**[117]** (LEBESGUE, 1935, p. 11-12).

Do argumento acima, chega ao seguinte resultado mais geral:

> [...] um segmento AB em uma reta AX conhecida, cuja origem A é conhecida, está determinado quando se sabe que sua extremidade B pertence a uma seqüência infinita de segmentos $\alpha_i\beta_i$ de AX e encaixados uns nos outros contanto que, qualquer que seja n, o comprimento de um segmento fixo U seja superior à n desde que se fixe por unidade um segmento $\alpha_i\beta_i$ de índice suficientemente grande.
>
> Quando estas condições são realizadas, diz-se que o comprimento de $A\alpha_i$ (ou $A\beta_i$) é um valor aproximado por falta (ou por excesso) do comprimento de AB e que essas duas seqüências de valores são indefinidamente aproximadas. Um número é, portanto, determinado, quando se conhece para ele duas tais seqüências de valores aproximados; *se observaria, além disso, facilmente, que o p-ésimo dígito decimal desse número é o p-ésimo dígito decimal desses valores aproximados por exceço em que o índice é suficientemente grande*.**[118]** (Ibid., p. 11-12).

Lebesgue argumenta, então, que esse resultado mais geral, permite generalizar o procedimento de medida, ou seja, para medir o segmento AB em relação ao segmento unitário U, ao invés de aplicar os segmentos U e U_i a partir do ponto A ou do ponto B, estes poderiam ser ordenados a partir de

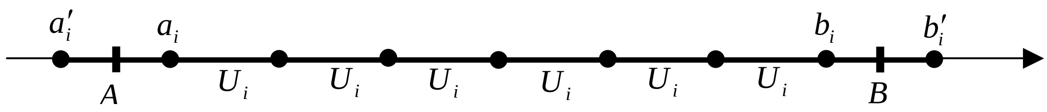
---

[117] [...] ne sera la suite de chiffres d'où l'on est parti que si B ne coincide avec aucun des points B_i. On voit immédiatement que ce cas se présente si, et seulement si, tous les chiffres de la suitesont des 9 à partir d'un certain rang. De telles suites sont donc à exclure, toutes les autres sont des nombres.

[118] [...] un segment AB, porté par une droit AX connue, dont l'origine A est connue, est déterminé lorsque l'on sait que son extrémité B appartient à une suite infinie de segmens $\alpha_i\beta_i$ portés par AX et emboités les uns dans les autres pourvu que, quel que soit n, la logueur d'un segment fixe U soit supérieure à n dès que l'on prend pour unité un segment $\alpha_i\beta_i$ d'indice assez grand.

Quand ces conditions sont réalisées, on dit que la longueur de $A\alpha_i$ (ou $A\beta_i$) est une valeur approchée par défaut (ou par excès) de la longueur AB et que ces deux suites de valeurs sont indéfiniment approchées. Un nombre est donc déterminé quand on connaît pour lui deux telles suites de valeurs approchées; *on verrait d'ailleurs facilement que le p[ième] chiffre décimal de ce nombre est le p[ième] chiffre décimal de celles de ces valeurs approchées par excès dont l'indice est assez grand*.

qualquer ponto ω de AB. Neste caso, Lebesgue (1935, p. 12) explica que, aplicando nos dois sentidos, a partir de ω, o segmento U, depois o segmento U_i, e, assim, sucessivamente, obtém-se uma graduação T que possibilitaria a determinação da medida de AB. Isto porque, para cada etapa do processo de comparação, encontra-se um a_ib_i que é o maior segmento contido em AB e um $a'_1b'_1$ que é o menor segmento que contém AB. Portanto, conforme exemplificado na Figura 5, se o segmento a_ib_i for composto por n segmentos U_i, então, $a'_1b'_1$ será composto de $n+2$ desses segmentos. De forma que, em relação à unidade U_i, os comprimentos de a_ib_i e $a'_1b'_1$ são dois valores aproximados do comprimento de AB, respectivamente, por falta e por excesso.



$$a_ib_i < AB < a'_ib'_i$$

Fig. VI.5

Tendo generalizado o processo de medição de segmentos, Lebesgue inicia uma discussão sobre as operações. O autor descreve geometricamente a adição e a multiplicação. Quanto à subtração e à divisão, simplesmente, indica que podem ser, também, definidas geometricamente ou, se se preferir, como operações inversas, respectivamente, da adição e multiplicação.

No caso da adição, usa o processo generalizado de medição de segmentos, acima descrito. Assim, sendo dados dois segmentos $A\omega$ e ωB e considerando conhecidas as medidas destes, a soma de $A\omega$ com ωB será dada pelo segmento AB. Para determinar a medida de AB, a partir do ponto ω, o autor sugere que se aplique indefinidamente os segmentos U e U_i em ambos os sentidos, formando uma graduação T. Desta forma, para cada etapa do processo, $A\omega$ vai conter um segmento ωa_i formado de um número n inteiro de vezes o segmento U_i e vai estar contido em um segmento $\omega a'_i$ formado de $n+1$

desses segmentos. Analogamente, ωB vai conter um segmento ωb_i formado de um número m inteiro de vezes o segmento U_i e vai estar contido em um segmento $\omega b_i'$ formado de $m+1$ desses segmentos. Conseqüentemente, o segmento AB conterá $d_i = (n+m)$ vezes o segmento U_i e estará contido em $e_i = (n+m+2)$ desses segmentos.

Agora, querendo expressar as medidas $a_i b_i$ e $a_1' b_1'$ em função de U Lebesgue argumenta que basta separar por vírgula, i dígitos à direita de d_i e e_i. Para $i = 3$, podemos, por exemplo, encontrar que $d_i = 2835$ e $e_i = 2837$, isto significa que em relação à unidade U estas medidas serão respectivamente $d_i = 2{,}835$ e $e_i = 2{,}837$. Com este raciocínio, chega-se à regra de adição de números decimais.

A multiplicação para Lebesgue é uma questão de escolha de unidade. Assim, dada a medida de um segmento AB em termos de uma unidade U e dada a medida do segmento U em termos de uma unidade V, como determinar a medida de AB em termos da unidade V? Imaginando, por exemplo, que a medida de AB seja 25,473... vezes a unidade U e a medida de U seja 3,425... a unidade V, Lebesgue desenvolve o seguinte raciocínio:

Se $AB = 25{,}473...U$, então, em relação a U_2, por exemplo, AB mede $25{,}473...\times 10^2$, ou seja, $AB = 2547{,}3...U_2$. Portanto, AB contém 2547U_2 e está contido em 2548U_2. Analogamente, se $U = 3{,}425...V$, então, $U = 3{,}425...\times 10^2 V_2$, ou seja, $U = 342{,}5...V_2$ bem como, $U_2 = 342{,}5...V_4$. Portanto, U_2 contém 342V_4 e está contido em 343V_4.

Pode-se, então, dizer que o segmento AB contém um segmento Ab_2 formado de $2547 \times 342 V_4$, ou seja, $871074 V_4$ e está contido em um segmento Ab_2' formado de $2548 \times 343 V_4$, ou seja, $873964 V_4$ que são os valores aproximados de

AB, respectivamente, por falta e por excesso em relação à unidade V_4. Agora, se em Ab_2 e em Ab_2' separam-se os quatro dígitos decimais da direita, por uma vírgula, obtêm-se os valores aproximados de AB por falta e por excesso, em função da unidade V.

VI.3 ÁREAS

Para introduzir o conceito de área, começa discutindo o problema de ladrilhar diversas salas com ladrilhos quadrados e de mesmo tamanho. Baseado nessa atividade, pode-se avaliar qual das salas tem maior área, qual tem a menor área e quais têm áreas iguais, de acordo com a quantidade de ladrilhos utilizados em cada sala. Em seguida, Lebesgue tece a seguinte argumentação:

> Concebemos que esta questão prática e outras análogas tenham conduzido a noções matemáticas, como a comparação de um segmento a um segmento unitário levou às noções de comprimento e de número.[119] (LEBESGUE, 1935, p. 35).

Conforme o matemático (p. 36), desde que se conheça o processo que leva à determinação do comprimento de um segmento AB em função de um segmento unitário U, por um processo construtivo análogo chega-se à noção de área; para tanto, em primeiro lugar é necessário construir uma grade T que vai possibilitar a definição e determinação de áreas.

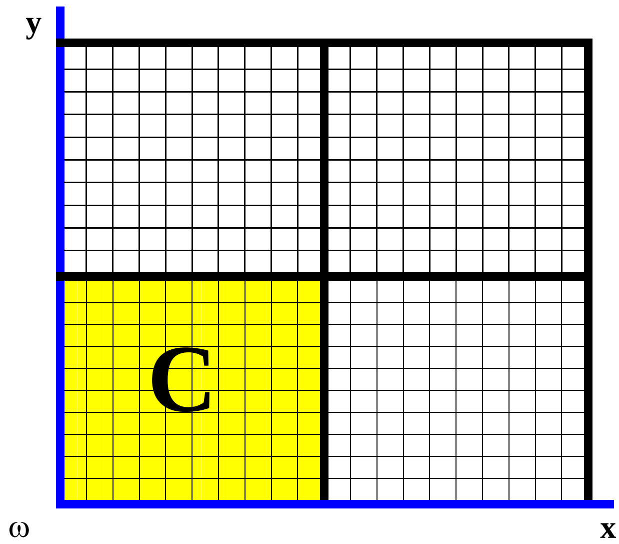
Como ilustrado pela Figura VI.6, para construir a grade T, Lebesgue (Ibid., p. 36) descreve o seguinte procedimento:

Em um plano, considera-se inicialmente um quadrado C com um dos vértices coincidindo com a intersecção de duas retas, ωx e ωy, perpendiculares entre si.

[119] On conçoit que cette question pratique et d'autres analogues ait conduit à des notions mathématiques, comme la comparaison d'un segment à un segment unité a conduit aux notions de longueur et de nombre.

Em seguida, marcam-se as linhas paralelas à reta ωx e à reta ωy cujas distâncias respectivas de ωx e ωy são múltiplos inteiros do lado do quadrado C, obtendo-se uma grade R composta de quadrados C que serão chamados de U.

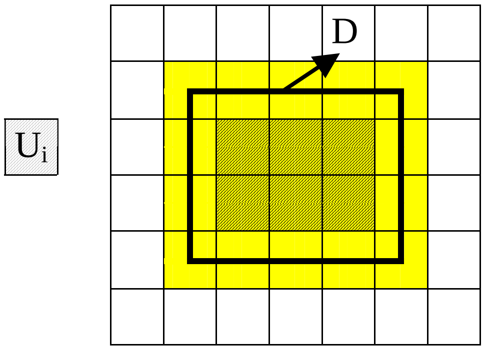
Dividindo-se, então, os lados desses quadrados em dez partes iguais, a partir dos pontos de divisão marcam-se as linhas paralelas a ωx e ωy, que dividem cada um dos quadrados C em 100 outros quadrados $U_1 = \frac{1}{100}U$, formando uma grade R_1 composta de quadrados U_1 e repetindo o processo, obtêm-se quadrados $U_2 = \frac{1}{100}U_1 = \frac{1}{100^2}U$, formando uma grade R_2 de quadrados U_2, depois uma R_3 de quadrados $U_3 = \frac{1}{100^3}U$ e, assim por diante. Todos estes quadrados produzidos formam a grade T que é usada por Lebesgue na definição e determinação de áreas.



Grade T derivada de C
Fig. VI.6

Sendo esta grade construída em um papel transparente e sendo dado um domínio D, sugere que se aplique a grade construída sobre D e que se conte quantos são os quadrados U_i que estão completamente contidos em D e quantos são os que contêm D (LEBESGUE, 1935, p. 36-37).

Imagina, então, que D contenha n_i quadrados U_i e que esteja contido em N_i desses quadrados, sendo n_i e N_i valores aproximados de D, respectivamente, por falta e por excesso. Veja o exemplo na Figura VI.7.



O retângulo D contém $6U_i$ e está contido em $20U_i$.
Neste caso, $6U_i$ e $20U_i$ são os valores aproximados, respectivamente, por falta e por excesso da área de D em relação à unidade U_i.

Fig. VI.7

Lebesgue argumenta que levando em consideração a construção da grade T descrita acima, quanto maior for i, mais os números n_i e N_i aproximam-se da área de D, de forma que os números

$$n \leq \frac{n_1}{100} \leq \frac{n_2}{100^2} \leq \frac{n_3}{100^3} \ldots$$

são no máximo iguais à área de D, e os números

$$N \geq \frac{N_1}{100} \geq \frac{N_2}{100^2} \geq \frac{N_3}{100^3} \ldots$$

são no mínimo iguais à área de D. Então, define a área de D da seguinte forma:

> *Quando essas duas seqüências são duas seqüências de valores indefinidamente próximos, quer dizer, quando* $\frac{(N_i - n_i)}{100^i}$ *tende para zero quando i aumenta indefinidamente, diz-se que o número definido por estas duas seqüências é a área de D em relação à unidade U.*[120] (LEBESGUE, 1935, p. 37)

[120] *Lorsque ces deux suites sont deux suites de valeurs indéfiniment approchées, c'est-à-dire lorsque* $\frac{(N_i - n_i)}{100^i}$ *tend vers zéro quand i augmente indéfiniment, on dit que le nombre défini par ces deux suites est l'aire de* D *par rapport à l'unité* U *.*

Ao ter construído a noção de área, antes de tratar de domínios gerais, Lebesgue trata das áreas de polígonos. Assim, a primeira atitude é provar que todo retângulo com lados paralelos a ωx e ωy tem uma área e que se sabe calculá-la. Estes retângulos representam os domínios mais simples e permitem uma analogia mais direta com o procedimento de comparação de segmentos descritos no capítulo anterior.

Para fazer a prova desejada, Lebesgue (1935, p. 37-38) considera um retângulo $OACB$ com o lado OA (de comprimento a) paralelo à ωx e o lado OB (de comprimento b) paralelo à ωy, conforme ilustrado na Figura VI.8.

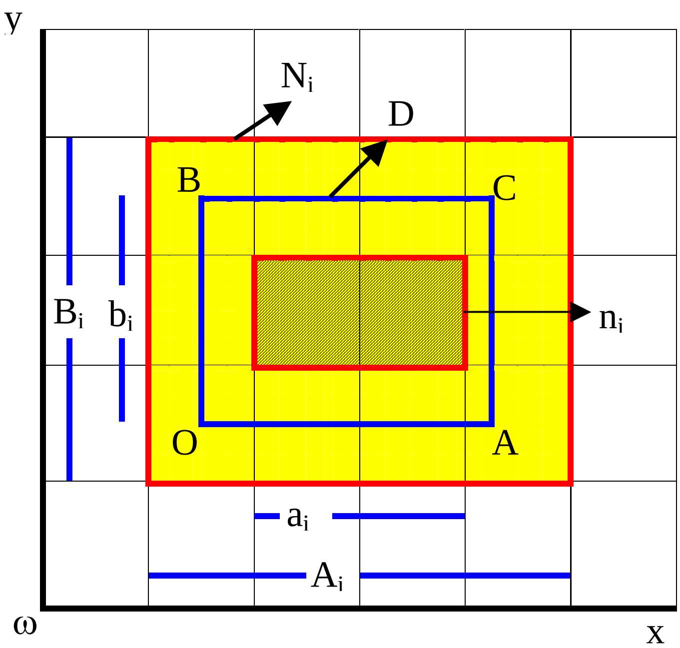


Fig. VI.8

Usando a definição de comprimento, já construída, $\frac{a_i}{10^i}$ e $\frac{A_i}{10^i}$ representam os valores aproximados de a por falta e por excesso respectivamente, da mesma forma que $\frac{b_i}{10^i} \leq b \leq \frac{B_i}{10^i}$. Então, a área do retângulo $OACB$ é um valor situado entre os números $\frac{n_i}{100^i} = \frac{a_i}{10^i} \times \frac{b_i}{10^i}$ e $\frac{N_i}{100^i} = \frac{A_i}{10^i} \times \frac{B_i}{10^i}$. Mas, levando em consideração que $\frac{(N_i - n_i)}{100^i}$ – soma das áreas dos quadrados que contêm a fronteira de $OACB$ – tende a zero, com i aumentando indefinidamente, as seqüências $\frac{n_i}{100^i}$ e $\frac{N_i}{100^i}$ são arbitrariamente próximas e definem o valor $a \times b$, que é a área do retângulo $OACB$, em função da unidade U.

Em seguida, mostra que todo polígono tem uma área (1935, p. 38-39). Neste caso, nem todos os lados do polígono ou nenhum deles são paralelos a ωx ou ωy, como ilustrado na Figura VI.9.

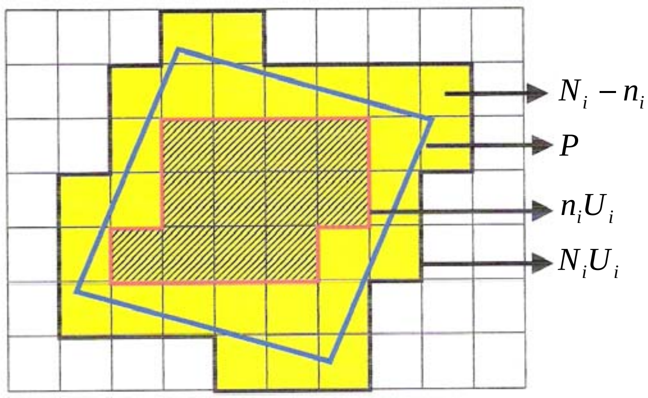


Fig. VI.9

Para provar que, nestes casos, a diferença $\frac{(N_i - n_i)}{100^i}$ – soma das áreas dos quadrados que contêm a fronteira do polígono – também tende a zero, para i aumentando indefinidamente e levando em consideração que um polígono tem um número finito de lados, Lebesgue precisou provar que $\frac{\mu_i}{100^i}$ tende a zero, sendo μ_i o número de quadrados U_i que contêm pontos de um segmento arbitrário AB. Para isso, usou o seguinte argumento:

Sendo AB um segmento que não é paralelo nem a ωx nem a ωy, considera um retângulo λ de dimensões a e b cujos lados paralelos a ωy

interceptam a reta AB em α e β, formando um segmento $\alpha\beta$ que contém o segmento AB, conforme ilustrado pela Figura VI.10a.

Os quadrados U_i que contêm pontos do segmento AB, estão entre os quadrados que contêm pontos do retângulo λ. Então, se existem N_i quadrados que contêm pontos de λ, o número $\frac{\mu_i}{100^i}$ é no máximo igual a $\frac{N_i}{100^i}$, ou seja, a soma das áreas dos quadrados que contêm o segmento AB é no máximo igual ao valor aproximado por excesso da área de λ. Para i suficientemente grande, esse valor aproximado excede a área de λ por um valor tão pequeno quanto se queira. Então, se a e b são os lados de λ, para i suficientemente grande, $\frac{\mu_i}{100^i}$ excede ab por um valor tão pequeno quanto se queira.

Em seguida, supondo que γ é o ponto médio do segmento $\alpha\beta$, este fica dividido em dois novos segmentos, $\alpha\gamma$ e $\gamma\beta$, para os quais Lebesgue repete o processo. Inicia, então, substituindo as figuras λ e $\alpha\beta$ pelas figuras semelhantes λ_1 e $\alpha\gamma$; λ_2 e $\gamma\beta$; λ_1 e λ_2 tendo dimensões $\frac{a}{2}$ e $\frac{b}{2}$, Figura VI.10b. Agora, para que um quadrado U_i contenha pontos de $\alpha\beta$, é necessário que contenha pontos de $\alpha\gamma$ ou pontos de $\gamma\beta$, portanto, para i suficientemente grande, $\frac{\mu_i}{100^i}$ excede a quantidade $\frac{a}{2}.\frac{b}{2}+\frac{a}{2}.\frac{b}{2}=\frac{ab}{2}$ por um valor tão pequeno quanto se queira.

Similarmente, uma nova divisão daria $\frac{ab}{2^2}$, Figura VI.10c, depois $\frac{ab}{2^3}$, e assim sucessivamente. Portanto, Lebesgue conclui que, para i suficientemente grande, $\frac{\mu_i}{100^i}$ pode ser tão pequeno quanto se queira.

Agora, no caso de um segmento AB ser paralelo a uma das retas ωx ou ωy, o retângulo formado terá base igual a AB e altura arbitrariamente pequena.

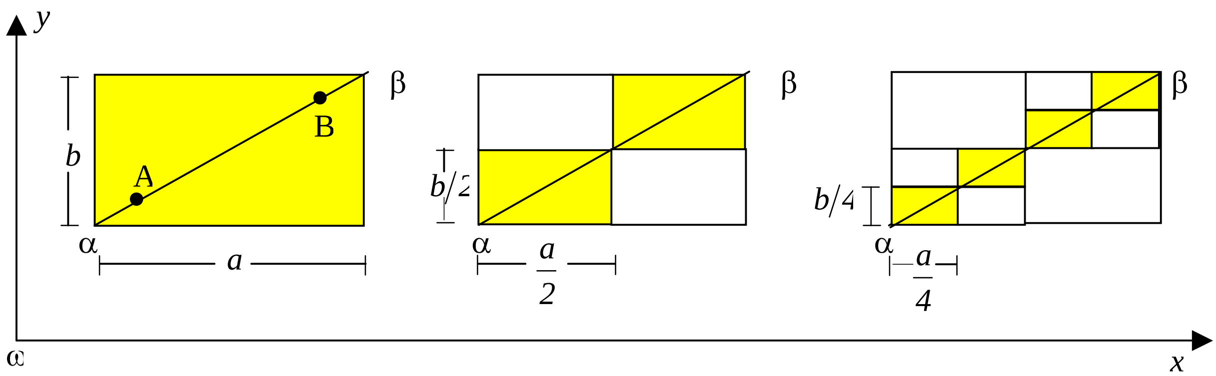


Fig. VI.10a **Fig. VI.10b** **Fig. VI.10c**

Lebesgue mostra também que: "*Se subdividirmos um polígono* P *em polígonos* $P_1, P_2, ..., P_m$*, teremos*: área de $P = \text{área de } P_1 + \text{área de } P_2 + ... + \text{área de } P_m$."[121] (LEBESGUE, 1935, p. 39).

O autor (Ibid., p. 40-41) discute, também, as condições necessárias e suficientes para que um domínio D tenha uma área. Para tanto, retoma o fato de que é necessário que o número $\frac{(N_i - n_i)}{100^i}$ tenda para zero, para i crescendo indefinidamente, de modo que o domínio D seja coberto por um polígono E – de área $\frac{N_i}{100^i}$, formado por N_i quadrados U_i – e que cubra polígonos I – formados por n_i quadrados U_i, cuja soma das áreas seja $\frac{n_i}{100^i}$. Então, enuncia que:

> [...] *para que um domínio D tenha uma área, é necessário que ele possa ser coberto por um polígono E e que ele cubra polígonos I, exteriores uns aos outros, de maneira que a área de E exceda a soma das áreas dos I de tão pouco quanto se queira. A recíproca é verdadeira.*[122] (Ibid., p. 40-41).

Assim explica que, para i suficientemente grande, os N'_i quadrados U_i – que cobrem o polígono E – têm uma área que excede a área de E por um valor arbitrariamente pequeno; e a área total de I excede a área dos n'_i quadrados U_i

[121] Si l'on subdivise un polygone P en polygones $P_1, P_2, ..., P_m$ on a: aire de $P = aire$ de $P_1 + aire$ de $P_2 + ... +$ aire de P_m.

[122] [...] *pour qu'un domaine D ait une aire, il faut qu'il puisse être couvert par un polygone E et qu'il couvre des polygones I, extérieurs les uns aux autres, et de manière que l'aire de E surpasse la somme des aires des I d'aussi peu qu'on le veut. La réciproque est vraie.*

– consistindo unicamente de pontos dos I – por um valor também arbitrariamente pequeno. Tem-se, então,

$$N_i' \geq N_i \geq n_i \geq n_i' .$$

$\dfrac{N_i' - n_i'}{100^i}$ – valor que excede a diferença entre a área de E e a área de I – é um valor tão pequeno quanto se queira. Como $\dfrac{N_i - n_i}{100^i}$ é menor que $\dfrac{N_i' - n_i'}{100^i}$, então, $\dfrac{N_i - n_i}{100^i}$ também é um valor tão pequeno quanto se queira. Por outro lado, a área de D está compreendida entre os valores das áreas de E e de I.

Posterior a isso, passa a observar quais são as outras premissas verdadeiras nesta construção. Como o conceito de medida concebido por Lebesgue é invariante com o grupo das transformações euclidianas, se D e Δ são dois polígonos congruentes, eles têm a mesma área. Para provar isto, considera os casos em que o polígono Δ é igual ao polígono D, ou Δ é gerado a partir de D por uma translação ou uma reflexão (LEBESGUE, 1935, p. 41-43).

Em se tratando da dimensão 1, se dois segmentos são congruentes, eles têm o mesmo comprimento e vice-versa. Já, na dimensão 2, o fato de figuras congruentes terem a mesma área, não significa que a recíproca seja verdadeira, pois, por exemplo, dois triângulos congruentes têm a mesma área, mas dois triângulos com a mesma área não são necessariamente congruentes. Este é um aspecto levantado por Lebesgue que difere o caso das áreas em comparação com o dos comprimentos.

Por fim, faz um exame da influência da mudança da unidade de comprimento, ou seja, a substituição de um quadrado C por um quadrado C' de tamanho diferente, na existência da área de um domínio D e em seu valor. Para tanto, usa um procedimento análogo ao que conduziu à multiplicação, veja VI. 2, e conclui que: a mudança de unidade de comprimento não interfere na existência de uma área e que “[...] *uma transformação por figuras semelhantes de razão* k*,* *transforma um domínio D, tendo uma área A, em um domínio D', tendo uma área AK^2.*"[123] (LEBESGUE, 1935, p. 43-44).

Com esse método, que chamou de método da grade, desenvolveu um procedimento construtivo. Iniciou pela construção do objeto teórico, no caso, a definição de área e passou a analisar quais as premissas que, realmente, foram usadas nessa construção, mostrando que elas são verdadeiras. Lebesgue (Ibid., p. 44), mesmo considerando a Matemática uma ciência experimental, acha importante demonstrar que as áreas são inteiramente determinadas pelas seguintes condições:

α) a área de uma domínio, deve ser um número não negativo.

β) a área formada por mais de um domínio, é a soma das áreas desses domínios.

γ) se dois domínios têm a mesma forma e o mesmo tamanho, eles têm a mesma área.

δ) o valor da área de um domínio pode ser conhecido quando se conhece a área associada à unidade de medida.

As propriedades α, β, γ constituem a definição axiomática de área que Lebesgue também chamava de método clássico e que, como ele mesmo dizia, é

> [...] livre do que havia de aparentemente, muito particular, o uso da grade T para definir esta área. A grade T representa na concepção de área, um papel análogo àquele da numeração decimal na concepção da noção geral de número.[124] (Ibid., p. 45).

Enunciados esses axiomas, deduz que de α, β, γ segue outra propriedade:

---

[123] [...] *une transformation par figures semblables de rapport k transforme un domaine D ayant une aire A, en un domaine D'ayante une aire Ak^2.*

[124] [...] débarrassée de ce qu'avait d'apparemment trop particulier l'emploi du réseau T pour définir cette aire. Le réseau T joue dans la conception de l'aire un rôle analogue à celui de la numération décimale dans la conception de la notion générale de nombre.

> [...] *dois polígonos que podem ser decomponíveis em polígonos iguais, ou seja, dois polígonos que resultam de dois arranjos diferentes das mesmas partes poligonais, têm a mesma área*.[125] (LEBESGUE, 1935, p. 45).

Em seguida, argumenta que esta propriedade é demonstrada, até mesmo, para o caso em que o domínio resulta de partes que possuem formatos arbitrários – desde que cada uma dessas partes tenha uma área – então, pode-se retornar à exposição clássica. Assim, ele diz que pode encontrar legitimamente, de modo habitual, a área de um paralelogramo, então, a de um triângulo e, como conseqüência, encontra-se a área de um polígono qualquer, uma vez que todo polígono pode ser decomposto em triângulos; resultado este que pode ser estendido a domínios não poligonais (Ibid., p. 45-46).

O autor lembra que

> Ordinariamente, admite-se que a noção matemática de área é claramente imposta por seu emprego prático e se usa mais freqüente implicitamente os axiomas α, β, γ; a única modificação significativa que introduzimos aqui é a demonstração de α, β e γ. Salvo menção dos pontos acessórios, não há, portanto, oposição entre a exposição clássica e aquela apresentada aqui, que é só logicamente mais completa.[126] (Ibid., p. 47).

Para Lebesgue, os dois procedimentos – método da grade e método axiomático – são equivalentes, pois seguem o mesmo caminho, mas argumenta que a exposição do método da grade que ele apresentou é mais completa que a clássica, pois, introduz a prova de α, β, γ. Ainda, enquanto o método clássico pode ser aplicado, especialmente, a polígonos, o seu método, por ser mais geral, pode ser aplicado a muitos outros domínios, além dos polígonos (Ibid., p. 50).

Em um comentário sobre a exposição clássica, Lebesgue (Ibid., p. 47) argumenta que esta exposição ajuda na determinação de áreas definidas por $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, mas δ não é tão importante para a teoria em geral, pois a estrutura da teoria é a mesma e só o valor da área depende da unidade, ou seja, se não se

---

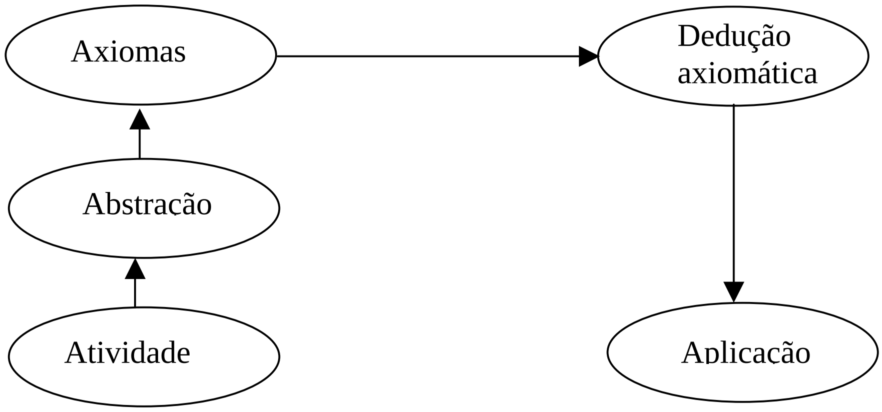
[125] [...] deux polygones qui sont décomposables en polygones égaux, c'est-à-dire deux polygones qui proviennent de deux arrangements différents des mêmes parties polygonales, ont la même aire.

[126] Ordinairement, on admet que la notion mathématique d'aire est clairement imposée par son empliu pratique et on utilize, le plus souvent implicitement, les axiomes α, β, γ ; la seule modification importante que nous ayons apportèe ici est la démonstration de α, β, γ . Sauf sur des points accessoires, il n'y a donc pas opposition entre l'exposé classique et celui d'ici que est seulement logiquement plus complet.

tem uma unidade escolhida, não se tem uma área, mas, uma vez escolhida a unidade, saberemos qual é a área. Em outras palavras, ele quer dizer que a exposição clássica possibilita calcular áreas quando estas existem.

Ao observar a exposição laboriosa que Lebesgue fez sobre área, tem-se uma visão do procedimento que adotou que se repete no tratamento de todos os assuntos abordados na obra *Sur la mesure des grandeurs*.

Desse modo, ilustramos o procedimento que desenvolveu pelo diagrama a seguir:



Lebesgue inicia o assunto (área) com uma situação concreta (método da grade); por meio dessa situação concreta, abstrai o conceito de área e busca as características essenciais que determinam as áreas. Estas características essenciais são, então, enunciadas como axiomas, assim o conceito de área está definido em termos axiomáticos. Com base nesses axiomas, deduz outras características das áreas e faz a verificação ou aplicação do assunto.

O matemático puro tem a tendência de se limitar ao método axiomático, passando rapidamente pelo processo de abstração, sem se preocupar com a aplicação. Lebesgue, diferentemente, considera importante o processo como um todo. Ele visa a aplicação e, nesse sentido, a abstração é essencial; prova disso é a teoria da integração criada por ele que requer elevado grau de abstração. Por isso, ele diz que a Matemática pura tem origem na Matemática aplicada.

O método axiomático, não é norteado pela existência ou pela construção do objeto matemático. Nesse método, o essencial é uma intuição do que é, por exemplo, uma área, que é completamente definida em termos das premissas.

Por isso, considerando o desenvolvimento da Matemática como um processo de matematização, ele acha que a apresentação axiomática deveria ser abordada por último. Em detalhes, escreveu o seguinte:

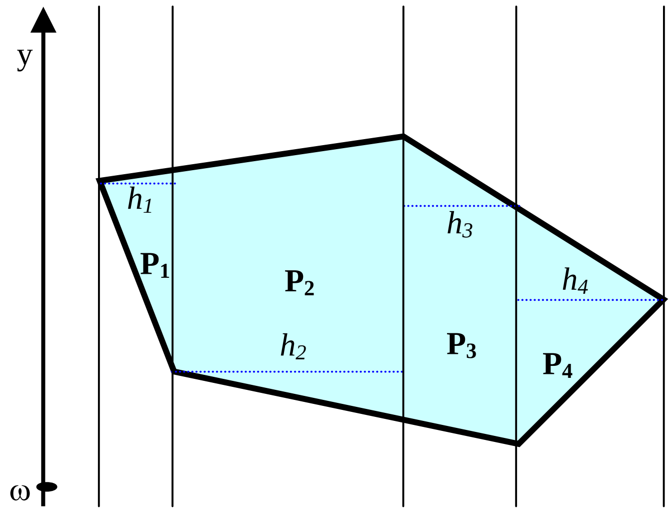
> De fato, a ordem que nós seguimos é, exatamente, a que se segue sempre quando se tem de traduzir matematicamente uma noção concreta: começa-se por utilizar *tudo* o que a experiência vos ensinou sobre a noção; então, quando se consegue construir uma primeira definição matemática, pode-se propor a clarificá-la fixando exatamente o que foi utilizado com razão. A axiomática se faz por ultimo, quando o principal já foi tratado. Mas então, ela fixa exatamente o valor do resultado obtido, prepara as generalizações, etc.[127] (LEBESGUE, 1935, p. 50).

Apresentados os métodos da grade e o axiomático (ou clássico), bem como as observações sobre os mesmos, Lebesgue julga pertinente apresentar uma outra teoria das áreas, que julga digna de nota, que é o método prático do agrimensor, finito e aplicável somente a polígonos. Neste método, como o autor explica (Ibid., p. 50-52), procede-se, como segue:

α) sendo dado um polígono qualquer P, marca-se, no mesmo plano de P, uma direção ωy. Por linhas paralelas a ωy, que passam pelos vértices de P, decompõe-se P em trapézios[128] de bases B_i e b_i, e alturas h_i. Veja Figura VI.11. Assim, associa-se a cada P um número $\frac{1}{2}(B_1+b_1)h_1+\frac{1}{2}(B_2+b_2)h_2+...$

[127] En fait, l'ordre que nous avons suivi est exactement celui que l'on suit toujours quand on a à traduire mathématiquement une notion concrète: on commence par utiliser *tout* ce que l'expérience vous a appris sur la notion; puis, quand on a réussi à construire une première définition mathématique, on peut se proposer de l'épurer en fixant exactement ce qui a été utilisé avec raison. L'axiomatique se fait en dernier, quand le princípal a déjà été traité; mais alors, elle fixe exactement la valeur du résultat obtenu, en prépare les généralisations, etc.

[128] O triângulo é considerado um tipo particular de trapézio em que uma das bases vale zero.



$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$

Fig. VI.11

β) Dado um trapézio T, cujas bases são paralelas à direção ωy, decompondo T em T_1 e T_2, por exemplo, por uma secante que passa pelas bases do trapézio original, o número associado ao trapézio T será a soma dos números associados às Figuras T_1 e T_2, veja exemplo Figura VI.12.

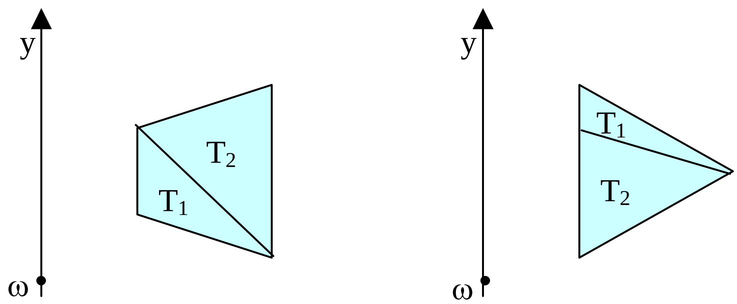


Fig. VI.12

Outro caso particular que Lebesgue comenta, é aquele no qual T é dividido em T_1 e T_2 por uma secante DE paralela às bases. Então, pelo caso anterior, pode-se assumir que T é um triângulo ABC com base BC paralela à ωy. Como exemplo, veja Figura VI.13.

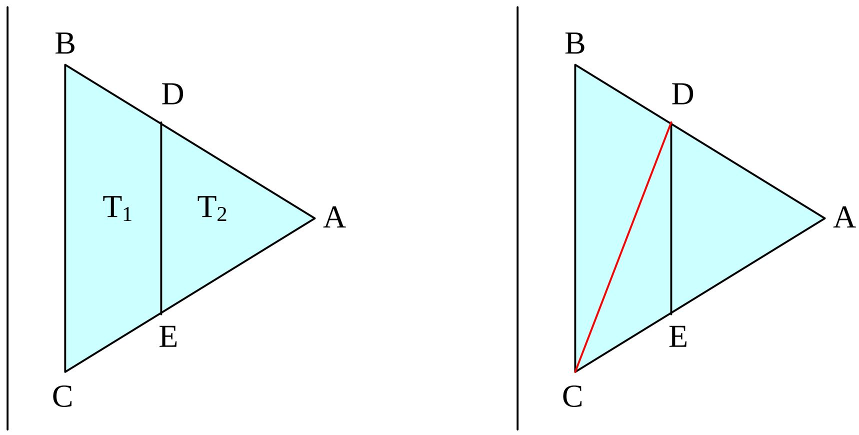


Fig. VI.13

A área do triângulo ABC é $\frac{1}{2}BC \cdot dist(A, BC)$ ou $\frac{1}{2}AB \cdot dist(C, AB)$. Agora:

$$\frac{1}{2}AB \cdot dist(C, AB) = \frac{1}{2}AD \cdot dist(C, AD) + \frac{1}{2}DB \cdot dist(C, DB)$$

$$\frac{1}{2}AB \cdot dist(C, AB) = \frac{1}{2}AC \cdot dist(D, AC) + \frac{1}{2}BC \cdot dist(D, BC)$$

$$\frac{1}{2}AB \cdot dist(C, AB) = \left[\frac{1}{2}AE \cdot dist(D, AE) + \frac{1}{2}EC \cdot dist(D, EC)\right] + \frac{1}{2}BC \cdot dist(D, BC)$$

$$\frac{1}{2}AB \cdot dist(C, AB) = \frac{1}{2}AE \cdot dist(D, AE) + \left[\frac{1}{2}DE \cdot dist(C, DE) + \frac{1}{2}BC \cdot dist(D, BC)\right]$$

$$\frac{1}{2}AB \cdot dist(C, AB) = \frac{1}{2}AE \cdot dist(D, AE) + \frac{1}{2}(ED + BC) \cdot dist(D, BC)$$

Então:

$$\frac{1}{2}AB \cdot dist(C, AB) = \textit{área do } \Delta_1 + \textit{área trapézio} = \textit{área } T_2 + \textit{área } T_1$$

Posteriormente, Lebesgue considera o caso geral de um polígono P dividido em dois polígonos P_1 e P_2, exemplificado pela Figura VI.14. Para determinar os números $(P), (P_1)$ e (P_2) para estes polígonos, usa as decomposições feitas pelas linhas paralelas à ωy passando pelos vértices dos três polígonos.

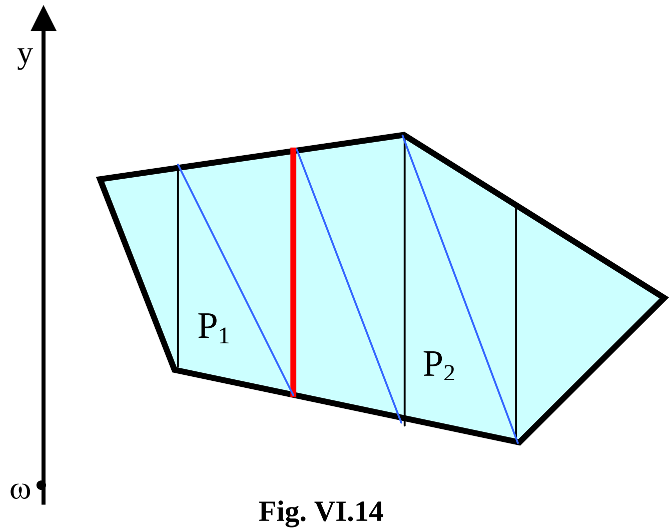


Fig. VI.14

Examinando as construções de $(P), (P_1)$ e (P_2), pelo primeiro caso particular, tem-se que $(P) = (P_1) + (P_2)$. Para provar a proposição (γ), Lebesgue argumenta que é suficiente determinar a área do triângulo ABC. Se um dos lados do triângulo é paralelo à ωy, a área do triângulo é conhecida. Mas, se o triângulo não tem nenhum lado paralelo a ωy, por um vértice C, como exemplificado na Figura VI.15, pode-se traçar um segmento paralelo à ωy que divide o triângulo ABC em dois outros triângulos, ACD e BCD, obtendo-se, então:

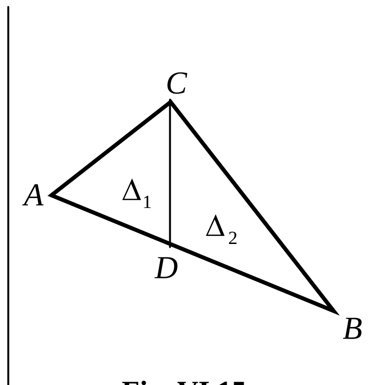


Fig. VI.15

$$\text{Área } ABC = \text{área } \Delta_1 + \text{área } \Delta_2 = \frac{1}{2} CD \cdot dist(A, CD) + \frac{1}{2} CD \cdot dist(B, CD)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{1}{2} AD \cdot dist(C, AD) + \frac{1}{2} BD \cdot dist(C, BD)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{1}{2} AB \cdot dist(C, AB).$$

Ao analisar os três procedimentos a que se referiu – método da grade, método axiomático e método do agrimensor – Lebesgue (1935, p. 52) argumenta que qualquer um deles poderia ser ensinado na escola. No entanto, acredita que o primeiro seria, sem dúvida, muito extenso e complicado aos alunos. Já, os dois últimos seriam mais acessíveis, mas acha que os alunos teriam muita dificuldade de entender a importância da prova de α, β, γ, visto que elas surgem depois deles já terem usado, muitas vezes, seus resultados. Mas independente da escolha, o importante é não dizer nada que não seja estritamente verdadeiro sobre a exposição adotada. Ele argumenta que o professor deveria ser bem informado, conhecer as diferentes exposições e comparar cuidadosamente o que era dado e o que deveria ser dado, se se quisesse provar tudo, pois a falta desse conhecimento e dessa comparação leva alguns professores a cometer erros.

Como exemplo, ele lembra que para resolver o problema das áreas referentes a retângulos, argumentava-se que eram suficientes os procedimentos clássicos, que levavam a transformar cada retângulo R em um retângulo ρ, no qual uma das dimensões era a unidade e a outra o valor que dá a área de R. Para Lebesgue (Ibid., p. 52-53), certamente, esta é uma maneira de definir a área de um retângulo, mas não é óbvio que procedimentos diferentes dos clássicos não proporcionassem um retângulo ρ, também, associado ao retângulo R, tendo, contudo, área diferente.

Para tornar a questão mais precisa, Lebesgue (Ibid., p. 53-55) apresenta a última exposição sobre área, que trata da equivalência por decomposição finita. Nesse caso, dois polígonos são ditos finitamente equivalentes, se é possível decompor cada um em um mesmo número finito de triângulos, dois a dois congruentes. O autor mostra que, por equivalência finita, todo triângulo é transformado em um retângulo ρ, disso segue que qualquer polígono é finitamente equivalente a um retângulo formado por um número finito de tais retângulos ρ correspondendo aos triângulos, nos quais o polígono pode ser decomposto. Mas explica que esse processo não corresponde a uma teoria completa sobre áreas, pois não prova que a área obtida é única, ou seja, independente das áreas dos triângulos resultantes das decomposições.

Lebesgue comenta que dois polígonos podem ser transformados um no outro por equivalência finita somente quando eles têm áreas iguais. Acrescenta que esta condição é suficiente no caso de dois paralelogramos, daí segue que é suficiente para quaisquer dois polígonos e pode-se mostrar que, se isso for possível para satisfazer α, β e γ, o número área é determinado de acordo com δ.

Conclui que a teoria – equivalência por decomposição finita – sobre áreas é exatamente equivalente à teoria clássica e, embora seja mais elegante que a teoria clássica apresenta a desvantagem de não poder ser aplicada aos volumes, pois dois poliedros com o mesmo volume não podem, em geral, ser transformados um no outro por equivalência finita. Da mesma forma que a exposição clássica, esta teoria apóia-se em α, β e γ, prova δ e dá a determinação de áreas de polígonos. Mas, para completar essa teoria, como acrescenta Lebesgue, é necessário provar α, β e γ usando, por exemplo, um dos três processos anteriores que ele apresentou.

Posterior a isso, Lebesgue discute sobre áreas limitadas por arcos circulares e áreas de regiões mais gerais e conclui que:

> Sempre, em matemática, o ponto de partida inicial é concreto; a língua também é concreta, geométrica o mais freqüentemente. Isto é favorável à imaginação; muito favorável mesmo porque a realidade é muito rica; muitas das observações requerem atenção. Também, os primeiros argumentos têm apenas um alcance muito limitado porque constituem um estado de muitas dessas observações particulares. Pouco a pouco, isolamos cada questão das outras, discernimos o que é essencial em cada uma, os argumentos tornam-se mais gerais ao mesmo tempo que a língua torna-se mais analítica e abstrata. Este abstrato não é destituído de conteúdo, ao contrário, a língua tornou-se abstrata apenas para ser mais imediatamente aplicável a um maior número de situações reais.[129] (LEBESGUE, 1935, p. 63).

[129] Toujours, en mathématiques, le point de départ initial est concret, le langage aussi est concret, géométrique le plus souvent. Ceci est favorable à l'imagination; trop favorable même car la réalité est très riche; trop de remarques sollicitent l'attention. Aussi les premiers raisonnements n'ont-ils qu'une portée très limitée car ils font état de beaucoup de ces remarques particulières. Peu à peu on isole chaque question des autres, on discerne ce qui est essentiel pour chacune, les raisonnements deviennent plus généraux en même temps que le langage devient plus analytique et abstrait. Cet abstrait n'est pas vide de contenu, bien au contraire le langage n'est devenu abstrait que pour être plus immédiatement applicable à des réalités plus nombreuses.

Para ele, esse tipo de estudo comparativo crítico de diferentes métodos de apresentar fatos matemáticos é indispensável ao progresso pedagógico, pois “[...] são necessários para bem escolher o que devemos dizer e bem saber porque o dizemos, eles são, portanto, um excelente exercício pedagógico, que deveria ser exigido dos futuros professores.”[130] (LEBESGUE, 1935, p. 177-178).

VI.4 GRANDEZAS MENSURÁVEIS

Lebesgue inicia a discussão sobre noção de grandezas mensuráveis, lembrando que medidas de grandezas é um capítulo que, na época fazia parte do programa, tanto na classe da sexta (que corresponde ao 5º ano escolar) como na última classe do ensino secundário ou classe de matemática (que corresponde ao 11º ano escolar – 1º ano de faculdade) e deveria receber tratamento diferenciado em cada momento.

No quinto ano, o assunto deveria ser trabalhado envolvendo a noção de fração de modo puramente experimental e no 11º, seria trabalhado de forma abstrata. Lebesgue, então, não percebia nenhum problema quanto ao trabalho que de fato era desenvolvido no primeiro momento. No entanto, observa que no 11º ano escolar (cujos programas de Matemática eram reservados para estudantes que desejavam prosseguir seus estudos científicos) “[...] as dificuldades são consideráveis, de modo que é possível se escamotear pura e simplesmente o capítulo ou repassar exatamente o mesmo ponto de vista pré-lógico que na classe de sexta”[131], deixando de lado as noções abstratas (Ibid., p. 128).

Apesar da grande importância do assunto, afirma que os professores iniciavam-no sem apresentar nenhuma definição lógica de grandeza, como se os alunos já tivessem adquirido esta noção pelas suas práticas diárias, bem como

[130] [...] sont nécessaires pour bien choisir ce que l’on doit dire et bien savoir pourquoi on le dit, elles sont donc un excellent exercice pédagogique qui devrait être exigé des futurs professeurs.
[131] [...] les difficultés sont considérables, si bien qu’il arrive qu’on escamote purement et simplement le chapitre ou qu’on se replace exactement au même point de vue prélogique que dans la classe de Sixième.

conhecimentos físicos e bom senso, como se o problema fosse apenas fazer conhecer a denominação. Conforme observa:

> Na prática, os professores não dão nenhuma definição; eles indicam os exemplos de grandezas: superfícies, volumes, pesos, quantidades de calor e exemplos de noções que não são grandezas: velocidades, temperaturas, potenciais, etc.[132] (LEBESGUE, 1935, p. 128).

O autor argumenta que, para tornar o conceito de grandeza logicamente preciso, deve-se vencer uma dificuldade

> [...] inteiramente metafísica e de mesma natureza que aquela encontrada para o número. Do mesmo modo que se recomendava não confundir o número e o símbolo que o representa, deseja-se distinguir entre grandeza e número medindo a grandeza, deseja-se, mesmo, servir-se da grandeza para ampliar a noção de número, chegar às frações e aos números mais gerais. Trata-se, portanto, de definir o comprimento, a superfície, o volume ou, mais exatamente, uma noção compreendendo comprimento, superfície, volume, sem falar de número.[133] (Ibid., p. 129).

Então, observa que duas atitudes são possíveis:

> [...] ou bem nos refugiamos na Metafísica, ou bem recomeçamos a definir, por ocasião das grandezas, a igualdade, a soma, o produto, etc. Em resumo, refaz-se a teoria do número sem ousar pronunciar esta palavra. Conhece-se bem esta segunda atitude, é aquela que eu já fiz alusão várias vezes e que se utiliza, por exemplo, quando se fala da razão de dois segmentos considerada como não sendo um número.
>
> Da primeira, nós temos uma manifestação bem curiosa na recomendação feita por G. Darboux, este eminente geômetra, a J. Tannery, este espírito crítico tão aguçado: tentar "extrair tudo o que se poderia da velha definição *uma grandeza é tudo o que é susceptível de aumento e de diminuição.*"[134] (Ibid., p. 129).

---

[132] Dans la pratique, les professeurs ne donnent aucune définition; ils indiquent des exemples de grandeurs: surfaces, volumes, poids, quantités de chaleur et des exemples de notions qui ne sont pas des grandeurs: vitesses, températures, potentiels, etc.

[133] [...] tout métaphysique et de même nature que celle rencontrée pour le nombre. De même qu'on recommandait de ne pas confondre le nombre et le symbole qui le représente, on veut distinguer entre grandeur et nombre mesurant la grandeur, on veut nême se servir de la grandeur pour élargir la notion de nombre, arriver aux fractions et aux nombres plus généraux. Il s'agit donc de définir la longueur, la surface, le volume, ou plus exactement une notion comprenant longueur, surface, volume, sans parler de nombre.

[134] [...] ou bien on se réfugie dans la Métaphysique; ou bien on recommence à définir à l'occasion des grandeurs l'égalité, la somme, le produit, etc., bref, on refait la théorie du nombre sans oser prononcer ce mot. On connaît bien cette seconde attitude, c'est celle à laquelle j'ai déjà fait plusieurs fois allusion et qu'on utilize, par exemple, quand on parle du rapport de deux segments considéré comme n'étant pas un nombre.

De la première, nous avons une manifestation bien curieuse dans la recommandation faite par G. Darboux, ce géomètre éminent, à J. Tannery, cet esprit critique si aiguisé: essayer «de tirer tout ce que l'on pouvait de la vieille définition *une grandeur est tout ce qui est susceptible d"augmentation et de diminution*».

O autor acrescenta, então, que para desenvolver um estudo sobre teoria das grandezas, não é possível pensar em grandeza, como tudo o que é passível de aumentar ou diminuir, pois:

> Assim, seria preciso criar uma teoria que se aplicasse, ao mesmo tempo aos volumes e à ambição, à temperatura e ao apetite, ao orçamento do Estado, à fertilidade do solo, à inteligência, ao nível do rio Sena, ao espanto, etc., e, em particular, à grandeza do número que mede uma grandeza. Vale dizer que a verdadeira dificuldade seria encontrar qualquer coisa que não pertencesse à categoria das grandezas que não seja, sob alguma consideração, suscetível nem de aumento, nem de diminuição.[135] (LEBESGUE, 1935, p. 129).

Quanto ao significado atribuído ao termo grandeza, pelos matemáticos da época, Lebesgue faz a seguinte avaliação:

> [...] certamente, a palavra grandeza é correntemente usada pelos matemáticos num sentido muito geral e muito amplo: é possível que todo número seja denominado grandeza e, isto ainda não sendo suficiente, junto a essas grandezas escalares considera-se outras grandezas cujas grandezas vetoriais são as mais simples; mas, quando se fala de teoria das grandezas, a palavra grandeza tem um sentido mais restrito.[136] (Ibid., p. 129).

Portanto, na concepção do autor, para que um estudo sobre grandezas fosse possível, seria preciso restringir o significado de tal palavra e, então, faz a seguinte argumentação: "Para evitar as confusões, se tem imaginado denominações, tais como: grandeza diretamente mensurável; somente seria necessário precisar à que se aplicam tais denominações."[137] (Ibid., p. 130).

O autor afirma que, usualmente, grandeza diretamente mensurável é aquela que permite que se fale de igualdade e soma. Neste sentido, uma

---

[135] Ainsi, il faudrait créer une théorie qui s'appliquerait à la fois aux volumes et à l'ambition, à la température et à l'appétit, au budget de l'Etat, à la fertilité du sol, à l'intelligence, au niveau de la Seine, à l'étonnement, etc., et en particulier à la grandeur du nombre qui mesure une grandeur. Autant dire que la vraie difficulté serait de trouver quelque chose qui n'appartienne pas à la catégorie des grandeurs qui ne soit, à aucun égard, susceptible ni d'augmentation, ni de diminution.

[136] [...] certes, le mot grandeur est couramment employé par les mathématiciens dans des sens très généraux et très divers: il arrive que tout nombre soit dénommé grandeur et, cela n'étant pas encore suffisant, à côté de ces grandeurs scalaires on considère d'autres grandeurs dont les grandeurs vectorielles sont les plus simples; mais, quand on parle de théorie des grandeurs, le mot grandeur a un sens plus restreint.

[137] Pour éviter les confusions, on a imaginé des dénominations telles que: grandeur directement mesurable; seulement il faudrait préciser à quoi s'applique de telles dénominations.

grandeza é qualquer "[...] ser matemático para o qual a adição teria sido definida"[138] (LEBESGUE, 1935, p. 130; 136).

Assim, exemplifica as massas como pertencentes a esta categoria de grandezas, pois é possível falar de massas iguais e de massa que é soma de outras massas. Já, como um exemplo de grandeza que não pertence à categoria das grandezas diretamente mensuráveis, ele cita as temperaturas, pois, embora se possa falar de temperaturas iguais, não é possível falar de temperaturas, como sendo a soma de outras temperaturas, isto porque a soma de duas temperaturas não tem um significado físico (Ibid., p. 130). Podemos exemplificar esta argumentação do autor, dizendo que: o fato de juntar em um mesmo recipiente dois líquidos, um com 50ºC e o outro com 60ºC não fará com que a temperatura passe a ser 110ºC.

Para Lebesgue, a dificuldade em relação ao estudo da teoria das grandezas era conseqüência de uma atitude que priorizava a metafísica. Argumenta, então, que não é o matemático que deve se ocupar dos problemas metafísicos e, sim, os filósofos. Assim, sugere uma mudança de atitude pelo ensaio dos métodos já empregados nos casos dos números, dos comprimentos, das áreas, dos volumes e justifica:

> [...] nós renunciamos à distinção entre número metafísico associado a uma coleção e o símbolo que o representa, entre o comprimento metafísico, o número metafísico que o mede, o símbolo que representa esse número, e do mesmo modo para as áreas e volumes; nós buscamos definir diretamente os números símbolos, únicos importantes em matemática, deixando a outros o cuidado de se ocupar de problemas metafísicos que não são de nossa competência.[139] (Ibid., p. 131).

Para Lebesgue (Ibid., p. 131), "comprimentos, áreas e volumes" são exemplos perfeitos de grandezas, deve-se, então, buscar os aspectos comuns a cada uma dessas noções. Portanto, orienta para que grandezas, em geral, sejam trabalhadas depois de se ter discutido, pelo menos, uma dessas noções.

---

[138] [...] être mathématique pour lequel l'addition aurait été définie.

[139] [...] nous avons renoncé à la distinction entre le nombre métaphysique attaché à une collection et le symbole que le représente, entre la longueur métaphysique, le nombre métaphysique qui la mesure, le symbole qui représente ce nombre, et de même pour les aires et volumes; nous avons cherché à définir directement les nombres symboles, seuls importants en mathématiques, laissant à d'autres le soin de s'occuper des problèmes métaphysiques qui ne sont pas de notre compétence.

Na exposição sobre áreas, já abordada, com o desenvolvimento de alguns procedimentos, Lebesgue mostra que as áreas são estabelecidas pelas seguintes propriedades: α) a área de uma domínio deve ser um número não negativo; β) a área de um domínio D formado por mais de um domínio é a soma das áreas desses domínios; γ) se dois domínios têm a mesma forma e o mesmo tamanho, eles têm a mesma área e δ) o valor da área de um domínio pode ser conhecido quando se conhece a área associada à unidade de medida. Estas propriedades são comuns também às grandezas comprimento e volume e constituem suas definições axiomáticas.

Considerando que massas físicas também são exemplos perfeitos de grandezas e de posse das propriedades comuns às grandezas acima mencionadas, Lebesgue passa a discutir quais dessas propriedades podem ser transportadas aos casos das massas, para possibilitar uma definição de grandeza associada a estas.

Das propriedades α) e δ), tem-se que as medidas de comprimento, área e volume são "[...] definidas como números positivos associados a entidades geométricas e perfeitamente definidos por estas entidades pela escolha de uma unidade; [...]"[140] (LEBESGUE, 1935, p.131). Estas propriedades também são aplicadas às massas e ele enuncia a primeira parte da definição pretendida, da seguinte forma:

> a) *Uma família de corpos sendo dada, diz-se que se definiu para estes corpos uma grandeza G se, a cada um deles e a cada parte de cada um deles, associou-se um número positivo determinado.*[141] (Ibid., p. 132).

Quanto à propriedade γ), Lebesgue (Ibid., p. 132) lembra que não pode ser estendida ao caso das massas, pois, o fato de dois corpos terem a mesma forma e o mesmo tamanho, não garante que tenham a mesma massa. Já, a propriedade β) ele argumenta que é estendida às massas e, então, enuncia a segunda parte da definição:

---

[140] [...] définis comme des nombres positifs attachés à des êtres géométriques et parfaitement définis par ces êtres, au choix de l'unité près; [...]

[141] a) Une famille de corps étant donnée, on dit qu'on a défini pour ces corps une grandeur G si, à chacun d'eux et à chaque partie de chacun d'eux, on a attaché un nombre positif déterminé.

> *b) Se dividimos um corpo C em um certo número de corpos parciais $C_1, C_2, ..., C_p$, e, se para estes corpos a grandeza G é g de um lado e $g_1, g_2, ..., g_p$ de outro, devemos ter $g = g_1 + g_2 + ... + g_p$.*[142] (LEBESGUE, 1935, p. 132).

Desta forma, mostra duas condições necessárias para definir uma grandeza diretamente mensurável, isto é: a possibilidade de falar da igualdade e da soma de duas grandezas.

Quanto ao termo "corpo", inicialmente, usado com um caráter impreciso, Lebesgue esclarece que:

> [...] em geometria ou em física teórica, poder-se-ia precisar o sentido lógico dado a esta palavra. Em geometria, em particular, poder-se-ia dar à palavra "corpo" um sentido mais ou menos amplo, por exemplo o de conjunto ou de figura; somente será necessário, em cada caso, definir o que se chamará uma partição da figura total em partes. Mesmo, a grandeza poderia não ser associada a dados de natureza geométrica, mas a dados de natureza mais variada. Aqui, o exame de corpos assimiláveis geometricamente a domínios cortados no espaço, ou sobre superfícies, ou sobre curvas nos será suficiente.[143] (Ibid., p. 133).

Lebesgue (Ibid., p. 130-133) também discute a respeito da condição de proporcionalidade e apresenta uma demonstração da propriedade, assim, enunciada:

> *Duas grandezas G e G_1 são definidas para a mesma família de corpos se, para todos os corpos para os quais G tem um mesmo valor qualquer g, G_1 tem um mesmo valor g_1, entre g e g_1 existe a relação $g_1 = kg$, k sendo uma constante*[144].(Ibid., p. 133).

Pela necessidade de usar a decomposição de corpos em corpos parciais para demonstrar a propriedade da proporcionalidade e pelo fato de tal

---

[142] b) Si l'on divise un corps C en un certain nombre de corps partiels $C_1, C_2, ..., C_p$, et si la grandeur G est, pour ces corps, g d'une part, $g_1, g_2, ..., g_p$ d'autre part, on doit avoir: $g = g_1 + g_2 + ... + g_p$.

[143] [...] en géométrie ou en physique théorique, on pourrait préciser les sens logique donné à ce mot. En géométrie, en particulier, on pourra donner au mot corps un sens plus ou moins large, par exemple celui d'ensemble ou de figure; seulement il faudra, dans chaque cas, avoir défini ce qu'on appellera un portage de la figure totale en parties. Même, la grandeur pourrait ne pas être attachée à des données de nature géométrique mais à des données de nature plus variée. Ici, l'examen des corps assimilables géométriquement à des domaines découpés dans l'espace, ou sur des surfaces, ou sur des courbes nous suffira.

[144] Lorsque deux grandeurs G et G_1 sont définies pour la même famille de corps si, pour tous les corps pour lesquels G a une même valeur quelconque g, G_1 a une même valeur g_1, entre g e g_1 existe la relation $g_1 = kg$, k étant une constante.

decomposição não ter surgido das condições a) e b), Lebesgue julga conveniente acrescentar uma condição suplementar, assim formulada:

> *c) A família de corpos para os quais é definida uma grandeza deve ser suficientemente rica para que todo corpo da família possa ser reduzido a um ponto por diminuições sucessivas, sem sair da família e de maneira que no decorrer dessas diminuições a grandeza decresça continuamente de seu valor primitivo para zero.*[145] (LEBESGUE, 1935, p. 134).

Lebesgue argumenta que

> [...] no que concerne à área, os polígonos planos constituem uma tal família de corpos. A família mais ampla de domínios, que chamamos de domínios mensuráveis, satisfaz também à condição c) para a grandeza área. A necessidade de uma condição tal como c) aparece assim em relação com as dificuldades que nos obrigaram a nos limitarmos a alguns domínios para o estudo da área ou do volume.[146] (Ibid., p. 134-135).

Quando duas grandezas são definidas para a mesma família de corpos e o valor de um g determina outro g_1, argumenta que as duas grandezas são proporcionais. Isto significa que g_1 é uma função de g, ou seja, $g_1 = f(g)$ e é dada por $g_1 = kg$, sendo k uma constante. Assim, conclui que

> *Não existe, portanto, grandezas inversamente proporcionais com o sentido preciso que demos à palavra grandeza,* nem grandezas dependendo uma da outra de outro modo que proporcionalmente. Claro que dois números podem ser relacionados de outro modo, que proporcionalmente, mas, então, um ao menos, dentre eles, não é uma grandeza; se todos os dois são grandezas, a relação se reduz à proporcionalidade.[147] (Ibid., p. 136-137).

VI.5 INTEGRAÇÃO E DIFERENCIAÇÃO

Lebesgue (1935, p. 141-142), inicia este assunto, lembrando que a teoria das grandezas foi organizada por Cauchy em virtude dos trabalhos destinados a esclarecer as noções de área, volume e medida, mas foi a necessidade de

---

[145] c) La famille des corps pour lesquels est définie une grandeur doit être assez riche pour que tout corps de la famille puisse être réduit à un point par diminutions successives, sans sortir de la famille et de manière qu'au cours de ces diminutions la grandeur décroisse continuement de sa valeur primitive à zéro.

[146] [...] en ce qui concerne l'aire, les polygones plans forment une telle famille de corps. Que la famille plus vaste de domaines que nous avons appelés les domaines quarrables satisfait aussi à la condition c) pour la grandeur aire. La nécessité d'une condition telle que c) apparaît ainsi en relation avec les difficultés qui nous ont oblegés à nous restreindre à certains domaines pour l'étude de l'aire ou du volume.

[147] *Il n'existe donc pas de grandeurs inversement proportionnelles avec le sens précis que nous avons donné au mot grandeur,* ni de grandeurs dépendant l'une de l'autre d'une autre façon que proportionnellement. Bien entendu deux nombres peuvent être liés autrement que proportionnellement, mais alors l'un au moins d'entre eux n'est pas une grandeurs; si tous deux sont des grandeurs, la relation se réduit à la proportionnalité.

integrar funções mais gerais que definitivamente a edificou. Para ele, "ter fornecido esta teoria elementar das grandezas será talvez, depois de tudo, o mais substancial dos resultados dos trabalhos sobre a integração de funções descontínuas."[148]

Nesta obra, Lebesgue afirma que a abordagem que faz sobre as operações de integração e de derivação é influenciada pela teoria das grandezas, e inicia a discussão sobre as mesmas, da seguinte maneira:

> [...] entre os números considerados pelos físicos, alguns estavam associados a pontos e outros a corpos estendidos, originando duas noções matemáticas: funções de uma ou várias variáveis, grandezas. Conquanto sejam determinados fisicamente, estes números têm uma certa continuidade no sentido que a dois pontos ou a dois corpos praticamente indiscerníveis sejam associados o mesmo número. Nós teremos primeiro de traduzir esses fatos físicos em proposições puramente lógicas.
>
> Nós teremos, também que examinar qual uso os físicos fazem dos números que eles determinam e, por isso, devemos concentrar nossa atenção sobre o que os físicos chamam *uma grandeza derivada.*
>
> Consideremos um corpo C , os físicos associam-lhe uma massa M , um volume V e uma densidade (ou densidade média) δ. Os dois primeiros números determinam-se experimentalmente de forma separada e o terceiro resulta aritmeticamente pela fórmula de definição:
>
> $$\delta = \frac{M}{V} ;$$
>
> para enfatizar a diferença entre esses números, diz-se que a massa e o volume são grandezas diretamente mensuráveis e a densidade uma grandeza derivada. Observar-se-á que, na frase precedente, o termo grandeza é corretamente empregado (no sentido do capítulo precedente) quando se aplica à massa e ao volume e, incorretamente, à densidade; é claro, por exemplo, que se se divide um corpo em dois corpos parciais, a densidade do corpo total não é a soma das densidades dos corpos parciais. Nós evitaremos, portanto este emprego da palavra grandeza.
>
> Para que *M e V* sejam determinados, é preciso ter escolhido unidades de massa e de volume, mas nenhuma escolha nova está para fazer para δ; é isto que exprimimos ainda dizendo que a unidade de densidade é uma unidade derivada. Um corpo terá uma densidade igual a 1, portanto, igual à densidade unitária, em particular, se $M = 1$ e $V = 1$; está aí o significado de uma frase tal como a seguinte: quando a unidade de massa é o grama e a unidade de volume o centímetro cúbico, a unidade de densidade é o grama por centímetro cúbico.
>
> A densidade média de um corpo é, particularmente, interessante quando ela é a mesma para todos os corpos parciais em que se pode decompor o corpo dado, ou seja, desde que o corpo seja homogêneo quanto a massa. Quando este não é o caso, os físicos definem uma densidade em cada ponto P do corpo: é a densidade média dos corpos cortados em torno de P e suficientemente pequenos para serem

[148] Avoir fourni cette théorie élémentaire des grandeurs sera peut-être, après tout, le plus substantiel des résultats des travaux sur l´intégration des fonctions discontinues.

> praticamente homogêneos. Nós precisaremos tornar mais precisa matematicamente a operação que fornece esta densidade, esta operação será *a derivação.* A operação inversa que permite o cálculo de M a partir de V e de δ, será a *integração*.[149] (LEBESGUE, 1935, p. 142-143).

Este ponto de vista apresentado por Lebesgue permitiu-lhe reestabelecer o Teorema Fundamental do Cálculo, considerando "a integral indefinida como uma função de conjuntos, definida para todo conjunto mensurável" (LEBESGUE, 1926, p. 65) e não com uma função de pontos.

VI.6 CONSIDERAÇÕES DE LEBESGUE

No final de sua obra, Lebesgue (1935, p. 177-184) faz algumas considerações. Argumenta que não espera dos futuros professores nem grande habilidade técnica nem saber filosófico. Lembra que, normalmente, quando se lida com os fundamentos da Matemática, adota-se o ponto de vista filosófico, mas, que ele se recusa a fazer isso. Para justificar esta atitude, diz que respeita a Filosofia, mas não acredita que ela possa ajudar nem a compreender melhor as

---

[149] [...] parmi les nombres considérés par les physiciens, certains étaient attachés à des points, certains autres à des corps étendus, d'où deux notions mathématiques: fonctions d'une ou plusieurs variables, grandeurs. Tant qu'ils sont déterminables physiquement, ces nombres ont une certaine continuité de façon qu'à deux points ou deux corps pratiquement indiscernables soient attachés le même nombre. Nous aurons tout d'abord à traduire ces faits physiques en énoncés purement logiques.

Nous aurons aussi à examiner quel emploi les physiciens font des nombres qu'ils déterminent et, pour cela, nous devons porter notre attention sur ce que les physiciens appellent *une grandeur dérivée.*

Considérons un corps C, les physiciens lui attachent une masse M, un volume V et une densité (ou densité moyenne) δ. Les deux premiers nombres se déterminent séparément expérimentalement et le troisième en résulte arithmétiquement par la formule de définiton: $\delta = \frac{M}{V}$; on dit que la masse et le volume sont des grandeurs directement mesurables et la densité une grandeur dérivée pour souligner la différence entre ces nombres. On remarquera que, dans la phrase précédent, le mot grandeur est correctement employé (au sens du chapitre précédent) quand on l'applique à la massa et au volume et incorrectement pour la densité; il est clair, par exemple, que si l'on partage um corps en deux corps partiels, la densité du corps total n'est pas la somme des densités des corps partiels. Nous éviterons donc cet emploi du mot grandeur.

Pour que M e V soient déterminés, il faut avoir choisi des unités de masse et de volume, mais aucun choix nouveau n'est à faire pour δ; c'est ce que l'on exprime encore en disant que l'unité de densité est une unité dérivée. Un corps aura une densité égale à 1, donc égale à la dendité unité, en particulier si $M = 1$ e $V = 1$; c'est là le sens d'une phrase telle que celle-ci: quand l'unité de masse est le gramme, et l'unité de volume le centimètre cube, l'unité de densité est le gramme par centimètre cube.

La densité moyenne d'un corps est particulièrement intéressant quand elle est la même pour tous les corps partiels que l'on peut découper dans le corps donné, c'est-à-dire lorsque celui-ci est homegène quant à la masse. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, les physiciens défínissent une densité en chaque point P du corps: c'est la densité moyenne des corps découpés autor de P et assez petits pour être pratiquement homogènes. Nous aurons à préciser mathématiquement l'opération qui fournit cette densité, cette opération sera *la dérivation*. L'opéation inverse, permettant le calcul de M à partir de V et de δ, sera *l'intégration*.

ciências, nem fazê-las progredir. Para ele, as ciências desenvolveram-se, sobretudo, com a tomada de consciência de sua individualidade e sua separação da filosofia e acrescenta:

> Que os filósofos pesquisem se algum método tendo feito suas provas no domínio científico, não poderia lhes ser útil, isto é natural e razoável; é ir do fácil ao difícil. Mas, que a matemática, que estuda questões tão simples que se pode dar soluções precisas e definitivas, vai buscar recursos na filosofia, que deve se contentar com respostas imprecisas e precárias, eu não pude admitir.[150] (LEBESGUE, 1935, p. 178).

Para ele,

> [...] o matemático, como matemático, não tem de se preocupar com filosofia; opinião que aliás foi formulada por muitos filósofos. Seus esforços de reflexão, de compreensão devem estar, de qualquer forma, interiores à matemática, ao invés de estar nas relações desta com a filosofia. [...] se pretendemos edificar uma filosofia da ciência para a ciência, esta filosofia de segunda zona seria talvez a ajuda mais eficaz à verdadeira filosofia.[151] (Ibid., p. 179).

Referindo-se ao professor, diz que este também, "[...] deve saber limitar o domínio de sua atividade para aquilo que é objetivo. Ele está carregado de cultura científica, seu colega da filosofia está carregado de cultura filosófica."[152] (Ibid., p. 179).

> Ocupando-se assim somente do que é de certo modo material, manual, fazemos necessariamente da matemática um dos ramos da física. Ramo que, contudo, se diferencia dos outros nisso que se recorre à observação apenas no início, para adquirir definições e axiomas.[153] (Ibid., p. 179).

[150] Que les philosophes recherchent si quelque méthode ayant fait ses preuves dans le domaine scientifique, ne pourrait pas leur être utile, cela est naturel et raisonnable; c'est aller du facile au difficile. Mais que les mathématiques, qui étudient des questions si simples qu'on peut en donner des solutions précises et définitives, aillent demander des ressources à la philosophie, qui doit se contenter de réponses imprécises et précaires, je n'ai pu l'admettre.

[151] [...] le mathématicien, en tant que mathématicien, n'a pas à se préoccuper de philosophie; opinion qui, d'ailleurs, a été formulée par bien des philosophes. Ses efforts de réflexion, de compréhension doivent être en quelque sorte intérieurs aux mathématiques au lieu de porter sur les rapports de celles-ci avec la philosophie. [...] si l'on parvenait à édifier une philosophie de la science pour la science, cette philosophie de seconde zone serait peut-être l'aide la plus efficace pour la vraie philosophie.

[152] [...] savoir borner le domaine de son activité à ce qui est objectif; il est chargé de culture scientifique, son collègue de philosophie est seul chargé de la culture philosophique.

[153] En s'occupant ainsi seulement de ce qui est en quelque sorte matériel, manuel, on fait nécessairement des mathématiques une des branches de la physique. Branche qui toutefois se différencie des autres en ce qu'on n'y fait appel à l'observation qu'au début, pour acquérir définitions et axiomes.

Para ele, um matemático tem uma atitude diferente do professor, pois, como afirma:

> Quando um matemático previu mais ou menos nitidamente uma proposição, no lugar de ter recorrido à experiência, como o faria um físico, ele busca uma demonstração lógica; a verificação lógica substitui para ele a verificação experimental. Em suma, ele não busca descobrir de novo, ele tenta tomar consciência das riquezas que possui já inconscientemente que são incluídas nas definições e nos axiomas. Daí a importância fundamental dessas definições e axiomas que, certamente, são submetidos logicamente apenas à condição de serem compatíveis, mas que conduziriam apenas a uma ciência puramente formal, vazia de sentido, sendo sem conexão com a realidade.[154] (LEBESGUE, 1935, p. 179).

Ao fazer a distinção entre o possível papel do professor e a atitude do matemático, ele justifica:

> O professor de matemática, o do ensino secundário em particular, não tem de formar puros lógicos, ele deve contribuir para formar homens comprometidos e, para isso, deve se ocupar não somente dos raciocínios lógicos, mas ainda da aquisição das premissas desses raciocínios e da aplicação de seus resultados no concreto.[155] (Ibid., p. 179-180).

Por isso, referindo-se aos ensinamentos dados nos cursos de formação de professores, da época, faz a seguinte argumentação:

> Eu não acredito que seja suficiente exigir que os futuros professores tenham adquirido uma habilidade técnica e que saibam recitar os manuais; deveríamos lhes exigir refletir longamente sobre o que eles terão de ensinar, em um espírito de crítica lógica e pedagógica; fazendo, sozinhos ou ajudados por algum ensinamento, sobre cada grande capítulo, um estudo análogo àquele que indiquei aqui para o que concerne à medida das grandezas.
>
> Quais ensinamentos de futuros professores poderiam sair desse estudo? É certo, primeiro de tudo, que para escolher com conhecimento de causa, entre as diversas exposições dos fatos matemáticos, é necessário tê-las comparado, buscando a forte e a fraca. Com isso feito, estamos prontos para construir novas [exposições], se for necessário. [...] Examinando os raciocínios, constatamos todo o poder da lógica,

[154] Lorsque [...] a prévu plus ou moins nettement une proposition, au lieu d'avoir recours à l'expérience, comme le ferait un physicien, il cherche une démonstration logique; la vérification logique remplace pour lui la vérification expérimentale. En somme, il ne cherche pas à découvrir du nouveau, il essaie de prendre conscience des richesses qu'il possède déjà inconsciemment, qui sont enfermées dans les définitions et dans les axiomes. D'où l'importance capitale de ces définitions et axiomes qui, certes, ne sont assujettis logiquement qu'à la condition d'être compatibles, mais qui ne condiuraient qu'à une science purement formelle, vide de sens, s'ils étaient sans rapport avec la réalité.

[155] Le professeur de mathématiques, celui de l'Enseignement secondaire en particulier, n'a pas à former de purs logiciens, il doit contribuer à façonner des hommes raisonnables et pour cela il lui faut s'occuper non seulement des raisonnements logiques mais encore de l'acquisition des prémisses de ces raisonnements et de l'application de leurs résultats au concret.

> percebemos, também, todas suas exigências e tomamos consciência das precauções indispensáveis na matemática aplicada.**[156]** (LEBESGUE, 1935, p. 180).

Para cada capítulo desta sua obra, Lebesgue (Ibid., p. 180) diz que poderia repetir o que disse sobre aritmética, ou seja, “[...] o capítulo aplica-se quando se aplica.”. Isso porque, como ele explica:

> Nossos argumentos absolutos nos conduzem, nas aplicações, apenas com verdades relativas. É que existe sempre algum desacordo entre nossas premissas lógicas e a realidade que elas pretendem traduzir. Por exemplo, encontramos a velha questão dos irracionais: os Antigos tinham construído, com a ajuda das frações, um contínuo perfeitamente suficiente para todas as experiências humanas, relativa a precisão que eles pudessem alcançar, mas insuficiente logicamente. Nos foi necessário prolongar metafisicamente a seqüência de operações de medida para obter a noção sobre a qual podemos argumentar logicamente. Para estudar o concreto, ou o que nos parece ser tal, nos foi necessário fazer uma expansão do real.**[157]** (Ibid., p. 180-181).

A reflexão crítica, que Lebesgue julga que deveria ser exigida dos futuros professores sobre o que terão de ensinar, levá-los-ia a constatação de todos os recursos que a lógica fornece à inteligência e que, sem inteligência, a lógica conduziria somente ao retrocesso, então, faz a seguinte crítica:

> Um professor de física não se sente seguro, a respeito da experiência, em esconder a intervenção da inteligência nas pesquisas físicas. Muitos professores de matemática sentem-se seguros, a respeito da lógica, por apresentar a matemática como o progresso inabalável de uma dedução de modo único. Se alguns nomes de matemáticos não fossem associados, correta ou incorretamente, a alguns teoremas, os alunos poderiam esquecer que a matemática é apenas uma obra humana. Não se fala jamais da escolha das premissas, não se ousa dizer que tal proposição foi obtida graças às qualidades da *imaginação* de um sábio; confunde-se com a

---

[156] Je ne crois pas que ce soit assez d’exiger que les futurs professeurs aient acquis une habilité technique et qu’ils sachent débiter des manuels; il faudrait leur avoir demandé de réfléchir longuement à ce qu’ils auront à enseigner dans un esprit de critique logique et pédagogique; d’avoir fait, seuls on aidés par quelque enseignement, sur chaque grand chapitre, une étude analogue à celle que j’ai indiquée ici pour ce qui concerne la mesure des grandeurs.

Quels enseignements de futurs professeurs pourraient-ils tirer de cette étude? Il est certain tout d’abord que pour choisir en connaissance de cause entre les divers exposés des faits mathématiques il faut les avoir comparés, en avoir cherché le fort et le faible. Que, ce faisant, on se met en mesure d’en construire de nouveaux, si besoin est. [...] En scrutant les raisonnements, si l’on voit toute la puissance de la logique, on aperçoit aussi toutes ses exigences et l’on prend conscience des précautions indispensables dans les mathématiques appliquées.

[157] Nos raisonnements absolus ne nous conduisent, dans les applications, qu’à des vérités relatives. C’est qu’il y a toujours quelque désaccord entre nos prémisses logiques et la réalité qu’elles prétendent traduire. Par exemple, nous avons rencontré la vieille question des irrationnelles: les Anciens avaient construit, à l’aide des fractions, un continu parfaitement suffisant pour toutes les expériences humaines, quelque précision qu’elles puissent atteindre, mais insuffisant logiquement. Il nous a fallu prolonger métaphysiquement la suite des opérations de mesure pour obtenir la notion sur laquelle nous pouvons raisonner logiquement. Pour étudier le concret, ou ce qui nous parait être tel, il nous a fallu procéder à un élargissement du réel.

> descoberta de uma proposição sua apresentação lógica feita no modo atual.[158] (LEBESGUE, 1935, p. 181-182).

Em uma postura diferente da acima descrita, Lebesgue (Ibid., p. 2), na introdução da obra, diz se esforçar para tratar as questões de modo tão simples e tão concreto quanto possível, mas sem sacrificar o rigor da lógica, por isso está sempre procurando as demonstrações naturais, como exemplificado ao longo do livro. Assim, preocupado em ensinar a seus alunos a "arte de descobrir", acreditava que isso só seria possível graças a essas demonstrações que chamava de naturais.

Chama a atenção, então, para não confundir o método da descoberta com o da redescoberta que na sua opinião é um excelente método pedagógico e nada mais, pois, como ele argumenta:

> [...] um ensino fundamentado muito sistematicamente na redescoberta seria o próprio ensino da não descoberta pois, para descobrir, é necessário fazer uma abordagem não habitual, [...] e o método da redescoberta consiste em guiar os alunos por alguns raciocínios catalogados, sempre os mesmos, e a ensinar aos alunos a experimentá-los sucessivamente, sem omissões. Isso habilita, certamente, resolver os problemas porque se propõe problemas justificáveis com os argumentos em questão; mas, essa taylorização do trabalho intelectual, esse adestramento, é todo diferente, é todo contrário à flexibilidade que permite à inteligência descobrir novos pontos de vista.[159] (Ibid., p. 182).

Para Lebesgue, não importava que os alunos – futuros professores – chegassem às conclusões que ele havia formulado ou a outras, mas o importante era que eles tivessem, uma opinião reflexiva a respeito dos pontos fundamentais.

---

158 Un professeur de physique ne se croit pas tenu, par respect de l'expérience, à cacher l'intervention de l'intelligence dans les recherches physiques. Trop de professeurs de mathématiques se croient tenus, par respect de la logique, à présenter les mathématiques comme le déroulement inéluctable d'une déduction à voie unique. Si quelques noms de mathématiciens n'étaient accolés, à tort ou à raison, à certains théorèmes, les élèves pourraient oublier que les mathématiques ne sont qu'oeuvre humaine. On ne parle jamais du choix des prémisses, on n'ose pas dire que telle proposition a été obtenue grâce aux qualités d'*imagination* d'un savant; on confond avec la découverte d'une proposition sa présentation logique faite à la mode actuelle.

159 [...] un enseignement basé trop systématiquement sur la redécouverte serait l'enseignement même de la non découverte car, pour découvrir, il faut faire un rapprochement inhabituel, [...] et la méthode de la redécouverte consiste à guider les élèves vers certains raisonnements catalogués, toujours les mêmes, et à apprendre aux élèves à les essayer successivemente, sans omission. Cela permet, certes, de résoudre les problèmes parce qu'on propose des problèmes justiciables des raisonnements en question; mais cette taylorisation du travail intellectuel, ce dressage, est tout différent, est tout le contraire de l'assouplissement qui permet à l'intelligence de découvrir de nouveaux points de vue.

Considerações Finais

Lebesgue viveu em uma época – virada do século XIX para o século XX - em que todas as ciências exatas passavam por profundas mudanças e, a Matemática, que, segundo Boutroux (1920), havia sofrido uma revolução no início do século XIX, caracterizada pela transição de um ideal sintético a uma concepção analítica, marcando a origem da Matemática pura, na virada desse século para o século XX, sofre outra revolução, com a ruptura da harmonia que existia entre o objeto e o método matemático, caracterizando a criação da axiomática moderna.

Esta última ruptura, no entanto, não foi do agrado de Lebesgue que, embora tenha sido um crítico, era muito conservador e por diversas vezes demonstrou não gostar da forma de fazer Matemática em sua época. Construtivista que era, não aceitava a fundamentação de Cantor, pois entendia que nem tudo no mundo é representado por conjunto e, também, não gostava do método axiomático. Posições, estas, bem explicitadas por ele, por exemplo, na discussão ocorrida, em 1905, sobre a aceitação ou não do axioma da escolha de Zermelo (1904), quando declara não aceitar a existência de um objeto matemático sem que o mesmo pudesse ser descrito e, posteriormente, em 1938, no encontro de Zurich sobre os fundamentos e o método da Ciência Matemática, ao proferir uma palestra a respeito das controvérsias sobre a Teoria dos Conjuntos e a questão dos fundamentos, reafirma sua posição e apresenta suas críticas em relação à teoria dos conjuntos.

Lebesgue sempre priorizou a atividade e, neste sentido, considerava a Matemática um instrumento, ou seja, uma linguagem que se mostra e desenvolve-se nas aplicações e que, particularmente, não tem objetos próprios. Pela atividade, buscava a superação da dicotomia entre sujeito e objeto. Esta forma de pensar o fazer Matemática estava em harmonia com a filosofia da Matemática que ele propagava e chamava de “filosofia da segunda zona”, bem como, com o ensino que proporcionava a seus alunos.

Respeitava a Filosofia, mas não acreditava que esta pudesse ajudar a compreender melhor a ciência nem fazê-la progredir. Segundo seu entendimento, as ciências desenvolveram-se, especialmente, pela tomada de consciência de sua individualidade e sua separação da Filosofia, por isso considerava que o matemático não deveria preocupar-se com a Filosofia, pois se pretendesse edificar uma Filosofia da ciência para a ciência, esta deveria ser uma “filosofia da segunda zona”.

Considerada “utilitária e muito simples”, na Matemática, esta filosofia que idealizara seria apenas um relato explicativo das práticas úteis desenvolvidas pelo matemático e, poderia ser criada somente por este (o matemático), pois é ele que faz a Matemática e ganha experiências com tal atividade. Esta visão filosófica justifica a concepção de Lebesgue de que todo conhecimento surge da atividade ou operação concreta, a partir da qual se abstraem os conceitos, são feitas as generalizações, a simbolização e, “só por último” a atividade é transformada em uma teoria.

No que se refere ao ensino da Matemática, dizia esforçar-se para que seus alunos melhor compreendessem a Matemática e, conforme sua filosofia, pregava que o professor de Matemática, com uma postura diferente da do matemático, deveria trabalhar com atividades, tratando a Matemática como um ramo da Física, mas, que, em uma atitude diferente da do físico, recorreria à observação apenas no início, para abstrair os conceitos. Isto porque tinha a convicção de que não se deve ter a preocupação apenas com o raciocínio, argumento lógico, mas também com o desenvolvimento das atividades que levam às premissas do mesmo e a aplicabilidade dos resultados no concreto. Justificava sua posição afirmando que reduzida a teorias gerais ou axiomáticas, a Matemática seria uma ciência puramente formal, vazia de sentido e que não aguçaria nem a curiosidade, nem conhecimentos que poderiam culminar em problemas novos.

Ao se referir aos cursos de formação de professores, era convicto de que não bastava exigir que os futuros professores adquirissem habilidades técnicas e soubessem recitar as lições dos livros didáticos. Mas, era, sim, necessário exigir desses alunos uma “profunda reflexão crítica, lógica e pedagógica” sobre o que teriam de ensinar; pois deveriam tornar-se capazes para escolher, com razão, uma dentre as várias possibilidades de apresentar um assunto, a partir de suas comparações, ou então, criar uma outra se fosse o caso. Para Lebesgue, este era o caminho pelo qual se poderia perceber todo o poder da lógica e suas exigências, ganhando consciência dos cuidados que se deve ter na Matemática aplicada.

Na opinião de Lebesgue, o professor deveria “enriquecer constantemente sua cultura científica”, não se deixando levar por lições prévias de pedagogos e livros didáticos. Deveria apresentar aos alunos uma Matemática “viva”, ou seja, partindo da gênese dos conceitos que quisesse explicar. Mas, para isso, seria necessário que o professor conhecesse a História da Matemática. Em suma, ele dava muito valor à observação e ao estudo de trabalhos desenvolvidos previamente.

De forma geral, estas eram as idéias que Lebesgue defendia sobre a Matemática, o fazer matemático, o ensino e a filosofia da Matemática e o papel professor de Matemática que caracterizam sua concepção de Educação Matemática e, permeavam toda sua prática não só como professor, mas também como matemático.

Ressaltamos, agora, que um dos aspectos mais importantes levantados nesta pesquisa é o fato de existir uma contradição entre a Matemática Moderna, em geral, e o pensamento de Lebesgue, em particular. De um lado, observamos nos textos de Lebesgue as aspirações dessa filosofia humilde e prática que ele denominava de “filosofia da segunda zona” (grifo da pesquisadora), pelo fato de estar convencido de que toda a Matemática deveria ser baseada nas aplicações. Por outro lado, estão as exigências das generalizações que ele próprio fazia a respeito do Cálculo e da teoria da integração. Lebesgue era totalmente consciente desses fatos e apontava a “dualidade” difícil nos conceitos matemáticos, ou seja, o fato de que o conceitos matemáticos são produtos de uma abstração reificante (hypostatic abstraction), como exemplificado pelo seguinte comentário:

> [...] um século foi necessário para melhorar a definição de derivada dada por Newton: “a derivada é a ultima razão (ou relação) do acréscimo incremental Δy da função pelo acréscimo incremental Δx da variável”, substituindo as palavras “última razão” por “limite da razão”; para que se compreenda bem que a derivada não é uma razão e que, contudo, ela pode ser utilizada, muitas vezes, como uma razão.[1] (LEBESGUE, 1941, p. 112).

Como vimos, Lebesgue foi quase forçado a basear a teoria da integração em uma teoria das medidas abstratas, pois as funções mensuráveis são as funções consideradas em Análise.

Neste contexto, vale a pena destacar outro resultado desta pesquisa. Diferente do que o positivismo matemático sugere, não existe unanimidade e clareza a respeito dos fundamentos matemáticos e das interpretações conjuntivas e epistemológicas dos conceitos fundamentais da Matemática. A controvérsia sobre o axioma da escolha, por exemplo, não só mostra divergência entre os matemáticos, mas também atitudes inconsistentes, pois, como vimos, muitos matemáticos, como o próprio Lebesgue não acatavam o axioma da escolha, embora o usassem em suas próprias pesquisas. Isso mostra a importância da História da Matemática para a Educação.

Quanto à Teoria da Medida, esta foi importantíssima, inclusive, para matematizar outras áreas de conhecimento como, por exemplo, a probabilidade, as teorias econômicas e a termodinâmica. Entretanto, a realização da Teoria da

[1] [...] un siècle fut nécessaire pour amender la définition de la dérivée donnée par Newton: “La dérivée est la dernière raison (ou rapport) de l’accroissement incrémentiel Δy de la fonction à l’accroissement incrémentiel Δx de la variable”, en remplaçant les mots “dernière raison” par “limite du rapport”; pour qu’on comprenne bien que la dérivée n’est pas un rapport et que pourtant elle peut être utilisée parfois comme un rapport.

Medida seria impossível sem as ferramentas da Teoria dos Conjuntos no sentido de Cantor e Zermelo e da axiomática moderna.

De um lado, Lebesgue tinha grandes reservas a respeito do método axiomático no sentido de Hilbert e Zermelo. Esta é a contradição, pois não seria possível desenvolver uma Teoria da Integração no sentido de Lebesgue sem a Teoria da Medida e não seria possível construir uma Teoria da Medida sem o método axiomático moderno. Então, neste sentido, Lebesgue foi um revolucionário na área da Matemática Moderna, mas foi um conservador na área da Filosofia da Educação Matemática. Por exemplo, ele achava que todo ensino do Cálculo deveria começar com a integral de Riemann, pois como relatam Denjoy, Felix e Montel (1957, p. 16):

> Nós lhe propusemos a questão: "Por qual integral deve-se começar diante de jovens estudantes? – por aquela de Riemann, bem entendido" responde Lebesgue.[2]

A postura de Lebesgue não é um capricho apenas individual, porém reflete claramente uma crise no auto-entendimento da Matemática moderna que afetou muita gente na primeira metade do século XX e, sua superação na obra de Bourbaki nem fez bem, nem foi uma solução perfeita à educação, como o fracasso da Matemática Moderna mostrou. Então, vale a pena, ainda hoje, estudar a obra de Lebesgue em todas as suas facetas ou aspectos.

Outro aspecto importante percebido foi que a revolução na área do Cálculo e da Análise Matemática caracteriza o motor principal da transformação da Matemática pura desde a época de Cantor e Riemann. Sendo o Cálculo considerado uma das edificações mais importantes da Matemática, é também o campo mais fértil, pois muitos outros ramos da Matemática como a Teoria da Medida, a Teoria da Probabilidade, a Teoria Topológica Algébrica surgiram a partir dele. Apesar de todo o desenvolvimento ocorrido nessa área e das mudanças de perspectiva, percebemos que, normalmente, os livros destinados ao ensino de Cálculo, com a intenção de simplificar os assuntos abordados, em

[2] On lui posa la question: "Par quelle intégrale doit-on commencer devant de jeunes étudiants? – Par celle de Riemann, bien entendu" répliqua Lebesgue.

geral, apresentam uma perspectiva limitada, correspondendo à de Cauchy – início do século XIX.

Em termos mais gerais, este trabalho ainda mostra a importância das pesquisas históricas para o ensino. Normalmente, os estudos históricos não tomam a sério a História da Matemática e as dificuldades que os matemáticos de outras épocas encontraram. No entanto, limitam-se ao uso de episódios históricos ou exemplos da História, como uma mera ilustração das próprias opiniões daqueles que fazem esses estudos, sem uma postura de quem realmente tenta aprender a História e mudar a própria concepção que tem da Matemática ou da Educação Matemática praticada hoje em dia. Isto até se justifica pelo fato de que, na atualidade, a Matemática aparece sem contradições. Mas se olharmos a História da Matemática, encontraremos muitas controvérsias, disputas, contradições e a Matemática mostra-se menos fechada, menos monolítica, menos empecilho às pessoas.

Referência Bibliográfica

ÁVILA, Geraldo. Sobre a soma de certas séries infinitas. In: **Matemática Universitária**, v. 3, p. 51-60, 1986.

______. Cantor e a teoria dos conjuntos. In**: Revista do Professor de Matemática**. Sociedade Brasileira de Matemática, v. 43, p. 6-14, 2000.

BARON, Margaret E. **Curso de história da matemática**: origens e desenvolvimento do cálculo. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Maier e Maria José M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. 5v.

BARTLE, Robert G. **The elements of integration and Lebesgue measure**. New York: John Wiley, 1966.

BELHOSTE, Bruno. **Cauchy: un mathématicien légitimiste au XIX^{e} siècle**. Paris: Belin, 1985.

BOCHNER, Salomon. Mathematical Reflections. In: **AMM**, v. 81, p. 827-852, 1974.

BOLZANO, Bernard. Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite sign there lies at least one real root of the equation. Tradução de B. S. Russ. In: **Historia Mathematica**. v. 7, p. 156-185, 1980.

BOREL, Èmile. Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles. In: **Mathematische Annalen**, v. 60, p. 194-195, 1905.

______. **Leçons sur la théorie des fonctions**. 3 ed. Paris: Gauthier-Villars, 1928.

BOURBAKI, Nicolas. **Eléments d’histoire des mathématiques.** 2 ed. Paris, Hermann, 1960.

BOUTROUX, Pierre. **Les principes de l'analyse mathématique.** Paris, Hermann &amp, 1914. v. 1.

______. **Les principes de l'analyse mathématique.** Paris, Hermann &amp, 1919, v. 2.

______. **L’idéal scientifique des mathématiciens:** dans l’antiquité et dans les temps modernes. Paris: Librairie Félix Alcan, 1920.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

______. **Cálculo**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; v. 6).

______. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

CASSIRER, Ernest (Org.). **Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie**. Traduzido por A. Buchenau. Hamburg: Felix Meiner. 3 ed. 1966. (1ª edição 1904).

CAUCHY, Augustin-Louis. Cours d’Analyse de l’École Royale Polytechnique**.** Paris, 1821. (re-impresso em **Oeuvres Complètes**, série 2, v. 3. Paris: Gauthier-Villars, 1899).

______. Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal. Paris, 1823. (re-impresso em **Oeuvres Complètes**, série 2, v. 4. Paris: Gauthier-Villars, 1899)

______. Leçons sur le calcul differentiel. Paris, 1829. (re-impresso em **Oeuvres Complètes**, série 2, v. 4. Paris: Gauthier-Villars, 1899)

______. Mémoire sur les fonctions continues. In: **C. R. Acad. Sci**., v. 18, p. 116, 1844. (re-impresso em **Oeuvres Complètes,** série 1, v. 8. Paris).

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é matemática?** Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

DAHAN-DALMEDICO, Amy; PEIFFER, Jeanne. **Une histoire des mathématiques.** Paris: Seuil, 1986.

DAVIS Philip J.; HERSH Reuben. **A experiência matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DENJOY, Arnaud. Notice sur la vie et l'oeuvre de Henri Lebesgue**.** In: **Notices et Discours de Académie des Sciences**, Paris, v. 2, p. 1-31, 1949.

DENJOY, Arnaud.; FELIX, Lucienne.; MONTEL, Paul. Henri Lebesgue, le savant, le professeur, l'homme. In: **L'Enseignement Mathématique,** v.3, n. 1, p. 1-18, 1957.

EDWARDS JR., Charles Henry. **The historical development of the calculus**. New York, Springer-Verlag, 1979.

EVES, Howard. (1953). **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1995.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa**. 3 ed. Curitiba: Positivo, 2004.

GONSETH, Ferdinand. **Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques.** Zurich: Editeurs S. A. Leemann frères & Cie, 1941.

GRANVILLE, Willian Anthony; LONGLEY, William Raymond; SMITH, Percey F. **Elementos de cálculo diferencial e integral**. Traduzido por José Abdelhay. Rio de Janeiro: Âmbito Cultural Edições, 1966.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. **The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann**. Massachusetts: MIT Press, 1970.

HADAMARD, Jacques (Org.). Cinq lettres sur la théorie des enembles. In.: **Bull. Soc. Math. France**, v. 33, p. 261-273, 1905.

HAWKINS, Thomas. **Lebesgue's theory of integration: its origins and development**. Madson and London: The University of Wisconsin Press, 1970.

KAMKE, Erich. **Das Lebesgue-Stieltjes-Integral**. Berlin: Leipzig, 1960.

KARLSON, Paul. **A magia dos números**. Tradução de Henrique Carlos Pfeifer, Eugênio Brito e Frederico Porta. Porto Alegre: Globo, 1961.

KATZ, Victor J. **A history of mathematics: an introduction**. Massachusetts: Addison-Wesley, 1998.

KOLMOGOROFF, Andrei. Zur Deutung der Intuitionistischen Logik. In: **Math. Z.**; v. 35, p. 58-67, 1932.

LEBESGUE, Henri. Sur l'approximation des fonctions. In: **Bulletin des Sciences Mathématiques**, v. 22, p. 278-287, 1898. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v. 3. Paris, 1972).

______. Sur les fonctions de plusieurs variables. In: **C. R. Acad. Sci**., v. 128, p. 811-813, 1899a. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v. 3. Paris, 1972).

______. Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan. In: **C. R. Acad. Sci**., v. 128, p. 1502-1505, 1899b. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v.4. Paris, 1972).

______. Sur la définition de l'aire d'une surface. In: **C. R. Acad. Sci**., v. 129, p. 870-873, 1899c. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v. 4. Paris, 1972).

______. Sur la définition de certaines intégrales de surface. In: **C. R. Acad. Sci**., v. 131, p. 867-870, 1900a. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v. 4. Paris, 1972).

______. Sur le minimum de certaines intégrales. In: **C. R. Acad. Sci**., v. 131, p. 1-3, 1900b. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v. 4. Paris, 1972).

______. Sur une généralisation de l'intégrale définie. In: **C. R. Acad. Sci**., v. 132, p. 1-3, 1901. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v. 1. Paris, 1972).

______. Intégrale, longueur, aire. In: **Annali di Mahematica Pura ed Applicata**, v. 7, 1902, 129 páginas. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v. 1. Paris, 1972).

______. **Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives**. Paris: Gauthier-Villars, 1904, 138 páginas. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v. 2. Paris, 1972).

______. **Leçons sur les séries trigonométriques**. Paris: Gauthier-Villars, 1906, 128 páginas.

______. **Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue**, Toulouse: Imprimerie et Librairie Édouard Privat, 1922. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v. 1. Paris, 1972).

______. Quesques remarques sur la définition de l'aire des surfaces. In: **Fundamenta Mathematicae**, v. 8, p.160-165, 1925. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v. 4. Paris, 1972).

______. Sur le développement de la notion d'intégrale. In: **Matematisk Tidsskrift**, B, 1926. p. 54-74. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v. 2. Paris, 1972).

______. **Sur la mesure des grandeurs**. Genève: Kundig, 1935.

______. Les controversies sur la théorie des ensembles et la question des fondements. In: GONSETH, F. **Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques**. Zurich: Editeurs S. A. Leemann frères & Cie, 1941, p. 109-122. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v. 5. Paris, 1972).

______. **Les coniques**. Paris: Gauthier-Villars, 1942.

______. Humbert et Jordan, Roberval et Ramus. In**: L'Enseignement mathématique**, v. 3, n. 3, p. 188-215, 1957a.

______. Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan. In: **L'Enseignement mathématique**,. v. 3, n. 2, p. 81-106, 1957b.

______. **Measure and the integral**. Traduzido por K. O. May. San Francisco: Holden-day, 1966.

______. A propos de quelques travaux mathématiques récents. In: **L'Enseignement mathématique**, v. 17, n. 1, p. 1-48, 1971. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v. 2. Paris, 1972).

______. Oeuvres scientifiques. Geneve: L'Enseignement Mathématique, 1972, 5v.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm. **La naissance du calcul différentiel: 26 articles des Acta eruditorum**. Introduction, traduction et notes par Marc Parmentier. Paris, VRIN, 1995.

LOOMIS, Lynn H. An Introduction to Abstract Harmonic Analysis. New York, D. Van Nostrand Company, Inc, 1953.

MAY, Kenneth O. Biographical sketch of Henri Lebesgue. In: LEBESGUE, H. **Measure and the integral**. Traduzido por K. O. May. San Francisco: Holden-day, 1966, p. 1-5.

MONTEL, Paul. Notice nécrologique sur M. Henri Lebesgue. In: **Comptes Rendus**, v. 213, n. 5, p. 197-200, 1941.

MOORE, Gregory H. **Zermelo's axiom of choice**: its origins, development, and influence. New York: Springer-Verlag, 1982.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. Pierre Léon Broutroux. 2000. Disponível em http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Boutroux.html. Acessado em 06 de julho de 2005.

OTTE, Michael. **O formal, o social e o subjetivo:** uma introdução à filosofia e à didática da matemática. Tradução de Raul Fernando Neto et al. São Paulo: Editóra da Universidade Estadual Paulista, 1993.

______. Complementarity, sets and numbers. In: **Educational Studies in Mathematics**, v. 58, p. 203-228, 2003a.

______. Análise de prova e o desenvolvimento do pensamento geométrico. In: **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo: EDUC, v. 5, n. 1, p. 13-55, 2003b.

PERRIN, Louis. Henri Lebesgue: Rénovateur de l'analyse moderne. In: LE LIONNAIS, François. **Les grands courants de la pensée mathématique**. Paris: Cahiers du Sud, 1948. p. 286-290.

PIER, Jean-Paul. **Histoire de l'intégration: vingt-cinq siècles de mathématiques**. Paris: MASSON, 1996.

RIEMANN, Georg F. Bernhard. (1854) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. In: ______. **The Collected Works of Bernhard Riemann**. New York: Dover, 1953.

______. (1873). Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexem Grösse. In: ______. **The Collected Works of Bernhard Riemann**. New York: Dover, 1953.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**. Tradução de Seiji Hariki; revisão técnica Rodney Carlos Bassanezi, Silvio de Alencastro Pregnolatto. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. v. 1.

STRUIK, Dirk J. (1948). **A concise history of mathematics**. New York: Dover Publications, 1987.

______. (1969). **A source book in mathematics, 1200-1800**. New Jersey: Princeton, 1990.

TANNERY, Jules. De l'infini mathématique. In: **Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées,** v. 8, p. 129-140, 1897.

THOMAS JR., George B. **Cálculo**. Tradução de Alfredo Alves de Farias. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1981, v. 1.

VALIRON, Georges. Formation et évolution de la notion de fonction analytique d'une variable. In: LE LIONNAIS, François. **Les grands courants de la pensée mathématique**. Paris: Cahiers du Sud, 1948.

YOUSCHKEVITCH, Adolf P. Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^{e} siècle. In: **Fragments d'histoire des mathématiques**. Paris: Brochure A.P.M.E.P., n. 41, p. 7-68, 1981.

ZERMELO, Ernst. Beweis, daβ jede Menge wohlgeordnet werden kann. In: **Mathematische Annalen**, v. 59, p. 514-516, 1904.

BIBLIOGRAFIA

ANDERSEN, Kirsti,. Cavalieri's method of indivisibles. In: **Archive for History of Exact Sciences**; v. 31, n. 4, p. 291-367, 1985.

ÁVILA, Geraldo. Evolução do conceito de função e de integral. In: **Matemática Universitária**, v. 1, p. 14-46, 1985.

______*. **Introdução à análise matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1993.

______. A**nálise matemática para licenciatura**. São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

BABINI, Jose. **Historia de las ideas modernas en matematica**. Washington: Union Panamericana, 1967.

BELHOSTE, Bruno. **Augustin-Louis Cauchy**: a biography. Translated by Frank Ragland. New York: Springer-Verlag, 1991.

BOREL, Émile. **Principes d'algèbre et d'analyse**. Paris: Albin Michel, 1924.

______. **Éléments de la théorie des ensembles**. Paris: Albin Michel, 1949.

BOYER, Carl Benjamin. (1996). **The history of the calculus and its conceptual development**. New York: Dover, 1949.

BURKILL, J. C. **The Lebesgue integral**. Cambridge: University Press.1951.

CAUCHY, Augustin-Louis. **Analyse algébrique**. Paris: Jacques Gabay, 1989. (primeira publicação 1821).

CRAVEN, Bruce Desmond. **Lebesgue measure and integral**. Boston: Pitman, 1982.

DELACHET, André. **A análise matemática**. Traduzido por Gita K. Ghinzberg. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1967.

DUHEM, Pierre. **La théorie physique: son objet, sa structure**. 2 ed. Paris: Marcel Rivière, 1914.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes. **Análise I**. Rio de Janeiro: Editora Universidade de Brasília. 1975.

FINNEY, Ross L.; WEIR, Maurice D.; GIORDANO, Frank R. **Cálculo de George B. Thomas Jr**. Tradução de Paulo Boschcov. São Paulo: Addison Wesley, 2002.

GATICA, Juan A. **Introduccion a la integral de Lebesgue en la recta**. Washington: Secretaria Geral de la Organización de los Estados Americanos, 1977.

GELBAUM, Bernard R.; OLMSTED, John M. H. **Counterexamples in analysis**. San Francisco: Holden-Day, 1964.

GELBAUM, Bernard R.; OLMSTED, John M. H. **Theorems and counterexamples in mathematics**. New York: Springer-Verlag, 1990.

HAIRER, Ernst; WANNER, Gerhard. **Analysis by its history**. New York: Springer-Verlag, 1996.

HALMOS, Paul R. **Measure theory**. New York: Van Nostrand, 1950.

______. **Teoria ingênua dos conjuntos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. USP, 1970.

HOARE, G. T.; LORD, N. J. Intégrale, longueur, aire: the centenary of the Lebesgue integral. In: **The Mathematical Gazette**, v. 86, n. 505, p. 3-27, march, 2002.

______. L'Integrale di Lebesgue compie cento anni. Disponível em http://matematica.uni-bocconi.it/Lebesgue/Integrale.htm. Acessado em 24 de agosto de 2005.

JAIN, P. K.; GUPTA, V. P. **Lebesgue measure and integration**. New York: Wiley & Sons, 1986.

KLINE, Morris. **Mathematics**: the loss of certainty. New York: Oxford University Press, 1980.

KOLMOGOROV, A. N.; FOMIN, S. V. **Elementos de la teoria de funciones y des analisis funcional**. Traducido del ruso por Carlos Veja. 2 ed. Moscu: Mir, 1975.

KUPKA, Joseph. Measure theory: the heart of the matter. In: **The Mathematical Intelligencer**, v. 8, n. 4, p. 47-56,1986.

LANG*, Serge. **Cálculo**. Tradução de Genésio Lima dos Reis. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1981. v. 1.

LEBESGUE, Henri. Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo. In: **Bulletin de la S. M. F.**, v. 35, p. 202-212, 1907. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v. 3. Paris, 1972)

______. Remarques sur les théories de la mesure et de l´intégration **Ann. Sci. Ecole Norm. Sup**., v. 35, p. 191-250, 1918. (re-impresso em **Oeuvres Scientifiques,** v. 2. Paris, 1972).

______. **Message d'un mathématicien**: Henri Lebesgue, pour centenaire de as naissance.. Introductions et extraits choisis par Lucienne Félix; préface par S. Mandelbrojt. Paris: Blanchard, 1974.

______. **Notices d’histoire des mathématiques**. Avec une introduction de M[lle] L. Félix. Genebra: L’Enseignement Mathématique, 1958.

LEITHOLD*, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. Tradução de Antonio Paques et alii. São Paulo: Harbra, 1977. v. 1 e 2.

LIMA*, Elon Lages. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1982.

MEDEIROS, Luis Adauto; MELLO, Eliel Amancio. **A integral de Lebesgue**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1989.

MEDVEDEV, F. A. The work of Henri Lebesgue in the theory of functions of a real variable. Translated by J. Friberg. In: **Russian Math. Surveys**, v. 30, n. 4, p. 179-191. 19755.

MICHEL, Alain. **Constitution de la théorie moderne de l’intégration**. Paris: J. Vrin, 1992.

MONNA, A. F. The concept of function in the 19th and 20th centuries, in particular with regard to the discussions between Baire, Borel and Lebesgue. In: **Archive for history of exact sciences**, v. 9, n. 1, p. 57-84, 1972.

MUNEM*, Mustafa A., FOULIS, David J. **Cálculo**. Tradução de André Lima Cordeiro et al. Rio de Janeiro: Guanabara, 1982. v. 1.

OTTE, Michael. O pensamento relacional: equações. In: **Bolema**, ano 9, especial 3, p. 71-79, 1994.

______. B. Russell’s “introduction to mathematical philosophy”. In: **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo: EDUC, v. 3, n. 1, p. 11-55, 2001.

______. Epistemologia matemática de um ponto de vista semiótico. In: **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo: EDUC, v. 3, n. 2, p. 11-58, 2001.

______. Construction and existence. In: V Seminário Nacional de História da Educação Matemática. Rio Claro. **Anais**. UNESP, 2003, p. 141-153.

______. Does mathematics have objects? In what sense? In: **Synthese**. v. 134, p. 181-216, 2003.

RIEMANN, Bernhard. **Oeuvres mathématiques**. Traduites par L. Laugel; préface de M. Hermite; discours M. Félix Klein. Paris: Gauthier-Villars, 1990. (Réimpression autorisée de la traduction française publiée par Gauthier-Villars en 1898).

RUDIN, Walter. **Princípios da análise matemática**. Tradução de Eliana Rocha Henriques de Brito. Rio de Janeiro: Livros Técnicos, 1971.

RUSSELL, Bertrand. **Introdução à filosofia matemática**. Tradução de Giasone Rebuá. 3 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1974.

SANTAELLA, Lucia. **A teoria geral do signos: semiose e autogeração**. São Paulo: Ática, 1995.

SHENK*, Al. **Cálculo e geometria analítica**. Tradução de Anna Amália Feijó Barroso. Rio de Janeiro: Campus, 1984.

SPIVAK, Michael. **Calculo infinitesimal**. Tradução de Bartolome F. Marques. Barcelona: Reverte, 1970.

VERA, Francisco. **Breve historia de la matemática**. Buenos Aires: Losada, 1946.

Anexo 1

Classificação cronológica das obras de Henri Lebesgue

As informações que apresentamos a seguir, foram extraídas das *Oeuvres Scientifiques de Henri Lebesgue,* uma publicação de L'Enseignement Mathématique, Paris, 1972. De acordo com sua organização, o número que antecede cada título é o número de ordem na classificação cronológica e, o número entre parênteses, corresponde à classificação quanto ao assunto, assim organizada:
1 – Integração e derivação;
2 – Representação de funções;
3 – Estrutura e área de superfícies;
4 – Funções harmônicas;
5 – Análise «Situs»;
6 – Geormetria diferencial e analítica;
7 – Geometria algébrica e elementar;
8 – Pedagogia;
9 – Analises e notas;
obs.: negrito indica livro e, os títulos que não contêm número entre parênteses, correspondem a artigos ou livros que não constam nas Oeuvres e que também não tivemos acesso.

1 (2) *Sur l'approximation des fonctions*
Bull. Sci. Math. 22 (1898), 10 pages. Gauthier-Villars.
2 (2) *Sur les fonctions de plusieurs variables*
C. R. Acad. Sci. 128 (1899), p. 811. Gauthier-Villars.
3 (3) *Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan*
C. R. Acad. Sci. 128 (1899), p. 1502. Gauthier-Villars.
4 (3) *Sur la définition de l'aired d'une surface*
C. R. Acad. Sci. 129 (1899), p. 870. Gauthier-Villars.
5 (3) *Sur Ia définition de certaines intégrales de surface*
C. R. Acad. Sci. 131 (1900), p. 867. Gauthier-Villars.
6 (3) *Sur le minimum de certaines intégrales*
C. R. Acad. Sci. 131 (1900), p. 935. Gauthier-Villars.
7 (1) *Sur une généralisation de l'intégrale définie*
C. R. Acad. Sci. 132 (1901), p. 1025. Gauthier-Villars.
8 (2) *Un théorème sur les séries trigonométriques*
C. R. Acad. Sci. 134 (1902), p. 585. Gauthier-Villars.
9 (1) *Intégrale, longueur, aire,* (publié aussi comme thèse de Doctorat)
Ann. Mat. Pura Appl. 7 (1902), 129 pages.
10 (6) *Sur les transformations de contact des surfaces minima*
Bull. Sci. Math. 26 (1902), 7 pages. Gauthier-Villars.

11 (1) *Sur l'existence des dérivées.*
C. R. Acad. Sci. 136 (1903), p. 659. Gauthier-Villars.
12 (1) *Sur une propriété des fonctions*
C. R. Acad. Sci. 137 (1903), p. 1228. Gauthier-Villars.
13 (2) *Sur les séries trigonométriques*
Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 20 (1903), pp. 453-485. Gauthier- Villars.
14 (2) *Sur Ia représentation analytique à partir de z = x + iy des fonctions continues de x et de y*
Bull. Sci. Math. 27 (1903), 4 pages. Gauthier-Villars.
15 (3) *Sur le problème des aires*
Bull. Soc. Math. France 31 (1903), pp. 197-203 et 33 (1905), pp. 273-274. Gauthier-Villars.
16 (2) *Une propriété caractéristique des fonctions de classe un*
Bull. Soc. Math. France 32 (1904), 14 pages. Gauthier- Villars.
17 (2) *Sur les fonctions représentables analytiquement*
C. R. Acad. Sci. 139 (1904), p. 29. Gauthier-Villars.
18 (1) **Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives**
Paris, Gauthier-Villars (1904), 138 pages.
19 (2) *Sur Ia théorie des ensembles* (lettre à M. Borel)
Bull. Soc. Math. France 33 (1905), pp. 261-273. Gauthier- Villars.
20 (1) *Remarques sur Ia définition de l'intégrale*
Bull. Sci. Math. 29 (1905), 4 pages. Gauthier-Villars.
21 (2) *Sur une condition de convergence des séries de Fourier*
C. R. Acad. Sci. 140 (1905), p. 1378. Gauthier-Villars.
22 (2) *Sur Ia divergence et Ia convergence non uniforme des séries de Fourier*
C. R. Acad. Sci. 141 (1905), p. 875. Gauthier-Villars.
23 (2) *Sur les fonctions représentables analytiquement*
J. Math. Pures Appl. (6) *1* (1905), pp. 139-216. Gauthier- Villars.
24 (2) *Recherches sur Ia convergence des séries de Fourier*
Math. Ann. *61* (1905), pp. 251-280.
25 (2) *Démonstration d'un théorème de M. Baire* (note II des *Leçons sur les fonctions de variable réelle et les développements en série de polynômes* de M. E. Borel)
Paris, Gauthier-Villars, (1905). Pp. 149-155.
26 (1) *Sur les fonctions dérivées*
Atti Accad. Lincei Rend. *15* (1906), pp. 3-8.
27 () **Leçons sur les séries trigonométriques**
Paris, Gauthier- Villars (1906), 128 pages.
28 (2) *Sur les transformations ponctuelles transformant les plans en plans qu'on peut définir par des procédés analytiques*
(Extrait d'une lettre à M. Corrado Segre)
Atti Accad. Sci. Torino 42 (1907), pp. 3-10.
29 (2) *Contribution à l'étude des correspondances de M. Zermelo*
Bull. Soc. Math. France 35 (1907), 11 pages. Gauthier- Villars.
30 (9) *Analyse d´un ouvrage de M. et* M^{me} *W. H. Young «The theory of sets of points»*
Bull. Sci. Math. 31 (1907), pp. 129-135. Gauthier-Villars.
31 (4) *Sur le problème de Dirichlet*
C. R. Acad. Sci. *144* (1907), p. 316. Gauthier-Villars.
32 (4) *Sur le problème de Dirichlet,* deuxième note
C. R. Acad. Sci. *144* (1907), p. 622. Gauthier-Villars.
33 (4) *Sur le problème de Dirichlet*
Rend. Circ. Mat. Palermo 24 (1907), 32 pages.

34 (1) *Encore une observation sur les fonctions dérivées*
Atti Accad. Lincei Rend. *16* (1907), pp. 92-100.
35 (1) *Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration*
Atti Accad. Lincei Rend. 16 (1907), pp. 283-290.
36 (2) *Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm*
Bull. Soc. Math. France 36 (1908), 16 pages. Gauthier-Villars.
37 (2) *Sur la définition de l'aire des surfaces*
Enseignement Math. 10 (1908), pp. 212-220.
38 (2) *Sur la représentation approchée des fonctions* (Extrait d'une lettre à M. E. Landau)
Rend. Circ. Mat. Palermo 26 (1908), 4 pages.
39 (2) *Sur les intégrales singulières*
Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (3) 1 (1909), pp. 25-117. Gauthier-Villars.
40 (2) *Remarque sur un énoncé dû à Stieltjès et concernant les intégrales singulières*
Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (3) 1 (1909), pp. 119-128. Gauthier-Villars.
41 (1) *Sur les suites de fonctions mesurables*
C. R. Acad. Sci. *149* (1909), p. 102. Gauthier-Villars.
42 (7) *Sur l'égalité des polyèdres convexes*
L'Intermédiaire des Mathématiciens *16* (1909), pp. 113-120. Gauthier-Villars.
43 (8) *Sur l'équilibre du corps solide*
Nouv. Ann. Math. (4) 9 (1909), pp. 136-140. Gauthier-Villars.
44 (8) *Sur l'équilibre du corps solide*
Revue de l´Enseignement des Sciences 3 (1909), pp. 257-265.
45 (1) *Sur l'intégration des fonctions discontinues*
Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 27 (1910), pp. 361-450. Gauthier-Villars.
46 (2) *Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz*
Bull. Soc. Math. France 38 (1910), pp. 184-210. Gauthier-Villars.
47 (1) *Sur l'intégrale de Stieltjès et sur les opérations fonctionnelles linéaires*
C. R. Acad. Sci. 150 (1910), p. 86. Gauthier-Villars.
48 (6) *Sur un théorème de M. R. Bricard*
Nouv. Ann. Math. (4) 10 (1910), 4 pages. Gauthier-Villars.
49 (8) *Sur les programmes d'arithmétique et d'algèbre*
Revue de l'Enseignement des Sciences 4 (1910), pp. 97- 100.
50 (5) *Sur la non-applicabilité de deux espaces d'un nombre différent de dimensions*
Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France (1911), p. 486. Gauthier-Villars.
51 (4) *Sur le théorème de la moyenne de Gauss*
Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France (1912), pp. 16-17. Gauthier-Villars.
52 (5) *Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant à des espaces à n et n + p dimensions* (extrait d'une lettre à M. º Blumenthal)
Math. Ann. 70 (1911), pp. 166-168.
53 (5) *Sur l'invariance du nombre de dimensions d'un espace et sur le théorème de M. Jordan relatif aux variétés fermées*
C. R. Acad. Sci. 152 (1911), p. 851. Gauthier-Villars.

54 (2) *Sur un théorème de M. Volterra*
Bull. Soc. Math. France 40 (1912), pp. 238-244. Gauthier-Villars.
55 (2) *Sur les fonctions permutables de M. Volterra*
Comptes rendus des séances de Ia Société Mathématique de France (1912), p. 30. Gauthier-Villars.
56 (4) *Sur le problème de Dirichlet*
C. R. Acad. Sci. 154 (1912), p. 335. Gauthier-Villars.
57 (4) *Sur le principe de Dirichlet.*
C. R. Acad. Sci. 155 (1912), p. 699. Gauthier-Villars.
58 (4) *Sur des cas d'impossibilité du problème de Dirichlet ordinaire*
Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France (1913), p. 17. Gauthier-Villars.
59 (6) *Exposition d'un mémoire de M. W. Crofton*
Nouv. Ann. Math. (4) 12 (1912), 22 pages. Gauthier-Villars.
60 (3) *Observations sur une communication de M. Z. de Geöcze*
Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France (1913), pp. 31-32. Gauthier-Villars.
61 (4) *Sur* l'*équivalence du problème de Dirichlet et du problème du calcul des variations considéré par Riemann*
Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France (1913), pp. 48-50. Gauthier-Villars.
62 (6) *Sur les courbes orbiformes*
Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France (1914), pp. 45-46. Gauthier-Villars.
63 (6) *Sur le problème des isopérimètres et sur les domaines de Largeur constante*
Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France (1914), pp. 72-76. Gauthier-Villars.
64 (9) *Analyse du tome II* (3e *édition) du cours d' analyse de l' Ecole Polytechnique par M.* C. *Jordan*
Bull. Sci. Math. 39 (1915), pp. 15-18. Gauthier-Villars.
65 (6) *Quelques leçons sur les courbes épicycloïdales*
Revue de l'Enseignement des Sciences 9 (1915), pp.97-123.
66 (6) *Sur les arcs d'épicycloïdes. A propos d'un article de M. Barisien*
Nouv. Ann. Math. 16 (1916), pp. 357-359. Gauthier-Villars.
67 (6) *Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford*
Nouv. Ann. Math. (4) *16* (1916), pp. 481-495. Gauthier-Villars.
68 (7) *Sur les angles polyèdres*
Revue de l'Enseignement des Sciences 10 (1916), pp. 33-42.
69 (7) *Sur les angles polyèdres,* deuxième article
Revue de l'Enseignement des Sciences 10 (1916), pp. 216-220.
70 (1) *Sur certaines démonstrations d'existence*
Bull. Soc. Math. France 45 (1917), pp. 132-144. Gauthier-Villars.
71 (9) *Analyse du tome III* (3e *édition) du cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique par M.* C. *Jordan*
Bull. Sci. Math. 42 (1918), pp. 93-100. Gauthier-Villars.
72 (1) *Remarques sur les théories de Ia mesure et de I´intégration*
Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 35 (1918), pp. 191-250. Gauthier-Villars.
73 (6) *Sur des problèmes isopérimétriques*
Comptes rendus des séances de Ia Société Mathématique de France (1918), pp. 15-16. Gauthier-Villars.
74 (6) *Sur deux théorèmes de Mannheim et de M. Bricard concernant les lignes de courbure et les Iignes géodésiques des quadriques*
Nouv. Ann. Math. 18 (1918), 18 pages. Gauthier-Villars.

75 (6) *Sur une question de minimum*
Revue de l'Enseignement des Sciences *12* (1918), pp. 1-12.
76 *Notice de candidature à Ia Faculté des Sciences de Paris*
77 (6) *Sur les polygones de Poncelet*
Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France (1919), p. 49. Gauthier-Villars.
78 (1) *Sur une définition due à M. Borel*
Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 37 (1920), pp. 255-257. Gauthier-Villars.
79 (9) *Analyse d'un ouvrage de M. de Ia Vallée Poussin* : *Leçons sur L'approximation des fonctions d´une variable réelle*
Bull. Sci Math. 44 (1920), pp. 137-153. Gauthier-Villars.
80 (4) *Sur le théorème de Ia moyenne et le problème de Dirichlet*
Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France (1920), p. 26. Gauthier-Villars.
81 (6) *Sur les polygones de Poncelet*
Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France (1920), p. 27. Gauthier-Villars.
82 (6) *Sur les ombilics d'une quadrique*
Comptes rendus des séances de la Société Mathématique de France (1920), pp. 28-29. Gauthier-Villars.
83 *Sur les diamètres rectilignes des courbes algébriques planes*
Bull. Soc. Math. France 49 (1921). Gauthier-Villars.
84 (5) *Sur les correspondances entre les points de deux espaces*
Fund. Math. 2 (1921), 32 pages.
85 *Sur quelques questions de minimum relatives aux courbes orbiformes et sur leurs rapports avec le calcul des variations*
J. Math. Pures Appl. (8) 4 (1921). Gauthier-Villars.
86 (3) *Exposé géométrique d'un Mémoire de Cayley sur les polygones de Poncelet*
Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (3) *13* (1922), 31 pages. Gauthier-Villars.
87 (9) *A propos d'une nouvelle Revue mathématique* : *Fundamenta Mathematicae*
Bull. Sci. Math. 46 (1922), 13 pages. Gauthier-Villars.
88 (9) *Analyse de la thèse de M. Antoine*
Bull. Sci. Math. 46 (1922), pp. 5-12. Gauthier-Villars.
89 (9) *Les professeurs de Mathématiques au Collège de France. Humbert et Jordan ; Roberval et Ramus*
Leçon d'ouverture professée au Collège de France. Revue scientifique 60 (1922).
90 *Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue*
Edouard Privat, Toulouse (1922).
91 (9) *L'oeuvre mathématique de Georges Humbert, quelques mots sur Camille Jordan*
Bull. Sci. Math. (2) 46 (1922), 14 pages. Gauthier- Villars.
92 *Sur les cercles focaux*
Nouv. Ann. Math. (5) *1* (1923), pp. 340-350. Gauthier-Villars.
93 (6) *Sur la théorie de la résiduation de Sylvester*
Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse *14* (1923), pp. 153-159. Gauthier-Villars.
94 (7) *Sur les triangles homologiques*
Enseignement Math. 23 (1923), pp. 292-297.
95 (4) *Sur les singularités des fonctions harmoniques*
C. R. Acad. Sci. *176* (1923), pp. 1097-1099, 1270-1271. Gauthier-Villars.

96 (4) *Conditions de régularité, conditions d'irrégularité, conditions d'impossibilité dans le problème de Dirichlet*
C. R. Acad. Sci. *178* (1924), pp. 349-354. Gauthier-Villars.
97 (4) *Observations au sujet de Ia Note de M. N. Wiener*
C. R. Acad. Sci. 178 (1924), pp. 1053-1054. Gauthier-Villars.
98 (5) *Sur le théorème de Schoenflies*
Fund. Math. 6 (1924), pp. 96-99.
99 (5) *Remarques sur les deux premières démonstrations du théorème d'Euler relatif aux polyèdres*
Bull. Soc. Math. France 52 (1924), pp. 315-336. Gauthier-Villars.
100 (7) *Sur l'inscription des polygones réguliers*
Enseignement Math. 24 (1924), pp. 264-275.
101 *Sobre los triangulos homologicos* (Traduction du n° 92).
Ver. Mat. Hisp. Amer. 7 (1924), pp. 24-29.
102 (9) *Notice sur Ia vie et les travaux de Camille Jordan. (1838-1922)*
Mém. Acad. Inst. France (2) 58 (1924), pp. 39-66. Gauthier-Villars.
103 (3) *Quelques remarques sur Ia définition de l'aire des surfaces*
Fund. Math. 8 (1925), pp. 160-165.
104 (1) *Evolucion de Ia nocion de integral*
Ver. Mat. Hisp. Amer (2) 2 (1925), pp.65-74 et 97-106.
105 (1) *Sur le développement de Ia notion d'intégrale*
Mat. Tidsskrift B (1926), pp. 54-74.
106 (1) *Sur le développement de Ia notion d'intégrale* (Reproduction de104)
Revue de Métaphysique et de Morale 34 (1926), pp. 149-167.
107 *Sobre Ias dos primeras demostraciones del teorema de Euler relative a los poliedros* (Traduction de 97)
Ver. Mat. Hisp. Amer (2) 2 (1926), pp. 225-237 et 257-265.
108 (1) *Sur Ia recherche des fonctions primitives*
Acta Math. 49 (1926), pp. 245-262.
109 (6) *Sur l'intersection d'un tore et d'une quadrique*
Nouv. Ann. Math. (6) 2 (1927), pp. 225-231. Gauthier-Villars.
110 (1) **Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives**
2e édition, Paris, Gauthier-Villars. (Collection de monographies sur Ia théorie des fonctions) (1928), xv + 342 pages.
111 (8) *Contre Ia fusion des agrégations de mathématiques, masculine et féminine*
Ver. Ens. Secondaire jeunes filles 2 (1928), pp. 49-55.
112 (8) *A propos de Ia mesure des grandeurs*
L'Enseignement Scientifique 1 (1928), pp. 97-103.
113 (9) *Notice sur René Louis Baire, correspondant pour Ia section de géométrie*
C. R. Acad. Sci. 195 (1928), pp. 86-88. Gauthier-Villars.
114 (8) *A propos de l'agrégation féminine de mathématiques*
Ver. Ens. Secondaire jeunes filles 2 (1929), pp. 257-260.
115 (9) *Ch.-J. de Ia Vallée Poussin*
Revue des questions scientifiques (1929), 9 pages.
116 (8) *Sur Ia phobie du nombre*
L'Enseignement Scientifique 2 (1929), pp. 225-229.
117 (2) *Préface du livre de N. Lusin* : «*Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*»
Gauthier-Villars (1930), 5 pages.
118 (8) *Sur Ia formation des professeurs de mathématiques élémentaires*
L'Enseignement Scientifique 4 (1930), pp. 33-38.

119 (9) *Analyse d'un ouvrage de Niels Nielsen : Géomètres français sous Ia Révolution*
Bull. Sci. Math. 54 (1930), pp. 371-386. Gauthier-Villars.

120 (8) *Sur Ia mesure des grandeurs*
Enseignement Math. 31 (1932), pp. 173-206 ; 32 (1933), pp. 23-51 ; 33 (1934), pp. 22-48 et 270-284 ; 34 (1935), pp. 176-219.
Ces articles sont reproduits dans :
La mesure des grandeurs.
Genève, Monographie de l'Enseignement Mathématique 1 (1956), 188 pages.

121 (8) *A propos de Ia symétrie*
L'Enseignement Scientifique 5 (1932), pp. 292-298.

122 (8) *Sur les démonstrations, dites élémentaires, de Ia transcendance de e et de π*
L'Enseignement Scientifique 5 (1932), pp. 257-267.

123 (8) *Les coniques dans l'enseignement secondaire*
L'Enseignement Scientifique 7 (1933), pp. 1-18.

124 (8) *Réponse à I'enquête sur les bases de l'enseignement des mathématiques*
L'Enseignement Scientifique 6 (1933), pp. 290-291.

125 (8) *Lois de Képler et de Newton*
L'Enseignement Scientifique 6 (1933), pp. 129-133.

126 (8) *Introduction des notions de grandeur et d'intégrale*
Bull. Ass. Elèves et anciennes élèves Sèvres (1933), pp. 55-67.

127 (8) *Du choix des définitions*
L'Enseignement Scientifique 8 (1934), pp. 1-13.

128 *Démonstration du théorème fondamental de Ia théorie projective des coniques faite à l'aide des droites focales de M. P. Robert*
Bull. Soc. Math. France 63 (1935), pp. 121-154. Gauthier-Villars.

129 *Encore quelques observations concernant les coniques*
L'Enseignement Scientifique 8 (1935), pp. 294-302.

130 *A propos des théorèmes belges sur les coniques*
C. R. Congrès national des sciences, Bruxelles (1935), pp. 168-174.

131 (7) *Note de géométrie élémentaire*
Bull. Ass. Elèves et anciennes élèves Sèvres (1935), pp. 64-68.

132 (3) *Sur l'existence des plans tangents aux surfaces applicables sur le plan*
Fund. Math. 25 (1935), pp. 157-161.

133 (3) *Détermination de toutes les surfaces réglées applicables sur le plan*
Prakt. Akad. Athénon 10 (1935), pp. 303-311.

134 (8) *Sur le postulatum d' Euclide*
(Serbokroate) Rad Jugoslav. Akad. 251 (1936), pp. 193-194.
(Français) Bull. Int. Acad. Yougoslave Sci. Math. Nat. 29 (1936), 42-43.

135 (3) *Recherche analytique des surfaces réglées applicables sur le plan*
Mathematica (Cluj) 12 (1936), pp. 196-210.

136 (8) *Inscription du polygone de* 17 *côtés et figure inverse d'une circonférence*
L'Enseignement Scientifique 10 (1936), pp. 33-38.

137 (2) *A propos d'un mémoire du regretté Ganesh Prasad*
Bull. Calcutta Math. Soc. 28 (1936), pp. 121-122.

138 *Sur une construction du polygone régulier de* 17 *côtés, due à André Marie Ampère, d'après des documents conservés dans les archives de l' Académie des Sciences*
C. R. Acad. Sci. 204 (1937), pp. 925-928. Gauthier-Villars.

139 (8) *Sur certaines expressions irrationnelles illimitées*
Bull. Calcutta Math. Soc. 29 (1937), pp. 17-28.
140 (4) *Sur Ia méthode de Carl Neumann*
J. Math. Pures Appl. (9) 16 (1937), pp. 205-217 et 421- 423. Gauthier-Villars.
141 (9) *Jubilé scientifique de M. Jacques Hadamard. Allocution prononcée à Ia cérémonie du 7 janvier* 1936
Paris, Gauthier-Villars (1937), pp. 7-14.
142 (9) *Analyse d'un ouvrage de Niels Nielsen*: *Géomètres français du XVIIIe siècle*
Bull. Sci. Math. 41 (1937), pp. 65-73. Gauthier-Villars.
143 (9) *Hommage à Mademoiselle Amieux*
Bull. ass. élèves et anciennes élèves Sèvres (1937), pp. 34-36.
144 (9) *Analyse d'un ouvrage de K. Kommerell*: *Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik*
Bull. Sci. Math. 61 (1937), pp. 33-40. Gauthier-Villars.
145 (7) *Sur les subdivisions des polyèdres réguliers en polyèdres réguliers*
Publ. Math. Univ. Belgrade 6-7 (1937), pp. 183-188.
146 (7) *Sur l'équivalence des polyèdres réguliers*
C. R. Acad. Sci. 207 (1938), pp. 437-439. Gauthier-Villars.
147 (8) *Sur certaines expressions irrationnelles illimitées*
Bull. Calcutta Math. Soc. 30 (1938), pp. 9-10.
148 (8) *Une courbe algébrique à un degré*
L'Enseignement Scientifique 11 (1938). pp. 129-132.
149 *Sur les cercles focaux des coniques*
Enseignement Math. 37 (1938), pp. 5-23.
150 (7) *Sur I'équivalence des polyèdres, en particulier des polyèdres réguliers, et sur Ia dissection des polyèdres réguliers en polyèdres réguliers*
Ann. Soc. Polon. Math. 17 (1938), pp. 193-226.
151 (7) *Sur l'équivalence des polyèdres.*
Ann. Soc. Polon. Math. 18 (1939), pp. 1-3.
152 (7) *Les n-sectrices d'un triangle; extension d’un théorème* de Frank Morley
C. R. Congr. Sci. Math. Liège (1939), pp. 51-61.
153 (7) *Sur les n-sectrices d'un triangle (En mémoire de Frank Morley I860-1937)*
Enseignement Math. 38 (1939), pp. 39-58.
154 (7) *Sur une figure projective*
Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich 85 (1940), pp. 5-19.
155 (5) *Quelques conséquences simples de Ia formule d’Euler*
J. Math. Pures Appl. (9) *19* (1940), pp. 27-43. Gauthier- Villars.
156 (9) *L’oeuvre mathématique de Vandermonde*
Thalès 4 (1940), pp. 28-42.
157 (8) *Les controverses sur Ia théorie des ensembles et Ia question des fondements*
Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques. (1941), pp. 109- 122.
158 (1) *Une fonction continue sans dérivée*
Enseignement Math. 38 (1942), pp. 212-213.
En portugais dans Gaz. Mat. (Lisboa) (4) *14* (1943), pp. 9-10.
159 (9) *Analyse d’un ouvrage de Gabor Szegö*: *Orthogonal polynomials*
Enseignement Math. 38 (1942), pp. 362-363.

160 (7) **Les coniques**
Paris, Gauthier-Villars (1942), VIII + 192 pages).

161 (7) **Leçons sur les constructions géométriques**
Paris, Gauthier-Villars (1950), VI + 304 pages.

162 (9) **Notices d'histoire des mathématiques**
Genève, Monographie de l'Enseignement Mathématique 4 (1958), 116 pages).

163 **En marge du calcul des variations**
Genève, Monographie de l'Enseignement Mathématique *12* (1963), 122 pages).

164 (7) *Octaèdres articulés de Bricard*
Enseignement Math. *13* (1967), pp. 175-185.

165 (1) *A propos de quelques travaux mathématiques récents*
Enseignement Math. *17* (1971), pp. 1-48.

Anexo 2a

Borel, È. Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles
Mathematische Annalen - Volume 60 / 1905.

Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles.

Par

Émile Borel à Paris.

Sur la demande qu'a bien voulu m'adresser la Rédaction de ce Journal, je vais résumer brièvement quelques réflexions qui m'ont été suggérées par l'intéressante Note de M. Zermelo*).

L'un des problèmes les plus importants qu'on puisse se poser relativement à un ensemble quelconque M est le suivant:

A. — *Mettre M sous la forme d'un ensemble bien ordonné.*

Le résultat remarquable obtenu par M. Zermelo peut s'énoncer ainsi: pour savoir résoudre le problème A, il suffit de savoir résoudre le problème B qui suit:

B. — *Étant donné un sous-ensemble quelconque M' de M, choisir dans M' d'une manière déterminée (mais d'ailleurs arbitraire) un élément m', auquel on donnera le nom d'elément distingué de M'; ce choix devra être fait pour tous les sous-ensembles M' de M.*

Il est évident que toute solution du problème A fournit une solution particulière du problème B; mais la réciproque n'était pas évidente et c'est à M. Zermelo que nous devons de savoir que: *les problèmes A et B sont équivalents.*

Mais ce résultat, quel que soit son intérêt, ne saurait être considéré comme fournissant une solution générale du problème A. En effet, pour que le problème B puisse être regardé comme résolu relativement à un ensemble donné M, il faudrait donner un moyen au moins théorique de déterminer l'élément distingué m' d'un sous-ensemble quelconque M'; et ce problème paraît des plus ardus, si l'on suppose, pour fixer les idées, que M coïncide avec le continu.

On ne peut, en effet, regarder comme valable le raisonnement suivant, auquel fait allusion M. Zermelo: «il est possible, dans un ensemble particulier M', de choisir *ad libitum* l'élément distingué m'; ce choix pouvant

*) Math. Annalen t. 59 (1904), 514—516.

être fait pour chacun des ensembles M', peut être fait pour l'ensemble de ces ensembles».

Un tel raisonnement ne me paraît pas mieux fondé que le suivant: «Pour bien ordonner un ensemble M, il suffit d'y choisir arbitrairement un élément auquel on attribuera le rang 1, puis un autre auquel on attribuera le rang 2, et ainsi de suite *transfiniment*, c'est à dire jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les éléments de M par la suite des nombres transfinis». Or, aucun mathématicien ne regardera comme valable ce dernier raisonnement. Il me semble que les objections que l'on peut y opposer valent contre tout raisonnement où l'on suppose un *choix arbitraire* fait une infinité non dénombrable de fois; de tels raisonnements sont en dehors du domaine des mathématiques.*)

Paris, le 1. décembre 1904.

*) On me permettra de citer quelques lignes d'une lettre de M. Baire (de Montpellier), qui me paraissent résumer avec beaucoup de netteté une opinion que je crois très juste et qui est sans doute très répandue: «Personnellement, je doute qu'une commune mesure puisse jamais se trouver entre le continu, ou ce qui, dans l'espèce, revient au même, l'ensemble de toutes les suites d'entiers positifs, et les ensembles bien ordonnés; il y a là, pour moi, deux choses, dont chacune n'est définie que virtuellement, et il y a des chances pour que ces deux virtualités soient irréductibles».

ANEXO 2B

Algumas observações sobre os princípios da teoria dos conjuntos 194

Émile Borel de Paris

Sobre a solicitação que bem quis me enviar a Redação desse Jornal, vou resumir brevemente algumas reflexões que me foram sugeridas pela interessante Nota do Sr. Zermelo[1].

Um dos problemas mais importantes que alguém possa se colocar relativamente a um conjunto qualquer M é o seguinte:

A – *Colocar M sob a forma de um conjunto bem ordenado*.

O resultado notável obtido pelo Sr. Zermelo pode ser enunciado assim: para saber resolver o problema A, é suficiente saber resolver o problema B que segue:

B. – *Sendo dado um subconjunto qualquer M' de M, escolher em M' de uma maneira determinada (mas, de outro lado arbitrária) um elemento m', para o qual se dará o nome de elemento distinguido de M'; essa escolha deverá ser feita para todos os subconjuntos M' de M.*

É evidente que toda solução do problema A fornece uma solução particular do problema B; mas a recíproca não era evidente e é ao Sr. Zermelo que devemos de saber que: *os problemas* A *e* B *são equivalentes.*

[1] Math. Annalen t. 59 (1904), 514-516.

Mas este resultado, qualquer que seja seu interesse, não poderia ser considerado como fornecendo uma solução geral do problema A. De fato, para que o problema B pudesse ser considerado resolvido relativamente a um conjunto dado M, precisaria oferecer um meio ao menos teórico de determinar o elemento distinguido m' de um subconjunto qualquer M'; e este problema parece ser dos mais árduos, se o supomos, para fixar as idéias, que M coincide com o contínuo.

Não podemos, de fato, considerar como válido o raciocínio seguinte, ao qual fez alusão o Sr. Zermelo: "é possível, em um conjunto particular M',
escolher *ad libitum* o elemento distinguido m'; estas escolhas podendo ***//*** ser 195
feitas para cada um desses conjuntos M', pode ser feita para o conjunto desses conjuntos."

Um tal raciocínio não me parece melhor fundamentado que o seguinte: "Para bem ordenar um conjunto M, é suficiente escolher arbitrariamente um elemento ao qual se atribuirá a colocação 1, em seguida um outro ao qual se atribuirá a colocação 2, e assim continuando transfinitamente, isto é, até acabar todos os elementos de M pela seqüência de números transfinitos". Ora, nenhum matemático considerará como válido este último argumento. Parece-me que as objeções que podemos aqui contrapor valem contra todo argumento em que suponhamos uma escolha arbitrária feita uma infinidade não enumerável de vezes; tais argumentos estão fora do domínio da matemática.

Paris, 1 de dezembro de 1904.

Anexo 3A

BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HADAMARD

Cinq lettres sur la théorie des ensembles

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 261-273.

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__261_1>

CORRESPONDANCE.

CINQ LETTRES SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES.

I. — *Lettre de M. Hadamard à M. Borel.*

J'ai lu avec intérêt les arguments que tu opposes (2e Cahier du tome LX des *Mathematische Annalen*) à la démonstration de M. Zermelo parue dans le Tome précédent. Je ne partage cependant pas ton opinion à ce sujet. Je n'admets pas, tout d'abord, l'assimilation que tu établis entre le fait qui sert de point de départ à M. Zermelo et le raisonnement qui consisterait à numéroter les éléments de l'ensemble les uns après les autres, ce numérotage étant poursuivi *transfiniment*. Il y a, en effet, une différence fondamentale entre les deux cas : le raisonnement qui vient d'être cité en dernier lieu comporte une série de choix successifs *dont chacun dépend des précédents;* c'est pour cela que son application transfinie est inadmissible. Je ne vois aucune analogie à établir, au point de vue qui nous occupe, entre les choix en question et ceux dont parle M. Zermelo, lesquels sont *indépendants les uns des autres*.

C'est d'ailleurs dans le cas d'une infinité *non dénombrable* de choix que tu récuses cette manière d'opérer; mais, à mon tour, je ne vois pas de différence, à cet égard, entre le cas d'une infinité non dénombrable et celui d'une infinité dénombrable. La différence serait manifeste s'il y avait une dépendance quelconque entre les choix en question, parce qu il faudrait alors avoir égard à l'ordre dans lequel on les opérerait : elle me paraît, encore une fois, s'évanouir complètement dans le cas des choix indépendants.

Ce qui est certain, c'est que M. Zermelo ne donne aucun moyen d'exécuter *effectivement* l'opération dont il parle, et qu'il reste douteux que personne puisse, dans la suite, indiquer ce moyen. Il aurait été assurément plus intéressant de résoudre le problème sous cette forme; mais la question ainsi posée (détermination effective de la correspondance cherchée) n'en est pas moins complètement distincte de celle que nous examinons (une telle correspondance existe-t-elle?) : il y a entre elles toute la différence, laquelle est fondamentale, qui existe entre ce que M. Tannery [1] appelle *une correspondance* qui peut être *définie* et une correspondance qui peut être *décrite*. Plusieurs questions importantes de Mathématiques changeraient totalement de sens, et de solutions, si l'on substituait le second mot au premier. Tu emploies des correspondances dont tu constates l'*existence* sans pouvoir cependant les *décrire,* dans ton important raisonnement relatif aux séries qui admettent leur cercle de convergence comme coupure : si l'on se bornait aux séries entières dont la loi de formation peut être décrite, l'opinion ancienne (à savoir, que les séries entières admettant leur cercle de convergence comme coupure sont l'exception) devrait, à mon sens, être considérée comme la vraie. C'est d'ailleurs une pure question de sentiment; car la notion de correspondance « qui peut être décrite » est, pour reprendre ton expression, « en dehors des Mathématiques »; elle relève du domaine de la psychologie et est relative à une propriété de notre esprit, c'est une question de cette nature que celle de savoir si la correspondance employée par M. Zermelo pourra jamais être indiquée *en fait*.

Quant à l'existence de cette correspondance, elle me paraît aussi adéquate à la possibilité de prendre *un* élément dans un ensemble quelconque donné, que la proposition suivante :

A. *Un nombre x étant donné, il existe des nombres y qui ne*

[1] *Revue générale des Sciences*, t. VIII, 1897, p. 133 et suiv.

sont liés à x par aucune équation algébrique à coefficients entiers,

l'est à celle-ci :

B. *Il existe des fonctions y de x telles que, pour aucune valeur de x, y n'ait ni une valeur algébrique, ni une valeur liée à x par une équation algébrique à coefficients entiers.*

. On pourrait d'ailleurs, sans doute, former de telles fonctions. Mais ce que je prétends, c'est que cela n'est nullement nécessaire pour affirmer l'exactitude du théorème B ; et je crois que beaucoup de mathématiciens ne prendraient pas plus que moi cette peine s'ils avaient à employer le théorème en question. — J. Hadamard.

II. — *Lettre de M. Baire à M. Hadamard.*

Borel me communique la lettre où vous lui exposez votre manière de voir sur le grand débat soulevé par la Note Zermelo. Je vous demande la permission de vous adresser quelques réflexions qu'elle me suggère.

Je suis, vous le savez, de l'avis de Borel, en gros, et si je m'en écarte, ce sera pour aller plus loin que lui.

Supposons qu'on fasse un effort pour essayer d'appliquer la méthode de Zermelo à l'ensemble M des suites d'entiers positifs. On prend dans M un élément distingué m_1 ; reste l'ensemble M — m_1, dans lequel on prend un élément distingué m_2 ; etc. Ces choix successifs dépendent bien chacun de ceux qui le précèdent. Mais, dites-vous avec M. Zermelo, les choix sont indépendants les uns des autres, parce qu'il admet comme point de départ *un choix d'élément distingué fait dans* TOUTE *partie de* M. Ceci ne me paraît pas satisfaisant : c'est, pour moi, dissimuler la difficulté *en la noyant dans une difficulté plus grande.*

L'expression *ensemble donné* est employée à chaque instant : a-t-elle un sens ? Pas toujours, selon moi. Dès qu'on parle d'infini (même dénombrable, et c'est ici que je suis tenté d'être plus radical que Borel), l'assimilation, *consciente ou inconsciente,* avec un sac de billes qu'on donne de la main à la main, doit complètement disparaître, et nous sommes, à mon avis, dans le *virtuel,* c'est-à-dire que nous faisons des conventions qui nous permettent ultérieurement, un objet étant défini *par une nouvelle convention,* d'affirmer certaines propriétés de cet objet. Mais croire qu'on est allé plus loin ne me paraît pas légitime. En particulier, de ce qu'un ensemble est donné (nous serons d'accord pour dire, par exemple, que nous nous donnons l'ensemble des suites d'entiers positifs), *il est faux pour moi de considérer les parties de cet ensemble comme données.* A plus forte raison je refuse d'attacher un sens au fait de concevoir un choix fait dans chaque partie d'un ensemble.

M. Zermelo dit : « Concevons qu'à tout ensemble partiel de M corresponde un de ses éléments. » C'est là une conception qui n'a rien de contradictoire, d'accord. Aussi, tout ce qu'il démontre pour moi, c'est que nous n'apercevons pas de contradiction à concevoir que, dans tout ensemble qu'on nous définira, les éléments aient entre eux des relations de position identiques à celles qu'ont les éléments des ensembles bien ordonnés. Pour dire après cela qu'on a établi que tout ensemble peut être mis sous la forme d'un ensemble bien ordonné, il faut donner aux mots une extension extraordinaire et, j'ajouterai, trompeuse.

Dans ce qui précède, je ne suis arrivé que bien incomplètement à rendre ma pensée. J'ai dit ma manière de voir dans la phrase qu'a bien voulu transcrire Borel dans sa Note. Pour moi, le progrès, dans cet ordre d'idées, consisterait à délimiter le domaine de ce qui est définissable. Et, en fin de compte, en dépit des apparences, tout doit se ramener au fini. — R. BAIRE.

III. — *Lettre de M. Lebesgue à M. Borel.*

Vous me demandez mon opinion sur la Note de M. Zermelo (*Math. Annalen,* t. LIX) sur les objections que vous lui avez faites (*Math. Annalen,* t. LX) et sur la lettre de M. Hadamard que vous me communiquez; la voici. Excusez moi d'être long, j'ai essayé d'être clair.

Tout d'abord je suis d'accord avec vous pour ceci : M. Zermelo a très ingénieusement démontré que l'on savait résoudre le problème A :

A. *Mettre un ensemble* M *sous forme bien ordonnée,*

toutes les fois qu'on savait résoudre le problème B :

B. *Faire correspondre à chaque ensemble* M' *formé avec des éléments de* M *un élément particulier* m' *de* M'.

Malheureusement le problème B n'est facile à résoudre, à ce qu'il semble, que pour les ensembles qu'on sait bien ordonner; par suite on n'a pas une solution générale du problème A.

Je doute fort qu'on puisse donner une solution générale de ce problème, du moins si l'on admet, avec M. Cantor, que définir un ensemble M c'est nommer une propriété P appartenant à certains éléments d'un ensemble N précédemment défini et caractérisant, par définition, les éléments de M. En effet, avec cette définition, on ne sait rien sur les éléments de M d'autre que ceci : ils possèdent tous les propriétés *inconnues* des éléments de N et ce sont les seuls qui ont la propriété P *inconnue*. Rien là-dedans ne permet de distinguer deux éléments de M, encore moins de les classer comme il faudrait le faire pour résoudre A.

Cette objection, faite *a priori* à tout essai de solution de A, tombe évidemment si l'on particularise N ou P; l'objection tombe, par exemple, si N est l'ensemble des nombres. Tout ce que l'on peut espérer faire de général, c'est indiquer des problèmes, tels que B, dont la résolution entraînerait celle de A et possibles dans certains cas, particuliers, mais qui se rencontrent fréquemment. D'où l'intérêt, à mon avis, du raisonnement de M. Zermelo.

Je crois que M. Hadamard est plus fidèle que vous à la pensée de M. Zermelo en interprétant la Note de cet auteur comme un essai, non pas de résolution effective de A, mais de démonstration d'existence de la solution. La question revient à celle-ci, peu nouvelle : *peut-on démontrer l'existence d'un être mathématique sans le définir?*

C'est évidemment une affaire de convention; mais je crois qu'on ne peut bâtir solidement qu'*en admettant qu'on ne démontre l'existence d'un être qu'en le définissant*. A ce point de vue, voisin de celui de Kronecker et de M. Drach, il n'y a pas à distinguer entre A et le problème C :

C. *Tout ensemble peut-il être bien ordonné?*

Je n'aurais rien de plus à dire si la convention que j'ai indiquée était universellement admise; mais je dois avouer que l'on emploie souvent, et que j'ai moi-même souvent employé, le mot *existence* dans d'autres sens. Par exemple, lorsqu'on interprète un raisonnement bien connu de M. Cantor en disant : *il existe une infinité non dénombrable de nombres,* on ne donne cependant pas le moyen de nommer une telle infinité. On montre seulement, vous l'avez dit avant moi, que, chaque fois qu'on aura une infinité dénombrable de nombres, on pourra définir un nombre ne faisant pas partie de cette infinité. (Le mot *définir* a tout le temps le sens de : *nommer une propriété caractéristique du défini*). Une existence de cette nature peut être utilisée dans un raisonnement et de la manière suivante : une propriété est vraie, si, la nier, conduit à admettre qu'on peut ranger tous les nombres en suite dénombrable. Je crois qu'elle ne peut intervenir que de cette manière.

M. Zermelo utilise l'*existence* d'une *correspondance* entre les sous-ensembles de M et certains de leurs éléments. Vous voyez que, quand même l'existence de ces correspondances serait hors de doute, suivant la manière dont cette existence aurait été prouvée, il ne serait pas évident qu'on ait le droit d'utiliser cette existence comme le fait M. Zermelo.

J'arrive au raisonnement que vous énoncez ainsi : « Il est possible, dans un ensemble particulier M′, de choisir *ad libitum* l'élément distingué *m′*; ce choix pouvant être fait pour chacun des ensembles M′, peut être fait pour l'ensemble de ces ensembles », et duquel semble résulter l'existence des correspondances.

Tout d'abord, M′ étant donné, est-il évident qu'on puisse choisir *m′*? Cela serait évident si M′ existait, au sens presque kroneckérien que j'ai dit, puisque dire que M′ existe serait alors affirmer que l'on sait nommer certains de ses éléments. Mais étendons le sens du mot *exister*. L'ensemble Γ des correspondances entre les sous-ensembles M′ et les éléments distingués *m′ existe* certainement pour MM. Hadamard et Zermelo; ce dernier représente même le nombre de ses éléments par un produit transfini. Cependant, sait-on choisir un élément de Γ? Non, évidemment, puisque ce serait donner de B, pour M, une solution déterminée.

Il est vrai que j'emploie le mot *choisir* dans le sens de *nommer* et qu'il suffit peut-être pour le raisonnement de M. Zermelo que *choisir* signifie *penser à*. Mais il faut cependant remarquer qu'on n'indique pas celui auquel on pense et qu'il est néanmoins nécessaire au raisonnement de M. Zermelo qu'on pense à *une correspondance déterminée toujours la même*. M. Hadamard croit, il me semble, qu'il n'est pas nécessaire qu'on démontre qu'on peut *déterminer* un élément (et un seul); c'est de là, à mon avis, que viennent les différences d'appréciation.

Pour mieux vous faire sentir la difficulté que je vois, je vous rappelle que, dans ma thèse, j'ai démontré l'existence (sens non kroneckérien et peut-être difficile à préciser) d'ensembles mesurables non mesurables B, mais il restait douteux pour moi qu'on pût jamais en nommer un. Dans ces conditions, aurais-je eu le droit de fonder un raisonnement sur cette hypothèse : *je suppose choisi un ensemble mesurable non mesurable* B, alors que je doutais que personne pût jamais en nommer un?

Ainsi je vois déjà une difficulté dans ceci « dans un M′ déterminé je puis choisir un *m′* déterminé », puisqu'il existe des ensembles (l'ensemble C par exemple, qu'on pourrait considérer comme un ensemble M′ provenant d'un ensemble plus général) dans lesquels il est peut-être impossible de choisir un élément. Il y a ensuite la difficulté que vous signalez relative à l'infinité des choix, ce qui fait que, si l'on veut considérer le raisonnement de M. Zermelo comme tout à fait général, il faut admettre qu'on parle d'une infinité de choix, infinité de puissance peut-être très grande; on ne donne d'ailleurs ni la loi de cette infinité, ni la loi d'un des choix; on ne sait pas s'il est possible de nommer une loi définissant un ensemble de choix ayant la puissance de l'ensemble des M′; on ne sait pas s'il est possible, étant donné un M′, de nommer un *m′*.

En résumé, quand j'examine de près le raisonnement de M. Zermelo, comme d'ailleurs plusieurs raisonnements généraux sur les ensembles, je le trouve trop peu kroneckérien pour lui attribuer un sens (en tant que théorème d'existence de la solution de C, seulement, bien entendu).

Vous faites allusion à ce raisonnement : « Pour bien ordonner un ensemble il suffit d'y choisir un élément, puis un autre, etc. » Il est certain que ce raisonnement présente des difficultés énormes, plus grandes encore, au moins en apparence, que celui de M. Zermelo; et je suis tenté de croire avec M. Hadamard qu'il y a progrès à avoir remplacé une infinité de choix successifs et dépendant les uns des autres par une infinité, non ordonnée, de choix indépendants. Il n'y a peut-être là qu'une illusion et la simplification apparente tient peut-être seulement à ce que l'on doit remplacer une infinité ordonnée de choix par une infinité non ordonnée, mais de puissance plus grande. De sorte que le fait qu'on peut ramener à la seule difficulté, placée au début du raisonnement de M. Zermelo, toutes les difficultés du raisonnement simpliste que vous citez prouve peut-être simplement que cette seule difficulté est très grande. En tout cas, elle ne me paraît pas disparaître parce qu'il s'agit d'un ensemble non ordonné de choix indépendants. Par exemple, si je crois à l'existence de fonctions $y(x)$ telles que, quel que soit x, y ne soit jamais lié à x par une équation algébrique à coefficients entiers, c'est parce que je crois, avec M. Hadamard, qu'il est possible d'en construire; mais ce n'est pas, pour moi, la conséquence immédiate de l'existence, quel que soit x, de nombres y qui ne soient liés à x par aucune équation à coefficients entiers (¹).

Je suis pleinement d'accord avec M. Hadamard quand il déclare que la difficulté qu'il y a à parler d'une infinité de choix sans en donner la loi est aussi grave, qu'il s'agisse ou non d'une infinité dénombrable. Quand on dit, comme dans le raisonnement que vous critiquiez, « ce choix pouvant être fait pour chacun des ensembles M', peut être fait pour l'ensemble de ces ensembles », on ne dit rien si l'on n'explique pas les termes employés. Faire un choix, ce peut être écrire ou nommer l'élément choisi; faire une infinité de choix, ce ne peut être écrire ou nommer les éléments choisis, un à un : la vie est trop courte. Il faut donc dire ce que c'est faire. On entend par là, en général, que c'est donner la loi qui définit les éléments choisis, mais cette loi est pour moi, comme pour M. Hadamard, aussi indispensable, qu'il s'agisse d'une infinité dénombrable ou non.

Peut-être cependant suis-je encore d'accord avec vous sur ce point parce que, si je n'établis pas de différences théoriques entre

---

(¹) En corrigeant les épreuves, j'ajoute qu'en fait le raisonnement, par lequel on légitime ordinairement l'énoncé A de M. Hadamard (p. 263), légitime en même temps l'énoncé B. Et, à mon avis, c'est parce qu'il légitime B qu'il légitime A.

les deux infinités, au point de vue pratique, je fais une grande différence entre elles. Quand j'entends parler d'une loi définissant une infinité transfinie de choix, je suis très méfiant, parce que je n'ai jamais encore vu de pareilles lois, tandis que je connais des lois définissant une infinité dénombrable de choix. Mais ce n'est qu'une affaire de routine et, à la réflexion, je vois parfois des difficultés aussi graves, à mon avis, dans des raisonnements où n'interviennent qu'une infinité dénombrable de choix que dans des raisonnements où il y en a une transfinité. Par exemple, si je ne considère pas comme établi par le raisonnement classique que tout ensemble de puissance supérieure au dénombrable contient un ensemble dont la puissance est celle de l'ensemble des nombres transfinis de la classe II de M. Cantor, je n'attribue pas plus de valeur à la méthode par laquelle on démontre qu'un ensemble non fini contient un ensemble dénombrable. Bien que je doute fort qu'on nomme jamais un ensemble qui ne soit ni fini, ni infini, l'impossibilité d'un tel ensemble ne me paraît pas démontrée. Mais je vous ai déjà parlé de ces questions. — H. Lebesgue.

IV. — *Lettre de M. Hadamard à M. Borel.*

La question me paraît tout à fait claire maintenant, après la lettre de M. Lebesgue. De plus en plus nettement, elle tient tout entière dans la distinction, exposée dans l'article de M. Tannery, entre ce qui est *déterminé* et ce qui peut être *décrit*.

Lebesgue, Baire et toi, adoptez à cet égard la manière de voir de Kronecker, que je croyais jusqu'ici lui être particulière. Vous répondez négativement à la question posée (ci-dessus, p. 263) par M. Lebesgue : Peut-on démontrer l'existence d'un être mathématique sans le définir? J'y réponds affirmativement. Je prends pour mienne, autrement dit, la réponse que Lebesgue fait lui-même (p. 266) à son objection relative à l'ensemble Γ.

Qu'il *nous* soit impossible, au moins actuellement, de *nommer* un élément de cet ensemble, j'en conviens. C'est là la question pour vous; ce ne l'est pas pour moi.

Il n'y a qu'un point sur lequel il me semble que Lebesgue ne soit pas logique avec lui-même. C'est lorsqu'il se reconnaît ou ne se reconnaît pas le droit d'utiliser une existence, suivant la manière dont elle a été démontrée. Pour moi, les *existences* dont il parle sont des faits comme les autres. Sinon, elles n'ont pas lieu.

La question se pose de même vis-à-vis de Baire. Je n'aimerais pas beaucoup la placer, comme il le fait (p. 264), à la façon de M. Hilbert, sur le terrain du *non contradictoire,* qui me paraît encore relever de la psychologie et faire entrer en ligne de compte les propriétés de nos cerveaux. Je ne comprends même pas bien comment M. Zermelo peut avoir *démontré* que *nous n'apercevons* pas de contradiction, etc. Cela ne se *démontre* pas, cela se *constate :* on en a aperçu ou l'on n'en a pas aperçu.

Ce point écarté, la question principale, celle de savoir si l'ensemble peut être ordonné, n'a évidemment pas pour Baire (pas plus que pour Lebesgue et toi) le même sens que pour moi. Je dirais plutôt : l'ordination est-elle possible? (et non pas même peut-*on* ordonner, de crainte d'avoir à penser à ce qu'est cet *on*) : Baire dirait : pouvons-*nous* ordonner? Question toute subjective, à mon avis.

Ce sont donc deux conceptions des Mathématiques, deux mentalités qui sont en présence. Je ne vois, dans tout ce qui a été dit jusqu'ici, aucun motif de changer la mienne. Je ne prétends pas l'imposer. Tout au plus ferai-je valoir en sa faveur les arguments que j'ai indiqués dans la *Revue générale des Sciences* (30 mars 1905), savoir :

1° Je crois que le débat est au fond le même qui s'est élevé entre Riemann et ses prédécesseurs, sur la notion même de fonction. La *loi* qu'exige Lebesgue me paraît ressembler fort à l'expression (1) analytique que réclamaient à toute force les adversaires de Riemann. Et même à une expression analytique pas trop bizarre. Non seulement la *numérabilité* des choix ne me paraît pas changer la question, mais il en est de même de l'*unicité*. Je ne vois pas

(1) Je crois devoir insister un peu sur ce point de vue qui, s'il faut dire toute ma pensée, me paraît former le fond même du débat. Il me semble que le progrès véritablement essentiel des Mathématiques, à partir de l'invention même du Calcul infinitésimal, a consisté dans l'annexion de notions successives qui, les unes pour les Grecs, les autres pour les géomètres de la Renaissance ou les prédécesseurs de Riemann, étaient « en dehors des Mathématiques », parce qu'il était impossible de les décrire.

comment nous aurions le droit de dire : « Pour chaque valeur de x il existe un nombre satisfaisant à .... Soit y ce nombre... », alors que, parce que « la mariée est trop belle », nous ne pouvons pas dire : « Pour chaque valeur de x il existe une infinité de nombres satisfaisant à .... Soit y l'un de ces nombres ... ».

2° Les choix arbitraires de Tannery conduisent à des nombres ν, que *nous serions* incapables de définir. Je ne conçois pas que ces nombres n'existent pas.

Quant aux raisonnements présentés par M. Bernstein (*Math. Annalen*, t. LX, p. 187), et, par conséquent, à ses objections à la démonstration de M. Zermelo, je ne les considérerais pas, pour ma part, comme probants. Cette opinion est d'ailleurs indépendante de la question que nous discutons actuellement.

M. Bernstein part du paradoxe de M. Burali-Forti (*Circolo matematico di Palermo*, 1897) relatif à l'ensemble W de *tous* les nombres ordinaux. Pour échapper à la contradiction mise en évidence par M. Burali-Forti, il suppose le nombre ordinal W tel qu'il soit impossible de lui ajouter 1. Cette opinion est, pour moi, inadmissible, ainsi que les arguments imaginés en sa faveur par M. Bernstein. L'ordre établi (d'après la théorie de M. Cantor) entre les éléments de W et l'élément supplémentaire (c'est à cet ordre que s'attaque l'auteur) est une pure *convention*, qu'on est toujours libre de faire et à laquelle les propriétés de W, quelles qu'elles soient, ne sauraient mettre aucun obstacle.

La solution est autre. C'est l'existence même de l'ensemble W qui implique contradiction. Dans sa définition, la définition générale du mot *ensemble* est incorrectement appliquée. On n'a le droit de former un ensemble qu'avec des objets préalablement existants et il est aisé de voir que la définition de W suppose le contraire.

Même observation pour *l'ensemble de tous les ensembles* (Hilbert, Congrès de Heidelberg).

Revenons à la question primitive. Voici encore, à cet égard, non un argument, car je crois que nous coucherons éternellement sur nos positions, mais une conséquence de tes principes.

Cantor a considéré l'ensemble de toutes les fonctions qui, dans l'intervalle (0, 1), ne prennent que les valeurs 0, 1. Cet ensemble a, pour moi, un sens clair et sa puissance est $2^{\aleph}$, comme l'énonce Cantor. De même, l'ensemble de toutes les fonctions de x a pour moi un sens, et je vois clairement que sa puissance est $\aleph^{\aleph}$.

Quel sens tout cela a-t-il pour toi? Il me paraît évident que cela ne peut en avoir aucun. Car à toute fonction tu imposes une condition supplémentaire qui n'a aucun sens mathématique : celle d'être *descriptible* pour *nous*.

Ou plutôt, voici ce que cela signifie : on ne doit considérer, à ton point de vue, que les fonctions définissables en un nombre fini de mots. Mais, à ce compte, les deux ensembles ainsi formés sont *dénombrables,* ainsi que tous les ensembles possibles, d'ailleurs. — J. Hadamard.

V. — *Lettre de M. Borel à M. Hadamard.*

... Je voudrais d'abord te signaler une intéressante remarque faite par M. Lebesgue à la séance de la Société du 4 mai : Comment M. Zermelo peut-il être assuré qu'aux divers points de son raisonnement il parle *du même* choix de l'élément distingué, puisqu'il ne le caractérise par rien *pour lui-même* (il ne s'agit même pas ici d'un contradicteur possible; il s'agit d'être cohérent avec soi-même).

Quant à ta nouvelle objection, voici quelle est ma situation à son égard.

Je n'aime guère écrire des alephs, mais je consens cependant à faire des raisonnements équivalents à ceux dont tu parles, sans me faire guère illusion sur leur valeur intrinsèque, *mais en les regardant comme pouvant guider pour d'autres raisonnements plus sérieux.* Comme exemple pratique, je puis te citer la Note III que j'ai insérée à la fin de mon dernier petit Livre (*Leçons sur les fonctions de variables réelles, etc.,* rédigées par Maurice Fréchet); le raisonnement qui y est employé est manifestement suggéré par le raisonnement de Cantor, que j'ai rapporté dans mes premières *Leçons sur la théorie des fonctions* (1), page 107.

(1) Dans les Notes I et II de ce petit Livre, je fais constamment des raisonnements du type de ceux que tu me refuses le droit de faire; je suis d'ailleurs à chaque instant rempli de scrupules et chacune de ces deux Notes se termine par une phrase très restrictive.

La forme que j'adopte dans cette Note III n'est pas encore absolument satisfaisante, comme je l'indique au bas de la dernière page de mon Livre; mais le raisonnement analogue de M. Lebesgue dans son Mémoire paru dans le *Journal de Jordan* (1905) est, je crois, tout à fait irréprochable, en ce sens qu'il conduit à un résultat précis, exprimable au moyen d'un nombre fini de mots; il a cependant son origine dans celui de Cantor.

On peut se demander quelle est la valeur réelle de ces raisonnements que je ne regarde pas comme valables absolument et qui cependant conduisent ultérieurement à des résultats effectifs. Il semble en effet que, s'ils étaient dépourvus de toute valeur, ils ne pourraient conduire à rien, car ce seraient des assemblages de mots vides de sens. Je crois qu'on serait ainsi trop sévère et qu'ils ont une valeur analogue à celle de certaines théories de Physique mathématique, par lesquelles nous ne prétendons pas exprimer la réalité, mais avoir un guide qui nous permette, par analogie, de découvrir des phénomènes nouveaux, qu'il reste ensuite à vérifier. Il y aurait un travail considérable à faire pour savoir quel est le sens réel et précis que l'on peut attribuer à des raisonnements de ce genre; ce travail est inutile ou du moins hors de proportion avec son utilité; les rapports avec le concret de ces raisonnements trop abstraits apparaissent d'eux-mêmes lorsque le besoin s'en fait sentir.

Je serai d'accord avec toi sur le fait qu'il est contradictoire de parler de l'ensemble de tous les ensembles, car, par le raisonnement de la page 107 citée plus haut, on peut former un ensemble de puissance plus grande, mais je crois que cette contradiction tient à ce que l'on introduit des ensembles non définis réellement. — Em. Borel.

ANEXO 3B

CINCO CARTAS SOBRE A TEORIA DOS CONJUNTOS

I. – Carta do Sr Hadamard ao Sr. Borel 261

Li com interesse os argumentos com os quais você contraria (2º Caderno do volume LX dos *Mathematische Annalen*) a demonstração do Sr Zermelo publicada no volume anterior. Entretanto, não compartilho de sua opinião a respeito desse assunto. Primeiramente, não admito a assimilação que você estabelece entre o fato que serve de ponto de partida ao Sr Zermelo e o raciocínio que consistiria em enumerar os elementos do conjunto uns após os outros, esta enumeração sendo continuada *transfinitamente*. Com efeito, há uma diferença fundamental entre os dois casos: o raciocínio citado recentemente comporta uma série de escolhas sucessivas *em que cada uma depende das anteriores*; por isto que sua aplicação transfinita é inadmissível. Não vejo nenhuma analogia a estabelecer, do ponto de vista que nos ocupe, entre as escolhas em questão e aquelas das quais fala o Sr. Zermelo que são *independentes umas das outras.*

Aliás, é no caso de uma infinidade não *enumerável* de escolhas, que você recusa este modo de operar; mas, no que diz respeito a mim, não vejo diferença, a esse respeito, entre o caso de uma infinidade não enumerável e aquele de uma infinidade enumerável. A diferença ***II*** seria óbvia 262
se houvesse uma dependência qualquer entre as escolhas em questão, porque deveria, então, ser considerada a ordem na qual seriam operadas: ela me parece, uma vez mais, desaparecer completamente no caso de escolhas independentes.

O certo é que o Sr. Zermelo não oferece nenhum meio para realizar *efetivamente* a operação da qual fala e resta dúvidas que alguém possa, na seqüência, indicar esse meio. Teria sido, seguramente, mais interessante resolver o problema sob esta forma; mas a questão assim colocada (determinação efetiva da correspondência pesquisada) não é menos completamente distinta daquela que nós examinamos (uma tal correspondência existe?): há entre elas toda a diferença, que é fundamental, que existe entre aquilo que o Sr Tannery[1] chama *uma correspondência* que pode ser *definida* e uma correspondência que pode ser *descrita*. Várias questões importantes de Matemática mudariam totalmente de sentido e de soluções, se substituíssemos a segunda palavra pela primeira. Você emprega correspondências cuja *existência* você constata sem poder, entretanto, *descrevê-las*, em seu importante argumento relativo às séries que admitem seu círculo de convergência como corte: se nos limitássemos às séries inteiras, cuja lei de formação pode ser descrita, a opinião antiga (a saber, que as séries inteiras admitindo seu círculo de convergência como corte são exceções) deveria, a meu ver, ser considerada como a verdadeira. Aliás, é pura questão de sentimento; pois a noção de correspondência "que pode ser descrita" é para recuperar sua expressão, "fora da Matemática"; ela procede do domínio da psicologia e é relativa a uma propriedade de nosso espírito, é mais uma questão dessa natureza do que aquela de saber se a correspondência usada pelo Sr. Zermelo poderá jamais ser indicada *de fato*.

Quanto à existência desta correspondência, ela me parece tão adequada à possibilidade de tomar um elemento em um conjunto qualquer dado, quanto à proposição seguinte:

A) um número x sendo dado, existem números y que não **//** 263
são ligados a x por nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros,
Isto é:

B) existem funções y de x tais que, para nenhum valor de x, y não tem nem um valor algébrico, nem um valor ligado à x por uma equação algébrica com coeficientes inteiros.

Aliás, poderíamos, sem dúvida, formar tais funções. Mas acho, que isso não é necessário, de modo algum, para afirmar a exatidão do teorema B; e acredito que muitos matemáticos, assim como eu, não se dariam esse trabalho se tivessem de usar o teorema em questão. – J. Hadamard.

[1] Revue génerale des Sciences. T. VIII. 1897. p. 133 et suiv.

II. – Carta do Sr. Baire ao Sr. Hadamard

Borel transmitiu-me a carta em que você lhe expõe sua concepção sobre o grande debate levantado pela Nota de Zermelo. Peço-lhe permissão para lhe enviar algumas reflexões que ela me sugeriu.

Eu sou, Você sabe, da opinião de Borel, em geral, e se eu me afasto dela, será para ir mais longe que ele.

Suponhamos que se faça um esforço para tentar aplicar o método de Zermelo no conjunto M da seqüência dos inteiros positivos. Tomamos em M um elemento distinguido m_1; fica o conjunto M-m_1, no qual tomamos um elemento distinguido m_2; etc. Estas escolhas sucessivas dependem muito de cada uma daquelas que a precedem. Mas, você diz, com o Sr Zermelo, as escolhas são independentes umas das outras, porque admite como ponto de partida *uma escolha de um elemento distinguido feito em TODA parte de M.* Isto não me parece satisfatório: é, para mim, esconder a dificuldade, *diluindo-a em uma dificuldade maior*.

A expressão *conjunto dado* é empregada a cada momento: ela tem um sentido? Nem sempre, para mim. Desde que se fale de infinito (mesmo enumerável, e é aqui que tentei ser mais radical que Borel), a assimilação, consciente ou inconsciente, com um saco de bolas que se dá de mão em mão, deve completamente desaparecer, e estamos, a meu ver, no
virtual, **//** isto é, fazemos convenções que nos permitem, subseqüentemente, 264
um objeto sendo definido *por uma nova convenção*, afirmar algumas propriedades desse objeto. Mas acreditar que se está indo além, não me parece legítimo. Em particular, dado um conjunto (estaremos de acordo para dizer, por exemplo, que nos damos o conjunto das seqüências de inteiros positivos), *é falso, para mim, considerar as partes desse conjunto como dadas.* Com mais razão, recuso dar um sentido ao fato de conceber uma escolha feita em cada parte de um conjunto.

Sr. Zermelo fala: "Concebemos que para todo subconjunto de M corresponde um de seus elementos." É uma concepção que não tem nada de contraditório, correto. Também, tudo o que ele demonstra, para mim, é que não percebemos contradições ao conceber que, em todo conjunto que se nos definirá, os elementos tenham entre eles relações de posição idênticas àquelas que têm os elementos dos conjuntos bem ordenados. Para dizer, depois disso, que se estabeleceu que todo conjunto pode ser colocado sob a forma de um conjunto bem ordenado, é preciso dar às palavras uma extensão extraordinária e eu acrescentarei enganosa.

No que precede, só cheguei muito incompletamente a expor meu pensamento. Eu expus meu modo de ver na frase que Borel cita em sua nota. Para mim, o progresso, nesta ordem de idéias, consistiria em delimitar o domínio do que é definível. E, finalmente, apesar das aparências, tudo deve restringir-se ao finito. – R. Baire.

III. – Carta do Sr. Lebesgue ao Sr. Borel

Você pede minha opinião a respeito da Nota do Sr. Zermelo (Math. Annalen, volume. LIX) sobre as objeções que você lhe fez (Math. Annalen, volume LX) e sobre a carta do Sr. Hadamard que você me comunica; aqui está ela. Desculpe-me de ser longo, eu tentei ser claro.

Primeiramente, estou de acordo com você pois: o Sr. Zermelo demonstrou com habilidade que se sabia resolver o problema A:

A. colocar um conjunto M sob a forma bem ordenada, todas 265
as vezes que se sabia resolver o problema B:

B. fazer corresponder a cada subconjunto M', formado por elementos de M, um elemento particular m' de M'.

Infelizmente, o problema B é fácil de resolver, ao que parece, somente para os conjuntos que se sabe bem ordenar; em conseqüência não se tem uma solução geral do problema A.

Duvido muito que se possa dar uma solução geral desse problema, pelo menos, se admitirmos, como o Sr. Cantor, que definir um conjunto M é nomear uma propriedade P, pertencendo a alguns elementos de um conjunto N previamente definido e caracterizando, por definição, os elementos de M. De fato, com esta definição, não se sabe sobre os elementos de M nada mais que isso: eles possuem todas as propriedades *desconhecidas dos elementos de N e* são os únicos que possuem a propriedade P *desconhecida*. Nada disso permite distinguir dois elementos de M, ainda menos classificá-los como seria preciso fazer para resolver A.

Esta objeção, feita *a priori* para toda tentativa de solução de A, cai evidentemente se particularizamos N ou P; a objeção desaparece, por exemplo, se N é o conjunto dos números. Em geral, tudo o que se pode esperar fazer, é indicar problemas, tal como B, cuja resolução impulsionaria aquela de A e que são possíveis em alguns casos particulares, mas, que encontramos com freqüência. Daí, a meu ver, o interesse pelo argumento do Sr. Zermelo.

Acredito que o Sr. Hadamard é mais fiel que vocês ao pensamento do Sr. Zermelo, interpretando a Nota deste autor como uma tentativa, não de resolução efetiva de A, mas, de demonstração da existência da solução. A questão significa algo pouco novo: *pode-se demonstrar a existência de um ser matemático sem o definir?*

É evidentemente um assunto de convenção; mas eu acredito que só se pode construir solidamente, admitindo que só se demonstra a existência de um ser, definindo-o. Com este ponto de vista, próximo àquele de

Kronecker e do Sr. Drach, não há como distinguir entre A e o problema C:

C: *todo conjunto pode ser bem ordenado?*

Eu não teria nada mais a dizer se a convenção que indico fosse universalmente admitida; mas, devo confessar que se usa freqüentemente e que eu mesmo tenho sempre empregado, a palavra *existência* com outro sentido. Por exemplo, quando se interpreta um raciocínio bem conhecido do Sr. Cantor dizendo: *existe uma infinidade não enumerável de números*, não se dá, entretanto, o meio de nomear tal infinidade. Mostra-se somente, você o disse antes de mim, que cada vez que se tiver uma infinidade enumerável de números, se poderá definir um número não fazendo parte desta infinidade. (A palavra *definir* tem sempre o sentido de: *nomear uma propriedade característica do definido*). Uma existência desta natureza pode ser utilizada em um raciocínio e do seguinte modo: uma propriedade é verdadeira, se, a sua negação conduz a admitir que se pode organizar todos os números em seqüência enumerável. Eu creio que ela poderá intervir apenas desta maneira. 266

O Sr. Zermelo utiliza a *existência* de uma *correspondência* entre os subconjuntos de M e alguns de seus elementos. Você observa que, até mesmo, se a existência dessas correspondências não fosse questionável, de acordo com a maneira como foi provada, não seria evidente que se tem o direito de utilizar esta existência como o fez o Sr. Zermelo.

Chego ao argumento que você enunciara assim: "é possível, em um conjunto particular M', escolher *ad libitum* o elemento distinguido m'; esta escolha podendo ser feita para cada um dos conjuntos M', pode ser feita para o conjunto desses conjuntos" e do qual parece resultar a existência das correspondências.

Primeiro, M' sendo dado, é evidente que se pode escolher m'? Isto seria evidente se M' existisse, no sentido quase kroneckeriano que eu disse, já que falar que M' existe seria, então, afirmar que se sabe nomear alguns de seus elementos. Mas ampliemos o sentido da palavra *existir*. O conjunto Γ das correspondências, entre os subconjuntos M' e os elementos distiguidos m', existe certamente aos Srs Hadamard e Zermelo; este último até representa o número de seus elementos por um produto transfinito. Entretanto, sabe-se escolher um elemento de Γ? Não, evidentemente, pois, isto seria dar uma solução determinada ao problema B por M.

É verdade que eu emprego a palavra *escolher* no sentido de *nomear* e que é suficiente talvez para o raciocínio do Sr. Zermelo que ***//*** *escolher* signifique *pensar* em. Mas é preciso, entretanto, observar que não se indica, o que se pensa e que é, contudo, necessário ao raciocínio do Sr. Zermelo que se pense em *uma correspondência determinada, sempre a mesma. O Sr.* Hadamard acredita, parece-me, que não é preciso que se demonstre que se pode *determinar* um elemento (e um único); é daí, a meu ver, que procedem as diferenças de apreciação. 267

Para melhor fazer sentir a dificuldade que eu vejo, lembro a você que, em minha tese, demonstrei a existência (sentido não kroneckeriano e talvez difícil de precisar) de conjuntos mensuráveis e não mensuráveis no sentido de Borel, mas restam-me dúvidas, que se possa nomear um tal conjunto. Nestas condições, eu teria tido o direito de fundamentar um raciocínio sobre esta hipótese: *suponho escolhido um conjunto, que é mensurável, mas não mensurável no sentido de Borel*, considerando que eu duvidaria que alguém pudesse jamais nomear um?

Assim, já vejo uma dificuldade com a afirmação "em um M' determinado, posso escolher um m' determinado", já que existem conjuntos (o conjunto *C*, por exemplo, que se poderia considerar como um conjunto *M'*, resultando de um conjunto mais geral) nos quais é talvez impossível escolher um elemento. Há, então, a dificuldade que você salienta relativa à infinidade de escolhas, o que faz com que se quisermos considerar o argumento do Sr. Zermelo como completamente geral, é preciso admitir que se fala de uma infinidade de escolhas, cuja potência pode ser muito grande; não se oferece, aliás, nem a lei dessa infinidade, nem a lei de uma das escolhas; não se sabe se é possível nomear uma lei definindo um conjunto de escolhas, tendo a potência do conjunto *M'*; não se sabe se é possível, sendo dado um *M'*, nomear um *m'*.

Em resumo, quando eu examino de perto o raciocínio do Sr. Zermelo, como aliás vários raciocínios gerais sobre os conjuntos, eu o acho muito pouco kroneckeriano para atribuir-lhe um sentido (é claro, somente, como teorema da existência da solução de C).

Você faz alusão a esse raciocínio: "para bem ordenar um conjunto, é suficiente escolher um elemento, depois um outro, etc." É certo que este raciocínio apresenta enormes dificuldades, maiores ainda, ao menos, em aparência que aquele do Sr. Zermelo; e estou tentando acreditar com o Sr Hadamard que progresso ***//*** tem sido feito substituindo uma infinidade de 268
escolhas sucessivas e dependentes umas das outras, por uma infinidade não ordenada de escolhas independentes. Há, talvez, aí apenas uma ilusão e a simplificação aparente reside talvez somente no fato que se deve substituir uma infinidade ordenada de escolhas por uma infinidade não ordenada, mas de potência maior. De forma que, de se poder reduzir a uma única dificuldade, observada no início do raciocínio do Sr. Zermelo, todas as dificuldades de raciocínio simplista que você cita, evidenciam talvez, simplesmente, que esta única dificuldade seja muito grande. Em todo caso, não me parece que a dificuldade desapareceu, porque se trata de um conjunto não ordenado de escolhas independentes. Por exemplo, se eu acredito na existência de funções *y(x)*, tais que, qualquer que seja *x*, *y* não seja nunca obtido de *x* por uma equação algébrica com coeficientes inteiros, é porque acredito, como Sr. Hadamard que é possível construir tal função; mas isto não é, para mim, a conseqüência imediata da existência, qualquer que seja *x*, de números *y* que não sejam obtidos de *x* por nenhuma equação com coeficientes inteiros[1].

Eu estou plenamente de acordo com o Sr. Hadamard quando ele declara que a dificuldade que existe em falar de uma infinidade de escolhas sem dar a lei, é igualmente grave, tratando-se ou não de uma infinidade enumerável. Quando se diz, como no argumento que você critica, "esta escolha podendo ser feita para cada um dos conjuntos *M'*, pode ser feita para o conjunto desses conjuntos", não se está dizendo nada, se não se explica os termos usados. Fazer uma escolha pode ser escrever ou nomear o elemento escolhido; fazer uma infinidade de escolhas, não pode ser escrever ou nomear os elementos escolhidos, um a um: a vida é muito curta. É necessário, portanto, dizer o que é fazer. Entende-se por isso, em geral, que é dar a lei que define os elementos escolhidos. Mas, para mim, como para Hadamard, esta regra é igualmente indispensável, tratando-se de uma infinidade enumerável ou não.

Talvez, entretanto, eu esteja ainda de acordo com você sobre este ponto porque, se eu não estabeleço diferenças teóricas entre ***//*** as duas 269
infinidades, do ponto de vista prático, eu faço uma grande diferença entre eles. Quando ouço falar de uma lei definindo uma infinidade transfinita de escolhas, eu fico muito desconfiado, porque eu nunca vi tais leis, enquanto que conheço leis definindo uma infinidade enumerável de escolhas. Mas isto é apenas uma

coisa de rotina e, pensando bem, vejo, às vezes, dificuldades tão graves, a meu ver, nos argumentos em que intervém apenas uma infinidade enumerável de escolhas como nos argumentos em que há um transfinito. Por exemplo, se eu não considero como estabelecido pelo raciocínio clássico que todo conjunto de potência superior ao enumerável contém um conjunto, cuja potência é aquela do conjunto dos números transfinitos da classe II do Sr. Cantor, eu não atribuo mais valor ao método pelo qual se demonstra que um conjunto não finito contém um conjunto enumerável. Apesar de duvidar muito que se nomeie jamais um conjunto que não seja nem finito nem infinito, a impossibilidade de tal conjunto não me parece demonstrada. Mas já lhe falei dessas questões. – H. Lebesgue.

[1] Corrigindo as provas, eu acrescento que de fato o raciocínio, pelo qual se legitima ordinariamente o enunciado A do Sr. Hadamard (p. 263), legitima ao mesmo tempo o enunciado B. Na minha opinião é porque legitima B que legitima A.

IV. – Carta do Sr. Hadamard ao Sr Borel

A questão parece-me bastante clara agora, depois da carta do Sr. Lebesgue. Cada vez mais nitidamente, mantém-se completamente na distinção, exposta no artigo do Sr. Tannery entre o que é *determinado* e o que pode ser *descrito*.

Lebesgue, Baire e você adotaram a este respeito a maneira de ver de Kronecker, que eu acreditava até agora ser particular a ele. Você responde negativamente à questão citada (acima, p. 263) pelo Sr. Lebesgue: Pode-se demonstrar a existência de um ser matemático sem o definir? Eu a respondo afirmativamente. Eu pego, em outras palavras, a resposta que o próprio Lebesgue dá (p. 266) em sua objeção relativa ao conjunto Γ.

Que nos seja impossível, ao menos atualmente, *nomear* um elemento desse conjunto, eu concordo. Isso é assunto para vocês; não para mim.

Existe apenas um ponto sobre o qual me parece que Lebesgue não é lógico com ele mesmo. É quando ele se permite ***Il*** ou não o direito de utilizar uma existência, de acordo com o modo que ela foi demonstrada. Para mim, as *existências* das quais ele fala, são fatos como os outros. Caso contrário, elas não ocorrem. 270

A questão coloca-se igualmente em relação a Baire. Eu não gostaria de citá-la, como ele fez (p. 264), no modo do Sr. Hilbert, no campo do *não contraditório* que me parece ainda proceder da psicologia e valorizar as propriedades de nosso espírito. Eu não entendo bem, como o Sr. Zermelo pôde ter *demonstrado* que *nós não percebemos* contradição, etc. Isto não se *demonstra*, isto se *constata*: percebemos ou não a percebemos.

Deixando de lado este ponto, a questão principal, aquela de saber se o conjunto pode ser ordenado, não tem evidentemente para Baire (mais que para Lebesgue e você) o mesmo sentido que para mim. Eu diria mais: a ordenação é possível? (e nem mesmo, *nós* podemos ordenar?, por receio de ter de pensar no que é esse *nós*). Baire diria: podemos ordenar? Questão totalmente subjetiva, a meu ver.

Estas são, portanto, duas concepções da Matemática, duas mentalidades que estão presentes. Não vejo, em tudo isto que foi dito até aqui, nenhum motivo para modificar a minha. Eu não pretendo impô-la. Quando muito, farei valer em seu favor, os argumentos que indiquei na *Revue génerale des Sciences (30 março de 1905)*, a saber:

1^o Eu acredito que o debate é, no fundo, o mesmo como o que surgiu entre Riemann e seus predecessores, sobre a noção de função. A *lei* que Lebesgue exige, parece-me assemelhar-se muito à expressão[1] analítica que reclamavam com insistência os adversários de Riemann. Até mesmo para uma expressão analítica bastante bizarra. Não só a *numerabilidade* das escolhas não parece mudar a questão, mas, é a mesma da unicidade. Não vejo ***//*** como nós teríamos o direito de dizer: “para cada 271
valor de x existe um número satisfazendo a .... Seja y este número ...”, embora, porque “a noiva é muito bela”, nós não podemos dizer: “para cada valor de x existe uma infinidade de números satisfazendo a .... Seja y um desses números ...”.

2^o As escolhas arbitrárias de Tannery conduzem a números v, que *nós seriamos* incapazes de definir. Eu não imagino que estes números não existam.

Quanto aos argumentos apresentados pelo Sr. Bernstein (*Math. Annalen, t. LX, p. 187*), e, conseqüentemente, suas objeções à demonstração do Sr. Zermelo, eu não os consideraria, de minha parte, como conclusivos. Esta opinião aliás é independente da questão que discutimos atualmente.

O Sr. Bernstein parte do paradoxo do Sr. Burali-Forti (*Circolo Matematico di Palermo, 1897*) relativo ao conjunto W de *todos* os números ordinais. Para evitar a contradição colocada em evidência pelo Sr. Burali-Forti, ele supõe o número ordinal W de tal modo que seja impossível adicionar-lhe 1. Esta opinião é, para mim, inadmissível, assim como os argumentos imaginados em seu favor pelo Sr. Bernstein. A ordem estabelecida (segundo a teoria do Sr. Cantor) entre os elementos de W e o elemento suplementar (é esta ordem que ataca Bernstein), é uma pura *convenção*, pois estamos sempre livres para fazer e para a qual as propriedades de W, quaisquer que sejam, não poderiam colocar nenhum obstáculo.

A solução é outra. É a própria existência do conjunto W que implica contradição. Em sua definição, a definição geral da palavra *conjunto* é incorretamente aplicada. Tem-se o direito de formar um conjunto apenas com os objetos previamente existentes e é fácil ver que a definição de W supõe o contrário.

A mesma observação para *o conjunto de todos os conjuntos* (Hilbert, Congrès de Heidelberg).

Retornemos à questão primitiva. Aqui ainda, a este respeito, não há nenhum argumento (pois acredito que nós ficaremos eternamente com nossas posições), mas, uma conseqüência de seus princípios.

Cantor considerou o conjunto de todas as funções que, no intervalo (0,1), assumem somente os valores 0,1. Este conjunto tem, ***//*** para 272
mim, um sentido claro e sua potência é $2^{\aleph}$, como o enuncia Cantor. Do mesmo modo, o conjunto de todas as funções de x tem um sentido para mim, e vejo claramente que sua cardinalidade é $\aleph^{\aleph}$.

Qual sentido tudo isso tem para você? Parece-me evidente que isto não pode ter nenhum. Pois, você impõe a toda função uma condição adicional que não tem nenhum sentido matemático: aquela de ser *descritíva* para *nós*.

Ou mais, veja o que isto significa: devemos considerar, pelo seu ponto de vista, apenas as funções definíveis por um número finito de palavras. Mas, por essa razão, os dois conjuntos formados acima são *enumeráveis*, assim como todos os conjuntos possíveis, aliás. – J. Hadamard.

V. – Carta do Sr. Borel ao Sr. Hadamard

... Gostaria, de início, de mencionar a você uma interessante observação feita pelo Sr. Lebesgue na reunião da Sociedade a 4 de maio: Como o Sr. Zermelo pode estar certo de que nos diversos pontos de seu raciocínio, ele fala *da mesma* escolha do elemento distinguido, já que não o caracteriza por nada *para ele mesmo* (aqui, não se trata de uma possível contradição, trata-se de ser coerente com ele mesmo).

Quanto à sua nova objeção, aqui está minha posição a seu respeito.

Eu não gosto muito de escrever alephs, mas eu concordo, porém, em apresentar argumentos equivalentes àqueles que você menciona, sem muita ilusão sobre seu valor intrínseco, *mas considerando-os, como podendo guiar para outros raciocínios mais sérios*. Como exemplo prático, eu posso citar a Nota III que inseri no final de meu recente pequeno Livro (*Leçons sur les fonctions de variables réelles, etc*., editado por Maurice Fréchet). O raciocínio ali usado é manifestamente sugerido pelo raciocínio de Cantor, que eu relatei em minhas primeiras *Leçons sur la théorie des fonctions*[1], p. 107.

A forma que eu adoto nesta Nota III não é absolutamente 273
satisfatória, como eu indico no final da última página de meu Livro. Mas o raciocínio análogo do Sr. Lebesgue em seu Artigo publicado no *Journal de Jordan* (1905) é, eu creio, totalmente irreprovável, no sentido que ele leva a um resultado preciso, expressível por meio de um número finito de palavras. Todavia, ele tem sua origem naquele de Cantor.

Pode-se perguntar qual é o valor real desses argumentos que eu não considero como válidos absolutamente e que contudo conduzem, subseqüentemente, a resultados efetivos. De fato, parece que, se eles eram desprovidos de todo valor, não poderiam levar a nada, pois seriam conjuntos de palavras vazias de sentido. Eu creio que seriamos assim muito severos. Eles têm um valor análogo a algumas teorias da Física matemática, pelas quais não pretendemos exprimir a realidade, mas ter um guia que nos permita, por analogia, descobrir fenômenos novos, que devem ser verificados. Haveria um trabalho considerável a fazer para saber qual o sentido real e preciso que se pode atribuir a raciocínios desse gênero. Este trabalho é inútil ou, pelo menos, fora de proporção com sua utilidade. As relações com o concreto desses raciocínios muito abstratos aparecem delas mesmas quando a necessidade se faz sentir.

Eu concordaria contigo sobre o fato de que é contraditório falar do conjunto de todos os conjuntos, pois, pelo argumento da página 107, citado mais acima, pode-se formar um conjunto de potência maior, mas acredito que esta contradição precede do fato de se introduzir conjuntos não definidos realmente. – E. Borel.

[1] Eu acredito dever insistir um pouco nesse ponto de vista que, se é necessário expressar todo meu pensamento, parece-me formar a essência do debate. Parece-me que o progresso verdadeiramente essencial da Matemática, desde a invenção do Cálculo infinitesimal, consistiu na anexação de noções sucessivas que para os Gregos, para os geômetras da Renascença ou os predecessores de Riemann, estavam “fora da Matemática”, porque era impossível descrevê-las.

ANEXO 4A

Extrait de »Fundamenta Mathematicae«, T. VIII.

Quelques remarques sur la définition de l'aire des surfaces.

Par

Henri Lebesgue (Paris).

(Extrait d'une lettre adressée à M. W. Sierpiński).

Je profite de l'occasion de cette lettre pour faire quelques remarques concernant deux intéressants articles, parus au tome VII des Fundamenta, sur la définition de l'aire des surfaces.

Au début du premier de ces articles, M. Fréchet s'efforce de reconstituer la suite des idées qui m'a conduit à la définition de l'aire que j'ai donnée. Il le fait très exactement, je précise cependant pour insister sur le caractère élémentaire et en quelque sorte pratique des considérations qui m'ont servi.

Dès mes premières études de géométrie je n'avais pas été satisfait de la façon dont on nous présentait les calculs de longueurs et d'aires et ceci à cause du raisonnement (?) suivant que colportaient les élèves de ma génération. Soit un triangle ABC, soient D, E, F les milieux de AB, BC, CA.

On a:

$$AB + AC = BD + DE + EF + FC;$$

recommençons la même opération, G, H, I, J, K, L, étant les milieux de DB, BE, DE FE, EC, FC, on a:

$$AB + AC = BG + GH + HI + IE + EJ + JK + KL + LC.$$

En continuant ainsi, on voit que $AB + AC$ est égale à la longueur d'une ligne brisée en dents de scie extrêmement voisine de BC Et, admettant implicitement que la longueur d'une courbe est la limite des longueurs des courbes tendant vers elle, nous concluions:

$$AB + AC = BC.$$

Nous démontrions de même que $\pi = 2$, une demi-circonférence de diamètre BC remplaçant la ligne BAC; et nous avions raison de le faire, car le principe, faux, qui nous servait était celui là même sur lequel on basait le calcul de la surface du cylindre, du cône, de la sphère, voire la longueur de la circonférence.

Sur ce dernier point un progrès a été fait, car dans tous les Cours, on définit maintenant la longueur de la circonférence; mais il arrive encore trop souvent que l'on calcule les aires des corps ronds sans les avoir définies. J'ajoute qu'il ne suffit pas, en géométrie élémentaire, de poser une définition logique, mais qu'il convient aussi d'en faire sentir la valeur pratique pour des applications expérimentales, valeur sans laquelle ces définition n'auraient été ni adoptées, ni même construites. Ce serait l'affaire de quelques mots, les cas considérés en géométrie élémentaire étant simples [1]).

Donc, mécontent des exposés de la Géométrie élémentaire, je lus avec un vif intérêt les travaux de Scheeffer, de Jordan. Je fus satisfait en ce qui concerne la définition de la longueur; mais j'appris en même temps que la définition analogue de l'aire avait été démontrée inacceptable par Schwarz. Et voici la suite de mes réflexions, mises en ordre comme on le fait nécessairement dans un examen rétrospectif.

Comment mesure-t-on, de façon approchée, la longueur d'une courbe? En mesurant la longueur de certains polygones voisins de la courbe, du moins s'il s'agit d'une mesure directe, la seule que je considère ici. C'est ce que fait l'arpenteur qui mesure un chemin, par exemple; s'il tenait à exprimer avec une grande précision ce qu'il prétend faire, l'arpenteur dirait sans doute qu'il se propose de mesurer la ligne médiane ou axe du chemin. Dans tous les cas de la pratique on prétend de même mesurer une courbe géométrique déterminée, toujours avec imprécision, par l'objet matériel que l'on

[1]) J'ai eu l'occasion de montrer les simplifications que l'on peut apporter à la définition générale de l'aire quand on se borne à la considération des corps de la géométrie élémentaire dans un article (Sur la définition de l'aire des surfaces. L'Enseigement mathématique X^{e} année, 1908) qui contient quelques remarques analogues à celles que je formule ici.

a assimilé à une courbe. Puisqu'il s'agit d'une courbe imprécise on ne saurait affirmer que les polygones que l'on utilise sont inscrits dans cette courbe. D'où une première raison de ne pas baser la définition des longueurs des courbes sur les polygones inscrits: mais il y en a une seconde, ou si l'on veut il y a un second point de vue, qui oblige bien plus impérativement à renoncer aux polygones inscrits. C'est que, quelle que soit la précision des expériences, un point ne peut être distingué de ceux qui en sont suffisamment voisins de sorte que différents expérimentateurs, mesurant le même objet, n'utiliseront certainement pas les mêmes polygones; et puisqu'en fait ils obtiennent à peu près le même nombre, il faut que notre définition nous donne des valeurs approchées voisines quand on l'applique en utilisant les points voisins [1]).

Je renonce donc aux polygons inscrits et je veux utiliser les polygones voisins de la courbe à mesurer. Mais, la démonstration de l'égalité fausse $AB + AC = BC$ le prouve, la longueur d'une courbe n'est pas la limite commune des longueurs des suites convergentes des polygones voisins; ainsi, la difficulté signalée par Schwarz pour les aires des surfaces se rencontre maintenant pour la longueur des courbes. Avoir fait surgir une difficulté là où il n'y en avait pas, peut être avantageux; ici, par exemple; le cas des courbes est, en effet, très simple à traiter et nous n'aurons plus pour le cas des surfaces, qu'à imiter ce qui nous aura ainsi réussi pour les courbes.

Il nous faut donc choisir parmi les suites de polygones voisins d'une courbe; nous avons vu que, pour avoir une valeur approchée d'un segment BC, il convient de ne pas choisir le chemin polygonal $BGHIEJKLC$, en d'autres termes, il faut éviter les chemins inutilement compliqués. Cela est bien d'accord avec la technique expérimentale: un arpenteur qui, pour mesurer une route droite mettrait l'origine de sa chaîne d'arpenteur sur le bord droit de la route et l'extrémité sur le bord gauche, puis l'origine au point atteint du bord gauche et l'extrémité sur le bord droit, etc, n'opérerait pas suivant les règles de son art. Donc il nous faut choisir des po-

[1]) D'une façon générale, un énoncé ne peut servir pratiquement que s'il y s'agit de quantités ou de résultats qui varient très peu pour une très petite variation dans les conditions expérimentales; j'ai eu l'occasion d'insister là dessus dans un article *Sur l'équilibre du corps solide* (Nouv. Ann. de Math. 1909).

lygones simples; de là à dire qu'il faut prendre les polygones les plus simples et d'entendre par là les plus courts, il n'y à qu'un pas. On le franchit d'ailleurs nécessairement dès que l'on a observé ceci: du mode de construction des lignes BAC, $BDEFC$, $BGHIEJKLC$,... du début, il résulte que si un nombre l a été obtenu comme limite des longueurs de polygones tendant vers une courbe C, tout nombre supérieur à l peut être obtenu de la même manière. En d'autres termes, les nombres qui peuvent être obtenus comme de telles limites sont tous égaux ou supérieurs à un certain nombre L; cet ensemble de nombres est donc caractérisé par sa limite inférieure L; L est le seul nombre de l'ensemble qui se distingue des autres, du moins immédiatement.

C'est ainsi que j'ai été amené à modifier la forme de la définition de la longueur d'une courbe C et à dire: cette longueur est la plus petite des limites des longueurs des suites de polygones tendant uniformément vers C.

J'ai ensuite formulé la définition d'une surface par simple analogie, mais les raisons qui m'ont suggéré la définition de la longueur s'appliquaient identiquement, mutatis mutandis, au cas de l'aire.

Ces définitions sont simples et immédiatement compréhensibles pour des commencants, elle peuvent être utilisés dès la géométrie élémentaire ou les débuts du calcul intégral comme je l'ai fait voir dans l'article indiqué plus haut, et leurs rapports avec la pratique sont assez nets et clairs pour que nul ne s'étonne que ces notions permettent de déterminer le nombre de tombereaux de cailloux nécessaires au rechargement d'une route, le poids d'une rampe d'escalier, la quantité de peinture à employer pour peindre une voûte. Ces définitions ne sont pas les seules à présenter ces avantages.

Celles que donne M. Banach dans le second article qui motive ces remarques sont très intéressants et elles conduisent à établir un très remarquable parallélisme entre les propriétés relatives aux longueurs et celles relatives aux aires. J'avais même espéré, au premier coup d'oeil, qu'elles fourniraient une réponse à des questions sur lesquels Jordan avait appelé mon attention et que je signale.

„Je ne suis pas satisfait par ce que vous avez dit de l'aire des surfaces", m'avait déclaré Jordan lorsque je lui portais ma Thèse. Et, sur ma demande, il me fit des objections, que d'ailleurs je m'étais faites moi-même (voir par exemple le § 70 de ma Thèse), et que je peut résumer ainsi: „Vous dites que vous édifiez, pour la mesure des aires des surfaces, une théorie entièrement analogue à celle de la mesure des longueurs des courbes mais, pourtant, vous laissez sans réponse des problèmes essentiels alors que ces problèmes sont résolus dans le cas des courbes. Une courbe $x = f(t)$; $y = g(t)$; $z = h(t)$ étant donnée nous savons quelle suite d'opérations il nous faut effectuer sur f, g, h pour reconnaître si la courbe est rectifiable et pour calculer sa longueur finie ou infinie; vous ne dîtes rien du problème analogue pour les surfaces données par 3 relations $x = f(u, v)$; $y = g(u, v)$; $z = h(u, v)$. De lâ résulte aussi que, tandis que l'on sait construire les formes les plus générales des fonctions $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ relatives aux courbes rectifiables, vous ne nous apprenez pas à former les fonctions $f(u,v)$, $g(u,v)$, $h(u,v)$ donnant des surfaces quarrables".

Ces objections de Jordan sont à coup sûr fondées, encore qu'il y ait peut être quelque illusion à considérer que reconnaître si $f(t)$ est ou non à variation bornée est une opération que nous savons faire et à admettre que nous savons former toutes les fonctions à variation bornée, mais le cas des courbes fait du moins appel à des opérations que nous savons effectuer dans bien de cas.

Avec les définitions que j'ai données il faudrait, pour le premier problème, soit indiquer comment il faut choisir une suite de polyèdres voisins de la surface à mesurer pour que leurs aires tendent vers la plus petite limite possible (et l'on ne sait que bien peu de choses là dessus malgré les pénétrantes recherches de Zoard de Geöcze) ou que l'on sache exprimer l'aire par une intégrale (ce que l'on ne sait faire que dans des cas presque banaux).

En ce qui concerne la seconde question, toutes les théories sont à peu près au même point. Dans toutes on remarque que la longueur d'un segment et l'aire d'un domaine plan sont les racines carrées des sommes des carrés des longueurs et aires des projections, sur les axes de coordonnés rectangulaires s'il s'agit d'un segment, sur les 3 plans de coordonnés s'il s'agit d'un domaine et de la résulte qu'une courbe est rectifiable si, et seulement si, les 3 courbes telles que $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = 0$ le sont, qu'une surface est quarrable si, et seulement si, les trois surfaces telles que $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = 0$ le sont. Mais tandis que l'on sait former les fonctions $f(t)$ répondant à la question, c'est-à-dire les fonctions à variation bornée, on n'a pas, jusqu'ici, réussit à construire les couples

$f(u,v)$, $g(u,v)$ cherchés, c'est-à-dire ceux qui définissent ce que M. Banach appelle une correspondance à variation bornée [1]). Et d'ailleurs une fonction, $f(u,v)$ par exemple. figurant dans 2 couples f, g; f, h, cela ne serait pas encore tout à fait suffisant.

[1]) Cette dénomination se trouve en somme déjà dans la communication faite par M. W. H. Young au congrès de Strasbourg.

Paris, le 2 Octobre 1925.

Anexo 4B

Algumas observações sobre a definição de área de superfícies

Por

Henri Lebesgue (Paris)

(Extraido de uma carta endereçada ao Sr.M. W. Sierpinski)

Aproveito a ocasião desta carta para fazer algumas observações 160
concernentes a dois interessantes artigos, que aparecem no volume VII dos Fundamenta, sobre a definição de área de superfícies.

No início do primeiro desses artigos, M. Fréchet se esforça para reconstruir a seqüência de idéias que me conduziu à definição de área que dei. Ele o fez muito precisamente, eu o explico, entretanto, por insistir sobre o caráter elementar e, de algum modo, prático das considerações que me serviram.

Desde meus primeiros estudos de geometria, eu não estava satisfeito com o modo como se nos apresentavam os cálculos de comprimentos e de áreas e isto devido ao raciocínio (?) seguinte que propagavam os alunos de minha geração. Seja um triangulo ABC, sendo D, E, F os pontos médios de AB, BC, CA.

Tem-se:

$$AB+AC=BD+DE+EF+FC.$$

Repetindo a mesma operação, G, H, I, J, K, L sendo os pontos médios de DB, BE, DE, FE, EC, FC, tem-se:

$$AB+AC=BG+GH+HI+IE+EJ+JK+KL+LC.$$

Continuando assim, vê-se que AB+AC é igual ao comprimento de uma linha quebrada em dentes de serra extremamente próxima de BC. E, admitindo
implicitamente que o comprimento de uma curva é *ll* o limite dos comprimentos 161
das curvas tendendo para ela, concluímos que: AB+AC=BC.

Nós demonstrávamos da mesma maneira que $\pi = 2$, uma semi-circunferência de diâmetro BC substituindo a linha BAC. Nós tínhamos razão de fazê-lo, porque o principio falso que nos servia era aquele mesmo sobre o qual se baseava o cálculo da superfície do cilindro, do cone, da esfera, até mesmo, o comprimento da circunferência.

A respeito este último ponto um progresso foi feito, pois em todos os Cursos, define-se, agora, o comprimento da circunferência. Mas acontece ainda, muito freqüentemente, que se calculam as áreas dos corpos redondos sem os ter definido. Acrescento que não é suficiente, em geometria elementar, fixar uma definição lógica, mas convém, também, fazer sentir o valor prático para aplicações experimentais, valor sem o qual estas definições não teriam sido nem adotadas, nem mesmo construídas. Este seria o assunto de algumas palavras, os casos considerados em geometria elementar sendo simples.[1]

Portanto, insatisfeito com as exposições da Geometria elementar, li com um vivo interesse os trabalhos de Scheeffer, de Jordan. E fiquei satisfeito no que concerne à definição de comprimentos. Mas aprendi, ao mesmo tempo, que a definição análoga de área tinha sido demonstrada inaceitável por Schwarz. Aqui seguem minhas reflexões, ordenadas como se faz, necessariamente, num exame retrospectivo.

Como medir, de modo aproximado, o comprimento de uma curva? Medindo o comprimento de certos polígonos vizinhos da curva, a menos que se trate de uma medida direta; a única que eu considero aqui. É isto que faz o agrimensor que mede um caminho, por exemplo. Se ele quisesse exprimir com uma grande precisão o que pretende fazer, o agrimensor diria, sem dúvida, que ele se propõe a medir a linha mediana ou eixo do caminho. Em todos os casos da prática, pretende-se, igualmente, medir uma curva geométrica determinada, sempre com imprecisão, pelo objeto material que se **//** assimila a uma curva. 162
Como se trata de uma curva imprecisa, não se saberia afirmar quais os polígonos utilizados são inscritos nesta curva. Daí, uma primeira razão para não basear a definição dos comprimentos das curvas sobre os polígonos inscritos: mas, tem uma segunda, ou se quisermos há um segundo ponto de vista, que obriga bem mais imperativamente a renunciar aos polígonos inscritos. É que, qualquer que seja a precisão das experiências, um ponto não pode ser distinguido daqueles que são suficientemente próximos, de forma que diferentes experimentadores, medindo o mesmo objeto, não utilizarão, certamente, os mesmos polígonos. Já que, de fato, eles obtêm aproximadamente o mesmo número, é necessário que nossa definição nos dê valores aproximados, quando utilizamos os pontos vizinhos.[2]

Eu renuncio, portanto, aos polígonos inscritos e eu quero utilizar os polígonos vizinhos da curva a medir. Mas a demonstração da igualdade falsa AB+AC=BC prova, o comprimento de uma curva não é o limite comum dos comprimentos das seqüências convergentes dos polígonos vizinhos. Assim, a dificuldade assinalada por Schwarz para as áreas das superfícies encontra-se agora para o comprimento das curvas. Tendo feito surgir uma dificuldade onde não tinha, pode ser vantajoso. Aqui, por exemplo, o caso das curvas é, de fato, mais simples para tratar e nós teremos, como para o caso das superfícies, apenas que imitar o que temos realizado com as curvas.

Nós devemos, portanto, escolher entre as seqüências de polígonos vizinhos de uma curva. Nós vimos que, para ter um valor aproximado de um segmento BC, convém não escolher a linha poligonal BGHIEJKLC; em outras palavra, deve-se evitar os caminhos inutilmente complicados. Isto está bem de acordo com a técnica experimental: um agrimensor que, para medir um caminho reto, colocasse a origem de sua corrente de agrimensor sobre o lado direito do caminho e a extremidade sobre o lado esquerdo, depois a origem no ponto atingindo do lado esquerdo e a extremidade sobre o lado direito, etc, não funcionava seguindo as regras de sua arte. Portanto, nós devemos escolher **//** 163
polígonos simples; daí a dizer que é necessário pegar os polígonos mais simples e entender para isso, os mais curtos, só há um caminho. Nós o superamos, aliás, desde que observamos isso: no modo de construir as linhas BAC, BDEFC, BGHIEJKLC, ... no início, resulta que se um número *l* foi obtido como limite dos comprimentos dos polígonos, tendendo para uma curva *C,* todo número superior a *l* pode ser obtido da mesma maneira. Em outras palavras, os números que podem ser obtidos como tais limites são todos iguais ou superiores

a um certo número *L*. Este conjunto de números é, portanto, caracterizado por seu limite inferior *L. L* é o único número do conjunto que se distingue dos outros, pelo menos imediatamente.

É assim que eu fui levado a modificar a forma da definição de comprimento de uma curva *C* e a dizer: este comprimento é o menor dos limites dos comprimentos das seqüências de polígonos, tendendo uniformemente para *C*.

Em seguida, formulei a definição de uma superfície por simples analogia, mas as razões que me sugeriram a definição de comprimento aplicam-se identicamente, transferidas, para o caso das áreas.

Estas definições são simples e imediatamente compreensíveis para os principiantes. Elas podem ser usadas desde a geometria elementar ou o início do cálculo integral, como eu observei no artigo indicado acima, e sua relação com a prática é suficientemente nítida e clara, para que ninguém se espante dessas noções que permitem determinar o número caminhões de pedras necessárias para restaurar um caminho, o peso de uma rampa de escalar, a quantidade de tinta usada para pintar um arco. Essas definições não são as únicas a apresentar estas vantagens.

Aquela dada por M. Banach, no segundo artigo que motivou estas observações, são bastante interessantes e conduzem ao estabelecimento de um mais notável paralelismo entre as propriedades relativas aos comprimentos e as relativas às áreas. Eu estava mesmo esperando, numa primeira olhadela, que elas forneceriam uma resposta às questões sobre as quais Jordan chamou minha atenção e que eu menciono.

"Eu não estou satisfeito com aquilo que você disse de área de superfície", declarou-me Jordan, quando eu lhe levei minha Tese. A meu pedido, ele me fez as objeções que aliás eu tinha feito a mim mesmo (ver, por exemplo, o parágrafo 70 de minha Tese), ***II*** e que posso resumir assim: "você diz que 164
construiu, para a medida das áreas das superfícies, uma teoria inteiramente análoga àquela da medida dos comprimentos das curvas mas, no entanto, deixa sem resposta os problemas essenciais, enquanto que esses problemas são resolvidos nos casos das curvas. Uma curva *x=f(t); y=g(t); z=h(t)* sendo dada, nos sabemos qual a seqüência de operações devemos efetuar sobre *f, g, h* para reconhecer se a curva é retificável e para calcular seu comprimento finito ou infinito. Você não diz nada do problema análogo para as superfícies dadas pelas três relações *x=f(u,v), y=g(u,v), z=h(u,v).* Daí resulta, também, que enquanto se sabe construir as formas mais gerais das funções *f(t), g(t), h(t)*, relativas às curvas retificáveis, você não nos informa como formar as funções *x=f(u,v), y=g(u,v), z=h(u,v)* dando as superfícies quadráveis".

Estas objeções de Jordan são indubitavelmente fundamentadas, ainda que possa ter aí alguma ilusão a considerar, como reconhecer se *f(t)* é ou não de variação limitada, é uma operação que sabemos fazer e ao admitir que sabemos formar todas as funções de variação limitada, mas, no caso das curvas faz ao menos apelo às operações que sabemos efetuar em muitos dos casos.

Com as definições que eu dei, faz-se necessário, para o primeiro problema, indicar como se deve escolher uma seqüência de poliedros vizinhos da superfície a medir para que suas áreas tendam para o menor limite possível (mas se conhece pouca coisa a esse respeito, apesar das intensas pesquisas de Zoard de Geöcze), ou que se saiba exprimir a área por uma integral (o que se sabe fazer apenas nos casos quase banais).

No que concerne à segunda questão, todas as teorias estão quase no mesmo ponto. Em todas observamos que o comprimento de um segmento e a área de um domínio plano são as raízes quadradas das somas dos quadrados

dos comprimentos e áreas das projeções, sobre os eixos de coordenadas retangulares, quando se trata de um segmento, sobre os três planos de coordenadas, trata-se de um domínio e daí resulta que uma curva é retificável se, e somente se, as três curvas, tais que *x=f(t), y=g(t), z=0* o são, que uma superfície é mensurável se, e somente se, as três superfícies, tais que *x=f(u,v), y=g(u,v), z=0* o são. Mas enquanto se saber formar as funções *f(t)* respondendo à questão, ou seja, as funções de variação limitada, não se tem, até aqui, conseguido construir os pares *f(u,v), g(u,v)* **//** pesquisados, quer dizer, aqueles 165
que definem o que o Sr. Banach chama uma correspondência de variação limitada[3]. E aliás, uma função, *f(u,v),* por exemplo, figurando em dois pares *f, g; f, h*, isto não seria ainda totalmente suficiente.

Paris, 2 de outubro de 1925.

---

[1] Eu tive a chance de mostrar as simplificações que se pode fornecer para a definição geral de área, quando se limita à consideração dos corpos da geometria elementar, em um artigo (Sur la définition de l'aire des surfaces. L'Enseignement mathématique X° ano, 1908) que contém algumas observações análogas a estas que eu formulei aqui.

[2] De um modo geral, um enunciado pode servir praticamente apenas em se tratando de quantidades ou de resultados que variem menos, para uma pequena variação nas condições experimentais. Eu tive a ocasião de insistir a esse respeito no artigo *Sur l'équilibre du corps solide* (Nouv. Ann. de Math. 1909)

[3] Esta denominação se já encontra na comunicação feita por M. W. H. Young no congresso de Strasbourg.

Anexo 5

Les controverses sur la théorie des ensembles et la question des fondements

par M. H. LEBESGUE (Paris)

Si je prends la parole, c'est sur les instances réitérées de M. Gonseth, instances qui m'auraient beaucoup moins touché si elles avaient été plus justifiées; car je n'ai rien de spécial à vous dire, ce que prouve bien le dossier que vous avez entre les mains et qui ne contient ni résumé ni rapport. Mais puisqu'il faut que je parle, je répèterai ce que j'ai jadis écrit: «la philosophie des mathématiques ne peut être créée que par les mathématiciens», et je vais tâcher de faire entendre de quelle philosophie je veux parler.

C'est une philosophie utilitaire, très humble, beaucoup plus humble que celle qui a été définie par M. Gonseth au premier jour de notre rencontre et que celle que j'ai aperçue dans les séances qui ont déjà eu lieu. Je dois donc préciser les différences entre ces dernières et celle dont j'entends parler, laquelle ne visera nullement à se hausser jusqu'aux questions proprement philosophiques, jusqu'à «ces inquiétudes que nous cultivons sous le nom de philosophie» comme disait mon maître Jules Tannery.

Ce que j'ai obtenu en mathématiques a été le résultat naturel, et parfois immédiat, de l'examen des raisons de tel succès ou de tel insuccès, des causes de la puissance ou de l'impuissance de telle ou telle idée, et j'imagine qu'il en a été de même pour chacun d'entre vous. Je voudrais simplement que l'on ose formuler explicitement ces examens critiques qui nous furent utiles, et pour cela, que nous prenions l'habitude de les faire plus complètement, plus systématiquement.

C'est là une philosophie de seconde zone, certes, mais c'est peut-être la seule voie d'accès à la philosophie véritable. Nos réflexions de techniciens pourraient aider les philosophes comme les observations des travailleurs manuels ont parfois guidé les physiciens et les chimistes. La métallurgie pratique dont les étapes servent à jalonner les âges de la préhistoire, a précédé de 50 siècles peut-être l'étude scientifique de la métallurgie.

La philosophie de seconde zone dont je parle serait d'autre part très utile aux chercheurs. Elle devrait examiner tous les chapitres des mathématiques, les premiers comme les derniers, envisager les techniques comme les principes. Pensez à ce que serait la critique littéraire si elle s'était toujours bornée à l'étude des chants des premiers Aèdes. Il est possible que dans ces chants on puisse retrouver le germe de toutes les littératures, de tous les genres littéraires, mais à coup sûr ils seraient passés inaperçus si l'étude de littératures plus évoluées n'avait pas incité à les y rechercher.

Quand on scrute en profondeur les éléments de notre science, acquis depuis des siècles, on examine une œuvre faite, on n'étudie pas le travail de pensée des gens qui l'ont construite. Si nous voyons bien leurs réussites, nous sommes infiniment moins renseignés sur leurs erreurs et leurs insuccès. C'est pourquoi l'élaboration de la théorie des ensembles, qui a permis de voir comment se créait un chapitre des mathématiques, sans obliger à une trop difficile initiation technique, a été d'un très grand attrait pour les philosophes. C'est un attrait de même nature que présenterait cette pseudo-philosophie.

Montrer comment se construisent les mathématiques, c'est bien là en étudier les fondements, mais à un point de vue qui nous ferait largement sortir du domaine de la logique. Je m'en vais donc examiner un instant avec vous combien serait vaste cette philosophie de seconde zone. Mes conclusions ne seront pas nouvelles; elles ont toutes été déjà formulées. Mais cela ne me gêne pas, j'en suis au contraire très heureux. Je considère que c'est tout à l'avantage de la philosophie que je préconise que des observations, des conclusions auxquelles sont arrivés ceux qui ont longuement étudié les méthodes des mathématiques, convergent totalement ou partiellement avec des observations faites par un homme qui s'est proposé simplement de guider et de stimuler son imagination afin de mieux approprier le raisonnement aux questions qu'il envisageait.

Je vais prendre l'exemple de la théorie des ensembles; le titre de mon exposé portait: «Controverses sur la théorie des ensembles et la question des fondements.» Quand j'ai vu le thème exact pris par M. Sierpinski j'ai cru préférable de ne parler que d'une de ces controverses, celle qui est relative à l'axiome du choix. Ainsi, je vous préparerai un peu mieux à écouter le rapport très documenté de M. Sierpinski, — c'est-à-dire de l'homme qui a le plus et le mieux su utiliser l'axiome du choix, — et cela bien que j'aurai l'air de combattre son rapport.

Il faut d'abord que je situe la théorie des ensembles et pour cela nous allons remonter, non pas à la naissance du monde, mais à la naissance de l'homme. Le bébé qui cherche à se manger les orteils n'a pas une idée très exacte des limites de son corps. Il fait cependant rapidement cette découverte essentielle; «moi et le reste», et, en même temps, il subdivise ce «reste» en des images de son «moi». L'homme étant parvenu à la notion de corps par un procédé analogue, a doué ces corps de volonté et de désirs. Le problème mathématique du dénombrement s'est trouvé lié à une mystique dont nous trouvons des traces encore aujourd'hui. Il a certainement fallu des siècles pour délimiter le problème mathématique et l'on peut présumer que ce qui a le mieux servi à cette délimitation a été le sentiment de confiance absolue que donnaient certains des résultats. Car si haut que l'on remonte dans l'histoire des sciences, on voit la certitude que donnent les mathématiques leur valoir un rang éminent dans l'esprit des hommes. Ainsi, par des expériences successives, sans doute jalonnées de succès et d'erreurs, les hommes auraient conquis à la fois leur sujet d'étude (objet et but) et, en même temps, le mode de raisonnement approprié à cette étude. Ce qui aurait le mieux assuré cette appropriation, c'est la constance des résultats obtenus, la non-contradiction, comme nous le disons maintenant.

Ce fut une conquête difficile; quant à l'objet: Archimède doit écrire tout l'Arénaire pour démontrer à Gélon, et sans doute pour se prouver à lui-même que l'on peut dénombrer les grains de

8

sable de la mer; quant au raisonnement: c'est bien plus récemment encore qu'on a exactement compris la nécessité et la portée du raisonnement par induction complète, par récurrence.

Quand on veut démontrer quelque chose par un entier, il faut considérer comme légitime la répétition du raisonnement qui permet de passer d'une collection à une autre collection contenant un objet de plus, il faut adopter un raisonnement suivant exactement et pas à pas le mode même de formation des entiers.

Ce raisonnement par induction complète conduit à une suite indéfiniment prolongeable de propositions. Cela ne choqua personne; mais, avec les incommensurables, il a fallu considérer cette suite comme effectivement indéfiniment prolongée et prendre la suite ainsi supposée réalisée comme prémisse d'un raisonnement, ce fut le grand scandale des mathématiques!

En pareille occurence, les prêtres de toutes les religions ont une même réaction. Les Pythagoriciens essayèrent d'étouffer le scandale en cachant la vérité. Cela ne pouvait durer; en dépit de la prudence qui commandait de ne pas considérer les irrationnels, ils s'introduisirent partout. Pendant vingt siècles on en parla, avec maladresse, avec hypocrisie, en utilisant sous des noms variés le passage à la limite comme une sorte de formule magique, dispensant de toute preuve. On arriva cependant progressivement à préciser l'objet de l'étude; on confronta les contenus d'un segment en points et d'une durée en instants et l'on sait, par les sophismes de Zénon d'Elée, que même la correspondance entre ces contenus n'a pas été acquise facilement. Quand, au XIX^{e} siècle, on usa du procédé des coupures, il devint clair que le nombre le plus général ne pouvait être atteint que grâce à une infinité actuelle de nombres antérieurement acquis, qu'il fallait donc admettre un raisonnement qui ose utiliser comme prémisses une infinité actuelle de propositions correspondant d'une façon biunivoque aux points antérieurement obtenus et considérés. Il fallut aussi bien comprendre le but et, pour cela, se débarrasser d'une certaine mystique qui faisait attribuer à l'élément limite toutes les qualités de l'élément primitif. C'est ainsi qu'un siècle fut nécessaire pour amender la définition de la dérivée donnée par Newton: «La dérivée est la dernière raison (ou rapport) de l'accroissement incrémentiel Δy de la fonction à l'accroissement incrémentiel Δx de la variable», en remplaçant les mots «dernière raison» par «limite du rapport»; pour qu'on comprenne bien que la dérivée n'est pas un rapport et que pourtant elle peut être utilisée parfois comme un rapport.

Tout cela était à peine acquis que d'autres difficultés prenaient un caractère d'urgence. Poussé par la nécessité, on avait essayé plusieurs fois de raisonner sur l'infini, mais on rencontrait tellement de contradictions qu'on avait rejeté l'infini hors du domaine des mathématiques, ce dont il reste le souvenir dans cette phrase bien connue: «l'infini est le symbole de l'impossibilité». Depuis les travaux du véritable fondateur de la théorie des ensembles, Georg Cantor, on est arrivé à cette constance dans les résultats que nous devons exiger en mathématiques. Il a fallu pour cela que Cantor précise son sujet et lui approprie la logique. Mais, de même que les modifications apportées à la morale, au cours des siècles, sont apparues aux yeux de tous comme de simples retours à une morale immuable, les modifications apportées par Cantor à la logique, cette morale du discours, ont été considérées comme de simples rappels à la stricte observance d'une logique éternelle. Et cela fut très favorable au progrès des mathématiques. Cantor nous apprend, en particulier, à faire état de certaines distinctions comme celle du cardinal et de l'ordinal dont les grammairiens qui, à un certain égard, sont des scientifiques voisins des mathématiciens, avaient été les seuls à faire état jusque-là. Si l'on compare deux collections, une collection de points et une collection de mots en prenant toujours les mots dans le même ordre et en les associant aux points, le dernier mot prononcé dépend de l'ordre dans lequel on a pris les points. Ce n'est pas toujours le nombre cardinal de la collection, et cependant c'est ce que nous admettons toujours; c'est là-dessus qu'est basée toute l'arithmétique. Mais celle-ci s'occupe de collections finies. Les exemples de Cantor sont relatifs à des ensembles; la conclusion à en tirer est très simple: la logique de l'arithmétique n'est pas transportable aux ensembles.

De la délimitation de l'objet, Cantor ne dit pas un mot. Il emploie un langage très général, propre à donner le vertige, mais, dans sa tentative très hardie, il est extrêmement prudent. Il s'est laissé guider par la considération d'ensembles de points, de figures. Par exemple, tel ensemble considéré par Cantor est l'ensemble des points singuliers d'une fonction dont on pourrait facilement écrire l'expression. L'existence et l'intérêt d'un tel sujet d'étude ne peuvent être mis en discussion et Cantor, grâce à une logique qu'on regardait comme étant la logique ordinaire, obtient des résultats.

Les difficultés ne commencèrent que quand d'autres entrèrent dans la lice qui ne s'astreignirent plus à mettre sous les mots des réalités mathématiques bien précises, quand objet et but devinrent moins clairs. Vous vous rappelez les difficultés que l'on rencontra à la suite de la considération de l'ensemble de tous les ensembles. Mais les résultats obtenus par Cantor avaient déjà tellement transformé l'opinion que ces contradictions furent appelées des paradoxes, ce qui est moins inquiétant!

Du reste, comment ne pas être rassuré puisqu'il s'agit toujours du même mode de raisonnement, dans lequel on exige seulement de renoncer à certaines mauvaises habitudes, à certaines confusions. L'étude des ensembles infinis apparaît basée plus logiquement que celle de l'arithmétique dont on aurait pu commencer à douter. En somme, Archimède n'avait pas eu tort de consacrer un long travail au dénombrement des grains de sable puisque, comme il l'avait lui-même noté, il y a des collections infinies. L'arithmétique ne permet d'attacher un nombre qu'aux seules collections finies. Encore faudrait-il définir celles-ci, ce que l'on ne fait pas. Il faudrait, de plus, montrer que le nombre attaché est indépendant du mode de dénombrement, ce que l'on ne fait pas non plus. On se borne à dire que l'on considérera des collections finies et immuables, c'est-à-dire auxquelles nous pouvons attacher un entier tel qu'il reste le même quels que soient l'instant et le mode employés pour le dénombrement. C'est dire, en somme, que l'arithmétique s'applique quand elle s'applique.

On aurait pu faire cette découverte sans passer par l'infini. Par exemple, si, dans une cage, on met un animal et un autre animal, cela ne fait pas toujours deux animaux, car s'il s'agissait d'un lion et d'un lapin, le lion mangerait le lapin. Mais qui prendrait au sérieux pareille remarque? Le passage par l'infini a autrement d'allure et il eut cet avantage de bien montrer qu'on ne pouvait douter de la théorie des ensembles sans douter encore plus de l'arithmétique, ce que, bien entendu, personne ne fit.

Les modifications apportées par Cantor aux modes de raisonnement antérieurs paraîtraient plus profondes si, dès que nous parlons de raisonnement, nous ne pensions trop uniquement à la logique formelle, à Barbara, à Celarent, à ce qui n'est que la morphologie externe du raisonnement. Je crois qu'en dépit de notre désir de n'utiliser que des mots vides de sens, que des symboles, ce sont les pensées qu'éveillent en nous ces mots et ces symboles qui sont les facteurs essentiels à considérer pour pénétrer jusqu'à la psychologie du raisonnement. Si l'on se borne à la morphologie, Cantor avait apporté peu de transformations; il en avait apporté cependant, car il a considéré, et de différentes manières, des infinités actuelles comme prémisses de raisonnement; par exemple, lorsqu'il considère une suite bien ordonnée dont les éléments sont numérotés $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots$, s'il veut démontrer une propriété pour tous les éléments de cet ensemble, le raisonnement par récurrence ordinaire ne lui suffit plus car il ne permet pas d'atteindre ω qui n'est précédé immédiatement par aucun autre nombre. Aussi Cantor surajoute au raisonnement par récurrence ordinaire un raisonnement supplémentaire qui lui permet de conclure pour un nombre si la propriété est prouvée pour tous les nombres qui le précèdent: c'est là une transformation morphologique profonde. Cette transformation n'a choqué personne; nul ne s'est élevé contre elle. On ne l'a même pas aperçue tant elle est naturelle, indispensable, inévitable: dès que l'on admet la loi de formation des ensembles bien ordonnés il faut de toute nécessité admettre en même temps le raisonnement qui suit exactement, et pas à pas, cette loi de formation. Ici encore, sujet d'étude et raisonnement ont été obtenus à la fois; on s'est efforcé de permettre l'accroissement des mathématiques sans compromettre leur solidité.

Grâce à ce raisonnement par récurrence transfinie, la théorie des ensembles s'est développée avec la même simplicité et la même beauté que celle des entiers. Comment ne pas faire profiter du même avantage la théorie des ensembles en général? C'est alors que M. Zermelo proclama que tout ensemble peut être bien ordonné, et ce fut la bagarre!

Deux partis se formèrent pour et contre ce qu'on a appelé tantôt le théorème, tantôt l'axiome de Zermelo. Aucune démonstration, ni même aucune discussion n'était possible entre ces deux partis car ils n'avaient pas de logique commune. C'était la logique même qui était en discussion, aussi en furent-ils réduits à s'invectiver longuement comme les héros d'Homère!

— Vous utilisez une infinité de choix sans loi, donc non déterminés, disaient les uns; or vous savez bien qu'on ne peut raisonner que sur des êtres déterminés; il y a là une obligation que vous aviez toujours respectée, c'est pour y avoir failli qu'on a rencontré les paradoxes de la théorie des ensembles.

— Oui, disaient les autres, il faut raisonner sur des êtres déterminés, mais il n'est pas nécessaire de les déterminer par une loi, dont l'énoncé n'intervient jamais dans la suite. Mes choix sont déterminés parce que je les pense déterminés. Au reste, à tel endroit, vous aussi vous avez fait des choix sans loi!

En vérité, ne croirait-on pas entendre une discussion entre théologiens, chacun proclamant son credo et voulant le faire confesser aussi à son contradicteur; chacun oubliant que les manquements réels ou supposés à une doctrine ne peuvent rien contre cette doctrine. Cependant, en dépit de leurs écrits, où chacun ne faisait état que de ce qui l'opposait au parti adverse, les adversaires étaient bien près de s'entendre; animés qu'ils étaient d'un même amour des mathématiques. Ils désiraient les uns et les autres l'accroissement de leur science, sans que la solidité en fût compromise. Seulement le parti «pour» pensait plus à l'accroissement et le parti «contre» à la solidité. Ainsi s'affrontaient les deux tendances que nous avons déjà vues aux prises à chaque élargissement de la science mathématique. L'une et l'autre tendance sont indispensables. Il faut aller de l'avant, donc avoir de l'audace; pour obtenir des résultats il faut oser. La timidité est pourtant parfois préférable à la témérité: Cauchy, se résignant à la détermination qu'il déclare un peu dure, de n'utiliser que les séries convergentes, fit faire, en peu de temps, plus de progrès qu'on en avait fait en un siècle d'utilisation de toutes les séries.

Il fit faire même des progrès à la théorie des séries divergentes car, guidé par ses résultats sur les séries convergentes, il put utiliser certaines séries divergentes. Ainsi, on ne peut donner *a priori* raison à l'une ou l'autre de ces tendances. Ce qu'il faut, c'est que chacun travaille selon ses possibilités: que ceux qui se sentent capables d'utiliser une logique nouvelle l'utilisent, les résultats qu'ils obtiendront permettront de décider, en précisant le sujet et le raisonnement.

Depuis 30 ans d'utilisation de l'axiome de Zermelo aucune contradiction n'a jamais été rencontrée et le parti «pour» aurait presque remporté la victoire s'il ne s'agissait que d'un formalisme, s'il suffisait d'obtenir toujours des assemblages de mots satisfaisant aux règles grammaticales de la non-contradiction. L'amendement de la définition de la dérivée donnée par Newton, n'aurait rien résolu si, sous le mot «limite», il n'y avait rien eu. Donc le sens des mots importe et, à cet égard, je n'ai pas aperçu qu'un progrès ait été fait depuis le premier jour.

On disait alors que l'énoncé «le continu peut être bien ordonné» ne serait pas contredit si quelqu'un prouvait qu'aucun homme ne nommera jamais une loi permettant de bien ordonner le continu. J'ai songé de nouveau à cela à l'occasion de travaux récents. Vous savez que M. Hilbert a prouvé que toute construction possible à l'aide de la règle et du compas est possible aussi à l'aide de la règle et d'un transporteur de segments, pourvu qu'il s'agisse d'un problème dont toutes les solutions sont toujours réelles, quelles que soient les valeurs données aux paramètres. En réalité, il faudrait ajouter: «et que ces paramètres ne soient pas au nombre de plus de trois», parce qu'une difficile proposition algébrique auxiliaire n'avait été démontrée par Hilbert que dans ce cas. La théorie des corps positifs d'Artin et Schreier a donné la démonstration générale de cette propriété auxiliaire, mais elle utilise une «base» qui n'est pas nommée, qui est simplement conçue d'après l'axiome de Zermelo. S'il était vrai que, dans le cas particulier en question, le résultat dépende effectivement de cet axiome, que signifierait le résultat? On prétend avoir démontré la possibilité de faire certaines constructions à l'aide de tels instruments; mais on ne nous dit pas comment faire ces constructions. Il reste possible qu'aucun homme ne sache jamais les faire; on peut même imaginer que l'on démontre que jamais aucun homme ne pourra indiquer la loi de succession des constructions à effectuer pour résoudre le problème, pour réaliser cette construction dont on a dit avoir démontré la possibilité!

Donc, certains résultats ne sont pas devenus clairs; pour ce qui est de l'emploi de l'axiome de Zermelo dans la démonstration des propriétés, j'oserai presque dire que cet emploi est devenu trop clair: on admet que toute propriété, vraie pour tout ensemble bien ordonné, est vraie pour tous les ensembles pourvu que, dans son énoncé, il ne s'agisse pas d'ordre. Je pense à l'axiome de continuité de Poncelet: Toute propriété vraie pour toutes les figures réelles est vraie pour toutes les figures, pourvu que, dans son énoncé, il ne s'agisse pas de réalité. Dans l'un et l'autre cas, on affirme que ce qui est indispensable et essentiel à la construction de la démonstration (ordre ou réalité) est sans influence sur le résultat. Rappellerai-je que le principe de continuité de Poncelet ne fut admis par tous que lorsqu'il fut précisé et délimité; alors il put être démontré, mais il était, en même temps, devenu inutile de s'en servir.

La précision analogue pour l'axiome de Zermelo devra faire disparaître ce qu'a de magique l'emploi du mot déterminé, en en précisant le sens, et montrer à quoi sert la loi, s'il est vrai qu'il faille une loi. Il faudra, d'autre part, que l'on montre pourquoi l'ancienne logique était inadéquate à l'étude des ensembles, et qu'au contraire la nouvelle suit exactement, et pas à pas, le processus mental de détermination des ensembles. Il faudra donc arriver à ramener à un même processus mental la construction d'un ensemble par apports successifs d'éléments, et la définition d'un ensemble par l'énoncé d'une propriété caractéristique de ces éléments.

En énonçant ainsi mes exigences, je n'ai nullement voulu décider en faveur de la position purement négative que j'ai adoptée. Je ne la regarde nullement comme définitive; ce n'est qu'une position d'attente; je l'ai qualifiée de position de prudence et même peut-être de routine, il y a de bien longues années déjà, dès les premiers jours de la controverse.

Dans le passé, audace et prudence ont collaboré à chaque progrès important. Pourquoi n'en serait-il pas de même une fois de plus? En disant cela, je ne veux pas préparer la signature de l'accord de Zurich entre M. Sierpinski et moi-même. Je ne crois pas que nous arriverons aujourd'hui à un tel accord qui, au fond, n'est nullement désirable. J'ai seulement voulu mettre clairement en évidence, en étalant toutes mes exigences, que la discussion n'a pas été et n'est pas purement logique. Non seulement les mots ne sont pas vides de sens, mais la querelle porte tout entière sur le sens à leur donner, sur le but et sur l'appropriation du raisonnement à ce but. Chacun de nous s'efforce de comprendre et d'être assuré de mettre quelque chose sous les mots utilisés. Pour cela, nous nous aidons de comparaisons, d'exemples tirés de l'Histoire des Sciences, nous nous montrons audacieux ou timides, suivant la foi qui nous guide, suivant notre tempérament, peut-être suivant notre âge ou notre race. Il s'agit pourtant d'un effort d'élaboration d'un nouveau chapitre des mathématiques. Alors, à quoi sert donc la logique?

A coup sûr, elle ne sert pas à convaincre, à créer la confiance. J'ai déjà dit qu'au moment où Cantor semblait mettre en question l'arithmétique, personne ne s'est ému. De même, à l'époque historique des paradoxes sur la théorie des ensembles, quand nous sortions d'une discussion où nul d'entre nous n'avait aperçu comment resouder une logique qui semblait à tout jamais brisée, rentrés chez nous, nous n'en continuions pas moins à appliquer cette même logique aux questions que nous étudiions; car une attitude de doute philosophique prise au cours d'une discussion n'empêche nullement l'entière certitude. La logique étant incapable d'ébranler la foi absolue que nous avions en une logique appliquée! Mais nous savons tous combien il est facile de la mal appliquer. Les mathématiciens se sont même toujours plu à bâtir des sophismes qu'ils trouvaient amusants ou instructifs: «Toutes les droites du plan projectif passent par un même point.» Pour établir cette vérité il me suffirait de montrer que m droites du plan projectif ont toujours un point commun. Le fait est connu pour $m = 2$. Je le suppose démontré pour $m = n$ et je considère $n + 1$ droites $A, B, \ldots, J, K, L$; les n droites $A, B, C, \ldots, J, K$, ont un point commun l; les n droites $A, B, C, \ldots, J, L,$ ont un point commun k. Les deux points k et l coïncident puisqu'ils sont communs aux deux droites $A, B,$ donc...... Si vous n'aviez pas aperçu immédiatement la faute, auriez-vous douté un seul instant de son existence?

Donc la logique ne crée pas la confiance. Lorsque nous nous écrions: «Ce raisonnement est certainement faux», ce peut être comme il y a un instant parce qu'il y a une contradiction absolue et éclatante entre ce que nous connaissons bien et le nouveau résultat, mais ce peut-être aussi parce qu'il n'y a pas un accord suffisant, une harmonie suffisante entre ce que nous connaissons et ce que nous obtenons, parce que ce ne serait pas assez beau; d'autres fois, plus rarement, parce que ce serait trop beau. Bref la confiance vient lorsque le résultat s'accorde assez avec ce que nous attendions. Ce ne serait pourtant là qu'une raison de confiance bien précaire si nous n'avions quelques moyens de contrôle; en étudiant un ordre de questions nous acquérons peu à peu, par des corrections successives, l'intuition, la prescience, mais aussi nous constatons que tel raisonnement, peu à peu perfectionné, de mieux en mieux délimité et manié, ne conduit jamais à des contradictions et nous donne toujours des résultats en accord avec notre prescience de plus en plus affinée. Nous avons ainsi, à la fois discipliné notre rêve et en même temps construit la logique qui, dans le chapitre étudié, nous servira d'ultime contrôle. Un résultat s'accorde avec notre intuition dans le monde de la pensée, rien ne nous choque, le raisonnement est conforme à la règle; la confiance s'ensuit.

Cette confiance est-elle légitime? D'où vient la certitude mathématique? Ce n'est qu'une pauvre petite certitude relative, mais c'est la plus absolue des certitudes relatives que l'homme ait su atteindre. Elle vient de ce que, en mathématiques, nous sentons beaucoup mieux qu'ailleurs les limites de la validité de nos procédés de recherches et de nos conclusions. En mettant dans une cage un lion et un lapin, personne ne dirait un et un font deux. Aussi, l'arithmétique, qui ne s'applique que quand elle s'applique, s'applique toujours dans le cas où nous l'appliquons car, dans les autres, la tentation de l'appliquer ne nous effleure même pas. Il en est de même pour les chapitres de mathématique plus élevés; dès qu'ils sont solidement assis, nous ne nous trompons plus sur les limites de leur application, ou du moins, si nous nous trompons, nous reconnaissons vite notre erreur et nous sommes tous d'accord; alors qu'au moment de leur construction, nous étions divisés et aboutissions souvent à des contradictions. Qu'on ne s'étonne pas de nous voir acquérir, même dans les chapitres élevés de la science, une sorte de flair nous renseignant sur la légitimité de nos conclusions. C'est que, plus on s'élève en mathématiques, plus on a affaire à des êtres purement logiques, à des symboles, plus on va vers une logique formelle c'est-à-dire vers le simple.

Mais faut-il vraiment renoncer à cette certitude absolue des mathématiques tant vantée depuis avant Platon jusque après Auguste Comte? Pour que leur science mérite ces éloges, les mathématiciens l'ont rétrécie peu à peu: la signification des notions, leur adaption au réel, la valeur des axiomes, tout cela prête à la discussion; ce sera l'affaire des philosophes. Les applications des mathématiques se heurtent à quantité de contingences; le mathématicien ne va pas se commettre là-dedans; ce sera l'affaire du physicien et de l'ingénieur. Le mathématicien ne s'occupera que du stade déductif; encore ne regardera-t-il que le raisonnement tout fait car la construction d'un raisonnement logique ne se fait pas logiquement. Ainsi enfermé dans sa tour d'ivoire, le mathématicien croit faire figure de triomphateur, en réalité il n'est plus qu'un rouage d'une usine logistique.

« Les mathématiques sont la seule science où l'on ne sait jamais de quoi l'on parle ni si ce que l'on dit est vrai » a écrit Bertrand Russell. Boutade bien digne de l'humour anglais, enfermant une vérité profonde sous un gros rire. Un rire qui sonne franc et qui pourtant est teinté d'une mélancolie résignée. C'est qu'il faut beaucoup de résignation pour accepter de payer la certitude absolue en rompant tous les liens qui unissaient le certain et le vrai, en renonçant à donner aux mathématiques une valeur humaine. Les mathématiques ne seront plus qu'un instrument dont d'autres, philosophes, physiciens, ingénieurs feront peut-être un emploi utile. Encore faudra-t-il que, par une chance inespérée, nous ayons construit des outils utilisables, sans nous être jamais préoccupés de ce à quoi ils devraient servir. Et tout cela pour une certitude absolue relativement aux hypothèses et aux modes de raisonnement utilisés!

Si mes remarques sont quelque peu fondées — et je crois en voir une confirmation dans le fait qu'à aucune époque les mathématiciens n'ont été entièrement d'accord sur l'ensemble de leur science que l'on dit être celle des vérités évidentes, absolues, indiscutables et définitives; ils ont toujours été en controverse sur les parties en formation des mathématiques; toujours ils ont estimé que leur époque était une période de crise — s'il est vrai que tout homme qui pense contruit à la fois l'objet de ses pensées, le but de ses pensées et la méthode dirigeant ses pensées, s'il s'agit en réalité d'une activité unique dont nous distinguons un peu arbitrairement des aspects différents, il conviendrait que cette pseudo-philosophie des mathématiques dont je parle, ose envisager dans toute sa complexité cette activité. Il faudrait que les études sur les fondements et sur la méthode des mathématiques fassent une large place à la psychologie, voire même à l'esthétique.

* * *

Ayant remercié M. Lebesgue d'être venu, dans son précieux exposé, au devant des intentions des organisateurs du congrès, le *Président* se réserve d'y revenir dans ses Conclusions. Il pense que la discussion s'établira plus facilement après l'exposé de M. Sierpinski. Il donne cependant déjà maintenant la parole à M. Polya pour une intervention d'ordre général.

Anexo 6A

Sur le développement de la notion d'intégrale.

Conférence faite à Copenhague, le 8 Mai 1926,
à la Société Mathématique

par M. Henri Lebesgue.

Messieurs.

Laissant de côté tous les développements techniques, nous allons examiner ensemble les modifications successives, les enrichissements de la notion d'intégrale et comment sont apparues d'autres notions utilisées dans les recherches récentes sur les fonctions de variables réelles.

Avant Cauchy il n'y avait pas de définition de l'intégrale, au sens actuel du mot définition. On se bornait à dire quelles étaient les aires qu'il fallait additionner ou soustraire pour obtenir l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$.

Pour Cauchy, une définition est nécessaire; car, avec lui, apparait le souci de rigueur qui est la caractéristique des mathématiques modernes. Cauchy définit, à peu près comme nous le faisons maintenant, les fonctions continues et les intégrales de ces fonctions. Pour arriver à l'intégrale de $f(x)$, il lui suffit de former les sommes

$$S = \Sigma f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \qquad (1)$$

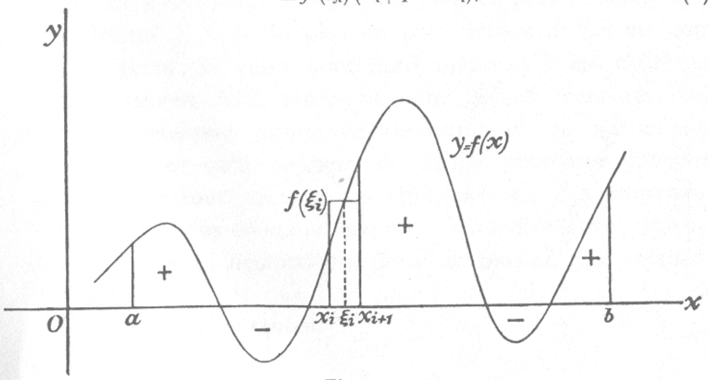


Fig. 1.

que les arpenteurs et les mathématiciens de tous les siècles ont utilisés pour le calcul approché des aires, et d'en déduire $\int_a^b f(x)\,dx$ par un passage à la limite.

Seulement, tandis que la légitimité d'un tel passage était évidente pour qui partait de la notion d'aire, Cauchy doit démontrer que les S tendent bien vers une limite dans les conditions qu'il envisage. Une nécessité analogue s'impose chaque fois qu'on remplace par une définition purement logique l'emploi d'une notion expérimentale. Il faut ajouter que l'intérêt de l'être défini n'est plus évident, il ne peut ressortir que de l'étude des propriétés de cet être.

C'est la rançon du progrès logique. Celui qu'a fait faire Cauchy est si considérable qu'il a une ampleur en quelque sorte philosophique. On dit souvent que Descartes a ramené la géometrie à l'algèbre; je dirais plus volontiers que, par l'emploi des coordonnées, il a ramené toutes les géométries à celle de la droite et que celle-ci, en nous dotant des notions: continu et nombre irrationel, a permis à l'algèbre d'atteindre à sa portée actuelle.

Pour que la réduction des géométries à celle de la droite fut achevée, il restait pourtant à éliminer un certain nombre de notions relatives aux géométries à plusieurs dimensions telles que longueur d'une courbe, aire d'une surface, volume d'un corps. C'est précisément là le progrès qu'a réalisé Cauchy. Après lui, il a suffi que les Arithméticiens construisent le continu linéaire à l'aide du nombre entier pour que l'arithmétisation de la science soit effectuée.

Et maintenant, devons nous nous borner à faire de l'Analyse? Non. Certes, tout ce que nous ferons pourra se traduire dans le langage arithmétique, mais si l'on renonçait à avoir des vues directes, géométriques, intuitives, si l'on était réduit à la pure logique qui ne permet pas de choisir entre tout ce qui est exact, on ne penserait guère à bien des questions et certaines notions, la plupart de celles que nous allons examiner aujourd'hui par exemple, nous échapperaient complètement.

5*

Depuis longtemps on avait intégré certaines fonctions discontinues; la définition de Cauchy s'appliquait encore à ces intégrales; aussi était-il naturel de rechercher, comme l'a fait Riemann, la portée exacte de cette définition.

Si $\underline{f_i}$ et $\overline{f_i}$ désignent les bornes inférieure et supérieure de $f(x)$ dans (x_i, x_{i+1}), S est comprise entre

$$\underline{S} = \Sigma \underline{f_i}(x_{i+1} - x_i) \quad \text{et} \quad \overline{S} = \Sigma \overline{f_i}(x_{i+1} - x_i).$$

Riemann montre qu'il suffit que

$$\overline{S} - \underline{S} = \Sigma \left(\overline{f_i} - \underline{f_i}\right)(x_{i+1} - x_i)$$

tende vers zéro pour une suite particulière de divisions de (ab) en intervalles (x_i, x_{i+1}) de plus en plus petits pour que la définition de Cauchy puisse être employée. Darboux ajoute que les passages à la limite habituels effectués sur $\underline{S}$ et $\overline{S}$ donnent toujours deux nombres déterminés $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$; en général différents, égaux seulement lorsque l'intégrale de Cauchy-Riemann existe.

Du point de vue logique, voici des définitions très naturelles, n'est-ce pas? Pourtant, on peut dire qu'elles n'ont pratiquement servies à rien. Celle de Riemann, en particulier, a l'inconvénient de ne s'appliquer que rarement et, en quelque sorte, par hasard.

C'est qu'en effet, s'il est bien évident que le morcellement de (a, b) en intervalles (x_i, x_{i+1}) de plus en plus petits rendra les différences $\overline{f_i} - \underline{f_i}$ de plus en plus petites si $f(x)$ est continue, en vertu de cette continuité même, s'il est clair que ce morcellement fera tendre encore $\overline{S} - \underline{S}$ vers zéro s'il n'y a que quelques points de discontinuité, on n'a aucune raison d'espérer qu'il en sera de même pour une fonction discontinue partout. Alors, en effet, prendre des intervalles (x_i, x_{i+1}) de plus en plus petits, c'est-à-dire des valeurs de $f(x)$ relatives à des valeurs de x de plus en plus voisines, ne garantit nullement que l'on prend des valeurs de $f(x)$ de moins en moins différentes.

Laissons nous donc guider par le but à atteindre: réunir, grouper les valeurs peu différentes de $f(x)$. Il est clair alors que nous devons morceller, non pas (a, b), mais l'intervalle $(\underline{f}, \overline{f})$ limité par les bornes inférieure et supérieure de $f(x)$ dans (a, b). Faisons-le à l'aide de nombres y_i distants entre eux de moins de ε; nous sommes conduits, par exemple, à considérer les valeurs de $f(x)$ définies par

$$y_i \leqq f(x) \leqq y_{i+1}.$$

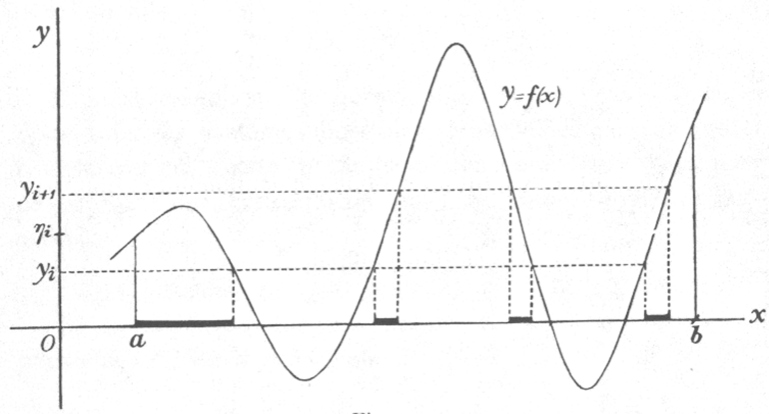


Fig. 2.

Les valeurs correspondantes de x forment un ensemble E_i; dans le cas de la figure, cet ensemble E_i est constitué par quatre intervalles; avec certaines fonctions $f(x)$ continues il pourrait être formé d'une infinité d'intervalles; avec une fonction quelconque il pourrait être très compliqué. Mais peu importe; c'est cet ensemble E_i qui joue le rôle analogue à celui de l'intervalle (x_i, x_{i+1}) dans la définition de l'intégrale des fonctions continues, puisqu'il nous fait connaître des valeurs de x donnant à $f(x)$ des valeurs peu différentes.

Si η_i est un nombre quelconque pris entre y_i et y_{i+1},

$$y_i \leqq \eta_i \leqq y_{i+1},$$

les valeurs de $f(x)$ pour les points de E_i diffèrent de η_i de moins de ε. η_i va jouer le rôle que jouait $f(\xi_i)$ dans la formule (1); quant au rôle de la longueur ou mesure $x_{i+1} - x_i$ de l'intervalle (x_i, x_{i+1}) il sera joué par une mesure $m(E_i)$ que nous attacherons dans un instant à l'ensemble E_i. Nous formerons ainsi la somme

$$S = \Sigma \eta_i m(E_i). \tag{2}$$

Mais, auparavant, regardons bien ce que vous venons de faire et, pour le bien comprendre, répétons-le en d'autres termes.

Les Géomètres du XVII[ème] Siècle considéraient l'intégrale de $f(x)$ — le mot intégrale n'était pas inventé, mais peu importe — comme la somme d'une infinité d'indivisibles dont chacun était l'ordonnée, positive ou négative, de $f(x)$. Eh bien! nous avons tout simplement groupés les indivisibles de grandeur comparable; nous avons, comme on dit en algèbre, fait la réunion, la réduction des termes semblables. On peut dire encore que, avec le procédé de Riemann, on essayait de sommer les indivisibles en les prenant dans l'ordre où ils étaient fournis par la variation de x, on opérait donc comme le ferait un commerçant sans méthode qui compterait pièces et billets au hasard de l'ordre où ils lui tomberaient sous la main; tandis que nous opérons comme le commercant méthodique qui dit:

j'ai $m(E_1)$ pièces de 1 couronne valant $1 \cdot m(E_1)$,
j'ai $m(E_2)$ pièces de 2 couronnes valant $2 \cdot m(E_2)$,
j'ai $m(E_3)$ billets de 5 couronnes valant $5 \cdot m(E_2)$,

etc., j'ai donc en tout:

$$S = 1 \cdot m(E_1) + 2 \cdot m(E_2) + 5 \cdot m(E_3) + \cdots.$$

Les deux procédés conduiront, certes, le commerçant au même résultat parceque, si riche qu'il soit, il n'a qu'un nombre fini de billets à compter; mais pour nous, qui avons à additionner une infinité d'indivisibles, la différence entre les deux façons de faire est capitale.

Occupons nous maintenant de la définition du nombre $m(E_i)$ attaché à E_i. L'analogie entre cette mesure et une longueur, ou même avec un nombre de billets, nous conduit naturellement à dire que, dans l'exemple de la figure (2), $m(E_i)$ sera la somme des longueurs des quatre intervalles constituant E_i; que, dans un exemple où E_i serait formé d'une infinité d'intervalles, $m(E_i)$ serait la somme des longueurs de tous ces intervalles; et, dans le cas général, à procéder comme il suit: enfermons E_i dans des intervalles, en nombre fini ou en infinité dénombrable; soient $l_1, l_2, \dots$ les longueurs de ces intervalles. Nous désirons évidemment que l'on ait:

$$m(E_i) < l_1 + l_2 + \cdots.$$

Si nous cherchons la borne inférieure du second membre pour tous les systèmes possibles d'intervalles pouvant servir à enfermer E_i, cette borne sera donc une limite supérieure de $m(E_i)$. Pour cette raison nous la notons $\overline{m(E_i)}$ et nous avons

$$m(E_i) \leq \overline{m(E_i)}. \qquad (3)$$

Si C est l'ensemble des points de (a, b) ne faisant pas partie de E_i, on a de même

$$m(C) \leq \overline{m(C)}.$$

Or, on désire évidemment avoir

$$m(E_i) + m(C) = m[(a, b)] = b - a;$$

donc on doit avoir

$$m(E_i) > b - a - m(C). \qquad (4)$$

Les inégalités (3) et (4) donnent donc des limites supérieure et inférieure de $m(E_i)$. On voit facilement que ces deux inégalités ne sont jamais contradictoires. Lorsque les limites inférieure et supérieure de E_i sont égales, $m(E_i)$ est définie, nous dirons alors que E_i est mesurable*).

*) Le mode de définition de la mesure des ensembles utilisé ici est celui de C. Jordan (*Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique, tome I*); mais avec cette modification, essentielle pour notre but, que nous enfermons l'ensemble E_i à mesurer dans des intervalles dont le nombre peut être infini, alors que C. Jordan employait toujours seulement un nombre fini d'intervalles. Cet emploi de l'infinité dénombrable à la place du nombre

Une fonction $f(x)$, pour laquelle les ensembles E_i sont mesurables quels que soient les y_i, est dite mesurable. Pour une telle fonction, la formule (2) définit une somme S. On démontre facilement que, lorsqu'on fait varier le choix des y_i de façon que ε tende vers zéro, les S tendent vers une limite déterminée qui est, par définition, $\int_a^b f(x)\,dx$ *).

Cette première extension de la notion d'intégrale définie en entraine bien d'autres. Supposons qu'il s'agisse d'intégrer une fonction $f(x, y)$ de deux variables nous procéderons exactement comme précédemment: nous lui attacherons des ensembles E_i qui seront maintenant des ensembles de points dans un plan et non plus de points sur une droite. A ces ensembles ce sera une mesure superficielle qu'il faudra maintenant attribuer; cette mesure se déduira de l'aire des rectangles

$$\alpha \leq x \leq \beta \qquad \gamma \leq y \leq \delta$$

tout à fait de la même manière que la mesure linéaire se déduisait de la longueur des intervalles. La mesure définie, la formule (2) donnera des sommes S d'où l'intégrale se déduira par un passage à la limite.

La définition que nous avons envisagée s'étend donc immédiatement aux fonctions de plusieurs variables; en voici une autre qui s'appliquerait également quelque soit le nombre des variables et que j'expose seulement dans le cas où il s'agit d'intégrer $f(x)$ dans (a, b).

J'ai dit qu'il s'agissait alors de faire la somme des indivisibles représentés par les diverses ordonnées des points x, $y=f(x)$; nous avons, il y a un instant, groupés ces indivisibles d'après leurs grandeurs. Bornons nous maintenant à les grouper

---

entier est suggéré par les travaux de M. Borel qui, d'ailleurs, avait utilisé lui-même cette idée en particulier pour une définition de la mesure. (*Leçons sur la théorie des fonctions*).

*) Comptes Rendus de l'Acad. des Sc. t. CXXIX, 1909.
Des définitions équivalentes à celle du texte ont été proposées par divers Auteurs. Les plus intéressantes sont dues à M.W. H. Young (Philos. Trans. of the Royal Soc. of London 1905; Proc. of the London Math. Soc. 1910). Voir aussi, par exemple, des notes de M. Borel et de M. F. Riesz (Comptes Rendus. 1912).

d'après leur signe; nous aurons à considérer l'ensemble superficiel des points de celles de ces ordonnées qui sont positives, E_p, et l'ensemble E_n des points des ordonnées négatives. Pour le cas simple où $f(x)$ est continue, on posait, avant Cauchy, ainsi que je l'ai rappelé en commençant,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{aire}\,(E_p) - \text{aire}\,(E_n);$$

ceci nous conduit à poser

$$\int_a^b f(x)\,dx = m_s(E_p) - m_s(E_n);$$

m_s désignant une mesure superficielle. Cette nouvelle définition est équivalente à la précédente; elle nous ramène à la méthode intuitive d'avant Cauchy, mais la définition de la mesure lui a donné un solide fondement logique.

Nous savons donc, et de deux manières, définir l'intégrale d'une fonction d'une ou de plusieurs variables et cela sans avoir eu à considérer la forme plus ou moins compliquée du domaine d'intégration, car ce domaine D n'intervenait qu'en ceci: les ensembles E_i, dans notre première définition, les ensembles E_p et E_n, dans la deuxième, étaient formés en ne prenant les valeurs de la fonction f que pour les points de D.

Puisque le choix du domaine d'intégration D n'intervient que dans la formation des E_i, ou des E_p et E_n; il est clair que nous pourrions tout aussi bien convenir de former ces ensembles E_i, E_n, E_p en ne tenant compte que des valeurs prises par f aux points d'un ensemble E donné et nous aurions ainsi défini l'integrale de f étendue à l'ensemble E.

Pour préciser la portée de cette nouvelle extension de la notion d'intégrale, rappelons nous que nos définitions exigent que f soit mesurable c'est-à-dire que les E_i soient mesurables, pour la première définition, que E_p et E_n le soient, pour la deuxième, et cela entraine que E soit aussi mesurable. Nous savons donc définir l'intégrale étendue à un ensemble mesurable d'une fonction mesurable dans cet ensemble, et bornée; j'ai, en effet, supposé implicitement jusqu'ici qu'il s'agissait de fonctions bornées.

Qu'y aurait-il de changé dans le premier mode de définition si la fonction f à intégrer était non bornée? L'intervalle $(\underline{f}, \overline{f})$ ne serait plus fini; il faudrait donc une infinité de nombres y_i pour le diviser en intervalles de longueur au plus égale à ε, il y aurait donc une infinité d'ensembles E_i et la somme S de la formule (2) serait maintenant une série. Pour ne pas être arrêté dès le début, il nous faut supposer que la série S est convergente pour le premier choix de nombres y_i que nous aurons fait; or, si S existe pour un choix des y_i, il existe pour tous les choix des y_i et la définition de l'intégrale s'applique sans modifications.

On a donné le nom de fonctions sommables à toutes les fonctions que l'on peut intégrer par les procédés indiqués, c'est-à-dire à toutes les fonctions mesurables pour lesquelles les sommes S ont un sens. Toute fonction mesurable bornée est sommable: et comme on n'a pas réussi jusqu'ici à nommer une fonction non mesurable, on peut dire que, jusqu'ici, pratiquement toute fonction bornée a une intégrale. Au contraire, il existe des fonctions non bornées très simples qui ne sont pas sommables; aussi ne doit-on pas s'étonner que notre notion d'intégrale se révèle encore insuffisante dans certaines questions.

Nous venons d'étendre la notion d'intégrale à des fonctions non bornées en partant de la première de nos définitions; la seconde conduit au même résultat. Mais il faut pour cela élargir la notion de mesure de façon à ce qu'elle s'applique non seulement aux ensembles bornées, que nous avons seuls considérés jusqu'ici, mais aussi à des ensembles de points s'étendant jusqu'à l'infini. Je ne signale cette seconde façon de procéder que par ce qu'elle est aussi en rapport avec une autre extension de l'intégrale définie dans laquelle l'intervalle, le domaine, l'ensemble auquel est étendue l'intégrale n'est plus supposé fini, comme nous l'avons fait jusqu'ici, mais peut aller jusqu'à l'infini.

Je me borne à cette indication car je n'aurai pas à envisager, dans ce qui suit, cette extension de la notion d'intégrale. C'est pour la même raison que je me contente de signaler rapidement les recherches, pourtant si originales, entreprises par un jeune homme tué à la guerre, M. Gateaux, qui s'était proposé de définir l'opération d'intégration pour les fonctions d'une infinité de variables. Ces recherches, qui ont été prolongées par M. Paul Lévy et par M. Norbert Wiener, ne sont pas sans rapport avec les études axiomatiques entreprises par M. M. Fréchet et par M. P. J. Daniell dans le but d'étendre la notion d'intégrale aux ensembles abstraits*). M. Frèchet et M. Daniell ne se sont d'ailleurs pas proposé seulement d'appliquer aux ensembles abstraits les définitions dont j'ai parlé jusqu'ici, mais aussi une autre extension de l'intégrale définie à laquelle nous conduira bientôt la notion d'intégrale indéfinie que nous allons maintenant examiner.

On appelle ordinairement intégrale indéfinie d'une fonction $f(x)$, la fonction $F(x)$ définie par

$$F(x) = C^{\text{te}} + \int_a^x f(x)\,dx; \tag{5}$$

ne conservons pas cette dénomination et redonnons aux mots intégrale indéfinie leur sens primitif. Primitivement, les deux dénominations »intégrale définie« et »intégrale indéfinie« s'appliquaient à la même expression $\int_a^b f(x)\,dx$; mais l'intégrale était dite défini lorsqu'il s'agissait d'un intervalle (a, b) donné, déterminé, définie et l'intégrale était indéfinie lorsque (a, b) était variable, non déterminé, non défini ou, si l'on veut dire, indéfini.

C'est en somme par un véritable abus de langage qu'on appelle $F(x)$ l'intégrale indéfinie de $f(x)$; si nous remarquons, de plus, que lorsqu'on étudie $F(x)$ c'est toujours pour obtenir des propriétés de $\int_a^b f(x)\,dx$, que c'est au fond $\int_a^b f(x)\,dx$ que l'on étudie à travers $F(x)$, on sera conduit à dire: j'appelle intégrale indéfinie de $f(x)$ la fonction $\Phi(a, b)$

*) R. Gateaux. Bull. Soc, Math. de France; 1919.
P. Lévy. Leçons d'Analyse fonctionnelle; 1922.
N. Wiener. Proc. of the London Math, Soc. 1922.
M. Fréchet. Bull. Soc. Math. de France; 1915.
P. J. Daniell. Ann. of Math. 1918 et 1919.

$$\Phi(a, b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (5 \text{ bis})$$

Il y a entre une intégrale indéfinie et l'intégrale définie correspondante les mêmes relations et les mêmes différences qu'entre une fonction et une valeur particulière prise par cette fonction; au reste, si nous représentions par D l'intervalle (a, b) d'intégration, nous pourrions dire que l'intégrale indéfinie est une fonction dont l'argument est le domaine D,

$$\Psi(D) = \Phi(a, b).$$

De ces réflexions, il résulte clairement que, relativement à une fonction de deux variables $f(x, y)$, on ne doit pas prendre pour intégrale indéfinie, comme on l'a fait quelques fois, la fonction

$$F(X, Y) = c_1(x) + c_2(y) + \int_\alpha^X \int_\beta^Y f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (6)$$

Si l'on se bornait à la considération des domaines rectangulaires

$$a \leq x \leq b; \quad c \leq y \leq d,$$

on devrait prendre pour intégrale indéfinie la fonction de quatre variables

$$\Phi(a, b;\ c, d) = F(b, d) + F(a, c) - F(a, d) - F(b, c); \quad (7)$$

mais, si l'on veut considérer tous les domaines d'intégration, comme le domaine le plus général ne peut être déterminé par un nombre fini de paramètres, si grand que soit ce nombre, force nous est de renoncer aux fonctions ordinaires pour représenter la correspondance entre un domaine D et l'intégrale étendue à ce domaine et d'étudier directement la fonction

$$\Psi(D) = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy,$$

dont l'argument D est un domaine. C'est cette fonction que nous appellerons l'intégrale indéfinie de $f(x, y)$; ou plutôt, puisque nous avons défini aussi l'intégrale de f étendue à un ensemble mesurable E, nous considérerons l'intégrale indéfinie comme une fonction d'ensemble qui serait définie pour tous les ensembles mesurables*).

Dans tout ce qui précède il n'y a certes que des questions de langage, de dénomination; mais ces questions de dénomination ne se seraient pas posées si nous n'avions pas acquis une notion nouvelle. C'est pourquoi on ne doit pas s'étonner que le nouveau langage ait permis de donner toute la portée possible à des faits aperçus tout d'abord à l'occasion de la fonction $F(x)$ de la formule (5). On a réussi, en particulier, à caractériser les fonctions d'ensemble qui sont des intégrales indéfinies par deux propriétés: l'additivité compléte et l'absolue continuité**).

Quand une fonction d'ensemble $\Psi(E)$ jouit de ces deux propriétés elle est l'intégrale indéfinie d'une fonction f qui dépend de 1, 2, 3, ... variables suivant que les ensembles E sont formés à l'aide de points d'une droite, d'un plan, de l'espace ordinaire, etc. Pour avoir un langage et une notation uniforme disons que f est une fonction de point, $f(P)$, et écrivons:

$$\Psi(E) = \int_E f(P)\, dm(E). \tag{8}$$

La fonction $f(P)$ est entièrement déterminée par $\Psi(E)$, à ceci près qu'on peut modifier arbitrairement f aux points

*) Annales Scientifiques de l'Ecole normale supérieure, 1910.

**) Ces dénominations sont dues respectivement à M. de la Vallée-Poussin. (Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire) et à M. G. Vitali (R. Acc. d. Sc. di Torino, 1908).

Une fonction d'ensemble mesurable $\Psi(E)$ est complètement additive si, de quelque manière qu'on partage E en des ensembles mesurables $E_1, E_2, \cdots$, en nombre fini ou dénombrable et sans points communs deux à deux, on a:

$$\Psi(E) = \Psi(E_1) + \Psi(E_2) + \cdots.$$

Une fonction d'ensemble mesurable $\Psi(E)$ est absolument continue si, quand E varie de façon que $m(E)$ tende vers zéro, $\Psi(E)$ tend aussi vers zéro.

d'un ensemble arbitraire de mesure nulle sans qu'elle cesse d'avoir $\Psi(E)$ pour intégrale indéfinie. Et l'on peut obtenir $f(P)$ à parter de $\Psi(E)$, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, par le procédé suivant:

Soit P le point en lequel on veut calculer f; prenons pour domaine d'intégration Δ un intervalle de centre P, ou un cercle de centre P, ou une sphère de centre P, ... suivant qu'il s'agit du cas de la droite, du plan, de l'espace, ... et formons le rapport $\frac{\Psi(\Delta)}{m(\Delta)}$. Puis, faisons tendre Δ vers zéro; nous aurons:

$$\underset{\Delta \to 0}{\text{limite}} \frac{\Psi(\Delta)}{m(\Delta)} = f(P). \tag{9}$$

Ce résultat généralise évidemment le théorème classique d'après lequel, si $f(x)$ est continue, la fonction $F(x)$ de la formule (5) admet f pour dérivée; notre procédé de calcul de $f(P)$ est bien, en effet, une sorte de dérivation de la fonction d'ensemble $\Psi(E)$.

Ce mode de dérivation avait été considéré, il y a fort longtemps. Cauchy*) appelle grandeurs coexistantes des grandeurs déterminées en même temps, c'est-à-dire par les mêmes conditions. Si l'on a, par exemple, un corps non homogène, et comme composition et comme densité, et si l'on considére un domaine D de ce corps, le volume de D, la masse de D, la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1^0 la température de D supposé isolé, sont des grandeurs coexistantes. Ce sont des fonctions de domaine $V(D)$, $M(D)$, $Q(D)$.

Ce n'est pas par un heureux hasard que nous arrivons ici à des fonctions de domaine. Si l'on y réfléchit, on s'apercevra vite que toute grandeur de la physique est relative non à un point, mais à un corps étendu, que c'est une fonction de domaine; du moins tant qu'il s'agit de grandeurs directement mesurables. Le corps à considérer ne sera toutefois pas toujours un corps de notre espace sensible, ce pourra être un corps d'un espace de conception purement mathématique si, dans la détermination de la grandeur envisagée, intervien-

*) Exercices d'analyse et de physique mathématique, tome 2. pp. 188—229.

nent des variables non spatiales comme le temps, la température, etc. Mais peu importe; les grandeurs directement mesurables, une masse, une quantité de chaleur, une quantité d'électricité, par exemple, sont des fonctions de domaine et non des fonctions de point.

La physique considère cependant aussi des grandeurs attachées à des points, comme une vitesse, une tension, une densité, une chaleur spécifique; mais ce sont des grandeurs dérivées et que l'on définit justement le plus souvent par le rapport ou la limite du rapport de deux grandeurs coexistantes:

$$\text{densité} = \frac{\text{masse}}{\text{volume}}; \quad \text{chaleur spécifique} = \frac{\text{quantité de chaleur}}{\text{masse}},$$

c'est-à-dire en prenant la dérivée d'une grandeur par rapport à une grandeur coexistante.

Ainsi la physique, et par suite la géométrie, conduit à la considération des fonctions de domaine et à leur dérivation tout aussi bien que l'analyse des fonctions de variables réelles. Même les fonctions de domaine ont, en physique, un rôle en quelque sorte plus primordial que les fonctions de point; pourquoi donc les Physiciens ne parlent ils pas de ces fonctions? Parceque les Mathématiciens ne les ont pas encore étudiées et parceque l'algèbre n'a pas de notation ni pour les domaines, ni pour les fonctions de domaine. Aussi voit-on le Physicien se borner à considérer des domaines spéciaux dépendant seulement de certains paramètres, de façon que la fonction de domaine à considérer se réduise à une fonction des paramètres; c'est d'ailleurs exactement ce que fait le Mathématicien quand, au lieu de considérer l'intégrale définie de $f(x, y)$ dans toute sa généralité, il se borne à envisager les fonctions $F(x, y)$, $\Phi(a, b; c, d)$ des formules (16) et (17).

Remarquons d'ailleurs que la formule (8) établit un lien entre les fonctions d'ensemble $\Psi(E)$, qui sont des intégrales indéfinies, et les fonctions de point $f(P)$ lesquelles relèvent de l'algèbre. Cette formule (8) fournit donc une sorte de notation de certaines fonctions d'ensemble. Or, quand on examine les deux conditions requises pour qu'une fonction soit une intégrale indéfinie, on ne doute pas que les grandeurs de la physique ne rentrent dans la classe des fonctions de domaine susceptibles de cette notation.

Ces réflexions sur la nature des grandeurs de la physique ont dû vous permettre de comprendre plus exactement l'intérêt et la portée des notions que nous avons rencontrées. Elles montrent, en particulier, que l'opération de dérivation qui figure dans la formule (9) n'est pas la seule à considérer; qu'on peut toujours envisager la dérivation d'une fonction $\Psi(E)$ par rapport à une fonction coexistante $p(E)$, que celle ci soit, ou non, la mesure $m(E)$.

Une question vient alors de suite à l'esprit: peut-on aussi remplacer la fonction $m(E)$ par une fonction donnée $p(E)$ dans la définition de l'intégrale? Il n'y a à cela aucune difficulté; nous remplacerous d'abord la formule (2) par

$$S = \Sigma \mu_i p(E_i),$$

ce qui exigera, d'abord que les ensembles E_i appartiennent à la famille de ceux pour lesquels la fonction $p(E)$ est définie, — c'est-à-dire que la fonction à intégrer doit être mesurable par rapport à $p(E)$ —, puis que la série S soit convergente, — c'est-à-dire que f doit être sommable par rapport à $p(E)$. Ceci étant supposé, la définition de l'intégrale de $f(P)$ par rapport à $p(E)$,

$$\int f(P)\, dp(E),$$

s'achèvera comme précédemment si la fonction $p(E)$ possède une certaine propriété qu'on exprime en disant que $p(E)$ doit être à variation bornée*).

---

*) $p(E)$ est dite à variation bornée si, de quelque manière que l'on partage E en une infinité dénombrable d'ensembles sans points communs deux à deux, $E_1, E_2, \cdots$, la série $\Sigma\,|\,p(E\,i)\,|$ est convergente.

La notion de fonction à variation bornée a été tout d'abord introduite par C. Jordan; elle était alors relative aux fonctions d'une variable.

Les seules fonctions d'ensemble $p(E)$ à considérer dans ces théories sont les fonctions additives, c'est-à-dire celles pour lesquelles on a:

$$p(E_1 + E_2 + \cdots) = p(E_1) + p(E_2) + \cdots,$$

les $E_1, E_2, \cdots$ étant sans points communs deux à deux. Si l'additivité est complète, c'est-à dire si la suite des $E_1, E_2, \cdots$ peut être prise

Nous venons d'arriver à une nouvelle et très considérable extension de la notion d'intégrale en nous plaçant au point de vue formel du Mathématicien; le point de vue du Physicien y conduit bien plus naturellement encore, du moins en ce qui concerne les fonctions $f(P)$ continues. On peut même dire que les Physiciens n'ont jamais considéré que des intégrations par rapport à des fonctions de domaine.

Supposons, par exemple, que l'on veuille calculer la quantité de chaleur, $\varphi(D)$, nécessaire pour élever de 1^0 la température du corps D dont nous parlions tout à l'heure; il faudra diviser D en petits corps partiels $D_1, D_2, \cdots$ de masses $M(D_1)$, $M(D_2)$, $\cdots$, prendre dans chacune d'eux un point, $P_1, P_2, \cdots$, et prendre pour valeur approchée de $\varphi(D)$ la somme

$$f(P_1)M(D_1) + f(P_2)M(D_2) + \cdots,$$

$f(P)$ désignant la chaleur spécifique en P. C'est-à-dire que nous calculerons $\varphi(D)$ par la formule

$$\varphi(D) = \int_D f(P)\,dM(E).$$

Sous sa forme générale la nouvelle intégrale a été définie seulement en 1913 par M. Radon; elle était cependant connue depuis 1894 pour le cas particulier d'une fonction continue d'une seule variable. Mais son premier inventeur, Stieltjès, y avait été conduit par des recherches d'analyse et d'arithmétique et il l'avait présentée sous une forme purement analytique qui masquait sa signification physique; si bien qu'il a fallu beaucoup d'efforts pour comprendre et re-

---

indéfinie, $p(E)$ est nécessairement à variation bornée. En effet, l'ordre des ensembles $E_1, E_2, \cdots$ étant indifférent, la série $p(E_1) + p(E_2) + \cdots$ doit rester convergente quel que soit cet ordre, c'est-à-dire que la série $\Sigma \mid p(E_i) \mid$ est convergente.

On n'a pas essayé jusqu'ici de se débarrasser de la condition: $p(E)$ à variation bornée. Il faut d'ailleurs remarquer que, si $p(E)$ n'était pas à variation bornée, on pourrait trouver une fonction $f(P)$ qui soit continue et à laquelle pourtant notre définition de l'intégrale ne s'appliquerait pas.

connaître ce qui est maintenant évident. L'historique de ces efforts citerait les noms de F. Riesz, H. Lebesgue, W. H. Young, M. Fréchet, C. de la Vallée-Poussin; il montrerait que nous avons rivalisé en ingéniosité, en perspicacité, mais aussi en aveuglement.*)

Et pourtant, les Mathématiciens considéraient à chaque instant des intégrales de Stieltjès-Radon: l'intégrale curviligne $\int_C f(x, y)\, dx$ est une de ces intégrales, relative à une fonction $p(E)$ définie à partir de la longueur de la projection sur ox des arcs de C; l'intégrale $\iint_S f(x, y, z)\, dx\, dy$, fait de même intervenir une fonction d'ensemble définie à partir des aires de S en projection sur oxy.

A la vérité ces intégrales se présentent le plus souvent groupées

$$\int_C f(x, y)\, dx + g(x, y)\, dy,$$

$$\iint_S f(x, y, z)\, dx\, dy + g(x, y, z)\, dy\, dz + h(x, y, z)\, dz\, dx.$$

Si l'on pense aussi aux intégrales considérées pour la définition des longueurs des courbes ou des aires des surfaces,

$$\int_C \sqrt{dx^2 + dy^2 + dy^2}, \quad \iint_S \sqrt{(dxdy)^2 + (dydz)^2 + (dzdx)^2},$$

on sera conduit à se dire qu'il conviendrait aussi d'étudier des modes d'intégration dans lesquels interviendraient plusieurs fonctions d'ensemble $p_1(E)$, $p_2(E)$, ... Cette étude est entièrement à faire; M. M. Hellinger et Tœplitz ont cependant utilisé certaines sommations par rapport à plusieurs fonctions d'ensemble **).

---

*) J. Radon. Sitz. d. Kais. Ak d. Wiss. in Wien. Bd. CXXII. Abt. IIa. 1913.
T. J. Stieltjès. Ann. d. l. Fac. des Sc. d. Toulouse, 1894.
F. Riesz. Comptes Rendus de l'Ac. des Sc., 1909.
H. Lebesgue. — id — , 1910.
W. H. Young. Proc. of the London Math. Soc., 1913.
M. Fréchet, Nouv. Ann. des Math., 1909.
Ch. de la Vallée-Poussin. Voir, par exemple, son livre déjà cité.

**) Voir, par exemple, Journal de Crelle, Bd. 144.

Nous avons considéré jusqu'ici l'intégration, définie ou indéfinie, comme une opération fournissant un nombre, défini ou variable, par une sorte d'addition généralisée; nous nous sommes placés au point de vue des quadratures. Mais on peut aussi regarder l'intégration d'une fonction continue comme fournissant une fonction, comme la plus simple des intégrations d'équations différentielles; c'est le point de vue des fonctions primitives auquel nous allons maintenant nous placer.

Rechercher la fonction primitive $F(x)$ d'une fonction donnée $f(x)$ c'est rechercher la fonction, déterminée à une constante additive près quand elle existe, qui admet $f(x)$ pour dérivée. C'est ce problème que nous allons étudier.

Mais, auparavant, remarquons que les réflexions précédentes conduisent à formuler le problème d'une façon bien autrement générale: étant donnée une fonction $f(P)$ qui est la dèrivée par rapport à une fonction connue $p(E)$ d'une fonction inconnue $\Psi(E)$, trouver la fonction primitive $\Psi(E)$ de $f(P)$?

Si, par exemple, il s'agit d'une fonction continue $f(x)$ et si $m(E)$ est la mesure, la fonction primitive ne serait plus la fonction $F(x)$ de la formule (5) mais l'intégrale indéfinie $\int_E f(x)\,dx$.

Je ne puis que signaler ce problème général qui n'a pas été étudié; je me contente de faire remarquer que l'intégrale de Stieltjès sera très insuffisante pour le résoudre. Cette intégrale n'a, en effet, été définie que dans l'hypothèse où $p(E)$ est à variation bornée et l'on peut fort bien parler de dérivée par rapport à une fonction $p(E)$ à variation non bornée.

La théorie des fonctions sommables fournit ce résultat relatif au cas ou $p(E)$ est la mesure $m(E)$: lorsque la dérivée $f(P)$ est sommable, la fonction primitive de f est l'une de ses fonctions primitives. Je dis l'une de ses fonctions primitives, car on ne sait pas même encore très bien comment doit être posé ce problème général des fonctions primitives pour qu'il soit déterminé*)

---

*) Voir à ce sujet des notes de M. Fubini et de M. Vitali parues en 1915, 1916 dans les Atti de l'Académie de Turin et de l'Académie des Lincei.

Laissons donc de côté ces questions, dont je n'ai parlé que pour montrer combien il reste à faire, et montrons combien il vient d'être fait pour la recherche de la fonction primitive $F(x)$ de $f(x)$, grâce surtout à M. Arnaud Denjoy.

Je viens de dire que, lorsque $f(x)$ est sommable, l'intégration fournit $F(x)$ par la formule (5). Supposons que, dans (a, b), $f(x)$ ne cesse d'être sommable qu'au point c. Alors l'intégration nous fournit $F(x)$ dans $(a, c-\varepsilon)$, quel que petit que soit ε, donc dans tout (a, c); elle fournit aussi $F(x)$ dans $(c+\varepsilon, b)$, donc dans tout (c, b). Et, en tenant compte de la continuité de $F(x)$ au point c, nous aurons $F(x)$ dans tout (a, b). Par de telles considérations de continuité*) on voit que, si l'on connait $F(x)$ dans tout intervalle qui ne contienne aucun point d'un ensemble E ni à son intérieur ni comme extrémités, on en déduira $F(x)$ par une opération que je désignerai par A, dans tout intervalle contigu à E, c'est-à-dire dans tout intervalle ayant pour extrémités des points de E mais ne contenant pas de points de E à son intérieur.

Supposons maintenant qu'on connaisse $F(x)$ dans les intervalles (α, β) contigus à un ensemble E, que la somme $\Sigma[F(\beta)-F(\alpha)]$ soit convergente, et que $f(x)$ soit sommable sur E**). Alors il suffit de se dire que la fonction primitive doit résulter de la contribution de E et de celle des intervalles contigus à E, pour être conduit à la formule:

$$F(x)-F(a)=\left\{\int_E f dx+\Sigma[F(\beta)-F(\alpha)]\right\}_a^x,$$

les accolades du second membre indiquant qu'on n'y doit utili-

*) C'est l'introduction de ces conditions de continuité que différencie très considérablement le problème des fonctions primitives de celui des quadratures.

**) Il convient de remarquer que ces hypothèses ne sont pas contradictoires, même si E est supposé être l'ensemble des points de non sommabilité de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) considéré. Pour la détermination des points de non sommabilité dans (a, b) il faut, en effet, tenir compte de tous les points de (a, b), qu'ils appartiennent à E ou non, tandis que la sommabilité sur E est une condition ne faisant intervenire que les seuls points de E.

ser que les points compris entre a et x. De cette formule résulte donc la détermination de $F(x)$, grâce à une opération que je désignerai par B.

Les deux résultats précédents marquent le point extrême auquel j'étais parvenu dans ma Thèse et je dois dire que je ne les ai indiqués qu'en quelque sorte par hasard; car je me doutais nullement de l'intérêt qu'allait leur donner M. Denjoy.

S'appuyant sur des résultats de M. Baire, M. Denjoy montre que, si $f(x)$ est une fonction dérivée dans (a, b),

1° les points où $f(x)$ n'est pas sommable forment un ensemble E_1 non dense dans (a, b); une opération O_1 du type A, fait connaître $F(x)$ dans les intervalles contigus à E_1;

2° ensuite, qu'il existe un ensemble E_2, formé de points de E_1 et non dense sur E_1, dans les intervalles contigus duquel on peut calculer $F(x)$ par une opération O_2 du type B;

3° ensuite, qu'il existe un ensemble E_3, formé de points de E_2 et non dense sur E_2, dans les intervalles contigus duquel on peut calculer $F(x)$ par une opération O_3 du type B; ....

S'il arrive qu'après la suite infinie d'opérations $O_1, O_2, \cdots$ on n'ait pas encore trouvé $F(x)$ dans tout (a, b), les points de (a, b) qui ne sont pas intérieurs à des intervalles dans lesquels on a déterminé $F(x)$ forment un ensemble E_ω et une opération de type A, l'opération O_ω, fournit F dans les intervalles contigus à E_ω. On considère ensuite, s'il est nécessaire, des opérations $O_{\omega+1}, O_{\omega+2}, \ldots$ du type B, puis une opération $O_{2\omega}$ du type A, puis des opérations du type B, etc.

Et M. Denjoy, utilisant des raisonnements maintenant classiques de Cantor et Bendixson, prouve que ce procédé nous fera finalement connaître $F(x)$ dans tout (a, b) après un nombre fini ou une infinité dénombrable d'opérations.

Ce procédé opératoir, certes compliqué, mais tout aussi naturel, dans son principe, que ceux antérieurement envisagés, a été appelé par M. Denjoy: la totalisation.

La totalisation résoud entièrement le problème de la recherche de la fonction primitive $F(x)$ d'une fonction donnée $f(x)$; elle permet même aussi de déterminer $F(x)$ connaissant seulement un nombre dérivé de $F(x)$ et non plus sa dérivée. Je ne m'arrête pas sur ces beaux résultats; le fait le plus important pour nous c'est que la totalisation, par un long détour, nous fournit une extension nouvelle de la notion d'intégrale définie. Toutes les fois, en effet, que la totalisation s'appliquera à une fonction $f(x)$ et lui fera correspondre une fonction $F(x)$, nous pourrons convenir d'attacher à $f(x)$ une intégrale grace aux formules (5) et (5 bis)*).

Messieurs, je m'arrête et je vous remercie de votre courtoise attention; mais il faut un mot de conclusion. Ce sera, si vous le voulez bien, qu'une généralisation faite non pour le vain plaisir de généraliser, mais pour résoudre des problémes antérieurement posés, est toujours une généralisation féconde. Les divers emplois qu'ont déjà reçus les notions que nous venons d'examiner, le prouveraient surabondamment.

ANEXO 6B

SOBRE O DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE INTEGRAL 54
por
Henri Lebesgue

Senhores.

Deixando de lado todos os desenvolvimentos técnicos, examinaremos as sucessivas modificações e enriquecimentos da noção de integral e como apareceram outras noções usadas em pesquisa recente sobre funções de variáveis reais.

Anterior a Cauchy, não havia definição de integral, no sentido atual da palavra "definição". Limitava-se a dizer quais eram as áreas que deveriam ser adicionadas ou subtraídas, para se obter a integral $\int_a^b f(x)dx$.

Para Cauchy, uma definição é necessária; pois, com ela, surge o interesse pelo rigor que é a característica da matemática moderna. Cauchy define, mais ou menos como fazemos hoje, as funções contínuas e as integrais destas funções. Para chegar à integral de $f(x)$, ele precisou formar as somas (Fig. 1)

$$S = \sum f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)\,, \qquad (1)$$

que os agrimensores e os matemáticos, de todos os séculos, têm usado para o 55
cálculo aproximado de áreas e, então, deduzir a integral $\int_a^b f(x)dx$ pela passagem ao limite.

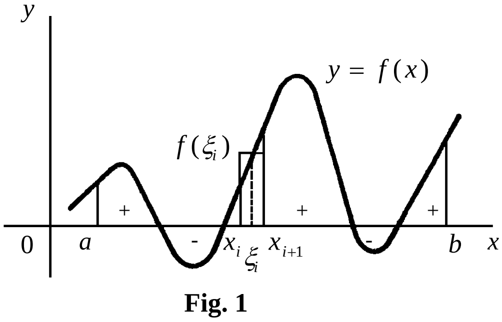


Fig. 1

Apesar da legitimidade de tal passagem ao limite ser evidente para quem pensava em termos de área, Cauchy precisou demonstrar que os S tendem a um limite, nas condições por ele consideradas. Uma necessidade similar impõe-se, toda vez que se substitui uma noção experimental por uma definição puramente lógica.

Deve-se acrescentar que o interesse do objeto definido não é mais evidente e só pode emergir do estudo das propriedades deste objeto. Este é o preço do progresso lógico.

O que Cauchy fez é tão substancial que tem uma amplitude, de algum modo, filosófica. Diz-se, freqüentemente, que Descartes reduziu a geometria à álgebra. Eu diria, de bom grado, que pelo uso das coordenadas ele reduziu todas as geometrias à geometria da reta e que esta, nos dando as noções de continuidade e número irracional, permitiu à álgebra atingir toda sua extensão atual.

Para conseguir reduzir todas as geometrias à reta, era necessário eliminar um certo número de noções relativas às geometrias de várias dimensões, tais como o comprimento de uma curva, a área de uma superfície, o volume de um corpo. O progresso realizado por Cauchy está, precisamente, aqui. Depois dele, para completar a aritmetização da matemática, foi suficiente que os Aritméticos construíssem o contínuo linear, com a ajuda do número inteiro.

E agora, devemos nos limitar a Análise? Não. Certamente, tudo o que faremos, poderá se traduzir na linguagem aritmética, mas se renunciarmos aos pontos de vista diretos geométricos e intuitivos, e se nos reduzirmos à pura lógica, que não permite escolher entre tudo o que é correto, dificilmente, pensaríamos em muitas questões e, algumas noções – muitas das quais examinaremos hoje em dia, por exemplo – nos escapariam completamente.

Por muito tempo, se tem integrado algumas funções descontínuas. A 56
definição de Cauchy aplicava-se ainda a essas integrais; também, foi natural pesquisar, como o fez Riemann, o alcance exato dessa definição.

Se $\underline{f_i}$ e $\overline{f_i}$ designam os limites inferior e superior de $f(x)$ em (x_i, x_{i+1}), S está compreendida entre

$$\underline{S} = \sum \underline{f_i}(x_{i+1} - x_i) \text{ e } \overline{S} = \sum \overline{f_i}(x_{i+1} - x_i).$$

Riemann mostra que é suficiente que

$$\overline{S} - \underline{S} = \sum \left(\overline{f_i} - \underline{f_i}\right)(x_{i+1} - x_i)$$

tenda a zero, para uma seqüência particular de divisões de (ab) em intervalos (x_i, x_{i+1}) cada vez menores, para que a definição de Cauchy possa ser usada. Darboux acrescenta que as habituais passagens ao limite, efetuadas sobre $\underline{S}$ e $\overline{S}$, dão sempre dois números determinados $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ e $\overline{\int_a^b} f(x)dx$; em geral, diferentes e iguais, somente, quando a integral de Cauchy-Riemann existe.

Do ponto de vista lógico, essas definições são muito naturais, não são? Contudo, podemos dizer que elas não têm praticamente servido a nada. A de Riemann, em particular, tem a desvantagem de se aplicar apenas raramente e, num certo sentido, por acaso.

É que de fato, é bem evidente que a partição de (a,b) em intervalos (x_i, x_{i+1}) cada vez menores, faz as diferenças $\overline{f_i} - \underline{f_i}$ cada vez menores se $f(x)$ for contínua e, em virtude da própria continuidade, é claro que essa partição fará, ainda, $\overline{S} - \underline{S}$ tender a zero, se houver apenas alguns pontos de descontinuidade. Mas, não temos nenhuma razão de esperar que será do mesmo modo para uma função descontínua em toda parte. Então, é claro, pegar intervalos (x_i, x_{i+1}) cada vez menores, isto é, valores de $f(x)$ relativos a valores de x cada vez mais próximos entre si, não garante de modo algum que peguemos valores de $f(x)$ com diferenças cada vez menores.

Deixem-nos ser guiados pelo objetivo a atingir: reunir, agrupar os valores 57
pouco diferentes de $f(x)$. É claro, então, que devemos subdividir, não mais (a,b), mas, o intervalo $(\underline{f}, \overline{f})$ limitado pelos limites inferior e superior de $f(x)$ em (a,b). Fazemos isso com a ajuda de números y_i, distantes entre si de um valor menor que ε; somos conduzidos, por exemplo, a considerar os valores de $f(x)$ definidos por

$$y_i \leq f(x) \leq y_{i+1}.$$

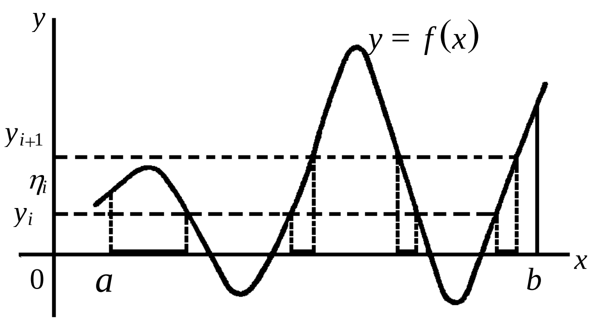


Fig 2

Os valores correspondentes de x formam um conjunto E_i. No caso da figura (2), este conjunto E_i é constituído por quatro intervalos; em algumas funções $f(x)$ contínuas, ele poderia ser formado por uma infinidade de intervalos; com uma função arbitrária, ele poderia ser muito complicado. Mas pouco importa. É este conjunto E_i que desempenha o papel análogo àquele do intervalo (x_i, x_{i+1}) na definição de integral de funções contínuas, pois, nos informa os valores de x que dão à $f(x)$ valores aproximadamente iguais.

Se η_i é um número qualquer compreendido entre y_i e y_{i+1},

$$y_i \leq \eta_i \leq y_{i+1},$$

os valores de $f(x)$, para os pontos de E_i, diferem de η_i menos de ε. O número
η_i vai representar o papel que $f(\xi_i)$ representaria na ***I*** fórmula (1). Quanto ao 58
papel do comprimento ou medida $x_{i+1} - x_i$, do intervalo (x_i, x_{i+1}), ele será representado por uma medida $m(E_i)$, que atribuiremos, no momento, ao conjunto E_i. Formamos, assim, a soma:

$$S = \sum \eta_i m(E_i) \qquad (2)$$

Mas, antes, vamos olhar com atenção o que acabamos de fazer e, para compreender melhor, repetimos isso em outros termos.

Os geômetras do século XVII consideravam a integral de $f(x)$ – a palavra "integral" não havia, ainda, sido inventada, mas pouco importa – como a soma de uma infinidade de indivisíveis, em que cada um era a ordenada, positiva ou negativa, de $f(x)$. Muito bem! Estamos, simplesmente, agrupando os indivisíveis de grandezas comparáveis; Estamos, como se diz em álgebra, fazendo a reunião, a redução dos termos similares. Podemos dizer, ainda, que com o procedimento de

Riemann, tentar-se-ia somar os indivisíveis, pegando-os na ordem em que eles eram fornecidos pela variação de x; operar-se-ia, portanto, como o faria um comerciante sem método, que contaria moedas e notas ao acaso da ordem em que elas lhes chegavam à mão; enquanto nós operamos como o comerciante metódico que diz:

eu tenho $m(E_i)$ moedas de 1 coroa valendo $1m(E_1)$,

eu tenho $m(E_2)$ moedas de 2 coroas valendo $2m(E_2)$,

eu tenho $m(E_3)$ notas de 5 coroas valendo $5m(E_3)$,

etc., tenho, portanto, ao todo:

$$S = 1m(E_1) + 2m(E_2) + 5m(E_3) + ...$$

Os dois procedimentos conduzirão, certamente, o comerciante ao mesmo resultado porque, por mais rico que seja, ele apenas tem um número finito de notas para contar; mas, para nós, que estamos a adicionar uma infinidade de indivisíveis, a diferença entre os dois métodos é fundamental.

Vamos, agora, considerar a definição do número $m(E_i)$ atribuído a E_i. A
analogia entre essa medida e um ***//*** comprimento ou, até mesmo, um número de 59
notas, conduzir-nos-ia, naturalmente, a dizer que, no exemplo da Fig.2, $m(E_i)$ será a soma dos comprimentos dos quatro intervalos que constituem E_i, e que, em um exemplo, onde E_i seria formado de uma infinidade de intervalos, $m(E_i)$ seria a soma dos comprimentos de todos esses intervalos. No caso geral, seríamos levados a proceder, como se segue: encerramos E_i em um número finito ou infinito enumerável de intervalos; sejam $l_1, l_2, ...$ os comprimentos desses intervalos. Desejaríamos, evidentemente, que se tivesse:

$$m(E_i) \leq l_1 + l_2 + ...$$

Se procurarmos o limite inferior do segundo membro, para todos os sistemas possíveis de intervalos podendo servir para cobrir E_i, este limite será, portanto, um limite superior de $m(E_i)$. Por esta razão, representamo-lo por $\overline{m(E_i)}$ e temos:

$$m(E_i) < m(E_i) \qquad (3)$$

Se C é o conjunto dos pontos de (a,b) que não fazem parte de E_i, temos, do mesmo modo:

$$m(C) \leq \overline{m(C)}.$$

No entanto, desejamos ter:

$$m(E_i) + m(C) = m[(a,b)] = b - a\,;$$

portanto, deveremos ter

$$m(E_i) \geq b - a - \overline{m(C)} \qquad (4)$$

As desigualdades (3) e (4) dão, portanto, os limites superior e inferior de $m(E_i)$. Vemos, facilmente, que essas duas desigualdades nunca são contraditórias. Quando os limites inferior e superior de E_i são iguais, $m(E_i)$ está definida, dizemos, então, que E_i é mensurável[1].

Uma função $f(x)$ para a qual os conjuntos E_i são mensuráveis, quaisquer 60
que sejam os y_i, é dita mensurável. Para uma tal função, a fórmula (2) define uma soma S. Demonstra-se, facilmente, que quando se faz variar a escolha dos y_i, de modo que ε tende para zero, os S tendem a um limite determinado que é, por definição, $\int_a^b f(x)dx$ [2].

Esta primeira extensão da noção de integral definida leva a muitas outras. Supondo que se trate de integrar uma função $f(x,y)$ de duas variáveis, procedemos exatamente como antes: associar-lhes-emos conjuntos E_i que serão, agora, conjuntos de pontos em um plano e não mais de pontos sobre reta. A estes conjuntos devemos, agora, atribuir uma medida plana, e esta medida será deduzida da área de retângulos

$$\alpha \le x \le \beta \quad ; \quad \gamma \le y \le \delta \,,$$

exatamente, da mesma maneira que a medida linear deduzia-se do comprimento dos intervalos. Uma vez definida esta medida, a equação (2) dará as somas S a partir da qual se deduziria a integral por uma passagem ao limite.

A definição que consideramos, estende-se, portanto, imediatamente, às funções de várias variáveis. Aqui está uma outra extensão que se aplicaria igualmente, independente do número de variáveis, mas que eu exponho somente o caso onde se trata de integrar $f(x)$ em (a,b).

Eu disse que se tratava, então, de fazer a soma de indivisíveis representados pelas diversas ordenadas dos pontos x, $y = f(x)$. Anteriormente, agrupamos estes indivisíveis, segundo suas grandezas. Agora, nos limitamos a agrupá-los **//** segundo 61
seu sinal. Teremos de considerar o conjunto E_p dos pontos no plano, cujas ordenadas são positivas, e o conjunto E_p dos pontos cujas ordenadas são negativas, E_n. Para o caso simples, em que $f(x)$ é contínua, já antes de Cauchy se escrevia como mencionei no início:

$$\int_a^b f(x)dx = \text{área}\left(E_p\right) - \text{área}\left(E_n\right);$$

isto nos leva a afirmar que:

$$\int_a^b f(x)dx = m_s\left(E_p\right) - m_s\left(E_n\right);$$

m_s designando uma medida plana. Esta nova definição é equivalente à precedente. Ela nos remete ao método intuitivo anterior a Cauchy, mas a definição de medida deu-lhe uma sólida fundamentação lógica.

Sabemos, portanto, de duas maneiras, definir a integral de uma função de uma ou várias variáveis e isto sem ter de considerar a forma mais ou menos complicada do domínio de integração, pois o domínio D interfere apenas nisso: os conjuntos E_i, em nossa primeira definição, os conjuntos E_p e E_n, na segunda, eram formados pegando valores da função f somente para pontos do domínio D.

Desde que a escolha do domínio de integração D intervém, apenas, na formação de E_i, ou de E_p e E_n, é claro que poderíamos, da maneira que bem convir, formar os conjuntos E_i, E_p e E_n levando em conta apenas os valores tomados para f em pontos de um conjunto E dado e, teríamos, assim, definida a integral de f estendida ao conjunto E.

Para precisar o alcance dessa nova extensão da noção de integral, recordamos que nossas definições exigem que f seja mensurável; isto é, que os E_i sejam mensuráveis para a primeira definição e que E_p e E_n o sejam para a segunda, isto requer que E seja, também, mensurável. Portanto, sabemos definir a integral estendida a um conjunto mensurável de uma função mensurável nesse conjunto e limitada. Tenho, de fato, suposto implicitamente, até aqui, que se trata de funções limitadas.

O que teria de ser mudado no primeiro modo de definição, se a função a 62
integrar não fosse limitada? O intervalo $\left(\underline{f}, \overline{f}\right)$ não mais seria finito. Seria necessário, portanto, uma infinidade de número y_i para dividi-lo em intervalos de comprimento no máximo igual a ε. Haveria, então, uma infinidade de conjuntos E_i, e a soma S da fórmula (2) seria, agora, uma série. Para não sermos parados, já no início, devemos supor que a série S é convergente para a primeira escolha de números y_i que devemos fazer. Agora, se S existe para uma escolha dos y_i, existe para todas as escolhas dos y_i e a definição de integral aplica-se sem modificações.

Demos o nome de funções somáveis a todas as funções que podemos integrar pelos procedimentos indicados, isto é, a todas as funções mensuráveis para as quais a soma S tem um sentido. Toda função mensurável limitada é somável e como não tivemos sucesso, até aqui, para nomear uma função não mensurável, podemos dizer que, até aqui, praticamente toda função limitada tem uma integral. Ao contrário, existem funções não-limitadas muito simples que não são somáveis; também, não devemos nos surpreender que nossa noção de integral seja, ainda, insuficiente em certas questões.

Estendemos a noção de integral a funções não-limitadas, partindo da primeira de nossas definições; a segunda conduz ao mesmo resultado. Mas é necessário, para isso, ampliar a noção de medida, de modo que ela se aplique não somente aos conjuntos limitados que temos considerado até agora, mas também aos conjuntos de pontos que se estendem até o infinito. Menciono esta maneira de procedimento só porque está relacionada com outra extensão de integral em que o intervalo (domínio, ou seja, o conjunto sobre o qual a integral é tratada), não é mais suposto finito como fizemos, até aqui, mas pode ir para o infinito.

Limito-me a esta indicação, porque não discutirei esta outra extensão da noção de integral, no que segue. Por essa mesma razão, que me contento mencionando, brevemente, as pesquisas tão originais empreendidas por um jovem
homem morto na guerra, Sr. R. Gateaux, ***//*** que se empenhou em definir a operação 63
de integração para as funções de uma infinidade de variáveis. Esta pesquisa, que foi prolongada pelo Sr. Paul Lévy e pelo Sr. Norbert Wiener, não é sem conexão com os estudos axiomáticos empreendidos pelo Sr. M. Fréchet e pelo Sr. P. J. Daniell, com o propósito de estender a noção de integral aos conjuntos abstratos[3]. O Sr. Frechet e o Sr. Daniell não propuseram, somente, aplicar a definição que mencionei aos conjuntos abstratos, mas consideraram também outra extensão da integral definida, que nos conduzirá rapidamente a noção de integral indefinida, que examinaremos agora.

Chamamos, ordinariamente, integral indefinida de uma função $f(x)$, a função $F(x)$ definida por:

$$F(x) = C + \int_a^x f(t)dt \; . \qquad (5)$$

Não conservamos esta denominação e damos novamente às palavras "integral indefinida" seu sentido primitivo. Primitivamente, as duas denominações "integral definida" e "integral indefinida" aplicavam-se à mesma expressão $\int_a^b f(x)dx$. Mas, a integral era dita definida quando se tratava de um intervalo (a,b) dado, determinado, definido e a integral era indefinida quando (a,b) era variável, não delimitado e não definido, ou ainda, se desejamos, indefinido.

É, em resumo, por um real abuso de linguagem que se chama $F(x)$ a integral indefinida de $f(x)$. Se notarmos, além disso, que quando se estuda $F(x)$ é, sempre, para obter propriedades de $\int_a^b f(x)dx$, que é no fundo $\int_a^b f(x)dx$ que se estuda por meio de $F(x)$, seremos conduzidos a dizer: chamo integral indefinida de $f(x)$ a função $\phi(a,b)$

$$\phi(a,b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \; . \qquad (5')$$ 64

Existe entre uma integral indefinida e a integral definida, correspondente, as mesmas relações e as mesmas diferenças que, entre uma função e um valor particular pego para essa função. De resto, se representássemos por D o intervalo (a,b) de integração, poderíamos dizer que a integral indefinida é uma função, cujo argumento é o domínio D,

$$\Psi(D) = \phi(a,b) \, .$$

Dessas reflexões, resulta claramente que, relativamente a uma função de duas variáveis, $f(x,y)$, não se deve pegar por integral indefinida, como se tem feito, algumas vezes, a função

$$F(X,Y) = c_1(x) + c_2(y) + \int_\alpha^X \int_\beta^Y f(x,y)dxdy \; . \qquad (6)$$

Se nos limitássemos a considerar os domínios retangulares

$$a \le x \le b \, ; c \le y \le d \; ,$$

deveríamos tomar por integral indefinida a função de quatro variáveis

$$\phi(a,b;c,d) = F(b,d) + F(a,c) - F(a,d) - F(b,c) \, . \qquad (7)$$

Mas, desde que o domínio mais geral não possa ser determinado por um número finito de parâmetros, se queremos considerar todos os domínios de integração, devemos renunciar às funções ordinárias para representar a correspondência entre um domínio D e a integral estendida a esse domínio e estudar diretamente a função

$$\psi(D) = \int\int_D f(x,y)dxdy,$$

cujo argumento D é um domínio. É esta função que chamaremos de integral indefinida de $f(x,y)$. Ou melhor, **//** desde que definimos, também, a integral de f 65
sobre um conjunto mensurável E, consideraremos a integral indefinida como uma função de conjunto, que seria definida para todos os conjuntos mensuráveis.[4]

Tudo o que foi dito até aqui, é somente uma questão de linguagem, de denominação, mas estas questões de denominação não surgiriam se não tivéssemos adquirido uma nova idéia. É por essa razão, que não devemos nos surpreender da nova linguagem permitir dar toda a extensão possível aos fatos percebidos de início, por ocasião da função $F(x)$ da fórmula (5). Em particular, fomos bem-sucedidos ao caracterizar as funções de conjunto, que são integrais indefinidas, por duas propriedades: aditividade completa e continuidade absoluta.[5]

Quando uma função de conjunto $\psi(E)$ desfruta dessas duas propriedades, ela é a integral indefinida de uma função f que depende de 1,2,3,... variáveis, conforme os conjuntos E são formados de pontos de uma reta, de um plano, de um espaço ordinário, etc. Para se ter uma linguagem e uma notação uniforme, dizemos que f é uma função de ponto, $f(P)$, e escrevemos:

$$\psi(E) = \int_E f(P)dm(E). \qquad (8)$$

A função $f(P)$ está inteiramente determinada por $\psi(E)$, a não ser que se possa modificar f, aleatoriamente, nos pontos **//** de um conjunto arbitrário de 66
medida nula, sem que ela deixe de ter $\psi(E)$ por integral indefinida. Pode-se obter $f(P)$ a partir de $\psi(E)$, exceto para pontos de um conjunto de medida nula, pelo procedimento que segue:

Seja P o ponto no qual se deseja calcular f. Pegamos por domínio de integração Δ um intervalo de centro P, ou um círculo de centro P, ou uma esfera de centro P,... conforme se trate da reta, do plano ou do espaço,... e formamos a razão $\frac{\psi(\Delta)}{m(\Delta)}$. Então, fazemos Δ tender a zero, temos:

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{\psi(\Delta)}{m(\Delta)} = f(P). \qquad (9)$$

Este resultado generaliza o teorema clássico, segundo o qual, se $f(x)$ é contínua, a função $F(x)$ da fórmula (5) admite f por derivada. De fato, nosso procedimento de cálculo de $f(P)$ é uma espécie de diferenciação da função de conjunto $\psi(E)$.

Este modo de diferenciação tem sido considerado há muito tempo. Cauchy[6] usou o termo grandezas coexistentes para se referir a grandezas determinadas, ao mesmo tempo, isto é, para as mesmas condições. Se temos, por exemplo, um corpo não-homogêneo em composição e densidade e se consideramos um domínio D desse corpo, o volume de D, a sua massa de D, a quantidade de calor necessário para elevar de um grau de temperatura de D suposto isolado, são todas quantidades coexistentes. São funções $V(D)$, $M(D)$ e $Q(D)$ do domínio.

Não é por acidente que chegamos agora às funções de domínio. Pensando nisso, perceberemos, rapidamente, que toda grandeza física é relativa não a um ponto, mas a um corpo estendido, que é uma função do domínio; ao menos na medida em que elas são grandezas diretamente mensuráveis. O corpo a ser considerado não será, contudo, sempre um corpo do nosso espaço experimental,

este poderá ser um corpo do espaço de concepção puramente matemática se, na determinação da grandeza considerável, intervieram // variáveis não espaciais, 67
como o tempo, a temperatura, etc. Mas pouco importa. As grandezas diretamente mensuráveis, uma massa, uma quantidade de calor, uma quantidade de eletricidade, por exemplo, são funções de domínio e não funções de pontos.

Entretanto, a física considera, também, as grandezas associadas a pontos, como uma velocidade, uma pressão, uma densidade, um calor específico. Mas estas são grandezas derivadas e que definimos justamente o mais freqüentemente pela razão ou limite da razão de duas grandezas coexistentes, como por exemplo:

$$\text{densidade}=\frac{massa}{volume}, \qquad \text{calor específico}=\frac{quantidade\ \ de\ calor}{massa},$$

quer dizer, tomamos a derivada de uma grandeza com relação a uma grandeza coexistente.

Assim, a física e, em conseqüência, a geometria conduzem à consideração das funções de domínio e à sua diferenciação, tal como faz a análise de funções de variáveis reais. Mesmo as funções de domínio, num certo sentido, têm em física um papel mais básico que as funções de ponto; porque, então, os físicos não falam dessas funções? Porque os matemáticos não as têm, ainda, estudado e porque a álgebra não tem notação nem para os domínios, nem para as funções de domínio. Portanto, vê-se o físico se limitar a considerar os domínios especiais dependentes, somente, de alguns parâmetros, de modo que a função de domínio a considerar se reduz a uma função de parâmetros; é, exatamente, isso que faz o matemático quando, em vez de considerar a integral definida de $f(x,y)$ em toda sua generalidade, ele se limita em considerar as funções $F(x,y)$, $\phi(a,b;c,d)$ das fórmulas (16) e (17).

Observamos, aliás, que a fórmula (8) estabelece uma ligação entre as funções de conjunto $\psi(E)$, que são integrais indefinidas e as funções de ponto $f(P)$, que são representáveis na álgebra. Esta fórmula (8) fornece, portanto, um modo de notação de algumas funções de conjuntos. Agora, se examinamos as duas condições requeridas para que uma função tenha uma integral indefinida, não podemos duvidar que as grandezas // da física estão entre as funções de conjunto, 68
suscetíveis de serem indicadas por esta notação.

Estas reflexões, sobre a natureza das grandezas da físicas, podem tê-lo habilitado a compreender, mais precisamente, o interesse e o alcance das noções que temos discutido. Elas mostram, em particular, que a operação da diferenciação que aparece na fórmula (9), não é a única a ser considerada. Poderia-se, sempre considerar a diferenciação de uma função $\psi(E)$ referente a uma função coexistente $p(E)$, que tem ou não a medida $m(E)$.

Uma questão vem, então, imediatamente à mente: pode-se, também, substituir a função $m(E)$ por uma função dada $p(E)$ na definição de integral? Não há nisso nenhuma dificuldade; substituímos, de início, a equação (2) por

$$S=\sum \mu_i p(E_i),$$

que exigirá, de início que os conjuntos E_i pertençam à família daquelas para as quais a função $p(E)$ está definida – isto é, que a função a integrar deve ser mensurável em relação a $p(E)$ –, depois, que a série S seja convergente – isto é, que f deve ser somável em relação a $p(E)$. Isto sendo suposto, a definição da integral de $f(P)$ com relação a $p(E)$,

$$\int f(P)dp(E),$$

será definida como antes, se a função $p(E)$ possui uma certa propriedade que se exprime dizendo que $p(E)$ deve ser de variação limitada[7].

Vamos chegar a uma nova e mais substancial extensão, da noção de 69
integral, do ponto de vista formal de um matemático. O ponto de vista do físico conduz, mais naturalmente, ao mesmo resultado, ao menos no que concerne as funções $f(P)$ contínuas. Poderia até mesmo dizer que os físicos nunca consideram algo, além das integrações, com respeito às funções de domínio.

Suponhamos, por exemplo, que se queira calcular a quantidade de calor, $\varphi(D)$, necessária para elevar de 1^0 a temperatura do corpo D do qual falamos acima. É necessário dividir D em pequenas corpos parciais D_1, D_2, ..., de massa $M(D_1)$, $M(D_2)$, ..., pegamos em cada um deles um ponto P_1, P_2, ..., e para tomar valor aproximado de $\varphi(D)$ a soma

$$f(P_1).\,M(D_1) + f(P_2).\,M(D_2) + \ldots,$$

onde $f(P)$ representa o calor específico de P. Isto é, calcularemos $\varphi(D)$ pela fórmula

$$\varphi(D) = \int_D f(P)dM(E).$$

Na sua forma geral, a nova integral foi definida somente em 1913, pelo Sr. Radon. Ela era, entretanto, conhecida desde 1894 para o caso particular de uma função contínua de uma única variável. Mas seu primeiro inventor, Stieltjès, foi conduzido pelas pesquisas de análise e de aritmética e a representou de uma forma puramente analítica, mascarava seu significado físico; de forma que foi necessário
muito esforço para compreender e **//** reconhecer o que é agora evidente. A história 70
desses esforços incluiria os nomes de F. Riesz, H. Lebesgue, W. H. Young, M. Fréchet e C. de La Vallée-Poussin. Este fato mostra que fomos concorrentes em genialidade, em perspicácia, mas também em cegueira.[8]

No entanto, os matemáticos sempre consideraram as integrais do tipo Stieltjes-Radon. A integral curvilínea $\int_C f(x,y)dx$ é uma dessas integrais, relativa a uma função $p(E)$ definida com base no comprimento da projeção sobre o eixo ox de arcos de C. A integral $\int\int_S f(x,y,z)dxdy$, da mesma maneira, envolve uma função de conjunto definida em termos das áreas de S projetadas sobre o plano oxy.

Na verdade, essas integrais apresentam-se, muito freqüentemente, grupadas

$$\int_c f(x,y)dx + g(x,y)dy,$$

$$\int\int_S f(x,y,z)dxdy + g(x,y,z)dydz + h(x,y,z)dzdx.$$

Se pensamos, também, nas integrais consideradas para a definição de comprimentos de curvas ou de áreas de superfícies,

$$\int_C \left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right]^{1/2}, \qquad \iint_S \left[(dxdy)^2 + (dydz)^2 + (dzdx)^2\right]^{1/2},$$

seremos conduzidos a dizer que seria conveniente, também, estudar modos de integração nos quais apareceriam várias funções de conjunto $p_1(E)$, $p_2(E)$, ... este estudo está inteiramente para o futuro. O Sr. M. Hellinger e Toeplitz têm, contudo, utilizado alguns somas com relação a várias funções de conjuntos.[9]

Consideramos, até aqui, a integração, definida ou indefinida, como uma operação fornecendo um número, definido ou variável, por uma tipo de adição generalizada. Pegamos o ponto de vista das quadraturas. Mas, podemos, também, considerar a integração de uma função contínua como fornecendo uma função, como a mais simples das equações diferenciais. Este é o ponto de vista das funções primitivas que vamos, agora, considerar. 71

Pesquisar a função primitiva $F(x)$ de uma função dada $f(x)$ é procurar a função determinada por uma constante aditiva, quando ela existe, que tem $f(x)$ por derivada. Este é o problema que vamos estudar.

Mas, antes, observamos que as reflexões procedentes conduzem a formular o problema de uma maneira muito mais geral: dada uma função $f(P)$ que é a derivada em relação à função conhecida $p(E)$ de uma função desconhecida $\psi(E)$, calcular a função primitiva $\psi(E)$ de $f(P)$.

Se, por exemplo, trata-se de uma função contínua $f(x)$ e se $m(E)$ é a medida, a função primitiva não seria mais a função $F(x)$ da equação (5), mas a integral indefinida

$$\int_E f(x)dx.$$

Posso, apenas, mencionar esse problema geral, que ainda não foi estudado. Eu me limito a observar que a integral Stieltjès é completamente insuficiente para esta solução. De fato, esta integral é bem definida apenas sob a hipótese de que $p(E)$ é de variação limitada e podemos muito bem falar de derivada com relação a uma função $p(E)$ de variação não-limitada.

A teoria das funções somáveis fornece esse resultado, relativo ao caso em que $p(E)$ é a medida $m(E)$: quando a derivada $f(P)$ é somável, a função antiderivada de f é uma de suas funções primitivas. Eu disse uma de suas funções primitivas, porque não sabemos ainda muito bem, como deve ser posto este problema geral das funções primitivas para que ele seja determinado.[10]

Deixamos de lado estas questões – nas quais eu tenho falado só para indicar quanto resta para ser feito – e mostramos o quanto tem sido feito na busca da função primitiva $F(x)$ de $f(x)$, graças a Arnaud Denjoy. 72

Eu disse que, quando $f(x)$ é somável, a integração fornece $F(x)$ pela fórmula (5). Supomos que, em (a,b), $f(x)$ deixe de ser somável apenas no ponto *c*. Neste caso, a integração nos fornece $F(x)$ em $(a,c-\varepsilon)$, para ε arbitrariamente pequeno, portanto, em todo (a,c); ela também fornece $F(x)$ em $(c+\varepsilon,b)$ e, portanto, em todo (c,b). E, considerando a continuidade de $F(x)$ no ponto *c*, temos $F(x)$ em todo (a,b). Por tais considerações de continuidade[11], observamos que conhecemos $F(x)$ em todo intervalo que não contém nenhum ponto de um conjunto

E nem em seu interior nem em suas extremidades, por uma operação que designarei por A, deduziremos $F(x)$ em todo intervalo contíguo a E, isto é, em todo intervalo, tendo pontos extremos de E, porém não contendo pontos interiores em E.

Supomos, agora, que se conheça $F(x)$ nos intervalos (α,β) contíguos a um segmento E, que a soma $\sum\left[F(\beta)-F(\alpha)\right]$ seja convergente e que $f(x)$ seja somável sobre E[12]. Então, é suficiente dizer que a função primitiva deve resultar da contribuição de E e dessas dos intervalos contíguos a E, por ser levado à fórmula:

$$F(x)-F(a)=\left\{\int_E fdx+\sum\left[F(\beta)-F(\alpha)\right]\right\}_a^x,$$

a chave do segundo membro, indica que deve se utilizar **//** apenas pontos compreendidos entre a e x. Desta equação resulta, portanto, a determinação de $F(x)$, graças a uma operação a que designarei por B. 73

Os dois resultados precedentes indicam os pontos extremos aos quais eu cheguei em minha tese, e devo dizer que os indiquei apenas por uma oportunidade, por não ter idéia da relevância que seria dada por Denjoy.

Apoiando-se nos resultados do Sr. Baire e do Sr. Denjoy, mostro que se $f(x)$ é uma função derivada no intervalo (a,b), então:

1. Os pontos onde $f(x)$ não é somável, formam um conjunto E_1 não-denso em (a,b). Uma operação O_1 do tipo A, determina $F(x)$ nos intervalos contíguos a E_1.
2. Por isso, existe um conjunto E_2, formado de pontos de E_1 e não-denso sobre E_1, em cujos intervalos contíguos pode-se calcular $F(x)$ por uma operação O_2 do tipo B.
3. Por conseguinte, existe um conjunto E_3 formado de pontos de E_2 e não denso dobre E_2, em cujos intervalos contíguos pode-se calcular $F(x)$ por uma operação O_3 do tipo B. ...

Se, depois da seqüência infinita de operações O_1, O_2, ... não se tenha, ainda, encontrado $F(x)$ em todo (a,b), os pontos de (a,b) que não são interiores aos intervalos nos quais se determina $F(x)$ formam um conjunto E_w, e uma operação do tipo A, a operação O_w fornece F nos intervalos contíguos a E_w. Considera-se, em seguida, se são necessárias as operações O_{w+1}, O_{w+2}, ... do tipo B, então, uma operação O_{2w} do tipo A, depois as operações do tipo B, etc.

O Sr. Denjoy, utilizando raciocínios, agora, clássicos de Cantor e Bendixson, prova que esse procedimento, finalmente, nos fornece $F(x)$ em todo (a,b), após finita ou uma infinidade enumerável de operações.

Este procedimento operatório, certamente complicado, mas da mesma maneira natural em seu princípio, quanto aqueles previamente considerados, foi chamado pelo Sr. Denjoy: a totalização.

A totalização resolve completamente o problema da pesquisa da função primitiva $F(x)$ de uma função dada $f(x)$. Ela permite, também, determinar $F(x)$ conhecendo **//** apenas um número derivado de $F(x)$ e não mais sua derivada. Não 74
falarei sobre esses bonitos resultados; o fato mais importante para nós é que a totalização, por um longo desvio, nos fornece uma extensão nova da noção de

integral definida. Todas as vezes, de fato, que a totalização for aplicada a uma função $f(x)$ e lhe fizer corresponder uma função $F(x)$, podemos associar à função $f(x)$ uma integral graças às fórmulas (5) e (5').

Senhores, faço uma pausa e agradeço por sua atenção; mas falta uma palavra de conclusão. Esta é uma generalização feita, não pelo vão prazer de generalizar, mas para resolver problemas existentes. As diversas aplicações que já têm admitido as noções que examinamos, provam de forma contundente a fecundidade dessa generalização.

---

[1] A definição de medida de conjuntos usada aqui é a de C. Jordan (*Cours d'analyse de l'École Polytechnique, Vol.I*); mas com esta modificação, essencial para nosso propósito: nós encerramos o conjunto E_i à medir em intervalos cujo número pode ser infinito, enquanto Jordan empregou somente um número finito. O uso de um número infinito enumerável, no lugar de um número inteiro de intervalos, foi sugerido pelos trabalhos de Borel, que, aliás, havia utilizado esta idéia para dar uma definição de medida (*Leçons sur la théorie des fonctions*).

[2] Comptes Rendus de Acad. des Sci. v.CXXIX, 1900.
Definições equivalentes a esta do texto foram apresentadas por diversos autores. As mais interessantes são dadas por W. H. Young (Philos. Trans. Da Royal. Soc. de London 1905; Proc. da London Math. Soc. 1910). Ver também, por exemplo, as notas de Borel e F. Riesz (Comptes Rendus. 1912).

[3] R. Gateaux. Bull. Soc, Math. de France; 1919.
P. Lévy. Leçons d'Analyse fonctionnelle; 1922.
N. Wiener. Proc. of the London Math, Soc. 1922.
M. Fréchet. Bull. Soc. Math. de France; 1915.
P. J. Daniell. Ann. of Math. 1918 et 1919.

[4] Annales Scientifiques de l'École normale supérieure. 1910.

[5] Estas denominações são dadas, respectivamente, por Valée-Poussin. (Integral de Lebesgue, Funções de conjuntos, Classes de Baire) e a G. Vitali (R. Acc. d. Sci. di Torino, 1908).
Uma função de conjunto mensurável $\psi(\mathrm{E})$ é completamente aditiva se, de uma maneira qualquer que se divide E em conjuntos mensuráveis E_1, E_2, ..., em número finito ou enumerável e sem pontos comuns dois a dois, tem-se: $\psi(E) = \psi(E_1) + \psi(E_2) + \ldots$.
Uma função de conjunto mensurável $\psi(E)$ é absolutamente contínua se, quando E varia de tal modo que $m(E)$ tende a zero, $\psi(E)$ também tende a zero.

[6] Exercices d'analyse et de physique mathématique, v. 2, p. 188-229.

[7] $p(E)$ é dita de variação limitada se, de qualquer maneira que se subdivida E em uma infinidade enumerável de conjuntos disjuntos $E_1, E_2, \ldots$, a série $\sum |p(E_i)|$ é convergente.
A noção de função de variação limitada foi introduzida primeiro por C. Jordan; ela é, então, relativa às funções de uma variável.
As únicas funções de conjunto $p(E)$ a considerar, nestas teorias, são as funções aditivas, isto é, aquelas para as quais se tem $p(E_1 + E_2 + \ldots) = p(E_1) + p(E_2) + \ldots$, com os $E_1, E_2, \ldots$ sendo disjuntos dois a dois. Se a aditividade é completa, isto é, se a seqüência dos $E_1, E_2, \ldots$ pode ser tomada indefinida, $p(E)$ é necessariamente de variação limitada. De fato, a ordem dos conjuntos $E_1, E_2, \ldots$ sendo indiferente, a série $p(E_1) + p(E_2) + \ldots$ deve permanecer convergente independente da ordem, ou seja, que a série $\sum |p(E_i)|$ é convergente.
Até agora, nenhum ensaio tem sido feito para eliminar a condição: $p(E)$ é de variação limitada. É necessário, aliás, observar que, se $p(E)$ não é de variação limitada, poderia-se encontrar uma função $f(P)$ que seja contínua e para a qual nossa definição de integral não se aplicaria.

[8] J. Radon. Sitz. d Kais. Ak. de Wiss. in Vienna. Bd. 122. Abt. IIa. 1913.
T. J. Stieltjès, Ann. d. l. Fac. Sci. d. Toulouse. 1894.
F. Riesz, Comptes Rendus de l'Acad. des Sci., 1909.
H. Lebesasgue. – id - , 1910.
W. H. Young. Proc. of the London Math. Soc., 1913.
M. Fréchet, Nouv. Ann. des Math., 1909.
Ch. de la Vallée-Poussin. Ver por exemplo, seu livro já citado.

[9] Ver, por exemplo, Journal de Crelle, Bd. 144.

[10] Ver as notas por Fubini e de Vitali publicadas em 1915, 1916 nas Atti de l'Académie de Turin e da l'Académie des Lincei.

[11] É a introdução dessas condições de continuidade que distingue substancialmente o problema das funções primitivas originadas das quadraturas.

[12] É conveniente observar que essas hipóteses não são contraditórias, mesmo se E é suposto o conjunto de pontos onde $f(x)$ não é somável no intervalo (a,b) considerado. Para determinar os pontos de não somabilidade em (a,b) é necessário, de fato, tomar o valor de todos os pontos de (a,b), que pertençam a E ou não, considerando que a somabilidade sobre E é uma condição que envolve somente os pontos de E.